UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FLÁVIA CLEMENTE MARQUES

O USO DA LITERATURA JUVENIL NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO LIVRO *A CULPA É DAS ESTRELAS*

RIO DE JANEIRO
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FLÁVIA CLEMENTE MARQUES

O USO DA LITERATURA JUVENIL NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO LIVRO *A CULPA É DAS ESTRELAS*

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PEMAT – UFRJ) para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Janete Bolite Frant

RIO DE JANEIRO
2022

CIP - Catalogação na Publicação

C626u

Clemente Marques, Flávia
O uso da literatura juvenil do ensino de matemática: uma abordagem a partir do livro A culpa é das estrelas / Flávia Clemente Marques. -- Rio de Janeiro, 2023.
156 f.

Orientadora: Janete Bolite Frant.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2023.

1. Educação matemática. 2. Literatura juvenil. 3. Infinitos. 4. Interdisciplinaridade. I. Bolite Frant, Janete, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

O USO DA LITERATURA JUVENIL NO ENSINO DE MATEMÁTICA:
UMA ABORDAGEM A PARTIR DO LIVRO *A CULPA É DAS ESTRELAS*

FLÁVIA CLEMENTE MARQUES

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada em: ___/___/______

Banca examinadora:

____

Profª. Drª. Janete Bolite Frant (Orientadora)
Universidade Federal do Rio de Janeiro

____

Profª. Drª. Monica Rabello de Castro
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

____

Prof. Dr. Ulisses da Silva
Universidade Federal do Rio de Janeiro

AGRADECIMENTOS

Escrever esta dissertação foi um trabalho que acabou levando mais tempo do que eu esperava, já que devido à pandemia tudo aconteceu de maneira diferente do planejado. Se eu dissesse que foi um trabalho fácil e tranquilo, eu não estaria sendo justa com os fins de semana dedicados a ela ou com as vezes em que eu gritei pela casa que não aguentava mais. Conciliar trabalho em tempo integral com a vida acadêmica foi bastante difícil e cansativo, mas poder estar escrevendo esses agradecimentos – o que significa que a dissertação está pronta! – é muito gratificante. Esta pesquisa juntou dois universos que me encantam e estou muito feliz em poder ter estudado um pouco mais a fundo a literatura juvenil na matemática! Assim como qualquer trabalho longo e cansativo, minha jornada para dar à luz esta pesquisa contou com o apoio de gente muito querida – e paciente comigo – que definitivamente merece duas páginas de atenção!

Primeiramente, obrigada, Janete! Obrigada por topar embarcar nessa aventura e apoiar a minha ideia de usar a literatura juvenil, por toda ajuda aos fins de semana e feriados, e por fazer com que esta pesquisa ganhasse vida! Ter o apoio e a orientação de alguém tão experiente na área e com tanta vontade de sempre buscar por mais foi a base que eu precisava para fazer com que a pesquisa existisse! Demorou, mas saiu! Mais uma vez, muitíssimo obrigada!

À minha banca, Monica e Ulisses, obrigada por toda ajuda na qualificação e por estarem mais uma vez acreditando neste trabalho para que ele possa ganhar vida. As contribuições de vocês foram fundamentais e essenciais para que a pesquisa tomasse os rumos que tomou! É muito bom ter pessoas experientes ao nosso redor nos ajudando sempre a melhorar! Obrigada!

Às minhas amigas queridas que passaram os últimos quatro anos escutando que eu precisava escrever minha dissertação, obrigada pela paciência e pelos incentivos! Obrigada também pelas ajudas com as regras da ABNT nos momentos desesperados em que parecia que eu nunca conseguiria colocar as formatações certas e vocês me mostraram que era mais simples do que eu achava!

Falando em amigas, gostaria de deixar um agradecimento especial a você, Renata! Obrigada por ser minha dupla e minha parceira de UFRJ do início ao fim, da graduação ao mestrado. Obrigada pelas leituras compartilhadas, pelas piadas, pelos apoios e pelas trocas – tanto no âmbito acadêmico quanto fora dele. Ter você ao meu lado tornou todo o processo mais leve e divertido!

Aos colegas de mestrado da turma de 2019, obrigada por compartilhar essa aventura, pelas trocas, pelo apoio mútuo e pela companhia! Aos professores do PEMAT, um super obrigada! Tanto presencialmente quanto virtualmente, eu aprendi demais com vocês! Sem dúvidas, a melhor parte do meu mestrado foram nossas aulas e debates. A cada um que passou pelo meu caminho nesses quatro anos de PEMAT e me permitiu abrir os olhos para novos aprendizados, eu só tenho a agradecer!

Preciso, e muito, agradecer ao grupo de professores que toparam participar da pesquisa! Mantendo os pseudônimos que vocês mesmos escolheram, Annabeth, Eloise, Isabella, Helena, James e Julieta, esta dissertação não existiria sem vocês (e não é exagero)! Vocês embarcaram com vontade na minha ideia, dedicaram seu tempo aos nossos encontros e fizeram este trabalho existir de uma maneira muito melhor do que um dia eu imaginei ser possível! Obrigada por agregarem tanto a esta pesquisa, pelas contribuições incríveis e por me permitirem trazer um pouco dos nossos encontros para estas páginas! Um milhão de vezes (ou infinitas vezes, se quiserem) obrigada!

E por último e com certeza mais importante: obrigada pelo apoio, família!

Spike, obrigada pelos “lambeijos” de incentivo e pela companhia nos dias em que eu me tranquei no quarto e você veio deitar do meu lado – ou no meu colo – enquanto eu escrevia!

Pedro, obrigada por estar ao meu lado ao longo de todo esse processo, obrigada pelas ajudas ortográficas e pelos “acho que desse jeito fica melhor” quando eu te pedia socorro enquanto escrevia, e obrigada por sempre me apoiar e acreditar que eu posso fazer dar certo!

Vovô e vovó, obrigada por sempre apoiarem absolutamente tudo que eu fiz na vida! E vô, obrigada por perguntar vinte vezes no último ano “e aquele seu trabalho lá, entregou? Ainda não?”, porque você me lembrou constantemente que não era tão difícil quanto parecia, era “só entregar”!

Gus, Manu, mamãe e papai, obrigada por tudo, sempre. Por estarem comigo do início ao fim, não só dessa etapa da vida, como de todas elas. Obrigada por acreditarem em mim e sempre me incentivarem a correr atrás dos meus sonhos! Eu amo vocês demais e sem o apoio de vocês eu não estaria aqui, terminando o mestrado! Obrigada, obrigada, obrigada, obrigada!

RESUMO

Esta pesquisa tem o objetivo de compreender como a literatura juvenil pode ser utilizada como ferramenta alternativa para a aprendizagem de matemática, assim como identificar e analisar a matemática que emerge a partir das interações de professores com o livro *A culpa é das estrelas*. Nossa hipótese foi a de que utilizar a literatura juvenil como estratégia alternativa no ensino de matemática pode gerar mais interesse dos alunos pela disciplina, assim como facilitar sua compreensão do conteúdo estudado. Com a ideia de elaborar uma proposta interdisciplinar para o uso do livro *A culpa é das estrelas* nas aulas de matemática, por tratar de temas matemáticos pertinentes e pouco explorados, como o infinito, foram realizados encontros com professores de matemática e português para que fosse debatido o uso da literatura juvenil no ensino de matemática. Fundamentado no Modelo de Estratégia Argumentativa (CASTRO, FRANT, 2002) e tendo o Design Research (COBB et al., 2003) como metodologia, os encontros foram analisados e, a partir da análise das interações entre os professores participantes, apresentamos neste trabalho as inquietações e propostas para o uso da literatura na aula de matemática.

Palavras-chave: literatura juvenil; educação matemática; infinitos; interdisciplinaridade.

ABSTRACT

This research intends to understand how young adult literature can be used as an alternative tool to mathematics learning, such as identifying and analyzing the mathematics that emerges from the interaction between teachers and the book *The fault in our stars*. Our hypothesis was that using young adult literature as an alternative strategy in mathematics teaching can create more interest from the students in the subject, even as facilitating their comprehension of the matter that is being studied. From the idea of making an interdisciplinary proposal to the use of *The fault in our stars* in mathematics classes, for dealing with relevant and unexplored mathematics subjects, as infinity, meetings were done with mathematics and portuguese teachers, so that the use of young adult literature in mathematics learning would be discussed. Based on the Model of Argumentative Strategy (CASTRO; FRANT, 2002) and having Desing Research (COBB et al., 2003) as research methodology, the meetings were analyzed, and from the interactions analysis of the participating teachers, we present in this work their concerns and proposals for the use of literature in mathematics classes.

Keywords: young adult literature; mathematics education; infinity; interdisciplinarity.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesta pesquisa, foi estudado o uso da literatura juvenil como ferramenta para o ensino de matemática. Ao longo da revisão bibliográfica a que tivemos acesso, duas hipóteses que consideramos importantes foram destacadas e serão abordadas. A primeira, de que a leitura pode desempenhar um papel motivador, capaz de despertar o interesse dos alunos e possibilitar uma relação mais profunda do leitor com o assunto abordado nos textos. A segunda hipótese aborda como a utilização de livros alternativos ao livro didático no ensino de matemática pode incentivar o hábito de leitura nos alunos e apresentar uma visão diferenciada de novos conceitos ou até mesmo daqueles já vistos anteriormente. No capítulo seguinte, traremos a revisão bibliográfica que nos permitiu elaborar essas hipóteses.

De acordo com alguns autores, como Smole et al. (2007), o hábito da leitura estimula a compreensão de problemas e exercícios, tanto de matemática quanto de outros assuntos, além de incentivar a capacidade de reflexão e diálogo. Esse hábito também promove a ampliação do vocabulário, o que auxilia nos processos de escrita e comunicação dos alunos.

Meu interesse nesse tema surgiu ao perceber obras da literatura voltada para jovens que abordam tópicos matemáticos e poderiam ser utilizadas como material para introduzir conteúdos em sala de aula e desenvolver o interesse dos alunos pela matemática.

Existem livros juvenis que abordam a matemática, que é apresentada ou citada ao longo das histórias, sem a formalidade dos livros didáticos ou a intenção clara de ensinar algo, como os paradidáticos. São histórias ficcionais, de romance, ação, fantasia etc., que utilizam conteúdos matemáticos para resolver problemas ao longo do desenvolvimento de suas narrativas ou exemplificar algo que seja mencionado.

Para esta pesquisa, escolhi previamente os seguintes livros: *O Teorema Katherine* e *A culpa é das estrelas*, de John Green; *Aventuras de Alice no país das maravilhas* e *Através do espelho e o que Alice encontrou por lá*, de Lewis Carroll; *Fortaleza digital*, de Dan Brown; *A probabilidade estatística do amor à primeira vista*, de Jennifer E. Smith; *Amor fora do ar*, de Jessica Park e *O guia do mochileiro das galáxias*, de Douglas Adams. Todos esses livros falam sobre matemática em algum momento. Após a leitura detalhada de cada uma dessas obras, decidi que seria utilizado para esta pesquisa o livro *A culpa é das estrelas,* de John Green, por ser uma obra popular entre os adolescentes e por apresentar noções de matemática que não costumam ser aprofundadas em sala de aula e que consideramos que seriam interessantes de serem abordadas com os alunos.

Embora encontremos material sobre o uso da literatura na área de ciências no geral, especificamente para a matemática essa bibliografia é escassa. Ao perceber que quase não havia pesquisas sobre o assunto, achamos que seria importante e interessante um aprofundamento nesse tema.

Os objetivos deste trabalho são:

- Identificar e analisar a matemática que emerge a partir das interações de professores com o livro *A culpa é das estrelas* e a utilização da literatura juvenil como ferramenta para o ensino de matemática.
- Compreender como a literatura juvenil pode ou não ser utilizada como ferramenta alternativa para a aprendizagem de matemática.

Ao pesquisar sobre o uso da literatura juvenil no ensino de matemática, encontrei monografias, dissertações, artigos e livros que envolviam de alguma maneira o tema. A maior parte das obras encontradas tratava dos seguintes temas: o uso de livros paradidáticos de matemática; o uso da literatura infantil no ensino de matemática; o uso de textos alternativos no ensino de ciências; o uso da literatura no ensino de português. Encontrei cerca de três trabalhos que relacionam a literatura juvenil à educação matemática, dentre eles dois que estudavam especificamente as obras *Aventuras de Alice no País das Maravilhas* e *Através do espelho e o que Alice encontrou por lá*, de Lewis Carroll e *Alice no país dos números*, de Carlo Frabetti.

Utilizei principalmente, como material de pesquisa, as seguintes referências: “Era uma vez na matemática: uma conexão com a literatura infantil” (SMOLE et al., 2007); “Um olhar sobre o paradidático de matemática” (DALCIN, 2002); “O Uso de Textos Alternativos para o Ensino de Ciências e a Formação Inicial de Professores de Ciências” (CAMPOS, 2011); “Matemática e literatura infantil: sobre os limites e possibilidades de um desenho curricular interdisciplinar” (NEUENFELDT, 2006); “Uma visita ao universo matemático de Lewis Carroll e o (re)encontro com a sua lógica do nonsense” (TEIXEIRA, 2007), “Matemática no país da literatura: uma proposta didática com o livro ‘Alice no País dos Números’”, (ZWIERNIK, 2015); entre outros.

A introdução desta dissertação abordou as considerações iniciais sobre o tema e os objetivos da pesquisa.

O segundo capítulo apresenta a revisão bibliográfica e uma perspectiva teórica tanto do uso da literatura no ensino da matemática quanto das noções de infinito abordadas nos encontros realizados com os professores.

No terceiro capítulo apresentamos a metodologia utilizada, tanto na pesquisa quanto nos encontros, além de apresentar a realização dos encontros com os professores, que terá suas discussões e análises apresentadas no quarto capítulo.

Por fim, o quinto capítulo traz as considerações finais do trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E PERSPECTIVA TEÓRICA: MEA

2.1 A LITERATURA E O ENSINO DE MATEMÁTICA

A literatura é ferramenta importante no desenvolvimento da criança e do adolescente, uma vez que pode apresentar elementos da realidade do aluno de maneira articulada e simples como auxílio para compreensão de diversas questões de sua vida, tanto dentro quanto fora da escola (CAMPOS, 2011; SMOLE et al., 2007). Aproximar a matemática da linguagem literária é importante, uma vez que, segundo Smole et al. (2007), a leitura pode contribuir com diversos aspectos trabalhados no ensino de matemática, como por exemplo a compreensão de texto, elemento fundamental para a interpretação dos enunciados de problemas e questões matemáticas.

De acordo com Neuenfeldt (2006, p. 19), a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) aprovada em 1996 e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1998 flexibilizaram os conteúdos a serem vistos em sala de aula, permitindo assim uma maior integração curricular e interdisciplinaridade. A interdisciplinaridade é compreendida como a interação entre duas ou mais disciplinas, preservando os esquemas conceituais, a maneira de definir os problemas e os métodos de investigação de cada uma delas (ZABALA, 2002 apud NEUENFELDT, 2006, p. 22).

Segundo Japiassu (1994), a prática interdisciplinar consiste na interação dos pontos de vista de várias disciplinas. A interdisciplinaridade se baseia nas negociações entre diferentes pontos de vista, com o objetivo de decidir uma representação adequada do assunto que está sendo trabalhado. Japiassu defende que, para que seja aplicada a prática interdisciplinar, é necessário que os métodos, conceitos e conteúdos se complementem. O autor alega, ainda, que a interdisciplinaridade possui um objetivo utópico: a unidade do saber. Citando Prigogine (1979), Japiassu relaciona a interdisciplinaridade a um regente de orquestra: o responsável por unificar os saberes de diferentes áreas, e reforça que a interdisciplinaridade permite a abertura de um novo nível de comunicação entre as disciplinas.

Neuenfeldt (2006) ressalta que trabalhar interdisciplinarmente não significa abandonar as características específicas de cada área, mas sim conectá-las e compartilhá-las. Japiassu (1994) alega que a prática interdisciplinar é praticamente inexistente em nosso sistema educacional. Na teoria, a ideia de implementar a interdisciplinaridade em sala de aula é ótima e essencial, mas na prática essa interação normalmente não ocorre com tanta frequência quanto seria interessante, seja por falta de tempo, por dificuldade de conciliar os horários de diferentes disciplinas ou porque os currículos são estruturados de uma maneira que dificulta esse cruzamento entre as disciplinas. Pensando por esse lado interdisciplinar, buscamos então uma proposta de integração entre as disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa.

Smole et al. (2007, p. 3) defende que materiais – livros, por exemplo – que abordam noções matemáticas podem ser úteis na introdução desses conteúdos em sala de aula, de modo alternativo ao tradicional, sendo uma maneira desafiadora para que os alunos pensem sobre certas ideias matemáticas, uma vez que, em vez de aprender primeiro a matemática para depois aplicá-la em uma história, eles veem os dois ao mesmo tempo. De acordo com Smole et al. (2007), o uso da literatura no ensino de matemática permite que a matemática seja vista simultaneamente com a história lida, em vez de como dois elementos distintos, o que permite que as habilidades matemáticas e de linguagem se desenvolvam simultaneamente.

De acordo com Costa (2007), as competências essenciais da matemática e da língua portuguesa dependem umas das outras, uma vez que ambas estão relacionadas à capacidade de comunicação. Citando Lopes (1970), Costa afirma que tanto a lógica da linguagem quanto a lógica matemática tiveram suas origens juntas, logo é necessária a coexistência escolar dessas duas disciplinas.

A partir da conexão da matemática com a literatura, podemos incentivar a criatividade e a reflexão dos alunos, além de tornar o ensino de matemática mais leve e atrativo, já que a interdisciplinaridade com a literatura torna possível mostrar que a matemática está presente em diversas áreas do cotidiano (ZWIERNIK, 2015, p. 13). Por mais que as obras literárias propostas sejam ficcionais, elas abordam assuntos e elementos presentes na realidade, como brincadeiras, amizades, viagens, romances etc. Então, mesmo se tratando de histórias de ficção, podem ser relacionadas à vida dos alunos. Essa aproximação da literatura com o cotidiano dos adolescentes facilita a identificação da matemática presente nas histórias como algo mais palpável na realidade.

Em sua dissertação de mestrado, Andreia Dalcin (2002, p.11) define livros paradidáticos como aqueles que utilizam histórias ou narrativas ficcionais para abordar conteúdos que são vistos em sala de aula. Normalmente utilizam mais o texto escrito que a simbologia matemática e se aproveitam bastante da ilustração. Servem como instrumento de apoio aos livros didáticos e são escritos com o intuito de ensinar matemática de maneira lúdica, fugindo do padrão de aulas tradicional. Livros como “A Aritmética de Emília”, de Monteiro Lobato e “O Homem que Calculava”, de Malba Tahan, foram os precursores dos paradidáticos de matemática no Brasil.

Os livros paradidáticos não são os únicos materiais que podem ser utilizados para relacionar a matemática à literatura. Há livros que não têm como objetivo principal serem utilizados em sala de aula, mas possuem matemática em suas narrativas (MONTOITO, 2011 apud ZWIERNIK, 2015, p. 19). Esse tipo de literatura, que envolve matemática, mas não possui o objetivo de ser um livro voltado ao ensino de matemática, será o foco desta pesquisa.

Devemos primeiramente considerar as diferenças entre a matemática do professor e a matemática do matemático acadêmico. O saber matemático necessário para um professor não é o mesmo que aquele utilizado por um bacharel em matemática (SHULMAN, 1986).

O professor necessita de um conhecimento da matemática enquanto prática social, da matemática escolar e das múltiplas matemáticas presentes no cotidiano, para que possa desenvolver em sala de aula uma matemática que faça sentido aos alunos. O papel social da matemática é importante e cabe ao professor saber sua epistemologia e história, sua linguagem e sua dimensão político-pedagógica para que possa utilizar a matemática como instrumento de leitura e intervenção social (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013). Tendo isso em vista, investigaremos e analisaremos as interações de professores de matemática com a literatura durante os encontros realizados.

Tanto Dalcin (2002) e Campos (2011), em suas dissertações, quanto Smole et al. (2007), em seu livro, reforçam a ideia de que a linguagem puramente matemática é distinta da linguagem matemática utilizada por livros didáticos, que, por sua vez, é distinta da linguagem literária.

O texto matemático é aquele com poucas palavras, muitos símbolos e que possui um certo rigor com as regras relacionadas aos modelos axiomáticos (DALCIN, 2002, p. 59).

> Uma função é uma relação $\phi: X \rightarrow Y$ que, para cada elemento $x \in X$, faz corresponder um único elemento $y \in Y$. (GIRALDO, s.d.)[1]

Os livros didáticos se utilizam de uma linguagem por vezes mais formal, voltada para a educação, um discurso acadêmico e didático, com o objetivo de embasar a prática docente (CAMPOS, 2011, p. 23). Entretanto, nem sempre essa linguagem apresentada nos livros é fácil para a compreensão dos alunos, muitas vezes seguindo o rigor da linguagem matemática e não se preocupando tanto em garantir que os alunos entendam com clareza o que está sendo apresentado.

> Uma função é um caso particular de relação, conforme a definição a seguir. Dados dois conjuntos, A e B, chama-se **função** de A em B qualquer relação com estas características:
>
> - todos os elementos de A estão associados aos elementos de B;
> - a cada elemento de A associa-se um único elemento de B. (SILVEIRA; MARQUES, 2013, p.98)

Já a linguagem literária, de acordo com Lopes (2010), é aquela que se ocupa da palavra escrita e envolve dimensões socioculturais, históricas e estéticas. É um discurso dirigido a uma audiência – os leitores – e que apresenta basicamente dois valores fundamentais: o semântico (sentido) e o formal (a linguagem). Os textos literários são ficcionais e fortemente conotativos, estimulando o pensamento e a imaginação do leitor. Segundo Umberto Eco (1991), citado por Lopes (2010, p. 7), nas obras literárias o leitor é capaz de integrar formas e sentidos em aberto, ou seja, essas obras são textos abertos a interpretações distintas. De acordo com Kaufman e Rodriguez (1995, p. 20), conforme citado por Campos (2011, p. 27), textos literários são aqueles que priorizam a mensagem pela própria mensagem, que permitem ao leitor desenvolver as virtualidades da linguagem.

> Uma função é como uma máquina que transforma um número em outro. É uma regra para um jogo bem simples: eu lhe dou um número qualquer e você, de acordo com essa regra, me dá outro número. Por exemplo, se a regra da função for “Pegue um número e multiplique-o por ele mesmo (ou seja, eleve-o ao quadrado)”, a nossa conversa seria assim:
>
> EU: 1
>
> VOCÊ: 1
>
> EU: 2

[1] Notas de aula do professor Victor Giraldo para a disciplina de Análise Real do curso de mestrado do PEMAT – UFRJ.

VOCÊ: 4 (GREEN, 2006, p. 292)

É fundamental que o aluno tenha contato com a literatura, pois ela é importante para estimular a imaginação e a criatividade e para estabelecer uma relação entre o que é visto nas aulas e o seu cotidiano (ZWIERNIK, 2015, p. 13). A literatura não costuma ter espaço nas aulas de matemática, o que causa aos alunos dificuldades na compreensão de textos na hora de resolver problemas matemáticos, uma vez que os textos normalmente são usados como apoio aos exercícios e não como recurso para a construção do conhecimento (LIMA, 2012 apud ZWIERNIK, 2015 p.13).

Por melhor que seja a qualidade dos livros didáticos utilizados pelo professor, basear-se somente neles para as aulas não é recomendado, pois, assim como qualquer obra, são sujeitos a limitações. A maioria dos livros trata diversos temas de maneira muito similar (LEMKE, 2010 apud CAMPOS, 2011, p. 25), não permitindo assim que os alunos desenvolvam a compreensão de conceitos por diferentes interpretações ou abordagens e impedindo que tenham variadas interpretações do mundo, pois os faz acreditar que apenas existem as verdades do livro didático e do professor (GARCIA, 1993 apud NEUENFELDT, 2006, p. 40). Então, a utilização de textos alternativos ao livro didático é importante para que haja uma ressignificação dos conceitos vistos pelos estudantes (MIANUTTI, 2010, p. 17 apud CAMPOS, 2011, p. 24) e para que eles sejam apresentados a gêneros textuais que vão além do discurso acadêmico visto sempre dentro de sala de aula (SCHNEUWLY E DOLZ, 2004, apud CAMPOS, 2011, p. 25).

Segundo Santos et al. (2021), a leitura é uma prática essencial para a formação e o desenvolvimento do aluno. Além de estimular a criatividade, o raciocínio e a imaginação, a prática da leitura auxilia na compreensão da norma culta portuguesa e de suas regras gramaticais, assim como na interpretação de texto e na ampliação de vocabulário, o que é fundamental para que o aluno desenvolva também suas habilidades de escrita. Ao apresentar aos alunos diferentes estilos textuais, o professor estimula a leitura, tanto crítica quanto por prazer, e ambas são essenciais para o desenvolvimento de habilidades como comunicação, raciocínio e resolução de problemas.

Utilizaremos como foco principal neste trabalho o que chamamos de literatura juvenil. Entendemos tal literatura como aquela que possui os jovens não apenas como público-alvo, mas também como centro das suas histórias. A literatura juvenil também pode ser conhecida e estudada como literatura Young Adult[2], termo que surgiu nos Estados Unidos na década de 1940 (PINTO, VALENTE, 2020, p. 158) para se referir a histórias que tenham como personagens principais adolescentes ou jovens adultos.

A literatura juvenil – ou literatura young adult – não costuma ser interpretada como um gênero literário, uma vez que pode englobar diferentes gêneros: romance, ficção científica, fantasia, suspense, entre outros. O diferencial dessa literatura é a abordagem de temas comuns na vida dos adolescentes, o que permite uma identificação do leitor com a história. Temas como primeiros amores, relacionamentos familiares, amizades e, principalmente, busca pela própria identidade são comuns nessas obras. Os leitores jovens muitas vezes enxergam nos personagens dessas histórias seus próprios problemas e obstáculos, e se identificam com essa leitura, que se aproxima de suas próprias vidas reais (KAPLAN, 2005).

Por ser uma literatura voltada ao público jovem, muitas vezes a credibilidade da literatura juvenil é questionada ou rebaixada. No entanto, Cruvinel (2009), afirma o seguinte:

> Toda literatura é uma forma de educação, independente da temática abordada ou da predeterminação do público leitor. A especificação de literatura juvenil não a exclui da literatura em sentido mais amplo. A particularidade das obras voltadas para os jovens leitores está no desenvolvimento eficaz de formas pertinentes e literariamente articuladas para fazer sentido ao seu destinatário, que está em processo de formação.

Existem obras da literatura juvenil que os adolescentes leem por prazer e que abordam a matemática de outras maneiras. Nesses livros, assuntos matemáticos em geral são mencionados pontualmente em determinada parte do livro ou ao longo do desenvolvimento de algum personagem, e não são o foco principal das histórias. Às vezes, a matemática introduzida nessas leituras pode até não estar correta, e assim o uso do livro se torna interessante para iniciar uma discussão crítica com os alunos sobre o motivo desses erros e qual seria a abordagem correta do tema.

---

[2] Em português, não há tradução para o termo Young Adult, então utilizaremos esse termo em inglês ao longo deste trabalho.

Sabendo que, em geral, os alunos têm dificuldade em associar a matemática aprendida na escola à utilizada em suas vidas, como nós, professores de matemática, podemos aproximar essa matemática da sala de aula ao cotidiano dos alunos a partir da literatura juvenil?

Nesse sentido, assumimos como hipótese deste trabalho que o contato com romances que abordam a matemática e apresentam seu uso no dia a dia de maneira natural pode permitir aos alunos enxergar a disciplina fora do contexto de sala de aula e gerar mais interesse pelos assuntos abordados. Além disso, acreditamos que o uso de livros juvenis no processo de ensino-aprendizagem de matemática pode facilitar na contextualização e explicação dos conteúdos pelos professores e, ao mesmo tempo, despertar a atenção e facilitar a compreensão dos alunos.

Para poder elaborar esta pesquisa, bem como a organização dos encontros com os professores, utilizamos como fundamentação o Modelo de Estratégia Argumentativa (MEA). O MEA, segundo Castro e Bolite Frant (2011) é um modelo baseado na Teoria da Argumentação (PERELMAN, 1992, apud. CASTRO; BOLITE FRANT, 2011, p. 71), e procura alcançar a compreensão do discurso de outros indivíduos através da análise de seu jogo argumentativo. A Estratégia Argumentativa "busca sentidos além do que é expresso explicitamente" (CASTRO; BOLITE FRANT, 2011), tendo como parte do processo de análise o conhecimento do contexto em que a discussão ocorre e os elementos que a motivam. Durante uma negociação ou argumentação, há mais fatores envolvidos do que apenas o que se é dito, e o MEA busca compreender e analisar esses fatores implícitos ao discurso, além dos explícitos. Para que seja possível utilizar a Estratégia Argumentativa, busca-se destacar argumentos de controvérsia e acordo, para que possa ser feita uma análise dessas interações. Acreditamos que o MEA se aplicou a esta pesquisa, uma vez que buscamos analisar o uso da literatura juvenil nas aulas de matemática a partir do debate gerado pelos participantes durante os encontros.

De acordo com as autoras, esse modelo é dividido em três etapas, tal qual a maior parte das pesquisas qualitativas. A primeira delas é a organização dos dados, que deve ser feita cuidadosamente, uma vez que a escolha dos dados que serão julgados relevantes ou não é essencial na hora de definir qual será a codificação ou categorização para organizá-los e, então, poder constituir o *corpus* da análise. A segunda etapa consiste no estudo comparativo dos dados, em que são estabelecidas as relações e coerências entre eles, para que possam ser estudados e interpretados. A última etapa traz a apresentação dos resultados, buscando torná-los compreensíveis para o maior público possível.

Essas três etapas foram divididas por Castro e Bolite Frant em dez passos, que vão da leitura exaustiva do material à validação dos resultados. Após realizada a leitura exaustiva do material, deve ser feita a construção do corpus de análise, seguindo os objetivos da pesquisa. O terceiro passo é buscar pelas controvérsias no material analisado, para que, então, sejam enunciadas as teses dos locutores, da maneira mais clara possível. Em seguida, deve ser feita a busca pelos argumentos utilizados para sustentação das teses e, então, deve-se aplicar a tipologia da análise, relacionando os argumentos dos participantes às suas possíveis intenções. Então, deve ser elaborado um esquema, para organizar as relações entre os argumentos presentes no material. Por fim, deve-se interpretar os dados organizados, buscar evidências que sustentem essas interpretações e validar os resultados encontrados.

2.2 NOÇÕES DE INFINITO

Nos encontros realizados com os professores, um dos assuntos abordados foi noções de infinito, a partir do que é apresentado sobre o tema ao longo do livro *A culpa é das estrelas*, do escritor estadunidense John Green.

O livro, que foi lançado no Brasil em 2012 pela Editora Intrínseca, conta a história de um casal adolescente, Hazel Grace e Augustus Waters, que se conhecem em um grupo de apoio a pessoas com câncer e desenvolvem um relacionamento. Quando os dois se conhecem, Hazel possui câncer no pulmão e precisa da ajuda de cilindros de oxigênio para respirar, enquanto Augustus está com sua doença controlada, mas já teve uma das pernas amputada. Na história, Hazel possui um livro favorito, chamado *Uma aflição imperial*, escrito pelo autor holandês Peter Van Houten, e seu sonho é conhecê-lo para fazer perguntas sobre o fim do livro. Então, amparado por uma instituição que trabalha com crianças com câncer e dá a elas o direito de realizar um desejo, Augustus utiliza o seu para que, juntos, os dois possam viajar para Amsterdam e conhecer Van Houten. Quando finalmente conhecem o escritor, os adolescentes se decepcionam ao encontrar um homem alcóolatra e arrogante, que os conta que alguns infinitos são maiores que outros e fala sobre o paradoxo de Zenão, mas não explica os conceitos, deixando os jovens confusos. Ao retornarem da viagem, o câncer de Augustus gera maiores complicações e o menino acaba falecendo. Hazel então faz um discurso sobre sua breve vida com Augustus e, em seu discurso, traz referências às ideias de infinito apresentadas a eles por Van Houten.

No livro, são abordadas algumas ideias sobre infinito: a primeira, que aparece diversas vezes, é a ideia de que alguns infinitos são maiores do que outros. As outras duas são ditas no discurso da personagem principal, Hazel Grace. Ela diz que “existe uma quantidade infinita de números entre 0 e 1. (...) Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2 ou entre o 0 e o 1 milhão” e, logo depois, termina o discurso com “você não imagina o tamanho da minha gratidão pelo nosso pequeno infinito. (...) Você me deu uma eternidade dentro dos nossos dias numerados” (GREEN, 2012, p.235).

Para entendermos os conceitos apresentados no livro *A culpa é das estrelas*, precisamos entender algumas noções de infinito, como o que é infinito e cardinalidade de conjuntos infinitos. Com base nas ideias apresentadas por Shulman (1986), entendemos que a compreensão desses conceitos é essencial ao professor, para que ele tenha uma base bem estabelecida para liderar os debates com os alunos.

O conceito de infinito pode ser visto sob diferentes perspectivas, como a teologia, a matemática e o senso comum. Na teologia, temos o conceito de um mundo e um deus infinitos, inalcançáveis. Já na matemática, o infinito é um termo que aparece frequentemente: no ensino básico, podemos encontrá-lo quando estudamos retas e planos infinitos, dízimas - periódicas e não periódicas -, sequências infinitas, soma de progressões geométricas infinitas, a ideia de que uma reta possui infinitos pontos, entre outros assuntos. Popularmente, a palavra “infinito” denota algo que não tem fim, ou a ideia de algo muito grande.

Desde o ensino fundamental, os alunos estudam, mesmo que implicitamente, a ideia de infinito, ao trabalharem com os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, por exemplo. No ensino médio, as ideias de infinito continuam sendo abordadas, quando estudam progressões. Às vezes, no entanto, essas ideias não ficam claras para os alunos, podendo dificultar seu entendimento dos conteúdos que as utilizam.

A intenção deste trabalho foi discutir com professores de matemática e português a abordagem das noções de infinito em sala de aula a partir de um material literário: o livro *A culpa é das estrelas*. Antes de apresentar os encontros realizados com os professores, vamos falar sobre alguns conceitos importantes para que possamos tratar desse assunto com os alunos. Não acreditamos que necessariamente todos esses conceitos devem ser trabalhados em sala de aula, mas julgamos necessário ao professor de matemática compreendê-los para poder abordá-los de maneira bem-sucedida com os alunos.

Nos exemplos de infinito apresentados acima, temos duas ideias distintas de infinito: a primeira, como nas sequências infinitas, é a ideia de que sempre se pode adicionar mais um elemento aos que já se tinha anteriormente, sem nunca chegar a um fim. Essa ideia é o que chamamos de infinito potencial. Um exemplo é o conjunto dos números naturais.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$$

A segunda ideia, que chamamos de infinito atual, é a ideia de um infinito atualizado, de processos que, mesmo infinitos, podem ter resultados finitos. Um exemplo é a ideia de infinito que vemos em limites, como na soma dos elementos de uma progressão geométrica infinita, que resulta em algo finito.

Assumindo como exemplo a progressão geométrica infinita de razão $\frac{1}{2}$ cujo primeiro termo é 1, podemos calcular sua soma da seguinte maneira:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

No livro A culpa é das estrelas, para concluir que alguns infinitos são maiores que outros, o personagem Van Houten fala sobre o paradoxo da tartaruga de Zenão:

> Pois bem, Zenão é mais famoso por seu paradoxo da tartaruga. Imaginemos que você esteja participando de uma corrida com uma tartaruga. É dada à tartaruga uma vantagem inicial, em distância, de dez metros. No tempo que você leva para percorrer esses dez metros, a tartaruga talvez se desloque um. E, então, no tempo que você leva para transpor essa distância, a tartaruga vai um pouco mais à frente, e assim por diante. Você é mais rápido que a tartaruga, mas não

> consegue alcançá-la; só consegue diminuir a distância entre vocês. Mas é óbvio que você acaba simplesmente passando pela tartaruga sem ponderar sobre a mecânica envolvida, mas a pergunta de como foi capaz de fazer isso acaba sendo incrivelmente complicada e ninguém tinha achado uma resposta para ela de verdade, até que Cantor demonstrou que alguns infinitos são maiores que outros. (GREEN, 2012, p.172)

Zenão foi um filósofo pré-socrático, que viveu cerca de 500 anos antes de Cristo, e concebeu alguns paradoxos para negar ideias difundidas na época, como o movimento. No paradoxo da tartaruga – ou paradoxo de Aquiles –, ele supõe que Aquiles e uma tartaruga estejam apostando uma corrida, e, como a tartaruga é mais lenta, recebe uma vantagem inicial em distância. Zenão afirma então que Aquiles jamais alcançará a tartaruga, pois, quando chegar ao ponto onde a tartaruga estava, ela já terá avançado um pouco mais e, quando atingir a nova distância da tartaruga, ela novamente já estará mais à frente, e assim sucessivamente. Contrariando então o senso comum, ele nega a possibilidade de que Aquiles ultrapasse a tartaruga.

No entanto, ao fazer isso, não considerou que a distância entre Aquiles e a tartaruga pode ser vista como uma progressão geométrica com soma finita – afinal, esse conceito só viria a ser estudado mais à frente. Por exemplo, se a distância inicial entre os dois é de 10 metros e a velocidade de Aquiles é o dobro da velocidade da tartaruga, quando ele alcançar os 10 metros iniciais, ela já terá percorrido mais 5 metros. Quando ele atingir essa nova distância, ela terá avançado mais 2,5 metros e assim sucessivamente. As distâncias entre Aquiles e a tartaruga representam uma progressão geométrica infinita que, no entanto, possui como resultado dessa soma um valor finito. Então, após um tempo, Aquiles a alcançará e, então, a ultrapassará, como seria esperado.

Podemos realizar essa conta a partir da soma de progressões geométricas infinitas: a distância inicial entre Aquiles e a tartaruga é de 10 metros e se altera à razão $\frac{1}{2}$. Então, a soma das distâncias pode ser escrita como (10 + 5 + 2,5 + 1,25 + ...), infinitamente. Mas, como se trata de uma progressão geométrica infinita, podemos utilizar a fórmula da soma dos seus elementos para determiná-la. Sabendo que a fórmula para calcular a soma dos elementos nesse caso será $S = \frac{a_1}{1-q}$, temos $S = \frac{10}{1-\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$.

Essa ideia de que uma sequência infinita pode resultar em uma soma finita foi uma das que serviram de base para as pesquisas de Georg Cantor, que pode mostrar que seria necessário introduzir uma noção de infinito diferente da então conhecida, para poder lidar com a definição anterior de infinito.

Cantor foi um matemático alemão do século XIX, e ficou conhecido por seus trabalhos sobre Teoria dos Conjuntos, que estuda inclusive conjuntos infinitos.

Para entender a frase “Alguns infinitos são maiores que outros”, apresentada diversas vezes ao longo do livro *A culpa é das estrelas*, precisamos entender a ideia de conjuntos infinitos, cardinalidade e conjuntos enumeráveis.

A cardinalidade de um conjunto é a quantidade de elementos que há nesse conjunto. No entanto, em conjuntos infinitos, não conseguimos contar os elementos, pois, naturalmente, são infinitos. Mas, mesmo sem conseguir contá-los, em alguns casos, podemos enumerá-los.

Dizemos que dois conjuntos são cardinalmente equivalentes se existe uma função bijetiva que leva um no outro. Em outras palavras, se para cada elemento do primeiro conjunto eu consigo associar um e apenas um elemento do segundo e nenhum elemento do segundo deixa de ter uma associação a algum do primeiro, então os conjuntos são cardinalmente equivalentes, ou seja, possuem a mesma quantidade de elementos, seja ela finita ou infinita.

Exemplo: bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos naturais pares.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots\}$$
$$\mathbb{N}p = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 \ldots\}$$

Se associarmos cada número natural ao seu dobro (1 ao 2, 2 ao 4, 3 ao 6, etc.), podemos ver que há a mesma quantidade de elementos nos dois conjuntos, pois todos os elementos do primeiro estarão associados a um e somente um elemento do segundo, e todos os elementos do segundo estarão associados a um elemento do primeiro.

Outro exemplo é o Hotel de Hilbert. O Hotel de Hilbert é um paradoxo matemático criado pelo matemático alemão David Hilbert, que supõe um hotel com infinitos quartos. Em determinado dia, o hotel estava lotado e um novo hóspede chegou para se hospedar. Como os quartos são infinitos, para acomodar esse hóspede, bastava passar cada hóspede para o quarto seguinte. Assim, o hóspede do quarto 1 passaria para o quarto 2, o do quarto 2 para o 3 e assim por diante. Assim, o quarto 1 ficaria vago e todos os hóspedes continuariam hospedados nos infinitos quartos.

Supondo que em outro dia chegassem infinitos clientes para se hospedar no hotel já lotado, bastaria passar cada hóspede para o quarto correspondente ao dobro do quarto em que estava atualmente. Assim, o hóspede do quarto 1 passaria para o quarto 2; o do quarto 2, para o quarto 4; o do quarto 3, para o quarto 6, e assim por diante. Então os quartos pares ficariam todos ocupados e os ímpares, disponíveis para hospedar todos os novos hóspedes.

Uma maneira de apresentar essa ideia para os professores pode ser o "Desafio do Hotel de Hilbert[3]", proposto pelo blog "Clubes de Matemática da OBMEP". Posteriormente, pode-se utilizar vídeos do YouTube[4] para ilustrar o desafio, pois trabalhar visualmente essa ideia pode facilitar o entendimento desses conceitos.

O Hotel de Hilbert é uma maneira de se trabalhar a cardinalidade dos conjuntos infinitos, pois propõe uma aplicação supostamente concreta dos conceitos vistos, além de uma abordagem a partir da visualização, o que possibilitaria melhor compreensão do assunto. O objetivo dessa atividade seria trabalhar o infinito atual, de modo que trouxesse para a atualidade a ideia de infinito trabalhada por Cantor. No entanto, muitas vezes os alunos apresentam dificuldades em compreender as noções de infinito a partir dessa abordagem, pois, além de um hotel com infinitos quartos não existir de fato na realidade, a atividade trabalha a noção de infinito potencial, e não atual.

Segundo Cantor, um conjunto é infinito quando existe uma bijeção entre ele mesmo e um subconjunto próprio. Ou seja, se o conjunto é cardinalmente equivalente a uma parte dele, então é infinito. Podemos dizer também que um conjunto é infinito se podemos retirar uma parte finita do conjunto e ainda assim manter sua quantidade de elementos.

Exemplo: se pegarmos o conjunto dos números naturais e retirarmos o conjunto {1, 2, 3, 4, 5}, ele continua sendo infinito.

[3] Link para o desafio: http://clubes.obmep.org.br/blog/desafio-hotel-de-hilbert/

[4] Exemplo de vídeo que pode ser utilizado: https://www.youtube.com/watch?v=MmjuftaX4Bo

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$
$$\mathbb{N} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\}$$

Se associarmos cada número natural n a $n + 5$, teremos uma bijeção entre os dois conjuntos e poderemos, assim, afirmar que o conjunto $\mathbb{N} - \{1, 2, 3, 4, 5\}$ é infinito, pois é cardinalmente equivalente a $\mathbb{N}$.

No entanto, nem todos os conjuntos infinitos possuem cardinalidades equivalentes. Alguns infinitos realmente são maiores que outros.

Para explicar essa parte, precisamos entender o que são conjuntos enumeráveis. Chamamos um conjunto de enumerável quando ele é cardinalmente equivalente ao conjunto dos números naturais. Ou seja, quando há uma bijeção entre os dois conjuntos.

Exemplo 1: conjunto dos números inteiros. Se pegarmos o conjunto dos naturais e associarmos cada número ímpar a um número positivo e cada número par a um número negativo, podemos fazer uma bijeção entre todos os números naturais e todos os números inteiros. Portanto, os dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade, logo, são cardinalmente equivalentes.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \dots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

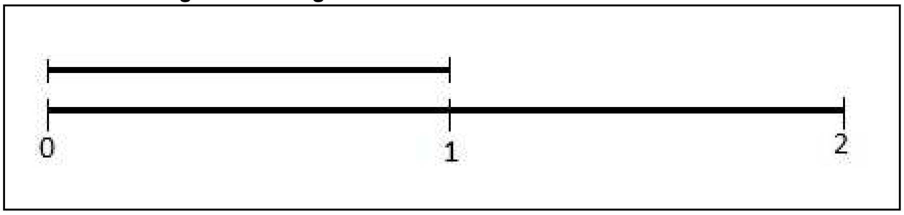
Exemplo 2: conjunto dos números racionais. Os números racionais são todos aqueles que podem ser escritos da forma $\frac{m}{n}$; $m, n \in \mathbb{N}$. Podemos associar cada par $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ à razão entre eles $\frac{m}{n}$. Como os números racionais são todos aqueles que podem ser escritos na forma $\frac{m}{n}$, os pares (m, n) poderão ser associados a todos os números $\frac{m}{n}$, ou seja, a todos os números racionais. Assim, podemos afirmar que o conjunto dos números racionais tem a mesma cardinalidade do conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, que por sua vez é cardinalmente equivalente ao conjunto dos naturais. Logo, o conjunto dos números racionais é enumerável.

Quando um conjunto infinito não é cardinalmente equivalente ao conjunto dos naturais, dizemos que ele é não enumerável. O conjunto dos números reais, por exemplo, não é enumerável, pois não conseguimos estabelecer uma bijeção entre seus elementos e os elementos do conjunto dos naturais. Podemos perceber isto utilizando o que Cantor chamou de argumento da diagonalização. Utilizando o conjunto de todas as sequências binárias possíveis, ele mostra que esse conjunto não é enumerável. Então, mostrando que é possível fazer uma bijeção desse conjunto das sequências binárias com o conjunto dos números reais, mostra que esse também não será enumerável. Logo, a cardinalidade do conjunto dos números reais é maior do que a do conjunto dos números naturais. Então, o infinito do conjunto dos reais é maior que o infinito do conjunto dos naturais. Logo, podemos utilizar este exemplo para mostrar que há infinitos maiores que outros.

Outra ideia de infinito abordada no livro é a de que existem infinitos números entre 0 e 1, e um infinito ainda maior entre 0 e 2 ou entre 0 e um milhão. Essa afirmação não está correta e, para mostrar isso, vamos voltar à ideia apresentada anteriormente de conjuntos cardinalmente equivalentes. Como veremos a seguir, é possível mostrar que tanto entre 0 e 1 quanto entre 0 e 2 há a mesma quantidade infinita de elementos, portanto os dois infinitos possuem o mesmo tamanho. Analogamente, o mesmo raciocínio vale para o fato de que existe a mesma quantidade de elementos entre 0 e 1 e entre 0 e um milhão.

Uma maneira de mostrar isso seria pegando dois segmentos de reta: o primeiro iniciando em zero e terminando em um, e o segundo também iniciado em zero, mas terminado em dois, da seguinte maneira:

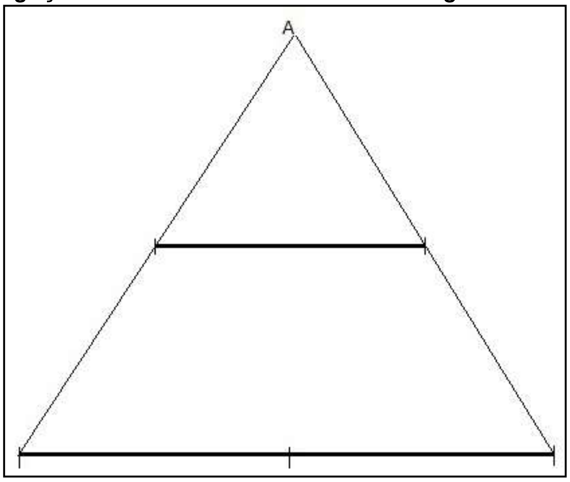
Figura 1 – segmentos de medidas 1 e 2 unidades.



Fonte: elaboração própria

Desenhamos então um triângulo, da seguinte forma: dado um ponto A, ligamos esse ponto às extremidades dos segmentos.

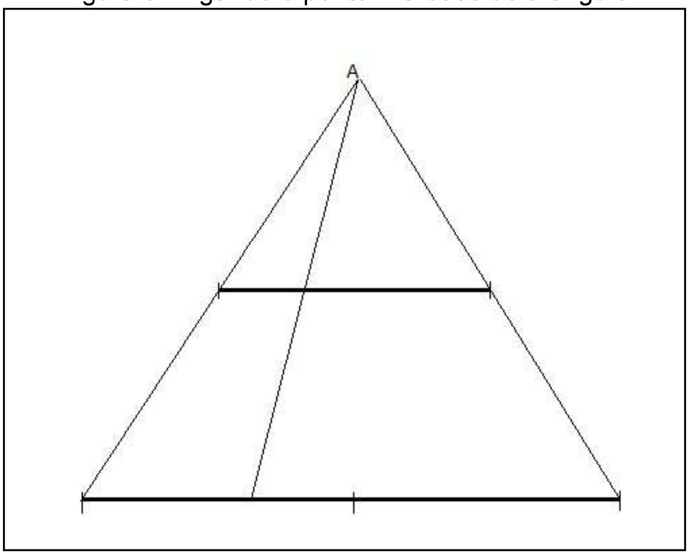
Figura 2 - ligação entre as extremidades dos segmentos e o ponto A



Fonte: elaboração própria, adaptado de Caraça (1951)

Se ligarmos o ponto A a qualquer ponto da base do triângulo, formada pelo segmento que representa o intervalo real [0,2], vamos necessariamente passar por um, e apenas um, ponto do segmento que representa o intervalo real [0,1].

Figura 3 – ligando o ponto A à base do triângulo



Fonte: elaboração própria, adaptado de Caraça (1951)

Da mesma forma, para qualquer ponto pelo qual passemos no segmento que representa [0,1], associaremos um, e apenas um, ponto no segmento que representa [0,2], e não haverá nenhum ponto em qualquer um dos segmentos que não será associado a algum ponto do outro. Então, os dois segmentos representam conjuntos cardinalmente equivalentes, logo possuem a mesma quantidade infinita de pontos.

No entanto, essa representação pode gerar confusão nos alunos, caso não esteja clara para eles a ideia de que a reta possui infinitos pontos, uma vez que no desenho só seria possível desenhar um número finito de retas distintas. Essa visualização, então, exige uma prévia compreensão de que a reta possui infinitos pontos.

Para trabalhar essa ideia dos infinitos pontos na reta, podemos utilizar a ideia de que entre 0 e 1 existe pelo menos um outro número, por exemplo o 0,4. Entre 0 e 0,4, podemos afirmar que existe pelo menos um outro ponto, digamos, o 0,1. Entre 0 e 0,1 podemos achar o 0,05 e, entre 0 e 0,05, o 0,002. Se continuarmos procurando entre dois números cada vez mais próximos, vamos sempre encontrar um terceiro número entre eles, independente de quão próximos eles estejam. Assim, podemos mostrar que a quantidade de pontos na reta é infinita. Para estimular a visualização dessa ideia, podemos utilizar um software como o Geogebra, por exemplo. Nele, podemos traçar um segmento de reta e ir aproximando a figura, de modo que seja possível perceber que entre dois pontos distintos sempre haverá outros, por maior que seja a aproximação feita.

Logo, a partir da ideia de reta com infinitos pontos e da construção do triângulo a partir dos segmentos de reta que representam os intervalos reais [0,1] e [0,2], podemos afirmar que existe uma quantidade igualmente infinita de números entre 0 e 1 e entre 0 e 2. Analogamente, podemos mostrar que essa quantidade infinita também é a mesma que entre 0 e um milhão, contradizendo a afirmação da personagem Hazel Grace no livro.

Por último, podemos pensar no que a personagem diz sobre ter tido uma eternidade dentro de uma quantidade de dias numerados. Podemos associar essa afirmação à ideia vista anteriormente de que um segmento de reta possui infinitos pontos. Analogamente à ideia de que há infinitos pontos em um segmento de reta finito, podemos enxergar a ideia de que há uma eternidade (ou um “pequeno infinito”, como é dito pela personagem do livro) dentro de uma quantidade finita de dias.

3 METODOLOGIA

3.1 METODOLOGIA DA PESQUISA: DESIGN RESEARCH

A análise da obra escolhida tem o objetivo de compreender, a partir da visão de professores de matemática do ensino básico, como a leitura de histórias que mencionam a matemática ao longo de seu desenvolvimento, sem tê-la como foco principal, poderia contribuir para as aulas de matemática, sendo um material útil para a apresentação e para o aprofundamento de determinados conteúdos.

A metodologia utilizada nessa pesquisa foi o Design Research[5]. Essa metodologia tem caráter pragmático e teórico e tem foco tanto no processo de aprendizagem quanto nas ferramentas utilizadas nesse processo. Possui caráter intervencionista, conectando teoria e prática, e possibilitando uma relação entre o pesquisador e o objeto de pesquisa. Além disso, o Design possui característica iterativa e nos permite realizar diferentes níveis de análise e modificar a estrutura de etapas da pesquisa ao longo de sua aplicação. Assim, é possível determinar uma expectativa inicial para a pesquisa e modificá-la de acordo com as análises parciais feitas ao longo de seu desenvolvimento. (COBB et al., 2003).

Essa metodologia foi escolhida principalmente por suas características prospectiva e reflexiva, que permitem que modificações e testes sejam realizados ao longo da pesquisa. Assim, para compreender qual o papel da literatura juvenil no ensino de matemática, pudemos pensar em algo, testar para ver se funcionava, voltar atrás e refazer ou modificar o que julgássemos necessário, enquanto a pesquisa estava sendo feita.

Esta pesquisa foi dividida em três fases. Na primeira fase, a prospectiva, foi feita a revisão bibliográfica e o levantamento dos livros que poderiam ser utilizados, assim como a escolha do livro *A culpa é das estrelas* e sua análise. Então, foi elaborada uma proposta de encontros com professores de matemática e português, a partir da leitura do livro. Na segunda fase, foram realizados os encontros elaborados na fase anterior, e foram realizadas análises parciais, para que fossem feitas as modificações necessárias ao longo da realização dos encontros. Por fim, na terceira fase, foram analisados os resultados da pesquisa e foi elaborada uma proposta de abordagem da utilização em sala de aula do livro utilizado.

---

[5] A metodologia Design Research, ou Design, não possui uma tradução completa para o português, então utilizaremos os termos “Design Research” e “Design” em inglês.

Os encontros foram gravados, para que os dados pudessem ser analisados parcialmente após cada um e, então, fosse feita uma análise geral sobre o que foi debatido. Ao final, tivemos uma análise qualitativa – baseada nas ideias do Design Research e do MEA – a partir das interações ocorridas nos encontros, para que pudesse ser desenvolvida uma proposta de utilização desse material em sala de aula.

Para determinar o livro que seria utilizado, lemos todos os livros pré-selecionados no início da pesquisa e, conforme a leitura de cada um deles, realizamos a marcação de todos os momentos das narrativas que envolviam matemática. Assim, destacamos dos livros os trechos onde a matemática aparece e determinamos quais assuntos cada um aborda. Então, escolhemos o livro *A culpa é das estrelas*, de John Green, para ser utilizado nos debates com os professores e, a partir daí, selecionamos os assuntos que julgamos mais relevantes de serem abordados e organizamos um planejamento sobre o que poderia ser discutido em cada um dos encontros.

A ideia original seria que fosse aplicada uma oficina no primeiro semestre de 2020 no Colégio de Aplicação da UFRJ, em uma prática extracurricular compartilhada com a disciplina de língua portuguesa, para os alunos do ensino médio que estivessem interessados na atividade. No entanto, devido à pandemia que surgiu durante esse período, as atividades presenciais no Colégio de Aplicação da UFRJ foram suspensas e provavelmente não seria possível aplicar a oficina como planejada previamente. Então, tivemos que pensar em uma proposta alternativa, que não descartasse completamente a ideia original.

Nessa oficina presencial, seria solicitada aos alunos que quisessem participar a leitura do livro *A culpa é das estrelas* e a intenção seria que houvesse quatro encontros, ao longo de quatro semanas, para que fossem apresentadas e discutidas as noções de infinito, a partir do que se foi lido no romance. A ideia seria que a oficina gerasse debates a partir da contribuição dos alunos, e que não fosse uma aula expositiva.

Como precisamos pensar em uma proposta alternativa à presencial para poder seguir com a pesquisa, realizamos encontros virtuais, em uma plataforma gratuita de chamadas de vídeo, o Google Meet, com cinco professores de matemática e uma de português da educação básica que já haviam tido contato prévio com o livro *A culpa é das estrelas*. Houve quatro encontros virtuais com os professores participantes e a expectativa era que fossem discutidas as ideias de matemática abordadas no livro, como poderíamos aplicá-las em sala de aula e quais os saberes necessários ao professor para que esse conteúdo pudesse ser visto com os alunos. Queríamos gerar um debate sobre os assuntos a partir das contribuições dos professores participantes.

Os quatro encontros ocorreram em um intervalo de 15 dias: o primeiro encontro foi em uma sexta-feira, dia 19 de fevereiro, o segundo encontro foi na terça-feira seguinte, dia 23, o terceiro na sexta seguinte, dia 26, e o último uma semana depois, dia 5 de março. As datas foram escolhidas de acordo com as disponibilidades dos professores e das pesquisadoras, de modo que todos pudessem participar. Os quatro encontros foram gravados em vídeo e, após cada um deles e antes do encontro seguinte, assistimos à gravação duas vezes: uma apenas assistindo e a outra transcrevendo todas as falas dos participantes. O processo de transcrição de cada vídeo durou cerca de quatro a seis horas.

As transcrições foram feitas no Microsoft Word em quatro arquivos separados, cada um referente à transcrição de um dos encontros. Após as transcrições eram relidos os planejamentos originais dos encontros seguintes e feitas as alterações que fossem necessárias, a partir do que tivesse sido debatido no encontro anterior.

Ao final dos quatro encontros, os vídeos foram assistidos mais uma vez, junto às suas respectivas transcrições, para que fossem corrigidos erros e acrescentados os detalhes necessários. Todos os arquivos tiveram suas linhas numeradas – com a contagem reiniciando a cada página –, assim como suas páginas. Foram acrescentados também o tempo de duração de cada encontro, o tempo do vídeo em que ocorreu cada fala e os professores que estiveram presentes em cada um. Então, quando as transcrições já estavam completas, os vídeos foram novamente assistidos para que fossem destacadas as partes importantes de cada encontro.

Nessa etapa, foi utilizada a seguinte organização: as frases consideradas mais importantes foram sublinhadas, e as palavras-chave ou o trecho principal realçados em diferentes cores, que representavam diferentes assuntos. Assim, trechos realçados com uma mesma cor estavam relacionados a um mesmo assunto. Então, foram acrescentados comentários a esses trechos, com o assunto principal que estava sendo tratado naquele momento. As frases foram sublinhadas para que fosse considerado todo o contexto em que os assuntos tivessem sido inseridos, e não apenas quais foram esses assuntos.

Figura 4 – organização das transcrições dos encontros

semana e veio uma memória minha de vivência, que quando eu era mais nova eu gostava muito de ler Dan Brown, até hoje eu gosto muito de ler Dan Brown, e eu lembro que quando eu li O Código da Vinci pela primeira vez, o código da Vinci é um livro que tem muitos enigmas, o tempo todo, e ele cita série de Fibonacci, ele cita várias coisas relacionadas a principalmente a parte de artes, aqueles padrões numéricos que aparecem em muitas obras de artes. E eu lembro que quando eu era criança e já gostava de matemática na época, isso me deixou com mais vontade de fazer coisas de matemática, porque eu acho que eu associava desvendar enigmas com matemática e aí eu ficava me achando muito o Robert Landon, quando eu fazia os meus exercícios de matemática, achando que eu tava super decifrando enigmas. Então depende do que a gente considera matemática, porque sei lá, as vezes você tem um enigma lá e você tem que colocar... Lembro que tinha uma senha que eles tinham que adivinhar, e lembro que tinham não sei quantas milhões de possibilidades, e é combinatória, sabe. Então eu acho que isso que a Roberta falou é super importante, se a gente associar a lógica e outros tipos de pensamento de matemática, não só números, você vai com certeza conseguir muito mais material pra pensar esse paralelo de literatura com matemática"

FC Flavia Clemente Marques
Livro que tem matemática

FC Flavia Clemente Marques
RELAÇÃO LITERATURA - MATEMÁTICA

Fonte: elaboração própria

Figura 5 - organização das transcrições dos encontros

algumas vezes. E aí não passou batido porque eu já fazia, porque eu já tinha outros pensamentos como matemática, mas eu nunca tive professores assim que explorassem isso. Pra mim era óbvio, ah existem infinitos números entre 0 e 1, ah vai ter outros infinitos entre 0 e 2. Pra mim, na época que eu li, isso era bobeira. E puxando aí pro que a Ju falou, eu acho que eu já entro num assunto que eu vejo muito nesse meio da literatura, que é quem lê livro infantojuvenil? A gente leu porque John Green pegou a gente um pouco mais novo. Será que um professor hoje atuante, que já tem não sei quantos anos em sala de aula, vai pegar um John Green pra ver, pra tentar ver com seus alunos? Então a gente fica nisso, é muito fácil pra gente pensar em tentar aproximar esses alunos da literatura ou vice versa, como a Ju falou, os alunos de exatas e tudo. Mas e as pessoas que já tão atuando e que não tem tanto contato com a literatura, os próprios professores, será que eles se propõem a fazer isso? Então cabe a gente, a nova geração de professores? Ou a gente vai tentar mudar tudo? Por isso que eu achei o tema muito legal, e... a nossa matemática ainda é mito rigorosa nessa questão de exercício, então a gente tem livros paradidáticos só pra área mesmo da literatura. É muito difícil um professor de chegar e falar assim 'ó, quero mudar, quero

FC Flavia Clemente Marques
VALIDADE DA PASSAGEM SOBRE INFINITO MAIOR ENTRE 0 E 2 DO QUE ENTRE 0 E 1

FC Flavia Clemente Marques
"APLICAÇÃO" DA LITERATURA INFANTOJUVENIL EM SALA DE AULA

Fonte: elaboração própria

Depois que todos os arquivos já estavam com os trechos importantes sublinhados e seus respectivos assuntos destacados em cores, foi criado um outro arquivo onde seriam categorizados todos esses assuntos. Essa categorização foi feita da seguinte maneira: foram definidas 13 categorias, baseadas nos temas ressaltados ao longo das transcrições, que foram escritas em tópicos, e dentro de cada uma delas foram copiados e colados todos os trechos dos quatro encontros que tratavam daquele tema, na ordem em que ocorreram. Apesar de dentro das categorias as partes copiadas e coladas estarem em ordem, as categorias não estão necessariamente organizadas conforme a ordem em que os assuntos surgiram ao longo dos encontros. Então, em uma cópia de cada arquivo das transcrições, cada parte foi realçada com uma cor, e cada cor representava uma das 13 categorias.

Figura 6 - organização das categorias

Categorias:

Relação entre matemática e literatura

Interdisciplinaridade / qual professor estaria disposto?

Público alvo / contemporaneidade do livro ACEDE

Sobre o box "interdisciplinando" do livro didático

Hotel de Hilbert

A matemática presente em ACEDE além das noções de infinito

Noções de infinito presentes em ACEDE – infinitos maiores que outros

Noções de infinito presentes em ACEDE – infinito entre 0 e 1 e infinito entre 0 e 2

Noções de infinito presentes em ACEDE – questões filosóficas

Noções de infinito presentes em ACEDE – potencial x atual

O que é matemática/ o que é infinito

Noções de infinito presentes em ACEDE – representações

Noções de infinito - abordagens em sala de aula

Fonte: elaboração própria

Figura 7 - organização das categorias

"Onde você encontra Matemática no livro? O que chamou atenção?" (slide 2)

- (11:00) **Helena:** Bom, além da cena, da passagem emblemática sobre o infinito, lembro que o que me chamou mais atenção foi a Hazel dizer que é leitora de Cantor, que ela tinha lido livros de Cantor. Falei 'gente, não to acreditando nisso'. Então assim, de cara já tem essa passagem e a passagem do infinito, que ela argumenta sobre a existência de infinitos maiores que outros.

- (11:30) **Julieta:** tem os gráficos também, que ela fala, aquele que faz assim, sabe?

- (11:37) **James:** é, eles usam diagramas, né?

- (11:40) **Julieta:** Isso, brigada! Os diagramas que eles usam, que eles falam também.

- (11:53) **Annabeth:** tem muito tempo que eu li esse livro, eu lembro mais da parte dos infinitos, isso é muito emblemático né? Eu nem lembrava que ela citava Cantor, eu vou até reler o livro, que eu nem lembrava disso.

- (12:03) **Isabella:** eu já peguei meu livro no kindle aqui pra reler, porque tem fatos que realmente assim, não lembro. Mas o discurso é emblemático, tanto que ta eu acho na contracapa do livro, se não me engano, o discurso dela matemático. Tem muito tempo que eu não pego o livro físico. Já apresenta assim de cara né, a matemática aí, mas fora isso não me lembrava de outras coisas.

- (12:31) **Annabeth:** eu acho que ela fala um pouquinho dos números decimais, né, quando ela fala dos infinitos ela usa os números decimais, se não me engano, como exemplo, que ela fala dos intervalos, que entre um número e outro existem não sei

Flavia Clemente Marques
Espanto

Flavia Clemente Marques
INFINITOS MAIORES QUE OUTROS / CANTOR

Flavia Clemente Marques
CONJUNTOS/DIAGRAMAS

Flavia Clemente Marques
Acho que ela faz um círculo com as mãos (estava na página no ppt e o gesto não ficou gravado no vídeo, só o finalzinho dele)

Flavia Clemente Marques
INFINITOS

Flavia Clemente Marques
Kindle

Flavia Clemente Marques
MATEMÁTICA (INFINITOS? NA CONTRACAPA ESTÁ UM TRECHO SOBRE INFINITOS)

Fonte: elaboração própria

As 13 categorias definidas foram:

- Relação entre matemática e literatura;
- Interdisciplinaridade e qual professor estaria disposto a utilizar o livro;
- Público-alvo e contemporaneidade do livro *A culpa é das estrelas*;
- Sobre o quadro "interdisciplinando" presente no livro didático;
- Hotel de Hilbert;
- A matemática presente em *A culpa é das estrelas* além das noções de infinito;
- Noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas* – infinitos maiores que outros;
- Noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas* – infinito entre 0 e 1 e infinito entre 0 e 2;
- Noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas* – questões filosóficas;
- Noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas* – representações;
- Noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas* – infinito potencial x infinito atual;
- Noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas* – abordagens em sala de aula; o que é matemática e o que é infinito.

Ao longo do planejamento, houve uma redução das treze categorias, que será apresentada no próximo capítulo.

3.2 PLANEJAMENTO DOS ENCONTROS COM PROFESSORES

Planejamos encontros com professores do ensino básico que já tinham lido o livro *A culpa é das estrelas*. Nos encontros com esses professores, geramos discussões sobre as ideias de infinito a partir do que foi visto no livro e discutimos sobre o uso de livros juvenis como ferramenta para o ensino de matemática.

Os encontros ocorreram em uma plataforma de reuniões on-line gratuita – chamada Google Meet – e foram inteiramente gravados, com autorização dos participantes, de acordo com o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido presente no Apêndice A.

Planejamos quatro encontros com seis participantes: cinco professores de matemática e um de português. Optamos por chamar um grupo pequeno de participantes, pois, de acordo com nossas experiências, em grupos pequenos há mais interações entre os participantes. Como nosso objetivo com esses encontros era investigar e analisar as contribuições dos professores participantes, acreditamos que havendo uma maior interação entre eles as contribuições ocorreriam de maneira mais espontânea e com maiores debates. Além disso, também preferimos ter um grupo menor de participantes porque os encontros ocorreriam de maneira virtual, e houve receio de que, caso houvesse muitos participantes, a discussão poderia ser prejudicada, pois mensagens no chat poderiam se perder ou então poderia faltar clareza no que estivesse sendo discutido, caso muitos participantes abrissem o microfone e falassem ao mesmo tempo. Com a quantidade escolhida de participantes, houve bastante interações entre eles e não observamos esses tipos de sobreposição de comunicação durante os encontros.

A partir da leitura do artigo “Tarefas exploratórias e investigativas: uma análise dos trabalhos publicados no XI e XII Encontro Nacional de Educação Matemática” (FOSS; WICHNOSKI; BASSOI, 2018), classificamos esta etapa da pesquisa como investigativa, uma vez que esperávamos que os participantes chegassem por conta própria a conclusões sobre os assuntos abordados, a partir dos debates e mediação da pesquisadora. A intenção era que nós não apresentássemos as ideias logo de cara, mas que provocássemos os participantes sobre os assuntos selecionados, e deixássemos que eles tentassem chegar às próprias conclusões sobre as ideias de infinito e sobre o uso da literatura juvenil no ensino de matemática.

Foi elaborada uma estrutura prévia – fase prospectiva – sobre o que era esperado que fosse discutido em cada um dos quatro encontros. A ideia principal era que fosse gerado um debate sobre os conteúdos matemáticos presentes no livro *A culpa é das estrelas* e como podemos abordá-los em sala de aula com os alunos, especialmente as noções de infinito. Esperávamos que os participantes apresentassem suas visões de como podemos associar as ideias de infinito vistas no livro com as que são apresentadas ao longo do ensino fundamental II e do ensino médio: conjuntos numéricos, progressão geométrica infinita, entre outros. Além disso, queríamos saber o que os participantes julgam necessário ao professor saber sobre as noções de infinito para que o assunto possa ser abordado com os alunos em sala de aula e como poderíamos utilizar a literatura juvenil como ferramenta de ensino para as aulas de matemática. A ideia inicial era que houvesse realmente quatro encontros, mas, caso fosse necessário, poderíamos alterar esse planejamento ao longo da sua aplicação.

Os quatro encontros foram distribuídos ao longo de duas semanas, e tiveram em torno de 75 minutos cada um. Após cada encontro, foi feita a transcrição do vídeo e, a partir das contribuições dos participantes durante aquele encontro e das discussões abordadas nele, foi reorganizada a estrutura do encontro seguinte, quando necessário. A estrutura prevista para cada encontro foi organizada em documentos do Word e pode ser encontrada no Apêndice B.

4 OS ENCONTROS

Foram realizados quatro encontros virtuais durante a pesquisa, com seis professores do ensino básico. Dos seis, cinco lecionam matemática e uma, português. Utilizaremos aqui pseudônimos para os participantes: Annabeth, Eloise, Helena, Isabella e James são os professores de matemática e Julieta, a de português. Na tabela abaixo, estão os perfis acadêmicos e profissionais de cada participante na época em que os encontros foram realizados, organizados por ordem alfabética.

Tabela 1 - perfil dos professores participantes

Professor	Formação acadêmica	Onde trabalha
Annabeth	Formada em licenciatura em matemática (2020); mestranda em ensino de matemática (ingresso em 2021).	Professora de matemática em escola particular e em pré-vestibular social.
Eloise	Formada em licenciatura em matemática (2019); mestranda em ensino de matemática (ingresso em 2019).	Professora de matemática em escola particular.
Helena	Formada em licenciatura em matemática (2020); mestranda em ensino de matemática (ingresso em 2020).	Professora de matemática em curso superior online e em escolas particulares.
Isabella	Concluinte do curso de licenciatura em matemática; mestranda em ensino de matemática (ingresso em 2021).	Monitora de matemática em escola particular.
James	Concluinte do curso de licenciatura em matemática.	Monitor de matemática em escola particular.
Julieta	Concluinte do curso de letras.	Monitora e professora de Língua Portuguesa, Literatura e Redação em escolas particulares.

Fonte: elaboração própria

Os assuntos discutidos em cada um dos quatro encontros, assim como seus objetivos e os professores presentes, estão organizados na tabela a seguir:

Tabela 2 - participantes presentes nos encontros

Encontro	Participantes presentes	Objetivos pensados para o encontro	Assuntos discutidos com os professores
Encontro 1 (19/02)	Flávia (pesquisadora) Annabeth Eloise Helena Isabella James Julieta	Identificar a matemática presente no livro *A culpa é das estrelas;* identificar as noções de infinito presentes no livro *A culpa é das estrelas*.	Noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas;* noções matemáticas presentes em *A culpa é das estrelas* além das noções de infinito; relação entre matemática e literatura; interdisciplinaridade; qual professor estaria disposto a utilizar a literatura juvenil em sala de aula; público-alvo para a utilização do livro *A culpa é das estrelas* na aula de matemática.
Encontro 2 (23/02)	Flávia (pesquisadora) Janete (orientadora) Annabeth Eloise Helena Isabella James Julieta	Debater sobre infinitos maiores que outros e cardinalidade de conjuntos infinitos.	O que é matemática; o que é infinito; noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas*; representações de infinito; cardinalidade de conjuntos infinitos.
Encontro 3 (26/02)	Flávia (pesquisadora) Annabeth Eloise Isabella James Julieta	Debater se entre 0 e 1 e entre 0 e 2 existem infinitos com a mesma cardinalidade; apresentar a ideia do Hotel de Hilbert e debater sobre ela; apresentar o quadro "interdisciplinando" encontrado em um livro didático e debater sobre ele.	Noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas*; hotel de Hilbert; interdisciplinaridade; relação entre matemática e literatura; abordagem das noções de infinito em sala de aula.
Encontro 4 (05/03)	Flávia (pesquisadora) Annabeth Eloise Isabella James Julieta	Discutir como é possível abordar em sala de aula as noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas;* debater sobre experiências dos participantes com o uso da literatura juvenil na aula de matemática.	Abordagens em sala de aula; relação entre matemática e literatura; público-alvo para a utilização do livro *A culpa é das estrelas*; interdisciplinaridade.

Fonte: elaboração própria

A orientadora da pesquisa não pode participar do primeiro encontro e percebemos que no segundo, no qual ela esteve presente, os outros participantes ficaram mais inibidos e participaram menos do que na primeira reunião. Decidimos então que os últimos dois encontros seriam realizados sem sua participação, para que os professores se sentissem mais à vontade para compartilhar suas experiências e se engajar nas discussões, pois, como os encontros seriam gravados, ela poderia assistir depois. Todos os professores que fizeram parte da pesquisa estão na faixa dos 20 aos 30 anos e, por mais que tenham experiência em sala de aula e com pesquisa em educação matemática, acreditamos que tenham se sentido um pouco inibidos de compartilhar algumas opiniões com alguém mais experiente presente na videochamada. Por questões pessoais, a participante Helena não conseguiu comparecer ao terceiro e ao quarto encontros, mas participou ativamente nos dois primeiros. Todos os outros professores estiveram presentes nos quatro encontros.

Todos os professores foram muito participativos nas discussões e sempre interagiam, respondendo às perguntas feitas pela pesquisadora ou pelos colegas e trazendo novos questionamentos, que geravam novos debates. Durante a análise dos encontros foram determinadas treze categorias de assuntos discutidos nos encontros. Dentre elas, algumas surgiram a partir de discussões que partiram de provocações, de acordo com os tópicos já previstos no planejamento dos encontros, e outras a partir de levantamentos trazidos pelos participantes. As treze categorias estão organizadas na tabela a seguir, e não estão definidas de acordo com a ordem em que os assuntos apareceram nos encontros, e sim em uma ordem que julgamos coerente no momento da categorização.

Tabela 3 - Categorização dos assuntos

Relação entre matemática e literatura
Interdisciplinaridade e qual professor estaria disposto a utilizar literatura juvenil
Público-alvo e contemporaneidade do livro *A culpa é das estrelas*
Sobre o quadro “interdisciplinando” do livro didático
Hotel de Hilbert
A matemática presente em *A culpa é das estrelas* além das noções de infinito
Noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas* – infinitos maiores que outros

Noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas* – infinito entre 0 e 1 e infinito entre 0 e 2
Noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas* – questões filosóficas
Noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas* – representações
Noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas* – potencial x atual
Noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas* – abordagens em sala de aula
O que é matemática e o que é infinito

Fonte: elaboração própria

Durante a análise das categorias, foi feita uma redução e reorganização das treze, de acordo com os assuntos em comum trabalhados nelas. Assim, chegamos a 8 novas categorias, que estão organizadas dentro de três diferentes assuntos e serão abordadas em tópicos ao longo desse capítulo. São essas categorias:

- Interdisciplinaridade e o livro *A culpa é das estrelas*:
  - ✓ Contemporaneidade do livro *A culpa é das estrelas*;
  - ✓ Professores dispostos a adotar a literatura juvenil como ferramenta na aula de matemática;
  - ✓ Interdisciplinaridade.
- Relação entre matemática e literatura.
- A matemática presente em *A culpa é das estrelas:*
  - ✓ Infinitos maiores que outros;
  - ✓ Infinito nos conjuntos [0, 1] e [0, 2];
  - ✓ Infinito e filosofia;
  - ✓ Abordagens em sala de aula.

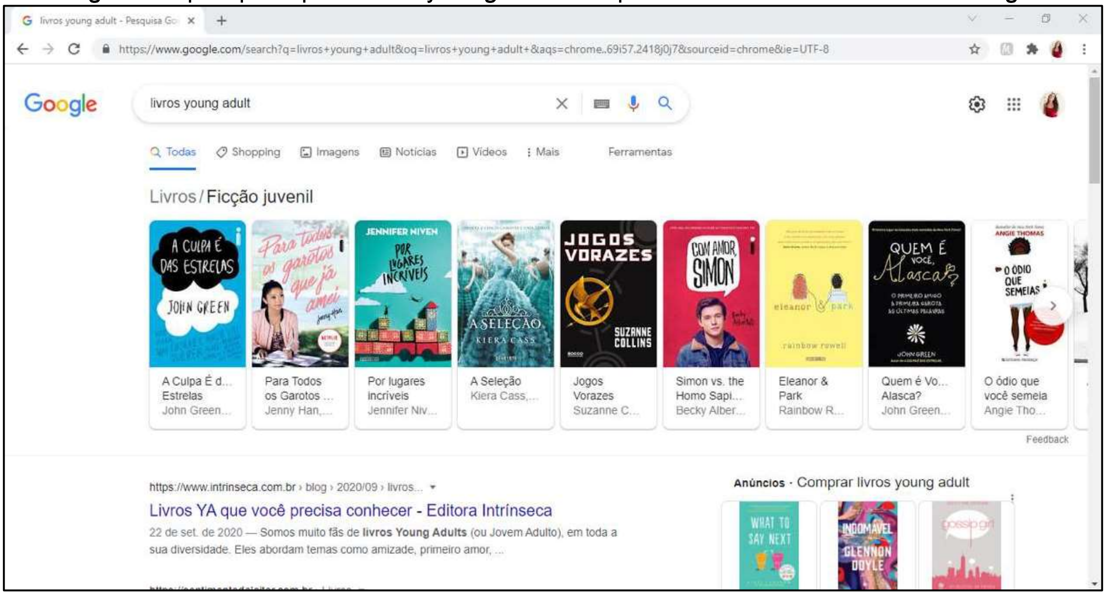
4.1 INTERDISCIPLINARIDADE E O LIVRO *A CULPA É DAS ESTRELAS*

4.1.1 Contemporaneidade do livro *A culpa é das estrelas.*

O livro *A culpa é das estrelas* foi lançado em 2012 em sua versão original e no mesmo ano foi traduzido e publicado no Brasil pela editora Intrínseca. A obra se manteve no ranking dos 10 livros mais vendidos do país de 2013 a 2015, de acordo com pesquisas feitas pela revista *Veja*. Em 2014 o livro foi adaptado para os cinemas e, segundo uma matéria da revista *Exame*, foi a maior bilheteria brasileira naquele ano. A revista *Veja* divulgou que em 2016 o longa-metragem foi exibido no canal de TV aberta Globo e rendeu a maior audiência do programa *Tela quente* naquele ano. Com base nesses dados, podemos dizer então que, em meados da década de 2010, *A culpa é das estrelas* foi um livro que fez muito sucesso no Brasil e obteve um público ainda maior com o lançamento do filme baseado em sua história. No entanto, isso significa que hoje em dia, na década de 2020, ainda seja uma leitura popular entre os adolescentes?

Durante as análises dos encontros, diante das discussões sobre quão atual é essa obra, decidimos pesquisar como as ferramentas de busca da internet poderiam permitir que os jovens tivessem acesso a esse livro. Para isso, abrimos o site *Google* em mais de cinco aparelhos diferentes, conectados a diferentes contas – para evitar que o histórico de pesquisa influenciasse o resultado –, e pesquisamos por “livros young adult”. Ao mostrar os resultados da busca, o livro *A culpa é das estrelas* apareceu logo como a primeira indicação do site, em todos os aparelhos.

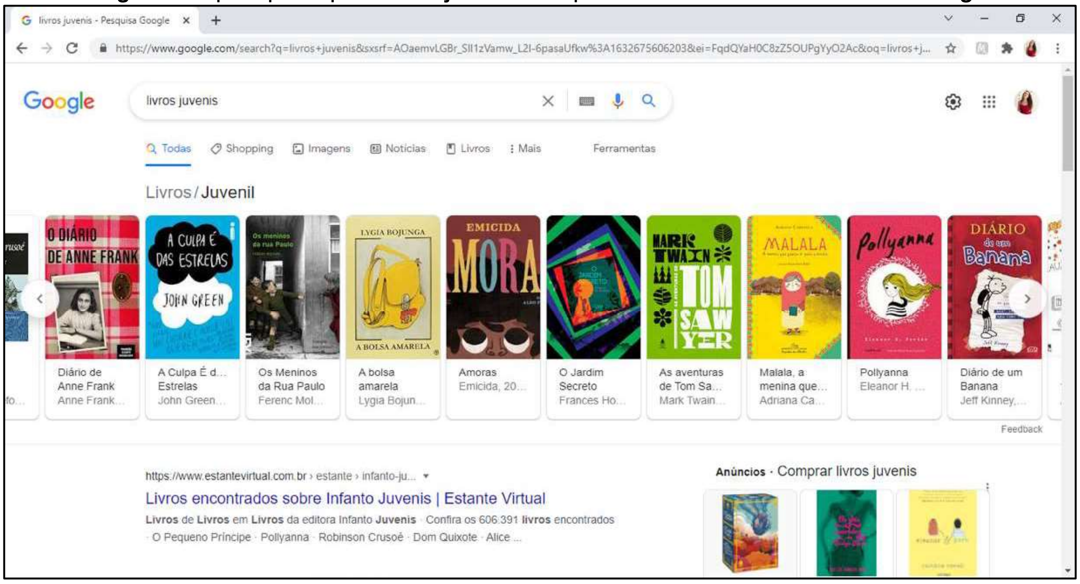
Figura 8 - pesquisa por livros “young adult” na plataforma de busca on-line Google



Fonte: elaboração própria

Quando pesquisamos por “livros juvenis”, o resultado foi um pouco diferente, porém ainda assim *A culpa é das estrelas* apareceu na segunda página de indicações.

Figura 9 - pesquisa por livros juvenis na plataforma de busca on-line Google



Fonte: elaboração própria

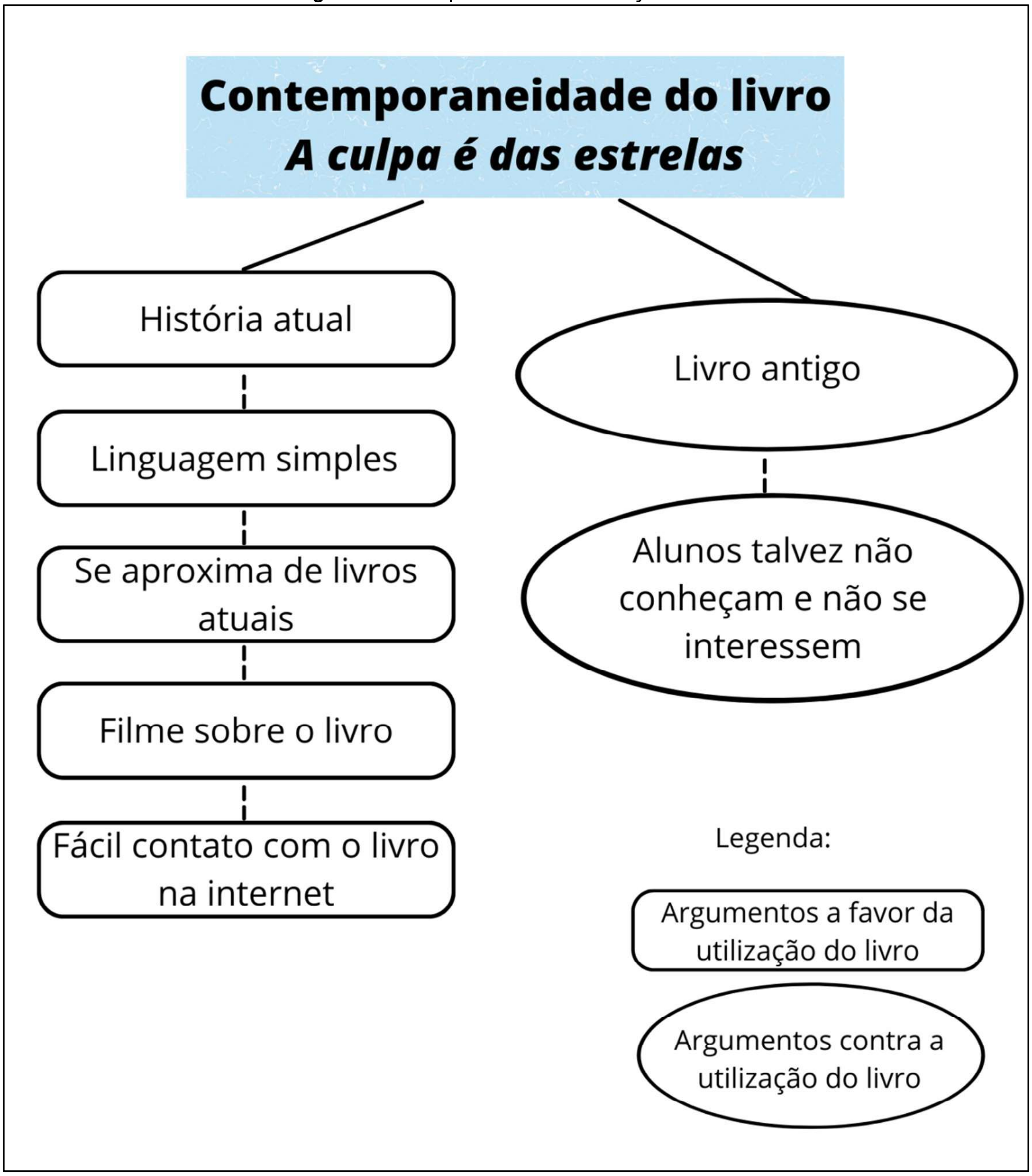
Buscando fora do âmbito da internet, em vendas de livros de maneira presencial, o livro *A culpa é das estrelas* também é frequentemente encontrado em livrarias e feiras de livro. Na Bienal do Livro do Rio de Janeiro, em dezembro de 2021, o livro esteve em destaque no estande da Editora Intrínseca – editora que publicou o romance no Brasil –, em uma estante denominada “Os clássicos da Intrínseca”, ao lado de outras obras da editora que fizeram sucesso ao longo dos anos.

Figura 10 - estante da editora Intrínseca na Bienal do Livro do Rio de Janeiro

Fonte: elaboração própria (2021)

Podemos utilizar esses dados para compreender e analisar melhor as discussões que surgiram e se desenvolveram acerca desse assunto no primeiro e no quarto encontros.

Figura 11 - esquema sobre a seção 4.1.1



Fonte: elaboração própria

As interações entre os professores participantes dos encontros estarão dispostas no seguinte formato:

Número do encontro – tempo – Professor: fala

As falas se iniciam com E1, E2, E3 e E4, que se referem aos encontros 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Em seguida, o tempo se refere ao momento em que a fala ocorreu, de acordo com o vídeo do encontro. Por último, temos o nome do professor e a transcrição de sua fala.

A tese desta sessão é que o livro *A culpa é das estrelas* não é um livro atual e, por isso, poderia não ser uma boa escolha para ser utilizado em sala de aula com os alunos. Tal ideia decorre de um questionamento da professora Eloise sobre o assunto, e, para podermos compreendê-la, analisaremos os argumentos dos participantes, que abordam tópicos como o ano em que o livro foi lançado, sua linguagem e sua história, a existência de um filme baseado na obra, a presença do livro em redes sociais, entre outros.

No início do primeiro encontro, enquanto respondia à pergunta “Vocês acham que as partes que falam de matemática no livro [*A culpa é das estrelas*] chamaram a atenção de vocês ou passaram batido? (...) Vocês pararam para pensar na matemática por causa do livro?”, a professora Isabella levantou a seguinte pergunta:

> E1 – 00:25:35 – Isabella: Será que um professor hoje atuante, que já tem não sei quantos anos em sala de aula, vai pegar um John Green (…) para tentar ver com seus alunos?

Esse questionamento levou os participantes a debaterem sobre alguns tópicos relacionados à interdisciplinaridade entre literatura e matemática, entre eles, a contemporaneidade do livro escolhido.

A professora Eloise, enquanto comentava sobre a diferença de idade entre professores e alunos do ensino médio ou dos anos finais do ensino fundamental, ressaltou que, por mais que muitos professores hoje em dia sejam jovens e estejam na casa dos vinte anos, ainda assim são cerca de 10 anos mais velhos que seus alunos. Supondo que talvez, por terem uma faixa etária mais próxima dos estudantes, esses seriam os professores que mais se disporiam a utilizar a literatura juvenil em sala de aula, uma vez que provavelmente consumiam esse conteúdo há pouco tempo, a participante sugeriu que existe a possibilidade de um livro que fez muito sucesso quase dez anos atrás não estar presente na lista atual de leituras dos adolescentes:

> E1 – 00:28:32 – Eloise: Será que o que a gente leu na adolescência e está disposta a refletir sobre é a mesma coisa que interessa aos alunos de hoje?

Pelo tom da pergunta de Eloise, podemos interpretar que a professora acredita que hoje em dia os jovens não se interessam pelos mesmos livros que nós, professores, nos interessávamos quando tínhamos a idade deles.

Essa pergunta não foi respondida por nenhum dos participantes presentes no encontro, a questão foi deixada de lado e a discussão naquele momento se voltou para a importância da literatura juvenil e a ideia de uma proposta interdisciplinar entre literatura e matemática. O assunto voltou à pauta somente no quarto encontro.

No quarto encontro, durante uma discussão sobre abordagem de conteúdos matemáticos a partir da leitura de *A culpa é das estrelas,* a professora Eloise retomou sua ideia de que talvez esse livro não fosse atual para os adolescentes e relatou que, em sala de aula, costuma ver seus alunos lendo no tempo livre, especialmente livros como os das séries *Harry Potter* e *Percy Jackson e os olimpianos*, duas séries infantojuvenis de fantasia – a primeira com sete volumes e a segunda com cinco. A fala de Eloise desta vez deu origem a uma discussão entre os participantes.

> E4 – 00:21:11 – Eloise: Eu vejo muito Harry Potter, eu vejo muito Percy Jackson (...) trazer alguma coisa que tenha a ver com o lazer deles, eu acho superlegal. Eu só não tenho certeza de que A culpa é das estrelas esteja hoje em dia no lazer deles.
>
> E4 – 00:22:48 – Flávia: eu parei para pensar realmente, que livros que foram lançados assim (...) recentemente que são *best sellers*? Harry Potter tem... tem muitos anos (...) eu sei que é uma coisa antiga, mas até que ponto ser uma coisa antiga também faz com que não seja uma coisa recente? Eu fiquei pensando nisso, eu fiquei pensando e eu não tenho uma resposta para isso, mas eu fiquei 'será mesmo que eles não leem *A culpa é das estrelas* ou qualquer outro livro desses que a gente pegue?' (...) será que por não ser um livro lançado recentemente não é algo que esteja ali?
>
> E4 – 00:24:04 – James: eu acho que a gente não precisa entender como sinônimos, a data de lançamento de um livro com a contemporaneidade dele (…) por exemplo, Harry Potter (...) é um livro contemporâneo ainda, ele tem uma linguagem moderna (...) a linguagem do livro, a narrativa é moderna. Isso você pode observar também em *A culpa é das estrelas*, ele também é um livro contemporâneo. (…) Os dramas vividos ali naquela história ainda são muito modernos, entendeu? Então dá para o jovem de hoje em dia se identificar com aquele livro, com aquela história. Não se trata da data de lançamento do livro ou se ele é um 'hit' do momento porque foi lançado e viralizou... não... acho que é mais a questão da linguagem mesmo.
>
> E4 – 00:25:55 – Julieta: Quando a gente fala de uma série de fantasia, a gente está falando de uma série de livros, a gente não está falando de um romance único. Tem isso também. Uma série permeia por mais tempo do que um livro único. E a gente está falando de fantasia e não de um romance, entende? Também tem diferença. Essas coisas entram na equação se uma coisa é atual ou não. (...) Eu concordo com você, mesmo que (...) não seja uma coisa que eles já tenham lido, a gente oferecer para eles lerem é legal, porque se aproxima de um livro atual que eles estejam lendo, entendeu?

> E4 – 00:32:17 – Annabeth: É um livro que de repente nossos alunos não conhecem do mesmo jeito que a gente conhece. Mas assim, se a gente parar para pensar, <u>a realidade que os personagens vivem no livro (…) não é tão diferente da realidade que a gente vive hoje</u>. O que mudou? A gente tem uma internet um pouquinho melhor, a gente tem um pouquinho mais assim de meios de comunicação, 'whatsapp', que naquela época não tinha, mas cara, não mudou tanta coisa. Então não vai ser um choque para o aluno pegar aquilo e falar 'meu deus, que livro velho', eu acho que é um livro que vai falar com eles da mesma forma que falou com a gente, a diferença é só que a gente entrava na livraria e via *A culpa é das estrelas* ali na primeira prateleira, lançamento, e eles não, então talvez eles não tenham esse contato.

> E4 – 00:35:26 – Eloise: eu acho que talvez tenha até a <u>vantagem do filme</u>, né, mesmo quem não leu o livro pode ter algum tipo de conexão com o filme. A gente [pode] fazer um intermídia (…) você sempre pode passar uma cena do filme no (…) projetor. (...) Pode ser um caminho talvez, que o filme é uma coisa que é um pouquinho mais recente né, alguns anos mais recente, então talvez faça... uma ponte.

> E4 – 00:37:33 – Eloise: vai ver a gente está subestimando o gosto literário dos nossos alunos [enquanto dava de ombros].

> E4 – 00:37:38 – Annabeth: Acho que a gente também esquece que existe uma 'parada' para eles que é muito real, (...) que é a internet, a internet ressuscita muitas referências "antigas", entre aspas. Eles usam muito Twitter (...) então cara, se eles não conhecem *A culpa é das estrelas*, <u>é possível que eles vejam falar sobre na internet</u>. (...) Eu não acho que é uma 'parada' que é tão distante da realidade deles para a gente pensar que isso vai ser um problema, não acho que seja.

Diante dos exemplos citados na primeira fala de Eloise no quarto encontro, apresentada acima, e sabendo que o primeiro livro da série *Harry Potter – Harry Potter e a pedra filosofal* –, da escritora britânica J. K. Rowling, foi publicado pela primeira vez em 1997 e o primeiro volume de *Percy Jackson e os olimpianos – O ladrão de raios* –, do escritor estadunidense Rick Riordan, teve sua primeira edição em 2005, ambos lançados anos antes de *A culpa é das estrelas* e, segundo a própria Eloise, ainda estando presentes no círculo de leituras dos adolescentes, questionei aos participantes por que poderíamos considerar que *A culpa é das estrelas* talvez estivesse ultrapassado se vemos com frequência nossos alunos lendo livros mais antigos que ele. A professora de português, Julieta, deu sua opinião sobre o assunto e, junto a Annabeth e James, defendeu a ideia de que, mesmo caso *A culpa é das estrelas* não seja hoje em dia uma leitura recorrente entre os jovens, ainda assim trata de uma história atual, que não é ultrapassada e possui uma linguagem simples, podendo ser vista como um passatempo para o aluno. James reforçou que, mesmo não sendo tão recente, o livro é contemporâneo, por sua história e sua linguagem, permitindo, assim, que os alunos possam se identificar com a leitura e com o tema abordado por ela.

De acordo com os argumentos levantados por Julieta, James e Annabeth, a ideia de escolher uma obra da literatura juvenil que talvez não seja tão popular hoje em dia como era cerca de cinco a sete anos atrás pode ser ainda assim bem recebida pelos alunos, considerando que a linguagem utilizada no romance e as situações vivenciadas pelos personagens são voltadas para o público jovem e podem despertar o interesse dos adolescentes por aquela leitura e pelo que está envolvido nela.

Um ponto levantado, ora explícita, ora implicitamente, nessa discussão foi a dicotomia entre as ideias de novo e velho. Podemos interpretar, pelas falas dos participantes, que um livro velho remete a algo negativo, dando a ideia de que um novo, mais atual, poderia ter mais valor. No entanto, a conversa pontua justamente a dúvida sobre em qual dessas duas categorias – novo ou velho – *A culpa é das estrelas* se encaixaria.

Partindo da data de lançamento e do período em que o livro atingiu seu ápice de sucesso, entendemos que a professora Eloise enxerga essa obra como ultrapassada, acreditando que os alunos não teriam contato espontâneo com ela e, consequentemente, não se interessariam pelo que ela abordasse. Sob o ponto de vista da linguagem, da narrativa e da história presentes na leitura, os professores Annabeth, Julieta e James defendem que, independentemente do ano de lançamento do livro, ele ainda assim pode ser considerado como algo novo, pois seria bem recebido pelos alunos e permitiria uma conexão deles com a história narrada, uma vez que a linguagem utilizada pelo autor é moderna e simples, e a narrativa permite uma identificação dos jovens com a história – como sabemos que é uma das características das narrativas *Young adult*, segundo Kaplan (2005).

Ao ouvir os argumentos dos outros professores, interpretamos que Eloise reconsiderou sua opinião sobre o livro ser ou não atual, refletindo sobre os pontos levantados pelos colegas e acrescentando que os alunos poderiam conhecer a história de Hazel e Augustus graças ao filme, que fez muito sucesso ao ser lançado. A professora sugeriu uma abordagem em sala de aula a partir do filme, caso não fosse possível realizá-la a partir do livro. A proposta de utilização do filme, assumindo que os alunos teriam contato mais provável com a mídia do que com a leitura, sugere que, como os jovens já conheceriam o filme *A culpa é das estrelas*, ele poderia ser utilizado com dois propósitos: o primeiro, de maneira direta, passando trechos do filme, ou mesmo o filme inteiro, para os alunos; o segundo, como uma ponte para o livro, uma vez que, conhecendo o filme, os jovens desenvolveriam curiosidade e interesse pelo livro.

A sugestão de Eloise de utilização do filme *A culpa é das estrelas*, no entanto, deixa implícito que, na realidade, a professora não esteve completamente convencida de que adotar o livro seria a melhor abordagem. Ao propor a utilização da mídia no lugar da obra escrita, a professora insiste que há uma abordagem mais propícia da história, alternativa à utilização do livro. Apesar de o filme ter sido lançado apenas dois anos após o livro, Eloise argumenta que, por ser mais recente, talvez os alunos conheçam o filme, mas não o livro. Compreendemos que Eloise acredita que, para que seja possível aproximar os alunos do livro *A culpa é das estrelas*, é necessária a utilização do filme como ponte.

Podemos perceber que, quando uma produção cinematográfica baseada em um romance é lançada e atinge um grande público, o livro que deu origem à obra cinematográfica ganha destaque nas livrarias e em sites de venda de livros e, muitas vezes, se torna um dos mais vendidos do momento. O sucesso de uma produção cinematográfica faz com que o público se interesse pelo livro em que ela foi baseada.

Outro exemplo, mais recente, é a série *Bridgerton*, lançada pela plataforma de streaming Netflix em dezembro de 2020. A série é baseada em uma coleção de nove livros chamada *Os Bridgertons*, da escritora estadunidense Julia Quinn, lançada no Brasil entre 2013 e 2016. Devido ao lançamento da série na Netflix, a busca pelos livros aumentou consideravelmente, o que levou a Editora Arqueiro – editora responsável pela publicação dos livros da Julia Quinn no Brasil – a realizar relançamentos das histórias em diferentes edições especiais, assim como passou a ser possível adquirir uma coletânea com todos os livros juntos.

A partir disso, entendemos que Eloise não acredita que os jovens tenham contato com o livro *A culpa é das estrelas*, ou até mesmo interesse por ele, então buscou por uma alternativa que permitisse que os adolescentes se conectassem ao livro: o filme. A professora reforça sua opinião em sua fala “vai ver a gente está subestimando o gosto literário dos nossos alunos", onde deixa implícita sua dúvida se o livro *A culpa é das estrelas* atualmente conquista a atenção dos jovens.

Em resposta a Eloise, Annabeth ressaltou um ponto interessante, que não havia sido mencionado até então: hoje em dia, os adolescentes têm constante acesso à internet, o que possibilita um grande contato com diversas referências.

Por mais que o livro escolhido já tenha sido lançado há alguns anos, com a interação possibilitada pela internet, os adolescentes podem ter acesso a ele em diferentes redes sociais, ou mesmo pesquisando sobre literatura juvenil em sites de busca, como apresentado no início dessa seção. Assim, podem conhecê-lo e saber sobre sua história através da internet. Além disso, a obra de John Green também continua presente em livrarias e feiras do livro – mesmo que não na seção de lançamentos, como pontuou Annabeth, mas, por vezes, ainda em destaque por outras razões.

Foi possível perceber, a partir das discussões sobre esse assunto ocorridas no primeiro e no quarto encontros, que a professora Eloise, de início, esteve receosa quanto ao uso do livro *A culpa é das estrelas* com os adolescentes. No primeiro encontro, o questionamento trazido por ela não teve repercussão com os outros participantes, que acabaram seguindo por outros assuntos em suas falas e contribuições, e acabou sendo deixado de lado nos dois encontros seguintes. No entanto, no último encontro, a professora reforçou sua ideia de que a obra talvez não estivesse presente no cotidiano dos alunos como esteve na época em que nós, professores, éramos jovens. Os outros participantes, especialmente Annabeth, James e Julieta, argumentaram que, mesmo não sendo um livro lançado recentemente, *A culpa é das estrelas* pode ser considerada uma leitura atual, por tratar de assuntos presentes no cotidiano dos jovens. Inicialmente, interpretamos que Eloise, ao ouvir os contra-argumentos, pareceu reconsiderar seu argumento inicial, mas, analisando suas falas e as ideias que deixou implícitas, a professora não se convenceu de que o livro *A culpa é das estrelas* seja uma obra com a qual os adolescentes tenham contato atualmente.

Pensando na ideia inicial, de que *A culpa é das estrelas* poderia não ser uma boa escolha para se utilizar com os alunos, por não ser um livro lançado recentemente, podemos perceber, a partir dos argumentos levantados ao longo desta seção, que é possível contradizer tal afirmativa. Apesar de ser um livro que completou dez anos em 2022, *A culpa é das estrelas* possui uma linguagem simples, voltada para o público jovem, e apresenta uma história com dramas e acontecimentos presentes na vida de muitos adolescentes, o que permite que esse público se identifique com a narrativa durante a leitura. Além disso, mesmo não sendo um lançamento recente, o livro continua presente tanto na internet – em redes sociais, ferramentas de buscas, sites que vendem livros etc. – quanto em pontos de venda físicos, o que permite que os adolescentes tenham contato fácil e espontâneo com o livro.

4.1.2 Professores dispostos a adotar a literatura juvenil como ferramenta na aula de matemática

Nesta seção, consideramos a tese de que há professores de matemática que não utilizariam obras de literatura juvenil em suas aulas. A partir de um questionamento da professora Isabella, analisaremos as contribuições dos participantes para compreender o que motivaria ou desmotivaria os professores de matemática a adotar a literatura como ferramenta para o ensino, e qual seria o possível perfil de um professor que utilizaria esse material.

Figura 12 - esquema sobre a seção 4.1.2

Fonte: elaboração própria

Quando Isabella, no primeiro encontro, questionou se um professor de matemática que atua há muitos anos estaria disposto a utilizar a literatura infantojuvenil no ensino de matemática, ela reforçou que ainda acha a matemática uma disciplina muito rigorosa em relação à realização de exercícios, e que acredita que muitos professores não seriam adeptos a utilizar a literatura como uma alternativa ao ensino tradicional de matemática. A professora ressaltou que, no entanto, ela com certeza estaria disposta a utilizar a literatura infantojuvenil em sala de aula com seus alunos e Annabeth, em resposta, comparou o uso da literatura ao uso da tecnologia em sala de aula.

> E1 – 00:25:35 – Isabella: Será que um professor hoje atuante, que já tem não sei quantos anos em sala de aula, vai pegar um John Green para ver, para tentar ver com seus alunos? Então a gente fica nisso, é muito fácil para a gente pensar em tentar aproximar esses alunos da literatura ou vice versa, como a Annabeth falou, os alunos de exatas e tudo. Mas e as pessoas que já estão atuando e que não têm tanto contato com a literatura, os próprios professores, será que eles se propõem a fazer isso? Então cabe à gente, à nova geração de professores? Ou a gente vai tentar mudar tudo? Por isso que eu achei o tema muito legal, e... a nossa matemática ainda é muito rigorosa nessa questão de exercício, então a gente tem livros paradidáticos só para a área mesmo da literatura. É muito difícil um professor chegar e falar assim 'ó, quero mudar, quero botar *A culpa é das estrelas* para o pessoal ler no nono ano para a gente discutir'. Quando isso vai ser aceito? Eu acho que a gente tem que parar para pensar na questão de que professores estão dispostos a voltar a ler livros infantojuvenis para tentar pegar, aproximar mais esses alunos e fazer uma matemática mais 'humanizada' talvez? Eu estaria disposta, porque amo livro infantojuvenil, e amo livro de ficção, e acho que as pessoas têm que levar mais a sério livro de ficção, mas acho legal a gente também pensar nisso, quem estaria disposto a fazer essa mudança?
>
> E1 – 00:31:09 – Annabeth: a gente fala muito hoje sobre tecnologia, né, qual tipo de professor vai estar disposto a mudar a aula dele para inserir uma 'parada' tecnológica? Eu acho que é mais ou menos a mesma discussão, só que com uma ferramenta diferente (...) do mesmo jeito que vão ter professores que vão naturalmente inserir uma 'parada' tecnológica em sala de aula, vão ter professores que também vão naturalmente levar esses livros para sala de aula, e aí a 'parada' é a gente tentar, a partir das nossas vivências, disseminar isso para outros professores, que de repente não vejam isso com tanta facilidade, sabe?

Isabella deixa explícito, em sua fala, que acredita que poucos professores estariam dispostos a utilizar um livro de ficção na aula de matemática. A ideia de disposição levantada pela professora indica que a abordagem de um material de literatura – especificamente de literatura juvenil, neste caso – é uma tarefa que demanda esforço, e não seria feita naturalmente pelos professores, exigiria uma maior disposição. Entendemos que Isabella não crê que a utilização da literatura nas aulas de matemática seja uma tarefa que funcionaria, apesar de se colocar como uma das professoras que utilizaria essa ferramenta. Annabeth reforça, em seguida, a mesma ideia de que há professores que não adotariam a literatura juvenil em suas aulas por sentirem dificuldade em introduzir uma obra da literatura na aula de matemática e enxergar a conexão entre as duas disciplinas.

A ideia de que a interdisciplinaridade demanda esforço dos professores para poder existir foi a chave para a discussão sobre quais seriam os professores, ou quais seriam os perfis dos professores, que estariam dispostos a realizar essa prática com seus alunos.

Nos estudos sobre educação – nos cursos de licenciatura, em pós-graduações voltadas para o ensino, em debates dentro de escolas etc. – é comum a discussão sobre qual professor estaria disposto a utilizar recursos tecnológicos na aula de matemática como alternativa ao ensino tradicional. Annabeth disse que acredita que a ideia da discussão sobre qual professor estaria disposto a utilizar a literatura juvenil seja a mesma da tecnologia.

Tanto a literatura como a tecnologia foram tratadas pelas professoras como algo naturalmente dissociado da matemática. Assim, para que fossem usadas nas aulas de matemática, deveriam ser inseridas no contexto para que então pudessem ser relacionadas à disciplina. Esse tratamento das ferramentas – tecnologia e literatura – como algo que não está originalmente relacionado à matemática e, portanto, para que sejam utilizadas na aula de matemática, devem ser inseridas no contexto de sala de aula, reforça a ideia de interdisciplinaridade como o ato de juntar áreas que naturalmente estão separadas. Assim, as disciplinas não são tratadas como algo complexo e espontaneamente interligado, e sim como diferentes áreas que demandam esforço para serem vistas simultaneamente. Na escola básica, as disciplinas realmente estão compartimentadas e desassociadas umas das outras. No entanto, essa compartimentação dos conteúdos em áreas separadas não corresponde ao que ocorre em outras situações da vida, fora de sala de aula. Em nosso cotidiano, as disciplinas estão sempre interligadas como algo complexo, sem divisões onde uma termina e outra se inicia.

Este assunto voltou a ser tratado no fim do quarto e último encontro, quando Julieta perguntou a Eloise se é comum, entre os professores de matemática – tanto formados quanto em formação –, observar a vontade em realizar projetos interdisciplinares. Julieta disse que na área de letras é comum que os professores busquem novas abordagens e projetos.

Eloise respondeu sobre sua percepção acerca dos alunos da licenciatura em matemática, na época em que ela cursou a graduação, e dos professores de matemática com quem trabalha hoje em dia, e Isabella e Annabeth também deram suas respostas.

> E4 – 01:02:03 – Julieta: você acha que vocês, como matemáticas, isso é uma coisa comum de se ver, que... sei lá, na graduação, os seus colegas e tal... você acha que <u>tem bastante professor querendo fazer esse tipo de projeto</u>? Porque em letras a gente vê que isso é maioria sabe? Todo mundo querendo fazer projeto, todo mundo querendo expandir, pegar as coisas de uma maneira diferente... isso a gente vê muito! Mas assim, você acha que na matemática as pessoas têm bastante essa vontade?
>
> E4 – 01:02:47 – Eloise: Tem a ‘galera’ que se entrega de coração para a licenciatura numa perspectiva de educação matemática e de realmente repensar o ensino. E tem a ‘galera’ que quer morrer cada vez que tem uma aula na faculdade de educação. São dois perfis bem distintos. (...) Se eu for olhar no ambiente que eu trabalho hoje, eu me interesso muito mais em falar com a ‘galera’ de história e de sociologia do que com o pessoal de matemática, porque às vezes é difícil. Até porque tem muitos professores que são mais velhos, também tem muito essa <u>questão geracional</u>, né? Eu tenho fé de que existe uma geração sendo formada que está interessada.
>
> E4 – 01:08:46 – Isabella: ainda não convivi com pessoas que gostavam de romance e que gostavam de literatura mais jovem, literatura fantástica, (...) uma literatura mais jovem. Então eu acho que mesmo assim, mesmo aquelas pessoas que ainda querem repensar o ensino, essa questão da literatura juvenil... por isso que eu falei, eu acho que foi no primeiro [encontro], que professor estaria disposto? Porque eu <u>na licenciatura não conheci muitos professores que talvez estivessem dispostos a ler esses livros mais jovens</u>.
>
> E4 – 01:10:48 – Annabeth: eu sinto que as pessoas com quem eu convivo da minha licenciatura, as pessoas com quem eu convivo que trabalham comigo mas que vieram de licenciaturas, têm uma <u>preocupação maior em construção de conhecimento</u> e menos aquele apego assim... para a gente que está em matemática né, sabe que muitas vezes a ‘galera’ tem um apego a procedimento, a fazer uma lista de 50 exercícios da mesma coisa, super mecânica, até você não aguentar fazer mais (...) eu pelo menos já consigo perceber isso sendo um pouquinho quebrado.

As professoras de matemática retomaram, em suas respostas a Julieta, a ideia que havia sido discutida no primeiro encontro, sobre qual professor estaria disposto a aplicar uma prática interdisciplinar com literatura na aula de matemática. Um dos argumentos apresentados mencionou que professores mais velhos são mais relutantes à inserção de diferentes ferramentas e tecnologias na aula de matemática. A professoras Eloise e Annabeth sugeriram acreditar que as novas gerações de professores – nós – seriam as responsáveis por, aos poucos, mudar a estrutura da sala de aula tradicional de matemática, para que, em alguns anos, não haja tanta relutância em relação às abordagens interdisciplinares.

De acordo com os relatos das professoras de matemática, é comum que essa disciplina seja trabalhada seguindo um modelo de sala de aula tradicional, sem o uso de diferentes ferramentas. No entanto, um dos pontos levantados foi a questão geracional: é mais comum ver professores mais velhos relutantes à utilização de diferentes tecnologias do que os mais jovens. Segundo Annabeth, a nova geração de professores advinda dos cursos de licenciatura apresenta uma maior preocupação com a abordagem da disciplina em sala de aula e provavelmente estaria mais disposta a utilizar diferentes ferramentas e tecnologias, como a literatura juvenil.

Segundo elas, o ensino de matemática tradicional seria aquele em que o procedimento e a repetição são o principal, e não possui foco na construção de conhecimento pelo aluno. Para os professores que seguem um modelo de sala de aula tradicional, as listas de exercícios são comumente presentes nas aulas e o foco é no método e no procedimento. Annabeth entende que o uso de diferentes tecnologias em sala de aula, como a literatura, pode colaborar com a construção de conhecimento e com a compreensão dos conteúdos, em contraposição ao que conhecemos como ensino tradicional, em que o professor apresenta a matéria no quadro e, então, passa exercícios para os alunos resolverem de maneira repetitiva – prática que foca no procedimento, com o objetivo de se decorar o que está sendo trabalhado, e não na compreensão e construção daquele conhecimento.

De acordo com Annabeth, os professores de matemática que cursaram licenciatura em matemática costumam ter uma preocupação maior com o método de ensino e com o aprendizado do aluno a partir da construção do conhecimento. Já os professores oriundos de outras formações não mostram essa mesma preocupação, em sua percepção.

Tal fato pode ser justificado pelas disciplinas de educação presentes no currículo das licenciaturas atuais, que não seguem mais o modelo que seguiam antigamente, em que as disciplinas de matemática eram completamente separadas das de didática – que eram grande minoria no currículo. Por muito tempo, os cursos de licenciatura se basearam no modelo 3+1, em que a graduação era dividida em 3 anos de conteúdo específico e 1 ano de conteúdo didático (MOREIRA, 2012).

Atualmente, mesmo com disciplinas de matemática e educação ainda dissociadas, o currículo dos cursos de licenciatura apresenta disciplinas de educação matemática, além de possuir uma grade mais equilibrada entre matemática e educação, não tendo como ênfase principal a matemática pura, como era há alguns anos.

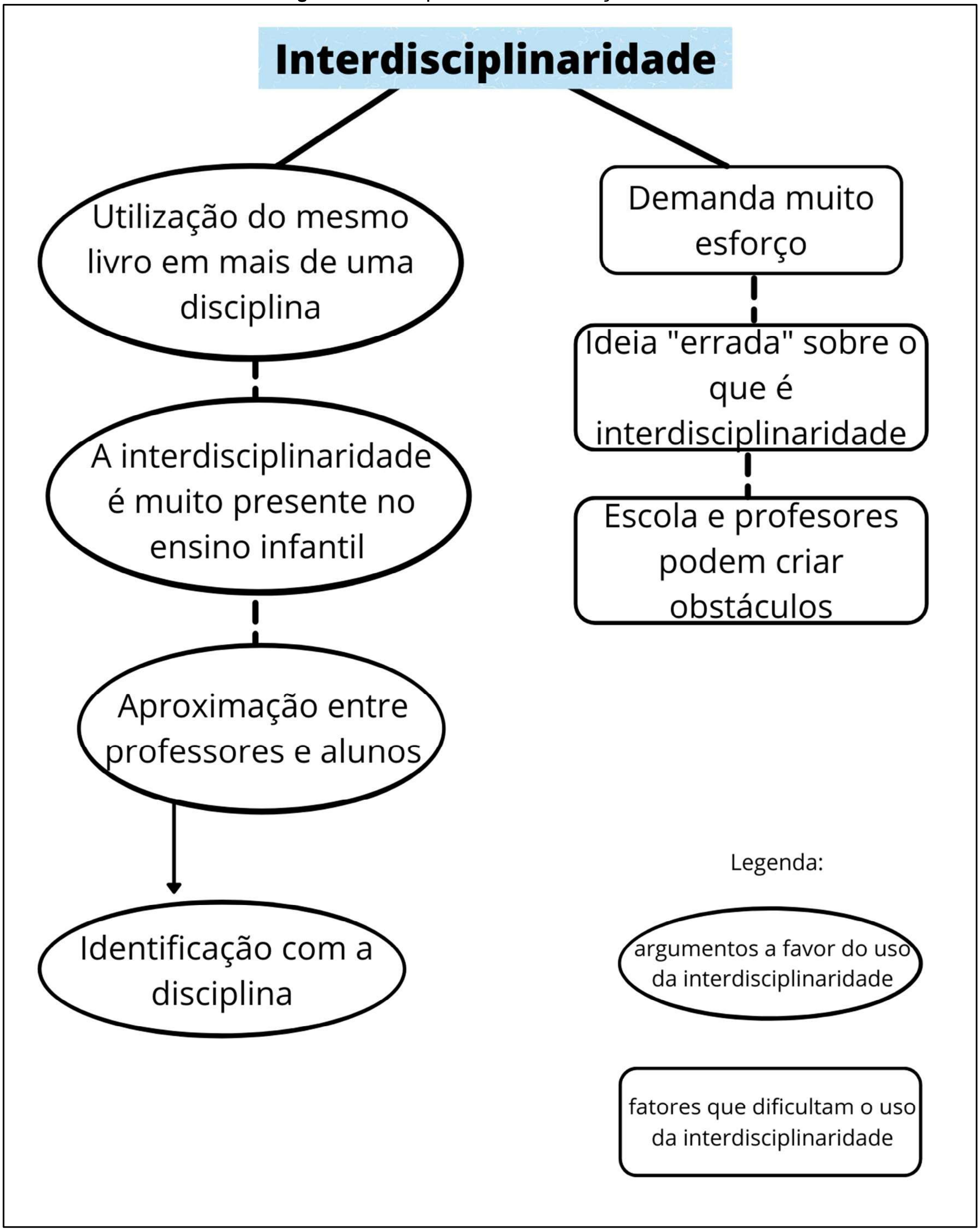
Em contraponto ao argumento de Annabeth, Isabella relatou que mesmo os professores mais jovens que trabalham com ela ou que estudaram com ela na licenciatura não apresentaram interesse pela literatura juvenil e provavelmente não a adotariam como ferramenta em suas aulas. Isabella deixa a entender, por sua entonação, que acha a literatura juvenil subestimada por seus colegas, como se fosse uma ferramenta que não vale a pena ser utilizada. Assim, a professora mostra, mais uma vez, a ideia de que poucos professores de matemática utilizariam a literatura juvenil em suas aulas. Isabella deixa subentendido que, para que um professor de matemática adote a literatura, é necessário que ele tenha contato com esse material e interesse por ele, o que não ocorre com os professores que ela conhece.

A conversa entre as professoras não chegou a uma conclusão unânime sobre o assunto, mas as professoras concordaram que há professores que utilizariam a literatura juvenil em suas aulas e outros que dificilmente realizariam essa abordagem de maneira espontânea. Os primeiros seriam aqueles dispostos a estudar sobre a educação e elaborar diferentes propostas para abordagens em sala de aula, pois acreditam que o processo de aprendizagem de matemática parte da construção do conhecimento, enquanto os últimos se atêm à sala de aula tradicional, seguindo a ideia antiga de que a matemática se baseia apenas em procedimentos metódicos de realização de exercícios, e não adotariam em suas aulas ferramentas como a literatura juvenil.

4.1.3 **Interdisciplinaridade**

Nesta seção, nos basearemos na tese de que a interdisciplinaridade traz benefícios para o aprendizado dos alunos. Além disso, obstáculos podem ser encontrados na aplicação de práticas interdisciplinares em sala de aula. A partir das contribuições dos professores participantes da pesquisa, buscaremos compreender o que eles entendem por interdisciplinaridade e como ela pode ser utilizada no ensino de matemática, mais especificamente entre as disciplinas de matemática e língua portuguesa, para a utilização de obras de literatura juvenil. Além disso, tentaremos entender quais são os obstáculos encontrados pelos professores ao utilizar práticas interdisciplinares.

Figura 13 - esquema sobre a seção 4.1.3



Fonte: elaboração própria

Ao final do primeiro encontro, Eloise pediu ao grupo para voltar à discussão sobre a abordagem do livro *A culpa é das estrelas* em uma proposta interdisciplinar para acrescentar uma ideia. A professora sugeriu que a adoção de um livro para a aula de matemática fosse feita em conjunto com os livros paradidáticos adotados na disciplina de literatura. Em apoio à ideia de Eloise, a professora Julieta acrescentou que há muitos aspectos em *A culpa é das estrelas* que podem ser trabalhados na disciplina de português.

> E1 – 01:00:12 – Eloise: (...) é pegar os livros que os alunos já estão lendo como paradidáticos para literatura. Quem diz que aqueles livros não têm potencial para serem discutidos em outras disciplinas? Por que o que eles estão vendo em literatura não pode conversar com matemática, história, geografia... sem ser o livro paradidático *de* matemática? Porque para você conseguir fazer passar um livro paradidático para matemática, pode te dar um trabalhão, mas se os alunos já estão lendo aquilo (...) que trabalho vai te dar você saber o que seus alunos estão lendo na aula de literatura e talvez tentar ler os que você não conhece e se inteirar aí, que é o que está no universo deles naquele momento. (...) A interdisciplinaridade é uma coisa que a gente fala, mas a gente não faz, então por que não?
>
> E1 – 01:02:39 – Julieta: Super dá para trabalhar português nesse livro, tem metáforas, vários conceitos superinteressantes para se trabalhar, toda a cabeça que o Gus coloca, tem muita coisa aí para se trabalhar, com certeza.

Eloise destaca que pode ser difícil, para um professor de matemática, conseguir que livros paradidáticos sejam aprovados pelos colégios somente para a sua disciplina, então sugere uma utilização conjunta com a disciplina de língua portuguesa. Com base em nossas experiências, realmente não é comum ver livros paradidáticos sendo pedidos para a disciplina de matemática na lista de material dos alunos do segundo segmento do ensino fundamental e do ensino médio. Fazendo uma ponte com o que as professoras trouxeram na seção anterior, sobre ainda haver relutância de professores de matemática em utilizar a literatura em suas aulas, podemos compreender que essa poderia ser uma das razões pelas quais não é um hábito frequente que livros de literatura sejam trabalhados na disciplina de matemática.

Segundo Eloise, se os alunos já estão lendo determinada obra nas aulas de língua portuguesa, pode ser mais simples para o professor de matemática utilizar aquela mesma obra em suas aulas, em vez de ter um livro exclusivo para a disciplina. A ideia da professora consiste em adotar o mesmo livro – neste caso, *A culpa é das estrelas* – para as disciplinas de literatura e matemática. Em resposta a Eloise, Julieta confirma que o livro de John Green seria uma opção coerente para ser trabalhada na disciplina de língua portuguesa, e apoia a ideia.

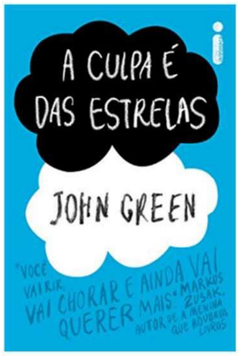
Vale ressaltar que, neste caso, as professoras utilizam o termo “livro paradidático” para se referir ao livro de literatura que seria utilizado como material complementar nas aulas de matemática, mesmo que ele não seja especificamente um livro paradidático de matemática, e sim um livro de literatura que envolva conceitos matemáticos.

O encontro se encerrou com essa fala de Julieta, então o assunto não repercutiu mais entre os participantes e só voltou a ser debatido no terceiro encontro, quando, de acordo com o planejamento, foi apresentada aos participantes uma foto de um texto enquadrado, parte de um livro didático de matemática adotado por um colégio particular do Rio de Janeiro, que trazia uma reflexão sobre o livro *A culpa é das estrelas*. Como o livro é material exclusivo desse colégio, não temos permissão para reproduzir a foto, então criamos um quadro similar, onde apresentamos seu conteúdo. O quadro, intitulado “Interdisciplinando” trazia o seguinte texto:

Figura 14 - quadro "Interdisciplinando"

Interdisciplinando

Você já leu o livro ou assistiu ao filme A culpa é das estrelas? A culpa é das estrelas conta a história de dois jovens enfermos. No entanto, isso não impede que eles vivam uma história de amor. E quem disse que em um romance a matemática não está presente? Em uma passagem emocionante, a personagem Hazel Grace faz um discurso comparando os possíveis tamanhos de infinito. Ela questiona a quantidade de números entre 0 e 1 e, posteriormente, percebe que existem mais números entre 0 e 2. Ela chega à conclusão de que existem diferentes tamanhos de infinito e que uma vida curta não é, necessariamente, menos intensa que uma longa.



Fonte: elaboração própria

O trecho foi apresentado aos professores, e foi perguntada a opinião deles sobre o conteúdo do quadro. As respostas giraram em torno das noções de infinito abordadas e da ideia de interdisciplinaridade, apresentada no título do material. Sobre a interdisciplinaridade, a professora Eloise trouxe um questionamento que levou a um diálogo entre ela e Julieta.

> E3 – 00:19:42 – Eloise: <u>Que interdisciplinaridade que está acontecendo</u> se o que ele está dizendo é ‘existe um livro, dentro desse livro tem tal coisa, tal ideia matemática’, mas você não está trabalhando com o livro?
>
> E3 – 00:20:42 – Julieta: mas é porque interdisciplinaridade para essas pessoas é ‘é um livro, então é literatura’ e aí acabou, ponto, acabou.

> Se ele ler um livro, já é literatura, pronto. Já fez. É isso, isso é interdisciplinaridade para essas pessoas.
>
> E3 – 00:20:58 – Eloise: eu acho que seria diferente se fosse uma proposta dentro da escola (...) se a escola adota o livro *A culpa é das estrelas* como livro paradidático de literatura e aí tem isso em paralelo no livro deles, e aí no [quadro] interdisciplinando tem um '(...) esse livro que você está lendo na aula de literatura, ele conversa com o que você está estudando agora em matemática, e isso é interdisciplinaridade'. Agora, você chegar e você ter dizendo 'você por acaso já leu o livro *A culpa é das estrelas*, que para você que tem 14 anos hoje foi lançado quando você tinha tipo 4 anos de idade?' (...) e aí que contextualização é essa (...) que interdisciplinaridade que está acontecendo?

Pelo tom de voz e pela expressão facial utilizados pela professora Julieta em sua fala, foi possível perceber que ela não concorda com essa classificação de interdisciplinaridade e que acredita que apenas mencionar literatura em um livro didático de matemática não configura interdisciplinaridade. A professora deixa a entender que, diferente de quem escreveu o texto para o quadro apresentado, ela não acredita que falar sobre literatura em uma aula de matemática seja suficiente para definir uma prática interdisciplinar. O tom de crítica em sua fala quando diz "é um livro, então é literatura" nos mostra que ela não concorda com essa definição de interdisciplinaridade.

Todos os outros participantes presentes concordaram com Julieta, assentindo ao final de sua fala. Com sua resposta a Julieta, especialmente no trecho "que contextualização é essa? (...) que interdisciplinaridade que está acontecendo?", Eloise dá a entender que, assim como a professora de português, não acredita que apenas apresentar o livro *A culpa é das estrelas* no material didático de matemática se configure como interdisciplinaridade.

Segundo elas, para que a utilização do livro fosse uma proposta interdisciplinar, ela teria que estar ocorrendo tanto na disciplina de português quanto na de matemática. Não seria suficiente para configurar interdisciplinaridade dizer aos alunos na aula de matemática que um livro juvenil possui conteúdos de matemática em seu desenvolvimento, se esse livro não houver sido previamente apresentado a eles ou trabalhado na disciplina de língua portuguesa. Pelo que foi apresentado pelas professoras, entendemos que, para poder ser classificada como uma prática interdisciplinar, a abordagem do livro deveria ser feita de maneira simultânea nas aulas de literatura e matemática.

O assunto girou em torno da interdisciplinaridade novamente apenas no final do terceiro encontro, quando o professor James disse que gostaria de fazer uma pergunta ao grupo, reforçando a ideia trazida anteriormente por Eloise. Apesar de o professor ressaltar que sua intenção não era gerar um debate instantâneo com a questão, os participantes, animados, seguiram com ideias de propostas para essa abordagem interdisciplinar.

> E3 – 01:00:07 – James: E se esse tipo de livro, como é o caso de *A culpa é das estrelas*, fosse um livro sugerido e abordado nas aulas de literatura em conjunto (...) com o professor ou professora de matemática?
>
> E3 – 01:01:41 – Julieta: tem muitas coisas que dá para trabalhar. Eu não sei como uma aula em conjunto, tipo professor de matemática e a professora de português, dando uma aula juntos sobre algum conceito. Mas eu sei que a gente pode trabalhar... tem muita metáfora no livro (...) tem alguns pontos ali interessantes também, para você tratar de escrita (...) o próprio livro que eles falam sobre né, a literatura que ela gosta, o fato de o livro acabar com a morte dela, isso tudo dá para falar (...) eu sei que dá para usar o livro para interdisciplinaridade, você vai ler e você vai usar na aula de matemática e na aula de português, isso dá. Mas (...) dois professores num 'aulão', por exemplo, não sei.
>
> E3 – 01:02:57 – James: era esse o ponto mesmo, não necessariamente ao mesmo tempo, mas que o livro conversasse com duas disciplinas da escola.
>
> E3 – 01:03:07 – Julieta: dá para botar filosofia também, a questão toda tem muita filosofia no livro.
>
> E3 – 01:03:27 – Eloise: eu imagino... talvez não como um 'aulão', mas eu imagino um projeto interdisciplinar, (...) muitos colégios têm feira cultural, essas coisas, eu imagino um projeto mais amplo assim, e que várias disciplinas peguem o mesmo livro (...) se você pegar o *A culpa é das estrelas*, que o professor de matemática, e o de filosofia talvez, falem sobre (...) infinito, o professor de história pode pegar a parte de Cantor e tal e dar um contexto um pouco mais geral, falando de história da ciência (...) biologia pode fazer um estudo sobre câncer, e pode falar sobre sei lá, alimentos que causam câncer e assim, é porque a gente está aqui pensando matematicamente, mas...
>
> E3 – 01:04:57 – Julieta: a história pode tratar da história da Anne Frank, 2ª guerra mundial, porque eles vão, eles visitam (...) geografia vai estudar (...) Amsterdam. Que eles vão para lá (...) A questão toda do livro trata de oxigênio, a biologia não precisa nem tratar o câncer em si, mas o oxigênio em geral e oxigenação do corpo, aí, isso tudo aí. Cara, eu acho que dá até para pegar todas as matérias assim! E fazer um 'projetão'!
>
> E3 – 01:05:39 – Eloise: Física podia falar por que a Hazel não podia entrar no avião com aquele tubão de oxigênio maluco dela (...) tem a ver com a pressão né, para não explodir o 'bagulho'. Então assim, eu acho que talvez não seja uma questão de a gente pensar uma aula no formato de aula que a gente está acostumado a pensar, talvez essa ideia de trabalhar projetos... mas eu acho que o que é interessante é que todos os alunos precisem pensar sobre essas questões todas, porque se você pega e divide a turma, e fala 'tal grupo vai falar sobre

> tal coisa, tal grupo vai falar sobre tal coisa', ferrou, você perdeu tudo que é interdisciplinaridade aí. É que um mesmo grupo de alunos veja todas essas coisas acontecendo ao mesmo tempo, aí tem a interdisciplinaridade.
>
> E3 – 01:06:25 – Julieta: pode ser uma semana *A culpa é das estrelas*. (...) E aí todo mundo lê, e aí cada matéria vai trabalhar o seu pedacinho ali, dentro do livro, e a gente vai fazer um projeto para apresentar no sábado, para todo mundo da escola e pronto, e é isso. Talvez duas semanas, talvez mais, mas entendeu? Tipo, faz o 'negócio' e tem uma apresentação no final, porque... aí chama todo mundo, os pais, ... cada um vai fazer, todo mundo trabalhando tudo. Eu acho superlegal, vamos aplicar!
>
> E3 – 01:07:17 – Isabella: eu tive na escola um grupo de monitores (...) que gostavam muito da questão interdisciplinar e eles sempre davam aula juntos. Era comum isso. Então no meu terceiro ano eu tive uma aula de (...) algum tema predominantemente de história, que seria dado pelo professor de história, e foi todo mundo. Foi biologia, foi matemática, foi geografia, foi química, foi física, então assim todo mundo trabalhou dentro de um 'aulão'. Foi um 'aulão' de mais ou menos umas 3 horas assim, então talvez o 'aulão' também funcione. Porque acho que a gente trazer um projeto para a escola, às vezes a escola não quer e não tem interesse e tudo, e aí talvez o 'aulão' também funcione, eu sei, porque também funcionou comigo (...) acho que vale a pena também investir nesse 'aulão', caso a escola não esteja propensa a criar um projeto interdisciplinar e envolver muita gente. (...) E talvez não só com *A culpa é das estrelas*, por que não cada ano fazer com um livro diferente? Né, vai que dá certo. Vai que os professores estão inspirados e vai todo mundo escolher o livro daquele ano, senta todo mundo junto e escolhe o livro, né, utopia quase, mas, vai que dá certo.
>
> E3 – 1:09:05 – Julieta: aí vai ser a (...) semana literatura juvenil, todas as séries, cada um trabalhando um livro (...) muito legal, vamos abrir uma escola. Acho que é legal.
>
> E3 – 01:09:16 – Eloise: isso é 'mó' sonho. Isso é tudo que a gente estuda na teoria na licenciatura e fala 'ah isso nunca vai acontecer', e a gente está dizendo 'cara, tem tudo para acontecer, (...) se organizar direitinho, todo mundo faz, sabe'. Acho que é isso, James, você despertou esse lugarzinho da gente que faz querer trabalhar.
>
> E3 – 01:09:38 – James: pois é, eu não estava imaginando que ia repercutir, imaginei que a gente pudesse discutir no próximo encontro, mas rendeu. Mas interessante essa ideia do 'aulão', de trabalhar em feira... não tinha pensado em nada disso, nada disso.

Demonstrando empolgação, as professoras Julieta e Eloise foram se complementando e até mesmo se interrompendo – de maneira educada – para trazer novas ideias de conteúdos presentes na história de John Green que poderiam ser trabalhados em outras disciplinas, além de matemática e literatura.

As duas concordaram com a proposta de James, de que o livro deveria ser trabalhado tanto na disciplina de matemática quanto de literatura, e ainda acrescentaram ideias de como abordá-lo também nas outras disciplinas. A ideia de Eloise e Julieta mostra que as duas compreendem que, em uma obra literária, há elementos de diversas áreas presentes, mesmo que não explicitamente. Ambas as professoras buscaram assuntos presentes no livro *A culpa é das estrelas* que se encaixassem nos conteúdos de diversas disciplinas. Essa ideia reforça a noção de que, na realidade, as disciplinas configuram algo complexo, e estão interligadas naturalmente, sem que cada conteúdo precise estar nitidamente separado por disciplinas dentro do livro.

O fato de que, para pensar em algo interdisciplinar que envolvesse todas as disciplinas, fosse necessário que cada uma aborde diferentes assuntos, apenas segue a ideia de compartimentação já estabelecida pelas próprias escolas. No entanto, é possível perceber que as professoras compreendem a ideia de que as disciplinas, na realidade, estão todas conectadas no livro sem que seja necessário segmentá-las: a segmentação ocorre para que possamos abordar todos os assuntos de maneira adaptada à realidade disciplinar nas escolas.

Isabella, ao ouvir a proposta de Julieta de fazer uma "semana *A culpa é das estrelas*", como a professora nomeou, relatou que, quando era aluna do ensino médio, teve um projeto em sua escola que funcionou de maneira parecida, no que a escola denominou um "aulão". O modelo obteve sucesso com os alunos na época, então ela acreditava que poderia funcionar também com a proposta interdisciplinar utilizando a literatura juvenil. Segundo a descrição feita pelas professoras Julieta e Isabella, um "aulão" seria uma aula, provavelmente com duração maior que um tempo único, ministrada por professores de diferentes disciplinas ao mesmo tempo.

A ideia de Isabella foi bem recebida por todos os participantes, que sorriram e assentiram. Isabella deixa implícito que acredita que seria difícil que a proposta de uma abordagem interdisciplinar como um projeto ao longo das aulas de diferentes disciplinas fosse aceita dentro da escola, por isso vê o "aulão" como uma opção mais certeira, por demandar menos tempo e o envolvimento de menos professores, mas que ainda assim atingiria o objetivo de trabalhar diferentes disciplinas ao mesmo tempo. Assim, ela reforça a ideia trazida em seções anteriores de que práticas interdisciplinares demandam muito esforço e necessitam de grande disposição – tanto dos professores quanto do corpo pedagógico da escola.

A professora sugeriu ainda que essa abordagem interdisciplinar poderia ser realizada não somente com o livro *A culpa é das estrelas*, mas com diversas obras literárias, uma para cada ano escolar, fazendo, deste modo, um projeto anual, que abrangesse diversas turmas, com livros que atendessem o conteúdo previsto para cada ano letivo. A sugestão teve apoio dos outros participantes, especialmente Julieta e Eloise, que reforçaram que aplicar um projeto interdisciplinar abordando a literatura juvenil seria um sonho. Julieta ainda sugeriu, brincando, que os professores participantes se juntassem para abrir uma escola e, então, poder pôr em prática ideias como essa.

As sugestões trazidas pelos professores remetem à prática da pedagogia de projetos, uma metodologia ativa que coloca o estudante como protagonista no processo de aprendizagem, envolve a prática interdisciplinar e desenvolve a autonomia e o pensamento crítico do aluno (BACICH; MORAN, 2018). Os professores não nomeiam especificamente a metodologia ativa ao sugerir a ideia de um projeto interdisciplinar, mas as propostas trazidas por eles se baseiam nas características dessa metodologia.

Ao propor uma abordagem a partir de uma metodologia ativa, os professores sugerem o uso de uma metodologia de ensino alternativa ao ensino tradicional, como foi discutido por eles anteriormente e trazido na seção 4.1.2.

A sugestão de Julieta, mesmo que feita em meio a risadas, reforça, mais uma vez, como práticas interdisciplinares não são facilmente aceitas nas escolas. A professora deixa implícito acreditar que, caso os participantes realmente quisessem que alguma das sugestões de abordagem feitas fosse aplicada com seus alunos, teriam que abrir a própria escola, uma vez que, para conseguir que o projeto fosse aceito em uma das escolas onde trabalham, haveria barreiras e dificuldades para que a coordenação ou os professores adotassem a ideia.

É interessante perceber como todos os professores presentes no encontro apoiaram a ideia de uma prática interdisciplinar entre matemática e literatura – e não somente entre essas duas disciplinas. Além de apoiar, buscaram juntos uma maneira de executar essa prática, a partir de experiências anteriores ou ideias que acreditaram que funcionaria. Analisando as ideias, essa interdisciplinaridade parece realmente possível, e necessitaria apenas do apoio dos professores de outras disciplinas – especialmente literatura – e da parte administrativa da escola, o que, segundo os participantes, poderia ser um obstáculo na realização de um projeto como esse. No entanto, os próprios professores trouxeram diferentes ideias, já imaginando que poderia ocorrer de a escola não apoiar alguma das propostas.

No último encontro, perguntei aos participantes se eles já haviam tido experiência com o uso da literatura na aula de matemática, seja como professores ou como alunos, e como eles acreditavam que esse uso poderia ser benéfico para o ensino de matemática. Eloise relatou sobre um evento do qual ela participou como estudante da graduação em licenciatura, onde assistiu a um minicurso sobre o uso da literatura infantil no ensino fundamental I para estabelecer uma relação com a matemática. Segundo ela, o minicurso foi comandado por estudantes de pedagogia, que leram e interpretaram a história de um livro infantil e, ao final, iniciaram um debate sobre como esse livro poderia ser utilizado para estabelecer relações com ideias de matemática vistas nos anos iniciais. A professora então fez uma reflexão sobre o porquê de a interdisciplinaridade ser algo comum nos anos iniciais do ensino fundamental, mas não nos finais. Julieta, em resposta a Eloise, contou ao grupo que sua professora de didática sempre defendia que a interdisciplinaridade presente nos anos iniciais deveria permanecer até o final da escola, apesar de não ser o que normalmente acontece.

> E4 – 00:44:05 – Eloise: quando você é da educação infantil (...) você ainda tem esse contato com o lúdico, essa expectativa, talvez, do lúdico, e <u>isso vai se perdendo, essa interdisciplinaridade que é tão natural nos primeiros anos da educação</u>, e que a gente quando vai para o 6° ano dá um racha né, de cada professor com a sua matéria, porque não é mais você o responsável por fazer essa conexão. Mas <u>se não é a gente responsável por fazer essa conexão, quem é,</u> né? Não tem um professor de interdisciplinaridade, é tipo... é a gente que tem que fazer. E aí só me lembrou isso, que assim, por que a gente abandona esse contato, essa conversa sobre tudo em algum momento?
>
> E4 – 00:47:28 – Julieta: eu tinha uma professora de didática que falava exatamente isso (...) ela dizia que a gente tem muito que aprender com educação infantil, e que o processo tem que ser ao contrário. <u>A gente tem que continuar com isso [a interdisciplinaridade] até o final, e na verdade... está acontecendo ao contrário, (...) cada vez menos isso acontece né.</u>

Pelas falas das duas professoras e pelo modo como assentiram, uma enquanto a outra falava, foi possível perceber que ambas concordam que a interdisciplinaridade deveria ser uma prática comum também ao longo do ensino fundamental II e do ensino médio, e não apenas na educação infantil e no ensino fundamental I, segmentos em que essa prática é mais comum.

É comum nos currículos escolares atuais a separação das disciplinas, cada uma com suas especificidades, sem que haja uma ligação entre elas. Essa separação reforça a ideia trazida por Eloise, quando ela utiliza a expressão “dá um racha”. Ela reforça a ideia de que no primeiro segmento do ensino fundamental todas as matérias são vistas de maneira interligada e concomitante, normalmente trabalhadas pelo mesmo professor, e, de repente, na passagem para o segundo segmento, há uma quebra nessa continuidade, em que cada disciplina passa a ter um tempo e um professor diferente.

Essa divisão de disciplinas e conteúdos que ocorre na escola não representa a realidade, em que todas as áreas de conhecimento coexistem. Da maneira que são vistas na escola, é como se elas fossem desconexas e separadas. Aqui, percebemos que as professoras reforçam a ideia trazida na seção 4.1.2, de que, para que seja aplicada alguma prática interdisciplinar, é necessário juntar e conectar áreas que estão naturalmente separadas.

Nenhum dos outros professores relatou já ter tido experiência com a matemática e a literatura sendo vistas simultaneamente, a não ser em discussões durante algumas disciplinas de educação que fazem parte da grade curricular de licenciatura em matemática, mas que normalmente abordavam livros paradidáticos como *O homem que calculava.*

A professora Isabella então disse que, quando foi monitora de uma escola particular, teve uma aluna que a cada semana estava lendo um livro novo que Isabella já havia lido, e que isso permitia uma conversa entre as duas sobre aqueles livros. As professoras Annabeth, Eloise e Julieta concordaram com Isabella, dando exemplos de vezes em que os alunos se espantaram com seu gosto musical, literário ou cinematográfico, como se, por serem suas professoras, não fosse esperado que elas gostassem das mesmas obras que os alunos.

> E4 – 00:50:08 – Isabella: eu acho que seus alunos saberem que você lê um livro que se aproxima do que eles gostam já traz a visão do <u>professor de matemática como uma pessoa normal</u>. Que eles têm um pouco de dificuldade de ver o professor de matemática como uma pessoa normal. (...) o professor não é uma pessoa comum, é um ‘alien’.
>
> E4 – 00:53:01 – Annabeth: Eles falam com a gente às vezes como se a gente fosse assim, de outra realidade. Como se a gente fosse muito

> adulto e muito velho (...) e é muito legal quando você consegue conversar com os seus alunos sobre gostos que vocês têm em comum. Eu fico muito feliz quando isso acontece. (...) Não é nem só sobre (…) formas diferentes de abordar conteúdos que podem ser complicados e sobre a gente trazer ferramentas diferentes para sala de aula (…) é mais que isso, é também sobre aproximar nossa relação com os alunos.
>
> E4 – 00:54:25 – Julieta: a gente está numa idade em que a gente ainda é próximo do que eles gostam (…) e eles às vezes esquecem isso. Eles às vezes olham e não veem a gente como jovem.

É levantada novamente pelas participantes a dicotomia entre o velho e o novo, dessa vez tratando do próprio professor. Entendemos que as professoras ressaltam que, quando o aluno enxerga que o professor é jovem, há uma reação positiva, uma identificação entre professor e aluno. Automaticamente, essa reação implicita que um professor não ser jovem o desvaloriza, seguindo a ideia de que o que é velho não é bom.

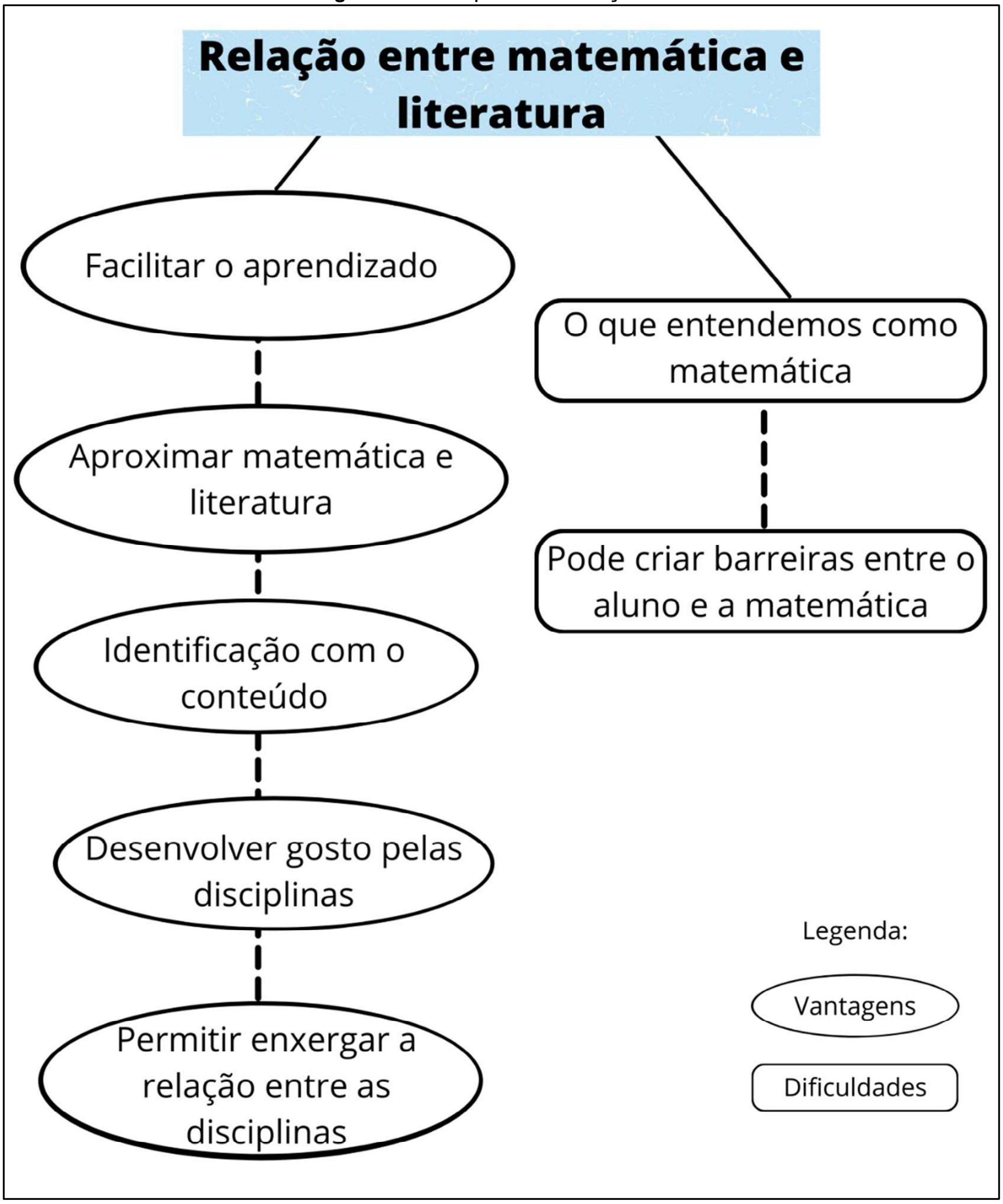
Essa conversa entre as professoras demonstrou que existe, por parte das quatro, vontade de se aproximar de seus alunos e que elas acreditam que essa aproximação também é importante para o processo de ensino-aprendizagem ao longo do ano letivo. Todas se empolgaram ao relatar de momentos em que os adolescentes descobriram que possuem gostos parecidos aos das professoras, o que facilitou a criação de laços entre eles.

Baseada nos relatos de Annabeth, Eloise, Isabella e Julieta, acreditamos que o estreitamento de laços entre alunos e professores e a aproximação entre eles possibilita uma identificação do aluno com o professor, o que pode gerar uma identificação também com a disciplina que está sendo ensinada. Essa identificação pode permitir que o aluno passe a se interessar mais pela disciplina – no nosso caso, a matemática.

4.2 RELAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA E LITERATURA

A tese desta seção é que relacionar a matemática com a literatura juvenil pode permitir uma aproximação entre o aluno e os conteúdos de matemática, tornando o processo de aprendizagem mais prazeroso e facilitando a compreensão dos conteúdos. Analisaremos as contribuições dos participantes para buscar entender como pode ser realizada a relação entre matemática e literatura e de que maneira ela pode beneficiar o ensino-aprendizagem de matemática.

Figura 15 - esquema da seção 4.2



Fonte: elaboração própria

No primeiro, no terceiro e no quarto encontros, foi bastante discutida a relação entre a matemática e a literatura e como a literatura, especialmente a juvenil, poderia trazer benefícios tanto para as aulas de matemática quanto para o desenvolvimento dos adolescentes também em outras áreas de suas vidas.

No início do primeiro encontro, após todos os professores se apresentarem, a primeira pergunta feita a eles foi: “Onde podemos identificar a matemática no livro *A culpa é das estrelas?*" Em meio às respostas sobre quais os assuntos matemáticos encontrados pelos professores ao longo da leitura, a professora Helena questionou o que estaríamos considerando como matemática para responder a essa pergunta:

> E1 – 0:15:56 – Helena: eu estou muito focada agora em estudar o início da matemática, e aí o que é muito importante para mim, e talvez nem seja o caso aqui, mas é definir <u>o que a gente entende por matemática</u>. E eu estou vendo que está muito ligado ao número, né, ao tema de matemática básica mesmo, do ensino básico. Mas se você considerar lógica como uma parte da matemática, e argumentação, eu acho que tem algumas passagens do livro, como por exemplo a parte que a Hazel tenta demonstrar para o Augustus que todas as pessoas são esquecíveis. Eu acho que a gente pode forçar um paralelo aí com a demonstração.

O questionamento da professora Helena nos fez pensar em algo que ainda não tinha sido refletido até então. Ao responder onde a matemática podia ser identificada no livro, todas as respostas – inclusive as apresentadas aos participantes no slide do Powerpoint como exemplo – envolviam números, álgebra ou geometria. Helena disse encontrar no livro casos em que os personagens utilizam lógica, argumentação e demonstração e ressaltou que, caso fossem consideradas também essas áreas da matemática, haveria ainda mais exemplos de onde poderíamos encontrar matemática em *A culpa é das estrelas*.

> E1 – 0:15:56 – Helena: E eu acho que deve ter outras passagens também, porque <u>eles estão o tempo inteiro argumentando um com o outro,</u> conversando um com o outro. Dependendo do que a gente entende por matemática, eu acho que a gente pode aumentar os nossos exemplos.
>
> E1 – 00:17:19 – Eloise: Eu acho que se a gente levar para esse lado que a Helena está comentando, é provável que a gente encontre mais livros que tenham passagens que interessam do que se a gente considerar a matemática mais 'conjuntos, naturais, inteiros etc'.
>
> E1 – 00:17:37 – Annabeth: eu lembro que quando eu li O Código da Vinci pela primeira vez, o código da Vinci é um livro que tem muitos enigmas (...) eu lembro que quando eu era criança, e já gostava de matemática na época, <u>isso me deixou com mais vontade de fazer coisas de matemática,</u> porque eu acho que eu associava desvendar enigmas com matemática e aí eu ficava me achando muito o Robert Langdon [personagem do livro], quando eu fazia os meus exercícios de matemática, achando que eu estava super decifrando enigmas. (...) Então eu acho que isso que a Helena falou é superimportante, se a gente associar a lógica e outros tipos de pensamento de matemática, não só números, você vai com certeza conseguir muito mais material para pensar esse paralelo de literatura com matemática. (...) E outro do John Green que também tem muito isso é o Teorema Katherine, que é todo cheio de anagramas. Esse também dá para fazer muita

> coisa, com essa ideia de anagrama e combinatória. Eu não sei se você colocou ele.

Pelas falas de Helena, podemos perceber que o ato de identificar os conteúdos matemáticos presentes no livro depende de como cada leitor entende o que é matemática. Assim, a professora destacou partes do livro que não haviam sido destacadas pelos outros participantes, ou mesmo por nós, pesquisadoras, mas que também entram na lista de quais os conteúdos matemáticos presentes na leitura.

O questionamento de Helena sobre o que é considerado matemática foi fundamental para podermos buscar dentro de uma obra da literatura partes que contenham matemática. O fato de a professora ter ressaltado que sua resposta à pergunta feita no início do encontro – onde podemos identificar a matemática no livro *A culpa é das estrelas*? – dependia do que estava sendo considerado matemática mostra como é comum que, quando falamos de matemática, estejamos nos referindo aos conteúdos que são explicitamente trabalhados em sala de aula. No entanto, sabemos que não é necessário que se esteja trabalhando conteúdos matemáticos para que a matemática seja utilizada. Raciocínio lógico e argumentação, por exemplo, também fazem parte da matemática, e não haviam sido considerados, até então, quando foram buscadas no livro *A culpa é das estrelas* partes que envolvessem matemática.

A professora Annabeth disse considerar muito importante a colocação de Helena e contou para o grupo sobre o livro *O código da* Vinci, do escritor estadunidense Dan Brown, que, segundo ela, possui muitos enigmas e relações com a arte – como a sequência de Fibonacci – em seu desenvolvimento. Annabeth ressaltou como foi sua reação ao ler o livro pela primeira vez, ao associar a matemática vista na escola à matemática presente no livro.

Vimos como foi importante para Annabeth poder relacionar a matemática vista em sala de aula às ideias matemáticas presentes no livro *O código da Vinci*, mesmo que fossem campos diferentes da matemática e o que estivesse no livro não fosse visto em sala de aula. Poder aproximar a matemática presente em sua vida fora de sala de aula àquela vista na escola ajudou Annabeth, enquanto aluna, a desenvolver gosto pela disciplina, pois a permitia sentir-se como o personagem principal de um livro que gostava. Podemos compreender que Annabeth acredita que estimular, a partir da leitura, que os alunos desenvolvam interesse pela disciplina de matemática e pelos conteúdos trabalhados pode facilitar seu processo de aprendizagem, uma vez que estarão efetivamente motivados e interessados no conteúdo estudado.

Ao final, a professora também acrescentou que outro livro do autor John Green, *O teorema Katherine*, também possui conteúdos vistos em matemática, como anagramas. Foi dito a ela que essa obra foi uma das selecionadas no início da pesquisa, para que fosse escolhido o livro utilizado nos debates com os professores, e a professora Eloise comentou sobre esse livro:

> E1 – 00:20:31 – Eloise: ao longo do tempo eu ouvi muita gente dizendo que *O teorema Katherine* era o livro dele que achava mais chato, que era o menos favorito, aquele que não vai reler etc., e o argumento sempre foi do tipo 'ah, eu não estou a fim de ter que ficar olhando um anexo para entender o que ele está falando no meio do livro' e eu ficava 'gente, mas é tão legal, por que você está ignorando isso? É tão divertido'. Mas eu acho que o livro sofre um pouco de 'bullying', sabe? <u>Por ter a matemática, então tem uma rejeição</u>, o que eu acho que não acontece em *A culpa é das estrelas* porque está muito mais sutil, você tem que ter os olhos de ver aquela matemática, você pode muito bem passar o livro inteiro sem se preocupar com o que ele está dizendo sobre isso. [Em] *O teorema Katherine* você não pode fazer isso, porque senão você não vai entender, então eu acho que só a fama que os livros tenham ganhado já é um indicador para a gente.

Com esse relato, Eloise levantou um ponto interessante de ser analisado, porém de imediato não houve respostas ou comentários dos outros professores sobre o assunto, mas um breve silêncio. Podemos entender esse silêncio dos professores como uma reflexão sobre o que foi levantado pela professora Eloise. Outra interpretação poderia ser a de que os outros professores não conhecem o livro *O teorema Katherine* e, por isso, preferiram não opinar sobre a fala de Eloise.

A professora relata que já ouviu muitos colegas dizendo que não gostavam do livro *O teorema Katherine* por ser uma obra que traz explicitamente muita matemática em seu desenvolvimento. Nesse livro, o personagem principal tenta criar uma função para prever se seus próximos relacionamentos serão bem ou malsucedidos, quanto tempo irão durar e qual das duas pessoas envolvidas no relacionamento irá ser a responsável pelo término. A matemática é muito presente na história e diversos cálculos são apresentados ao longo do livro, além de haver anexos ao final, explicando conceitos matemáticos que poderiam ser necessários para compreender o desenvolvimento dos cálculos ao longo da história.

Segundo Eloise, o fato de a matemática estar tão presente no livro, que apresenta cálculos e anexos explicando conteúdos da disciplina, teve o efeito contrário do trazido anteriormente por Annabeth: os jovens, ao perceber que havia matemática no livro, não se afeiçoavam muito a ele, desenvolvendo certa rejeição à obra. Ficou claro que Eloise não concorda com esse argumento, e que, quando jovem, achou o livro interessante, justamente por causa de suas abordagens matemáticas. A professora deixou implícita sua dúvida sobre a real eficácia de se abordar matemática em um livro juvenil, uma vez que já soube de experiências em que seus colegas, em vez de se aproximarem da matemática ao encontrá-la no livro – como descrito por Annabeth –, na realidade criaram certa aversão à história justamente pelos conteúdos matemáticos, uma vez que previamente não se interessavam por tais assuntos.

Como o questionamento de Eloise ficou no ar e o assunto não prosseguiu entre os participantes, perguntei a eles se os trechos do livro que abordavam matemática haviam chamado sua atenção durante a leitura, ou feito com que refletissem sobre a matemática. As respostas a essa pergunta em certo momento conversaram com a fala anterior de Eloise, e a discussão pode ter continuidade. Annabeth trouxe à discussão a ideia de que ter contato com a matemática dentro de um livro de literatura em que não se espera encontrar matemática, como é o caso de *A culpa é das estrelas*, pode aproximar a matemática da literatura. Alguns momentos depois, a professora Eloise complementou a ideia de Annabeth, relatando sobre sua primeira leitura de *A culpa é das estrelas*. Ela ressaltou como foi importante para ela encontrar matemática durante uma de suas leituras, pois permitiu que fossem estabelecidas conversas com seus amigos sobre o livro.

> E1 – 00:24:15 – Annabeth: Mas se você pega um livro infantojuvenil e você encontra uma 'parada' que você gosta dentro daquele livro, você encontra matemática dentro daquele livro, vai bater, <u>você vai prestar atenção de uma forma diferente</u>. Puxando para o ensino, é uma forma de <u>aproximar os alunos</u> que são mais... vou falar uma coisa que eu odeio (...) são mais de "exatas", e de repente aproximar eles da literatura ou fazer o caminho contrário, pegar os alunos que gostam mais da parte de literatura e de letras e aproximar da matemática, eu acho que funciona bem.
>
> E1 – 00:39:14 – Eloise: eu consegui conversar com meus amigos sobre isso, porque eles estavam lendo as mesmas coisas que eu. Eles podiam não gostar de matemática como eu gostava, mas a gente tinha o livro em comum. Então foi o momento de a gente conseguir conversar num meio termo, porque a gente conversava sobre literatura e sobre

> os livros que a gente lia, sobre ir para a bienal [do livro] etc., era uma coisa que a gente fazia sempre, mas no momento que tinha a matemática envolvida, a gente podia falar sobre matemática estando falando sobre livros, e eu acho que isso foi importante para mim naquela época, ver que dava para bater papo sobre essas coisas, eu não precisava só resolver exercício para poder estar falando de matemática, eu não precisava estar explicando alguma coisa para alguém para falar de matemática.

Com frequência, vemos ocorrer uma separação entre os alunos de "exatas" e os de "humanas", feita tanto pelos próprios adolescentes quanto por alguns professores. Essa prática de separar as áreas de conhecimentos em exatas ou humanas muitas vezes gera a ideia de que ou se gosta de uma ou de outra área, e que dificilmente uma conversa com a outra – o que não é verdade. De acordo com os relatos de todos os professores de matemática presentes nos encontros, todos, naturalmente, se interessam muito pela matemática – considerada uma disciplina exata – e possuem também amplo gosto pela leitura. Alguns relataram que, em conversas com amigos ou colegas, já receberam olhares de espanto ao falar que são professores de matemática e que gostam muito de ler.

Ver a matemática e a literatura conversarem e se interligarem como se não fossem dois campos completamente dissociados, o que realmente não são, pode permitir que os alunos se identifiquem com ambas as áreas e desenvolvam aptidão pelas duas.

Annabeth ressalta novamente que acha importante encontrar matemática dentro de um livro, pois gera um tipo diferente de interesse no aluno. Entendemos que por diferente – em "você vai prestar atenção de uma forma diferente" –, Annabeth sugere que a matemática encontrada no livro vai gerar interesse no aluno, além do que está escrito. A matemática ali presente pode tanto fazer com que o aluno se interesse pelo assunto abordado e busque saber mais sobre ele, como gerar interesse na matemática como disciplina, o que, como a própria professora já havia dito anteriormente, traria benefícios para o aprendizado do aluno. Annabeth ainda deixa claro que acredita que, seja permitindo que um aluno que gosta de matemática desenvolva interesse pela leitura ou permitindo que um aluno que gosta de ler passe a gostar mais de matemática, a presença da matemática na literatura é importante e benéfica para gerar interesse e aproximar diferentes áreas de conhecimento.

Eloise demonstra como considerou importante, como adolescente, poder conversar com seus amigos sobre matemática, pois, como era algo, naquele momento, presente em um gosto comum por todos – a leitura –, pode se tornar assunto de suas conversas e debates, permitindo uma identificação não apenas com a disciplina, mas com os seus colegas. Poder enxergar os conteúdos matemáticos presentes na literatura juvenil, além de permitir uma aproximação do jovem com a disciplina, também possibilita não somente o desenvolvimento social, mas que sejam gerados debates sobre esses assuntos, fazendo com que os alunos exercitem também seu pensamento lógico-argumentativo e cheguem sozinhos a conclusões sobre o que está sendo discutido. É importante que os alunos tenham espaço para debater sobre os conteúdos com seus colegas, chegando a conclusões e trabalhando suas percepções sobre os assuntos também em um ambiente diferente da sala de aula.

No terceiro encontro, durante a discussão sobre o quadro “Interdisciplinando” que foi apresentado aos professores, e está apresentado neste trabalho na seção 4.1.3, Eloise buscou trazer à discussão o lado positivo daquele conteúdo.

> E3 – 00:27:40 – Eloise: se o aluno lê esse ‘box’ e ele não gosta de ler, mas esse ‘box’ anima ele a procurar o livro porque ele gosta de matemática, ele está vendo que existe um livro que tem matemática dentro e ele pode procurar, isso é uma coisa benéfica (...) ou tem o outro caminho, é que ele gosta de matemática, porque ele está lendo o ‘box’ dentro do livro de matemática e ele já gosta de ler, e aí ele descobre que existe uma interseção entre as 2 coisas que ele gosta, e aí a gente... coisas que a gente já conversou também né, desse sentimento de o aluno de exatas se sentir abraçado pelos outros campos também (...) é a pessoa descobrir que os gostos dela podem conversar, e que matemática não precisa ser só fazer conta e que você pode ter (...) discussões de filosofia baseadas em matemática dentro de um romance e que está tudo bem essas coisas conversarem. Eu acho que, se existe um ponto positivo nesse ‘box’, é nesse caso de um aluno que vai tirar alguma coisa pessoal para ele a partir disso.

Eloise retomou, em sua fala, o que havia sido trazido no primeiro encontro por ela mesma e por Annabeth: a importância da relação entre a matemática e outras disciplinas para o desenvolvimento pessoal e acadêmico dos adolescentes. Identificar a matemática em um livro juvenil pode permitir que o aluno compreenda que essa ciência não está dissociada das outras áreas de conhecimento e que matemática e literatura podem caminhar juntas, e que uma não se contrapõe à outra. A professora reforçou a ideia, apresentada no primeiro encontro, de que encontrar conteúdos matemáticos em uma literatura em que a matemática não é o foco principal pode permitir uma identificação do aluno, tanto individual, considerando que permite que sejam geradas reflexões sobre a interdisciplinaridade do que está sendo apresentado, quanto social, uma vez que possibilita debates e conversas com amigos e colegas sobre o que foi lido.

Além disso, quando a professora diz "está tudo bem essas coisas conversarem", ela reforça a ideia de que, na realidade, diferentes disciplinas estão conectadas, apesar de serem vistas na escola como campos dissociados. Ela defende que, por mais que, em sala de aula, não seja comum ver disciplinas conversarem entre si, ou terem uma conexão, ver em um livro que de fato elas estão conectadas pode permitir que o aluno enxergue essa complexidade.

No quarto encontro, após os participantes relatarem sobre como as noções de infinito presentes em *A culpa é das estrelas* poderiam ser vistas em sala de aula, foi perguntado a eles se acreditavam que a utilização do livro seria algo benéfico e auxiliaria na abordagem desses conteúdos. As professoras Annabeth e Julieta trouxeram suas opiniões.

> E4 – 00:18:47 – Annabeth: quando você entra nesses conceitos mais abstratos, eu acho que <u>qualquer forma de introduzir um conteúdo (...) que traga o debate que venha de outros lugares, eu acho que é sempre bem aceito pelo aluno</u>, sabe. (...) Eu acho que eles aceitam de um outro jeito. Então eu acho que não só *A culpa é das estrelas*, mas qualquer outro livro, filme, qualquer coisa que venha assim, de uma realidade mais próxima deles (...) eu acho que eles aceitam melhor, eles se interessam mais.

> E4 – 00:25:55 – Julieta: um aluno que não é tão interessado em matemática assim (...) <u>a parte da matemática fica mais difícil para as pessoas quando ela deixa de ser uma coisa palpável</u>. (...) Se você começar pela Hazel, que você já se apaixonou (...), partir de um romance maravilhoso, que você se apaixonou pelos dois, que o cara morre no meio, e que tem aquele discurso lindíssimo que você está em prantos lendo aquilo, porque o cara morreu... você parte de uma coisa que a pessoa é apaixonada por, para trabalhar em sala de aula, isso dá outro nível, o aluno está de olho aberto para você, e não está só se perguntando o que é, ele está caminhando, tentando entender. (...) Acho dez partir por aí, mesmo que não seja aquela coisa 'vamos esmiuçar o livro gente, o livro vai ser muito, muito útil. Abre aí. A gente vai fazer página por página.' Mesmo que não seja assim, já é útil, porque já criou o interesse. Se você já fez o aluno olhar para você querendo saber que porcaria é um infinito e por que isso é difícil, complicado de entender, você já ganhou o dia, cara. (...) Se ele já está ali prestando atenção na aula, é isso, entendeu? Trabalho de professor é meio trabalho de ator, de chamar a atenção para uma coisa que talvez não seja... não parta deles.

Os discursos das duas professoras mostraram que ambas acreditam que partir da leitura de um romance juvenil para apresentar um conteúdo novo, especialmente um mais abstrato – o que pode tornar a compreensão dos alunos um pouco mais complicada – pode atrair a atenção e o interesse dos adolescentes, tornando as discussões mais estimulantes e, assim, facilitando o aprendizado do conteúdo. As duas dão a entender, em suas falas, que conquistar a atenção dos alunos para o assunto que será trabalhado em aula possui grande importância para que aquele assunto seja compreendido por eles. Utilizar a literatura juvenil como meio para atrair o interesse e a atenção dos alunos pode ser uma maneira bem-sucedida de facilitar sua compreensão dos assuntos trabalhados, uma vez que, estando interessados no que será estudado, os alunos tendem a se esforçar para compreender melhor esses assuntos.

A partir das contribuições e dos relatos dos professores participantes dos encontros, entendemos que a literatura juvenil é uma ferramenta que pode tanto aproximar os conteúdos vistos em matemática da realidade dos estudantes quanto auxiliar no processo de aprendizagem, facilitando a introdução e compreensão dos conteúdos. Ao compreender melhor um conteúdo, o aluno pode desenvolver mais gosto por ele, o que, por sua vez, pode facilitar na compreensão do conteúdo – gerando um efeito cíclico, que faz com que o estudante se interesse mais pela disciplina de matemática e, portanto, entenda melhor os assuntos dessa matéria.

4.3 ONDE A MATEMÁTICA ESTÁ PRESENTE EM *A CULPA É DAS ESTRELAS*

No primeiro encontro, logo após cada participante se apresentar, foi feita a eles a seguinte pergunta: “Onde você encontra matemática no livro? O que chamou sua atenção?”

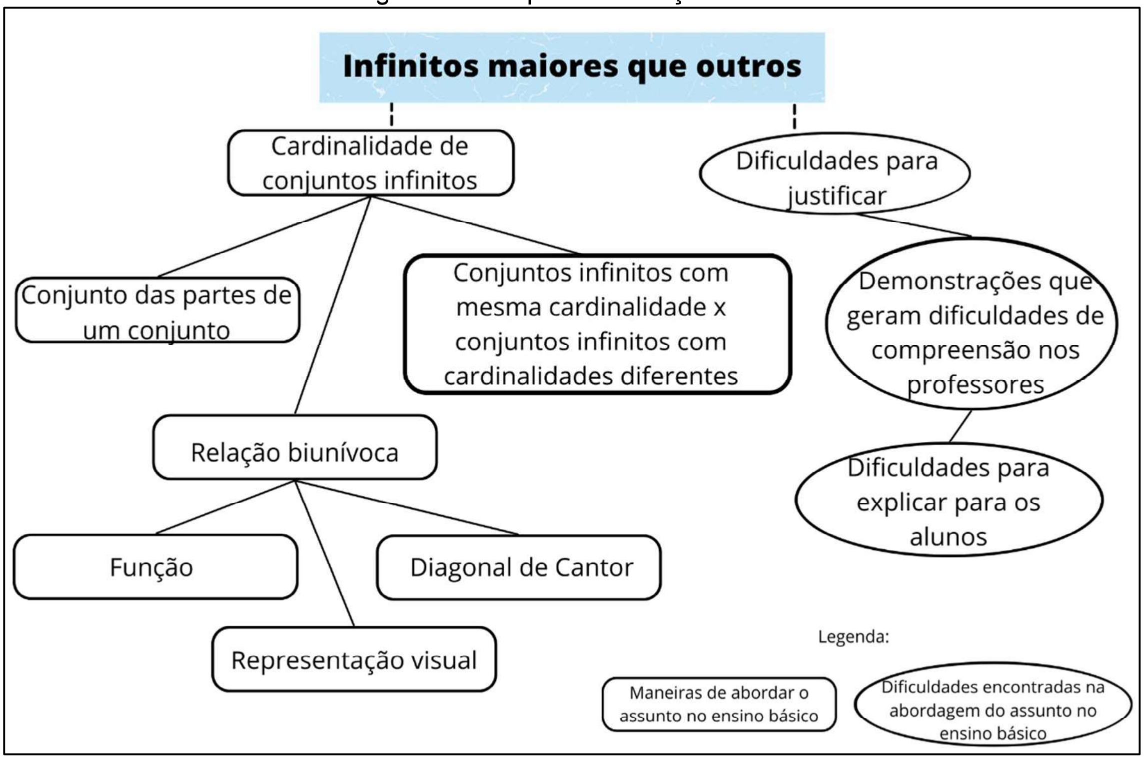
As respostas a essa pergunta giraram em torno de diversos assuntos, mas o principal deles – presente em algum momento nas respostas de todos os seis participantes – foi noções de infinito. Ao trabalhar a ideia de assuntos matemáticos presentes na história de *A culpa é das* estrelas, vamos focar nessa área de infinitos, mas vale ressaltar que os outros conteúdos citados pelos participantes, porém não discutidos, foram diagramas, conjuntos, proporção e lógica.

4.3.1 “Alguns infinitos são maiores que outros”

Esta seção se baseia na abordagem da cardinalidade de conjuntos infinitos no ensino básico. Para isso, serão apresentados debates dos professores participantes sobre as noções de cardinalidade de conjuntos infinitos e suas explicações e justificativas.

Logo no início do primeiro encontro, ao responder à pergunta sobre quais assuntos matemáticos foram identificados durante a leitura do livro, uma das respostas mais presentes foi “infinitos”. De fato, a ideia de infinito é abordada repetidas vezes ao longo do livro. Sobre esse assunto, os participantes disseram encontrar principalmente os seguintes tópicos no livro: infinitos maiores que outros; diferença entre as cardinalidades dos intervalos [0, 1] e [0, 2]; a ideia de infinito na filosofia; representações de infinito. Vamos tratar primeiro sobre a noção de infinitos maiores que outros e as contribuições que surgiram em torno desse tópico.

Figura 16 - esquema da seção 4.3.1



Fonte: elaboração própria

A ideia de infinitos de diferentes tamanhos foi trazida à discussão nos dois primeiros encontros. No primeiro encontro, apareceu no início, como resposta da professora Helena à pergunta “Onde podemos encontrar matemática no livro *A culpa é das estrelas*?”.

> E1 – 00:11:00 – Helena: lembro que o que me chamou mais atenção foi a Hazel dizer que é leitora de Cantor, que ela tinha lido livros de Cantor. Falei ‘gente, não estou acreditando nisso’. Então assim, de cara já tem essa passagem e a passagem do infinito, que ela argumenta sobre a existência de infinitos maiores que outros.
>
> E1 – 00:11:53 – Annabeth: tem muito tempo que eu li esse livro, eu lembro mais da parte dos infinitos, isso é muito emblemático, né? Eu nem lembrava que ela citava Cantor, eu vou até reler o livro, que eu nem lembrava disso.

A fala da professora Helena foi a primeira resposta à pergunta. É interessante observar que ela foi a única professora que mencionou a presença de Cantor no livro como um ponto positivo, que havia chamado sua atenção. A professora Annabeth pareceu surpresa com a afirmação de Helena, pois a menção ao matemático não foi algo marcante para ela.

Cantor é mencionado no livro *A culpa é das estrelas* quando o personagem Peter Van Houten fala aos adolescentes sobre o Paradoxo de Zenão para explicar que alguns infinitos são maiores que outros.

> Mas é óbvio que você acaba simplesmente passando pela tartaruga sem ponderar sobre a mecânica envolvida, mas a pergunta de como foi capaz de fazer isso acaba sendo incrivelmente complicada e ninguém tinha achado uma resposta para ela de verdade, até que Cantor demonstrou que alguns infinitos são maiores que outros. (GREEN, 2012, p. 173).

O fato de a menção ao matemático ser relevante para Helena e ter conquistado sua atenção durante a leitura nos leva a compreender que, para ela, foi importante reconhecer o matemático no livro e poder refletir sobre sua presença na história de John Green.

No entanto, mais tarde nesse mesmo encontro, enquanto eu apresentava um slide no Powerpoint com diferentes trechos em que podíamos localizar matemática no livro, perguntei aos participantes se os trechos que apresentam matemática em *A culpa é das estrelas* haviam chamado sua atenção, e se haviam feito com que pensassem em matemática por causa da leitura. A professora Helena então argumentou:

> E1 – 00:22:48 – Flávia: vocês acham que as partes que falam de matemática no livro chamaram a atenção de vocês (...) ou passaram batido? (...) Vocês pararam para pensar na matemática por causa do livro?

> E1 – 00:33:29 – Helena: gente, só voltando aqui no que a Flávia falou (...) sobre as partes matemáticas do livro, né, você perguntou se impactou a gente quando leu pela primeira vez. Eu li assim que eu saí do ensino médio, acabei de me formar e li o livro, e quando ela falou de Cantor, passou batido, a parte dos conjuntos, que é essa terceira citação aí [no slide][6] também passou batido, não me causou surpresa; e no geral eu terminei de ler o livro e nem fiquei com a sensação de 'caraca, ele usou bastante coisa matemática, né', porque até então matemática para mim era algo que nem passava pela minha cabeça, eu saí do ensino médio e fui fazer biomedicina, então matemática era só uma coisa utópica, então não me chamou atenção.

A fala da professora Helena se iniciou com a afirmação de que a menção a Cantor foi um diferencial na leitura e, vinte minutos depois, ela disse que tal fato não havia chamado sua atenção quando leu o livro pela primeira vez. Podemos perceber que o discurso da professora se alterou, e ela se contradisse, entre o início e o meio do primeiro encontro.

Uma possível interpretação para esse fato é a de que Helena leu *A culpa é das estrelas* pela primeira vez ao terminar o Ensino Médio e, como não estava pensando em estudar matemática, não se atentou muito aos assuntos relacionados à disciplina e a menção a Cantor durante a história não apresentou importância a ela. Então, quando releu o livro em algum momento mais recente, provavelmente ao já ter estudado sobre Cantor na faculdade de licenciatura em matemática, a menção à matemática teve um impacto diferente em sua percepção do livro.

Outra interpretação possível seria que, mesmo que a menção a Cantor não tenha sido relevante para Helena na época em que leu o livro sob o olhar de aluna, enxergar a importância da presença do matemático é relevante para ela atualmente como professora de matemática. Logo, podemos entender que, ao reforçar a relevância da menção a Cantor no livro, a professora Helena tenta mostrar que acredita que a presença do matemático no livro *A culpa é das estrelas* seria uma resposta "correta" à pergunta feita no início do encontro, dado o seu papel como professora de matemática.

Nos dois encontros dos quais a professora Helena participou, ela não disse explicitamente que havia relido o livro *A culpa é das estrelas*, porém em

[6] A citação a que Helena se refere é a seguinte: "existe uma quantidade infinita de números entre 0 e 1. (...) Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2 ou entre o 0 e o 1 milhão" (Green, 2012, p. 235)

dois momentos se expressou utilizando a sentença “quando eu li pela primeira vez...”, o que nos leva a entender que houve, pelo menos, uma segunda vez e, então, podemos interpretar que o livro foi relido.

> E1 – 00:14:02 – Helena: Nossa, verdade, tinha esquecido dessa parte dos conjuntos, tanto que eu adorei quando li <u>pela primeira vez</u>. É, desenha um círculo, essa passagem.
>
> E1 – 00:33:29 – Helena: Mas sobre as partes matemáticas do livro, né, você perguntou se impactou a gente quando <u>leu pela primeira vez</u>.

O tema “infinitos maiores que outros” tornou a aparecer no segundo encontro, quando a discussão continuou. No início do encontro, perguntei aos professores como eles definiriam o que é infinito e, em suas respostas, foi mencionada a ideia de que entre 0 e 1 e entre 0 e 2 há a mesma quantidade de números. Perguntei então se existiam realmente infinitos maiores que outros e, assim, o debate sobre o assunto teve início.

De início, a resposta dos participantes sobre a existência de infinitos maiores que outros retomava a ideia de que os intervalos [0, 1] e [0, 2] são infinitos de mesmo tamanho. Então, perguntei novamente sobre infinitos maiores que outros e, assim, a discussão se desenvolveu entre os professores Eloise, Helena e James, com respostas voltadas para comparações entre os conjuntos dos números naturais e reais, e entre o conjunto dos números reais e os conjuntos das suas partes.

> E2 – 00:34:26 - Flávia: Ninguém me respondeu ainda... alguns infinitos são maiores que outros?
>
> E2 – 00:34:33 – Eloise e Helena [ao mesmo tempo]: São.
>
> E2 – 00:34:40 - Flávia: (...) quem é maior então?
>
> E2 – 00:34:53 – Eloise: Os reais são maiores do que os naturais.
>
> E2 – 00:34:57 – Flávia: Por quê?
>
> E2 – 00:35:15 – Eloise: já é difícil você explicar para os alunos que os inteiros são do mesmo tamanho dos naturais, já é bem louco, começa por aí. Mas <u>os naturais são enumeráveis e os reais são não enumeráveis</u>, então você não consegue <u>contar</u> os números... contar 1, 2, 3, até onde você quiser, infinito, você não consegue ir contando... não existe uma forma de você contar os números reais, é por isso que eles são infinitos diferentes.
>
> E2 – 00:35:55 – James: de <u>numerar</u> né, colocar em uma lista.
>
> E2 – 00:35:57 – Eloise: é, isso.
>
> E2 – 00:36:00 – Helena: Assim, na faculdade eu aprendi essa demonstração, né, de que a cardinalidade dos números naturais é

menor do que a dos reais, só que eu acho que eu entendi melhor quando eu cheguei no mestrado e dei um passo além, que foi entender que o conjunto das partes do conjunto dos reais é maior do que o conjunto dos reais propriamente dito. E assim, o conjunto das partes vai ser sempre maior do que o conjunto original. Então eu entendo melhor assim. Porque a gente faz combinações com os elementos do conjunto dos reais, aí estou usando os reais como exemplo aqui. Então a gente tem o conjunto dos reais. Quando a gente começa a fazer combinações entre aqueles elementos que estão ali dentro, o número vai ser maior. A quantidade vai ser maior. Eu entendi melhor assim.

E2 – 00:37:44 – James: então você está falando que é um infinito ainda maior.

E2 – 00:37:48 – Helena: sim.

E2 – 00:37:50 – James: Então eu posso pegar esse conjunto das partes e fazer um conjunto das partes com ele?

E2 – 00:37:57 – Helena: E vai ser maior ainda!

E2 – 00:37:59 – Eloise: e aí que a gente vai contando os alephs 1, 2, 3, 4, 5... está satisfeita com a nossa explicação que uns infinitos são maiores do que outros? Eles são!

E2 – 00:38:40 – Helena: E serem diferentes, né, Eloise? São conjuntos diferentes, um está contido dentro do outro, mas mesmo assim...

E2 – 00:38:47 – Eloise: sim, sim, exato. Exatamente. Tipo [0,1] e [0,2]. [0,1] está dentro de [0,2]. Eu acho que esse é um motivo pelo qual muitas vezes, para quem está lendo e não tem uma curiosidade matemática maior, isso passa batido, que está errado. Porque quem é que vai discordar disso? Parece muito óbvio, né, quem vai discutir com uma coisa dessas?

E2 – 00:39:26 – James: eu acho que a gente tem que tomar cuidado com esse negócio de falar que eles têm quantidades iguais, porque a gente não consegue contar, né? Então como é que a gente pode dizer que eles têm a mesma quantidade de elementos, né? Ambos são infinitos. Mas têm a mesma quantidade? Acho que quando a gente usa essa expressão, a gente talvez esteja se confundindo mais, entende? Acho que basta a gente dizer que um é tão infinito quanto o outro, talvez, ou utilizar uma outra expressão. Mas acho que quando a gente entra no terreno de falar que eles têm a mesma quantidade, eu acho que por definição talvez isso tenha algum equívoco, não sei, eu penso assim. Porque a gente não consegue contar, são infinitos, né?

E2 – 00:40:18 – Eloise: mas quem disse que quantidade é uma coisa que você tem que contar?

E2 – 00:40:21 – James: não, eu não estou dizendo, foi só um raciocínio...

E2 – 00:40:28 – Eloise: não sei se eu entendi, porque eles são diferentes assim como dizer que entre os naturais entre 0 e 10 tem uma quantidade menor do que entre os naturais de 0 a 20. São quantidades diferentes porque você não consegue ligar um a um os elementos, em algum dos dois sobra. Acho que essa é a ideia de quantidades diferentes, é quando você tenta ligar um a um e um deles sobra.

> E2 – 00:41:08 – James: não sei opinar além disso, o que eu penso era isso que eu tinha dito, se a gente está falando que as quantidades são iguais, talvez a gente já esteja nas entrelinhas dizendo que dá para contar. Aí você me perguntou ‘mas quem disse que quantidade é porque dá para contar?’ Concordo com o que você disse, então por isso <u>eu estou confuso também</u>, mas já expressei o que eu pensei, e é isso. Acho que o que eu quis atentar é a questão das palavras que a gente usa para explicar essa questão, entendeu? Foi só isso mesmo.

Enquanto a professora Eloise utilizou como argumento que o conjunto dos números reais não é enumerável e, portanto, possui mais elementos do que o conjunto dos números naturais, a professora Helena defendeu que considerava mais simples a explicação sobre o conjunto das partes ser maior que o conjunto original.

A explicação de Eloise para sua afirmação “os reais são maiores que os naturais” se baseia na ideia de enumerabilidade: o conjunto dos números naturais é enumerável e o dos números reais, não. Logo, a professora conclui que o conjunto dos números reais possui um número maior de elementos que o de números naturais. Podemos entender em sua explicação o fato de ela utilizar, para justificar dessa maneira, a ideia de que os elementos dos dois conjuntos não podem ser biunivocamente relacionados, pois há elementos no conjunto dos números reais que não seriam relacionados a nenhum elemento do conjunto dos números naturais: logo, há mais elementos no conjunto dos reais do que no conjunto dos naturais. Eloise ainda demonstrou seu desconforto em explicar aos alunos que há a mesma quantidade de elementos nos conjuntos dos números inteiros e no conjunto dos números naturais. Tal explicação pode ser feita pela mesma ideia de relação biunívoca entre os conjuntos.

A professora Eloise reforça essa ideia mais à frente, nessa mesma conversa, ao dizer “São quantidades diferentes porque você não consegue ligar um a um os elementos, em algum dos dois sobra”.

James afirma que não é possível numerar os números reais. Ao responder à professora Eloise, ele indica que concorda que o conjunto dos números reais é maior que o conjunto dos números naturais, devido à explicação dada por ela. No entanto, ainda demonstra confusão em relação à explicação. Logo, podemos entender que, apesar de dizer que concorda com Eloise, na realidade não concorda completamente com o que está sendo abordado.

Em seguida, Helena discorda da simplicidade de compreender a justificativa de Eloise, ao dizer que acha mais fácil entender que há infinitos maiores que outros pensando no conjunto das partes de um conjunto. A professora usou como exemplo o conjunto dos números reais: quando analisamos o conjunto das partes dos números reais, ele possui mais elementos que o próprio conjunto original, logo, é um infinito maior. Helena se mostrou mais confortável com essa explicação do que com a explicação de Eloise, por entender que é mais simples de compreender a ideia de infinitos maiores que outros dessa maneira.

As professoras trataram sobre as ideias sobre conjuntos das partes como se assumissem que o resto do grupo soubesse previamente o que é o conjunto das partes. Em momento algum foi questionado por nenhum participante sobre a definição desse tipo de conjuntos e, então, entendemos que os professores de matemática presentes no encontro conheciam a definição de conjunto das partes de um conjunto infinito.

As professoras Eloise e Helena buscaram explicar e justificar a existência de infinitos maiores que outros utilizando diferentes métodos. É interessante perceber como cada uma utilizou um argumento diferente para justificar a existência de infinitos maiores que outros, e, apesar de mostrarem compreender o argumento uma da outra, ambas mantiveram suas próprias opiniões sobre qual seria o método mais adequado a se utilizar para realizar essa justificativa.

O professor James, ao responder Helena, demonstra tentar compreender o que está sendo dito por ela, reforçando em forma de perguntas o que ela explicou. James complementou a ideia de Helena, ao perceber que, ao tomar o conjunto das partes de qualquer conjunto infinito, ele terá mais elementos que o conjunto original. Logo, pegando o conjunto das partes do conjunto das partes do conjunto dos reais, ele será ainda maior que o conjunto das partes do conjunto dos reais, sendo assim um infinito ainda maior. James fez essas observações no tom de pergunta e foi possível perceber que o professor estava reflexivo quanto ao assunto.

Eloise, ao fim, perguntou sorrindo se as explicações haviam sido satisfatórias. O fato de Eloise se dirigir a mim para validar seu argumento, ao perguntar se eu estava satisfeita com a resposta, ressalta uma ideia de autoridade, como se os participantes acreditassem que eu e Janete, por estarmos realizando a pesquisa, teríamos a palavra final sobre o assunto, ou se as ideias trazidas pelos participantes apenas seriam válidas com nossa aprovação.

Helena complementou o pensamento de Eloise sobre as cardinalidades dos infinitos, reforçando que os conjuntos das partes de um conjunto são diferentes e possuem cardinalidade diferente do conjunto original. A professora deu a entender que tal ideia pode ser confusa de compreender, pois não é intuitivo pensar que um conjunto que está contido em outro possui uma cardinalidade diferente do seu original. Eloise, ao concordar com Helena, retoma o exemplo dos infinitos nos intervalos [0, 1] e [0, 2] para reforçar a ideia de que há exemplos que parecem intuitivos, mas, na realidade, não correspondem a essa intuição, como é o caso de os conjuntos das partes possuírem mais elementos que seus conjuntos originais.

Nessa conversa, foi muito interessante perceber que, inicialmente, ao responder à pergunta "existem infinitos maiores que outros?", os participantes afirmavam que sim, mas exemplificavam com dois conjuntos de mesma cardinalidade – o que não justificava sua resposta. Ao serem perguntados novamente, e refletirem um pouco mais sobre o assunto, justificaram de duas maneiras diferentes suas respostas, chegando então à conclusão de que existem infinitos maiores que outros e exemplificando com conjuntos que realmente possuem diferentes cardinalidades.

James, ao questionar o uso do termo "quantidade" para se referir ao número de elementos de conjuntos infinitos, levanta uma dúvida que Eloise tenta justificar. Pela sua explicação, o professor enxerga quantidade como algo passível de contagem, algo mais palpável. Eloise, por sua vez, entende que estabelecer relações biunívocas e concluir que dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade é suficiente para dizer que possuem a mesma quantidade de elementos. A dúvida de James se formou em torno da palavra utilizada: quantidade. O professor não chegou a uma conclusão sobre seu questionamento, apesar de dizer concordar com Eloise. No entanto, não pareceu convencido com a explicação da professora e manteve sua fala de que o uso do termo quantidade poderia gerar dúvidas.

Como seguiu-se um breve silêncio após a fala de James, provoquei que pensassem na seguinte situação em sala de aula, com a apresentação de um slide no powerpoint:

“A seguinte questão foi apresentada em uma sala de aula:

‘Qual dos seguintes conjuntos possui maior cardinalidade?

A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...}

B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}’

O aluno Gustavo respondeu o seguinte:

‘Claramente, o conjunto B é muito maior. No conjunto A, entre o 1 e o 3, fica faltando o 2; entre o 3 e o 5, falta o 4, e assim por diante. Então, como no conjunto A faltam os números pares, B tem mais elementos.’

A resposta do aluno está correta? Se sim, por quê? Se não, por quê?”

As respostas dos professores se desenrolaram da seguinte maneira:

E2 – 00:42:18 – Helena: nenhum dos dois, desse exemplo.

E2 – 00:42:23 – Flávia: Por quê?

E2 – 00:42:28 – Helena: olha, para explicar isso para um aluno de ensino básico, eu iria fazer algo parecido com a <u>diagonal de Cantor</u>, eu ia <u>relacionar um elemento de cada vez</u> e ia tentar convencer por essa maneira, nesse sentido, dizer que a gente pode continuar relacionando um elemento de cada conjunto infinitamente.

E2 – 00:42:49 – Janete: isso foi um pouco o que a Eloise falou, né? Das quantidades, aí agora vai vendo se sobra, se não sobra, mas aí o James trouxe uma coisa boa, né? Como é que eu vou jurar que não sobra, como é que eu vou jurar que sobra?

E2 – 00:43:08 – Julieta: eu concordo com o aluno Gustavo, entendeu? Porque o conjunto A já <u>perdeu o 2</u> ali, e o outro não tem, mas essa sou eu... mas eu estou entendendo o ponto de vocês, faz todo sentido! Mas <u>minha mente primeiro vai para que o outro é maior</u>.

E2 – 00:43:31 – Flávia: mas e aí se a gente tivesse que explicar para eles que, por mais que a mente vá primeiro que o outro é maior, na verdade pelo que vocês disseram, não é? Então para onde a gente pode ir com um aluno de ensino médio, que não é da graduação em matemática?

E2 – 00:43:56 – Annabeth: eu acho que é o que a Helena falou, acho que não tem outro jeito mais “simples” que... simples entre aspas, né... que ir <u>fazendo uma relação um a um</u> e mostrar que sempre vai ter mais um para relacionar nos dois conjuntos, eu acho que é o mais plausível, talvez seja uma palavra melhor.

E2 – 00:44:18 – Helena: uma das minhas dificuldades com matemática, e principalmente com demonstrações matemáticas, é que eu acho tudo muito frágil, eu acho os argumentos usados... eu acho que um “e se” muitas vezes atrapalha a demonstração. E aí essa demonstração, que no caso é a demonstração que os números ímpares têm a mesma cardinalidade que os naturais. Quando eu vi isso na faculdade e vi no mestrado de novo, eu me perguntei a mesma coisa que o James falou: ‘cara, mas é isso? Eu vou ficar ligando um elemento para cada um e é isso?’ <u>Quem vai me provar que no final não vai ficar uma filinha de elementos ali que ficaram sem ninguém?</u> E assim, nunca ninguém me deu essa resposta, gente.

E2 – 00:45:06 – Eloise: eu acho que eu escreveria...isso a gente está falando de alunos do ensino médio, né? Porque antes disso talvez não role, mas primeiro ano para frente eu escreveria como função mesmo, tipo, chama um elemento qualquer dos naturais de 'n' e escreve um elemento... relaciona esse elemento que vai estar ligadinho no outro como uma expressão que tenha o 'n'. Eu sei que esse argumento não vai convencer a todo mundo, especialmente não a todos os alunos do ensino médio, porque eles ainda estão se acostumando com a ideia de variável, mas para mim pessoalmente, inclusive como aluna, isso fazia muito sentido. Acho que o pensamento de função sempre foi uma coisa que fez muito sentido para mim, então eu acho que se a gente escrevesse como uma função com domínio nos naturais e escrevesse o contradomínio escrevendo como uma relação mesmo, uma expressão que tenha a ver com o 'n', para mim faz sentido que o 'n' vai estar varrendo os naturais, porque ele é um elemento qualquer do domínio, e a gente vai sempre conseguir relacionar com o outro n, que vai estar do outro lado, e essa ideia de que você sempre vai conseguir para mim era o argumento, era suficiente, eu me vendi fácil assim.

E2 – 00:46:46 – Helena: Eloise, não sei se eu entendi. Você está pensando em fazer uma função com domínio em A, contradomínio em B ou vice versa?

E2 – 00:46:55 – Eloise: é, com domínio em B e contradomínio em A, eu acho que é sempre mais fácil partir dos naturais e tentar chegar onde ela quiser. 2n+1. Não, mentira.

E2 – 00:47:08 – Helena: é uma P.A.

E2 – 00:47:10 – Eloise: é, exato. Não é essa que eu falei, mas...

E2 – 00:47:13 – Flávia: 2n-1, eu acho.

E2 – 00:47:14 – Eloise: a ideia é essa, né, fazer uma relação de... 2n-1, né? Aí você vai ver que o primeiro elemento (...) o 1 vai estar ligado a um carinha, o 2 vai estar ligado a um outro carinha diferente, o 3 vai estar ligado a um outro carinha diferente. Primeiro que é fácil de você convencer que esses números são diferentes, que não vai repetir. Porque se você está pegando números diferentes, dobrando e somando 1, não faz sentido chegar no mesmo lugar que outro. E para mim a ideia de que vai varrer os dois, faz sentido nessa ideia de que não estava pulando. Tinha falado que do 1 para o 3 pula o 2. Eu acho que quando você faz isso você perde essa ideia de estar pulando. Porque você não vai estar mais pulando nos naturais, você está indo do 1 e vai estar ligando para o 1, o 2 vai estar ligando no 3, então você não está mais pulando, tem alguém ali do lado dele, acho que talvez perca essa ideia anterior de você estar saltando pelo conjunto.

E2 – 00:48:19 – Janete: e aí precisava ter a função ou bastava eu fazer
1 1
2 3
3 5
4 7
E ir colocando um embaixo do outro e depois terminava com os pontinhos do mesmo jeito [gesticulando com as mãos a ideia de colocar os números em colunas]?

E2 – 00:48:44 – Eloise: eu acho que as duas coisas são iguais.

E2 – 00:48:46 – Annabeth: eu acho que não.

> E2 – 00:48:47 – Isabella: eu acho que eles têm mais segurança... eu concordo com a Eloise de que assim, eu cairia fácil também nessa... eu seria influenciada pelo meu professor, tipo 'ah está certo mesmo, é verdade, professor'. Porque eu acho que quando a gente está no ensino básico, a gente confia muito nos números, não sei se vocês eram assim, mas se meu professor botava uma função lá, era muito mais fácil que meu professor ficar ligando, mesmo que simbolizasse a mesma coisa, eu acho que para um aluno, ele tem muito mais confiança nas contas e nas funções e... do que a gente listando. A gente pode até mostrar que pode ser a mesma coisa, a gente listar né, botar 1 1, 2 3 [gesticulando para dar a ideia de colunas como Janete fez], tudo mais, a gente vai acabar levando aos mesmos números, mas eu acho que eles têm mais confiança se a gente botar em forma de função. Talvez eles acreditem mais fácil.
>
> E2 – 00:49:40 – Julieta: eu acho que quando você coloca a função, você tira essa ideia que eu tive por exemplo que é uma reta e os 'numerozinhos' bonitinhos e o 2 faltou, sabe. Mais do que se você ligar, porque se você ligar eu ainda vou ficar tipo 'tudo bem, mas aquilo ali se você ligar uma na outra é tortinha, pulou'. É a cabeça, eu acho que é um pouco o jeito que a gente aprende a matemática, que a gente vai querendo sempre fazer tudo muito padrãozinho, aí eu concordo com a Janete, que ela falou isso antigamente, que a gente realmente procura um padrão, sabe. E o que o padrão ali me mostra é que está faltando o número, entendeu? E aí pela função eu quebro essa ideia do faltando, porque eu já estou fazendo...você está me provando de um jeito diferente, entendeu? Que não é só fazer o desenho. Para mim tem lógica.
>
> E2 – 00:50:35 – Janete: mas se eu trabalhar com criança um pouco menor, será que se eu falar de função essa criança vai entender ou se eu arrumar, em vez de arrumar como está deitadinho, arrumar em pezinho, que aí você vai ligar um ao outro de uma forma mais visual. Flavinha, se puder fazer aí no em branco... fazer do 1 ao 7 só e depois o outro... (...) é só porque eu queria ver se... estando assim e os pontinhos ali embaixo, Julieta, você acha que fica mais visual que não está pulando?
>
> E2 – 00:52:11 – Julieta: fica, fica melhor, é que a gente pensa logo na reta mesmo, e aí...

Durante as respostas apresentadas pelos participantes, surgiram três diferentes maneiras de mostrar que existe a mesma quantidade de números nos dois conjuntos apresentados: pela diagonal de Cantor, montando uma função que relacione os dois conjuntos ou fazendo uma relação biunívoca entre os conjuntos – ligando elemento a elemento de maneira visual. Além disso, a professora de português ainda reforçou que, apesar de compreender quando os outros participantes reforçaram que ambos os conjuntos possuíam a mesma cardinalidade, a princípio ela acreditaria que um possuía mais elementos que o outro.

Ao sugerir a utilização de algo parecido com a diagonal de Cantor, Helena, na realidade, indica que relacionaria os conjuntos elemento a elemento, ideia parecida com a trazida por Eloise na discussão anterior, como a professora Janete lembrou. A diagonal de Cantor é uma demonstração feita pelo matemático Georg Cantor para provar que existem conjuntos infinitos que não podem ter seus elementos relacionados biunivocamente com o conjunto dos números naturais. Como a ideia de Helena, segundo sua fala, seria justamente mostrar que os elementos dos dois conjuntos poderiam ser relacionados um a um, ela deixou a entender que, apesar de usar o termo “diagonal de Cantor”, não utilizaria esse método, mas sim o método da correspondência biunívoca dos elementos para mostrar que os dois conjuntos apresentados possuem a mesma cardinalidade.

Annabeth concorda com o método sugerido por Helena, de relacionar os dois conjuntos, elemento a elemento. A professora deixou claro que acredita que essa seria a maneira mais simples e de fácil compreensão, uma vez que, ao sempre “ter mais um para relacionar nos dois conjuntos”, indicaria que não sobraria nenhum elemento em cada conjunto, logo, seria demonstrado que os dois possuem a mesma quantidade de elementos.

A professora Julieta, única professora de português presente, apesar de afirmar ter compreendido que ambos os conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos, explicitou ficar desconfortável com essa afirmação. Para ela, é intuitivo perceber que “faltam” elementos em um conjunto que estão presentes no outro, logo um deles é menor. Essa ideia de que a intuição indica que um conjunto é maior que o outro é esperada também dos alunos do ensino básico, uma vez que é incomum que infinitos sejam trabalhados em sala de aula e a construção da ideia de que, mesmo “faltando” elementos em um dos conjuntos que estão presentes no outro, ambos possuem a mesma quantidade, não é imediata. Portanto, a afirmação de Julieta sobre concordar com o que o aluno Gustavo disse na situação fictícia apresentada, é esperada também dos alunos do ensino médio. Os outros professores de matemática presentes tentaram justificar, tanto para Julieta quanto para si próprios, cada um à sua maneira, as cardinalidades iguais dos dois conjuntos.

Ao afirmar que enxerga essa demonstração como frágil e que nunca obteve uma resposta para suas perguntas sobre o assunto, Helena mostra que, por mais que acredite na demonstração – uma vez que ela mesma disse que a utilizaria com seus alunos –, não compreende completamente por que ela funciona ou como é possível provar que ela vale para todos os números do conjunto. Observamos um caso de uma professora que, apesar de compreender o que está sendo demonstrado e realizar o mesmo procedimento com seus alunos, não se sente segura em relação a ele, discordando de que seja esse o método adequado para realizar sua abordagem. Ela retoma o questionamento sobre quantidades levantado anteriormente por James, ao reforçar que não tem certeza se é possível garantir que realmente todos os elementos de um conjunto se relacionarão com todos os elementos do outro, para poder garantir que ambos têm a mesma cardinalidade.

Eloise, ao afirmar que, a seu ver, é mais fácil esclarecer a dúvida de Helena utilizando a lei de formação de uma função para garantir que todos os elementos dos dois conjuntos estarão relacionados, acaba fazendo com que Helena explicite suas dúvidas também em relação a esse método. Ao utilizarmos uma função para relacionar elementos de dois conjuntos, podemos garantir que todos os elementos do domínio estarão relacionados a todos os elementos do contradomínio, caso a função seja sobrejetiva, e cada elemento do contradomínio só estará relacionado a um do domínio, caso ela seja injetiva. Logo, a função descrita por Eloise deve ser bijetiva para que seu argumento seja coerente. Apesar de não utilizar os termos referentes à bijetividade da função, está implícito na fala da professora que está sendo considerada, em sua explicação, uma função simultaneamente sobrejetiva e injetiva – logo, bijetiva.

Ao reforçar que entende melhor a explicação seguindo o raciocínio da função, Eloise explora a relação biunívoca – que já havia sido trazida pelos participantes – a partir de funções, para provar que de fato não sobrará nenhum elemento em qualquer dos conjuntos que não esteja relacionado a algum elemento do outro. Ao enxergar a relação entre os conjuntos como uma função com uma lei de formação estabelecida, a compreensão sobre a injetividade e a sobrejetividade da função fica mais clara, segundo a professora. Como ela mesma ressaltou que possui facilidade em compreender a ideia de função, é coerente que a justificativa mais convincente para ela seja a que envolve um assunto de seu domínio. Por outro lado, Helena não parece acreditar que essa explicação seja mais fácil que a apresentada por ela mesma – em que também alegou dificuldade de compreender. É comum que um mesmo assunto seja compreendido a partir de diferentes demonstrações por cada pessoa, e abordagens diversificadas de um mesmo conteúdo é algo que está previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998). É interessante perceber também, a partir do relato de Eloise, que, quando há familiaridade com determinada área de conhecimento, a compreensão de outros assuntos fica mais simples quando eles são trabalhados dentro dessa área de conhecimento.

Ao utilizar a ideia de função para relacionar os dois conjuntos, Eloise ainda remete à dúvida explicitada por Julieta, quando a professora de português afirma que, de imediato, tem a sensação de que há elementos faltando em um conjunto, e não no outro.

Ao ouvir o argumento de Eloise, a professora Janete pergunta se, em vez de relacionar os dois conjuntos através de uma função, bastaria listar cada conjunto em uma coluna para relacionar os elementos dos dois e, assim, estabelecer a relação entre os dois. As respostas à pergunta de Janete mostraram opiniões divergentes, uma vez que Eloise afirmou acreditar que os dois simbolizam o mesmo, Annabeth discordou de Eloise e tanto Isabella quanto Julieta retomaram a fala de Eloise ao dizer que acreditam que enxergar a relação como função é mais fácil.

Nem Annabeth nem Eloise justificaram suas respostas, mas Isabella aprofundou seu pensamento. Ao dizer que seria influenciada pelo professor a acreditar na função, a professora deixou claro que não acredita que o importante dessas justificativas seja a compreensão do que se está vendo, e sim a crença de que aquilo está certo. Ao usar as palavras “acreditar”, “confiança” e influenciada”, Isabella, apesar de dizer concordar com Eloise, traz implicitamente um outro argumento à discussão: a importância de apresentar aos alunos a demonstração sobre os dois conjuntos possuírem a mesma cardinalidade não está relacionada à compreensão dessas justificativas, mas à confiança no professor de que elas estão certas. Isabella deixa a entender que o objetivo de trazer aos alunos a demonstração de que dois conjuntos infinitos podem ter a mesma cardinalidade não tem como objetivo a compreensão dos jovens, e o professor deve buscar explicar de maneira que a explicação seja aceita por eles, em vez de compreendida. A professora, então, levanta uma sutil problematização sobre a importância da compreensão dos alunos sobre os assuntos vistos na aula de matemática, mas essa problematização não é explorada no encontro, e nenhum dos outros participantes se atenta a isso.

Essa ideia trazida por Isabella vai ao encontro de falas anteriores de Helena, quando ela reforça que compreende ou aceita o que está sendo dito pelo professor, reproduz essa explicação, mas não concorda totalmente que seja essa a melhor maneira de explicar. Também vemos em falas de Eloise a mesma afirmação de que, às vezes, o importante é fazer com que o aluno concorde com o que está sendo dito, sem necessariamente compreender. Ao dizer “eu me vendi fácil assim”, Eloise reforça que, assim como Helena, não concorda com a explicação dada por seu professor, mas aceitou e reproduziria essa explicação a seus alunos. Ao trazer as noções de convencimento e aceitação por parte dos alunos, as três participantes – Isabella, Helena e Eloise – deixam implícito que acreditam no papel do professor em convencer o aluno de uma ideia, sem que o jovem necessariamente a compreenda totalmente. Eloise, por exemplo, apresenta com clareza sua ideia sobre funções, mas, ao dizer que “esse argumento não vai convencer a todo mundo” ressalta que a compreensão da matéria pelos alunos não seria nesse caso o objetivo principal de sua abordagem.

Julieta, ao concordar com as ideias trazidas por Eloise e Isabella, de que a ideia de função facilita a compreensão, utiliza seu próprio argumento do início da conversa para justificar seu argumento atual: ao visualizar as listas com os elementos dos dois conjuntos, sua ideia intuitiva é de que há elementos faltando em um deles. No entanto, Julieta atribui à função uma justificativa palpável e mais compreensível, pois não depende da visualização, e se baseia em argumentos que, segundo ela, são mais passíveis de se compreender. Quando a orientadora Janete reforça sua pergunta sobre a diferença entre visualizar os dois conjuntos em lista de maneira horizontal ou vertical – ou seja, em duas linhas ou em duas colunas –, Julieta concorda com Janete que, ao visualizar os elementos na vertical, é possível enxergar a relação entre eles de maneira diferente da visualização na horizontal, pois, segundo ela, a organização horizontal remete à reta numérica. Se olharmos para a reta numérica e virmos que há elementos do conjunto dos naturais que não estão presentes, temos a ideia de que há elementos faltantes. No entanto, se vemos esses elementos em uma posição distinta da reta, podemos compreender de outra maneira o que estamos vendo.

Em seguida, perguntei aos participantes, mais uma vez, por que podemos dizer que alguns infinitos são maiores que outros, e se seguiu a discussão:

> E2 – 00:55:06 – Flávia: (...) Como que eu viro e falo 'ok, alguns infinitos são maiores que outros'. Por quê?
>
> E2 – 00:55:48 – Janete: a impressão que eu tenho é que isso foi falado também no livro para falar do [0,1], [0,2], mas não de outros infinitos. Porque os outros já é super mais complicado, porque você vai ter que entrar em Cantor, Aleph 0, Aleph 1, Aleph 2...
>
> E2 – 00:56:09 – Flávia: como é que a gente pode falar disso sem falar do Aleph 0, Aleph 1, Aleph 2, ...?
>
> E2 – 00:56:58 – Annabeth: eu acho que talvez o <u>primeiro passo</u> seja você mostrar exemplos mais... não fáceis né, porque isso não é fácil, mas assim, <u>exemplos mais 'simples'</u>, entre aspas, tipo esse dos naturais com os números ímpares. Dá para você entender nessa ideia de ligar um a um etc., que a gente estava falando, que esses 2 conjuntos são iguais. Se você mostra isso para o aluno primeiro, e toma como conceito, como 'definição', entre aspas, igualdades de conjuntos de cardinalidade de elementos, como você quiser apresentar isso para o aluno de ensino básico (...) e tomar 'olha, a gente considera dois conjuntos com a mesma quantidade de elementos quando eu consigo fazer a ligação um a um'. Se você parte de um exemplo assim e depois você parte para um <u>outro exemplo para mostrar dois conjuntos que não possuem essa característica</u>, eu acho que fica mais claro talvez para o aluno. Se você parte da 'parada' que é e depois mostra que não. Faz sentido?
>
> E2 – 00:58:00 – James: <u>concordo plenamente</u> com a Annabeth. Mas também tem que... eu queria te perguntar qual o público-alvo... seria qual ano mesmo?
>
> E2 - 00:58:14 – Flávia: não sei, qual você acha que...
>
> E2 – 00:58:16 – James: está em aberto?
>
> E2 – 00:58:17 – Flávia: Está. Para o ensino médio, nono, oitavo, ...
>
> E2 – 00:58:28 – Annabeth: Cara, eu acho que para o nono ano rola.
>
> E2 – 00:58:30 – James: porque <u>dependendo do ano, a gente vai ter ferramentas diferentes</u> né, para poder demonstrar essas coisas. Eu acho que quando a gente tem a ferramenta de <u>trabalhar com função</u>, isso aí fica muito mais fácil. Fácil talvez? Acredito que sim. Na minha inocência, acredito que fique mais fácil. Mas, sem ela, a gente vai ter que mostrar de maneira lúdica como você estava montando aí, como a Annabeth também propôs. Primeiro mostrando como que um conjunto tem a mesma cardinalidade que o outro, como que a gente pode demonstrar isso, fazendo a ligaçãozinha e deixando reticências ali no final, e a partir disso, entendendo que os alunos compreenderam o que significa um conjunto ter a mesma cardinalidade que o outro, aí a gente introduz o conceito de um conjunto que tem infinitos elementos, mas que a gente não consegue fazer essa relação um para um. Aí entra aí, por exemplo, os irracionais, que a gente já não consegue fazer

isso. Mas o que está faltando agora para eu pensar... para mim é muito difícil pensar nisso, né... é a estratégia. Como eu vou mostrar que não dá? Para mim, mostrar que dá é muito mais fácil que mostrar que não dá.

E2 – 00:59:52 – Annabeth: sim. É, assim, você falou de função, né? Eu acho, particularmente... eu tive uma turma de nono ano no ano passado, então quando a gente fala de nono ano eu sempre penso neles, assim, como que eles reagiriam a isso. Então falar de função, tanto no nono ano quanto no ensino médio, é muito complicado, porque a gente tem um entendimento de função completamente diferente do deles. Para eles, função é o gráfico e a equação. Aquele conceito inicial de função, que é a base de função, que a gente trabalha injeção, bijeção, nossa, aquilo para eles não faz o menor sentido, eles não conseguem ver que a gente só está dando uma representação diferente para aquela relação entre conjuntos, que a gente pega aquilo e faz o gráfico, que a gente pega aquilo... para eles são mundos completamente diferentes. E eu acho que a gente não tira isso da gente no ensino médio, sinceramente. Eu quando terminei o ensino médio, eu não acho que eu entendi o que era uma função. Eu sabia fazer função afim, eu sabia fazer função quadrática, se você me desse qualquer questão de função afim e quadrática eu fazia. Agora, se você me pedisse para explicar o que é uma função e por que a gente tinha aquelas setinhas de conjunto não sei que, eu não sabia. E eu não acho que uma turma do nono ano vá saber, mesmo sendo conteúdo deles. Mesmo sendo o ano que eles são introduzidos àquele conteúdo. Eu acho que não falar de função vai mais ajudar eles do que atrapalhar. Eu acho que você conversar com eles e mostrar essas coisas 'olha, se eu for ligando aqui um a um', que nem a gente está fazendo, uma parada bem pé no chão, sem envolver muitos conceitos complicados, eles vão acompanhar e ainda vão ficar interessados, vão ficar tipo assim 'caraca, meu deus, eu nunca tinha pensado nisso'. Agora, se tu quiser meter função no meio eu acho que perde eles assim, em 5 segundos.

E2 - 01:01:44 – Janete: (...) agora vou fazer uma outra pergunta: aqui a gente parou no 7 e no 13 né, mas finge que tem os pontinhos. Mas vamos dizer que a gente parou no 7 e no 13 e agora a gente tem 2 conjuntos finitos e tal. Como é que eu digo que eles são iguais? Como é que eu posso dizer que eles têm a mesma cardinalidade ou não?

E2 - 1:02:50 – Julieta: pela quantidade? Para mim...

E2 - 1:02:55 – Janete: quantidade de quê?

E2 - 1:02:59 – Julieta: ah, pela quantidade de... eu ia falar pontos, né, mas... pontos não é uma boa. Mas pela quantidade que vai aparecendo ali, de numerozinhos. A gente liga um para um, é igual.

E2 - 1:03:16 – James: delicado isso, né? Porque é aquela história, a gente só está vendo ovelha branca no pasto, mas significa que só porque a gente só está vendo ovelha branca não tem nenhuma ovelha com uma cor de lã diferente lá para a frente?

E2 - 1:03:33 – Janete: você acha que vai ter algum número ímpar diferente? Algum número natural seguidinho, um sucessor do outro, vai ser diferente? Eu vou somar um do lado de cá e vou somar 2 do lado de lá. Não vai ter ninguém que vai fugir desse padrão, num eu estou somando um e no outro eu estou somando 2.

E2 - 1:03:59 – James: aí a gente volta no assunto de padrão, né?

E2 - 1:04:03 – Janete: e aí entra essa história que a gente fala, tem algumas coisas que realmente a gente faz, mas fica meio nervoso com isso, não está confortável em fazer uma coisa dessa (...).

E2 - 1:05:25 – Eloise: eu acho...eu estava ouvindo vocês e eu acho que talvez mais do que se perguntar como é que a gente pode explicar isso para um aluno da explicação básica, por que a gente faria uma coisa dessas? <u>Por que a gente estaria interessado em explicar com um grau de formalidade tão grande uma coisa assim para um aluno de oitavo ano até sei lá, primeiro ano</u>? Pensando assim, oitavo, nono, primeiro. O que eu estou querendo dizer não é que a gente não deva falar esse tipo de coisa com eles, o que eu estou querendo dizer é que não precisa disso tudo. A gente está se convencendo que precisa porque acho que a parte intrínseca nossa que cursou matemática está dizendo que a gente tem que explicar tudo sem nenhuma falha. Às vezes, você não precisa ter um argumento infalível, não precisa mostrar para todos os números, eu <u>só preciso mostrar o suficiente para abrir o horizonte deles</u>. Talvez isso não seja uma demonstração matemática, talvez o caminho seja mesmo uma coisa mais filosófica como a gente estava falando sexta-feira, de abrir porta. Não seja uma questão de fazer uma demonstração. Eu acho.

Percebemos que Annabeth e James, em resposta ao que eu e Janete perguntamos, sugeriram que uma boa estratégia para abordar conjuntos infinitos de diferentes cardinalidades seria partir de conjuntos cardinalmente equivalentes. Suas justificativas para a questão de haver infinitos maiores que outros partiria da contradição de que há conjuntos que possuem mesma cardinalidade: se há conjuntos cardinalmente equivalentes, e se é possível mostrar essa equivalência a partir de uma relação biunívoca entre os elementos de ambos conjuntos, então, quando nos deparamos com conjuntos em que não é possível estabelecer uma relação biunívoca entre seus elementos, entendemos que esses conjuntos não possuem a mesma cardinalidade, logo um possui mais elementos que o outro. Essa ideia retoma as explicações trazidas pelos participantes anteriormente, sobre a “ligação um a um” entre os elementos dos conjuntos, mas, dessa vez, para justificar infinitos de diferentes cardinalidades, e não mais conjuntos cardinalmente equivalentes.

Entendemos então que, segundo os relatos dos professores Annabeth, Eloise e James, a ideia de relacionar os elementos dos dois conjuntos pode ser uma justificativa válida tanto para conjuntos de mesma cardinalidade quanto para conjuntos de cardinalidades diferentes – essa, a partir da contradição. Se podemos mostrar que a relação biunívoca entre os elementos prova que dois conjuntos têm a mesma cardinalidade, então, quando não for possível estabelecer essa relação biunívoca, provamos que as cardinalidades são diferentes, logo um conjunto tem uma quantidade maior de elementos que o outro.

James ainda retomou a ideia trazida por Eloise anteriormente de que utilizar funções poderia ser uma boa estratégia para justificar conjuntos infinitos de diferentes cardinalidades, desde que realizada no ensino médio, uma vez que ele acredita que nessa etapa os alunos já teriam as ferramentas necessárias para compreender a explicação dessa maneira. Entendemos que as ferramentas às quais James se refere seriam as noções de função, pois os alunos já estariam com essas ideias bem claras em mente e, portanto, conseguiriam compreender bem algo que fosse explicado a partir delas.

Annabeth discordou de James, pois, segundo ela, os alunos de ensino básico, por mais que estudem funções do nono ao terceiro ano, não compreendem bem as noções de funções necessárias para utilizá-las como base para justificar cardinalidades de conjuntos infinitos. No ensino básico, por mais que os alunos estudem funções e aprendam a resolver exercícios sobre o assunto, esse conteúdo não costuma ser intuitivo para os estudantes, e realizar uma abordagem de outro assunto a partir desse poderia dificultar a compreensão, mais do que facilitar. Por isso, Annabeth reforçou a ideia de que estabelecer a relação biunívoca, de um modo menos formal, entre os elementos dos conjuntos seria uma melhor maneira de realizar a justificativa proposta. Podemos observar que, na discussão anterior, quando Eloise propôs também a utilização de funções para explicar conjuntos infinitos de mesma cardinalidade, Annabeth não concordou que utilizar uma função para relacionar dois conjuntos teria o mesmo efeito que estabelecer uma relação entre eles de maneira visual – utilizando “setinhas”. Agora, Annabeth justificou seu posicionamento anterior, que foi mantido ao discordar de James.

Percebemos que, na maioria de suas falas, James esteve sempre receoso em relação às suas afirmações, com frequência se desculpando, expressando suas opiniões em tom de perguntas ou reforçando que suas falas se referiam apenas a suas opiniões. Por mais que, muitas vezes, demonstrasse não estar seguro sobre o que estava falando, como deixou claro por se posicionar com ressalvas, James ainda assim não deixou de expressar suas opiniões no grupo – ou não teria contribuído com as discussões. No entanto, se sentiu confortável apenas até certo ponto, pois, caso contrário, poderia expor suas opiniões com mais assertividade e certeza, sem se desculpar ou questionar suas próprias contribuições.

A professora Janete levantou outro questionamento: caso considerássemos que os conjuntos apresentados na situação hipotética fossem finitos, ou seja: A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, como justificaríamos que ambos possuem a mesma cardinalidade? A professora de português, Julieta, ao responder que pela quantidade de pontos representada, voltou atrás em sua resposta para alterar o termo utilizado, uma vez que mais cedo, naquele mesmo encontro, ela e Janete haviam dialogado sobre a ideia de representação de pontos:

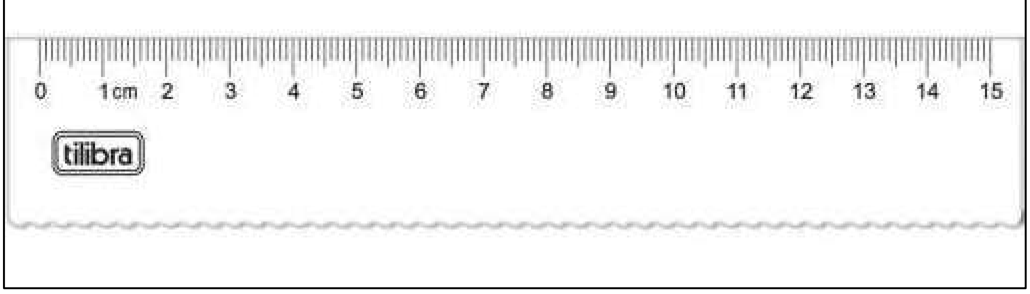
> E2 – 00:30:12 – Janete [com uma régua na mão]: Eu vou falar mais uma coisa (...) que é o seguinte: cuidado para a gente não confundir, olha. Aqui a gente tem de 0 a 1 e tem de 0 a 2. Evidentemente que, enquanto medida linear, de 0 a 1 é uma coisa e de 0 a 2 é maior. Por exemplo, quem tem 1,50 m e quem tem 1,80 m, quem tem 1,80 m é maior. Agora, se eu for perguntar, entre 0 e 1,80, entre 0 e 1,60 eu tenho quantos pontos, é uma outra coisa. O grande defeito para mim é quando a gente marca ponto. Ponto, por definição, não tem dimensão, então ele não existe, só existe na nossa cabeça. Aí a gente representa para poder conversar sobre alguma coisa, mas ele existe na nossa cabeça, porque a gente marca. Aí tem vezes que a gente marca o ponto com x, às vezes marca com um ponto enorme, às vezes só com a ponta do lápis, tudo isso são representações que a gente inventou.

> E2 – 00:33:18 – Julieta: Essa concepção da representação do ponto, a gente acha no livro também, com a blusa que a Hazel usa, que diz “Isso não é um cachimbo”, que é uma representação de um cachimbo. É só isso.

> E2 – 00:33:53 – Helena: É verdade, eu nunca tinha feito esse paralelo, essa relação. Mandou bem.

> E2 – 00:33:57 – Julieta: É, ela está falando de uma representação, né. Ela tem uma representação ali que pode até ir para a filosofia também, mito da caverna, Platão, o que é o ideal, o que é representação e o que não é, pode caminhar por aí para sempre trabalhando esse livro aí. Só esse ponto aí dá um ano inteiro de questionamento.

Figura 17 - modelo de régua como a utilizada por Janete em sua explicação



Fonte: site da marca Tilibra[7]

Ao ouvir a explicação sobre a diferença entre quantidade de pontos em um segmento e seu tamanho linear, Julieta fez uma relação com outra parte do livro *A culpa é das estrelas* em que a ideia de representação é mencionada.

Pensando no que Janete havia dito sobre os pontos, ao falar sobre quantidades, Julieta se corrigiu imediatamente para utilizar um termo diferente e não se referir aos pontos, para não gerar confusão sobre o que ela estava dizendo.

Percebemos que, ao longo de toda a conversa, as percepções dos professores de matemática são diferentes das percepções da professora de português. Como cada professor traz em sua bagagem uma formação diferente, os pontos que chamam atenção de cada professor não são os mesmos, o que enriqueceu muito as conversas, trazendo pontos de vista advindos de diferentes áreas de formação, que permitem diferentes olhares sobre um mesmo tema.

James trouxe um questionamento sobre a validade das afirmações feitas em relação aos elementos dos conjuntos infinitos. Ao usar a metáfora das ovelhas brancas, ele sugere possuir dúvidas sobre poder afirmar que, além dos elementos que estão visualmente aparentes em cada conjunto, os próximos elementos também seguirão as mesmas regras e retoma também uma conversa que ocorreu no início do encontro, sobre padrões:

> E2 – 00:12:01 – Janete: O que vocês acham da palavra ‘padrão’? Tem a ver com matemática? Reconhecer padrões, criar padrões...?
>
> E2 – 00:12:23 – Helena: Eu (...) acho que tem a ver com matemática sim.
>
> E2 – 00:12:27 – Isabella: Eu também acho.
>
> E2 – 00:12:44 – Eloise: Eu acho que padrão tem a ver com matemática. Eu acho que padrão tem a ver com <u>humanidade</u>. Acho que a gente procura padrões dentro de matemática como a gente procura padrões dentro de um milhão de outras coisas, mas eu não diria que é uma coisa de matemática.
>
> E2 – 00:13:00 – Janete: mas quando você procura dentro de outras coisas, você não está usando um raciocínio matemático? A matemática não precisa estar engessada em um pedacinho, né?
>
> E2 – 00:13:13 – Eloise: Acho que já é minha alma de estudante de educação especial falando, mas, quando eu ouço padrão, eu ouço discurso de normalidade, e eu acho que normalidade é uma construção

[7] https://www.tilibraexpress.com.br/regua-em-poliestireno-15cm

> social, eu acho que não tem a ver com matemática, mas mesmo quando a gente procura por... depende de qual tipo de padrão você está procurando. Numa questão de categorização, talvez, mas acho que isso está dentro de um monte de outras... eu não acho que isso seja uma característica da matemática.

Mesmo não falando durante o debate sobre o uso da palavra ‘padrão’, James retomou essa conversa ao expressar sua dúvida em relação à ideia de que ler as definições dos conjuntos A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...} seria suficiente para afirmar que todos os elementos desses conjuntos seguiriam a sequência sugerida. Quando a professora Janete afirma que ambos os conjuntos seguem um padrão – o conjunto A sempre soma 2 unidades ao elemento anterior, enquanto o conjunto B soma 1 unidade ao elemento anterior –, ela utiliza sua ideia trazida anteriormente sobre padrões na matemática.

Como James não responde mais depois de perguntar sobre a ideia de padrão, entendemos que o professor utilizou sua própria pergunta como forma de reflexão sobre o assunto.

Como a professora Janete disse em seguida, entendemos que James não estava confortável com a ideia de que esse padrão obrigatoriamente se repetisse, pois, segundo ele, nada garantiria que a ‘regra’ que determinava cada conjunto não se alteraria após a sequência que estava sendo mostrada. Entendemos que, como o professor não expressou para o grupo uma conclusão para esse pensamento após as respostas de Janete e Eloise, ele manteve sua opinião baseada na sua própria argumentação. A dúvida de James pode ter partido do fato de que, quando escrevemos um conjunto, deixamos implícito que seus elementos seguirão a sequência sugerida. No entanto, nesse caso, não escrevemos uma regra geral para essa sequência ou indicamos que todos os elementos do conjunto seguem o mesmo padrão que os primeiros elementos mostrados. Ao deixarmos implícitas as regras de formação, podemos gerar dúvidas, como a expressa por James.

A professora Eloise levanta um questionamento sobre a necessidade de demonstrar para os alunos as ideias discutidas no encontro, sobre tamanhos de infinitos. Seu argumento se baseia no fato de que é comum professores de matemática quererem demonstrar e justificar de maneira formal tudo que é mostrado aos alunos, quando, nesse caso, ela mostra acreditar que tal demonstração não seria necessária. Podemos entender pela expressão “abrir o horizonte deles” que, para ela, seria suficiente permitir que os alunos reflitam sobre as ideias de tamanhos de conjuntos infinitos, mesmo sem entrar em um debate aprofundado sobre o assunto.

A fala de Eloise pode ser relacionada a uma fala de Annabeth no início encontro seguinte, também sobre a necessidade de demonstrações formais no ensino básico:

> E3 – 00:16:27 – Annabeth: sim, eu acho que (...) a gente está muito acostumado, a gente que está na graduação ou, enfim, no mestrado, a gente está muito preso na verdade às formalidades da matemática, porque a gente foi meio que criado na faculdade para isso, do tipo ‘olha, tem a matemática do ensino médio, mas a partir de agora a coisa fica mais séria. Então, se você quiser afirmar alguma coisa, você tem que passar por 255 sofrimentos para demonstrar ela para conseguir afirmar essa coisa, e aí a gente leva isso para a vida, porque a gente fica tanto com isso dentro da gente durante a graduação, que a gente não sabe se a gente pode afirmar nada na prova, a gente pega a prova e a gente não sabe... se eu posso afirmar que eu existo, não sei se eu posso afirmar meu nome, eu fico nervosa com qualquer coisa que eu falo na prova porque eu acho que eu tenho que demonstrar que meu nome é Annabeth. Então, assim, a gente fica com isso... com esse vício. E eu acho que quando a gente pensa em ensino básico, a gente tem que, como professor, obviamente que a gente não vai desapegar disso em todos os momentos, mas a gente também precisa dar uns 10 passos atrás e lembrar que a gente não vai conseguir... a gente não deve, na verdade, fazer a mesma coisa com nossos alunos de nono ano, primeira série, sabe, porque com eles é muito mais sobre mostrar em alguns momentos do que sobre demonstrar. E eu acho que a gente fica tão preocupado com as formalidades que às vezes a gente esquece que com eles a gente pode fazer caminhos muito mais simples que só mostrem aquilo para eles. E se um dia eles quiserem fazer matemática, aí eles vão entrar lá né, no Cantor, nas demonstrações mais formais, que deixam a gente desse jeito.

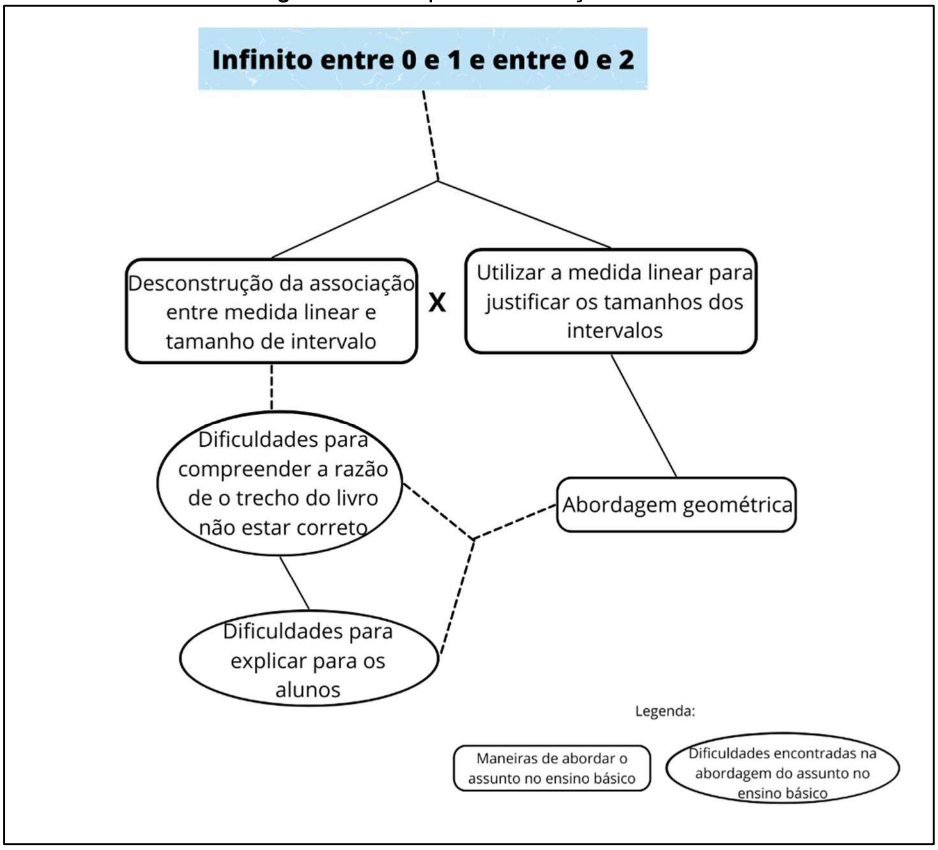
As duas professoras trouxeram basicamente o mesmo argumento em ambas suas falas, afirmando que, muitas vezes, não há necessidade de realizar determinadas demonstrações no ensino básico. No estudo da matemática, tudo que não é axiomático deve sempre ser justificado. E, na graduação em licenciatura em matemática, principalmente nas disciplinas de matemática, é muito comum que sejam estudadas demonstrações para todas as afirmações feitas. Percebemos que tanto Annabeth quanto Eloise discordam que tal hábito deva ser utilizado no ensino básico como regra: muitas vezes, é preferível apenas mostrar algo aos alunos a demonstrar a veracidade daquela afirmação. Entendemos que, implicitamente, as professoras Eloise e Annabeth mostraram que acreditam que certas demonstrações formais podem ter o efeito contrário ao que foi levantado nas seções 4.1 e 4.2: a aproximação do aluno com a matemática e o desenvolvimento de afeição pela disciplina e pelo conteúdo estudado. Abordar temas com demonstrações formais, que podem gerar dificuldades na compreensão dos alunos – o que pode ser concluído a partir do fato de que os próprios professores apresentam dificuldades para compreender tais demonstrações –, neste caso não seria algo benéfico.

Durante as conversas apresentadas nesta seção, dado o rumo que as reflexões tomaram, poderia ter sido feita alguma pergunta sobre a garantia de que o conjunto dos números reais é ou não maior que o intervalo [0, 1]. Como nenhum dos participantes trouxe esse questionamento, mas acreditamos que é uma reflexão pertinente sobre o assunto discutido nesta seção, entendemos que seria um encaminhamento importante para futuras pesquisas sobre o tema.

4.3.2 “Existe uma quantidade infinita de números entre 0 e 1. Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2 ou entre o 0 e o 1 milhão.”

Esta seção se baseia nas discussões sobre o trecho do livro *A culpa é das estrelas* “existe uma quantidade infinita de números entre 0 e 1. (...) Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2 ou entre o 0 e o 1 milhão”. Serão analisadas as interações dos participantes acerca desse assunto: suas compreensões sobre o tema e como poderia ser realizada a abordagem desse conteúdo em sala de aula no ensino básico.

Figura 18 - esquema da seção 4.3.2



Fonte: elaboração própria

Logo no início do primeiro encontro, ao responder à pergunta "Onde você encontra matemática no livro? O que chamou sua atenção?", uma das respostas que mais foi desenvolvida e debatida ao longo dos encontros girou em torno da seguinte passagem presente em *A culpa é das estrelas*: "existe uma quantidade infinita de números entre 0 e 1. (...) Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2 ou entre o 0 e o 1 milhão".

> E1 – 00:12:31 – Annabeth: eu acho que ela fala um pouquinho dos <u>números decimais</u>, né, quando ela fala dos infinitos ela usa os números decimais, se não me engano, como exemplo, que ela fala dos <u>intervalos</u>, que <u>entre um número e outro existem não sei quantos</u>...
>
> E1 – 00:12:44 – James: é verdade, tem uma passagem dessas, que fala que são infinitos números, não sei se entre 0 e 1 ou entre 1 e 2...
>
> E1 – 00:12:51 – Isabella: entre 0 e 1.
>
> E1 – 00:12:53 – Eloise: depois outros entre 0 e 2.
>
> E1 – 00:12:56 – Isabella: mas é tudo no <u>mesmo trecho</u>, né? Acho que são todos no mesmo trecho, se não me engano.

E1 – 00:13:02 – Julieta: é tudo no discurso fúnebre que ela faz no final, mas quem fala desse negócio dos infinitos, quem traz, é o escritor. O americano que vai para a Holanda, é ele que traz, o Van Houten.

Ao citar um trecho do livro que chamou sua atenção, Annabeth fala sobre números decimais e intervalos. Compreendemos que ela se refere à representação de intervalos numéricos na reta real. A partir de sua descrição da passagem do livro, entendemos que Annabeth se refere ao trecho destacado no início desta seção.

Foi possível perceber que os participantes se complementavam ao tentar lembrar quais intervalos são tratados na passagem a que se referem. Com isso, entendemos que todos os participantes presentes nessa conversa demonstram concordar que esse trecho apresenta matemática e chamou sua atenção durante a leitura, uma vez que os cinco mostram saber a que trecho Annabeth se refere e trazem à conversa novas informações sobre a passagem.

Ao longo dos três primeiros encontros, foi discutida pelos participantes a validade dessa afirmação trazida pela personagem Hazel e exposta certa dificuldade em compreender por que a afirmação não estaria correta.

E1 – 00:23:30 – James: (…) inclusive, dá para debater sobre a validade de algumas passagens, dá até para abrir essa discussão. No meu caso eu percebi, parei, fiquei, pensei, não passou batido não. Para mim foi muito evidente.

E1 – 00:25:35 – Isabella: (…) para mim era óbvio, 'ah existem infinitos números entre 0 e 1, vai ter outros infinitos entre 0 e 2'. Para mim, na época que eu li, isso era bobeira.

E1 – 00:33:29 – Helena: (…) mas a questão dos infinitos... eu esqueci de falar, eu era uma aluna boa em matemática no ensino médio, muito boa, então essa parte dos infinitos especificamente eu achei incrível! Falei 'caraca, eu nunca parei para pensar sobre isso! E é verdade, porque o argumento que ela deu super fez sentido!' A partir desse momento, quando alguém me perguntava sobre infinitos, eu falava 'não, existem infinitos maiores que outros sim, porque entre 0 e 1 e entre 0 e 2...' eu usava esse argumento para a vida, porque eu achava que super fazia sentido! E eu lembro que uma sensação que me inundou foi que eu pensava 'caraca, é uma demonstração tão fácil de fazer! Eu não precisava ter lido o livro para saber disso', então me bateu aquela frustração de 'po, é uma ideia tão boa que eu não tive, eu como uma amante de matemática'. Aí quando eu entrei na faculdade e vi que esse argumento estava errado (...) acabou com o final da minha adolescência. Então isso me marcou bastante. Foi a única passagem que me marcou, mas marcou muito!

E1 – 00:35:54 – Julieta: Mas esse argumento está errado? Eu estou aprendendo tudo errado, é isso mesmo? Eu acho que a única parte realmente que me fez pensar, que agora eu descobri que está errado e não sei mais o que pensar, mas realmente eu parei para pensar que

> realmente faz sentido isso. Mas eu levei mais para o lado existencial da coisa, porque eu acho que é um livro muito metafórico, muito existencial, então logo eu já levei e para o lado existencial, do infinito no nosso conceito, e não no conceito matemático. Mas agora descobri que está tudo errado e não sei mais o que pensar.

Quando James levanta a discussão sobre a validade dessa passagem, Isabella e Helena deixam claro como, ao lerem o livro pela primeira vez, aceitaram que a passagem estava correta, e realmente acreditavam que havia um infinito maior de números no intervalo [0, 2] do que no intervalo [0, 1]. Isabella não falou sobre sua reação ao entender que, na realidade, ambos conjuntos possuem a mesma cardinalidade, mas Helena demonstrou seu choque, ao utilizar a frase “acabou com o final da minha adolescência”. Ao dizer que acreditava que a ideia estivesse certa, compreendia a explicação e enxergava sentido no que estava sendo dito, entendemos que Helena não apenas acreditou no que leu, mas refletiu sobre o assunto e concluiu que a afirmação estava correta, a partir de seus próprios conhecimentos da época de aluna do ensino básico. Ao aprender que, na realidade, ambos intervalos possuem a mesma cardinalidade, Helena mostra seu choque ao compreender que algo que ela acreditava ser verdade não estava matematicamente correto. Percebemos aqui uma controvérsia dentro da fala de Helena. Entendemos que, para ela, a ideia de ser boa aluna em matemática e a ideia de errar ou compreender de maneira errada uma ideia matemática se opõem.

Percebemos o mesmo choque com a reação de Julieta, a única professora de português presente no debate, que se mostra frustrada ao escutar os colegas relatarem que o intervalo [0, 2] não possui uma quantidade maior de elementos que o intervalo [0, 1]. Julieta acreditava, até então, que um intervalo possuía mais elementos que o outro, e apenas durante o encontro foi apresentada à ideia de que ambos possuem a mesma cardinalidade. Ao dizer, mais de uma vez, “não sei mais o que pensar”, podemos ver que Julieta fica confusa com a informação e, talvez, sinta que precisa refletir sobre o assunto ou mesmo pesquisar e estudar para compreender por que a afirmação não está correta. É possível perceber que Julieta se permite não compreender imediatamente a ideia de que os dois intervalos possuem a mesma cardinalidade. Podemos relacionar essa tranquilidade de Julieta à sua área de formação, que é uma área que não envolve matemática. Logo, não há a mesma contradição observada na fala de Helena.

Para Julieta, não há grandes problemas em não compreender a matemática, já que essa não é sua área de domínio.

No meio da conversa, James, Helena e Eloise expressam também sua confusão em relação à validade da afirmação, uma vez que, por mais que compreendam as demonstrações matemáticas envolvidas, não acham intuitiva a ideia de que os dois intervalos possuem a mesma cardinalidade, o que se conecta à frustração de Julieta.

> E2 – 00:28:38 – James: Eu, James, eu tenho dificuldades, inclusive para aceitar que entre 0 e 2 não faz sentido dizer que existem mais números. Quando eu estudo a lógica e vejo a explicação matemática por trás, eu compreendo, mas quando eu tento pensar nisso segundo a minha vivência, segundo a minha experiência empírica, digamos assim, é muito difícil de conceber que aquele infinito não é maior que de 0 a 1, o infinito entre 0 e 2 não é maior que entre de 0 a 1, eu tenho muita dificuldade de conceber isso, muita dificuldade.
>
> E2 – 00:29:30 – Helena: Só completando o que você estava falando, há umas 4 semanas mais ou menos o [meu professor de análise real] fez uma demonstração dizendo que em um segmento de reta qualquer existe a mesma quantidade de pontos que a reta numérica inteira, e me deu vontade de dizer assim: 'adeus'. Não fez sentido nenhum para mim. Mas a demonstração está lá, né, a gente vê a demonstração, a gente entende a demonstração, mas não faz sentido. Então sim, existem infinitos maiores que outros, mas eu não... não sei se sua pergunta é essa, Flávia, mas eu não saberia como explicar para uma turma de ensino básico.
>
> E2 – 00:37:59 – Eloise: (...) uma coisa que o James estava comentando, eu concordo: é muito difícil a gente conceber que um conjunto está perfeitamente dentro de outro, ele está completamente contido em outro, e ainda assim eles podem ter quantidades iguais; isso eu acho que não importa qual conjunto a gente está falando, entender isso é muito complicado. E só funciona porque...
>
> E2 – 00:38:40 – Helena: E serem diferentes, né, Eloise? São conjuntos diferentes, um está contido dentro do outro, mas mesmo assim...
>
> E2 – 00:38:47 – Eloise: sim, sim, exato. Exatamente. Tipo [0,1] e [0,2]. [0,1] está dentro de [0,2]. Eu acho que esse é um motivo pelo qual muitas vezes, para quem está lendo e não tem uma curiosidade matemática maior, isso passa batido, que está errado. Porque quem é que vai discordar disso? Parece muito óbvio, né, quem vai discutir com uma coisa dessas?

Os três professores deixam claro seu desconforto em afirmar que os intervalos reais [0, 1] e [0, 2] possuem a mesma cardinalidade. Ao dizer "a gente vê a demonstração, a gente entende a demonstração, mas não faz sentido", Helena retoma uma discussão abordada na seção 4.3.1, sobre a ideia de apenas aceitar o que é dito pelo professor, sem necessariamente compreender o que está sendo mostrado. Isso reforça o que foi dito imediatamente antes por James, que relata que, ao ver a demonstração matemática por trás da afirmação, entende; no entanto, tem dificuldades de compreender. Apesar de dizer que compreende a demonstração, James deixa claro que, na realidade, a demonstração matemática não é suficiente para fazê-lo compreender que as cardinalidades dos dois conjuntos são iguais, e, assim como Helena, apenas aceita esse fato, mas não necessariamente entende ou concorda com ele.

Em diversas falas dos professores participantes dos encontros, encontramos que o assunto ‘infinitos’, de maneira geral, pode ser um assunto de difícil compreensão e, por isso, são utilizados pelos participantes os verbos “aceitar” e “convencer” para se referir às explicações que envolvem esse assunto. Como os próprios participantes demonstram dificuldade em compreender os assuntos, naturalmente também possuem dificuldade em explicá-los a seus alunos, o que pode levá-los a enxergar que tais noções de infinito, caso não sejam compreendidas, devem ser apenas aceitas, já que sua compreensão não é simples.

Pelas interações dos professores, entendemos que a confusão gerada pelas cardinalidades dos conjuntos pode estar relacionada aos tamanhos dos segmentos de 1 cm e 2 cm. Voltamos novamente à confusão entre medida de comprimento e cardinalidade, que foi abordada na seção anterior.

Entendemos mais uma vez, a partir da conversa entre os professores, a importância da abordagem de infinitos nas escolas e na graduação. Como os alunos não têm muito contato com o tema, debates como, por exemplo, a cardinalidade dos conjuntos aqui discutidos, pode gerar dúvidas e dificuldades de compreensão, mesmo para estudantes da área de matemática – como é o caso dos professores participantes. Com uma noção prévia dos conceitos necessários para compreender conjuntos infinitos e suas propriedades, o entendimento de outros assuntos nessa área poderia ser facilitado.

Com o objetivo de gerar uma discussão sobre noções de infinito que pudesse levar os participantes a compreender por que os intervalos reais [0, 1] e [0, 2] possuem a mesma cardinalidade, iniciei o terceiro encontro perguntando a eles “de que jeito a gente pode entender (...) que tem a mesma quantidade de números entre 0 e 1 e 0 e 2?”. A pergunta levou a um debate entre os participantes, que se encaminhou para uma demonstração feita pela professora Eloise – a mesma demonstração apresentada na seção 2.2.

E3 – 00:01:20 – Flávia: Então eu queria perguntar para vocês de que jeito a gente pode entender (…) que tem a mesma quantidade de números entre 0 e 1 e 0 e 2?

E3 – 00:02:01 – Isabella: eu estou querendo essa resposta aí também.

E3 – 00:02:13 – James: uma maneira diferente do que a gente discutiu na semana passada?

E3 – 00:02:35 – Julieta: eu acho que a desconstrução, para mim, por mim, o que eu vejo que é difícil, eu acho que é a parte de desconstruir essa ideia que entre 0 e 1... que a gente está tendo em uma régua, porque eu vejo uma régua, entendeu? E pelo que a gente conversou na aula passada e tal, e vocês desconstruíram isso na minha mente, deu uma ajudada, sabe? É tipo fazer os alunos entenderem que não é uma régua. Aquilo ali é uma representação, não é a verdade. É porque eu aprendi muito matemática assim, tentando visualizar a coisa, aí entender que é uma parada mais abstrata ajuda, sabe?

E3 – 00:03:20 – James: é, foi até o que a sua orientadora falou, não foi? Que a gente [tem que] parar de confundir o tamanho da... como se estivéssemos falando de uma distância na régua, e considerarmos os elementos que estão ali dentro. Se a gente conseguir estimular o aluno ou a aluna a pensar dessa maneira, talvez isso facilite muito as coisas.

E3 – 00:05:20 – Annabeth: acho que é o que o James estava falando, né, que é o que a Janete também falou na semana passada, sobre essa confusão de distância e quantidade de elementos, que não são a mesma coisa. Não sei se tenho muito mais além disso para acrescentar. Eloise talvez tenha, porque ela começou a falar e eu interrompi.

E3 – 00:05:37 – Eloise: Na real, é que... eu não falei isso no último encontro porque na real não é uma ideia minha né, é uma coisa que eu vi em outro lugar. Não sei se a Flávia vai lembrar também, que quando a gente fez estágio no CAp UFRJ, a gente assistia à aula do Leo Akio[8], e ele dá aula de infinito para o nono ano. Eu nunca esqueci a maneira como o Leo mostrou (...) porque eu acho difícil você falar para alunos de oitavo, nono e primeiro ano e tirar essa ideia do 0, 1 da reta numérica. Então seria uma ideia de ao invés de tentar quebrar a ideia da régua, usar a régua e tentar a partir disso. Então a ideia seria a seguinte: pega dois segmentos de reta, quaisquer, posiciona eles paralelos. Então você não está falando da medida de um e da medida do outro, você pode desenhar quaisquer segmentos que você quiser. Ok, então desenha um, paralelo, desenha o outro. Liga as extremidades, né, para formar um trapézio, mas faz a reta suporte dos lados, vai se encontrar em algum ponto para cima do menor deles.

E3 – 00:07:32 – Flávia: você quer desenhar ou não precisa?

E3 – 00:07:39 – Isabella: gente, eu mandei aqui [no chat] um vídeo[9], é porque o Leo tem essa aula gravada, eu sei, porque eu já tinha visto essa aula em algum lugar.

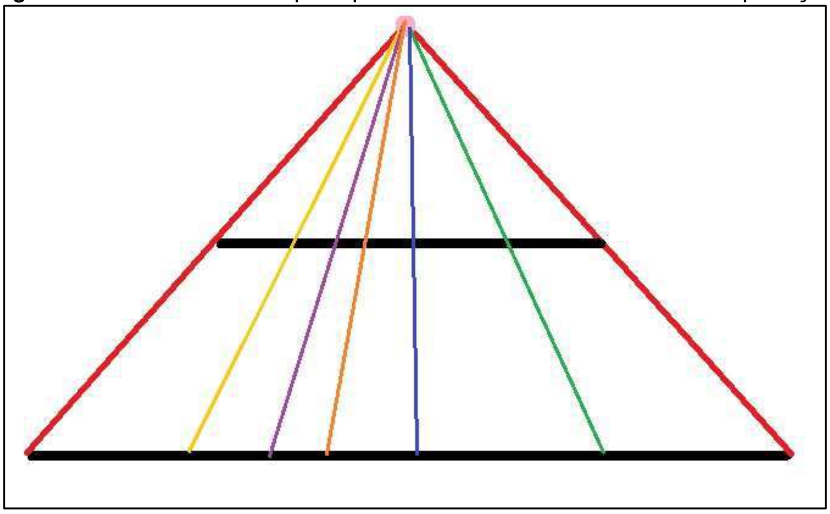
---

[8] Leo Akio é professor de Matemática do Colégio de Aplicação da UFRJ.
[9] Link do vídeo: https://youtu.be/7csy_b99f9s

E3 – 00:08:24 – Eloise [enquanto abria um programa no computador para desenhar]: a ideia é exatamente aproveitar essa ideia da reta numérica para fazer a partir dela. A ideia primeiro é mostrar que quaisquer dois segmentos vão ter a mesma quantidade de pontos e aí depois levar isso para o [0,1], [0,2], porque se pode ser qualquer segmento então pode ser o segmento que liga na reta numérica do 0 até o 1 e o segmento que liga do 0 até o 2.

E3 – 00:10:00 – Eloise [enquanto apresentava a tela e desenhava]: Então eu tenho primeiro um segmento e vou fazer um outro segmento embaixo de outro tamanho. Eu vou fazer de propósito maior do que o outro para eles se encontrarem num ponto bem pertinho porque eu quero, senão eu vou ter que crescer muito esse desenho. E aí, vou colocar aqui de uma cor diferente, para ficar bonito, vou fazer de vermelho, ligando aqui as extremidades. Então ele passa aqui pelas duas extremidades e segue, e eu vou tentar desenhar até esse ponto de encontro. (...) Então, eu tenho esses 2 segmentos de início e eu ligo as extremidades. Qual é a ideia? É que partindo desse ponto aqui, que eu vou pintar de rosinha, (...) que elas duas se encontram, você consegue desenhar um feixe de transversais aqui né, então tipo, eu consigo desenhar infinitas... a ideia primeiro é entender que eu posso desenhar infinitas retas saindo desse ponto daqui de cima e que vão cruzar pelo primeiro e vão chegar no segundo [segmento]. E que... [neste momento, Julieta fez uma expressão de quem entendeu tudo!] então, são 3 coisas diferentes né? A primeira que eu posso desenhar infinitas retas saindo daqui, e aí a gente pode imaginar que se um segmento tem infinitos pontos, então eu consigo partir desse daqui e chegar em qualquer um dos infinitos pontos aqui de baixo. E que eu necessariamente vou ter que cruzar pelo segmento menor, porque para sair desse ponto daqui e chegar no de baixo, eu preciso cruzar por aqui, porque eu estou sendo limitada pelos vermelhinhos dos ladinhos do triangulo. E aí qual é a ideia? Primeiro entender que aqui são infinitos, então vão ser infinitas retas. E aí o mesmo, construir uma... tentar convencer os alunos de que tem uma bijeção, não precisa nem usar a palavra bijeção. Mas falar que eu tanto posso escolher um ponto daqui de baixo, qualquer ponto daqui de baixo, e eu vou partir dele e chegar no de cima, e aí eu vou necessariamente encontrar com um único daqui (...) vou pintar de roxo. E que se eu escolher um outro ponto daqui, vou pintar de laranja, que eu parta desse segmento de cima, e ligar com a extremidade, se ele for diferente desse ponto daqui do roxo, e aí dá até aqui no Paint... fica legal de ver, né? Se eu estiver passando por esse mesmo ponto, eu vou chegar no mesmo ponto aqui embaixo. Mas se eu estiver passando por um ponto diferente, mesmo que seja um pouquinho só para o lado, quando eu estico, eu chego num outro ponto aqui debaixo. Talvez no Geogebra ficasse mais fácil de ver, né, porque aqui é meio improvisado. Mas então a ideia de conseguir ver que está ligado em um e apenas um e necessariamente em um ponto do ‘bagulho’ aqui de cima. Fez sentido isso que eu falei, com esse belo desenho do ‘triangulinho’?

Figura 19 - desenho feito pela professora Eloise durante sua explicação



Fonte: elaboração própria da participante Eloise

E3 – 00:13:46 – James: Fez muito sentido!

E3 – 00:13:50 – Eloise: E a ideia é que se a gente consegue fazer isso para quaisquer 2 segmentos, então não só o infinito entre 0 e 1 e o infinito entre 0 e 2, mas qualquer infinito entre qualquer segmento de qualquer tamanho, porque o 0 e 1, 0 e 2, nada mais é que a gente botar uma métrica a partir da reta, né, então eu posso usar... se eu usar o segmento pequeno de cima como unidade, [0, 1], que seja, eu consigo colocar o tamanho do de baixo em função do tamanho do de cima, né, dizer que ele é não sei quantas vezes o de cima. (...) E aí a partir disso dá para falar do [0, 1], [0, 2] e qualquer outro, né, relação entre qualquer tamanho de segmento. Eu acho que talvez de alguma forma isso seja mais fácil de convencer os alunos do que a gente tentar sair da ideia da régua, porque eles não vão desacreditar da régua, eles vão voltar na régua, porque para eles não faz sentido conjunto de pontos na... os reais como um conjunto que não tem buraco se a gente não estiver falando da reta, a reta é o que dá a continuidade dos reais, então acho que talvez partir disso para uma 'mostração', não é uma demonstração, talvez isso convença eles, é o que eu lembro de ter visto na época do estágio, não é ideia minha não.

E3 – 00:15:35 – Flávia: e vocês acham que convence, então? Dá para aceitar melhor?

E3 – 00:15:41 – Julieta: me convenceu.

E3 – 00:15:43 – James: Me convenceu também.

E3 – 00:15:45 – Julieta: é que eu acho que a gente fica com essa ideia de que são vários pontos... quando vocês falam de ponto entre, que são vários números entre 0 e 1, eu imagino vários pontinhos um do lado do outro formando a régua, e agora quando ela mostrou, realmente faz todo sentido, entendeu, porque... aí não... pareceu diferente, porque como o tamanho é maior... po, achei ótimo, me convenceu, já fui vendida.

E3 – 00:16:10 – Eloise: eu estou usando a Julieta de termômetro, se a gente convenceu a ela...

O terceiro encontro foi iniciado com essa pergunta pois, no encontro anterior, os participantes haviam se queixado que, por mais que já tivessem visto a justificativa para haver a mesma quantidade de números nos intervalos [0, 1] e [0, 2], tinham dificuldades para compreendê-la de fato. Assim, achamos que seria interessante seguir nessa discussão no terceiro encontro, para que, juntos, buscássemos uma explicação que permitisse uma melhor compreensão do assunto por todos os participantes.

Apesar de Helena ter sido uma das professoras que relatou sua dificuldade nessa demonstração no segundo encontro, ela não pode estar presente no terceiro e no quarto encontros, então as discussões se desenvolveram entre os outros cinco professores.

Julieta relata, a partir de discussões realizadas nos encontros anteriores, a importância da distinção entre a representação de uma medida e um intervalo real. A fala de Julieta remete à discussão presente nos encontros anteriores, e relatadas na seção 4.3.1, sobre a diferença entre entender o segmento que vai de zero a um como uma medida linear exposta em uma régua, por exemplo, e o intervalo real [0, 1] e todos os números contidos nele. É interessante perceber que, mesmo não estando acostumada a esse tipo de debates sobre intervalos infinitos, uma vez que não é estudante e nem atua diretamente na área de matemática, a professora de português estava empenhada em tentar compreender melhor o assunto. Ela deixa claro que, a seu ver, é importante ser capaz de distinguir a representação de um intervalo como medida linear da sua noção de conjuntos de elementos. Pela sua fala, entendemos que fazer essa dissociação seria o ponto inicial para compreender a ideia de que diferentes conjuntos possuem a mesma cardinalidade, uma vez que ela relata que enxergar essa diferença estava permitindo que entendesse melhor o assunto.

James e Annabeth concordam com Julieta, reforçando que, de fato, a partir de sua visão como professores de matemática, esse também seria um ponto inicial importante para conseguir compreender melhor essa ideia da cardinalidade dos dois conjuntos.

Eloise, então, traz uma explicação geométrica para a pergunta – já apresentada na seção 2.2 – e Isabella diz já ter visto anteriormente esse procedimento. Ao apresentar sua explicação, Eloise mostra discordar de Julieta, James e Annabeth sobre a importância da dissociação da medida linear de um segmento e o intervalo correspondente àquela medida. Eloise diz que acredita ser mais fácil utilizar a representação linear do intervalo para compreender que ambos possuem a mesma cardinalidade do que enxergar o intervalo e sua representação como ideias diferentes.

Encontramos duas maneiras propostas pelos professores de abordar o assunto com os alunos: uma delas diz respeito à separação das ideias de um intervalo real e a sua representação como medida linear; a outra, utiliza a própria representação como medida linear do intervalo para compreender a sua cardinalidade. Não existe uma maneira correta de abordagem para essa explicação, mas James, Julieta e Annabeth, que inicialmente haviam dito achar mais fácil realizar a dissociação das ideias, ao final da explicação de Eloise disseram compreender melhor o assunto a partir da visualização do intervalo como medida linear, como exposto pela professora Eloise.

Podemos interpretar que, por mais que os professores acreditem ser importante separar a noção de medida linear da noção de intervalo real, na prática acharam mais fácil a compreensão da explicação a partir da relação entre as duas noções. No entanto, podemos considerar que talvez essa compreensão só tenha sido possível após ser feita a dissociação entre as duas ideias, para depois, então, poder relacioná-las.

É interessante perceber como a explicação a partir da figura elaborada por Eloise facilitou a compreensão dos outros participantes. O desenho permitiu aos professores enxergar os segmentos de reta apresentados como segmentos, sem focar em seus comprimentos diferentes.

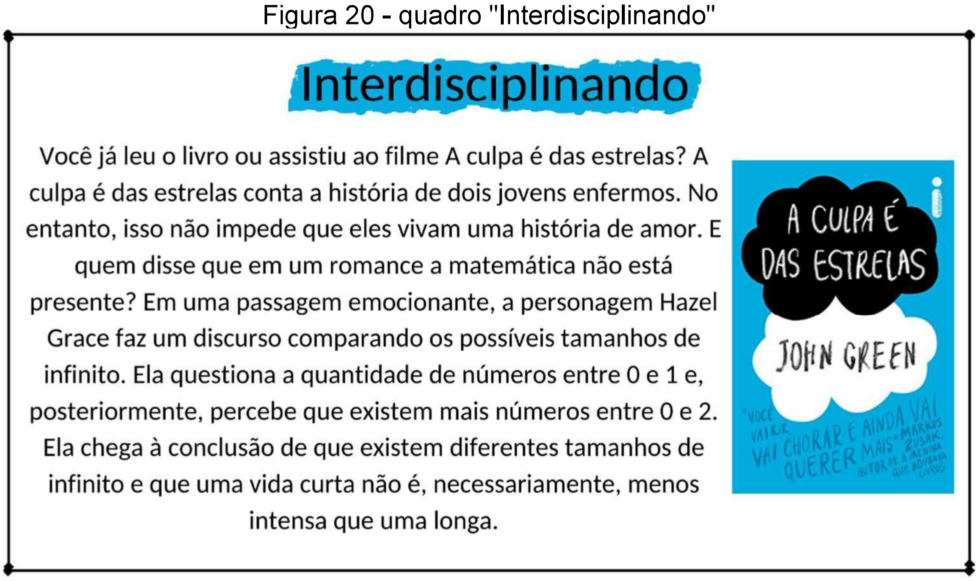
Um fato a se atentar na discussão é a continuidade da utilização das palavras “aceitar” e “convencer”, inclusive por mim. Entendemos, na seção anterior, que o uso dessas palavras leva a crer que é mais importante que os alunos acreditem no que está sendo mostrado pelo professor do que realmente compreendam o assunto. Mas, ao vê-las agora neste contexto, é possível interpretar que, ao utilizar a expressão “convencer os alunos”, Eloise tem a intenção de se referir à ideia de ajudar os alunos a compreender melhor a demonstração. Quando os professores respondem que estão convencidos pela explicação de Eloise, é possível compreender, pelo contexto, que, na realidade, a resposta “me convenceu” poderia ser interpretada como “entendi melhor essa explicação do que as que trouxemos anteriormente”.

O contexto do debate nos leva a crer que a explicação apresentada por Eloise foi capaz de levar os outros professores participantes a compreender melhor o assunto, como acreditamos ter sido o objetivo de Eloise ao apresentar essa demonstração.

Ao fim, Eloise faz uma brincadeira, dizendo que Julieta é o seu “termômetro” e deixando implícito que, se Julieta compreendeu o que está sendo dito, então a explicação é bem-feita. Como Julieta foi a única professora de português presente, e partindo do princípio que, por isso, não tinha muito contato prévio com noções matemáticas envolvendo infinitos, entendemos que Eloise se referiu a ela como “termômetro” como uma metáfora para mostrar que é possível compreender assuntos que envolvem noções mais aprofundadas de matemática sem necessariamente ter uma formação nessa área.

Durante a discussão sobre o quadro ‘Interdisciplinando’, apresentado aos professores no terceiro encontro, as contribuições se voltaram tanto para a discussão sobre interdisciplinaridade, presentes na sessão 4.1.3 deste trabalho, quanto para as afirmações sobre infinitos apresentadas no quadro.

Figura 20 - quadro "Interdisciplinando"



Fonte: elaboração própria

> E3 – 00:15:35 – Annabeth: eu acho que só faltou uma pergunta, né? (...) Alguma coisa para fazer o aluno refletir sobre isso.
>
> E3 – 00:16:23 – Julieta: ele informa só. Ele informa, ponto.

E3 – 00:16:26 – Annabeth: é, ele informa, exatamente, ele não pergunta, só que eu acho que informar nesse caso não faz o efeito que seria desejado, né?

E3 – 00:16:34 – Julieta: e nem isso, eu nem concordo muito com o que ele colocou ali... muito mal formulado isso aí.

E3 – 00:16:57 – Flávia: então, eu vou dizer a sensação que eu tive. (...) do jeito que está escrito, para mim, está afirmando que o infinito [0,2] é maior que o infinito [0,1].

E3 – 00:18:31 – Isabella: termina aí? Não tem uma outra página? Porque estaria ok se ainda estivesse apresentado uma pergunta, assim... 'você concorda com essa afirmação? Você concorda com a Hazel? Você não concorda?' Porque assim é só, tipo... curiosidade: a matemática na Culpa é das Estrelas! Entendeu? Não tem um... não tem um 'vamos explorar a matemática da culpa é das estrelas', é só assim 'a matemática está lá', entendeu? Não tem... <u>não tem uma conclusão</u>.

E3 – 00:22:54 – Annabeth: eu não sei nem se chega a ser uma afirmação, né, ele só joga, eu tenho a sensação de que ele não afirma nem nega, ele joga lá assim para o alto e é isso... só que eu acho que assim, como um aluno de oitavo ou nono ano, (...) <u>eu não sei se eles têm maturidade crítica suficiente para ler isso e entender que é uma coisa que eles devem questionar</u>, sabe? Eu acho que eles ainda estão na fase do tipo 'está no livro é verdade, está na internet é verdade'.

E3 – 00:24:40 - Flávia: (...) já entendi que acham que (...) botar isso não adianta né, isso aí não traz a discussão que se espera que traga, mas... será que (...) eu entendi que vocês querem dizer que não é algo construtivo, talvez, mas será que é algo 'desconstrutivo'? (...) tem o efeito oposto?

E3 – 00:25:29 – James: eu acho prejudicial, eu acho.

E3 – 00:25:33 – Eloise: acho.

E3 – 00:25:34 - Isabella: eu acho, a partir do momento que ele coloca que ela questiona a quantidade de números que existem entre 0 e 1 e, posteriormente, ela percebe que tem mais números entre 0 e 2. Então ali, ao contrário do que já falaram antes, para mim, ali ele afirma. Ela percebe isso. Então ali tem números maiores, então sim, é prejudicial.

E3 – 00:26:04 - Annabeth: sim, super sim.

E3 – 00:26:04 - Eloise: se eles colocassem uma frase no final perguntando '<u>o que você acha da conclusão dela</u>?' já era tudo diferente. Bastava isso, sabe?

E3 – 00:26:12 - James: concordo.

E3 – 00:26:15 - Isabella: faltou a pergunta, faltou literalmente refletir sobre o que ele escreveu.

E3 – 00:26:20 – James: 'o que você acha disso', né? 'E por que você acha que está errado?'

De acordo com os professores, o quadro apresentado deveria levar os alunos a uma reflexão, o que não ocorre. Ao debater sobre a validade do que está escrito, entendemos que os participantes acreditam que deveria haver no quadro algum indicativo de que a afirmação feita sobre os tamanhos dos intervalos está errada.

Ao colocar esse quadro no planejamento do encontro, havia uma expectativa de que os participantes voltassem seus discursos para o fato de que havia uma afirmação matematicamente errada em um livro didático de matemática. No entanto, apesar de todos trazerem em suas contribuições que sabem que existe esse erro, entendemos que o foco maior foi na maneira de explorar o assunto e a interdisciplinaridade, e não apenas em estar sendo afirmado algo que não está matematicamente correto.

É muito interessante perceber que, segundo os professores de matemática presentes no encontro, o que se faz prejudicial – adjetivo utilizado pelo professor James – no quadro é a falta de um questionamento aos alunos. Uma vez que o livro didático optou por realizar uma afirmação que não está correta, deveria explorar essa afirmação com os alunos, para que fosse possível gerar uma reflexão sobre o assunto e os alunos pudessem concluir que a afirmação está errada e não existem mais números entre 0 e 2 que entre 0 e 1.

A professora Julieta, de português, se atentou a algo diferente dos professores de matemática.

> E3 – 00:17:42 – Julieta: é que coloca que ela chega à conclusão de que existem diferentes tamanhos de infinito, só que (...) o 'cara' que escreve o livro, que eu esqueci o nome dele agora, ele que dá essa ideia para ela, dizendo que outra pessoa disse que existem diferentes tamanhos de infinito. E aí ela que na verdade para para pensar e pensa no exemplo errado. Porque ninguém dá esse exemplo para ela, ela que sozinha para para pensar que entre 0 e 1 e 0 e 2 existem outros.... ela pensa nisso sozinha quando ela escreve o discurso, então tipo assim, ninguém ensinou isso a ela, ela que chega... <u>ela que pensa no exemplo errado</u>. Ali parece que ela chegou à conclusão certa, com o exemplo certo, né?
>
> E3 – 00:26:24 – Julieta: o que me irrita também é a <u>ordem dos fatos</u>, sabe? Ela não chega a uma conclusão dessas sozinha, é ao contrário, ela <u>procura um exemplo para uma coisa que ela ouviu</u>. Entendeu? Então ela vai tentar justificar e faz o uso do 0 e 1, 0 e 2, uma afirmação que já tinham dado para ela. Então aí que tem um caminho diferente, porque a afirmação... essa afirmação está correta, que existem diferentes tamanhos de infinito, a gente já falou disso aqui, mas o exemplo que ela usou está errado, e quem cata o exemplo é ela, então eu acho que isso é importante para o aluno também, porque senão você está falando que a conclusão a que ela chegou está errada, só que a conclusão está certa, e o exemplo está errado, então, quando

> você muda isso, o aluno não vai entender, porque se ele vai dizer ‘ah não, é o mesmo número’, ele tira a afirmação que é correta, por motivos diferentes, mas é uma afirmação correta, sabe? Eu formularia de um jeito diferente, porque no livro isso acontece diferente, sabe?

Para Julieta, não seria suficiente gerar uma reflexão sobre o que está sendo lido, pois ela afirma que o resumo que está sendo apresentado no quadro não condiz com a história do livro. Em dois momentos separados da discussão, ela reforça sobre a ordem dos fatos na história.

É interessante perceber a relevância dessa ordem para a compreensão dos alunos, a partir da explicação feita pela professora de português. No livro *A culpa é das estrelas*, Hazel sabe que existem infinitos de diferentes tamanhos, pois o escritor Van Houten ensinou isso a ela, e, a partir dessa afirmação – que é correta, pois existem infinitos maiores que outros –, Hazel conclui sozinha que existem mais números entre 0 e 2 que entre 0 e 1. Apesar de essa afirmação estar errada, a afirmação sobre existirem infinitos maiores que outros é correta. O exemplo escolhido pela personagem é que não se aplica àquela afirmação.

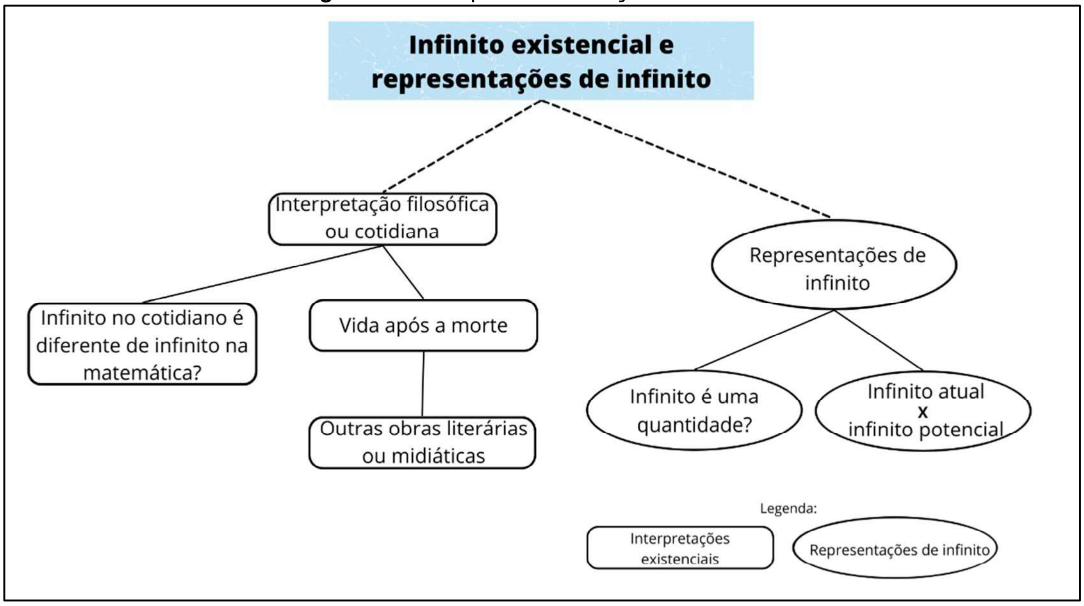
Já no quadro apresentado, é dito que, após refletir e concluir que existem mais números entre 0 e 2 que entre 0 e 1, Hazel afirma que alguns infinitos são maiores que outros. Segundo Julieta, chegar a uma conclusão correta a partir de um exemplo errado pode fazer com que os alunos tenham mais dificuldades para compreender o conteúdo. Então, para ela, gerar uma reflexão no final do quadro sobre a validade do que é dito não seria suficiente neste caso, uma vez que essa validade é comprometida pela troca da ordem dos fatos, em relação ao livro.

Entendemos, pelas conversas analisadas nessa seção, que uma interpretação geométrica dos intervalos [0, 1] e [0, 2] pode ajudar a compreender melhor sobre a cardinalidade dos intervalos. No entanto, veremos na próxima seção que a ideia de infinito, de maneira geral, continua não sendo muito clara para os professores participantes.

4.3.3 “Você me deu uma eternidade dentro dos nossos dias numerados, e sou muito grata por isso.”

A seção atual traz os debates dos participantes que abordam interpretações das ideias de infinito que se voltam mais para os estudos de filosofia e as abordagens de infinito como tratado em nosso cotidiano. Também serão apresentadas as contribuições referentes aos diferentes significados e representações de infinito.

Figura 21 - esquema da seção 4.3.3



Fonte: elaboração própria

Uma interpretação que foi levantada pelos professores participantes no primeiro encontro foi a ideia de infinito além dos conceitos matemáticos, a partir de uma abordagem em nosso cotidiano. Essa conversa levou à discussão, no segundo encontro, sobre o que é infinito.

> E1 – 00:44:36 – Julieta: será que a questão existencial de existir algo depois da vida é uma questão de infinito também? Porque eles discutem bastante isso no livro também.
>
> E1 – 00:45:00 – Eloise: mas esses 2 pontos são diferentes? Eu não acho que são diferentes. Quem de nós 6 que cursa ou cursou matemática vai dizer agora o que significa o infinito matemático? É um elemento dentro do conjunto dos números transcendentes, eu acho, que vai dizer a quantidade... tipo, o que é infinito, sabe? E aí, para a gente, já que a gente está falando de matemática, para a matemática, o que é infinito, sabe?
>
> E1 – 00:45:39 – Annabeth: é que para a gente tem o infinito do cálculo, né? Que é tipo um 'número', entre aspas. Só que também tem o infinito na 'vibe' mais que a Julieta trouxe, que aí já é outra coisa. Eu acho que tem essas 2 perspectivas.
>
> E1 – 00:46:43 – Helena: além da passagem clássica, que ela fala diretamente sobre infinito, eu senti também essa noção de infinito quando eles têm aquele argumento (...) em que o Augustus fala que tem muito medo de ser esquecido e a Hazel fala que um dia ele vai ser esquecido. Eu acho que a gente pode pensar aí num limite tendendo ao infinito, em algum momento, que a gente não sabe quando, ele vai ser esquecido. Isso me remeteu muito ao infinito.

> E1 – 00:47:20 – Julieta: Eu acho que a gente pode ver o infinito de uma forma... do meu jeito, né, não de uma forma matemática, mas exatamente nessa fala, quando ela diz que ele vai morrer, a terra vai continuar girando. <u>É como se a Terra e as pessoas que vivem ali fossem uma constante infinita</u> e a vida das pessoas vai acabando, vai se encerrando. É um ponto também.

> E1 – 00:47:58 – Isabella: eu acho que é muito marcante essa questão do infinito como uma coisa de eternidade, que tem a fala (...) "você não imagina o tamanho da minha gratidão pelo nosso pequeno infinito. Você me deu uma eternidade dentro dos nossos dias numerados, e sou muito grata por isso". Então a gente também tem a questão do estar vivo, de <u>aquele momento ali ser infinito</u>. Daquele amor que surge, daquela troca que surge, ela vai ser infinita, mesmo que esse infinito seja finito, literalmente. Acho que puxa muito para a questão do que a Julieta falou da metáfora e tal, do ser muito forte, (...) dessa questão de ser uma troca muito fundamental e de um amor muito grande, que ele <u>é infinito mesmo que durante pouco tempo</u>, eu acho que vai mais nessa questão. Foi uma questão de infinito que ficou muito enraizada no livro.

> E1 – 00:49:05 – Julieta: talvez traçar um paralelo do infinito com a memória, sendo a memória uma coisa infinita, porque continua vivo ali dentro daquele universo, mesmo que o momento tenha acabado. Como ele até coloca que as pessoas ainda lembram de Shakespeare, como se ele e a obra dele fossem uma coisa infinita, porque continua existindo dentro da sociedade, mesmo que aquela coisa se acabe.

> E1 – 00:49:34 – Eloise: O que a Isabella está falando é do poema, né, "que não seja imortal, posto que é chama, mas <u>que seja infinito enquanto dure</u>", o pequeno infinito. Isso me lembrou muito o filme *Viva*, em que as alminhas do outro lado desaparecem quando a última pessoa esquece deles. Então que <u>pode continuar por tanto tempo quanto alguém ainda se lembrar</u>, aí você tem as pessoas mega famosas, que vão continuar sendo lembradas para sempre e as que são esquecidas. Acha que isso combina um pouco com o que a Julieta estava falando também.

As professoras participantes trouxeram para a conversa trechos do livro *A culpa é das estrelas* que as impactaram a partir das falas que tratam de infinito. Podemos observar que existe uma controvérsia em relação a se o infinito tratado cotidianamente teria ou não o mesmo significado do infinito trabalhado na matemática. Surgiu, então, um debate sobre o infinito como uma questão existencial.

Quando Julieta traz a ideia do infinito existencial, é possível relacionar essa ideia à religião e à crença de que existe vida após a morte. Ao tratar do infinito como uma questão filosófica presente em nosso cotidiano, podemos entendê-lo também como uma questão religiosa. Ambas as interpretações se encaixam nas ideias levantadas pelas professoras.

Eloise, ao questionar se as duas abordagens sobre infinito – a abordagem matemática e a abordagem existencial, como chamou Julieta – são diferentes, nos leva a entender que, em sua opinião, não é necessário que um conceito trabalhe explicitamente a matemática para que seja considerado da área da matemática, e a mesma ideia vale para o caminho contrário. Um conceito que, a princípio, é trabalhado matematicamente, pode ser também interpretado a partir de outras áreas, como nosso cotidiano ou a filosofia. Percebemos, pela fala de Eloise, uma controvérsia, como buscado no MEA. Com seu questionamento sobre a diferença das abordagens, entendemos que Eloise não concorda com a dissociação das duas interpretações.

Enquanto Annabeth defende que as duas interpretações das noções de infinito são diferentes, Eloise entende que ambas se encaixam na mesma definição, apenas aplicadas a contextos distintos. Julieta mostra concordar com Annabeth com a distinção feita entre as interpretações sobre infinito, quando diz "a gente pode ver o infinito de uma forma... do meu jeito né, não de uma forma matemática". Ao separar as maneiras de compreender o infinito como "seu jeito" e "forma matemática", Julieta mostra acreditar que a forma como compreende as noções de infinito é diferente da forma como essas noções são vistas matematicamente. Para embasar sua afirmativa, ela apresenta uma parte do livro em que faz uma comparação entre a vida e a ideia de infinito. Essa mesma ideia que, segundo Julieta, é um exemplo de noção de infinito não matemática, havia sido usada anteriormente por Helena para fazer uma associação ao infinito tido como matemático, abordando limites.

É interessante perceber que tanto Julieta quanto Helena se referiram à mesma ideia abordada no livro, ambas associaram essa ideia ao infinito, mas, enquanto Helena enxergou essa noção de infinito como algo relacionado à matemática, Julieta deixou claro que entendia como algo que não estaria relacionado à matemática. As interpretações das duas professoras nos remetem ao questionamento de Eloise: as duas interpretações sobre infinito são realmente diferentes? A pergunta de Eloise não foi explicitamente respondida, e o questionamento não foi mais trazido à conversa. No entanto, as professoras presentes na conversa deixam implícito em suas falas que acreditam que as duas interpretações são diferentes, discordando assim da pergunta de Eloise.

Julieta, quando participa dos debates sobre assuntos relacionados à matemática, mostra incerteza nas suas afirmações. Normalmente acompanhadas de uma justificativa ou realizadas na forma de pergunta, as contribuições da professora de português – todas muito enriquecedoras para as conversas, com pontos de vista por vezes não levantados pelos professores de matemática –, se apresentam com um tom de dúvida, provavelmente por receio de afirmar com convicção sobre tópicos de matemática, que não são sua área de domínio. É interessante ressaltar que, ainda assim, a professora Julieta participou de quase todas as conversas, e trouxe questionamentos e reflexões sob seu ponto de vista em todos os momentos em que esteve presente.

A maioria das interpretações dos participantes de infinito relacionadas à filosofia tratam do infinito potencial: o infinito como algo interminável. Quando os professores traçam um paralelo entre as noções de infinito na matemática e as ideias de infinito relacionadas à vida, eles estão implicitamente fazendo uma relação entre essas ideias e o infinito potencial. As ideias de infinito trazidas por eles e comentadas até agora remetem à noção de que o infinito é algo que nunca acaba.

Isabella, Eloise e Julieta ainda apresentaram mais exemplos, presentes tanto em *A culpa é das estrelas* quanto em outras obras da literatura e da mídia, da associação dos conceitos de memória e vida às noções de infinito.

O exemplo trazido por Isabella, ao contrário dos que haviam sido apresentados até então, pode ser relacionado à ideia de infinito atual. Quando Isabella relembra a passagem que trata de um infinito dentro de dias numerados, na realidade ela está fazendo um paralelo com as ideias já discutidas nas seções anteriores, sobre intervalos fechados e finitos possuírem infinitos elementos em seu interior, como os intervalos [0, 1] e [0, 2]. Aqui, o infinito não é visto necessariamente como algo interminável, que cresce sem nunca atingir um fim. Isabella enxergou a ideia de infinito nesse trecho de uma maneira que também diz respeito à vida, à filosofia – como os participantes denominaram –, mas que não se refere ao infinito potencial, como os outros professores fizeram.

Eloise, ao citar o poema *Soneto de fidelidade*, de Vinicius de Moraes, remete à mesma ideia apresentada por Isabella: um amor infinito em um espaço de tempo finito, trazendo novamente a relação com a noção de infinito atual. Quando Eloise associa a ideia de infinito ao poema, ela expressa o que Helena, Julieta, Annabeth e Isabella deixaram implícito em suas contribuições: a interpretação do infinito como algo poético.

Quando fala do filme *Viva: a vida é uma festa*, do estúdio Pixar Animation Studios, Eloise retoma as falas de Julieta e Helena sobre esquecimento. Ao dizer que, quando morremos, a Terra continua girando, ou que, enquanto formos lembrados, ainda seguiremos vivos de certa maneira no planeta, as professoras utilizam, mais uma vez, a ideia de infinito potencial. A ideia de morte representa a finitude e o que há depois dela – a Terra seguir girando ou a memória – representam o interminável. Por mais que a vida se encerre, o mundo continua vivo infinitamente.

Em outra de suas obras, John Green trata sobre esse mesmo assunto: a vida na Terra continuará depois que nós morrermos. Em um dos capítulos de *Antropoceno – notas sobre a vida na Terra*, o autor traz uma reflexão sobre o tempo de vida da humanidade, e como o planeta sobreviverá após a extinção da espécie humana. Esse livro, diferente de todas as outras publicações de John Green, não é uma obra fictícia, e sim uma coletânea de reflexões e pensamentos do autor sobre diversos assuntos. Nesse capítulo específico, John Green traz as seguintes afirmações:

> Acho que parte do que me assusta sobre o fim da humanidade é o fim dessas memórias. (...) No entanto, se ninguém estiver aqui para tocar discos da Billie Holiday, essas músicas não vão mais produzir sons. Sei que o mundo continuará depois da gente – e, em certos sentidos, será *mais* vivo. (...) Para mim, há certo conforto em saber que a vida vai continuar mesmo sem a gente. (GREEN, 2021, pág. 32)

John Green traz em suas reflexões as mesmas ideias mencionadas pelas professoras, sobre o mundo continuar existindo após a morte e sobre as memórias que permanecem vivas mesmo após o fim da vida.

Em uma de suas falas, Eloise questiona o que é infinito na matemática, e nenhum participante retomou essa pergunta durante o encontro. O silêncio dos outros professores pode ser interpretado como receio de dizer algo errado.

Portanto, por acreditar que poderia ser gerado um debate enriquecedor a partir desse questionamento, trouxemos no encontro seguinte novamente a pergunta de Eloise como motivação para provocar as contribuições dos professores. Cada professor trouxe uma resposta diferente à pergunta e, de maneira geral, todos apresentaram dificuldades para definir o que é infinito. Entendemos que essa dificuldade se deve ao fato de o que foi aprendido sobre infinito nas escolas, nas universidades ou nos livros didáticos não foi suficiente para que os participantes possam falar sobre o assunto com desenvoltura e segurança.

> E2 – 00:16:55 – Flávia: Se vocês tivessem que pensar o que é o infinito na matemática... o que é o infinito na matemática?”
>
> [Silêncio de aproximadamente 15 segundos]
>
> E2 – 00:17:32 – Helena: A partir das minhas aulas na faculdade eu entendo infinito como algo interminável, sem fim. Só que em alguns momentos, principalmente nas aulas de cálculo 1, que a gente vê limite, e em geometria euclidiana também, eu já vi o infinito ser usado com uma conotação de “nada”. É um “nada”. Por exemplo, eu lembro da professora de geometria euclidiana claramente falando que quando as pessoas falam que as retas se encontram no infinito, isso é uma maneira de dizer que elas não vão se encontrar nunca. E eu acho essas 2 concepções diferentes, de infinito. Então eu penso muito nessas duas.
>
> E2 – 00:18:29 – Isabella: Mas aí seria diferente do que você ver o infinito como algo interminável? Um lugar interminável.
>
> E2 – 00:18:42 – Helena: Eu entendo diferente sim, Isa. Não sei explicar o quão diferente...
>
> E2 – 00:18:49 – Isabella: Se elas não se encontram nunca... entendeu?
>
> E2 – 00:18:54 – Helena: não, sim, total, total. Assim, na matemática, às vezes eu vejo...
>
> E2 – 00:19:00 – Isabella: Você sentiu como algo diferente.
>
> E2 – 00:19:03 – Helena: Isso. Algo além de interminável, entendeu?
>
> E2 – 00:19:19 – James: Mas se você pensar em um conjunto limitado, com um elemento mínimo e um máximo, você considera esse conjunto como não infinito, ou melhor dizendo, finito, só porque ele tem início e fim?
>
> E2 – 00:19:40 – Helena: Não, porque ele é interminável para dentro dele, conforme mais a gente cava, está lá dentro. Mas, de fato, ele tem um início e tem um fim, um ponto inicial e um ponto final.

Helena trouxe duas interpretações: a primeira, de infinito como algo interminável e a outra, de infinito como “nada”, como ela mesma definiu. Ao ouvir Helena tratar as duas interpretações como distintas, Isabella mostrou discordar sobre a diferença entre elas. Para Isabella, entender o infinito como “nada” equivale a compreendê-lo como algo interminável, portanto, segundo as falas de Isabella, as duas definições distintas de Helena podem ser entendidas da mesma maneira. Ao discordar de Helena, Isabella traz, mais uma vez, uma controvérsia à discussão, o que estimula o debate e o seguimento das conversas.

Apresentando um contra-argumento à definição trazida por Helena, James traz a ideia de infinito dentro de um intervalo finito. A partir do questionamento trazido, James mostra discordar de Helena em relação a definir infinito como algo interminável, uma vez que é possível existir um intervalo finito que possui infinitos elementos. Ao ser apresentada à provocação de James, Helena argumenta que, mesmo em um intervalo finito, é possível compreender a ideia de existir algo interminável dentro do intervalo. Ao usar a expressão "para dentro dele", Helena se refere ao fato que entre dois números reais sempre haverá outro número real, logo, a quantidade de números será interminável.

A interpretação inicial de Helena traz, mais uma vez, a ideia de infinito como interminável, nos remetendo à definição de infinito potencial. Já o questionamento de James e a resposta de Helena a ele nos levam à ideia de infinito atual. Percebemos que, mesmo sem utilizar os termos "potencial" e "atual", os professores estão constantemente utilizando as definições dessas duas interpretações para se referir às ideias de infinito que querem apresentar.

Pelas contribuições dos participantes, entendemos que eles compreendem que existe uma noção de infinito além da ideia de algo interminável, mas possuem dificuldade de explicá-la. Essa noção seria a de infinito atual, que, por mais que tenha estado presente implicitamente durante a discussão já apresentada anteriormente sobre infinito nos intervalos [0, 1] e [0, 2], não é clara para os professores participantes. Todos os professores apresentaram desconforto ao tentar definir infinito e suas diferentes interpretações e definições.

> E2 – 00:19:57 – Eloise: Eu acho que infinito é uma <u>quantidade</u>.
>
> E2 – 00:20:23 – Isabella: A questão é pensar na quantidade que o infinito é, né? <u>É uma quantidade o quê? Infinita</u>.
>
> E2 – 00:20:29 – Annabeth: Cara, eu sempre imaginei infinito como... não é um número, acho que a Eloise foi mais precisa quando ela usou a palavra quantidade. Mas assim, uma quantidade tão, tão grande, que a gente não consegue alcançar, que a gente não consegue estimar, não consegue dar um valor específico para ela. Porque, por exemplo, quando eu aprendi limite em cálculo, que é a primeira vez que a gente começa a trabalhar com infinito (...) quando a gente tem um número dividido por infinito, a gente aprende que isso tende a zero, a gente aprende isso. Aí na minha cabeça, a forma que eu pensei de fazer lógica com isso era pensar 'estou dividindo um número por uma quantidade muito, muito grande, e eu sei que, quanto mais eu aumentar esse número, mais eu vou chegar em resultados próximos de zero', e essa para mim sempre foi a definição matemática de infinito que fazia sentido, é uma <u>quantidade muito grande que a gente não</u>

especifica, então é meio que uma convenção, um símbolo, alguma coisa ali que a gente tem para definir qualquer quantidade que é tão grande que a gente não consegue trabalhar com ela. Para mim é basicamente isso. Não sei se faz sentido.

E2 – 00:21:44 – Helena: Annabeth, você falando me lembra um pouco... quando eu dou minhas aulas e falo sobre infinito, os alunos sempre falam que o infinito é um número muito grande. Eu acho que isso esbarra um pouco na questão da sensibilidade numérica, né? Aqui na matemática, de fato, o infinito é um número muito, muito, muito, muito grande, assim como a Eloise falou, não um número, mas uma quantidade.

E2 – 00:22:12 – Eloise: Eu acho que é diferente porque (...) a gente está falando o tempo todo de um infinito, (...) mas existem infinitos maiores do que outros, então... acho que a gente está roubando seu próximo slide, Flávia, mas é porque a gente está falando o tempo todo de uma quantidade que é muito, muito grande, mas não é uma quantidade, são várias quantidades, e umas maiores do que as outras, então eu acho que o infinito que a gente trata na educação básica é muito diferente do infinito que a gente pensa no ensino superior, porque para eles tem coisas que não vão fazer sentido. Não acho que um aluno de 8º ano, mesmo aprendendo números reais, vai entender o que é aquele infinito dos números reais, ele não tem nem consciência de que ele está estudando outro infinito diferente dos reais, mas eu acho que, quando você é mais novo, até para a gente também, quando a gente está falando de quantidade mesmo, a partir de determinado número, não sei nem ler o número. Você começa a ler os algarismos, porque aquilo perde o significado, (...) o que para um aluno de 6º ano vai fazer sentido... o que na vida dele tem representação para além de sei lá, 100.000, 1.000.000, no máximo o que ele já ouviu falar de 1.000.000 é o salário de um jogador de futebol. Vai para além disso. Não faz sentido, o que eu quero dizer é que não tem significado, e se aquilo não tem significado então o infinito também não tem, porque qual vai ser a diferença de infinito para um número muito grande se nenhuma daquelas coisas tem significado? E o que eu ouvi a gente falando foi colocando significados para uma coisa que quando a gente é criança a gente não entende o que é. Por isso que a gente fala, quando você quer muito uma coisa, e você está numa disputa, você fala 'eu quero isso vezes infinito', 'eu quero vezes infinito + 1'. O que é infinito + 1, sabe? Mas talvez para a criança aquilo tenha mais significado do que tem para a gente. Eu acho que para eles infinito + 1 é um infinito maior do que outro. Só é um infinito diferente.

E2 – 00:24:56 – Flávia: Mas infinito + 1 é um infinito maior do que infinito?

E2 – 00:25:01 – James: É, mas quando você fala de infinito + 1, você está mesmo sem perceber definindo infinito como um número, uma quantidade. Uma quantidade determinada.

E2 – 00:25:11 – Eloise: Exato, por isso que quando eu falei que uma criança não tem noção do que significa infinito, e pelo visto a gente também não tem, mas o suficiente para poder diferenciar que infinito e infinito + 1 não têm significado porque é infinito. Eu acho que o que a gente faz, em 'matematiquês', é construir significados para essa coisa que é uma quantidade muito grande, e a gente descobrir que tem quantidades ainda maiores do que ela, pode ser? Mas é uma construção de significado. Diferente da que você tem quando criança.

> E2 – 00:25:47 – James: Mas é muito delicado falar isso porque... eu não acho, né, pessoalmente eu não acho que seja exclusivo do ser criança pensar dessa maneira, eu acho que a qualquer idade a gente pode ter esse mesmo tipo de raciocínio, de não compreender... porque falar de compreender eu acho até que é audacioso demais, mas <u>pensar mais criticamente sobre infinito até mesmo na vida adulta é algo que a gente não vê muito por aí</u>. (...) Eu acho que é um problema que perdura qualquer etapa da vida, essa questão de não compreender o infinito, não como um número, mas sim como uma ideia, um conceito. É difícil. Eu não sei, eu não tenho resposta para isso.

Eloise, ao definir infinito como quantidade, nos remete à discussão apresentada em seções anteriores, em que James questiona o uso do termo "quantidade". Cronologicamente, aquela discussão anteriormente apresentada ocorreu após a conversa que estamos analisando no momento, então, podemos entender que o questionamento de James pode ter começado a surgir a partir da definição dada por Eloise na conversa atual.

Isabella demonstra desconforto com a definição de infinito como quantidade colocada por Eloise. Ela explicita em suas falas que definir infinito como quantidade seria redundante e resultaria em um ciclo, uma vez que definir infinito como quantidade implicaria que é uma quantidade infinita, o que terminaria não definindo o que é infinito.

Quando Eloise, nesta conversa, afirma que infinito não é um número, ela acaba demonstrando confusão em relação à definição de infinito. Em sua primeira fala, no debate anterior a este, Eloise afirma que o infinito é "um elemento dentro do conjunto dos números transcendentes". Enxergamos a dificuldade em definir o que é infinito, e podemos associá-la à falta de embasamento sobre o assunto, que pode existir devido à falta de aprofundamento sobre o assunto nos cursos de graduação e na educação básica. Ao afirmar que infinito é uma quantidade, Eloise trata a noção de quantidade como se fosse dissociada da noção de número.

Annabeth traz uma interpretação de infinito que ainda não havia sido apresentada na discussão: a ideia de infinito como um valor grande, que não é possível estimar e com o qual não é possível trabalhar. A definição de Annabeth é reforçada por Helena, que diz que seus alunos têm a mesma percepção de infinito como algo inalcançável, um número grande o suficiente para que não seja possível saber seu valor exato. Helena não diz explicitamente, mas entendemos que, em sua percepção, essa definição de infinito como um valor tão grande que se torna inalcançável e inexato vai ao encontro de sua definição inicial sobre o infinito ser interminável.

Eloise diz no início de sua resposta que discorda de Annabeth e Helena, mas utiliza ao longo dela argumentos que embasam a mesma ideia apresentada por Annabeth: a de infinito como um número muito grande. Eloise traz como exemplo alunos de 6º ano, que não são frequentemente apresentados a números que representam valores maiores que milhões, por exemplo. Segundo ela, valores que vão além do que os alunos são apresentados podem representar a ideia de infinito. Essa explicação de Eloise reforça a ideia de Annabeth de infinito como um valor muito grande, inalcançável.

James e Eloise, então, conversam brevemente sobre a construção de significado de infinito. Para Eloise, essa construção de significado é feita conforme o aluno cresce e amadurece, enquanto, para James, o significado de infinito pode ser dúbio mesmo para adultos. Mais uma vez, podemos justificar a dificuldade de compreensão sobre infinito – tanto por parte dos professores participantes quanto de alunos do ensino médio e superior de maneira geral – à falta de acesso a materiais que trabalhem de maneira bem elaborada as noções necessárias para a compreensão desse assunto.

É interessante observar um detalhe da fala de Eloise, em que ela diz “Acho que a gente está roubando seu próximo slide, Flávia”. A frase mostra que, apesar de estar tratando um assunto que gera desconforto, Eloise se sente confortável dentro do grupo para comentar sobre os assuntos a serem debatidos. É importante que, dentro dos encontros, os participantes possam se sentir em um ambiente confortável para trazer suas opiniões e contribuições, e percebemos que Eloise sentiu esse conforto, mesmo para falar de um assunto sobre o qual não possui completo domínio.

Entendemos que as noções de infinito potencial e atual estiveram presentes nos discursos de maneira implícita. O único professor que falou explicitamente sobre essas ideias de infinito, porém sob outras nomenclaturas, foi James, ao fim do debate do primeiro encontro:

> E1 – 00:50:17 – James: quando você perguntou sobre essas noções de infinito, você está se referindo a questões como <u>infinito matemático, infinito absoluto, perfeito, infinito referencial</u>, que são coisas que a gente vê quando pincela interesse sobre filosofia e coisas afim, que são certas definições diferentes para diferentes tipos de interpretações de infinito. Era com relação a isso que você estava esperando ouvir,

> ou viajei? A gente tem várias definições de infinito diferentes na literatura, mas faz muito tempo que eu não leio sobre isso, então posso estar definindo errado, mas a gente tem o conceito de infinito absoluto ou perfeito, que é o "infinito de verdade", é aquele infinito na mais pura essência da palavra, que abrange todos os elementos de todas as coisas. Mas, quando a gente fala de um infinito que é abordado no livro, a gente está falando de um infinito dentro de um universo de ideias, no caso dos números, por exemplo, quando ela fala que existem infinitos números entre 0 e 1, a gente não está falando de infinito absoluto aqui, mas de um infinito que obedece a um referencial, portanto um infinito referencial. Pois se a gente está falando que existem infinitos números entre 0 e 1, de certa forma, primeiro a gente está limitando e segundo, a gente está falando de números. Depois, por que isso é referencial? Porque ela está comparando com outro conjunto de números, que ela fala que de 0 a 2 "obviamente" deve ter muito mais números. Então ela começa a comparar diferentes tipos de infinitos, mas tudo que ela está fazendo aqui é utilizando um referencial. E eu acho que esse tipo de infinito é mais abordado no livro do que qualquer outro tipo de infinito. Enfim, desculpa se eu viajei aqui, mas... É o que eu interpreto.

Entendemos que a definição utilizada por James de infinito absoluto ou perfeito pode ser comparada ao que chamamos de infinito potencial. É a ideia de infinito como algo interminável e abrangente, em que sempre é possível acrescentar algum elemento e nunca haverá fim. Já o que James chama de infinito referencial pode ser relacionado ao que entendemos por infinito atual. Ao utilizar como exemplo para a definição de infinito referencial os intervalos [0, 1] e [0, 2], James mostra estar se referindo à mesma ideia que utilizamos ao falar sobre infinito atual, mas utilizando outra nomenclatura.

Ao pesquisar sobre a nomenclatura utilizada por James, não foi possível encontrar a definição de infinito referencial, e a definição encontrada para infinito absoluto nos remete à ideia de infinito como algo relacionado a divindade. No entanto, apesar de utilizar outras nomenclaturas para se referir às diferentes abordagens e interpretações sobre infinito, entendemos que, a partir de suas explicações e exemplificações, James estava se referindo às mesmas ideias de infinito potencial e atual.

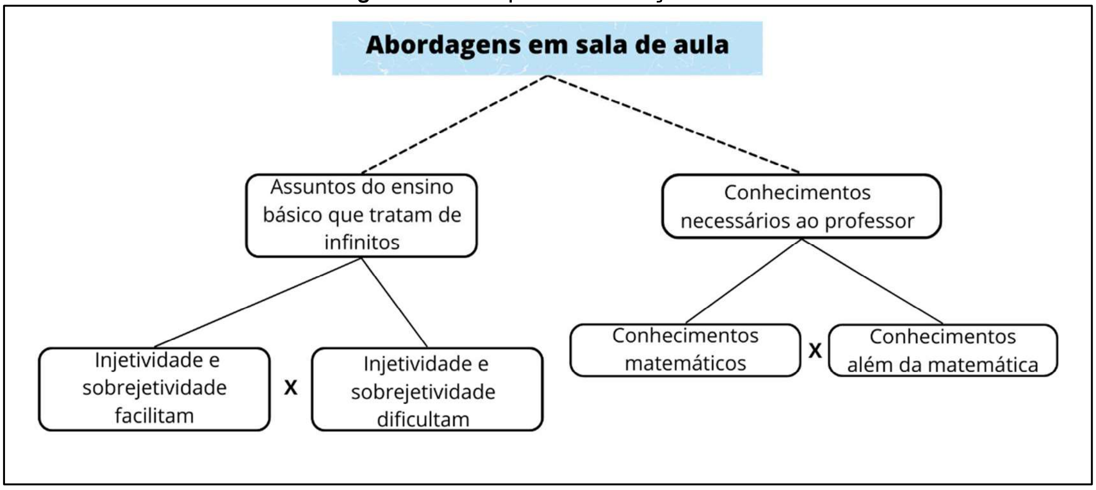
Os termos e as definições de infinito potencial e atual não foram mencionados aos participantes durante os encontros, pois queríamos observar quais ideias surgiriam de suas próprias reflexões, sem ser apresentadas por nós. James foi o único que trouxe as ideias de infinitos potencial e atual em seu discurso. Percebemos que, mais de uma vez, o professor se desculpa pela falta de clareza ou por possíveis erros nas informações trazidas por ele. Podemos interpretar que as desculpas podem ser relacionadas à falta de confiança em suas próprias contribuições, apesar de elas serem muito enriquecedoras para os debates. Nenhum outro professor participou do assunto levantado por James, e percebemos que ele provavelmente já havia buscado se aprofundar sobre as ideias de infinito, pela maneira como se referiu às definições.

O objetivo do debate sobre a definição de infinito foi escutar os professores e o que eles teriam a dizer sobre o assunto. Podemos utilizar suas contribuições para aprimorar nossas abordagens do assunto em sala de aula, elaborando uma proposta de utilizar, além do livro *A culpa é das estrelas*, outros materiais literários, como o poema *Soneto da fidelidade*, de Vinicius de Moraes. Na próxima seção, apresentaremos as contribuições dos participantes sobre a abordagem em sala de aula das noções de infinito discutidas nos quatro encontros.

4.3.4 Abordagens em sala de aula

Esta seção trará as contribuições dos participantes acerca da abordagem em sala de aula dos conteúdos sobre infinito tratados neste capítulo.

Figura 22 - esquema da seção 4.3.4



Fonte: elaboração própria

No último encontro, perguntamos aos professores participantes como poderíamos abordar em sala de aula os assuntos sobre infinitos presentes no livro *A culpa é das estrelas*; quais noções de infinito são vistas, mesmo que implicitamente, em sala de aula; qual relação podemos ver entre os assuntos debatidos nos encontros e os assuntos vistos em sala de aula; e quais os saberes necessários ao professor para realizar essa abordagem. Observando as respostas para os questionamentos sobre as noções de infinito abordadas em sala de aula, percebemos que cada professor trouxe uma visão sobre o assunto.

> E4 – 00:04:51 – Eloise: eu acho que sobre a sua segunda pergunta, quais as noções que são vistas implicitamente no ensino básico, eu acho que tem em vários momentos né, que a gente fala sobre diferentes tipos de infinito. Quando a gente fala sobre PA e PG, crescente e decrescente, então (...) que a <u>soma da PG</u> vai para um número inteiro se você está somando várias frações, e isso às vezes 'buga' os alunos. Mas aí tem uma... uma das ideias (...) não do infinito como uma coisa que <u>cresce para sempre</u>, mas como você pode ir para o infinitamente pequeno e <u>dentro uns dos outros</u>. Eu acho que também tem muito em <u>geometria</u>, toda vez que a gente fala de reta, de plano.
>
> E4 – 00:07:02 – Isabella: (...) noções no ensino básico eu acho que quando a gente fala de intervalo, a gente chega também a não tocar né, mas meio que implícito a noção de infinito também, então acho que pode acrescentar isso ao que a Eloise falou.
>
> E4 - 0008:09 – Eloise: de todos os conjuntos numéricos na real né, <u>eles fazem infinito desde tão 'pequetitinhos</u>' com os naturais.
>
> E4 – 00:08:17 – Annabeth: a gente também trata infinito... não... até quando a gente fala de PG... porque para mim <u>tem 2 infinitos na minha cabeça</u>, tem o infinito quantidade infinita e o infinito tamanho infinito né, para mim são coisas que se separam um pouquinho, apesar de terem a mesma ideia. Uma coisa que também a gente usa muito no ensino básico, às vezes, é o conceito de <u>infinito como quantidade</u>, quando a gente trabalha com equações e inequações, a gente fala 'ah, tem infinitas raízes', o que significa esse infinito nessa frase? É completamente diferente do que o infinito do tipo 'ah, a reta é um objeto infinito'. Então <u>na geometria também tem infinito</u>, quando a gente fala desses conceitos mais teóricos, né. A reta é um objeto infinito. (...) Então também aparece em geometria, aparece um pouquinho quando a gente pensa em quantidades infinitas, raízes, quantidades de raízes infinitas...
>
> E4 – 00:11:18 – Annabeth: eu tenho a sensação que todas as nossas discussões sobre o infinito do livro (...) elas permearam muito pelos conteúdos assim, de conjuntos e conjuntos numéricos né. Porque o exemplo mais famoso do livro, ela traz justamente esse assunto, que é o do 0 e 1, 0 e 2, que a gente ficou um tempão debatendo. (...) <u>de conjuntos numéricos, de conjuntos, de cardinalidade</u>, que a gente já veio conversando. Mas agora, se a gente for de uma forma mais geral, tipo 'onde o infinito aparece no ensino básico? São nesses conteúdos aqui. Quais são os tipos de infinito? Será que o infinito do livro ajuda a gente a...?' aí já é uma discussão um pouquinho mais profunda, e aí eu já não sei muito bem qual é o caminho que você quer seguir ou se qualquer um serve, se tudo serve...
>
> E4 – 00:18:34 – Annabeth: (...) quando a gente está falando de conjuntos numéricos a gente acaba falando da reta, a gente acaba falando de intervalos... quando a gente quer falar de infinito em outros conteúdos, em ideias mais abstratas, por exemplo o exemplo da Eloise, de PG né (...) eu acho também que é até um exemplo que dá para a gente trabalhar pensando em infinito do livro, que a gente quando falou do infinito do livro, a gente falou muito sobre a ideia de 'cara, como é louco você ter um infinito que você tem um intervalo que tem começo e fim e mesmo assim ele é infinito', que a gente vai meio que cavando dentro do intervalo (...) mas <u>o livro também pode ser tipo uma</u>

> introdução. Tipo 'ah, beleza, o que vocês entendem por infinito? Onde vocês acham que o infinito aparece para vocês?' e ele pode ser uma introdução a um debate, que aí o professor pode levar para onde ele quiser, sabe, introduzir o debate de infinito com o livro, mas não necessariamente ficar preso só aos conceitos de infinito que existem no livro. Então não sei...

Eloise, em sua primeira fala dessa conversa, trata a diferença entre os infinitos potencial e atual, sem utilizar esses termos. Enquanto, por um lado, ela enxerga o infinito como algo que "cresce para sempre", por outro, há também o infinito "dentro uns dos outros". Para exemplificar suas contribuições, ela fala sobre progressões geométricas e noções básicas de geometria – ponto, reta e plano. Entendemos que, em ambos os exemplos, Eloise se refere a noções que envolvem infinito atual, uma vez que deixa implícito que o infinito potencial é visto mais explicitamente. Ao se referir a infinitos que estão um dentro do outro, Eloise nos remete à ideia de que pode haver subconjuntos infinitos dentro de conjuntos infinitos. Em sua fala seguinte, alguns minutos depois, Eloise afirma que os alunos veem infinitos desde pequenos, ao estudar os conjuntos numéricos e, implicitamente, se refere às noções de infinito potencial.

Annabeth, ao tratar da quantidade de raízes de uma equação, traz um novo exemplo à discussão – além de reforçar outros que já haviam sido mencionados por Eloise e Isabella. Assim como já abordado em seções anteriores, vemos o infinito ser interpretado como uma quantidade de elementos. Essa ideia nos remete a algo que nunca terminará, e pode ser compreendida como mais um exemplo de infinito potencial apresentado pelas participantes. As professoras reforçam que infinito não é um número, porém, ao tratá-lo como quantidade, nos remetem à cardinalidade de conjuntos infinitos, que pode ser representada por um número. Os professores compreendem que existe uma diferença entre as interpretações de infinitos, mas enxergam certa dificuldade em definir qual é essa diferença. Mais uma vez, reforçando o que foi dito nas seções anteriores, a razão de haver essa dificuldade pode vir da falta de diferentes abordagens desse assunto na formação dos professores de matemática, ou até mesmo na escola básica.

Annabeth reforça a ideia de Eloise sobre entender a soma de uma progressão geométrica infinita como um exemplo de infinito atual. Ao comparar a soma da P.G. infinita ao que foi discutido ao longo dos encontros sobre os infinitos nos intervalos [0, 1] e [0,2], Annabeth traça um paralelo entre dois exemplos de infinito atual que podem ser utilizados para auxiliar na compreensão um do outro. É interessante perceber também que tanto Eloise quanto Annabeth, quando mencionam a soma dos elementos de progressão geométrica infinita, comparam essa ideia de infinito à ideia de infinito potencial, para justificar que são ideias distintas. Essa comparação feita por elas pode remeter à própria progressão geométrica infinita – enquanto a sequência é uma lista de elementos infinitos, a soma desses elementos será finita: é possível estabelecer uma relação entre um e outro para compreender a diferença entre os tipos de infinito.

A resposta de Eloise foi à contribuição de Isabella, que afirma que infinitos são vistos no ensino básico quando os alunos estudam intervalos – ou seja, durante os estudos do conjunto dos números reais. Eloise complementa a afirmação de Isabella, acrescentando que ela também é válida para os outros conjuntos numéricos, e não apenas os reais.

A discussão seguiu:

> E4 – 00:14:14 – Eloise: eu estava imaginando... vocês já tiveram alguma vez essa discussão do problema que se tem ensinando funções, das descontinuidades das formas de abordagem de função no ensino médio? Que você... normalmente se começa com função como diagrama, aí você vai ligar as setinhas do diagrama, e aí do nada você fala 'então, isso aqui é domínio, isso aqui é contradomínio, e ponto, funções numéricas, e é isso'. E aí eu estava pensando que talvez isso pudesse ser uma ponte (...) a partir de funções, as coisas caminharem juntas, sabe? Mas porque a gente começa da ideia do diagrama e no diagrama você vai representar uma quantidade limitada de elementos, né, que não tem como você desenhar infinitos elementos para ligar setinhas. Então tem alguns exemplos, até não numéricos, sei lá, liga os alunos com os times de futebol. E se faz muito isso para entender o que é a função injetiva, sobrejetiva e bijetiva, né. Eu acho que talvez a parte de <u>injetividade e sobrejetividade de função</u>... e aí juntando um pouco com o que Isabella e a Annabeth estavam falando sobre os intervalos, a gente pudesse fazer isso como um meio do caminho entre você sair do diagrama e você falar sobre funções que sejam de outros conjuntos numéricos em outros conjuntos numéricos para poder falar sobre injetividade e sobrejetividade. E aí você pode usar o [0,1], [0,2] como exemplo de domínios e contradomínios e esses e outros, para falar de domínios e contradomínios, e talvez nisso a gente discutir se nessa sobrejetividade de funções, se os infinitos são ou não iguais. Ou talvez fazer uma função que leve os naturais nos reais e discutir por que essa função não tem como ser sobrejetiva. Porque são infinitos diferentes. Eu acho que talvez esse seja um caminho.
>
> E4 – 00:16:22 – James: com esses termos? Você acha?
>
> E4 – 00:16:25 – Eloise: injetividade e sobrejetividade?
>
> E4 – 00:16:27 – James: sobrejetiva, injetiva, bijetiva...
>
> E4 – 00:16:35 – Eloise: eu vi isso no ensino médio, vocês não?

> E4 – 00:16:37 – James: sim, eu também. Mas <u>eu não achava isso palatável</u>, digamos assim.
>
> E4 – 00:16:44 – Eloise: vai ver usando o livro fica mais.
>
> E4 – 00:16:52 – James: talvez...
>
> E4 – 00:16:55 – Eloise: eu acho que é uma parada que se passa muito rápido, porque não faz sentido discutir funções injetivas e sobrejetivas se 99% do tempo eles estão falando de funções dos reais nos reais, sabe, então essa discussão se perde. Eu acho que talvez isso falte muito, porque... eu dava monitoria de cálculo... dei junto com a Flávia monitoria de cálculo muito tempo, e os alunos claramente tinham que discutir função em cálculo 1 e não sabiam o que significava injetividade e sobrejetividade. E aí falar sobre função inversa e tal, era o fim conversar isso com os alunos de cálculo 1 (...) exatamente porque os exemplos que se vê no ensino médio não fazem sentido quando a gente está discutindo isso, tirando talvez função seno e cosseno, mas assume-se domínio e contradomínio real e vai ver o que acontece, ninguém está muito incomodado em saber quais são esses conjuntos. Talvez essa questão dos infinitos, como a gente... como a Annabeth estava falando, que isso está mais ligado aqui para a gente no contexto de *A Culpa é das estrelas* com os conjuntos numéricos, talvez a gente... fazer isso com mais calma, e falar sobre o que é a gente relacionar um conjunto com o outro e o que isso pode ter a ver com esses tamanhos de conjuntos de intervalo.

Eloise levanta mais um assunto que pode ser discutido a partir da discussão sobre infinitos apresentada no livro *A culpa é das estrelas*: o estudo de funções. Ao ressaltar que essa abordagem pode ser realizada tanto para compreender melhor as noções de função a partir das noções de infinito quanto para o caminho contrário, Eloise mostra acreditar que, seja qual for a abordagem realizada, as noções de funções e de infinitos estão relacionadas e a compreensão de um assunto pode ser importante para a do outro. Quando trabalhamos funções, trabalhamos uma relação entre dois conjuntos numéricos. Se esses conjuntos forem infinitos – como ocorre na maioria dos casos vistos no ensino médio – é importante que as ideias envolvidas nesses conjuntos estejam claras, para que os estudos de funções também estejam.

A ideia de Eloise gerou discordância em James, como percebemos pelas perguntas feitas por ele. James demonstra não acreditar que abordar ideias de injetividade e sobrejetividade no ensino médio a partir das discussões de infinito apresentadas no livro *A culpa é das estrelas* seja proveitoso para os alunos, uma vez que tais assuntos são considerados abstratos para ele e, por isso, difíceis. Apesar de Eloise justificar seu ponto de vista, James não demonstrou concordar com ela, ao fim da conversa. Entendemos que o professor acredita que a abordagem desse assunto no ensino médio não é realizada de uma maneira que facilite a compreensão dos alunos e que utilizar as noções de infinito não seria suficiente para que facilitasse.

A pergunta sobre os saberes necessários ao professor provocou reflexões nos professores.

> E4 – 00:03:21 – Annabeth: eu posso de repente falar da última que você perguntou, sobre os saberes, que eu acho que na real essa pergunta é uma pergunta que vale não só para esse conteúdo, mas vale para a matemática como um todo. (...) eu acho que o saber do professor nunca é igual ao saber do aluno. A gente sempre tem que saber mais, mais profundamente, com mais detalhes, e não é só sobre esse assunto de infinito, eu acho que é sobre qualquer assunto que a gente vá ensinar, o nosso saber é sempre maior e mais aprofundado até do que a gente vai passar para o aluno, a gente não pode só saber o que a gente vai passar, a gente precisa saber mais. Então isso daí eu já tenho como verdade para qualquer coisa que a gente vá ensinar, até que não seja matemática, qualquer assunto que a gente vai falar, a gente precisa saber mais do que a gente fala, e aí é isso, não tenho muito mais a acrescentar a isso não. Aí vou ler as outras perguntas aqui para lembrar enquanto isso.
>
> E4 – 00:07:02 – Isabella: Sobre o que a Annabeth falou, também... na verdade li em alguns textos também para estudar, e concordo que o professor sempre tem que saber mais, eu acho que até mesmo para instigar os alunos assim, se você tem um aluno... lógico, você tem que saber mais para qualquer pergunta que chegue para você, curiosidade... mas eu acho que se você tem um aluno curioso em matemática, às vezes esse aluno não se sente tão entusiasmado com você dando... aprendendo somente as mesmas coisas que os outros alunos, a gente também tem que pensar nessas coisas.
>
> E4 – 00:10:23 – James: Eu diria... eu estava tentando ser bem técnico para responder essa sua pergunta, e já estava pensando coisas mirabolantes. Caramba, o professor precisa ter cursado análise? Sabe, coisas do gênero. Mas pensando com mais amor no coração, eu acho que não chega a tanto, eu acho que o professor que tem um conhecimento já básico de... imaginando que ele teve a graduação em matemática, que ele tem um conhecimento básico do início da graduação dele, em disciplinas de matemática básica etc., se o currículo for o mesmo né, unificado, ele já vai ter tido noções desse tipo de assunto para abordar no ensino básico.

Quando observamos as respostas apresentadas para a pergunta sobre os saberes matemáticos necessários ao professor de matemática, Annabeth e Isabella apresentaram ideias parecidas: não é suficiente ao professor saber o que ele vai ensinar aos alunos. Pelas falas das duas professoras, ambas acreditam que essa afirmação é válida para qualquer conteúdo que vá ser ensinado, em qualquer disciplina, não apenas em matemática para tratar de infinitos. Nenhuma das duas se aprofundou em relação a qual conteúdo específico é necessário ao professor, mas deixaram claro em suas contribuições que acreditam ser importante que o professor domine a matéria que se dispõe a ensinar, além do que de fato será ensinado.

James tentou ser mais específico em sua resposta a essa pergunta, ao mencionar as disciplinas da graduação que o professor precisaria ter cursado para abordar infinitos em sala de aula, mas afirmou que não acredita que seja necessário tal nível de especificidade. Ao contrário de Annabeth e Isabella, James mostra acreditar que compreender os conteúdos sobre infinitos que vai ensinar é suficiente para abordar esses assuntos em sala de aula. Entendemos que, ao dizer isso, James mostra uma visão oposta à das outras professoras. Para ele, compreender as ideias de infinito necessárias ao ensino básico já seria suficiente para ensiná-las aos alunos, sem precisar de um aprofundamento muito intenso no assunto.

Ao fim do encontro, encerrando as discussões, Eloise retomou a pergunta e acrescentou que acredita que os saberes necessários ao professor vão além do conhecimento matemático, uma vez que ensinar pressupõe um conhecimento que vai além da matemática.

> E4 - 01:15:32 – Eloise: posso... eu sei que a gente já ultrapassou o horário, mas eu queria puxar um gancho para o slide anterior (...) que você perguntou sobre o conhecimento do professor, certo? Eu acho que... só queria fazer um adendo talvez, é que as coisas que a gente está falando são conhecimento do professor, tipo, conhecimento limítrofe sabe, o que vai além da matemática, conhecimento sobre quem são seus alunos, conhecimento sobre o que eles gostam, conhecimento sobre áreas anexas, então a gente está falando sobre literatura, a gente está falando sobre... enfim, quando você fala de interdisciplinaridade em geral, você saber como a sua disciplina conversa com as outras, então a pergunta anterior era mais direcionada assim... o que você precisa saber sobre infinitos para poder abordar esses assuntos, mas eu acho que quando a gente está falando de uma abordagem mais ampla, do... não vou nem usar a palavra interdisciplinar, porque não necessariamente tem que estar conversando com a disciplina de literatura, mas uma abordagem que vai além do paradigma do exercício, etc., é... você tem outros conhecimentos do professor que a gente está aqui mobilizando e sacudindo há, sei lá, 3 semanas de oficina já, conversando e que é exatamente isso né, <u>o que você precisa saber para além de matemática para você poder ensinar matemática</u>? Não só talvez o a fundo de matemática para poder falar aqueles conteúdos, mas o que para <u>além da sua disciplina</u> vai te ajudar a conseguir trazer aquilo de uma forma significativa para os seus alunos? Eu acho que isso também é... na verdade <u>é o que a gente está falando o tempo todo</u> sem ter dito isso né, sem ter usado essas palavras.

Entendemos que Eloise acredita que, tão importante quanto dominar o conteúdo de matemática que vai ser ensinado, o professor deve ter conhecimentos que extrapolam o campo da matemática. Com essa fala, Eloise retoma as discussões apresentadas nas seções anteriores. É importante que o professor compreenda os gostos dos seus alunos, as dificuldades apresentadas por eles, e que entenda como realizar a abordagem de diversos assuntos em sala de aula de modo que essa abordagem se adapte àqueles alunos da melhor maneira possível.

Eloise deixa claro em sua fala que o saber necessário ao professor para ensinar um conteúdo vai muito além da matemática – e, segundo ela, as discussões dos encontros trouxeram diversas vezes essa ideia, mesmo que de maneira implícita.

Os saberes necessários ao professor, da maneira como foi apresentada pelos participantes dos encontros, podem ser relacionados ao que Shulman (1986) chamou de “Conhecimento Pedagógico do Conteúdo”, ou, em inglês, PCK – *Pedagogic Content Knowledge*.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa buscou compreender de que maneiras obras da literatura juvenil podem ser utilizadas no ensino de matemática como material alternativo ao livro didático. O trabalho partiu da ideia de que o uso de livros voltados ao público jovem pode facilitar a abordagem do professor e a compreensão dos alunos sobre determinados assuntos, assim como aproximar a matemática vista em sala de aula àquela presente no dia a dia dos adolescentes. Buscamos entender de que maneira a literatura juvenil pode ser utilizada como ferramenta alternativa para a aprendizagem de matemática, a partir das interações de professores de matemática e português entre si e com o livro *A culpa é das estrelas*.

Trabalhos como os de Smole et al. (2007), Campos (2011) e Dalcin (2002) nos ajudaram a compreender a importância da leitura e da literatura para o ensino aprendizagem de matemática. Como a leitura pode facilitar ao aluno enxergar a matemática em seu cotidiano e possibilitar o desenvolvimento de habilidades como interpretação, argumentação e raciocínio lógico, a literatura juvenil pode ser uma ferramenta que auxiliará a introduzir e trabalhar assuntos de matemática de maneira alternativa aos livros didáticos e exercícios – materiais que são normalmente utilizados nas aulas de matemática.

A pesquisa foi baseada na metodologia do Design Research (COBB et al., 2003), que permitiu que fossem feitas mudanças na estrutura conforme a aplicação da pesquisa, bem como uma pesquisa ativa, que possibilitou uma relação direta entre nós, pesquisadoras, e o objeto de pesquisa.

Para isso, foram realizados quatro encontros virtuais com cinco professores de matemática e uma professora de português. Os encontros foram realizados na forma de videochamada pela plataforma Google Meet e cada um teve cerca de uma hora de duração. Esses encontros geraram debates enriquecedores sobre o uso do livro *A culpa é das estrelas* para o ensino de noções de infinito no ensino básico.

As análises dos discursos dos professores ao longo dos encontros foram feitas a partir do Modelo de Estratégia Argumentativa (MEA), utilizado como fundamentação teórica do trabalho (CASTRO; BOLITE-FRANT, 2011). Esse modelo nos permitiu analisar as interações entre os professores observando além do que era dito por eles, buscando compreender tanto os fatores explícitos quanto os implícitos nas conversas.

A partir da análise das contribuições dos professores participantes dos encontros, apresentadas no capítulo 4, foi possível entender como podemos utilizar a literatura juvenil na sala de aula de matemática e de que maneiras essa abordagem pode ser realizada.

Tendo como base as análises dos encontros com os professores, entendemos que a ideia de trabalhar a literatura juvenil nas aulas de matemática é uma proposta que pode encontrar resistência por parte dos próprios professores de matemática. Por ser um material que não é comumente utilizado no ensino tradicional de matemática, o livro de literatura pode não ser facilmente aceito pelos professores. Como demandaria uma reorganização da estrutura das aulas de matemática, uma possível barreira identificada pelos participantes dos encontros seria a relutância, tanto dos professores quanto da coordenação pedagógica das escolas, em utilizar esse tipo de material nas aulas de matemática.

Uma proposta levantada pelos participantes foi a de utilizar obras de literatura juvenil de maneira conjunta com a disciplina de língua portuguesa, estabelecendo uma abordagem interdisciplinar do material. A interdisciplinaridade possibilitaria, ainda, a compreensão por parte dos alunos de que, por mais que nas escolas as disciplinas sejam dissociadas, na realidade elas estão todas conectadas e as diferentes áreas de conhecimento se intersectam e conversam entre si.

Sabemos que propostas interdisciplinares costumam encontrar dificuldades para serem implantadas nas escolas, por diversos motivos. Seja por falta de tempo e espaço durante as aulas para fazer uma abordagem diferente, já que muitas vezes os professores devem seguir o currículo proposto pela escola; ou pela dificuldade de que os horários dos professores de matemática e português, nesse caso, coincidam; ou pela relutância dos professores e das coordenações pedagógicas em adotar diferentes abordagens. Entretanto, mesmo que práticas interdisciplinares não sejam possíveis, o uso da literatura nas aulas de matemática não deveria ser descartado. Além de aproximar os alunos da matemática e da leitura – hábito necessário para o estudo de matemática, uma vez que sem compreender problemas não é possível resolvêlos –, a literatura pode facilitar o aprendizado e a introdução de assuntos que podem ser considerados difíceis e abstratos.

Para a utilização do livro *A culpa é das estrelas*, especificamente, em sala de aula, as propostas e discussões giraram principalmente em torno das noções de infinito. Segundo os participantes, partir da leitura dessa obra pode ser uma boa maneira de introduzir e trabalhar assuntos como conjuntos numéricos, intervalos reais, noções de geometria e funções.

O livro aborda principalmente a ideia de que existem infinitos maiores que outros. Essa ideia permite trabalhar a diferença entre as cardinalidades de dois conjuntos infinitos – os conjuntos dos números naturais e reais, por exemplo –, possibilitando ao aluno uma melhor compreensão dos conjuntos numéricos estudados e das possibilidades de se trabalhar com eles.

Dentro da ideia de que existem infinitos maiores que outros, o autor propõe, no fim do livro, que dois intervalos reais, mais especificamente os intervalos [0, 1] e [0, 2], são infinitos de tamanhos diferentes. Essa afirmação gerou discussões entre os professores participantes sobre alguns aspectos. O primeiro deles, a validade da afirmação: ao estudar sobre cardinalidade de conjuntos infinitos, sabemos que, ao realizar uma bijeção entre os elementos dos dois conjuntos, é possível perceber que ambos possuem a mesma cardinalidade. Logo, não se trata de infinitos de tamanhos diferentes e, portanto, a afirmação não está matematicamente correta.

O segundo, ainda relacionado à validade da afirmação, é a dificuldade que os professores apresentaram em compreender a razão pela qual os dois intervalos possuem a mesma cardinalidade. É interessante perceber que, por mais que todos os professores de matemática tenham estudado esse assunto na graduação e alguns ainda tenham visto novamente no mestrado, alguns deles disseram que apenas aceitavam que os conjuntos possuem mesma cardinalidade, mas não entendiam o motivo. Ao relatar as próprias dúvidas sobre o assunto, os participantes acreditavam que essas dúvidas se estenderiam aos alunos também. Somente a partir de uma demonstração geométrica feita por uma das professoras foi possível observar que todos os outros professores participantes, que antes relataram não compreender esse assunto, entenderam e concordaram com a demonstração.

É interessante perceber que os participantes, especialmente a professora de português, chamaram atenção para abordagens sobre infinito fora da matemática. Como o livro *A culpa é das estrelas* trata sobre morte e memória, foi realizada uma relação entre essas ideias e o infinito. Essa discussão levantou o seguinte questionamento: quando tratamos do infinito de maneira relacionada à filosofia, e não explicitamente matemática, não estamos também tratando do infinito matemático? É importante ressaltar que, ao tratar do infinito como uma questão filosófica, ou mesmo religiosa, estamos tratando das mesmas ideias de infinito que estudamos em matemática, apenas em contextos diferentes.

Essa dissociação entre as noções de infinito, como se fossem ideias desagregadas, está relacionada à separação de disciplinas na escola de maneira que não tenham interação umas com as outras. É interessante que as práticas interdisciplinares sejam cada vez mais trabalhadas com os alunos, para que eles possam desenvolver a percepção de que um mesmo assunto está relacionado a diferentes áreas do conhecimento.

Como a discussão sobre infinitos normalmente não é realizada no ensino básico, os estudantes recorrem ao seu conhecimento cotidiano, que, neste caso, está relacionado às medidas – em uma régua, por exemplo – dos segmentos que vão de 0 a 1 centímetro e de 0 a 2 centímetros. Como a ideia de medida é algo presente na realidade dos alunos, tanto dentro quanto fora de sala de aula, se torna intuitivo pensar que entre 0 e 2 há mais números que entre 0 e 1, o que causa estranhamento ao tentar compreender que os intervalos possuem a mesma cardinalidade.

Justamente por ser um assunto que não é intuitivo para os estudantes, é necessário que as noções de infinito sejam apresentadas e discutidas na escola. De modo geral, presume-se que as noções de infinito sejam um assunto conhecido intuitivamente por todos, e, por isso, não é um conteúdo trabalhado da maneira que deveria. Ao se deparar com determinados conteúdos de matemática, os alunos apresentam dificuldades que poderiam ser resolvidas se essas noções de infinito tivessem sido trabalhadas com eles em algum momento. Alguns desses conteúdos são inequações, funções e progressões geométricas.

A literatura juvenil, ou literatura Young Adult, está presente no cotidiano de muitos adolescentes. Por isso, pode ser uma ferramenta muito útil para aproximar o conteúdo das disciplinas da escola e os assuntos vistos pelos jovens fora do âmbito escolar, assim como introduzir conteúdos de maneira mais palpável para os alunos e estimular a leitura, hábito essencial para o desenvolvimento dos adolescentes.

É importante que ainda continuemos a pesquisar dentro deste tema, para que seja possível compreender melhor como podemos utilizar a literatura juvenil no ensino de matemática, e aplicar essas abordagens em sala de aula.

Esperamos, com este trabalho, voltar novos olhares para o uso de diferentes materiais – neste caso, o livro de literatura juvenil – no ensino de matemática. Nosso papel como professores deve ser buscar constantemente maneiras de auxiliar os alunos a construir seus conhecimentos, explorando diversas práticas de ensino e ferramentas existentes, com o intuito de tornar o processo de aprendizagem mais enriquecedor.

REFERÊNCIAS

'A culpa é das estrelas' dá recorde de audiência à Globo'. **Veja**, 2016. Disponível em: https://veja.abril.com.br/cultura/a-culpa-e-das-estrelas-bate-recorde-da-globo-em-2016/. Acesso em 6 set. 2021.

ADAMS, D. **O guia do mochileiro das galáxias**; tradução: Carlos Irineu da Costa e Paulo Fernando Henriques Britto – São Paulo: Editora Arqueiro, 2010.

BACICH, L.; MORAN, J. **Metodologias ativas para uma educação inovadora**: uma abordagem téorico-prática [recurso eletrônico]. Porto Alegre: Penso, 2018 e-PUB.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos: Matemática. Brasília: MECSEF, 1998.

BROWN, D. **Fortaleza digital**; tradução: Carlos Irineu da Costa – Rio de Janeiro: Editora Sextante, 2005.

CAMPOS, R. S. P. de. **O Uso de Textos Alternativos para o Ensino de Ciências e a Formação Inicial de Professores de Ciências**. Dissertação (Pós-Graduação em Educação para a Ciência) - Faculdade de Ciências Campus de Bauru, Universidade Estadual Paulista, 2011.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática** – Lisboa: 1951.

CARROLL, L. **Alice: Aventuras de Alice no País das Maravilhas; Através do Espelho e o que Alice encontrou por lá**; tradução Maria Luiza X. de A. Borges - Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2009.

COBB, P. et al. **Design experiments in educational research**. Educational Researcher, v. 32, n. 1, p. 9-13, jan. 2003.

COSTA, A. M. **A importância da língua portuguesa na aprendizagem da matemática**. Dissertação (Mestrado em Estudos da Criança) - Área de Especialização em Ensino e Aprendizagem da Matemática, Universidade do Minho, 2007.

CRUVINEL, L. W. F. **Narrativas juvenis brasileiras: em busca da especificidade do gênero**. Tese (Doutorado em Letras e Linguística) – Faculdade de Letras, Universidade Federal de Goiás, 2009.

DALCIN, A. **Um olhar sobre o paradidático de matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2002.

GREEN, J. **A culpa é das estrelas**; tradução: Renata Pettengill - Rio de Janeiro: Editora Intrínseca, 2012.

GREEN, J. **Antropoceno**: notas sobre a vida na Terra; tradução: Alexandre Raposo; Ulisses Teixeira – Rio de Janeiro: Editora Intrínseca, 2021.

GREEN, J. **O teorema Katherine***;* tradução: Renata Pettengill - Rio de Janeiro: Editora Intrínseca, 2013.

JAPIASSU, H. **A questão da interdisciplinaridade**. Porto Alegre: 1994. Disponível em: http://smeduquedecaxias.rj.gov.br/nead/Biblioteca/Forma%C3%A7%C3%A3o%20Continuada/Artigos%20Diversos/interdisciplinaridade-japiassu.pdf. Acesso em 12 out. 2022.

KAPLAN, J. **Young Adult Literature in the 21st Century***:* Moving Beyond Traditional Constraints and Conventions. The research connection, ???, p. 11-18, 2005.

LOPES, P. C. **Literatura e linguagem literária***.* Lisboa, 2010. Disponível em: http://hdl.handle.net/11144/200. Acesso em: 8 jul. 2019.

LUCAS, Adriano S. Top 10 livros mais vendidos no Brasil em 2014. **Top 10+**, 2014. Disponível em: https://top10mais.org/top-10-livros-mais-vendidos-no-brasil-em-2014/. Acesso em 6 set. 2021.

MANTOV, Fabio. Veja os livros mais vendidos de 2013. **Leia Livro**, 2013. Disponível em: http://www.leialivro.com.br/artigos/veja-os-livros-mais-vendidos-de-2013/. Acesso em: 6 set. 2021.

MORAES, Vinicius de. **Antologia Poética**. Editora do autor, Rio de Janeiro, 1960, p.112.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti. **3+1 e suas (In)Variantes**: Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática. Bolema, Rio Claro (SP), v.26, n.44, p. 1137-1150, dez. 2012.

NEUENFELDT, A. **Matemática e literatura infantil: sobre os limites e possibilidades de um desenho curricular interdisciplinar**. Dissertação (Pós-graduação em educação) - Centro de Educação, Universidade Federal de Santa Maria, 2006.

PARK, J. **Amor fora do ar**; tradução: Bianca Briones – Carapicuiba, SP: Pandorga Editora e Produtora, 2015.

PINTO, M. V.; VALENTE, T. M. **Das páginas às telas**: uma abordagem multi-dimensional da adaptação da linguagem da literatura young adult para o cinema. Revista linguística, Rio de Janeiro, v. 16, n. 2, p. 155 – 190, mai. – ago. 2020.

ROCHA, M. L. da; AGUIAR, K. F. de. **Pesquisa-intervenção e a produção de novas análises.** Psicologia: ciência e profissão, Brasília, v. 23, n. 4, p. 64-73, dez. 2003. Disponível em:

<http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1414-98932003000400010&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 16 mai. 2020.

RODRIGUES, Maria Fernanda. A culpa é das estrelas é filme mais visto no Brasil em 2014. **Exame**, 2014. Disponível em: https://exame.com/casual/a-culpa-e-das-estrelas-e-filme-mais-visto-no-brasil-em-2014/. Acesso em: 6 set. 2021.

SANTOS, R. B. O. et al. **A importância da leitura na sala de aula**. Research, Society and Development, v. 10, n. 4, 2021.

SILVEIRA, Ê.; MARQUES, C. **Matemática**: compreensão e prática. Rio de Janeiro: Editora Moderna, 2013.

SMITH, J. E. A. **A Probabilidade Estatística do Amor À Primeira Vista**; tradução: Camila Mello - Rio de Janeiro: Editora Galera Record, 2013.

SMOLE, K. C. S. et al. **Era uma vez na matemática**: uma conexão com a literatura infantil. 6. ed. São Paulo: IME – USP, 2007.

TEIXEIRA, R. **Uma visita ao universo matemático de Lewis Carroll e o (re)encontro com a sua lógica do nonsense**. Dissertação (Pós-Graduação em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2007.

TOURAIS, Natália. Os livros mais vendidos de 2015. **Guia da semana**, 2015. Disponível em: https://www.guiadasemana.com.br/literatura/galeria/os-livros-mais-vendidos-de-2015. Acesso em 6 set. 2021.

VIVA: a vida é uma festa. Direção: Adrian Molina; Lee Unkrich. Produção: Pixar Animation Studios. Estados Unidos: Walt Disney Pictures, 2018. DVD.

ZWIERNIK, L. **Matemática no país da literatura**: uma proposta didática com o livro “Alice no País dos Números”. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.

APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Você está sendo convidado(a) para participar voluntariamente de uma pesquisa. Após ser esclarecido(a) sobre as informações a seguir, caso concorde em fazer parte do estudo, assine o documento consentindo sua participação. O documento segue em duas vias: uma é sua e a outra é dos pesquisadores responsáveis. Em caso de recusa, você não será penalizado(a) de forma alguma. Em caso de dúvida, você pode procurar os pesquisadores responsáveis pelo endereço eletrônico flavinhaclemente@gmail.com

Prezado(a),

Gostaríamos de convidá-lo(a) a participar da pesquisa *“O uso da literatura juvenil no ensino de matemática: uma abordagem no ensino médio a partir do livro A culpa é das estrelas”*, sob responsabilidade da pesquisadora Flávia Clemente Marques e orientação da Professora Janete Bolite Frant. Os objetivos dessa pesquisa são: elaborar uma oficina para professores de matemática, para debater como a literatura juvenil pode ser utilizada como ferramenta alternativa para a aprendizagem de matemática no ensino médio; identificar e analisar a matemática que emerge a partir das interações dos professores com o livro *A culpa é das estrelas* e a utilização da literatura juvenil como ferramenta para o ensino de matemática.

Sua participação neste estudo é muito importante e se dará por meio de uma oficina, que será realizada virtualmente e terá quatro encontros. Gostaríamos de esclarecer que sua participação é totalmente voluntária e você tem a liberdade de se recusar a participar e poderá, ainda, se recusar a participar durante qualquer fase da pesquisa, sem qualquer tipo de ônus.

Em qualquer etapa do estudo, você terá acesso à profissional responsável, que poderá ser encontrada através do telefone (21) 999248281. Se você tiver alguma consideração ou dúvida sobre a ética da pesquisa, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do Hospital Universitário Clementino Fraga Filho/HUCFF/UFRJ – R. Prof. Rodolpho Paulo Rocco, n.° 255

– Cidade Universitária/Ilha do Fundão – 7º andar, Ala E - pelo telefone 3938-2480, de segunda a sexta-feira, das 8 às 16 horas, ou por meio do e-mail: cep@hucff.ufrj.br.

Sua participação na pesquisa não envolve riscos. Todas as informações coletadas neste estudo são confidenciais e, quando divulgadas, terão as identidades dos sujeitos preservadas. O resultado obtido com os dados coletados durante a oficina, bem como possíveis produções durante a pesquisa, serão sistematizados, discutidos e posteriormente divulgados na forma de um texto dissertativo, que será apresentado em sessão pública de avaliação e disponibilizado para consulta na página do PEMAT-UFRJ/dissertações concluídas. Não haverá benefício direto para você ao participar da pesquisa, além da retomada de reflexões sobre a utilização da literatura juvenil no ensino de matemática. Informamos que você não terá despesas pessoais ao participar da pesquisa, assim como também não terá compensação financeira.

Caso concorde em participar, os encontros poderão ser gravados.

Formalização:

Eu, ____,
declaro que fui devidamente informado(a) de todos os procedimentos da pesquisa “O uso da literatura juvenil no ensino de matemática: uma abordagem no ensino médio a partir do livro *A culpa é das estrelas*” e concordo em participar da pesquisa. Também informo que

( ) permito ( ) não permito a gravação dos encontros realizados durante a pesquisa.

Rio de Janeiro, ___/________________/_____

____

Assinatura do participante da pesquisa

Eu, Flávia Clemente Marques, pesquisadora associada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PEMAT-UFRJ), declaro que obtive este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido sem exercer qualquer forma de coerção sobre o(a) voluntário(a).

Rio de Janeiro, _____/________________/_____.

____

Assinatura do pesquisador responsável

Flávia Clemente Marques – pesquisadora responsável
flavinhaclemente@gmail.com

Janete Bolite Frant – orientadora
janetebf@gmail.com

APÊNDICE B – Organização das estruturas dos encontros

1. Primeiro encontro: dia 19/02/2021 às 16h
    1.1. Objetivo: Levantar o perfil dos participantes e identificar os conteúdos matemáticos encontrados por eles no livro *A culpa é das estrelas.*
    1.2. Tempo necessário: cerca de 60 minutos
    1.3. Material necessário aos participantes: computador ou celular com acesso à internet para que possam acessar a sala de bate papo.
    1.4. Divisão do encontro:
        - *Introdução:* apresentação da pesquisadora, breve explicação sobre a motivação da pesquisa e sobre como o encontro se desenvolverá.
        - *Apresentação dos participantes:* pedir que cada participante se apresente, dizendo nome, idade, disciplina que leciona, lugar onde trabalha e com que segmento (ensino fundamental, médio ou superior), qual sua formação, etc.
        - *Discussão sobre a matemática presente no livro* A culpa é das estrelas*:* Perguntar aos participantes "Onde podemos identificar a matemática no livro A culpa é das estrelas?" Caso nenhum dos participantes responda, podemos motivá-los apresentando a tela com um slide do Powerpoint com algumas frases do livro que apresentem conteúdos matemáticos, como por exemplo:
            - "(...) ninguém tinha achado uma resposta para ela de verdade, até que Cantor demonstrou que alguns infinitos são maiores que outros.";
            - "existe uma quantidade infinita de números entre 0 e 1. (...) Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2 ou entre o 0 e o 1 milhão";
            - "(...) Desenhe um círculo, por favor. (...) Agora faça um círculo menor dentro dele. (...) O círculo maior representa os virgens. O círculo menor é composto por jovens de dezessete anos com uma perna só.";
            - "(...) quando você ouve que tem, por exemplo, vinte por cento de chance de viver cinco anos, e faz as contas e conclui que isso é uma chance em cinco...".

Queremos então iniciar uma discussão sobre os assuntos presentes no livro, apresentados pelos participantes ou instigados por nós – apenas no caso de os participantes não apresentarem sozinhos nenhum conteúdo matemático presente no livro.

Para motivar as discussões, caso necessário, podemos perguntar aos participantes se eles se atentaram a essas partes do livro que abordam matemática, se foi algo que chamou a atenção deles, e se eles pararam para analisar o que estava sendo discutido.

- *Discussão sobre as noções de infinito presentes no livro* A culpa é das estrelas: Por fim, podemos dar um foco maior à parte que aborda as noções do infinito presentes no livro. Podemos perguntar aos participantes quais são essas noções que eles encontraram durante a leitura e, se necessário, reforçar alguns trechos da leitura a partir do compartilhamento da tela, como por exemplo:
    - "(...) ninguém tinha achado uma resposta para ela de verdade, até que Cantor demonstrou que alguns infinitos são maiores que outros.";
    - "existe uma quantidade infinita de números entre 0 e 1. (...) Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2 ou entre o 0 e o 1 milhão";
    - "você não imagina o tamanho da minha gratidão pelo nosso pequeno infinito. (...) Você me deu uma eternidade dentro dos nossos dias numerados".
- *Encerramento:* o encontro será encerrado com uma breve apresentação do que se espera que seja discutido no encontro seguinte e considerações finais dos participantes.

2. Segundo encontro: dia 23/02/2021 às 16h
    - 2.1. Objetivo: Iniciar as discussões sobre noções de infinito.
    - 2.2. Tempo necessário: cerca de 60 minutos.
    - 2.3. Material necessário aos participantes: computador ou celular com acesso à internet, para que possam acessar a sala de bate papo.
    - 2.4. Divisão do encontro:

- *Introdução:* breve explicação sobre o que será discutido no encontro. Como no encontro anterior um dos assuntos que surgiu foi “O que é a matemática?”, podemos começar o encontro perguntando a eles o que eles entendem por matemática e o que eles entendem por infinito. Então, como motivação, pode ser apresentada a tela com o seguinte trecho do livro: “Alguns infinitos são maiores que outros".
- *Discussão sobre infinitos maiores que outros:* Podemos perguntar aos participantes se eles concordam com a frase “alguns infinitos são maiores que outros” e pedir que expliquem suas respostas. Espera-se que, a partir daí, se inicie um debate sobre o assunto. Caso os participantes não respondam, pode-se apresentar a eles um problema motivador:
    - “A seguinte questão foi apresentada em uma sala de aula: ‘Qual dos seguintes conjuntos possui maior cardinalidade?
      A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...} ou B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}?’ O aluno Gustavo respondeu o seguinte: ‘Claramente, o conjunto B é muito maior. No conjunto A, entre o 1 e o 3, fica faltando o 2; entre o 3 e o 5, falta o 4, e assim por diante. Então, como no conjunto A faltam os números pares, B tem mais elementos.’ A resposta do aluno está correta? Se sim, por quê? Se não, por quê?”

  Caso após a motivação se julgue necessário, podemos perguntar a eles sobre os conjuntos numéricos e suas cardinalidades: os conjuntos dos números naturais e inteiros possuem a mesma quantidade de números? E os conjuntos dos números naturais e racionais? E dos naturais e reais? Então, podemos incentivá-los a compreender a ideia de bijeção com os números naturais para poder entender as ideias de cardinalidade e de infinitos com cardinalidades diferentes. Caso a discussão se inicie sem necessidade da motivação, podemos deixar que os participantes debatam sobre a questão e cheguem às próprias conclusões.
- Espera-se que durante a discussão os participantes abordem as ideias de cardinalidade de conjuntos infinitos e bijeção com o conjunto dos naturais.

- *Encerramento:* o encontro será encerrado com uma breve apresentação do que se espera que seja discutido no encontro seguinte e considerações finais dos participantes.

3. Terceiro encontro: dia 26/02/2021 às 16h

Objetivo: Continuar as discussões sobre noções de infinito.

Tempo necessário: cerca de 60 minutos.

Material necessário aos participantes: computador ou celular com acesso à internet, para que possam acessar a sala de bate papo.

Divisão do encontro:

- *Introdução:* breve explicação sobre o que será discutido no encontro. Como motivação, pode ser apresentada a tela com o seguinte trecho do livro: “existe uma quantidade infinita de números entre 0 e 1. (...) Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2 ou entre o 0 e o 1 milhão”.
- *Discussão sobre infinitos maiores que outros:* Como nos encontros anteriores foi discutido sobre essa afirmação, podemos iniciar o debate desse encontro perguntando se eles concordam com a frase apresentada e pedir que justifiquem suas respostas. Podemos perguntar também como podemos explicar que há mais números entre 0 e 2 do que entre 0 e 1. Espera-se que, a partir daí, se inicie um debate sobre o assunto. Casa o debate não se inicie sozinho, podemos apresentar a eles a seguinte motivação:
    - “Manuela e Pedro estavam discutindo sobre os conjuntos dos intervalos [0,1] e [0,2]. Manuela defendia que infinitos são todos iguais, logo os dois conjuntos eram igualmente infinitos. Pedro dizia que os dois eram diferentes, pois bastava colocar 0, 1 e 2 na reta numerada e ver que a distância do 0 ao 1 é menor que a distância de 0 a 2 (imagem da reta numérica). Pedro perguntou: ‘Mas e sem olhar no desenho?’ e Manuela respondeu: ‘Entre o 1 e o 2, tem mais um conjunto [1, 2], então o conjunto [0, 2] pode ser visto como o conjunto [0, 1] mais ou conjunto [0, 2], então [0, 2] é maior que [0, 1]’. Quem estava certo nessa discussão? E por quê?”

  - Caso após a motivação julguemos necessário, podemos apresentar a eles o problema do Hotel de Hilbert, a partir do seguinte link: http://clubes.obmep.org.br/blog/desafio-hotel-de-hilbert/. A partir disso, podemos apresentar também um vídeo que explique o problema (por exemplo: https://www.youtube.com/watch?v=MmjuftaX4Bo). Caso a discussão se inicie sem necessidade da motivação, podemos deixar que os participantes debatam sobre a questão e, ao final da discussão, apresentar o problema do Hotel de Hilbert e perguntar a eles o que acham do problema. Quanto maior a contribuição dos participantes, melhor para a pesquisa.
- *Apresentação do trecho de um livro didático:* Apresentar aos participantes a imagem de um trecho de livro didático que fala sobre a matemática no livro *A culpa é das estrelas* e pedir que eles deem suas opiniões sobre o que está sendo abordado.
  - Texto da imagem: "Você já leu o livro ou assistiu ao filme *A culpa é das estrelas*? A culpa é das estrelas conta a história de dois jovens enfermos. No entanto, isso não impede que eles vivam uma história de amor. E quem disse que em um romance a matemática não está presente? Em uma passagem emocionante, a personagem Hazel Grace faz um discurso comparando os possíveis tamanhos de infinito. Ela questiona a quantidade de números entre 0 e 1 e, posteriormente, percebe que existem mais números entre 0 e 2. Ela chega à conclusão de que existem diferentes tamanhos de infinito e que uma vida curta não é, necessariamente, menos intensa que uma longa."
- Espera-se que durante a discussão os participantes abordem as ideias de cardinalidade de conjuntos infinitos e bijeção com o conjunto dos números naturais para justificar que os conjuntos [0, 1], [0, 2] e [0, 1000000] possuem a mesma cardinalidade.
- *Encerramento:* o encontro será encerrado com uma breve apresentação do que se espera que seja discutido no encontro seguinte e considerações finais dos participantes.

4. Quarto encontro: dia 05/03/2021 às 17h
    4.1. Objetivo: Discutir sobre a abordagem em sala de aula dos assuntos tratados nos encontros anteriores e sobre a utilização de livros de literatura juvenil no ensino de matemática.
    4.2. Tempo necessário: cerca de 60 minutos.
    4.3. Material necessário aos participantes: computador ou celular com acesso à internet, para que possam acessar a sala de bate papo.
    4.4. Divisão do encontro:
        - *Introdução:* breve explicação do que será discutido no encontro – a abordagem em sala de aula das noções de infinito geradas pela leitura do livro, os saberes necessários ao professor para poder realizar essa abordagem e como utilizar obras da literatura juvenil no ensino de matemática, a partir de uma interdisciplinaridade com a disciplina de Língua Portuguesa.
        - *Discussão sobre abordagem em sala de aula de noções de infinito:* Podemos fazer as seguintes perguntas aos participantes: "Como podemos abordar em sala de aula as noções de infinito presentes no livro? Quais dessas noções são vistas (mesmo que implicitamente) no ensino básico? Que relação podemos fazer entre os assuntos vistos nos encontros e os que os alunos veem nas aulas de matemática?" Deixamos que os participantes discutam sobre essas questões e, então, perguntamos quais os saberes necessários ao professor para poder abordar essas noções de infinito em sala de aula.
        - *Discussão sobre o uso da literatura juvenil no ensino de matemática:* Pedimos aos participantes que nos contem se já tiveram experiências em sala de aula (como professor ou como aluno) com literatura e matemática sendo vistas simultaneamente, e como eles acham que o uso da literatura pode ser benéfico (ou não) para o ensino de matemática. Como também haverá participantes docentes de língua portuguesa, podemos pedir que todos discutam como poderia ser feita essa utilização dos livros de maneira interdisciplinar

e se eles consideram que seria algo construtivo ou não ao ensino de matemática, e por quê.

- *Encerramento:* o encontro será encerrado com as considerações finais dos participantes e agradecimento por terem participado da oficina.