



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática  
Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física

**Uma investigação em Relatividade Geral através de um curso  
introdutório para o Ensino Médio**

Rodrigo Rodrigues Machado

Rio de Janeiro  
Agosto de 2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática  
Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física

**Uma investigação em Relatividade Geral através de um curso  
introdutório para o Ensino Médio**

Rodrigo Rodrigues Machado

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

Orientadores:  
Alexandre Carlos Tort  
Carlos Augusto Domingues Zarro

Rio de Janeiro  
Agosto de 2024

## FICHA CATALOGRÁFICA

M149u Machado, Rodrigo Rodrigues

Uma investigação em Relatividade Geral através de um curso introdutório para o Ensino Médio / Rodrigo Rodrigues Machado.  
– Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2024.

xv, 324 f. : il. ; 30 cm.

Orientadores: Alexandre Carlos Tort; Carlos Augusto Domingues Zarro.

Tese de Doutorado – UFRJ / Instituto de Matemática / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2024.

Referências Bibliográficas: f. 316-324.

1. Ensino de Física. 2. Ensino de Relatividade Geral. 3. Física Moderna. I. Tort, Alexandre Carlos. II. Zarro, Carlos Augusto Domingues. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. IV. Uma investigação em Relatividade Geral através de um curso introdutório para o Ensino Médio.

# **Uma investigação em Relatividade Geral através de um curso introdutório para o Ensino Médio**

Rodrigo Rodrigues Machado

Orientadores:  
Alexandre Carlos Tort  
Carlos Augusto Domingues Zarro

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física. Aprovada por:

---

Prof. Dr. Alexandre Carlos Tort, UFRJ Prof. Dr. Ildeu de Castro Moreira, UFRJ  
(Presidente)

---

Prof. Dr. Carlos Augusto Domingues Zarro, UFRJ (Orientador) Prof. Dr. Sérgio Eduardo Silva Duarte, CEFET-RJ

---

Profa. Dra. Beatriz Blanco Siffert, UFRJ Prof. Dr. Nelson Studart Filho, UFABC

---

Prof. Dr. Ribamar Rondon de Rezende dos Reis, UFRJ

Rio de Janeiro  
Agosto de 2024

The most incomprehensible thing  
about the world is that it is at all  
comprehensible.

---

Albert Einstein

## **Agradecimentos**

Primeiramente agradeço a Deus e a Nossa Senhora Aparecida por toda ajuda espiritual, creio que sem essa ajuda não teria conseguido completar este trabalho;

À minha mãe Maria Aurora, ao meu pai Artur e ao meu irmão Artur pelo apoio incondicional em todos os momentos;

À Mariana pela ajuda durante a escrita da tese e pelo carinho ao longo dos anos;

Ao amigo de longa data Diego, a Alessandra e a pequena Mayara (futura vascaína) por todo o incentivo e ajuda;

À Beatriz Siffert por toda a sua contribuição e atenção para o aperfeiçoamento da tese, do texto de apoio e do instrumento de pesquisa;

Ao Carlos Eduardo Aguiar por servir de inspiração no estudo da física e na atuação como professor. Agradeço também todas as sugestões feitas para o aperfeiçoamento do instrumento de pesquisa;

Aos amigos do Cefet/RJ Alcina Maria, Alfredo Sotto, Andreia Guerra, Cleide Silva, Daniel Sasaki, Elika Takimoto, Emílio Nunez, Hermann Schiffer, Maria Helena Franco (in memorian), Nathan Lima, Joel Medeiros, Juliana Machado, Júlio Campagnolo, Marco Braga, Sérgio Argollo, Sérgio Duarte e Wagner de Souza;

Aos amigos do mestrado, Artur Gomes, Fausto Ferreira, Jonatas Lago (in memorian), Lucas Porto Alegre, Marcos Moura, Mariana Francisquini, Paulo Henrique e Samuel Ximenes que foram fundamentais para o ingresso no doutorado;

Aos amigos do doutorado Abudo, Aline, Camila, Erasto, Fábio, Hugo, Magno, Marcos Martinho, Otávio, Rafael, Raquel e Rodrigo;

Aos docentes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PEMAT/UFRJ);

Aos meus alunos com um agradecimento especial para as turmas 4AEL e 4AELET que me incentivaram e ajudaram nessa pesquisa;

Aos docentes Beatriz Blanco Siffert, Nelson Studart Filho, Ildeu de Castro Moreira, Sérgio Eduardo Silva Duarte e Ribamar Rondon de Rezende dos Reis por terem gentilmente aceitado fazer parte desta banca e contribuído com o trabalho;

Aos meus orientadores Alexandre Carlos Tort e Carlos Augusto Domingues Zarro por toda a ajuda durante a elaboração da tese, vocês são fonte de inspiração na física, na profissão docente e como ser humano.

## **RESUMO**

### **Uma investigação em Relatividade Geral através de um curso introdutório para o Ensino Médio**

Rodrigo Rodrigues Machado

Orientadores:

Alexandre Carlos Tort  
Carlos Augusto Domingues Zarro

Resumo da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

Os temas de Física Moderna e Contemporânea (FMC) têm cada vez mais chamado a atenção e despertado a curiosidade de estudantes do ensino secundário. Esse crescente interesse traz reflexões ao docente em sala de aula sobre como discutir os tópicos de FMC, de tal modo a evitar a desinformação e, também, uma simplificação excessiva de conceitos e ideias centrais contidas na teoria. Dentre os diversos assuntos que podem ser trabalhados em uma introdução à FMC, esta tese pretende contribuir com uma introdução à Teoria da Relatividade Geral (TRG) compatível com o Ensino Médio brasileiro. Com esta introdução pretendemos investigar, após um curso introdutório de TRG, quais concepções dos estudantes não estão de acordo com as concepções padrão da Física. A introdução da TRG no ensino secundário representa um grande desafio para os docentes devido à complexidade matemática da teoria e, também, devido à relação entrelaçada entre o formalismo matemático e a parte conceitual. Dessa forma, a nossa pesquisa iniciou com a leitura de trabalhos que apresentaram uma discussão da TRG no ensino secundário e iniciativas no ensino superior. O quantitativo de trabalhos sobre o ensino da TRG aumentou significativamente após a detecção das ondas gravitacionais em 2016 e, também, com a obtenção da primeira imagem de um buraco negro em 2019. Dessa forma, após essa revisão estabelecemos uma proposta de ensino para a TRG por meio da construção de um texto de apoio (Apêndice A). Além disso, trabalhamos na construção de três artigos já publicados sobre temas relacionados à TRG que versam sobre as forças de maré, o princípio da equivalência e a precessão do periélio de Mercúrio. Após essa etapa, iniciamos a construção de um instrumento

de pesquisa (Apêndice C) para que pudéssemos sondar as concepções dos estudantes. A construção do instrumento de pesquisa se apoiou no famoso livro de divulgação da Teoria da Relatividade escrito por Albert Einstein e em artigos sobre o ensino da TRG. A metodologia utilizada para a avaliação do instrumento de pesquisa foi a Análise de Conteúdo de Laurence Bardin. Essa análise permitiu-nos inferir que as dificuldades no ensino da TRG vêm de concepções alternativas de domínios antecedentes, do uso acrítico de conhecimentos prévios e de negligência a detalhes conceituais mais refinados em certos domínios da Física.

Palavras chave: Ensino de Física, Ensino de Relatividade Geral, Física Moderna.

Rio de Janeiro  
Agosto de 2024

## **ABSTRACT**

### **An investigation into General Relativity through an introductory high school course**

Rodrigo Rodrigues Machado

Supervisors:

Alexandre Carlos Tort  
Carlos Augusto Domingues Zarro

Abstract of doctor's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

The themes of Modern and Contemporary Physics (MCP) have increasingly attracted the attention and aroused the curiosity of secondary school students. This growing interest brings out reflections to the teacher in the classroom on how to discuss MCP topics, in such a way as to avoid misinformation and, also, an excessive simplification of central concepts and ideas contained in the theory. Among the various subjects that can be covered in an introduction to MCP, this thesis intends to contribute with an introduction to the Theory of General Relativity (TGR) compatible with Brazilian High School. With this introduction we intend to investigate, after an introductory TGR course, which students' conceptions are not in accordance with the standard conceptions of Physics. The introduction of TGR in secondary education represents a great challenge for teachers due to the mathematical complexity of the theory and also due to the intertwined relationship between mathematical formalism and the conceptual part. Therefore, our research began with reading works that presented a discussion of TGR in secondary education and some initiatives in higher education. The number of works on teaching TGR increased significantly after the detection of gravitational waves in 2016 and also with the obtaining of the first image of a black hole in 2019. Therefore, after this review, we established a teaching proposal for TGR through the construction of a supporting text (Appendix A). In addition, we worked on the construction of three articles already published on topics related to the TGR that deal with tidal forces, the principle of equivalence and the precession of Mercury's perihelion. After this stage, we began the construction of a research instrument (Appendix C) so that we could

probe the students' conceptions. The construction of the research instrument was based on the famous book promoting the Theory of Relativity written by Albert Einstein and on articles about the teaching of TGR. The methodology used to evaluate the research instrument was Laurence Bardin's Content Analysis. This analysis allowed us to infer that the difficulties in teaching TGR come from alternative conceptions of antecedent domains, the uncritical use of prior knowledge and the negligence about refined conceptual details in certain domains of Physics.

Keywords: Physics Education, General Relativity Teaching, Modern Physics.

Rio de Janeiro  
Agosto de 2024

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão de Literatura</b>	<b>14</b>
2.1	Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio . . . . .	15
2.2	Iniciativas para a inserção da Teoria da Relatividade Geral no mundo . . . . .	17
2.2.1	Trabalhos anteriores ao ano de 2017 . . . . .	17
2.2.2	Trabalhos a partir do ano de 2017 . . . . .	27
2.3	Iniciativas para a inserção da Teoria da Relatividade Geral no Brasil . . . . .	45
2.4	Principais abordagens para o ensino da Teoria da Relatividade Geral . . . . .	51
2.4.1	Princípios da Teoria da Relatividade . . . . .	51
2.4.2	Espaço-tempo curvo . . . . .	54
2.4.2.1	Analogia do tecido elástico . . . . .	55
2.4.2.2	Perspectiva geométrica . . . . .	58
2.4.2.3	Modelo de tempo . . . . .	61
2.4.2.4	Modelo de setor . . . . .	62
2.4.3	Significado métrico das coordenadas . . . . .	67
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>69</b>
3.1	Descrição do local de pesquisa e duração da aplicação da proposta de ensino de TRG . . . . .	70
3.2	Conectando a abordagem utilizada com a literatura especializada . . . . .	72
3.2.1	Construção do texto de apoio para o ensino de TRG . . . . .	72
3.2.2	Conteúdo e descrição das aulas de TRG . . . . .	78
3.3	Construção do instrumento de pesquisa . . . . .	79
3.3.1	Diferença entre descrever os fenômenos físicos e descrever as leis físicas . . . . .	79
3.3.2	A insatisfação de Einstein e a sua busca pelo PRG . . . . .	81
3.3.3	A notável propriedade do campo gravitacional . . . . .	82
3.3.4	Diferença entre a massa inercial e a massa gravitacional . . . . .	83
3.3.5	Interpretação física para a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional . . . . .	84
3.3.6	O PE como um poderoso argumento a favor do PRG . . . . .	85
3.3.7	O PE como argumento para a deflexão da luz . . . . .	85

3.3.8	O PE e o pensamento mais feliz da vida de Einstein . . . . .	86
3.3.9	O funcionamento de relógios em campos gravitacionais . . . . .	88
3.3.10	A perda de significado métrico das coordenadas e a importância da métrica do espaço-tempo . . . . .	88
3.3.11	O uso da métrica e a interpretação do funcionamento de relógios em um campo gravitacional . . . . .	88
3.3.12	Observadores estacionários e o cone de luz . . . . .	89
3.4	Coleta de dados de pesquisa . . . . .	89
3.5	Análise de Conteúdo como metodologia para análise dos dados . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Resultados e Análise</b>	<b>93</b>
4.1	Introdução . . . . .	93
4.2	Resultados e análise das questões 1 até 4 . . . . .	94
4.2.1	Descrever os fenômenos físicos e descrever as leis Física . . . . .	94
4.2.1.1	Questões 1 e 2 . . . . .	94
4.2.1.2	Questões 3 e 4 . . . . .	99
4.2.1.3	Análise acerca da necessidade ou não de confirmação experimental nas questões 1, 2, 3 e 4 . . . . .	103
4.3	Resultados e análise das questões 5 até 9 . . . . .	105
4.3.1	A insatisfação de Einstein e a sua busca pelo Princípio da Relatividade Geral . . . . .	105
4.3.1.1	Questão 5 . . . . .	105
4.3.2	A notável propriedade do campo gravitacional . . . . .	108
4.3.2.1	Questão 6 . . . . .	108
4.3.3	Diferença entre a massa inercial e a massa gravitacional . . . . .	109
4.3.3.1	Questão 7 . . . . .	109
4.3.4	Interpretação física para a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional . . . . .	112
4.3.4.1	Questão 8 . . . . .	112
4.3.5	O princípio da equivalência como um poderoso argumento a favor do princípio da relatividade geral . . . . .	114
4.3.5.1	Questão 9 . . . . .	114
4.4	Resultados e análise questões 10 e 11 . . . . .	116
4.4.1	O princípio da equivalência como argumento para a deflexão da luz . . . . .	116
4.4.1.1	Questão 10 . . . . .	117
4.4.1.2	Questão 11 . . . . .	118
4.5	Resultados e análise questões 12 e 13 . . . . .	120
4.5.1	O princípio da equivalência e o pensamento mais feliz da vida de Einstein . . . . .	120
4.5.1.1	Questão 12 . . . . .	120
4.5.1.2	Questão 13 . . . . .	122
4.6	Resultados e análise questões 14 até 19 . . . . .	124

4.6.1	O funcionamento de relógios em campos gravitacionais . . . . .	124
4.6.1.1	Questão 14 . . . . .	124
4.6.2	A perda de significado métrico das coordenadas . . . . .	129
4.6.2.1	Questão 15 . . . . .	129
4.6.3	O uso da métrica e a interpretação do funcionamento de relógios em um campo gravitacional . . . . .	132
4.6.3.1	Questões 16 até 19 . . . . .	132
4.7	Resultados e análise questões 20 e 21 . . . . .	133
4.7.1	Buracos Negros . . . . .	133
4.7.1.1	Questão 20 . . . . .	133
4.7.1.2	Questão 21 . . . . .	135
4.8	Artigos publicados . . . . .	137
4.9	Discussões e respostas às perguntas de pesquisa . . . . .	139
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>144</b>
<b>A</b>	<b>Uma introdução à Teoria da Relatividade Restrita e Geral para o Ensino Médio</b>	<b>149</b>
A.1	Introdução ao texto . . . . .	149
A.2	A Teoria da Relatividade Restrita: postulados e suas implicações . . . . .	150
A.2.1	Os postulados da Teoria da Relatividade Restrita (TRR) . . . . .	150
A.2.1.1	Eventos . . . . .	151
A.2.1.2	Medições . . . . .	152
A.2.1.3	Sincronização dos relógios . . . . .	152
A.2.2	A relatividade do tempo: simultaneidade . . . . .	152
A.2.3	A dilatação do tempo . . . . .	157
A.2.4	A contração de Lorentz . . . . .	162
A.2.5	As Transformações de Lorentz . . . . .	166
A.2.5.1	Dilatação do tempo revisitado . . . . .	169
A.2.5.2	Contração de Lorentz revisitado . . . . .	169
A.2.5.3	Transformações de Lorentz para a velocidade . . . . .	171
A.2.6	Efeito Doppler . . . . .	173
A.2.7	Momento linear e energia . . . . .	175
A.2.7.1	Momento linear relativístico . . . . .	175
A.2.7.2	Energia relativística . . . . .	176
A.3	Os intervalos invariantes e os diagramas espaço-tempo. . . . .	180
A.3.1	Intervalo invariante . . . . .	180
A.3.1.1	Intervalo tipo tempo: $\Delta s^2 < 0$ . . . . .	181
A.3.1.2	Intervalo tipo espaço: $\Delta s^2 > 0$ . . . . .	182
A.3.1.3	Intervalo tipo luz: $\Delta s^2 = 0$ . . . . .	182
A.3.2	Os diagramas espaço-tempo . . . . .	183
A.4	Coordenadas e a geometria não-euclidiana . . . . .	187
A.4.1	Coordenadas Cartesianas . . . . .	187

A.4.2	Coordenadas Polares . . . . .	188
A.4.3	Coordenadas esféricas . . . . .	189
A.4.4	Geometria plana . . . . .	191
A.4.5	Geometria esférica . . . . .	192
	A.4.5.1 Geodésicas . . . . .	195
A.4.6	Curvatura . . . . .	195
	A.4.6.1 Espaço plano local . . . . .	197
A.5	A Teoria da Relatividade Geral (TRG) . . . . .	198
	A.5.1 Introdução . . . . .	198
	A.5.2 Princípios da Relatividade Geral . . . . .	200
	A.5.2.1 A busca do princípio da relatividade geral . . . . .	200
	A.5.2.2 O Princípio da Equivalência . . . . .	202
	A.5.2.3 Princípio da Equivalência em termos dos referenciais em queda livre . . . . .	208
	A.5.2.4 Princípio da equivalência na sua forma forte . . . . .	211
	A.5.2.5 Princípio da Consistência (ou Correspondência) . .	212
	A.5.3 Desvio Gravitacional para o vermelho . . . . .	212
	A.5.4 Deflexão da trajetória da luz em um campo gravitacional . .	217
	A.5.5 Espaço-tempo curvo . . . . .	219
	A.5.5.1 Plataforma girante e o espaço-curvo. . . . .	219
	A.5.5.2 Relação entre o desvio gravitacional para o vermelho e a curvatura . . . . .	222
	A.5.5.3 Princípio da Relatividade Geral (PRG) na sua versão final e o Princípio da Covariância Geral (PCG) . . . . .	222
	A.5.6 As equações de Einstein . . . . .	227
A.6	Os Buracos Negros . . . . .	227
	A.6.1 Introdução . . . . .	227
	A.6.2 Formação de Buracos Negros . . . . .	230
	A.6.3 Descrição de Buracos Negros . . . . .	231
	A.6.4 Buraco negro de Schwarzschild . . . . .	233
	A.6.5 Interpretação das coordenadas de Schwarzschild . . . . .	237
	A.6.5.1 Distância própria ( $\Delta\sigma$ ) . . . . .	241
	A.6.5.2 Tempo próprio ( $\Delta\tau$ ) . . . . .	242
	A.6.6 Testes clássicos da TRG . . . . .	243
	A.6.6.1 O desvio gravitacional para o vermelho utilizando a métrica de Schwarzschild . . . . .	244
	A.6.6.2 A precessão do periélio da órbita de Mercúrio . . . . .	245
	A.6.6.3 Deflexão da Luz e o Eclipse do Sol . . . . .	248
	A.6.7 Trajetórias de raios de luz . . . . .	250
	A.6.8 Pense Globalmente e Meça Localmente . . . . .	253

<b>B</b>	<b>Uma introdução à Relatividade Restrita e à Relatividade Geral para o Ensino Médio - Resumo</b>	<b>255</b>
B.1	Relatividade restrita (RR): postulados e suas implicações . . . . .	255
B.1.1	Os postulados da teoria da relatividade restrita . . . . .	255
B.1.2	Simultaneidade, dilatação do tempo e contração do comprimento	255
B.1.3	As Transformações de Lorentz . . . . .	256
B.1.3.1	Transformações de Lorentz para a velocidade . . . . .	257
B.1.4	Efeito Doppler . . . . .	258
B.1.5	Momento linear e energia . . . . .	259
B.1.5.1	Momento linear relativístico . . . . .	259
B.1.5.2	Energia relativística . . . . .	260
B.2	Os intervalos invariantes e os diagramas espaço-tempo. . . . .	260
B.2.1	Intervalo invariante . . . . .	260
B.2.2	Os diagramas espaço-tempo . . . . .	261
B.3	Coordenadas e a geometria não-euclidiana . . . . .	263
B.3.1	Coordenadas Cartesianas . . . . .	263
B.3.2	Coordenadas Polares . . . . .	264
B.3.3	Coordenadas esféricas . . . . .	265
B.3.4	Geometria plana . . . . .	266
B.3.5	Geometria esférica . . . . .	266
B.3.5.1	Geodésicas . . . . .	268
B.4	A Teoria da Relatividade Geral (TRG) . . . . .	271
B.4.1	Introdução . . . . .	271
B.4.2	Princípios da Relatividade Geral . . . . .	271
B.4.2.1	A busca do princípio da relatividade geral . . . . .	271
B.4.2.2	O Princípio da Equivalência . . . . .	272
B.4.2.3	Princípio da Equivalência em termos dos referenciais em queda livre . . . . .	274
B.4.2.4	Princípio da equivalência na sua forma forte . . . . .	275
B.4.2.5	Princípio da Consistência (ou Correspondência) . .	275
B.4.3	Desvio Gravitacional para o vermelho . . . . .	275
B.4.4	Deflexão da trajetória da luz em um campo gravitacional . .	278
B.4.5	Espaço-tempo curvo . . . . .	280
B.4.5.1	Plataforma girante e o espaço-curvo. . . . .	280
B.4.6	As equações de Einstein . . . . .	281
B.5	Os Buracos Negros . . . . .	281
B.5.1	Introdução . . . . .	281
B.5.2	Formação de Buracos Negros . . . . .	282
B.5.3	Descrição de Buracos Negros . . . . .	282
B.5.4	Buraco negro de Schwarzschild . . . . .	283
B.5.4.1	Tempo próprio . . . . .	284
B.5.5	Testes clássicos da TRG . . . . .	285

B.5.5.1	O desvio gravitacional para o vermelho utilizando a métrica de Schwarzschild . . . . .	285
B.5.5.2	A precessão do periélio da órbita de Mercúrio . . . .	287
B.5.5.3	Deflexão da Luz e o Eclipse do Sol . . . . .	289
B.5.6	Trajetórias de raios de luz . . . . .	290
<b>C</b>	<b>Instrumento de Pesquisa</b>	<b>294</b>
<b>D</b>	<b>Iniciativas em um curso de Licenciatura em Física</b>	<b>314</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>316</b>

# Capítulo 1

## Introdução

*Se, usando a imagem de Arthur Koestler, considerarmos Copérnico, Kepler e Newton como sonâmbulos que sabiam para onde queriam ir e que conseguiram chegar lá sem saber exatamente como, então Einstein foi o maior sonâmbulo de todos eles.*

---

*(Ohanian e Ruffini, 2013, p.ix)*

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) é um grande marco da Física teórica (EINSTEIN, 1915), (WHEELER; MISNER; THORNE, 1973), (D'INVERNO, 1999), (OHAHANIAN; RUFFINI, 2013). Publicada na sua versão final em 1915, por Albert Einstein, esta é uma teoria da gravitação que descreve o espaço-tempo curvo e o movimento de um corpo na vizinhança de um objeto massivo como, por exemplo, uma estrela, uma galáxia ou um buraco negro (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p.1-1). Entretanto, podemos voltar um pouco no tempo e traçar as origens da TRG à insatisfação de Einstein com o status privilegiado que os referenciais inerciais apresentavam na Teoria da Relatividade Restrita (TRR) e na Mecânica Newtoniana (MN). Além disso, também podemos traçar as origens da TRG às incompatibilidades entre a gravitação newtoniana e a TRR; mais precisamente, ao problema da interação instantânea embutida na lei da gravitação universal de Newton e à questão da simultaneidade.

Einstein, em seu famoso livro de divulgação da Teoria da Relatividade (TR) (EINSTEIN, 1999), mostra de maneira inequívoca seu descontentamento com o status privilegiado dos referenciais inerciais. A ideia desse descontentamento segue o seguinte

raciocínio: sempre que desejamos descrever o movimento de um objeto escolhemos, por exemplo, um corpo rígido como um vagão que se move sobre o leito de uma ferrovia, ao qual fixamos um eixo de coordenadas. Além disso, também escolhemos observadores munidos de réguas e relógios para realizarem as medidas necessárias. Einstein argumenta que se quisermos descrever o movimento de um corpo é indiferente se o referencial adotado para tal descrição é inercial ou não-inercial, no sentido newtoniano. Entretanto, se quisermos determinar as leis da Física em um determinado referencial, elas assumem suas formas mais simples se escolhermos os referenciais inerciais.

As transformações de coordenadas entre referenciais inerciais em movimento relativo, mais precisamente as transformações de Galileu, no caso da MN, e as transformações de Lorentz, no caso da TRR, asseguram a simplicidade das leis físicas para esses referenciais. Nos referenciais não-inerciais ocorre o aparecimento de forças ditas de inércia, como, por exemplo, a força centrífuga e a força de Coriolis, que violam a terceira lei de Newton e modificam a dinâmica, tornando-a, algumas vezes, mais complexa. No entanto, para Einstein, essa condição privilegiada atribuída aos referenciais inerciais é injustificável e ele demonstra claramente sua insatisfação. Em suas palavras:

“Como é possível que determinados corpos de referência (ou bem seus estados de movimento) sejam privilegiados frente a outros (ou frente a seus estados de movimento respectivos)? Qual é a razão desse privilégio?” (EINSTEIN, 1999, p. 62)

Einstein, então, propõe o chamado Princípio da Relatividade Geral (PRG), que pretende estender o Princípio da Relatividade Restrita (PRR) incorporando os referenciais não-inerciais em seu enunciado. Podemos enunciar o PRG da seguinte forma:

“As leis da natureza são válidas para todos os referenciais, quaisquer que sejam seus estados de movimento.” (EINSTEIN, 1999, p. 54)

Esse caminho trilhado por Einstein irá guiá-lo na percepção da estreita relação entre geometria e gravitação. Essa conexão é feita através do Princípio da Equivalência (PE), que teve um papel heurístico importante para Einstein em sua jornada na construção da TRG (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 139).

Com o intuito de contextualizar o presente trabalho, é fundamental que revisitemos as definições de massa na MN. Na MN, reconhecemos dois tipos de massa, a saber: a massa inercial e a massa gravitacional. A massa inercial é interpretada como uma medida da propriedade de inércia de um corpo, isto é: está associada à resistência que um

corpo oferece a qualquer tentativa de alteração do seu estado de movimento. A massa gravitacional, por sua vez, é interpretada como a fonte de campo gravitacional, ou seja, representa o análogo gravitacional da carga elétrica. A primeira aparece na segunda Lei de Newton e a segunda na Lei da Gravitação Universal. O que é interessante notarmos é que apesar da massa inercial e da massa gravitacional serem conceitualmente distintas, os experimentos mostram que são diretamente proporcionais. Normalmente, escolhemos a constante de proporcionalidade igual à unidade e estabelecemos a igualdade entre elas. Este fato na MN é uma notável coincidência, pois não é explicável dentro da estrutura desta teoria. Experimentos realizados pelos físicos Galileu Galilei, Isaac Newton, Barão Loránd von Eötvös, R. H. Dicke e, mais recentemente, S. Schlamminger confirmam a igualdade entre essas massas (OHANIAN; RUFFINI, 2013, p. 21).

Einstein, ao enunciar o PE, fornecerá pela primeira vez uma interpretação física para a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional. Para tal, ele utiliza o PE na sua *forma fraca*, cujo enunciado afirma que um referencial em “repouso” (não acelerado) sob a ação de um campo gravitacional uniforme é equivalente (indistinguível frente a quaisquer experiências no domínio da Mecânica) a um referencial uniformemente acelerado na mesma direção e em sentido oposto ao do campo gravitacional. A equivalência mencionada segue da observação experimental de que a aceleração que um corpo adquire em queda livre é independente da sua massa inercial e da sua constituição interna. Einstein chama o resultado anterior de propriedade extremamente notável do campo gravitacional (EINSTEIN, 1999, p. 57). O PE aplicado à MN leva à igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional. Einstein, posteriormente, generaliza o PE e propõe o seguinte argumento: “supõe-se o PE como um princípio fundamental da natureza, sendo válido para todos os domínios da Física - chamada de *forma forte* do PE”. O PE na sua *forma forte* possibilita-lhe prever novos fenômenos como a deflexão da luz num campo gravitacional e o desvio gravitacional para o vermelho (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 139). Ressalta-se que também é possível reescrever o PE em termos dos referenciais em queda livre, e enunciá-lo da seguinte forma:

“Um referencial não-girante em queda livre em um campo gravitacional uniforme é equivalente (nenhuma experiência pode distinguir) a um referencial inercial na ausência de gravidade.”

Esta forma de enunciar o PE apresenta uma interpretação interessante na TRG, po-

réim é totalmente equivalente às demais formulações do princípio feitas anteriormente. Assim, para um referencial em queda livre é como se a gravidade tivesse desaparecido, pois os efeitos mensuráveis no referencial em queda livre são idênticos aos efeitos mensuráveis em um referencial em movimento uniforme no espaço livre (sem gravidade). Destacamos, ainda, que quando o campo gravitacional é não-uniforme o PE tem validade apenas local, onde o campo gravitacional não apresenta uma variação apreciável. Em um campo gravitacional não-uniforme, um corpo em queda livre, em princípio, estará sujeito às forças de maré que indicariam presença de efeitos gravitacionais (MACHADO; TORT; ZARRO, 2020). A importância do PE está no fato de que por meio dele, Einstein se dá conta da conexão entre a gravitação e a geometria dos espaços curvos, a chamada geometria de Riemann. Assim, Einstein inicia a sua épica jornada pela geometrização da gravitação. Ao final de 1915, em quatro sessões na Academia Prussiana de Ciências, Einstein corrige as três versões anteriores e, na última sessão, enuncia a forma final das equações de campo da TRG, hoje conhecidas como *equações de campo de Einstein*. Essas equações estabelecem uma relação entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de matéria e energia. Podemos sintetizar o conteúdo da forma final da TRG da seguinte forma:

GEOMETRIA DO ESPAÇO-TEMPO  $\propto$  DISTRIBUIÇÃO DE MATÉRIA E ENERGIA.

O nível de complexidade matemático exigido na busca de soluções para estas equações é elevado. Por isso, no nível em que estamos interessados em trabalhar, nos basearemos nas soluções já obtidas. As soluções destas equações nos dão a *métrica do espaço-tempo*, isto é: a separação espaço-temporal entre dois eventos. A partir dela, muitas consequências físicas relevantes podem ser obtidas. Portanto, deixaremos de lado qualquer tentativa de obter soluções das equações de Einstein e centraremos nossa atenção nas suas soluções, em particular na solução de Schwarzschild. Em 1916, Karl Schwarzschild obteve a primeira e talvez a mais importante solução exata das equações de Einstein. Essa solução, que leva à métrica de Schwarzschild, é válida para o caso em que temos uma massa central esférica, no vácuo,  $M$  não-girante e eletricamente neutra. O resultado obtido, ou simplesmente, *métrica de Schwarzschild* pode ser escrito na forma:

$$c^2 (\Delta\tau)^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 (\Delta t)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} (\Delta r)^2 - r^2 \sin^2 \theta (\Delta\phi)^2 - r^2 (\Delta\theta)^2,$$

onde  $\Delta\tau$  é o tempo próprio<sup>1</sup>,  $c$  é a velocidade da luz e os parâmetros  $r, \theta, \phi$  e  $t$  são as coordenadas de Schwarzschild. O termo  $R_s$  é o *raio de Schwarzschild* e é definido pela relação  $R_s = 2GM/c^2$ , onde  $G$  é a constante de gravitação universal. Podemos associar a métrica de Schwarzschild com um dos objetos mais fascinantes do nosso universo: o buraco negro. Contudo, essa associação não é direta. O próprio Schwarzschild nunca propôs tal associação. Para isso, é necessário interpretar a natureza da coordenada  $r = R_s$ . Se substituirmos na métrica  $r = R_s$  notaremos uma singularidade, pois o termo  $\Delta\tau$ , que representa o tempo próprio, tenderá a infinito. Este foi um problema que ocupou os físicos logo após aparecimento da solução de Schwarzschild. Com os esforços de Paul Painlevé em 1921; Allvar Gullstrand em 1922 e Arthur Eddington em 1924, foi mostrado que se redefinirmos a coordenada temporal  $t$  a singularidade em  $r = R_s$  desaparece. Em 1933, o padre belga George Lemaître interpreta a solução de Painlevé e Gullstrand como a métrica obtida por um observador em queda livre, que parte do repouso de uma grande distância do buraco negro. Entretanto, a interpretação física da mudança de coordenadas proposta por Eddington só ocorre em 1959, devido ao físico americano David Finkelstein. Nesta mesma época, em 1960, o problema final foi solucionado pelo matemático americano Martin Kruskal que resolve o problema de obter o maior sistema de coordenadas possível para a descrição do espaço-tempo para o buraco negro de Schwarzschild. Nela, como esperado, há somente a singularidade em  $r = 0$  onde se encontra a massa  $M$ , representando o fato de que existe uma massa puntiforme, o que leva a uma densidade de energia infinita naquele ponto.

Mencionamos até aqui discussões que consideramos importantes à compreensão da complexidade do tema e à potencialidade de fascínio por parte do aluno interessado em iniciar seus estudos introdutórios à TRG. De maneira resumida essas discussões correspondem:

- à insatisfação de Einstein com o status privilegiado dos referenciais inerciais;
- ao PRG;
- às diferentes formulações do PE e suas consequências;
- à introdução da métrica de Schwarzschild;
- aos buracos negros.

Nosso maior desafio nesta tese, contudo, transcende os tópicos acima listados. Não apenas a TRG é notadamente um assunto conceitual e tecnicamente intrincado

---

<sup>1</sup>O tempo próprio representa o intervalo de tempo medido por um observador com um único relógio.

(BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a, p. 020104-1); mas, ao contrário de toda a Física a que os alunos já foram expostos até então, ela não tem uma base fenomenológica tangível. Isto significa dizer, diretamente, que não existem experimentos ou demonstrações que possam ser feitos em sala de aula de modo a mostrar as aplicações da TRG. Este fato é particularmente importante no campo do Ensino de Física (EF), uma vez que dá ensejo aos alunos mais críticos levantarem questões do tipo: “*Como nós sabemos disso?*”, “*Por que acreditamos ou aceitamos isso?*” ou “*Qual é a base para esta afirmação?*”. À semelhança de Arons, concordamos que estas perguntas devam ser parte integrante da educação básica e, especialmente no EF, acreditamos que os alunos devam:

“ [...] testar e verificar resultados e conclusões ao investigar se os resultados fazem sentido em casos extremos ou especiais que possam ser examinados simples e diretamente. Eles devem ser conduzidos de modo a resolver um problema de formas alternativas quando for possível. Tal modo deve ser conduzido tanto de maneira quantitativa, como qualitativa.” (ARONS, 1997, p. 382)

Ainda de acordo com Arons:

“Nós forçamos uma grande fração de alunos à memorização ao impô-los, particularmente no Ensino Médio e nos anos iniciais da graduação, materiais que requerem capacidades de raciocinar abstratamente que eles ainda não obtiveram. E nós procedemos com esses materiais em um passo que atropela a aprendizagem e a compreensão efetivas, mesmo que essas capacidades de raciocínio tenham sido formadas. Sob tamanha pressão, os alunos não adquirem a experiência do que realmente significa compreender. Eles não chegam a testar seu ‘conhecimento’ por consequências plausíveis ou por consistência interna; eles não têm nenhum sentido de onde vêm esses resultados ou ideias aceitas, como são validados ou por que devemos acreditar nelas. [...] eles adquirem a ideia equívoca de que o conhecimento reside em frases memorizadas, terminologia técnica esotérica e regurgitação de ‘fatos recebidos’.” (ARONS, 1997, p. 388)

Como, então, responder às perguntas impostas anteriormente? Como não se deixar levar por fatos com pouco significado e frases memorizadas a favor de uma compreensão efetiva por parte do aluno? No que diz respeito às outras áreas da Física, não é difícil pensarmos em modelos ou experimentos que nos permitam avaliar a *fidelidade*<sup>2</sup> das teorias científicas. No caso da TRG, a resposta não deveria desviar completamente de como agimos para justificar os outros “fatos concretos” da Física. Sabendo que uma

---

<sup>2</sup>Fidelidade no sentido de poder prever e corresponder a resultados experimentais.

teoria, seja ela qual for, engloba fenômenos, modelos e leis; ela precisa ter um componente preditivo cujas proposições possam ser testadas experimentalmente dentro de um limite de validade. No caso da TRG podemos utilizar os chamados *testes clássicos*<sup>3</sup>, além de oferecermos o argumento quantitativo e qualitativo sobre a existência dos buracos negros. É assim que procederemos.

Além desse aspecto epistemológico, podemos citar outros que também nos servem de motivação pessoal para a concretização deste trabalho:

1. a presença de experimentos de pensamento nas origens da TRG;
2. a previsão de novos fenômenos a partir do modelo teórico;
3. o trabalho intelectual, o pioneirismo e até mesmo a criatividade de Einstein na proposição da TRG. Nas palavras de Earman e Glymour:

“A magnificência da odisseia intelectual de Einstein reside não apenas na grandeza de sua conclusão, mas também em seu caos, na falta de direção dos caminhos que levaram ao objetivo. Não se pode ler esta história sem ficar maravilhado com o intelecto de Einstein; durante grande parte do período entre 1912 e 1916 ele esteve verdadeiramente perdido [...], completamente no caminho errado, acompanhado de razões errôneas que afirmava serem fundamentais. E, no entanto, de maneira bastante singular, no decorrer de um mês, ele abandonou seus erros e suas justificativas. A moral, talvez, é que uma certa inconstância é mais propícia ao progresso teórico do que qualquer abundância de clareza conceitual - pelo menos para Einstein.” (EARMAN; GLYMOEUR, 1978, p. 277)

Apesar de todos os argumentos dados até aqui corresponderem à nossa visão de ensino e ao *porquê* de ensinar a TRG a nível secundário, talvez a nossa maior motivação tenha outra origem. Podemos citá-la como dizendo respeito àquilo que o historiador Marc Bloch chamou, em seu livro, de *apaziguamento de nossas fomes intelectuais* (BLOCH, 1944, p. 45), no sentido de como apresentar esse tema fascinante no Ensino Médio. Desta forma, destacamos que juntamente com o crescente interesse sobre o tema e com o, ainda, pequeno quantitativo de trabalhos sobre ele no Brasil é que este trabalho ganha escopo.

De maneira geral, este trabalho tem como objetivo apresentar uma introdução à TRG com uma matemática apropriada ao nível de instrução proposto sem a utilização do formalismo matemático da teoria. Isto não significa que não reconheçamos a

<sup>3</sup>São eles: a precessão do periélio de Mercúrio; a deflexão da luz e o desvio gravitacional para o vermelho.

importância do formalismo matemático da TRG. No entanto, esta tese se quer como possível porta de entrada para o tema tanto para estudantes que apresentem a vontade de seguir os estudos na TRG, quanto para estudantes que queiram apenas ter um contato introdutório com o tema.

Por este motivo, escolhemos discutir alguns aspectos técnicos da teoria como: as diferentes formulações do PE; a utilização do PE como argumento a favor do PRG e da previsão dos fenômenos relativísticos; a análise da métrica de Schwarzschild; o funcionamento de relógios próximos a um buraco negro e o papel do horizonte de eventos de um buraco negro.

Seguindo esta mesma vertente, uma das estratégias utilizadas por nós consistirá em seguir os percursos traçados pelo próprio autor da teoria, Albert Einstein, no livro intitulado “*A Teoria da Relatividade Restrita e Geral*” (EINSTEIN, 1999). Levando em conta o alto grau de abstração para a compreensão do tema, nos questionamos: será possível fazer uma introdução elementar compatível com o ensino secundário sobre a TRG em que o conceitual e o técnico possam ser separados? Esse desafio de apresentar um assunto, notadamente conhecido como complexo e sutil, constitui outra importante motivação deste trabalho.

A nossa proposta consiste em aplicar um curso de TRG desenvolvido para o Ensino Médio brasileiro. De maneira específica, o objetivo deste trabalho reside em pesquisar a compreensão dos estudantes dos conceitos relacionados à TRG, que se mostrem em desacordo com as ideias-padrão da Física. No início dos anos 1970 a discussão sobre as ditas “concepções alternativas ou espontâneas” começam a ganhar notoriedade no seio da literatura em EF (FRANCISQUINI, 2019, p. 121). À semelhança de Bandhyopadyay e Kumar, nossa pesquisa não se limitará ao referencial das concepções alternativas, uma vez que, na palavra dos autores:

“Uma concepção alternativa é, em sua conotação usual, geralmente considerada uma instanciação da física ingênua - os conceitos e leis do mundo físico que adquirimos em nossa experiência da vida cotidiana. No entanto, dada a natureza avançada e um tanto técnica do presente tópico, as concepções dos alunos aqui relatadas não parecem se relacionar diretamente com a física ingênua. Em vez disso, eles possivelmente surgem de concepções alternativas de domínios antecedentes, do uso acrítico de conhecimento prévio ou simplesmente da falta de atenção a discriminações conceituais mais refinadas.” (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 140)

Por este motivo, em conformidade com os autores, iremos nos referir a essas concepções como sendo “*vulnerabilidades conceituais*” dos alunos. Definindo-as como

sendo “todas as concepções dos alunos que não são congruentes com a Física padrão” (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 140). As *vulnerabilidades conceituais* podem advir de noções adquiridas dos conceitos de Física Clássica (FC), ao longo da trajetória acadêmica do estudante, que porventura possam vir a impactar negativamente na aprendizagem dos conceitos relativísticos.

A fim de investigar as vulnerabilidades conceituais relacionadas à TRG, propusemos a construção de um curso de TRG para o Ensino Médio cujas etapas estão compreendidas abaixo:

1. Leitura de artigos especializados sobre o ensino e aprendizagem relacionados à TRG;
2. Determinação e adaptação de conteúdos a serem abordados no curso elaborado por nós à luz da literatura de ensino e aprendizagem de TRG;
3. Consulta a livros especializados de TRG a fim de estabelecer o contato do docente-pesquisador com o conteúdo de uma maneira mais aprofundada do que aquilo que irá expor em sala de aula. Além disso, investigar discussões pertinentes a serem exploradas em sala de aula. Daremos preferência às leituras: A Teoria da Relatividade Especial e Geral (EINSTEIN, 1999), Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018); Introducing Einsteins relativity (D’INVERNO, 1999); Understanding relativity - a simplified approach to Einsteins theories (SARTORI, 1996); A most incomprehensible thing: notes towards a very gentle introduction to the Mathematics of relativity (COLLIER, 2019) e General relativity without calculus (NATÁRIO, 2011) ;
4. Estruturação e escrita de uma apostila, a ser disponibilizada aos alunos, à qual nos referiremos no nosso trabalho como “*texto de apoio*” (Apêndice A);
5. Construção de um questionário em duas partes. A primeira versando sobre temas e vulnerabilidades conceituais relatados na literatura e a segunda visando a investigar outras fontes de vulnerabilidades conceituais ainda não relatadas na

literatura. Iremos nos referir a este questionário (ambas as partes) como *Instrumento de pesquisa*

Os trabalhos relacionados ao ensino sobre a TRG a nível mundial têm majoritariamente enfoque no ensino de TRG no Ensino Médio (BALDY, 2007), (VELENTZAS; HALKIA, 2013), (ZAHN; KRAUS, 2014), (KAUR; BLAIR; MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017), (KERSTING; STEIER, 2018), (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018), (CHOUDHARY; KRAUS; KERSTING; BLAIR; ZAHN; ZADNIK; MEAGHER, 2019), (KERSTING, 2019), (KERSTING; TOELLNER; BLAIR; BURMAN, 2019) e (KERSTING, 2020). Ainda destacamos dois trabalhos dedicados a temas conceituais em TRG (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a) e (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b), sendo o público-alvo alunos universitários selecionados. Estas iniciativas estão distribuídas nos países: Austrália, Noruega, Índia, Grécia, França e Alemanha. No Brasil encontramos uma movimentação no sentido de apresentar a TRG de duas maneiras distintas: a primeira a partir de um enfoque histórico-filosófico (GUERRA; BRAGA; REIS, 2007) e a segunda a partir de um curso formal para alunos selecionados (CARAGEORGE, 2020).

Embora reconheçamos a importância dos aspectos históricos e filosóficos relativos à construção do conhecimento, nossa abordagem se assemelha à segunda tendência a nível nacional. No entanto, percebemos a necessidade de expandir o público alvo desta abordagem, seguindo as tendências internacionais. Assim, propusemos um curso de TRG a ser aplicado em duas turmas<sup>4</sup> do quarto ano<sup>5</sup> do Ensino Médio Técnico de um colégio federal localizado no Rio de Janeiro.

Tendo apresentado nossas justificativas, inquietações e motivações relativas à escolha do tema, iremos introduzir nossas *perguntas de pesquisa* que nos servirão como guias durante todo o desenvolvimento deste trabalho. Nossa pergunta inicial visa a investigar:

- **Quais vulnerabilidades conceituais relatadas na literatura os estudantes do Ensino Médio estão sujeitos a manifestar após a aplicação formal de um curso introdutório de Teoria da Relatividade Geral?**

---

<sup>4</sup>Estas turmas não correspondem à totalidade de turmas do último ano, momento em que a TRR está presente no currículo da escola, mas correspondem à totalidade de turmas atribuídas ao docente responsável por esta pesquisa.

<sup>5</sup>Nesta escola, o Ensino Médio e Técnico é realizado ao longo de quatro anos.

Antes de lançarmos mão dos meios escolhidos por nós para responder esta pergunta, sentimos necessidade de expressar um pressuposto de nossa pesquisa. À semelhança dos achados de McDermott (MCDERMOTT, 1993, p.297) em relação às concepções alternativas, um pressuposto de nosso trabalho reside no fato de que não importa quão lucidamente um tópico seja abordado as vulnerabilidades conceituais estarão presentes no processo ensino-aprendizagem do aluno.

A fim de oferecermos uma resposta à pergunta, sugeriremos um instrumento de pesquisa sob a forma de questionário a ser aplicado após a instrução formal de acordo com as vulnerabilidades conceituais já relatadas na literatura, em especial as apontadas por Bandyopadhyay e Kumar (2010a, 2010b). Embora o trabalho destes seja realizado com um público de alunos selecionados de graduação, projetamos encontrar dificuldades semelhantes nas turmas de Ensino Médio lecionadas por nós. Nossos resultados serão extraídos não apenas da resposta às questões objetivas do questionário; mas, fundamentalmente, com a Análise de Conteúdo (AC) (BARDIN, 1977) das justificativas dos alunos para cada alternativa selecionada.

Outra instância de nosso trabalho se preocupará em mapear outras vulnerabilidades pouco ou não-relatadas na literatura. A esse respeito, nos questionamos:

- **Em que medida podemos identificar vulnerabilidades conceituais relacionadas ao conteúdo ainda não relatadas na literatura?**

À semelhança da primeira questão, também iremos construir um instrumento de pesquisa sob a forma de questionário, a fim de levantar dados sobre dificuldades apontadas na literatura e utilizar a AC das justificativas dos alunos. No entanto, a AC utilizada neste momento difere em essência da utilizada anteriormente. Neste caso possuindo um caráter mais epistemológico no que se refere à construção de novas categorias de vulnerabilidades conceituais. No caso anterior, possuindo caráter mais investigativo no que se refere à consolidação e correspondência entre as vulnerabilidades descritas na literatura e aquelas manifestadas pelos alunos.

Neste trabalho nos preocuparemos em estabelecer um conjunto de estratégias para a abordagem da TRG dialogando com a literatura especializada no tema. Esse conjunto de estratégias juntamente com o *instrumento de pesquisa* irá permitir uma investigação sobre as concepções dos estudantes frente a alguns temas da TRG. Traçamos aqui os objetivos específicos propostos por este trabalho:

- Contribuir com o ensino-aprendizagem de TRG no Ensino Médio;

- Colaborar com a ampliação de temas da TRG que possam ser abordados a nível introdutório;
- Contribuir com a descrição das dificuldades apresentadas pelos estudantes em um curso introdutório de TRG.

Nos valemos, ainda, de algumas premissas gerais extraídas da literatura especializada que consideramos importantes para o pleno desenvolvimento da pesquisa sobre o ensino de TRG:

1. Os alunos do Ensino Médio podem obter uma compreensão qualitativa de TRG. Para tal, recursos de aprendizagem apropriadamente projetados devem ser utilizados por meio da interação com professores e colegas (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018);
2. O uso de experimentos de pensamento ajuda a compreender as leis e princípios da Física, que exigem alto grau de pensamento abstrato (VELENTZAS; HAL-KIA, 2013);
3. O conhecimento prévio influencia a maneira como os alunos tentam assimilam as novas ideias da TRG (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a).

A primeira premissa vem dos resultados positivos para a introdução do tema no nível secundário. Já a segunda premissa, mostra um caminho possível importante para lidar com ideias e trabalhar com princípios físicos que exijam dos estudantes algum grau de pensamento abstrato. Outra estratégia muito utilizada para lidar com ideias e conceitos abstratos é o uso de analogias e metáforas como realizado em (BALDY, 2007), (WATKINS, 2014), (KAUR; BLAIR; MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017) e (KERSTING; STEIER, 2018). Por fim, a terceira premissa importante está relacionada ao conhecimento prévio dos estudantes que afeta as novas ideias oriundas da TRG.

Além disso, para que possamos atender a uma insatisfação relatada no trabalho de (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018, p. 010130-14) sobre a introdução puramente qualitativa dos conceitos e ideias-chave da teoria, apresentamos uma hipótese importante a ser investigada neste trabalho:

- É possível fazer análises quantitativas através de manipulações algébricas simples da métrica do espaço-tempo e interpretar fisicamente resultados matemáticos relativos ao tema.

Com o objetivo de seguir a pesquisa, faremos a divisão dessa tese em capítulos. O Capítulo 2 tratará da revisão de literatura que forma a base de todo o nosso trabalho. Iniciaremos ele com um breve panorama sobre a Física Moderna e Contemporânea (FMC) a nível do ensino secundário, seguido de uma extensa revisão sobre trabalhos sobre a TRG. Iniciaremos essa revisão apresentando os trabalhos desenvolvidos ao redor do mundo e, em seguida, no Brasil. Após essa breve introdução, apresentaremos as principais abordagens utilizadas no ensino da TRG, a saber: os princípios físicos da TRG, e o espaço-tempo curvo à luz da literatura especializada em ensino de TRG. Para este último assunto, analisaremos as divergências entre autores acerca da forma utilizada na apresentação do espaço-tempo curvo.

No Capítulo 3 descreveremos as etapas de construção desta pesquisa. Iniciaremos relacionando o *texto de apoio* construído (Apêndice A - versão completa e Apêndice B - versão resumida) com os trabalhos analisados no Capítulo 2. Analisaremos também as estratégias utilizadas na construção da sequência didática necessária à composição do curso introdutório de TRG. Descreveremos a construção do *instrumento de pesquisa* (Apêndice C) utilizado neste trabalho e detalharemos a construção de cada questão. Por fim, discutiremos como foi feita aquisição dos dados da pesquisa e como será feita a AC dos dados obtidos.

No Capítulo 4 será feita a análise das justificativas escritas para a escolha das questões objetivas do instrumento de pesquisa. Ele tem por objetivo analisar quais as vulnerabilidades conceituais são manifestadas pelos estudantes após um curso introdutório de TRG. Além disso, descreveremos três artigos publicados durante a escrita desta tese (MACHADO; TORT; ZARRO, 2020), (MACHADO; TORT; ZARRO, 2021) e (MACHADO; TORT; ZARRO, 2024).

Finalmente, no Capítulo 5 descreveremos os percursos seguidos em nosso trabalho apresentando nossas conclusões e possíveis desdobramentos para a continuação deste trabalho.

# Capítulo 2

## Revisão de Literatura

*[...] àqueles que, de um ponto de vista geral científico e filosófico, se interessam pela teoria mas não dominam o aparato matemático da física teórica [...] foi inevitável repetir-me muitas vezes, sem preocupação com a elegância da apresentação; pautei-me, escrupulosamente, pela norma do genial físico teórico Ludwig Boltzmann, que deixava as questões de elegância a cargo de alfaiates e sapateiros.*

---

*Albert Einstein em “A Teoria da Relatividade Especial e Geral” (1999, p. 7)*

Neste capítulo apresentaremos a revisão de literatura destacando os principais trabalhos publicados sobre o ensino da Teoria da Relatividade Geral (TRG). Iniciamos o capítulo apresentando algumas justificativas e, também, destacando de forma concisa trabalhos que versam sobre o ensino de Física Moderna e Contemporânea (FMC). Posteriormente, uma revisão ampla é realizada acerca dos trabalhos que apresentam tópicos específicos ou uma introdução completa a TRG com um enfoque voltado para o Ensino Médio (EM) ou em discussões conceituais do tema para a graduação.

## 2.1 Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio

Iniciaremos o debate estabelecendo uma contextualização para determinar uma ordem cronológica para a caracterização da FMC. Segundo (OSTERMANN; RICCI, 2002) estabeleceremos a seguinte divisão:

- Física Clássica estende-se até o final do século XIX;
- Física Moderna incia-se no final do século XIX até a década de 40 do século XX;
- Física Contemporânea, aproximadamente a partir da década de 40 do século XX em diante.

Os tópicos que compreendem a FMC são diversos como: a Teoria da Relatividade Restrita (TRR), a Mecânica Quântica (MQ), a TRG e a Física de Partículas (FP). Na pesquisa em Ensino de Física (EF) existe uma discussão pujante para que esses tópicos sejam trazidos para a sala de aula do ensino secundário. O trabalho de (OSTERMAN; MOREIRA, 2000) apresenta uma extensa revisão de literatura sobre o tema. No que se refere às justificativas para a inserção de tópicos de FMC no ensino secundário, destacam-se as seguintes:

- “despertar a curiosidade dos estudantes e ajudá-los a reconhecer a Física como um empreendimento humano e, portanto, mais próxima a eles;”
- “os estudantes não têm contato com o excitante mundo da pesquisa atual em Física, pois não vêm nenhuma Física além de 1900. Esta situação é inaceitável em um século no qual idéias revolucionárias mudaram a ciência totalmente;”
- “é do maior interesse atrair jovens para a carreira científica. Serão eles os futuros pesquisadores e professores de Física;”
- “é mais divertido para o professor ensinar tópicos que são novos. O entusiasmo pelo ensino deriva do entusiasmo que se tem em relação ao material didático utilizado e de mudanças estimulantes no conteúdo do curso. É importante não desprezar os efeitos que o entusiasmo tem sobre o bom ensino;”
- “Física Moderna é considerada conceitualmente difícil e abstrata; mas, resultados de pesquisa em EF têm mostrado que, além da Física clássica ser também abstrata, os estudantes apresentam sérias dificuldades conceituais para comprehendê-la.”  
(OSTERMAN; MOREIRA, 2000, p. 24)

Destacamos aqui duas justificativas que estão em consonância com esta tese, quais sejam: despertar a curiosidade dos estudantes através de novos temas no EF e possibilitar o contato do estudante com a FMC na escola. Além das questões apontadas por

Osterman e Moreira, outra questão importante é levantada por (VIDEIRA; FRANCISQUINI, 2018, p. 82) ressaltando que os alunos são frequentemente expostos a temas de FMC sem que os mesmos sejam trazidos para a atividade do docente. O crescente interesse por parte da mídia e do público leigo cresce acerca de discussões de tópicos de FMC. Ressaltamos, ainda, que não apenas à mídia jornalística/televisiva refere-se este interesse, pois, recentemente, os veículos de comunicação em massa como o *YouTube* têm apresentado cada vez mais conteúdos de FMC. A gravidade deste interesse é dupla: ao mesmo tempo que visa informar, gera desinformação. A desinformação por parte da mídia advém da super simplificação de termos, das metáforas utilizadas nas explicações ao público leigo e na superficialidade com que o assunto é abordado. O tratamento de temas sabidamente complexos pelos meios de comunicação faz com que as pessoas se sintam intimidadas por não compreenderem o assunto e repitam bordões e expressões vazias, como é o caso da frase “*tudo é relativo*”. O caso das mídias independentes, como é o caso do *YouTube*, *Facebook* e similares, é ainda mais preocupante. Essas plataformas têm o seu funcionamento declaradamente determinado por algoritmos especializados em manter a audiência *logada* sem compromisso com o conteúdo/veracidade das informações veiculadas. Dessa forma, a reflexão sobre trazer esses temas para a alcada do professor torna-se necessária.

Entretanto, alguns autores apresentam questionamentos sobre a inserção prematura de tópicos de FMC. O autor Arnold Arons apresenta uma reflexão importante sobre o assunto:

“Há um desejo compreensível na comunidade da física por uma introdução antecipada dos alunos aos aspectos da física moderna. Em alguns setores, esses sonhos de aprendizado acelerado estendem-se à defesa da injeção dos resultados da mecânica quântica, física nuclear e física de alta energia desde o primeiro ano (universitário) ou mesmo no ensino médio. À luz do que temos aprendido nos últimos anos sobre o desenvolvimento cognitivo e a formação de conceitos, duvido que o aprendizado e a compreensão genuínos desse material sejam viáveis em tais estágios iniciais. Só se cultivaria a memorização cega dos resultados finais para serem usados em exercícios artificiais de lição de casa e para serem testados como o que Eric Rogers costumava chamar de “recall barato”. Conhecimento e compreensão não residem em cadeias de nomes como “quark”, “gluon” ... ou “função de onda”. Quando as questões “Como sabemos ...?” e “Por que acreditamos ...?” não estão sendo tratadas, nenhum aprendizado ou entendimento genuíno pode ser alcançado.” (ARONS, 1996, p. 265)

Dessa forma, para os interessados na introdução de FMC no ensino secundário, como é o caso desta pesquisa, deve-se levar em conta a reflexão trazida por Arons. Por isso,

utilizando o alerta de Arons (1996) e, ainda, visando contribuir com a gama de temas de FMC que possam ser abordados em nível médio, iniciaremos uma revisão de literatura sobre o ensino de TRG. Nessa revisão, logicamente, procuramos elementos que nos ajudem com as questões “como sabemos?” e “por que acreditamos?”. Outro fator relevante é evitar um tratamento puramente *enciclopédico*, no sentido de apresentar nomes sem a devida discussão do tópico em questão.

Na sequência nós discutiremos trabalhos sobre o ensino da TRG. Dividiremos essa apresentação colocando os trabalhos anteriores e posteriores ao ano de 2017, pois notamos um aumento no quantitativo de artigos sobre o ensino da TRG a partir deste ano.

## 2.2 Iniciativas para a inserção da Teoria da Relatividade Geral no mundo

### 2.2.1 Trabalhos anteriores ao ano de 2017

O trabalho de Effing (1977) propõe uma atividade prática para auxiliar os estudantes a obter uma noção mais intuitiva de um espaço curvo. Assim, a proposta se baseia em atividades práticas com objetos encontrados em jardins como abóboras ou melancias. Logicamente, o leitor interessado em utilizar a abordagem de Myron Effing pode adaptar e utilizar objetos mais simples e de fácil aquisição como bexigas e bolas. O autor, então, discute como realizar o traçado de linhas retas e círculos em espaços curvos e apresenta um dispositivo para a medição do comprimento de curvas chamado de “*map-measuring device*”<sup>1</sup>. Com o auxílio do dispositivo em questão, o autor propõe uma atividade para determinação da função-Pi. Essa função apresenta o valor de, aproximadamente, 3,14 em um espaço plano. A atividade consiste em traçar diferentes círculos em uma superfície curva e medir, com o auxílio do curvímetro, o comprimento do círculo e o seu respectivo raio. Então, calculando a razão do comprimento do círculo pelo raio é determinado o valor da função-Pi para um dado raio específico. Um gráfico é plotado para observar os diferentes valores da função-Pi em relação ao raio dos círculos traçados. Dessa forma, podemos observar que o valor da função-Pi não é uma constante em espaços curvos. Através dessas atividades é possível explorar geometrias não-euclidianas.

---

<sup>1</sup>Em português, esse dispositivo é chamado de *curvímetro*.

A autora Baldy (2007) apresenta um estudo sobre como as concepções dos alunos acerca da gravidade evoluem ao longo de um curso. Os estudantes estavam na nona série do ensino francês e apresentavam idades em torno de quinze (15) anos. A autora propõe um novo enfoque para o ensino da gravidade após um mapeamento das dificuldades de estudantes apresentadas na literatura especializada. Essa nova proposta está baseada na interpretação einsteiniana para a gravidade. Para que fosse possível analisar a efetividade desta proposta, a autora comparou a interpretação baseada na Física einsteiniana com a interpretação tradicional baseada na Física newtoniana. Na abordagem newtoniana a queda dos corpos era explicada através da interação (força) gravitacional proposta por Isaac Newton, onde essa interação ocorre instantaneamente entre os corpos. Na abordagem einsteiniana faz-se uso da analogia do *modelo travesseiro* em que bolas de aço são colocadas sobre o travesseiro distorcendo o mesmo e pequenas bolinhas de gude são postas sobre o travesseiro distorcido. Nessa analogia, o travesseiro representa o espaço, as bolas de aço representam os corpos celestes e as bolas de gude representam os corpos de prova que são atraídos pelos corpos celestes. O quantitativo utilizado no estudo foi de cento e vinte e três (123) alunos para os testes. Deste quantitativo total, vinte e um (21) alunos integraram o grupo controle. Para o grupo controle, a abordagem para o ensino da gravidade foi realizada através da teoria de Newton (abordagem newtoniana). Os cento e dois (102) alunos restantes foram introduzidos ao ensino de gravidade através da teoria da deformação do espaço-tempo de Einstein (abordagem einsteiniana). A metodologia utilizada neste estudo ocorreu da seguinte forma: uma primeira sessão conjunta foi desenvolvida com ambos os grupos de modo a mostrar que os objetos são atraídos por corpos celestes, na segunda sessão a abordagem newtoniana é aplicada no grupo controle e a abordagem einsteiniana é aplicada para os demais estudantes. A evolução conceitual dos estudantes foi realizada por meio de três testes: teste inicial, teste intermediário e teste final. As concepções dos estudantes foram examinadas por dois avaliadores que trabalharam de forma independente. Estes avaliadores inferiram sete categorias para classificar a concepção dos estudantes. Estas categorias iam da mais completa e correta concepção até a mais incorreta delas. Destacamos aqui três dessas concepções abordadas:

1. Atração generalizada (Generalized attraction) (GA) - qualquer corpo celestial atrai objetos independente da sua localização no espaço, ou seja, a gravidade é um fenômeno universal;
2. Atração corpo celeste (Celestial body attraction) (CBA) - qualquer corpo celestial atrai objeto, mas somente quando os mesmos estão próximos a sua superfície;

3. Somente atração da Terra (Earth's attraction only) (EA) - a atração gravitacional só ocorre na Terra.  
(BALDY, 2007, p. 1776)

Os resultados mostram que após a sessão conjunta ambos os grupos (abordagem newtoniana e abordagem einsteiniana) apresentaram uma evolução comparável. Após esta sessão conjunta, ocorreu uma elevação do percentual de estudantes que possuem a concepção CBA. Entretanto, após a segunda sessão (em que era apresentada a teoria newtoniana para o grupo controle e a teoria da deformação do espaço-tempo para os demais estudantes) o grupo Newton apresentou uma estagnação na sua evolução enquanto o grupo Einstein apresentou uma elevação de 38% dos estudantes que atingiram a concepção correta (GA). Esses resultados indicam uma efetividade maior na evolução conceitual dos estudantes utilizando a interpretação einsteiniana no estudo da gravidade.

O trabalho de Bandyopadhyay e Kumar (2010a) investiga como os estudantes universitários compreendem as ideias básicas da TRG. O trabalho se concentra nos aspectos qualitativos da TRG, compatíveis com o nível de graduação em Física. No entanto, Bandyopadhyay e Kumar (2010a) relatam que sua abordagem também contém um enfoque técnico para um entendimento de assuntos qualitativos da TRG. A investigação proposta se concentra no diagnóstico das concepções dos estudantes que não estão de acordo com as concepções padrão da Física, chamadas no trabalho de *concepções alternativas*. Seis (6) estudantes participaram deste trabalho na Índia. Todos os estudantes apresentavam um bom desempenho em disciplinas do curso de graduação em Física e, em particular, obtiveram um bom desempenho no curso de TRR. Os estudantes participaram de forma voluntária em um curso de férias sobre TRG em que foram pesquisadas as concepções dos mesmos. A metodologia utilizada foi composta pela aplicação de um questionário inicial com 12 (doze) temas contidos no livro “A teoria da relatividade restrita e geral” (EINSTEIN, 1999). O instrutor do curso realizou a leitura do livro sem fornecer explicações da Física contida no livro, porém esclarecia o significado de algumas palavras em inglês para evitar alguma incompreensão por erros de tradução. Para cada tema abordado, os alunos são solicitados a responder, por escrito, perguntas baseadas nos temas tratados no livro de Einstein. As questões abordavam interpretações de trechos do livro ou de ideias-chave. O questionário completo possuía ao todo 52 itens. Após essa etapa inicial foi conduzido um curso formal de TRG baseado no livro “Introducing Einstein’s relativity” (D’INVERNO, 1999). Por

fim, ao final do curso foram realizadas entrevistas detalhadas sobre os aspectos discutidos no questionário inicial após a exposição formal da TRG. Os resultados deste trabalho são apresentados ao longo do texto por meio de uma discussão de oito (8) temas conceituais. Destacaremos a seguir alguns desses temas e os resultados mais importantes para a nossa pesquisa. O primeiro tema conceitual trata da *relatividade do movimento uniforme*. Os autores relatam que todos os estudantes que participaram da pesquisa sabiam enunciar o Princípio da Relatividade Restrita (PRR), entretanto, apenas três perceberam o detalhe fundamental de que o PRR necessita de verificação experimental. O segundo tema conceitual discute *referenciais em movimento não uniforme e o PRR*. A diferenciação entre descrever fenômenos físicos e descrever as leis da Física (que regem os fenômenos físicos) é confusa para os estudantes. Descrever um fenômeno físico significa medir as grandezas físicas como, por exemplo, determinar as grandezas cinemáticas posição, velocidade e aceleração para a descrição do movimento. Descrever as leis da Física, por sua vez, significa encontrar as equações matemáticas que relacionam as grandezas físicas medidas. Além disso, os autores analisaram que os estudantes entendem que as leis da Física são diferentes quando escritas em relação a um referencial inercial e quando escritas em relação a um referencial não-inercial. Entretanto, é relatado que os estudantes não reconhecem a importância e a dificuldade que essa diferença representou para Einstein na tentativa da proposição de um *Princípio da Relatividade Geral* (PRG). Esta dificuldade apresentada por Einstein na proposição do PRG está na presença das “forças” de inércia presentes nos referenciais não-iniciais. As “forças” de inércia tornam os referenciais não-iniciais identificáveis, ou seja, através de experimentos conseguimos identificar que o referencial está acelerado. Além disso, os alunos não compreendem como o *Princípio da Equivalência* (PE) foi um argumento fundamental a favor do PRG. O terceiro tema conceitual trata da *igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional*. Neste tema apareceu uma concepção não congruente com a concepção padrão da Física. Alguns alunos descreveram a massa gravitacional como uma quantidade que ‘resiste’ somente a ação da força gravitacional. O quarto tema conceitual refere-se ao *PE como argumento para o PRG*. Neste tema os autores relatam que nem todos entendem como Einstein utilizou o PE como argumento a favor do PRG, mas que todos conseguiram chegar à conclusão de que o PE emerge da igualdade da massa inercial e da massa gravitacional. Um alerta é feito que nem todos os alunos conseguem entender uma inversão no raciocínio para explicar a igualdade entre as massas mencionadas. Esse raciocínio consiste em tomar

o PE como válido desde o início e a consequência lógica da aplicação do mesmo é a igualdade entre as massas gravitacional e inercial. O último tema que destacaremos aqui fala sobre a *deflexão da luz sob a ação de um campo gravitacional*. Neste tema os estudantes não exploraram o PE para chegar à conclusão da deflexão da luz, tendendo a procurar explicações em conhecimentos anteriores que os mesmos possuíam.

Em um segundo trabalho, Bandyopadhyay e Kumar (2010b) apresentam um estudo analisando as concepções dos estudantes universitários sobre o PE. Os autores avaliaram as concepções dos estudantes que não eram congruentes com as concepções padrão da Física, chamadas pelos autores, neste trabalho, de *vulnerabilidades conceituais*. A metodologia utilizada foi composta, inicialmente, por um curso piloto de TRG em que um questionário sobre o PE fora aplicado. Após o curso piloto, um curso de um semestre, que contava com 30 (trinta) estudantes universitários foi realizado utilizando como base o livro do físico Steven Weinberg (WEINBERG, 1972). Duas semanas após o PE ter sido discutido, um questionário com 19 (dezenove) itens foi aplicado. Os alunos deveriam responder as questões apresentando uma breve justificativa das mesmas. O artigo tratou, ao todo, de 8 (oito) temas conceituais, a saber: “princípio de Galileu”, “a proporcionalidade universal entre a massa inercial e a massa gravitacional”, “a igualdade  $m_{inercial} = m_{grav}$  e a energia interna”, “o PE e a noção de referencial inercial”, “uso do PE em tarefas”, “a natureza local do PE”, “o PE e a imponderabilidade” e “o PE e domínios não-mecânicos”. Destacaremos, a seguir, os resultados de quatro temas conceituais que são de interesse para a nossa pesquisa. O “princípio de Galileu” trata do fato da aceleração de um corpo em queda livre ser independente de sua massa inercial. Acerca do “princípio de Galileu”, os autores destacam a seguinte vulnerabilidade conceitual: a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional não necessita de verificação experimental. Um total de 12 (doze) alunos possuíam essa visão. Dentre os estudantes com essa concepção, 3 (três) alunos não apresentam a percepção acerca da distinção entre as massas. O restante dos estudantes tomou como certa a igualdade entre as massas inercial e gravitacional “provando” o princípio de Galileu. Os autores relatam que a discussão acerca da diferença entre a massa inercial e a massa gravitacional não é uma prática comum na escola secundária. O segundo tema que trataremos é “o PE e a noção de referencial inercial”. Para esse tema, 15 (quinze) estudantes possuíam a concepção padrão (categoria criada pelos autores para classificar os estudantes que responderam corretamente as perguntas), porém entre esses estudantes apenas 4 (quatro) mostraram ter compreendido que os

efeitos experimentados por um observador em queda livre são idênticos aos efeitos experimentados por um observador em movimento uniforme no espaço livre<sup>2</sup>. Os demais chegaram à conclusão de que corpos livres (da ação de forças externas exceto a força da gravidade) apresentam movimento uniforme em relação ao observador em queda livre. Outro grupo de alunos preferiu utilizar as ideias newtonianas e tenderam a apresentar uma explicação baseada na ideia de forças de inércia para o referencial em queda livre. O último tema que iremos tratar refere-se ao “uso do PE em tarefas”. Nesse tópico, os alunos utilizavam diferentes formulações do PE para responder perguntas para as situações propostas nas questões. Uma vulnerabilidade conceitual apontada pelos autores refere-se à interpretação de que o campo gravitacional equivalente (sentido oposto ao da aceleração do referencial) é limitado ao tamanho do corpo de referência em relação ao qual fazemos as medidas de posição, velocidade e aceleração. As duas versões do PE propostas no artigo são

1. Versão 1: Um referencial uniformemente acelerado no espaço livre é equivalente a um referencial “em repouso” em um campo gravitacional de mesma magnitude que a aceleração, mesma direção, porém com sentido oposto;
  2. Versão 2: Um referencial, não girante, caindo livremente em um campo gravitacional uniforme é inercial.
- (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 148):

A formulação 2 para o PE, escrito em termos dos referenciais em queda livre, apresentou uma dificuldade maior de assimilação do que a formulação 1 do princípio. Os autores relatam aqui que os estudantes lidam bem com problemas que envolvem a versão 1 do PE, mas ao utilizarem a versão 2, mesmo quando solicitados explicitamente para tal, preferem utilizar a mecânica newtoniana para responder as tarefas. Dessa forma, os autores concluem que a versão 2 do princípio é sutil e muito mais difícil de assimilar que a versão 1 (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 151). O último tema que destacaremos refere-se à “natureza local do PE”. Neste tema os autores relatam que os alunos restringem o significado local do PE ao espaço, mas não ao tempo (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 152). Por fim, na mesma seção, os autores comentam que apesar da validade local do PE, a igualdade entre as massas inercial e gravitacional continua válida. Por isso, o movimento de um corpo livre em um campo gravitacional arbitrário é independente de sua massa, razão pela qual Einstein poderia igualar gravidade à geometria (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 152).

---

<sup>2</sup>Espaço livre é uma região do espaço em que não há presença de gravidade.

O trabalho de Velentzas e Halkia (2013) apresenta um estudo sobre o ensino de conceitos básicos e leis da Teoria da Relatividade (TR) para estudantes do ensino secundário utilizando como ferramenta os *experimentos de pensamento* (“thought experiments”) utilizados em livros de divulgação da teoria. O estudo se concentrou na utilização dos experimentos de pensamento como uma forma de auxiliar os estudantes a raciocinar sobre situações que não fazem parte da vida cotidiana dos mesmos. Nesse estudo foi utilizado o experimento de pensamento do elevador de Einstein para discutir o PE e o experimento de pensamento do trem de Einstein para discutir a relatividade da simultaneidade, da dilatação do tempo e da contração do comprimento. Uma implementação piloto foi realizada com oito alunos para detectar possíveis inconsistências e, posteriormente, a implementação principal foi realizada. Na implementação principal, foi dividido um quantitativo de quarenta (40) alunos do EM em onze (11) grupos que continham entre três e quatro alunos. Estes alunos possuíam idades em torno de 16 anos e foram selecionados a partir de seis escolas de diferentes locais em Atenas, na Grécia. Os experimentos de pensamento tiveram a duração de duas horas para o elevador de Einstein e de duas horas para o trem de Einstein. A metodologia consistiu na utilização dos experimentos de pensamento acompanhada de entrevistas semiestruturadas. Os estudantes foram expostos aos experimentos de pensamento e os mesmos deveriam utilizá-los para prever resultados. O professor tinha a função de auxiliar as interações dos estudantes nos grupos e intervir quando as discussões começavam a se distanciar do propósito das aulas. Os dados foram obtidos através da gravação e, posteriormente, da transcrição das entrevistas. Além disso, um questionário para cada experimento de pensamento foi aplicado quinze dias após a finalização das aulas em que os experimentos de pensamento foram trabalhados. Os resultados gerais encontrados neste trabalho mostram que os experimentos de pensamento permitem uma compreensão básica da TR. Os autores alegam que o mínimo formalismo matemático exigido é importante para os estudantes desenvolverem silogismos e se concentrarem nos conceitos centrais da teoria. Além disso, os experimentos de pensamento auxiliam os estudantes a raciocinar em situações que não estão presentes em seu cotidiano. Dessa forma, os alunos podem lidar com teorias físicas que possuem um grau elevado de pensamento abstrato.

A autora Watkins (2014) desenvolveu um estudo sobre o envolvimento de estudantes universitários no estudo da gravidade utilizando a analogia do tecido elástico. O estudo contou com 97 estudantes universitários ao longo de um curso de Física con-

ceitual. Os estudantes fizeram um pré-teste no início do curso e, posteriormente, um pós-teste (idêntico ao pré-teste) algumas semanas após a finalização do estudo da gravidade. O teste apresentava questões objetivas, onde algumas questões apresentavam uma escala Likert. Durante o curso, os estudantes participaram de atividades práticas utilizando o tecido elástico na discussão da gravidade. Além das atividades práticas, os estudantes também participaram de palestras com foco na introdução da analogia do tecido elástico. Os estudantes apresentavam, em sua maioria, faixa etária de 18 a 22 anos. A autora utilizou uma metodologia quantitativa para analisar os resultados do pré-teste e do pós-teste por meio de uma abordagem estatística. A pontuação média para o pré-teste foi de 51,4% enquanto para o pós-teste essa pontuação sofreu uma elevação e foi de 67,8%. A análise também se concentrou em temas comuns que os alunos tendem a associar à gravidade como magnetismo, atmosfera e rotação. Ao comparar as questões do pré-teste e do pós-teste, a autora notou uma redução na marcação das opções que continham distratores, que correspondiam aos itens que continham erros.

O trabalho de Zahn e Kraus (2014) faz parte de um projeto de um grupo de pesquisa da Universidade de Hildesheim, chamado de “*The Spacetime-Travel Project*”. O trabalho proposto por Zahn e Kraus tem por objetivo a utilização dos chamados *modelos de setor*<sup>3</sup>. O modelo de setor consiste em modelos físicos que são utilizados para representar espaço curvos bidimensionais e tridimensionais bem como um espaço-tempo curvo. Por exemplo, no caso de espaços curvos bidimensionais, as superfícies curvas são substituídas por pequenos elementos de área planos, onde cada elemento plano segue a geometria euclidiana. Os autores alegam que esta abordagem é adequada tanto para estudantes universitários quanto para estudantes do ensino secundário. Este artigo consiste em um detalhamento de um *workshop* sobre a utilização dos modelos de setor. Os autores trazem uma sequência para a aplicação do modelo de setor. Inicia-se discutindo que uma superfície curva pode ser aproximada por pequenos pedaços planos (setores). Através desse modelo, pode-se discutir o conceito de curvatura de diversas formas. As superfícies utilizadas para a construção dos modelos são uma calota esférica e uma sela. Depois o espaço tridimensional curvo é discutido. Nesta etapa, a região tridimensional é subdividida em pequenos blocos tridimensionais para que a geometria, desses blocos, seja aproximadamente euclidiana. A curvatura é discutida utilizando dois modelos, o primeiro compatível com o espaço euclidiano e o segundo compatível com um espaço curvo ao redor de um buraco negro. Após essa discussão,

---

<sup>3</sup>Tradução do original *sector models*.

os detalhes matemáticos sobre o modelo são discutidos. Por fim, os autores comentam que este trabalho foi aplicado com estudantes de graduação, de EM e outras pessoas do público em geral. O trabalho também é aplicado com frequência na Universidade de Hildesheim, na Alemanha, para futuros professores de Física. Discutiremos em mais detalhes o modelo de setor na seção 2.4.2.

No trabalho do físico Richard Price (2016), o autor tem por objetivo apresentar a curvatura espacial de uma superfície e a curvatura do espaço-tempo que descreve a gravidade na TRG enfatizando a diferença entre as respectivas curvaturas. Na seção II do artigo o autor faz uma abordagem interessante para alunos que cursaram apenas cursos introdutórios de Física. Já na seção III, o autor faz uma discussão mais técnica do tópico. Com essa abordagem, Price tenta evitar a discussão da curvatura do espaço-tempo utilizando a analogia do tecido elástico.<sup>4</sup> Na seção II, Price introduz as geodésicas, que são as curvas mais “retas possíveis” em uma superfície curva. Como exemplo, o autor ilustra as curvas percorridas por aviões em voos comerciais, pois essas curvas representam o caminho mais “reto” possível entre dois pontos na superfície da Terra, sendo esse caminho representando a menor distância entre esses mesmos dois pontos fixos. Em uma superfície plana sabemos que a menor distância entre dois pontos é uma reta, mas em uma superfície curva, a geodésica é a curva que minimiza a distância entre dois pontos. Price estabelece então o conceito de separação entre duas geodésicas. Assim, o autor estabelece que quando esta separação se altera, em uma superfície curva, representa um conceito básico sobre curvatura. Em seguida, através de diagramas espaço-tempo bidimensionais são traçadas as linhas de mundo (ou linhas de universo) de cinco partículas. Ao comparar as linhas de mundo de duas partículas que inicialmente estavam paralelas, mas com o decorrer do tempo afastam-se uma da outra o autor argumenta que esse fenômeno está associado ao inconfundível sello da gravidade (PRICE, 2016, pag. 590). A seção III não será descrita aqui por se tratar de um tópico técnico que foge do escopo desta tese.

No trabalho desenvolvido por Gould (2016), o autor tem por objetivo apresentar uma discussão para o modelo da gravidade de Einstein através do problema da queda livre de um objeto. A metodologia utilizada no artigo consiste, inicialmente, em utilizar o exemplo da queda livre e a partir deste exemplo reformular a interpretação newtoniana do problema em termos geométricos. Após esta etapa, o autor compara os modelos de Newton e de Einstein, na descrição da queda livre, para mostrar que

---

<sup>4</sup>Discutiremos em mais detalhes a analogia do tecido elástico na seção 2.4.2.

os modelos fazem previsões contrárias em relação a atuação de uma força durante a queda livre. Um diagrama espaço-tempo é traçado e uma discussão sobre a interpretação acerca da forma, reta ou curva, das *linhas de mundo* é realizada. Durante essa etapa inicial, os autores promovem uma discussão entre os modelos de Newton e de Einstein na busca pela explicação do fenômeno da queda livre destacando as diferentes interpretações obtidas para cada modelo. Utilizando o modelo de Newton, a discussão analisa o fato de que podemos sentir a força da gravidade ao segurar uma bola e, posteriormente, perceber o efeito desta força ao abandonarmos a bola e a mesma entrar em movimento. Se traçarmos um diagrama espaço-tempo para estas duas situações perceberemos que a linha reta corresponde ao gráfico da bola enquanto a mesma estivesse em repouso e a linha curva corresponde ao gráfico da bola enquanto a mesma estivesse em queda livre (GOULD, 2016, p. 397). No modelo de Newton, a linha de mundo será reta se a força resultante for nula e, no caso da bola em queda, a linha de mundo será curva (parábola), pois existe a força da gravidade atuando na mesma. Após essa discussão, o mesmo problema é interpretado usando o modelo de Einstein. A interpretação do modelo de Einstein estabelece uma premissa idêntica à do modelo de Newton, a saber: o gráfico da linha de mundo de um objeto será uma linha “reta” se e somente se nenhuma força estiver atuando no corpo. Entretanto, o modelo de Einstein irá interpretar que a linha de mundo da bola em repouso será uma linha curva enquanto a linha de mundo da bola em queda livre será uma linha reta - embora analisando este gráfico a nossa intuição irá dizer o oposto. Dessa forma, a bola em queda livre, no modelo de Einstein, está livre da ação de forças e a linha de mundo que é dada por uma parábola representa a linha “reta” - embora o formato da linha de mundo seja visualmente curva no diagrama espaço-tempo. No caso da partícula em repouso existe uma força externa atuando (a força que a pessoa aplica verticalmente para cima) desviando a linha de mundo da partícula de sua linha “reta”. Na sequência, o artigo discute que a massa distorce a geometria do espaço-tempo tornando essa geometria não-euclidiana de modo que as medidas de espaço e tempo variam de local para local e o formato de uma linha de mundo nesse diagrama também é distorcida. Para que o argumento discutido para o modelo de Einstein fosse compreendido, o artigo utiliza uma analogia com viagens feitas por aviões e realiza as respectivas representações dessas viagens em projeções cartográficas (mapas) de modo a elucidar as explicações do modelo de Einstein para explicar a queda livre relacionados à mudança da geometria. Essa analogia tem os seguintes pontos fortes: fornece um exemplo simples em que

as linhas retas<sup>5</sup> parecem curvas ao olhos; a escala de distância no mapa varia com a localização no mapa de uma forma análoga à alteração da escala de espaço e tempo na TRG; e a análise do mapa permite confrontar os modelos de Newton e Einstein para a gravidade tomando como analogia as interpretações possíveis para as rotas de aviões entre dois pontos na superfície da Terra. Por fim, as últimas seções do artigo trazem uma discussão mais técnica sobre a escala de espaço e tempo introduzindo a métrica espacial e também a métrica espaço-temporal. A verificação matemática da afirmação de Einstein de que uma bola em queda segue o caminho mais reto possível é realizada. Para isso, o autor propõe para o leitor mais curioso a solução da equação da geodésica através de soluções numéricas utilizando programas como o Matlab ou o Mathematica. A solução obtida pelo autor é justamente a parábola (mesma solução obtida a partir da mecânica newtoniana embora as interpretações sejam distintas). Um complemento ao trabalho de Gould (2016) é feito no trabalho de Rebilas (2016) em que o autor propõe outra maneira de obter a parábola através da utilização dos *vetores de Killing*. A forma utilizada por Rebilas é um tanto técnica e foge do escopo desta tese.

No trabalho de Wood, Smith e Jackson (2016), os autores propõem uma atividade prática para a discussão entre as diferenças nas geometrias de um plano, uma esfera e uma superfície com formato de uma sela de cavalo. O artigo tem como objetivo apresentar essa discussão aplicada a tópicos de cosmologia sobre a diferença entre um universo plano, um aberto e um fechado. Para isso, os autores exploram o traçado de triângulos sobre um pedaço de papel plano, sobre uma esfera e sobre uma sela de cavalo. Os ângulos internos são medidos e a soma dos ângulos internos é feita. Um valor igual a  $180^\circ$  é encontrado no caso do triângulo desenhado em um pedaço de papel enquanto um valor maior que  $180^\circ$  é encontrado para a esfera e um valor menor que  $180^\circ$  é encontrado para a sela de cavalo. Por fim, os autores comentam que utilizam essa estratégia em vários cursos universitários de astronomia e em seminários para estudantes do ensino secundário interessados nesses tópicos de TRG e de cosmologia.

### 2.2.2 Trabalhos a partir do ano de 2017

Descreveremos agora os trabalhos publicados a partir do ano de 2017. Notamos, a partir de 2017, um aumento significativo de artigos que discutem a aplicação de práticas, abordando a TRG, com enfoque no ensino secundário motivado provavelmente

---

<sup>5</sup>Em espaços curvos a concepção de linha reta da geometria euclidiana é substituída pela geodésica que pode ser pensada com a linha mais “reta” possível em um espaço curvo.

pela detecção das ondas gravitacionais e, posteriormente, pela divulgação da primeira imagem de um buraco negro.

Os próximos três trabalhos descritos fazem parte do grupo de pesquisa “*The Einstein-First Project*”. O grupo “*The Einstein-First Project*” visa apresentar a Física moderna para estudantes com idades compatíveis com a faixa etária de alunos da educação básica. Pode-se acessar a página do grupo através do seguinte link: <https://www.einsteinianphysics.com/>. Neste link é possível acessar os artigos publicados pelo grupo de pesquisa.

O trabalho de Stannard, Blair, Zadnik, Kaur (2017) tem por objetivo apresentar uma forma de discutir a gravidade com base na TRG, tanto qualitativamente quanto quantitativamente, em um nível compatível com estudantes do EM. A sequência proposta inicia com uma discussão, similar à proposta feita por Gould (2016), ao discutir as interpretações de pilotos para viagens realizadas entre duas cidades de mesma latitude. A partir dessa discussão, a ideia de geodésica é apresentada como o caminho mais curto entre dois pontos em uma superfície curva. A partir de uma projeção cartográfica (mapa), uma discussão sobre a obtenção gráfica da geodésica é feita. Essa maneira gráfica segue a seguinte ideia: primeiro é traçada uma linha vertical (linha central), no mapa, unindo pontos equidistantes as duas cidades. Em seguida, são marcados pontos no mapa, na direção leste-oeste, que distam 1000 km dos pontos localizados na linha central e, então, uma linha (curva) é traçada no mapa, chamada de linha de escala. O caminho mais curto entre as duas cidades, a geodésica, é obtida traçando uma curva que inicia e termina nas cidades de mesma latitude e, além disso, a curva traçada deve cortar perpendicularmente as linhas de escala. O mapa descrito pode ser encontrado em (STANNARD; BLAIR; ZADNIK; KAUR, 2017, p. 3), onde as linhas de escala bem como a geodésica estão traçadas. Na sequência o conceito de geodésica é apresentado na TRG como o caminho que uma partícula livre seguirá no espaço-tempo curvo. A determinação das geodésicas ocorrem a partir das soluções das equações de campo de Einstein, o que torna o processo complexo. Por isso, os autores propõem a discussão da *distorção do tempo*<sup>6</sup> como uma forma de elucidar a analogia da projeção cartográfica com as equações de campo de Einstein, que fornecem a geometria do espaço-tempo. Para a discussão do distorção do tempo os autores utilizam uma equação obtida a partir da solução de Schwarzschild (SCHWARZSCHILD, 1916). Dessa forma, a partir da solução de Schwarzschild, com algumas aproxima-

---

<sup>6</sup>Tradução de *time warp*.

ções, pode-se escrever:

$$\frac{\Delta t_r}{T_\infty} = \frac{GM}{rc^2},$$

onde  $\Delta t_r$  representa a diferença entre o intervalo de tempo medido por um relógio localizado no “infinito” (muito longe da fonte gravitacional) e o intervalo de tempo medido por um relógio localizado em  $r$ ,  $r$  coordenada radial,  $T_\infty$  o intervalo de tempo medido por um relógio no “infinito”,  $G$  representa a constante de gravitação universal,  $M$  a massa da fonte gravitacional e  $c$  a velocidade da luz.

A partir da equação anterior, os autores mostram que um relógio localizado na superfície da Terra e um relógio no espaço livre (afastado da Terra que mede  $T_\infty$ ), inicialmente sincronizados, irão apresentar valores diferentes com o passar do tempo. Após o intervalo de um dia, o relógio no espaço livre irá registrar um intervalo de tempo maior que o intervalo de tempo registrado pelo relógio na superfície da Terra, com uma diferença de  $60\ \mu s$ . Além disso, uma comparação também é feita entre a marcação do relógio na superfície da Terra com um segundo relógio a uma altitude de 20.000 km. Essas análises são construídas a partir de uma gráfica *distância do centro da Terra vs. tempo* (STANNARD; BLAIR; ZADNIK; KAUR, 2017, p. 4). Na sequência, o tempo passa a ser medido em unidade de comprimento (multiplicando o tempo pela velocidade da luz). Os autores chamam de “mapa de espaço e tempo” os diagramas em que no eixo vertical temos uma distância ao longo de uma direção de interesse e no eixo horizontal temos o tempo medido em unidade de comprimento. Em termos newtonianos, o gráfico distância-tempo é traçado colocando o tempo na horizontal. Dessa forma, neste gráfico, distância-tempo na perspectiva newtoniana, as linhas verticais representam instantes de tempo fixos. Entretanto, na TRG lidamos com o espaço-tempo curvo e devido à distorção do tempo ao traçarmos um gráfico distância-tempo as linhas de tempo constante não estarão mais ao longo da vertical. Dessa forma, os autores modificam a equação colocada anteriormente e escrevem  $\Delta t_h$  em termos da altura  $h$  em relação à superfície da Terra:

$$\frac{\Delta t_h}{T} = \frac{g}{c^2}h,$$

onde  $\Delta t_h$  representa a diferença entre o intervalo de tempo medido por um relógio em uma altura  $h$  e o intervalo de tempo medido na superfície da Terra. O intervalo de tempo  $T$  é dado pelo intervalo de tempo medido por um relógio na superfície da Terra,

$g$  representa a expressão para a aceleração da gravidade e  $c$  representa a velocidade da luz. A partir da equação anterior, o efeito da distorção do tempo é mostrado a partir de um gráfico. As linhas de tempo constante agora estão inclinadas em relação à vertical. Esse gráfico é mostrado no trabalho de Stannard, Blair, Zadnik e Kaur (2017, p. 5). Posteriormente, os autores introduzem a chamada *primeira lei de Einstein* “um objeto seguirá uma geodésica no espaço-tempo quando nenhuma força externa atuar sobre ele”. Para a introdução da chamada *primeira lei de Einstein*, os autores começam discutindo a *primeira lei de Newton* fornecendo uma interpretação da mesma a partir da análise de um diagrama distância-tempo. Neste diagrama, o gráfico de um objeto em repouso será uma reta horizontal enquanto o gráfico de um objeto em queda livre será uma parábola. Esses gráficos são mostrados no artigo. Analisando o gráfico nota-se que quando a força resultante no objeto é nula, a reta traçada no diagrama distância-tempo corta em  $90^\circ$  as linhas de tempo constante. A partir do diagrama distância-tempo teremos que a linha, representando o gráfico de um objeto, que cruzar as linhas de tempo constante em ângulos retos será a *geodésica*. No entanto caso exista uma força externa líquida atuando em um objeto, a linha traçada no gráfico não irá cruzar as linhas de tempo constante em ângulos retos. Depois dessa explanação, a *primeira lei de Einstein* é apresentada em que os autores comentam da importância dessa generalização quando o espaço-tempo é curvo. Na presença de um objeto massivo, as linhas de tempo constante não estão mais alinhadas com a vertical e possuem agora uma inclinação em relação à vertical. Neste diagrama distância-tempo, em que as linhas de tempo constante não estão na vertical, a linha traçada para o gráfico de uma partícula em queda livre cortará as linhas de tempo constante em ângulos retos, portanto o traçado do gráfico da partícula em queda livre será a geodésica. Assim, uma partícula em queda livre, na TRG, é a partícula livre e, portanto, percorrerá uma geodésica. Por fim, os autores fazem previsões quantitativas.

Os autores do projeto “*The Einstein-First Project*” apresentam, também, um estudo com o nome “Teaching Einsteinian Physics at Schools” que é publicado, separadamente, em 3 (três) partes. A parte 1 discute um modelo para explicar a gravidade na perspectiva de Einstein (KAUR; BLAIR; MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017a), a parte 2 discute modelos e analogias para a Física Quântica (KAUR; BLAIR; MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017b) e a parte 3 apresenta uma revisão dos resultados de pesquisa (KAUR; BLAIR; MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017c). Discutiremos a seguir as partes 1 e 3.

O trabalho de Kaur, Blair, Moschilla, Stannard e Zadnik (2017a) tem por objetivo fornecer o embasamento conceitual na utilização de analogias e de simples modelos físicos importantes para se ensinar a TR, mais especificamente a TRG. A metodologia aplicada visa a discutir duas ideias centrais, a saber: massas provocam uma curvatura no espaço-tempo e corpos em queda livre percorrem os caminhos mais curtos no espaço-tempo. Os autores advogam que os alunos tenham em mente a célebre frase do físico John Wheeler “*O espaço-tempo diz à matéria como se mover; a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar*”. A introdução aos conceitos é feita de maneira sequencial com a discussão de oito temas: a relação entre matéria e espaço (curvo); o espaço diz à matéria como se mover, mapeando a forma do espaço usando trajetórias de fótons; as lentes gravitacionais; testando as leis da gravitação de Newton; a terceira lei do movimento planetário de Kepler; a precessão geodésica; e os sistemas estelares binários e as ondas gravitacionais. Grande parte da abordagem gira em torno da utilização da analogia do tecido elástico. No artigo também é explorada uma atividade para estudar a geometria não-euclidiana. Nesta etapa são explorados dois tópicos: o significado de uma linha reta e geometria em woks<sup>7</sup>. Por fim, o artigo faz uma discussão final sobre a TRR. A faixa etária dos estudantes que participaram dessa sequência variava de 11 até 16 anos. Neste trabalho os autores não apresentam resultados quantitativos, mas os mesmos fazem uma discussão final acerca da construção da abordagem proposta. Os modelos e as analogias utilizadas foram evoluindo ao longo de cinco anos de aplicação. Os autores afirmam que a natureza interativa das atividades provocou benefícios na aprendizagem.

Já no trabalho Kaur, Blair, Moschilla, Stannard e Zadnik (2017c) têm por objetivo apresentar os resultados da aplicação dos trabalhos anteriores (KAUR; BLAIR; MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017a) e (KAUR; BLAIR; MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017b). Como já mencionado, a idade dos estudantes variava de 11 até 16 anos. A metodologia aplicada foi composta pela aplicação de um pré-teste e um pós-teste tanto para avaliar o entendimento conceitual quanto para avaliar as atitudes dos estudantes em relação à Física. Em relação ao entendimento conceitual, foram realizadas perguntas abertas nessa análise. As perguntas abertas eram do tipo “O que é a luz” e “O que você quer dizer com o termo gravidade”. Já para avaliar as atitudes dos alunos as questões foram montadas com itens em escala Likert e apresentavam perguntas do tipo “Acho que Física é um assunto interessante” e “Gosto de aprender

---

<sup>7</sup>É um tipo de frigideira que apresenta o fundo arredondado.

novos conceitos e ideias”. O pré-teste e o pós-teste foram realizados nas mesmas condições e as questões passaram por validação. A pesquisa visava a responder se seria possível ensinar a Física einsteiniana para jovens estudantes e se o ensino da Física einsteiniana melhoraria as atitudes dos estudantes em Física. Os resultados mostram que a apresentação da Física einsteiniana, como concebida pelos pesquisadores “*The Einstein-First Project*”, estavam de acordo com as faixas etárias trabalhadas. Os pesquisadores trabalharam tanto com estudantes mais novos com 11 (onze) quanto com estudantes de 16 anos. Os autores concluem que a utilização de modelos e analogias (KAUR; BLAIR; MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017a) e (KAUR; BLAIR; MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017b) são eficazes para idades entre 11 e 16 anos. As pontuações para o pré-teste foram baixas para todas as faixas etárias. Uma elevação significativa nas notas dos estudantes ocorreu para a faixa etária entre 13 e 14 anos em que a pontuação média foi de 23% (pré-teste) para 91% (pós-teste). A análise também mostrou que o interesse dos estudantes sobre o tema aumentou após a introdução da Física einsteiniana. Um resultado ainda destacado no artigo foi que as meninas iniciaram com notas mais baixas em relação aos meninos na parte conceitual e com o interesse no tema menor também. Entretanto, após a apresentação da Física einsteiniana utilizando analogias e metáforas com enfoque na parte conceitual os autores destacam que as meninas obtiveram notas no pós-teste muito próximas dos meninos. Os autores alegam que as meninas pareceram engajar-se mais com as ideias conceituais e o aprendizado ativo do que abordagens convencionais.

Os próximos dois artigos apresentados a seguir, (ZAHN; KRAUS, 2018a) e (ZAHN; KRAUS, 2018b), correspondem a uma continuação do artigo (ZAHN; KRAUS, 2014), publicado pelo grupo de EF da Universidade de Hildesheim.

O trabalho de Zahn e Kraus (2018a) tem por objetivo descrever um *workshop* que utiliza o modelo de setor para discutir a deflexão da luz sob a ação de um campo gravitacional, onde este *workshop* é feito para estudantes secundários e estudantes de graduação. O artigo inicia com a aplicação do modelo de setor para discutir a construção de geodésicas em superfícies curvas. Cabe destacar que este *workshop*, quando aplicado para estudantes, inclui uma explicação adicional da descrição da TRG para as geodésicas. A geodésica em uma superfície curva é introduzida como uma linha que é localmente reta. Para ilustrar os conceitos apresentados anteriormente os autores iniciam analisando a marcação de geodésicas em uma esfera (globo terrestre). As marcações dessas geodésicas mostram que duas geodésicas partindo de um determinado

paralelo (latitude fixa) convergem ao se aproximar, por exemplo, do polo norte. Após essa etapa substitui-se a superfície esférica por pequenos elementos de área planos (setores) de geometria euclidiana. Ao dispor os pequenos elementos de área (setores) em uma superfície plana temos um modelo de setor para representar a superfície curva. No interior do setor, com o auxílio de uma régua, traça-se uma linha reta. Quando a linha reta atinge a borda do setor e queremos continuar o traçado em um segundo setor, unimos dois setores colocando em contato as suas arestas e, assim, continuamos o traçado da linha reta em cada setor (ZAHN; KRAUS, 2018a, p. 4) e (ZAHN; KRAUS, 2018a, p. 5). Através dessa construção mostra-se que duas geodésicas irão convergir, aproximando-se uma da outra, mesmo inicialmente paralelas. Na sequência o artigo discute a construção de geodésicas próximas a um *buraco negro*. O modelo de setor é utilizado para representar o plano de simetria, para uma região fora do horizonte de eventos de um buraco negro. Nesse experimento, uma nave é enviada para inspecionar o espaço ao redor do buraco negro e a construção de uma estrutura composta por hastes rígidas é descrita. Após esta etapa, os setores são construídos e colocados sobre um plano euclidiano para formar o modelo de setor ao redor do buraco negro. Com o modelo de setor construído as geodésicas são traçadas de modo semelhante ao descrito anteriormente para as superfícies curvas. Nota-se que a direção da geodésica vai mudando ao longo do caminho. Esse traçado ilustra a deflexão da luz em um campo gravitacional. Localmente a propagação da luz ocorre por um caminho reto, mas devido ao espaço curvo, a direção de propagação vai mudando ao longo da trajetória. Posteriormente, os autores descrevem uma segunda forma de traçar as geodésicas. Na sequência mostram como obter matematicamente os setores a partir da métrica da superfície ou do espaço-tempo e, também, discutem a acurácia das geodésicas aplicadas no modelo de setor.

O trabalho de Zahn e Kraus (2018b) desenvolve dois *workshops* em que são discutidas maneiras de construir as trajetórias para a luz e partículas livres. Essa construção visa a discutir os problemas do desvio gravitacional para o vermelho e, também, da queda livre vertical. A discussão inicia com a construção das geodésicas para o espaço-tempo na vizinhança de um buraco negro. Nesta etapa é descrito o traçado das geodésicas para a luz em um diagrama de setor para o espaço-tempo e o desvio gravitacional para o vermelho é apresentado. Posteriormente, a discussão sobre o traçado das geodésicas é feita para partículas livres. Nesta etapa, a queda livre de uma partícula na vizinhança de um buraco negro é discutida e o diagrama espaço-tempo usando o mo-

delo de setor é apresentado. Uma discussão sobre as forças de maré e a curvatura do espaço tempo são apresentadas. Por fim, também é introduzida uma discussão sobre a utilização do modelo de setor para, por exemplo, discutir o PE. Na subseção 2.4.2 iremos discutir em mais detalhes a construção de alguns *modelos de setor* descritos em (ZAHN; KRAUS, 2014), (ZAHN; KRAUS, 2018a), (ZAHN; KRAUS, 2018b).

O trabalho de Janis (2018) apresenta uma sequência para a discussão acerca do espaço-tempo curvo da TRG. Janis inicia apresentando um avião que deve percorrer o caminho mais curto entre Ottawa, no Canadá e Veneza, na Itália. Nessa parte, o autor discute o conceito de geodésica, o caminho mais reto possível entre os dois pontos nesse espaço. No caso de uma esfera, a geodésica é dada por um arco de grande círculo. Se utilizarmos, por exemplo, o mapa de Mercator para estudar este problema notaríamos que a geodésica seria uma linha curva e, analisando o mapa, teríamos a impressão de que se conectássemos uma linha reta ligando Ottawa até Veneza, que apresentam a mesma latitude aproximadamente, teríamos encontrado a rota que apresenta a menor distância. Dessa forma, teríamos a falsa impressão de que a geodésica representaria um caminho mais longo em relação a linha traçada, no mapa de Mercator, que conecta diretamente as duas cidades. O autor, então, discute que o mapa não representa a geometria da Terra com precisão, existem distorções trazidas na construção de todos os mapas. Por isso, na projeção de Mercator, a geodésica parece ser uma rota mais longa do que a rota traçada no mapa que conecta diretamente as cidades. Após essa explanação o autor concentra-se nos diagramas espaço-tempo bidimensionais da TRR. O autor traça as linhas de mundo para três partículas, a saber: uma partícula em repouso, uma partícula em movimento com velocidade constante e uma partícula em movimento acelerado. A linha de mundo da partícula em movimento acelerado é uma linha curva. Na sequência, o autor discute que partículas livres seguem geodésicas no espaço-tempo curvo. Assim, da mesma forma que a geodésica em um mapa de Mercator é uma linha curva teremos que as geodésicas, na TRG, serão linhas curvas quando traçadas em um diagrama espaço-tempo plano. Dessa forma, o autor propõe, com essa abordagem, uma discussão da ideia central da TRG.

O trabalho de Pössel (2018) inicia a sua discussão fornecendo um contexto da criação do texto que se origina de uma apresentação realizada em um encontro da Sociedade Alemã de Física. Nesse encontro, uma parte das apresentações teve como foco o ensino da TRG. Pössel reúne da literatura possíveis caminhos para a introdução da TRG bem como alertas em relação ao excesso de simplificação na utilização

de modelos em relação aos fenômenos físicos. O autor destaca que o texto é voltado prioritariamente para professores e divulgadores científicos, mas também pode ser utilizado por estudantes que buscam uma melhor compreensão de ideias centrais da TRG. Ao longo de oito capítulos o autor traz uma revisão de alguns trabalhos que tratam dos seguintes temas: modelos; modelos bons e ruins; tecido elástico; buracos negros; cosmologia; e ondas gravitacionais. O trabalho de Pössel conta com um acervo e discussões importantes para todos que desejam levar a TRG para a sala de aula da escola básica.

Os próximos trabalhos apresentados fazem parte do projeto chamado *ReleQuant*. Esse projeto tem como objetivo desenvolver ambientes de aprendizagem online para os conteúdos de TRG e de Física Quântica. O ambiente de aprendizagem online bem como trabalhos desenvolvidos pelo *ReleQuant* podem ser acessado através da página <https://www.magdalenakersting.com>. Em relação ao tema TRG destacamos os seguintes trabalhos do grupo *ReleQuant*: (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018), (KERSTING; STEIER, 2018), (CHOUDHARY; KRAUS; KERSTING; BLAIR; ZAHN; ZADNIK; MEAGHER, 2019), (KERSTING; TOELLNER; BLAIR; BURMAN, 2019), (KERSTING, 2019), (KERSTING, 2020). A seguir descreveremos em mais detalhes estes estudos. É interessante ressaltar que alguns destes trabalhos já possuem integrações entre diferentes grupos de pesquisa que apresentam interesse no ensino da TRG.

O estudo desenvolvido por Kersting, Henriksen, Bøe e Angell (2018) foi aplicado em uma disciplina optativa de Física para o último ano do EM na Noruega. Esse projeto tem como objetivo desenvolver ambientes de aprendizagem online para os conteúdos de TRG e de Física Quântica utilizando como estratégia elementos de história, filosofia e aspectos sobre a natureza da ciência. A pesquisa proposta resultou em uma sequência voltada para o nível secundário (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018, p. 010130-8):

- uma introdução descrevendo a TRG como uma nova teoria da gravidade;
- o PE;
- referenciais e o princípio da relatividade;
- fenômenos relativísticos (deflexão da luz, desvio gravitacional para o vermelho e dilatação temporal gravitacional);
- espaço-tempo e curvatura descrevendo a relação entre espaço, tempo e gravidade.

A abordagem foi aplicada em quatro escolas, de desempenho escolar elevado, no ano de 2016 em Oslo, na Noruega. Os estudantes que participaram cursavam o último

ano do EM e estavam inscritos em uma disciplina de Física avançada. A amostra era composta por 122 alunos, com idades entre 18 e 19 anos. A metodologia utilizada consistiu na aplicação de um ambiente de aprendizagem online ao longo 180 minutos. Durante as discussões sobre a TRG, sempre estavam presentes pesquisadores para acompanhar o processo. Os estudantes gravaram as suas falas, quando estavam reunidos em pequenos grupos, e enviaram para o professor responsável pela dinâmica. Posteriormente, o professor repassou as gravações para os pesquisadores. As respostas escritas foram obtidas através da plataforma do ambiente de aprendizagem online. De forma a obter informações detalhadas sobre a interação dos estudantes com o ambiente de aprendizagem online e também sobre a avaliação dos estudantes acerca do processo de aprendizagem foram realizadas entrevistas semiestruturadas em um grupo focal. O quantitativo de estudantes que participaram destas entrevistas foi de 25 alunos. Com o auxílio do software Atlas.ti e utilizando análise temática os autores fizeram a análise dos dados. Discutiremos aqui resultados encontrados acerca da compreensão dos conceitos-chave da TRG. Em relação ao PE, os autores analisaram que os estudantes acharam difícil acreditar que não existisse nenhum experimento que pudesse diferenciar um referencial que estivesse sob ação da gravidade de um referencial acelerado. A introdução ao PE, proposto pelos autores, é feita através de uma garrafa com água que é abandonada e cai em queda livre. A garrafa apresentava furos em sua lateral e, inicialmente, a água escoava pelos furos. Quando a mesma era colocada em queda livre a água parava de escoar e a discussão do PE era realizada baseada na explanação deste problema. Os autores relatam que essa abordagem foi bem-sucedida em conectar a vida cotidiana dos alunos com a física da TR. Uma observação importante é feita no artigo sobre a conexão entre os fenômenos da vida cotidiana com a TR: “[...] atividades de aprendizagem em TRG precisam ser muito explícitas ao vincular fenômenos relativísticos à experiência cotidiana dos alunos (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018, p. 010130-10, tradução livre). Entretanto, devemos também lembrar dos resultados descritos por Bandyopadhyay e Kumar acerca de uma dificuldade maior na compreensão dos estudantes do PE escrito em termos dos referenciais em queda livre. Nas palavras dos autores: “A conclusão é inconfundível: a versão 2 do PE (baseada no “pensamento mais feliz” de Einstein) é sutil e muito mais difícil de assimilar do que versão 1” (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 151). A versão 1 e a versão 2 do PE apresentadas por Bandyopadhyay e Kumar (2010b) foi descrita na subseção “Trabalhos anteriores ao ano de 2017”. Destacamos também que

os estudantes da amostra de Bandyopadhyay e Kumar eram mais maduros intelectualmente, pois os mesmos eram estudantes universitários. Por isso, acreditamos que essa dificuldade com a versão 2 do PE seja ainda mais complexa para estudantes da escola secundária. No capítulo 3, discutiremos como esses resultados acerca do PE impactaram na condução do curso de TRG proposto nesta tese. Em relação à interpretação dos referenciais inerciais na TRG, Kersting, Henriksen, Bøe e Angel (2018) apresentam o resultado de que existe uma lacuna entre conhecer a definição de referencial inercial e saber aplicar essa definição em situações-problema. Para o tópico gravidade e espaço-tempo, os alunos apresentaram uma dificuldade na interpretação da gravidade como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo e relacionar essa interpretação com a sua experiência cotidiana com a gravidade. Em relação aos fenômenos relativísticos, o desvio gravitacional para o vermelho e a discussão sobre o funcionamento de relógios em um campo gravitacional foram problemáticos para os estudantes. Por isso, o artigo relata a necessidade da explcação detalhada dos fenômenos relativísticos.

No trabalho de Kersting e Steier (2018), os autores apresentam uma pesquisa pioneira cujo objetivo é pesquisar sobre as concepções dos estudantes secundários em relação ao espaço-tempo curvo. Essa análise se concentra na forma como os estudantes raciocinam ao utilizar analogias e metáforas na compreensão da relação entre gravidade e a curvatura do espaço-tempo. Os autores utilizam a famosa analogia do tecido elástico para investigar a concepção dos estudantes. Este estudo ocorreu com 97 alunos com idades entre 18 e 19 anos em três escolas localizadas na Noruega, sendo essas escolas de alto desempenho a nível nacional. Esse estudo faz parte do projeto *ReleQuant* descrito anteriormente. A metodologia utilizada consistiu na utilização do ambiente de aprendizagem online do projeto *ReleQuant* ao longo de duas aulas de duas horas com os estudantes trabalhando em pequenos grupos durante as aulas. Os autores utilizaram uma tarefa que visava a analisar uma *charge* que apresentava críticas à analogia do tecido elástico, onde uma tradução da *charge* pode ser vista na Figura 2.4. Nessa análise, os alunos deveriam refletir sobre a analogia do tecido elástico para representar o espaço-tempo curvo. Além dessa reflexão, os estudantes deveriam escrever um resumo sobre a discussão realizada em grupo sobre a analogia do tecido elástico. Um total de 65 respostas foram obtidas com o auxílio da plataforma do ambiente de aprendizagem online. A partir das respostas os autores identificam as metáforas utilizadas pelos estudantes para a compreensão da analogia do tecido elástico e, também, analisam como os estudantes avaliam os pontos fortes e os pontos fracos da analogia.

do tecido elástico. Os resultados são apresentados em duas partes: a primeira parte consiste em identificar as metáforas conceituais relevantes advindas da literatura especializada e a segunda parte combina uma contextualização da análise anterior com as descobertas obtidas a partir dos dados das respostas dos alunos. A primeira parte tinha como objetivo sistematizar as metáforas mais utilizadas na literatura estabelecendo a seguinte relação “alvo é fonte”<sup>8</sup>. Com base nessa relação, quatro metáforas conceituais foram identificadas:

- o espaço-tempo é um tecido maleável;
  - o espaço-tempo é uma superfície 2D que possui características geométricas;
  - o espaço-tempo é um pano de fundo que responde à presença de objetos e objetos maciços distorcem o espaço-tempo;
  - o espaço-tempo é um ator que influencia o movimento dos objetos e os objetos se movem sob a influência do espaço-tempo.
- (KERSTING; STEIER, 2018, p. 14)

Os autores ainda classificam as quatro metáforas conceituais em mapeamento estático e mapeamento dinâmico. As duas primeiras metáforas conceituais, listadas anteriormente, referem-se ao mapeamento estático em que temos uma relação entre a área de origem (concreto) como o tecido maleável e a área alvo (abstrato) como o espaço-tempo. As duas últimas metáforas conceituais referem-se ao mapeamento dinâmico em que bolas curvam o tecido, área de origem, e objetos massivos curvam o espaço-tempo, área alvo. Dessa forma, o mapeamento dinâmico mostra a interpretação da gravidade no sentido einsteiniano. A segunda parte dos resultados corresponde à análise das respostas dos estudantes. Os estudantes apresentaram uma gama maior em relação às metáforas utilizadas para descrever a analogia do tecido elástico. As metáforas conceituais empregadas pelos alunos são:

- o espaço-tempo é uma superfície 2D que possui características geométricas;
- o espaço é um tecido maleável;
- o tempo é um tecido maleável;
- o espaço é uma superfície que tem características geométricas;
- o espaço é uma rede de linhas;

---

<sup>8</sup>traduzido do original *target-is-source*.

- o espaço-tempo é a quarta dimensão;
- o espaço-tempo é um pano de fundo que responde à presença de objetos massivos;
- o espaço-tempo é um ator que influencia o movimento dos objetos;
- o espaço é um pano de fundo que responde à presença de objetos massivos;
- o tempo é um pano de fundo que responde à presença de objetos massivos;
- a massa é puxada para baixo;
- uma força curva o espaço-tempo;
- a gravidade influencia o espaço-tempo;
- a massa influencia a força.

(KERSTING; STEIER, 2018, p. 19)

Os sete primeiros itens para as metáforas conceituais correspondem ao mapeamento estático e as demais correspondem ao mapeamento dinâmico. Em relação ao mapeamento estático, a utilização da metáfora “o espaço-tempo é a quarta dimensão” revela que a utilização de uma terminologia correta pode mascarar uma falta de compreensão conceitual dos estudantes para um determinado tópico. Uma observação semelhante tinha sido realizada por (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a, p. 020104-8) que notaram que alguns estudantes utilizam jargões técnicos nas respostas e, assim, algumas perguntas adicionais devem ser feitas para que a compreensão conceitual seja avaliada.

Os estudantes construíram mais metáforas relacionadas ao mapeamento dinâmico e alguns equívocos foram produzidos nessa construção mostrando uma dificuldade maior dos estudantes em entender a interpretação da gravidade na perspectiva de Einstein. Os mapeamentos mais comuns feitos pelos estudantes estavam relacionados com os mapeamentos feitos na literatura em que o espaço-tempo é tratado como um cenário que responde à presença de objetos massivos e também como um ator que influencia o movimento de objetos. A metáfora conceitual, que não foi relatada na literatura, que mais apareceu foi “a massa é puxada para baixo”. Nessa perspectiva a analogia do tecido elástico necessita da força da gravidade que puxa a massa para baixo. Outra metáfora conceitual que surgiu das respostas dos estudantes foi que “uma força curva o espaço-tempo”. Essa metáfora conceitual ilustra que os estudantes utilizam o conceito de força em seu raciocínio mesmo que os mesmos conheçam a informação que na

TRG a gravidade não é tratada como uma força. Logo, os autores ilustram que as novas metáforas conceituais apontam para um esforço na tentativa de mudar a concepção da MN para a TRG. Como relatado no artigo, os estudantes confundem causa e efeito, pois na interpretação einsteiniana a força da gravidade não curva o espaço-tempo mas aparece da curvatura do espaço-tempo. Em relação às limitações da utilização da analogia do tecido elástico, os estudantes mostraram uma compreensão sobre a função das analogias na ciência. Alguns estudantes apresentaram consciência de que as analogias são sempre limitadas. Os estudantes ainda apresentaram percepções bastante sofisticadas ao mencionar que somente matematicamente se pode descrever completamente a TRG. Os estudantes também mostraram a percepção de que não é possível visualizar mais de três dimensões. A limitação mais citada pelos estudantes para a analogia do tecido elástico foi a redução de um fenômeno quadridimensional para uma dimensão menor (bidimensional). Os alunos tiveram dificuldade em entender uma crítica recorrente da literatura em ensino de TRG sobre a utilização da analogia. Essa crítica à analogia refere-se ao fato de que a mesma sugere que o espaço-tempo se curva em uma dimensão invisível (GOULD, 2016, p. 396). Os estudantes não estavam conscientes que isso é um aspecto visual da analogia, mas não corresponde ao fenômeno real. Os estudantes ao analisar a analogia ainda tendem a pensar usando a Física Clássica e os mesmos apresentam dificuldade em entender como massas exercem atração sem o auxílio da força da gravidade. Poucos estudantes apontaram que a analogia do tecido elástico não mostra que a presença de massas provoca também uma curvatura do tempo. Por fim, o artigo ainda relata algumas respostas dos estudantes para a interação professor-aluno. Os estudantes analisaram na *charge* que é difícil ensinar TRG e que muitas vezes os professores recorrem à matemática para evitar perguntas difíceis dos alunos.

O trabalho de Choudhary, Kraus, Kersting, Blair, Zahn e Zadnik (2019) relata a criação de um grupo de colaboração internacional para o ensino da Física einsteiniana, chamado de *Einsteinian Physics Education Research (EPR)*. O EPER visa reunir e combinar abordagens de aprendizagem inovadoras na Física einsteiniana. A Física einsteiniana compreende os conteúdos da TR (restrita e geral) e a Física Quântica. A formação do EPER contém os seguinte grupos de pesquisa:

1. “*The Einstein-First Project*” - um grupo australiano formado por físicos e pesquisadores em EF que visa introduzir conceitos de Física Moderna reformando o currículo escolar de ciências;
2. “*Project ReleQuant*” - um projeto educacional que desenvolveu ambientes de aprendizagem

digital sobre Física Quântica e TRG para alunos do EM na Noruega;

3. “*The Spacetime-Travel Project*” - um grupo de EF da Universidade de Hildesheim, Alemanha, dirige o projeto *Spacetime-Travel* para facilitar o ensino da TRG e da TRR na escola e na Universidade.

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo que visa a combinar diferentes abordagens do grupo *EPER*. Um quantitativo de 72 alunos, com idades entre 15 e 16 anos, participou da pesquisa em Perth, na Austrália. Para esse estudo duas escolas participaram da pesquisa, a primeira escola contribuiu com 50 alunos enquanto a segunda escola contribuiu com 22 alunos. A metodologia foi composta pela aplicação de três unidades de ensino, a saber: “tempo e gravidade”, “gravidade é geometria” e “estranhezas quânticas”. O quantitativo de aulas para cada unidade era de duas aulas, em que cada aula apresentava duração de uma hora. Posteriormente, ao final das três unidades uma única aula de revisão foi realizada. Após a conclusão das unidades, questionários foram aplicados. Para a unidade 1, tempo e gravidade, foram utilizadas perguntas abertas que tinham como foco a compreensão conceitual. Para a unidade 2, gravidade é geometria, foram aplicadas questões fechadas visando a compreensão dos tópicos trabalhados nesta unidade. A unidade 3 visava a avaliar um tópico de Física Quântica. A unidade 1 pretende discutir a relação entre gravidade e a distorção do tempo. Os autores propõem um modelo para a discussão da distorção do tempo que faz parte do ambiente de aprendizagem online do grupo *ReleQuant* apresentado em (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018) que pode ser acessado em <https://www.viten.no/filarkiv/general-relativity/#/id/5a5b662e61f5dd7a0a6ef72b>. A unidade 2 apresenta a relação entre gravidade e geometria seguindo a abordagem desenvolvida pelo *Spacetime-Travel Project* utilizando os chamados *modelos de setor*. A unidade 3 traz uma abordagem baseada nos trabalhos do grupo *Einstein First* discutindo tópicos de Física Quântica. Os resultados para a unidade 1 são apresentados através de três conceitos-chave, a saber: o tempo como a quarta dimensão; gravidade como a curvatura do espaço-tempo; e objetos como seguindo geodésicas no espaço-tempo. A primeira pergunta, referente ao primeiro conceito chave, investigava a concepção dos estudantes sobre o tempo. As respostas dos estudantes variaram desde identificar o tempo como uma grandeza escalar até afirmação do tempo como a quarta dimensão. Os estudantes também apresentaram nas respostas a consciência da alteração da passagem do tempo perto de uma fonte gravitacional. A segunda pergunta, investigava a interpretação einsteiniana para a

gravidade. As respostas dos alunos variaram, basicamente, em três: um fenômeno geométrico, um fenômeno devido a curvatura do espaço-tempo e uma força dependente do espaço-tempo e dependente da matéria. Destacamos aqui que na interpretação einsteiniana a gravidade não é tratada como uma força. Além disso, 10% da amostra não utilizou a descrição einsteiniana para a resposta. O último tema, objetos seguem geodésicas no espaço-tempo, foi o mais problemático. Um quantitativo de apenas 18% responderam corretamente que partículas livres seguem geodésicas no espaço-tempo. Os resultados para a unidade 2 referem-se à eficiência na aplicação do modelo de setor para discussão da gravidade como geometria e apresentaram resultados positivos nessa abordagem.

O trabalho da autora Kersting (2019) tem por objetivo apresentar uma generalização relativística para a primeira lei de Newton à semelhança de (KAUR; BLAIR; MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017a, p. 7) e, através do experimento de pensamento da queda livre de Einstein, explicar como a distorção do tempo está relacionada com a gravidade. A metodologia para os objetivos propostos segue a apresentação do modelo do tecido elástico e o modelo da distorção do tempo. O modelo de distorção do tempo faz parte do projeto *ReleQuant* como já descrito anteriormente. O modelo de distorção do tempo pode ser acessado em <https://www.viten.no/filarkiv/general-relativity/#/id/5a5b662e61f5dd7a0a6ef72b>. Este modelo propicia aos estudantes explorar em uma perspectiva clássica e em uma perspectiva relativística um diagrama posição-tempo. A situação explorada consiste em analisar o gráfico de Einstein (personagem utilizado no modelo) quando o mesmo se mantém no topo de uma torre e, também, quando Einstein está em queda livre. Os estudantes podem interagir com a animação fazendo um esboço do gráfico utilizando o *mouse* do computador. No caso newtoniano, quando Einstein está em repouso no alto da torre o gráfico é uma linha reta horizontal enquanto no caso da queda livre o gráfico é uma parábola. Após a análise utilizando a mecânica newtoniana, inicia-se a análise relativística. Nessa etapa, um cursor é utilizado para curvar o eixo do tempo (KERSTING, 2019, p. 5). Já na situação relativística, com o eixo do tempo curvo, o gráfico quando Einstein está em repouso, agora, é uma linha curva enquanto no caso da queda livre o gráfico é uma linha reta. Nesse ponto, os estudantes entendem que, na TRG, objetos em queda livre seguem o caminho mais reto possível através do espaço-tempo, a geodésica. Além disso, o modelo de distorção do tempo é utilizado para a discussão do funcionamento de relógios em um campo gravitacional. Por fim, são lis-

tadas as limitações do modelo de distorção do tempo. O projeto *ReleQuant* foi testado com estudantes do EM durante um período de três anos. Os resultados apresentados mostram que existe uma motivação e engajamento dos estudantes com o conceito de espaço-tempo curvo embora os alunos achem o entendimento acerca do tema desafiador. O modelo de distorção do tempo auxiliou os estudantes na percepção de que objetos se movem no espaço-tempo e, também, na percepção da relação entre a distorção do tempo e a gravidade. Destacamos ainda que os alunos tiveram dificuldade de relacionar a ideia de geodésica aos corpos em queda livre. Embora o modelo de distorção do tempo auxiliasse no entendimento desse conceito abstrato, os estudantes apresentaram dificuldade na compreensão do tempo na TRG. Por fim, como resultado desta pesquisa os autores fazem uma sugestão de uma sequência para a utilização do modelo:

- ênfase no fato de que objetos se movem no espaço e no tempo. O envelhecimento, associado ao fato que os objetos se movem no tempo, traz uma conexão entre a gravidade e as experiências cotidianas;
- utilização do modelo de distorção do tempo para explicar a gravidade como manifestação do espaço curvo. Essa discussão complementa o experimento ilustrando o pensamento mais feliz da vida de Einstein acerca da queda livre;
- discussão do modelo de distorção do tempo para apresentar a dilatação do tempo gravitacional;
- utilização do modelo de distorção do tempo para uma comparação direta entre os modelos propostos por Isaac Newton e Albert Einstein na descrição da gravidade.

O trabalho de Kersting, Toellner, Blair e Burman (2020) tem por objetivo elaborar discussões sobre conceitos potencialmente confusos e fornecer análises quantitativas para o modelo de distorção do tempo (KERSTING, 2019) baseado no *feedback* de professores, físicos e pesquisadores em EF. A primeira discussão conceitual introduzida no artigo se relaciona ao fato que, na descrição relativística, para o problema da queda livre na Terra o fator preponderante para a discussão da queda de um objeto está relacionado à distorção do tempo. Dessa forma, o artigo introduz três questões conceituais importantes: caminhos mais retos em espaços curvos; coordenadas e realidade física; distorção do tempo e dilatação gravitacional do tempo. A primeira questão conceitual discute a ideia de geodésicas em espaços curvos e, posteriormente, apresenta as geodésicas para o espaço-tempo. As geodésicas representam o caminho que minimiza a distância, porém as geodésicas são também as curvas que maximizam o tempo próprio. A segunda questão conceitual trata das coordenadas e da realidade física. Essa

questão trata que uma geodésica pode ser reta ou curva dependendo do sistema de coordenadas escolhido. Entretanto, o artigo alerta que apesar da forma da geodésica representada em um diagrama espaço-tempo depender da escolha das coordenadas, a geodésica será sempre localmente reta. O modelo de distorção do tempo proporciona aos estudantes explorar a interpretação de Einstein e a interpretação de Newton para um objeto em queda. A terceira questão conceitual trata da distorção do tempo e da dilatação gravitacional do tempo. O artigo discute que a massa da Terra não é capaz de curvar o espaço significativamente. Dessa forma, a curvatura do tempo é a responsável pelos planetas orbitarem em torno do Sol e pela queda de objetos na Terra. O modelo de distorção do tempo fornece a conexão entre a gravidade e o tempo. Uma das limitações do modelo está no fato do modelo prever que o tempo passa mais rapidamente no solo do que no alto de uma torre. Sabemos da TRG que o intervalo de tempo medido no solo é menor quando comparado com intervalo de tempo medido no alto de uma torre. Nesta etapa, os autores propõem que uma discussão seja feita acerca das limitações da utilização de modelos em Física. Na sequência, os autores fornecem argumentos quantitativos para as três questões conceituais mencionadas anteriormente. Por fim, os autores discutem os processos produzidos pelo grupo *ReleQuant* no desenvolvimento do modelo de distorção do tempo. Essa discussão final tem por objetivo estabelecer debates sobre abordagens específicas para a aprendizagem em TRG. A abordagem do grupo *ReleQuant* tem por objetivo atender o currículo de Física norueguês em que os alunos devem obter uma compreensão qualitativa da TRG com um total de quatro aulas para cobrir o tema. Por isso, o grupo *ReleQuant* desenvolveu algumas metas para o aprendizado que incluía a discussão das ideias-chave da TRG. Além da comunicação das ideias-chave os autores também utilizam abordagens que se tornam complementos para modelos já existentes. O *modelo de distorção do tempo* representa um complemento a utilização da analogia do tecido elástico que mostra a relação entre a gravidade e o espaço curvo. O modelo de distorção do tempo também visava a aproximar as experiências dos estudantes com os conceitos relativísticos. Os autores destacam as dificuldades para o ensino da Física Moderna devido aos conceitos abstratos envolvidos e, em alguns casos, à matemática avançada. Por fim, os autores relatam que o atual formato do modelo de distorção do tempo é um resultado de diversos testes realizados em sala de aula e que o contínuo *feedback* da comunidade de EF faz crescer e melhorar as práticas educacionais.

Os autores Magdalena Kersting e David Blair no livro “Teaching Einsteinian Phy-

sics in Schools: An Essential Guide for Teachers in Training and Practice” (KERSTING; BLAIR, 2022) apresentam discussões sobre abordagens e inserções da TRR, TRG e Mecânica Quântica na escola básica. Os autores se referem à Física einsteiniana para o corpo de conhecimento que contém a TR (Restrita e Geral) e a MQ. Os capítulos do livro contam com a colaboração de diversos físicos e pesquisadores na área de EF como Bernard Schutz, David Treagust, Markus Pössel além dos pesquisadores que já compõem o grupo de colaboração internacional da Física einsteiniana (CHOUDHARY; KRAUS; KERSTING; BLAIR; ZAHN; ZADNIK, 2019). O livro está dividido em três seções:

- Motivations and needs to teach Einsteinian physics: nessa parte são apresentadas, ao longo de quatro capítulos discussões e motivações para a introdução da Física einsteiniana;
- Instructional approaches to teach Einsteinian physics: nessa etapa são discutidos, ao longo de catorze capítulos, diversas abordagens para a inserção da Física einsteiniana (como TRR, TRG e Mecânica Quântica);
- Introducing Einsteinian physics around the world: apresenta relatos da inserção da introdução da Física einsteiniana em sete países: Noruega, Alemanha, Austrália, Escócia, Holanda, República Tcheca e Coreia do Sul.

O trabalho de Souza e Serrano (2023) apresenta uma resenha, com um detalhamento maior ao realizado aqui, do livro de Kersting e Blair (2022).

## 2.3 Iniciativas para a inserção da Teoria da Relatividade Geral no Brasil

O trabalho de Guerra, Braga e Reis (2007) tem por objetivo apresentar uma nova proposta curricular em que a TRR e a TRG são inseridas para turmas de primeiro ano do EM. A abordagem utilizada para tal inserção se apoia na utilização da história e da filosofia da ciência. Nessa abordagem a relação entre a Física e outras produções culturais é realizada. A iniciativa foi feita em uma escola federal no Rio de Janeiro com alunos apresentando uma faixa etária em torno de 15 anos. O artigo advoga para apresentação das teorias físicas de modo a discutir-se sobre ciência e também sobre os limites e as possibilidades da mesma. O tema central a ser discutido era a mecânica por

se tratar de uma turma de primeiro ano do EM. O primeiro conteúdo a ser trabalhado foi a cinemática dos movimentos, em um perspectiva histórico-filosófica, sobre a obra de Galileu. Dessa maneira, as grandezas cinemáticas e as transformações de Galileu foram apresentadas e discutidas. A discussão histórica foi desenvolvida com a análise do filme o Nome da Rosa. Após esse estudo, os limites para a aplicação das transformações de Galileu foram discutidos já iniciando a discussão sobre a TRR. Nesta etapa a turma foi dividida em grupos. Estes grupos precisavam responder sobre os limites das transformações de Galileu utilizando exemplos concretos e apresentar as suas respostas para a turma. O professor nesta etapa atuava para que as discussões ocorressem com base nas teorias científicas. Para a discussão sobre o espaço e o tempo, a abordagem utilizada no curso visava uma reflexão por parte dos alunos sobre como a visão de espaço e tempo mudaram ao longo da história. Além de uma exposição oral por parte do professor, foi proposto um trabalho em que os alunos, em grupo, deveriam selecionar pinturas e afrescos elaborados na Idade Média até o século XX e responder um conjunto de perguntas. Essas perguntas visavam a analisar: como as pessoas eram retratadas nas imagens; quais outros artistas seguiam as mesmas representações nas figuras; e quais as principais teorias científicas eram utilizadas para explicar os movimentos celestes e terrestres. Após a seleção de uma pintura específica, os grupos apresentaram um trabalho que visava a responder um conjunto de perguntas descritas anteriormente. Após essa etapa, iniciou-se uma exposição histórica sobre o final do século XIX. Posteriormente, a TRR e a TRG foram trabalhados. Nessa abordagem, novamente, a turma foi dividida em grupos e cada grupo precisava abordar um tema entre sete temas possíveis. Os grupos precisavam apresentar o respectivo tema para a turma. As organizações das apresentações foram feitas de modo que o professor pudesse, através de aulas expositivas, aprofundar o tema apresentado. Após a etapa da TRR concluída, em que os primeiros três temas das apresentações foram trabalhados, o estudo das leis de Newton foi iniciado. Nesta etapa, o legado de Newton foi enfatizado juntamente com o contexto cultural. As leis de Newton e a lei da gravitação universal foram trabalhadas simultaneamente. Após a conclusão da dinâmica de Newton, o estudo sobre a TRG foi iniciado. Os temas que fizeram parte do enfoque sobre a TRG foram o PE e a nova concepção espaço-temporal. Durante essa etapa o professor trouxe a discussão as mudanças das representações espaciais comparando as pinturas renascentistas com as pinturas do início do século XX. O professor/pesquisador registrava ao longo de todo curso as suas impressões do trabalho desenvolvido. Esse

registro leva à conclusão de que a integração da TR ao currículo do primeiro ano colocando ela como parte inerente ao conteúdo é uma forma para a introdução destes temas. Além disso, a abordagem histórico-filosófica é um caminho viável para tal inserção. Em relação aos estudantes, os mesmos se mostraram interessados no estudo da TR.

O trabalho de Zago (2018) tem por objetivo analisar o engajamento dos estudantes em atividades envolvendo a TRG. A pesquisa se desenvolveu a partir de uma disciplina eletiva chamada de “gravidade de Einstein” em uma escola da rede pública do estado de São Paulo. Os estudantes participantes da pesquisa possuíam faixa etária entre 15 e 17 anos e a pesquisa contou com um total de 36 estudantes. Participaram da pesquisa os professores de Física e Filosofia da escola bem como a pesquisadora (autora da dissertação) e uma aluna de iniciação científica. As aulas foram conduzidas pela pesquisadora. Os professores de Física e Filosofia atuaram no planejamento das atividades e dos materiais, com questões disciplinares, frequência dos estudantes e em outros aspectos. A estudante de iniciação científica ficou encarregada de realizar as gravações de áudio e vídeo das discussões em sala de aula. A metodologia utilizada foi composta de dez encontros em que a sequência didática foi desenvolvida. Além disso, outros quatro encontros foram realizados para que os estudantes apresentassem um trabalho final. A autora utilizou, como recurso para a coleta de dados, gravações de áudio e vídeo das discussões realizadas sobre a TRG. O conteúdo das aulas foram: discussão do filme Interestelar, a gravidade newtoniana, o PE, o princípio da relatividade de Galileu, a velocidade da luz, a TRR, o espaço-tempo e a TRG. Os conteúdos foram trabalhados ao longo de 10 aulas com duração de 1 hora e 40 minutos. Os resultados gerais apresentam a identificação de diferentes níveis de engajamento dos estudantes. Além disso, a autora identifica interações entre professores e alunos frente ao tema abordado.

No trabalho de Acevedo, Moraes e Pimentel (2018), os autores têm como objetivo analisar: o desenvolvimento do PE e seu papel na formulação das teorias de gravitação; discutir a dedução do desvio gravitacional para o vermelho (*redshift* gravitacional) utilizando as expressões relativísticas para o efeito Doppler; e apresentar os resultados experimentais que buscam verificar a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional. O artigo, inicialmente, apresenta diferentes formulações do PE. Nesta discussão, os autores chamam de PE de Galileu a afirmação de que “partículas-teste no vácuo apresentam a mesma aceleração num dado campo gravitacional”. Na sequência

os autores descrevem o PE de Newton como “o estabelecimento da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional”. Por último, os autores descrevem o PE de Einstein como “Admitimos que os sistemas  $K$  e  $K'$  se equivalem completamente do ponto de vista físico. [...] Essa equivalência só atinge um significado de maior profundidade se a admitirmos para todos os fenômenos físicos, isto é, se as leis da Natureza referidas a  $K$  coincidirem inteiramente com as leis referidas a  $K'$ ” (ACEVEDO; MORAIS; PIMENTEL, 2018, p. e20180329-5), sendo  $K$  um referencial inercial e  $K'$  um referencial não-inercial, em que não atua nenhum campo gravitacional, e possui uma aceleração  $g$  em relação ao referencial  $K$ . Em seguida, uma discussão sobre as limitações do PE é feita examinando que observadores em queda livre podem analisar, em seu referencial, efeitos de maré que fariam com que o observador possa inferir se está sob a ação de um campo gravitacional ou não. Por fim, os autores apresentam uma última versão do PE adequada a TRG. Na sequência, os autores apresentam as consequências teóricas do PE de Einstein. A primeira consequência teoria discutida é o *desvio gravitacional para o vermelho*. Nessa discussão os autores analisam a forma correta para prever o desvio gravitacional para o vermelho utilizando as expressões relativísticas para o efeito Doppler tratando o movimento da fonte emissora de luz e do receptor de luz uniformemente acelerados. Essa discussão segue o trabalho de Florides (2002). Além disso, os autores criticam as formas usuais para a dedução dos fenômenos relativísticos a partir de expressões clássicas. Ainda na mesma seção os autores utilizam o desvio gravitacional para o vermelho para analisar o funcionamento de relógios próximos a uma fonte de campo gravitacional. Por fim, uma discussão sobre os testes experimentais que tratam da comprovação experimental do PE bem como os experimentos para a comprovação do desvio gravitacional para o vermelho é realizada. Nessa seção, a precisão para a determinação da igualdade entre a massa inercial e gravitacional é feita para os experimentos que utilizam medidas para a queda livre de corpos próximos à superfície da Terra, para a oscilação de pêndulos e para a utilização da balança de torção. Além de uma discussão sobre projetos modernos para um aumento na precisão na determinação da igualdade entre as massas inercial e gravitacional como a missão MICROSCOPE (ACEVEDO; MORAIS; PIMENTEL, 2018, p. p. e20180329-13).

O trabalho de Carageorge (2020), que corresponde a uma dissertação de mestrado, tem por objetivo apresentar uma sequência didática para o ensino da TRG em um nível compatível com estudantes de EM com alto desempenho em exatas. Os estudantes

selecionados estudavam em uma rede particular de ensino do Rio de Janeiro e todos os alunos cursavam turmas preparatórias para os vestibulares IME e ITA. A faixa etária dos estudantes era variável, mas a maioria dos estudantes apresentavam idades entre 15 e 16 anos. A metodologia utilizada para as aulas consistiu em um total de 4 tempos com 50 minutos para cada tempo aos sábados. Ao todo foram utilizados 3 sábados para a aplicação do curso de TR. A sequência utilizada para as aulas trabalhou os seguintes temas: geometria não-euclidiana, noções básicas da TRG, métrica e fenômenos gravitacionais. Para a geometria não-euclidiana foram trabalhados os temas curvatura, geodésica e mapas. Para as noções básicas da TRG foram trabalhados o PE, o desvio gravitacional para o vermelho e deflexão da luz. Para a métrica foram trabalhados diversos tópicos para a TRR explorando o invariante espaço-temporal (a métrica) bem como diagramas espaço-tempo. Por fim, os fenômenos gravitacionais são discutidos. Nesta etapa, uma discussão mais técnica é realizada em que uma matemática mais avançada é utilizada. A discussão da geodésica é feita através da ideia de que a mesma corresponde a trajetória seguida por uma partícula livre com um intervalo tipo-tempo em que o tempo próprio é maximizado. Depois as equações de campo de Einstein são apresentadas e uma solução das mesmas é discutida. Por fim, o desvio gravitacional para o vermelho, os buracos negros e a velocidade de dobra espacial são apresentados. A metodologia para acesso ao aprendizado dos alunos seguiu a aplicação de um questionário pela plataforma *Google Forms*. Os itens do questionário variaram entre perguntas discursivas e perguntas objetivas e foram aplicados dois meses após a finalização do curso. Iremos descrever a seguir alguns dos principais resultados sobre a aprendizagem dos estudantes. Os estudantes associaram a relação entre a gravidade e a geometria como uma alteração do “plano”. Em relação ao problema da “garrafa em queda livre”<sup>9</sup> alguns estudantes não associaram o resultado do problema ao PE. Esse resultado obtido por Carageorge (2020) assemelha-se ao resultado obtido em (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018, p. 010130-10). No trabalho de Kersting, Henriksen, Bøe e Angell, os autores relatam que é necessário ser bastante explícito ao vincular fenômenos relativísticos com experiências cotidianas dos alunos. Na sequência, Carageorge relata que os estudantes foram capazes de responder que um campo gravitacional pode ser substituído por uma aceleração e os mesmos obtiveram sucesso para descrever a deflexão da luz e o desvio gravitacional para o vermelho a partir desta análise. Em relação ao intervalo espaço-temporal, nenhum aluno soube

<sup>9</sup>Esse problema consiste em um garrafa com água com furos na lateral. Inicialmente a água escoa pelos furos, mas quando a garrafa é colocada em queda livre a água para de escoar.

responder que quantidade era essa e a sua vital importância na TR. Por fim, o autor relata que os estudantes parecem ter adquirido uma compreensão básica sobre o cone de luz, mas apresentaram dificuldade para entender a ideia de passado e futuro que surge da interpretação do cone de luz.

O trabalho de Neto (2020) tem por objetivo apresentar a analogia do tecido elástico para a descrição da gravidade como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Para apresentar a analogia o autor utiliza a “caixa relativística” (NETO, 2020, p. 40), um dispositivo que foi construído, durante a sua dissertação de mestrado, para que seja possível visualizar o desvio da luz emitida por um laser devido à distorção do tecido elástico provocado pela presença de uma esfera colocada sobre o tecido. Além disso, a caixa relativística pode simular um efeito análogo ao provocado pelo eclipse do Sol. Nesta etapa, o trabalho apresenta uma ênfase no eclipse de Sobral de 1919. Uma bola de isopor leve, que faz o papel do Sol, é colocada sobre o tecido e, como a mesma não conseguirá deformar o tecido, a trajetória da luz emitida por um laser, que faz o papel de uma estrela, não sofrerá desvio e irá propagar em linha reta. Dessa forma, a luz do laser é bloqueada pela bola de isopor. Essa analogia ilustra que uma estrela localizada atrás do Sol não seria observada por um observador localizado na frente do Sol. Após essa etapa, a bola de isopor é substituída por uma bola de metal. Com a colocação da bola de metal sobre o tecido o mesmo se deforma. Essa deformação no tecido ilustra a curvatura do espaço provocado pela presença do Sol. Nessa etapa, a luz emitida pelo laser percorre uma trajetória curva. Essa etapa ilustra que um observador localizado na frente do Sol conseguiria enxergar uma estrela localizada atrás do Sol. A posição aparente da estrela é discutida nesta etapa. A utilização da caixa relativística precisa ser mediada por uma pessoa previamente treinada, pois para que se cumpra o objetivo da utilização da caixa é necessário que as etapas na apresentação sejam respeitadas. O trabalho foi aplicado no espaço ciência viva, localizado no Rio de Janeiro, e no laboratório didático na UFRJ. O público do espaço ciência viva é normalmente composto por um público leigo enquanto no laboratório didático o público era composto por estudantes de Física que eram monitores do laboratório. No espaço ciência viva o público era bastante heterogêneo. No laboratório didático foi realizado um treinamento dos monitores para a utilização da caixa relativística. Após esse treinamento foi aplicado um questionário para os monitores. As principais dificuldades dos monitores estavam nos tópicos referenciais não-inerciais e geometria não-euclidiana. Além disso, os autores comentam que as ideias dos monitores da TRG vêm de uma aprendizagem informal

do tópico.

## 2.4 Principais abordagens para o ensino da Teoria da Relatividade Geral

Nesta seção nós iremos discutir as principais iniciativas para a abordar a TRG em um nível compatível com estudantes secundários e estudantes em início de graduação à luz da literatura analisada anteriormente.

### 2.4.1 Princípios da Teoria da Relatividade

Quando analisamos as abordagens para o ensino de TRG, nota-se uma quantidade significativa de trabalhos que utilizam os princípios físicos como porta de entrada para a TR (GUERRA; BRAGA; REIS, 2007), (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a), (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b), (VELENTZAS; HALKIA, 2013), (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018), (ZAGO, 2018), (CARAGEORGE, 2020) e (MACHADO; TORT; ZARRO, 2021). No trabalho de Machado, Tort e Zarro (2021), fruto desta pesquisa, o PE é utilizado como um fio condutor para apresentar uma discussão introdutória completa para a TRG. Uma visão interessante sobre a utilização dos princípios físicos da relatividade para o ensino da TRG é feita no livro “*Introducing Einstein’s relativity*” do autor Ray D’Inverno. O autor destaca a importância dos princípios físicos da relatividade para o estudo da TRG:

“Há uma escola de pensamento que considera este um processo desnecessário [...] Parece haver pouca dúvida, porém, que a consideração destes princípios físicos ajuda acerca de uma visão sobre a teoria e promove a compreensão. O simples fato de serem importantes para Einstein parece suficiente para justificar sua inclusão. No mínimo, ele nos ajudará a entender como surgiu uma das maiores conquistas da mente humana.”

(D’INVERNO, 1999, p. 120, tradução livre)

Essa visão estabelecida por D’Inverno está em total acordo com o escopo desta tese, pois utilizamos os princípios físicos como parte de um curso introdutório da TRG. Os trabalhos (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a) e (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b) fazem uma investigação acerca da concepção de estudantes universitários na utilização e aplicação dos princípios da TRG. Em relação ao PE, o trabalho

de Bandyopadhyay e Kumar (2010b) realiza um estudo importante sobre as *vulnerabilidades conceituais* acerca do PE. Já o trabalho de Velentzas e Halkia (2013) mostra que os experimentos mentais ajudam estudantes a estabelecer consequências da teoria em situações que estão além de sua experiência cotidiana. Os trabalhos de Kersting, Henriksen, Bøe Angell (2018) e Carageorge (2020) utilizam os princípios da TRG para uma introdução da TR em nível secundário. Já o trabalho de Acevedo, Morais e Pimentel (2018) discute formulações do PE, desde Newton até Einstein, e apresenta uma discussão sobre o desvio gravitacional para o vermelho e sobre o funcionamento de relógios em um campo gravitacional a partir das expressões relativísticas. Destacamos também duas iniciativas interessantes para a discussão do PE. Um interessante instrumento chamado de *brinquedo de Einstein* é utilizado em Zago (2018). Esse brinquedo, em sua forma mais simples, consiste em um pequeno recipiente, podendo ser de plástico, em que dois elásticos são fixados no fundo do recipiente. Nas outras extremidades são presas duas esferas que ficam penduradas na parte externa do recipiente – Figura 2.1. Quando o conjunto (brinquedo de Einstein) é abandonado em queda livre a força elástica puxa as esferas para o interior do copo, pois para um referencial em queda livre a sensação é de ausência de gravidade.

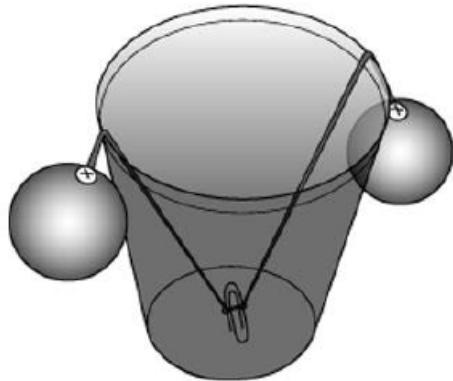


Figura 2.1: Brinquedo de Einstein - retirado de (ZAGO, 2018, p. 192).

O segundo exemplo interessante é exposto em Kersting, Henriksen, Bøe e Angell (2018) e Carageorge (2020). Nesse experimento temos uma garrafa, com furos em sua lateral, em queda livre. Esse experimento pode ser visto no vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=0jjFjC30-4A> em que o físico Brian Greene faz uma demonstração prática do experimento. Um desenho esquemático da situação pode ser visto na Figura 2.2. Nesse experimento, inicialmente a água escoa por furos

localizados na lateral de uma garrafa. Posteriormente, a água deixa de escoar pelos furos da garrafa quando a mesma é abandonada em queda livre. Em relação a um referencial fixo na garrafa (referencial em queda livre), é como se a gravidade tivesse desaparecido. Essa situação é idêntica ao que ocorreria se essa mesma garrafa estivesse em repouso (ou em movimento retilíneo uniforme) no espaço livre (distante de qualquer corpo celeste). Um observador somente analisando o que acontece com a água, que deixa de escoar pela garrafa, não conseguiria afirmar se está em um referencial em queda livre ou se está em um referencial em repouso, livre da ação da gravidade, no espaço livre.

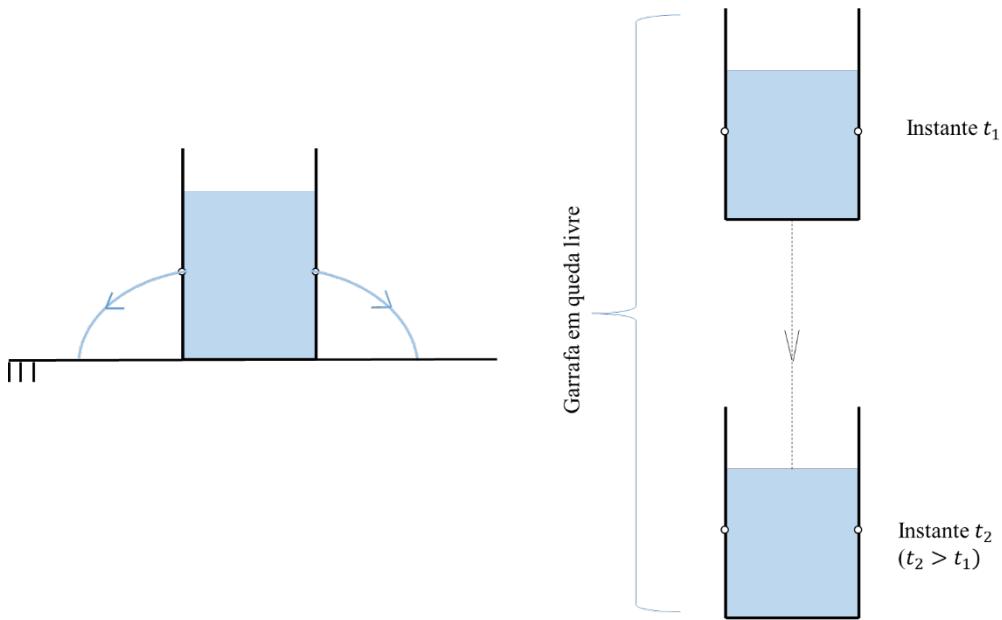


Figura 2.2: Do lado esquerdo: garrafa com furos na lateral apoiada em uma superfície. Inicialmente a água escoa pelos furos. Do lado direito: garrafa com furos na lateral em queda livre. Percebe-se que durante a queda livre a água deixa de escoar pelos furos na lateral.

O brinquedo de Einstein ou o problema da garrafa em queda livre permite explorar o PE contido na chamada “a ideia mais feliz da vida de Einstein”:

“Então ocorreu-me a ideia mais feliz da minha vida na seguinte forma: o campo gravitacional tem apenas uma existência relativa [...] , pois para um observador que cai em queda livre do telhado de uma casa, pelo menos na sua vizinhança imediata, não há campo gravitacional. De fato, se o observador soltar alguns corpos, então estes, em relação a ele, permanecerão em repouso ou em movimento uniforme, independentemente da sua natureza particular ou física (nessa observação, a resistência do ar, naturalmente,

é ignorada). Portanto, o observador tem o direito de interpretar seu estado como de repouso. ”  
(PAIS, 1995)

A discussão do PE, na versão escrita em termos dos referenciais em queda livre, permite utilizar experimentos cotidianos na discussão da física da TR. Como relatado em Kersting, Henriksen, Bøe e Angell (2018, p. 010130-10), os autores argumentam que relacionar os princípios da TRG com experiências cotidianas é útil para os estudantes, mas alertam que essa abordagem deve explicitar claramente a associação das experiências cotidianas com os princípios físicos da relatividade. Cabe destacar também que a exposição a formulação do PE, em termos dos referenciais em queda livre, é sutil e mais difícil de assimilar em relação a outras formulações do princípio (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 151).

#### **2.4.2 Espaço-tempo curvo**

Como discutido em Kersting, Henriksen, Bøe e Angell (2018), especialistas em gravitação são unânimes em afirmar que a característica fundamental da TRG é que a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Entretanto, o conceito de espaço-tempo curvo quadridimensional é uma ideia abstrata. Nas palavras de Albert Einstein:

“ Nenhum homem pode visualizar quatro dimensões, exceto matematicamente. Não podemos nem mesmo visualizar três dimensões. Eu penso em quatro dimensões, mas apenas abstratamente. ”

(apud KERSTING; STEIER, 2018, p. 4, tradução livre)

Assim, torna-se um desafio discutir o ensino e a aprendizagem do espaço-tempo curvo. Destacaremos três tendências principais para apresentar a relação entre a gravidade e a curvatura do espaço-tempo. A primeira tendência utiliza a analogia do tecido elástico como uma forma de visualizar a relação entre a gravidade e a curvatura (BALDY, 2007), (WATKINS, 2014), (KAUR; BLAIR; MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017a), (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018), (ZAGO, 2018), (KERSTING; STEIER, 2018) e (NETO, 2020). Além da discussão da analogia do tecido elástico, alguns trabalhos apresentam também uma discussão sobre a curvatura do tempo (KERSTING, 2019) e (KERSTING; TOELLNER; BLAIR; BURMAN, 2020). A discussão sobre a curvatura do tempo, chamado pelos autores de modelo distorção

do tempo, complementa a discussão da *analogia do tecido elástico*. A segunda tendência explora a geometria de superfícies curvas e utiliza essa discussão para apresentar o espaço-tempo curvo (PRICE, 2016), (GOULD, 2016) e (JANIS, 2018). Essa segunda tendência assemelha-se à discussão proposta por Edwin Taylor e John Wheeler, chamada pelos autores de “*parable of the two travelers*” (TAYLOR; WHEELER, 1992, p. 281). Além das abordagens destacadas anteriormente, os trabalhos de Zahn e Kraus (2014), Zahn e Kraus (2018a) e Zahn e Kraus (2018b) utilizam os *modelos de setor* para discussão do espaço-tempo curvo. A seguir faremos uma breve discussão sobre as três principais tendências para abordar o espaço-tempo curvo.

#### 2.4.2.1 Analogia do tecido elástico

Nesta subseção será descrita a analogia do tecido elástico e, em seguida, destacaremos os principais trabalhos que utilizam esta analogia no ensino de TRG. A utilização do tecido elástico é descrita pelo físico norte-americano Brian Greene:

“Ao explicar a ideia central, mas abstrata, da TRG de espaço-tempo curvo, os físicos costumam invocar uma metáfora familiar: imaginamos planetas orbitando uma estrela como se fossem bolas de gude rolando sobre um tecido elástico esticado que foi deformado por uma bola de boliche colocada no centro.”

(GREENE, 2020, tradução livre)

Nessa analogia, o tecido elástico desempenha o papel do espaço-tempo (embora só seja possível visualizar a curvatura do espaço nessa analogia). Uma esfera maciça colocada sobre o tecido elástico é relacionada com algum corpo celeste como o Sol, por exemplo. Inicialmente, nesta analogia, o tecido é esticado de modo a permanecer plano simbolizando que na ausência de matéria o espaço-tempo é plano. Posteriormente, uma esfera massiva é colocada sobre o tecido deformando-o. A presença da esfera faz o tecido elástico se curvar simbolizando a curvatura do espaço-tempo na presença de um corpo celeste massivo. Pequenos objetos são então colocados em movimento sobre o tecido deformado pela esfera representando, por exemplo, o movimento de planetas ao redor de um astro central. A Figura 2.3 ilustra a ideia central da TRG expressando que na presença de matéria e energia o espaço-tempo torna-se curvo. Na gravitação newtoniana a gravidade é descrita como uma força de atração entre corpos que possuem massa. Essa força é de ação à distância e dependente do produto entre as massas e do inverso do quadrado da distância de separação entre corpos. Na TRG a gravidade não é descrita como uma força, sendo um efeito provocado

pela curvatura do espaço-tempo. Dessa forma, uma partícula em movimento, nesse espaço-tempo curvo, livre de ações externas representa uma partícula livre. As partículas livres irão percorrer trajetórias no espaço-tempo conhecidas como geodésicas. O conceito abstrato de curvatura do espaço-tempo torna a utilização da analogia do tecido uma forma visual interessante para a discussão do tópico.

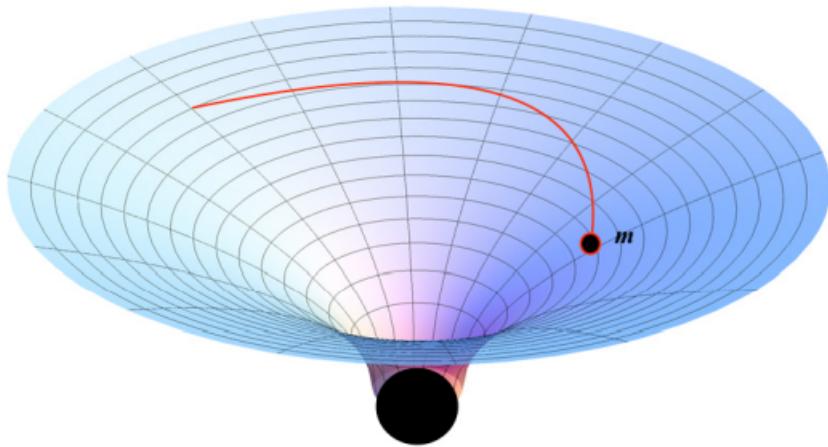


Figura 2.3: Um astro central massivo deforma o espaço-tempo tornando-o curvo. Um astro de massa muito menor que a do astro central movimenta-se nesse espaço-tempo curvo percorrendo uma geodésica – retirado de (MACHADO, 2016, p. 105).

Como já mencionado, autores como (BALDY, 2007) e (KAUR; BLAIR; MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017) utilizam a analogia do tecido elástico e advogam o seu uso no EM e, no caso, de (KAUR; BLAIR; MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017) até mesmo com estudantes com idades a partir de 11 anos. A autora Watkins (2014) faz uma inserção da analogia em disciplinas introdutórias em cursos universitários desenvolvendo uma abordagem nos moldes propostos por Baldy (2007). A autora Zago (2018) utiliza a analogia do tecido combinada com outras estratégias para a discussão da TRG no EM em uma disciplina eletiva. Já o autor Neto (2020) utiliza a analogia do tecido elástico, fazendo uso de um aparato experimental, para discutir a deflexão da luz que passa pela vizinhança do Sol.

Entretanto, há autores que criticam fortemente a utilização da analogia do tecido elástico (PRICE, 2016), (GOULD, 2016) e (JANIS, 2018). Price (2016) inicia sua crítica analisando a explicação de como a bola de boliche (que simboliza um astro central) provoca a curvatura do tecido elástico:

“ [...] é a gravidade da Terra puxando a bola de boliche para baixo e, portanto, deformando o tecido elástico. A probabilidade de confusão é quase certa.”  
(PRICE, 2016, p. 588, tradução livre)

O autor critica a necessidade da utilização da gravidade newtoniana para a explicação da interpretação einsteiniana da gravidade. O autor Gould (2016) também é um grande crítico à utilização da analogia do tecido elástico indicando alguns problemas em sua utilização

“Infelizmente, a ilustração não faz sentido. Os alunos observam que o espaço não é um tecido elástico, não se curva em uma dimensão invisível e não empurra objetos para órbitas circulares. O tecido elástico nem reflete a simetria da massa central - se você virar a ilustração de cabeça para baixo, a explicação falhará.”  
(GOULD, 2016, p. 396, tradução nossa)

Além disso, Gould discute que a distorção do espaço é irrelevante para a discussão do problema da queda livre e que é, principalmente, devido à distorção do tempo que o fenômeno ocorre (GOULD, 2016, p. 396). Dessa forma, a utilização da analogia não seria adequada para a discussão do problema da queda livre, por exemplo.

O autor Janis (2018) complementa as críticas feitas anteriormente por Price (2016) e Gould (2016) argumentando que não é claro na analogia se é o espaço ou o espaço-tempo que está se curvando e, novamente como no trabalho de Gould, chama a atenção da necessidade da utilização da ideia da força gravitacional newtoniana para explicar a interpretação einsteiniana de gravidade:

“Essa analogia é preocupante, no entanto. Primeiro, o estudante pode ficar confuso se é o espaço ou o espaço-tempo que está sendo distorcido. Então por que o tecido está sendo distorcido? Por causa do peso da bola enorme? Mas isso seria usar a gravidade para explicar a gravidade – um argumento circular. E a bola não está localizada no espaço-tempo? Onde, então, está?”  
(JANIS, 2018, p. 12, tradução livre)

Concordamos com a relevância de todos os questionamentos propostos por Price (2016), Gould (2016) e Janis (2018) e preferimos seguir propostas semelhantes aos trabalhos destes autores para a discussão da relação entre a gravidade e a curvatura do espaço-tempo. Entretanto, entendemos que a analogia do tecido elástico pode trazer benefícios para a compressão da ideia central da TRG. O trabalho de Kersting e Steier (2018) desenvolve um importante estudo sobre a compreensão de alunos secundários ao utilizarem a analogia do tecido elástico para discutir a ideia da gravidade como uma

manifestação da curvatura do espaço-tempo. Nesse estudo, os autores incorporam as principais críticas contidas nos trabalhos de Price (2016), Gould (2016) e Janis (2018) e discutem formas de utilizar analogias no ensino. A título de exemplo, uma forma interessante de abordar estas críticas à analogia do tecido elástico foi realizada por Kersting e Steier através de uma *charge* - Figura 2.4.



Figura 2.4: Discussão sobre as limitações da analogia do tecido elástico - retirado de (KERSTING; STEIER, 2018, p. 11, tradução livre).

O trabalho proposto por Kaur, Blair, Moschilla, Satannard e Zadnik (2017a, p.9) também discute as limitações na utilização da analogia do tecido elástico. Os autores mencionam que para utilizar a analogia do tecido elástico para discutir a concepção de Einstein da gravidade é necessária a gravitação newtoniana. Além disso, os autores chamam a atenção que o modelo do tecido elástico apresenta uma curvatura espacial bidimensional enquanto o efeito da gravitação criada na Terra ocorre devido a curvatura do tempo. A seguir discutiremos uma maneira alternativa de apresentar o espaço-tempo curvo e, também, a relação entre a gravidade e a curvatura do espaço-tempo sem recorrer a analogia do tecido elástico.

#### 2.4.2.2 Perspectiva geométrica

Nesta subseção discutiremos o caso abordado por Edwin Taylor e John Wheeler, chamado pelos autores de “parábola dos dois viajantes”<sup>10</sup> (TAYLOR; WHEELER,

<sup>10</sup>Tradução do original *parable of the two travelers*.

1992, p. 281). Nesta discussão está o cerne das propostas feitas por Price (2016), Gould (2016) e Janis (2018) que são contra a utilização da analogia do tecido elástico para o ensino da gravidade. Taylor e Wheeler iniciam a discussão com dois viajantes localizados no equador, separados por uma distância de 20 km. Cada viajante caminha para o norte ao longo de uma linha com longitude constante – Figura 2.5.

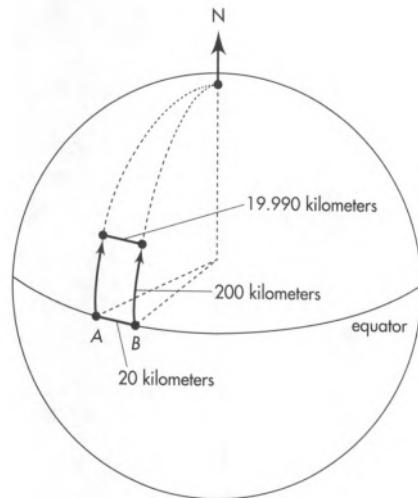


Figura 2.5: Dois viajantes A e B caminham ao longo de longitudes fixas. A separação entre eles é medida em duas situações, a primeira medida revela um valor de 20 km para separação enquanto uma segunda medida revela um valor de 19,990 km para a separação entre os mesmos - retirado de (TAYLOR; WHEELER, 1992, p. 282).

No início da caminhada os viajantes apresentavam trajetórias paralelas e a separação entre os mesmos era de 20 km. Após os viajantes percorrem uma distância de 200 km, ao longo de longitudes fixas, a separação entre os mesmos diminuiu, sendo o novo valor igual a 19,990 km. Ambos os viajantes caminham confiantes que mantêm a sua direção inicial de movimento inalterada. Qual, então, seria a explicação para a redução na distância que separava os viajantes? A resposta a essa questão está justamente na geometria curva do globo terrestre. Se ambos continuarem as suas jornadas, ambos irão se encontrar no polo norte. No início do movimento, não existia velocidade relativa de aproximação. Entretanto, conforme o movimento continua surge uma velocidade relativa de aproximação. Dessa forma, os viajantes apresentam uma aceleração relativa, que faz com que eles se aproximem. Uma situação análoga ocorre quando dois objetos, no interior de um vagão em queda, são abandonados em relação a uma

mesma altura em relação ao vagão em queda – Figura 2.6.

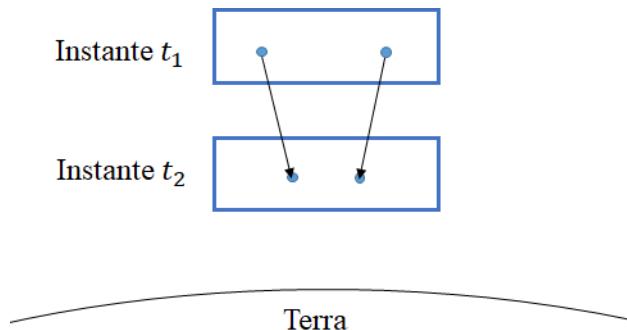


Figura 2.6: Dois objetos, no interior de um vagão em queda, abandonados em relação a uma mesma altura em relação ao chão do vagão.

Essa aceleração relativa de aproximação ocorre devido a efeitos de “maré” provocados pela não-uniformidade do campo gravitacional terrestre. Os efeitos de maré são discutidos nas seguintes referências (SILVEIRA, 2003) e (MACHADO; TORT; ZARRO, 2020). Na perspectiva geométrica, a aceleração relativa decorre devido à geometria curva da superfície (curvatura do espaço) do globo terrestre. Já para o caso dos objetos em queda, na perspectiva geométrica, a aceleração relativa entre os corpos ocorre devido à geometria curva do espaço-tempo (curvatura do espaço-tempo). Essa relação entre geometria e gravidade, que provoca esses efeitos de “maré”, no caso dos objetos em queda, é o cerne da interpretação geométrica da gravidade feita por Einstein. Entretanto, uma explicação alternativa pode ser feita. Essa explicação é feita com base nas leis de Newton. Dessa forma, os viajantes podem atribuir que essa aceleração relativa ocorre devido a uma interação de natureza gravitacional, pois a aceleração relativa entre os viajantes era independente da composição ou massa dos viajantes. As duas descrições apresentadas podem ser utilizadas para a descrição do problema. A ideia dessa parábola é mostrar, no caso dos viajantes, que os efeitos gravitacionais podem ser representados pelas alterações na geometria do espaço e no caso dos corpos em queda os efeitos gravitacionais ocorrem devido a alterações (curvatura) do espaço tempo. Assim, nessa discussão está a ideia central da TRG de Einstein.

### 2.4.2.3 Modelo de tempo

Nos trabalhos (KERSTING; TOELLNER; BLAIR; BURMAN, 2020) e (KERSTING, 2019) o grupo *ReleQuant* desenvolve a introdução do modelo de distorção do tempo que discute a curvatura do tempo. Este modelo visa a complementar a discussão da analogia do tecido elástico. O modelo de distorção do tempo pode ser acessado através do seguinte link: <https://www.viten.no/filarkiv/general-relativity/#/id/5a5b662e61f5dd7a0a6ef72b>. Com o auxílio do modelo de distorção do tempo é possível mostrar que objetos em queda livre seguem curvas geodésicas e relógios, submetidos ao efeito da gravidade, funcionam mais lentamente ou mais rapidamente dependendo da localização do mesmo. O modelo de distorção do tempo apresenta dois cenários: o primeiro contém um diagrama altura-tempo em que Einstein fica no topo de uma torre de 45 m de altura e a segunda contém o mesmo diagrama altura-tempo para analisar a queda livre de Einstein. A Figura 2.7 ilustra os casos descritos acima.

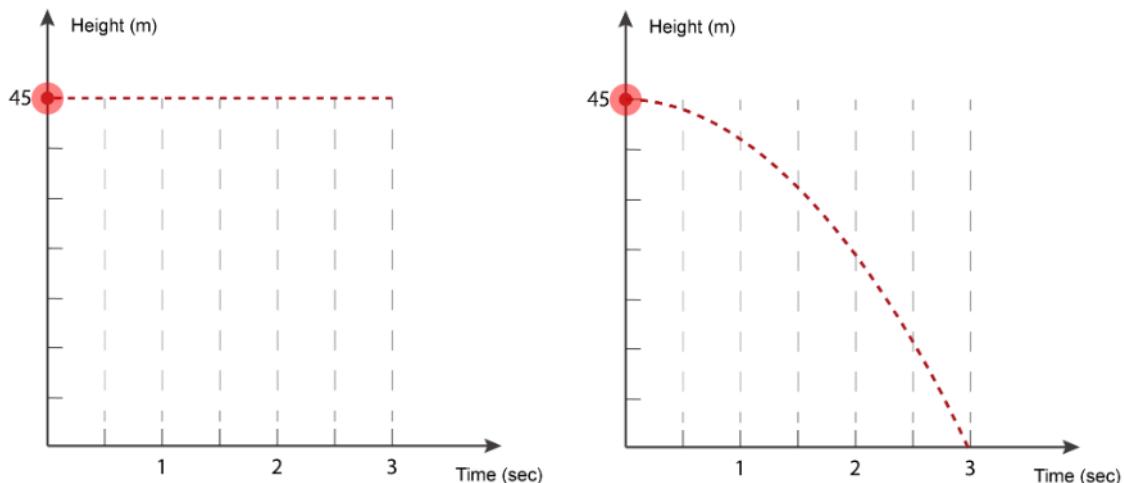


Figura 2.7: Cenário newtoniano: do lado esquerdo o diagrama altura x tempo de Einstein em repouso no topo de uma torre e do lado direito o diagrama altura x tempo de Einstein em queda livre - retirado de <https://www.viten.no/filarkiv/general-relativity/#/id/5a5b662e61f5dd7a0a6ef72b> - acesso em dezembro de 2022.

Após essa discussão com base na mecânica newtoniana, o cenário relativístico é posto. Nessa etapa, o diagrama para o espaço-tempo aparece distorcido. A Figura 2.8 ilustra o diagrama já com o cenário relativístico em que o eixo do tempo foi curvado.

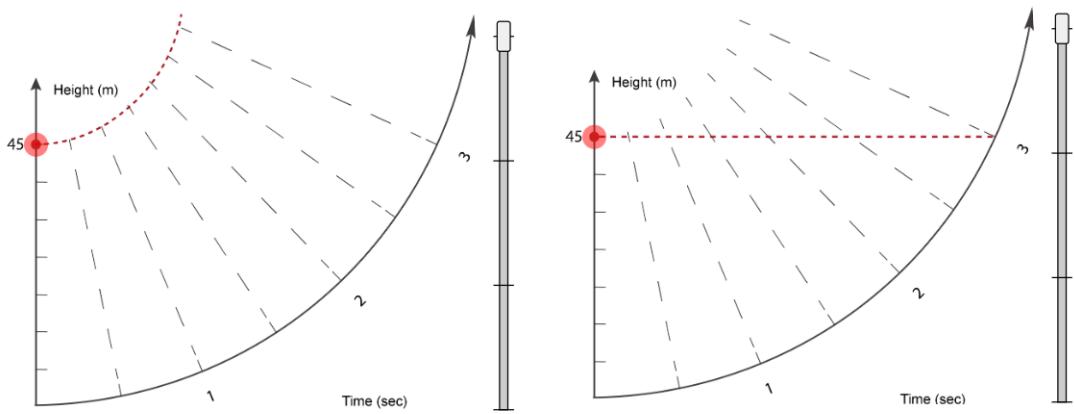


Figura 2.8: Cenário einsteiniano: do lado esquerdo o diagrama altura x tempo de Einstein em repouso no topo de uma torre e do lado direito o diagrama altura x tempo de Einstein em queda livre - retirado de <https://www.viten.no/filarkiv/general-relativity/#/id/5a5b662e61f5dd7a0a6ef72b> - acesso em dezembro de 2022.

Os cenários colocados na Figura 2.8 são os mesmos descritos anteriormente, ou seja, o primeiro gráfico ilustra Einstein no topo de uma torre enquanto o segundo gráfico ilustra Einstein em queda livre. O gráfico da queda livre no diagrama distorcido é uma reta e ilustra a geodésica em um espaço-tempo curvo.

Os estudantes podem comparar, utilizando o modelo de distorção do tempo, as interpretações de Newton e Einstein para o fenômeno da queda livre. Na concepção newtoniana, a gravidade é tratada como uma força e, uma partícula, sujeita à ação somente dessa força, se move de maneira acelerada e o gráfico é uma parábola. Na concepção einsteiniana, a gravidade se manifesta pela curvatura do espaço-tempo. No modelo de distorção do tempo essa curvatura é representada pela distorção do eixo do tempo e, assim, nesse diagrama uma partícula em queda livre seguirá uma linha reta indicando que essa partícula, em queda, está livre da ação de forças.

#### 2.4.2.4 Modelo de setor

A próxima abordagem para a discussão do espaço-tempo refere-se à utilização do modelo de setor realizada por Zahn e Kraus. O modelo de setor representa uma abordagem pioneira no ensino para a discussão das ideias básicas da TRG utilizando matemática elementar (ZAHN; KRAUS, 2014), (ZAHN; KRAUS, 2018a), (ZAHN;

KRAUS, 2018b). Logicamente, não pretendemos nesta seção discutir todos os aspectos apresentados pelos autores nos artigos citados, mas apenas comentar alguns tópicos simples que podem ser utilizados para os interessados nessa abordagem geométrica. Para superfícies bidimensionais, os setores são elementos de áreas planas. No caso das superfícies tridimensionais os setores são blocos de geometria euclidiana. Já para os subespaços do espaço-tempo, os setores são elementos que possuem a geometria da TRR (geometria de Minkowski). Para a construção dos setores, o artigo sugere a utilização de pedaços de papel e caixas de papelão. A primeira discussão consiste em determinar o sinal da curvatura de uma superfície bidimensional. Nesse caso, os setores são representados por elementos de área planas – Figura 2.9. Para determinar o sinal da curvatura é utilizado o seguinte critério: um pedaço da superfície é recortado e ao tentarmos ajustá-lo sobre uma superfície plana perceberemos que se esse pedaço rasgar quando planificado teremos curvatura positiva, se esse pedaço não rasgar (mas não se ajustar perfeitamente ao plano) teremos curvatura negativa e se o pequeno pedaço se ajustar perfeitamente ao plano teremos curvatura nula. As setas em cinza colocadas na Figura 2.9 ilustram como realizar o critério para a determinação da curvatura.

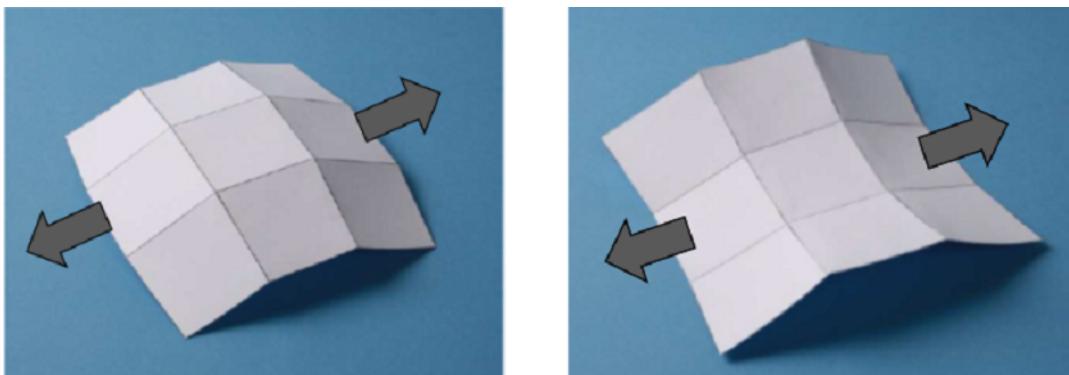


Figura 2.9: Do lado esquerdo o modelo de setor para uma superfície de curvatura positiva e do lado direito o modelo de setor para uma superfície de curvatura negativa – retirado e modificado de (ZAHN; KRAUS, 2014, p. 5).

Já na Figura 2.10 os setores são recortados e colocados sobre o plano. Esses modelos estão disponíveis na página <https://www.spacetimetavel.org/sectormodels1> dos autores Zahn e Kraus.

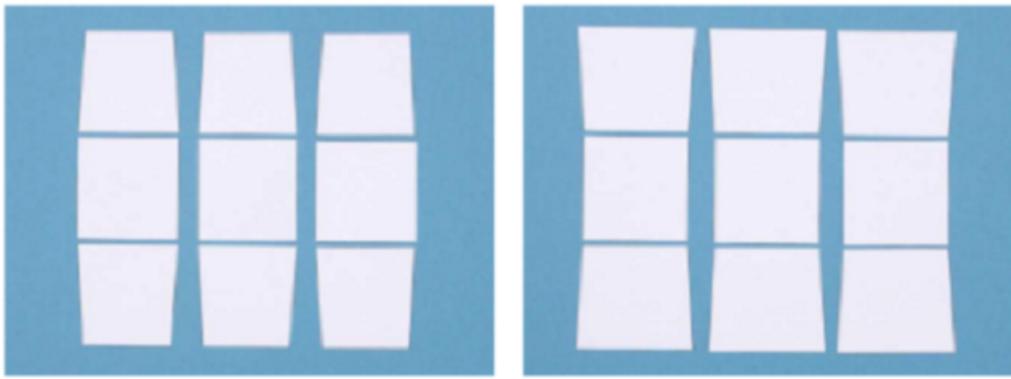


Figura 2.10: Do lado esquerdo o modelo de setor para uma superfície de curvatura positiva colocado sobre o plano e do lado direito o modelo de setor para uma superfície de curvatura negativa colocado sobre o plano - retirado de (ZAHN; KRAUS, 2014, p. 5).

Um segundo procedimento para determinar a curvatura de uma superfície é descrito a partir dos setores colocados sobre o plano - Figura 2.10. Utilizando a disposição da Figura 2.10 podemos “juntar” quatro setores unindo os vértices dos mesmos em um mesmo ponto como na Figura 2.11. Notamos que na Figura 2.11 duas arestas não se tocam, indicando a presença de curvatura. Se tentarmos, no lado esquerdo da Figura 2.11, fazer todas as arestas, que possuem o vértice em comum, se tocarem, tentando girar o setor localizado na parte superior à esquerda, perceberemos que o setor tenderá a rasgar – Figura 2.11 – onde a seta em cinza ilustra o sentido de giro.

Já no lado direito da Figura 2.11 notamos que não conseguimos colocar os quatro setores representados unindo os vértices dos mesmos em um único ponto. Por isso, ao tentarmos, na Figura 2.11, fazer todos os vértices coincidirem em um mesmo ponto, girar o setor localizado à esquerda na parte inferior, percebemos que o setor tenderá a “descolar” do plano se elevando – lado direito da Figura 2.11. Dessa forma, através deste critério descrito, o lado esquerdo da Figura 2.10 ilustra os setores representando uma superfície de curvatura positiva enquanto os setores do lado direito da Figura 2.10 ilustra os temos os setores representando uma superfície de curvatura negativa.

Já no trabalho de Zahn e Kraus (2018a), os autores discutem o traçado das geodésicas em superfícies curvas. A geodésica é apresentada como uma linha que é

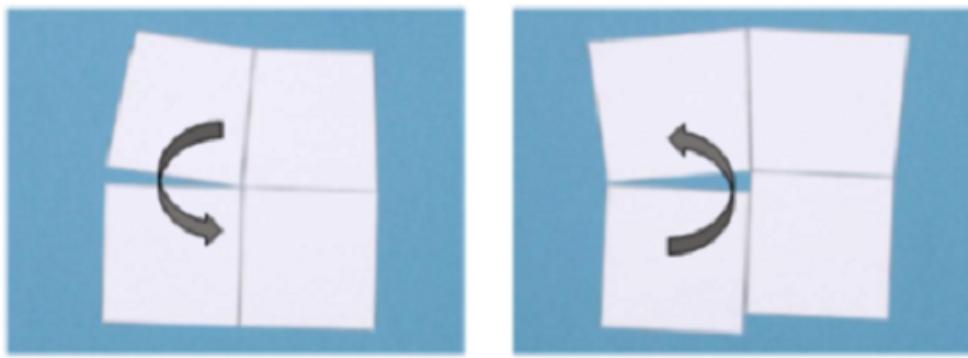


Figura 2.11: Do lado esquerdo o modelo de setor para uma superfície de curvatura positiva colocado sobre o plano, onde a seta em cinza indica o sentido de giro para o setor localizado na parte superior à esquerda, e do lado direito o modelo de setor para uma superfície de curvatura negativa colocado sobre o plano, onde a seta em cinza indica o sentido de giro para o setor localizado na parte inferior à esquerda, - retirado e modificado de (ZAHN; KRAUS, 2014, p. 5).

localmente reta. Dessa forma, utilizando o modelo de setores para uma superfície esférica, por exemplo, é possível desenhar a geodésica de maneira simples – Figura 2.12. Dentro de cada setor a geodésica é dada por uma linha reta. Toda vez que a linha reta atinge a aresta do setor, une-se a aresta do setor vizinho e, então, a geodésica continua sendo traçada como ilustrado no lado esquerdo da Figura 2.12.

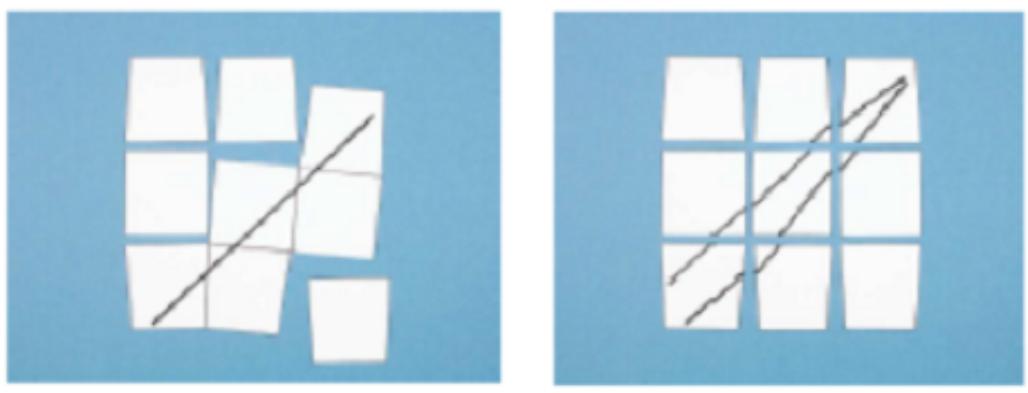


Figura 2.12: Do lado esquerdo os setores são unidos colocando as arestas dos mesmos em contato para que a geodésica seja traçada e do lado direito o modelo duas geodésicas são traçadas usando o modelo de setor e ilustrando a aproximação das mesmas - retirado de (ZAHN; KRAUS, 2018, p. 5).

Uma segunda geodésica pode ser traçada seguindo a mesma ideia apresentada an-

teriormente, mas partindo de outro ponto no setor. Nota-se que duas geodésicas, inicialmente paralelas, se aproximam – lado direito da Figura 2.12 – indicando a presença de curvatura.

Na continuação do artigo, os autores apresentam o modelo de setor para a região exterior ao horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild – Figura 2.13.

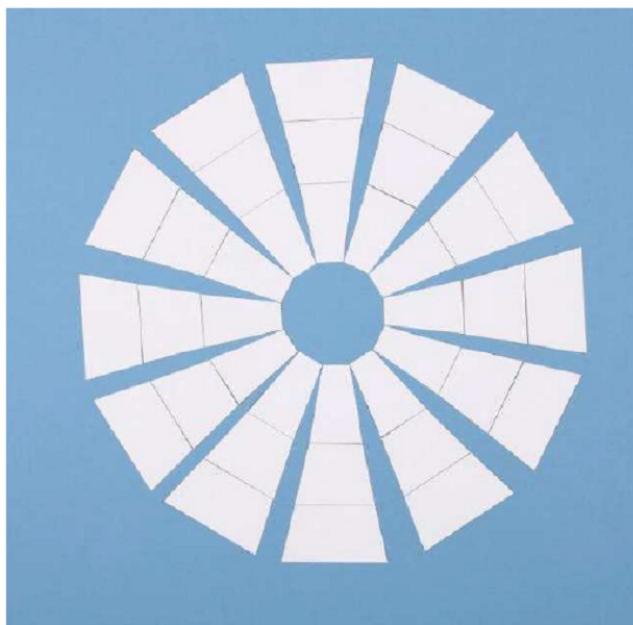


Figura 2.13: Modelo de setor representando a região externa ao horizonte de eventos para um buraco negro de Schwarzschild - retirado de (ZAHN; KRAUS, 2018, p. 6).

A geodésica é traçada utilizando um procedimento similar ao apresentado anteriormente como mostra o lado esquerdo da Figura 2.14. Posteriormente, ao posicionar novamente os setores na sua configuração original, observamos no lado direito da Figura 2.14 que a geodésica sofreu um desvio. Assim, a Figura 2.14 ilustra a trajetória percorrida pela luz sob a ação de um campo gravitacional.

Por fim, comentamos que os autores também desenvolvem abordagens para discutir espaços curvos tridimensionais e o espaço-tempo tridimensional ao redor de um buraco negro. Além disso, discutem matematicamente, utilizando a métrica  $\Delta s^2$ , como construir os setores e, também, o desvio gravitacional para o vermelho. Portanto, os trabalhos (ZAHN; KRAUS, 2014), (ZAHN; KRAUS, 2018a) e (ZAHN; KRAUS, 2018b) trazem uma forma geométrica bastante inovadora para a discussão da teoria da TRG.

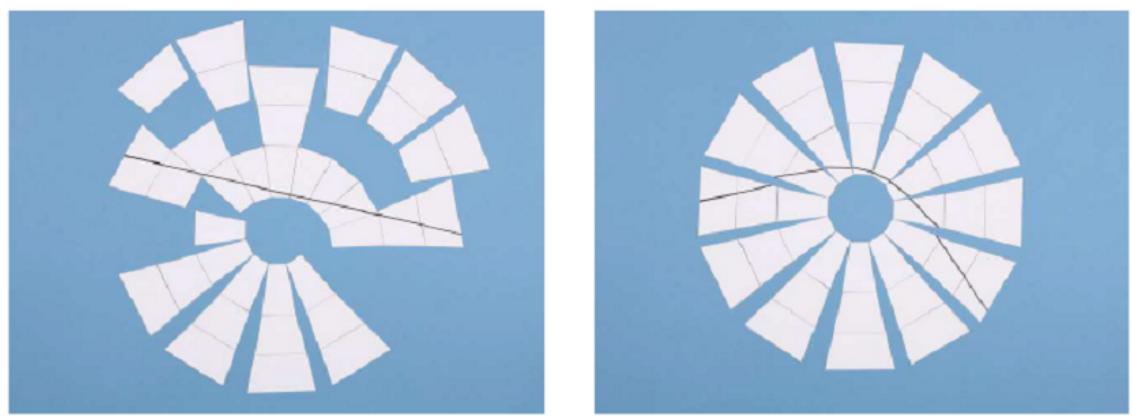


Figura 2.14: Do lado esquerdo os setores são unidos colocando as arestas dos mesmos em contato para que a geodésica seja traçada e do lado direito o traçado de uma geodésica usando modelo de setor para o buraco negro de Schwarzschild - retirado de (ZAHN; KRAUS, 2018, p. 7).

### 2.4.3 Significado métrico das coordenadas

O último tópico que discutiremos aqui em nossa revisão de literatura está relacionado ao *significado métrico das coordenadas*. Esse assunto é pouco explorado na literatura em ensino de TRG, porém é um tópico central, em nosso entendimento, para que seja introduzida uma abordagem quantitativa para a TRG no EM. A discussão a seguir tem como base a abordagem utilizada no livro de introdução à relatividade “*Exploring Black Holes*” dos autores Taylor, Wheeler e Bertschinger (2018). Os autores Taylor, Wheeler e Bertschinger constroem uma abordagem em TRG enfatizando a importância do significado métrico das coordenadas. No livro é dado um destaque especial à dificuldade de Einstein com o significado métrico das coordenadas. Nas palavras de Einstein,

“ Isso aconteceu em 1908. Por que outros sete anos foram necessários para a construção da TRG (1915)? A principal razão reside no fato de que não é tão fácil se libertar da ideia de que as coordenadas devem ter um significado métrico imediato. ”  
 (apud TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 5-1, tradução livre)

Einstein, em 1908, percebe a estreita relação entre a geometria e a gravidade, entretanto somente termina a formulação da TRG em 1915. A citação anterior torna inequívoca que o significado métrico das coordenadas representou uma barreira a ser superada por Einstein neste caminho para a formulação da TRG. O significado métrico

imediato das coordenadas refere-se a quantidades calculadas (variação de coordenadas) que podem ser relacionadas diretamente com quantidades físicas mensuráveis. Por exemplo, relacionar uma variação de coordenada temporal com o intervalo de tempo medido com o auxílio de um relógio. Bandyopadhyay e Kumar (2010a) relatam a dificuldade dos estudantes com a seguinte pergunta: “A velocidade da luz é constante em um campo gravitacional ?” Os autores relatam que cinco dos seis alunos, presentes na amostra, disseram categoricamente que a velocidade da luz não muda sob a ação da gravidade (Bandyopadhyay; Kumar, 2010a, p. 020104-8). Através da métrica de Schwarzschild, discutida na introdução desta tese, podemos calcular a “velocidade” da luz, de modo simples, para o movimento radial de um pulso luminoso fazendo  $\Delta\tau$  (intervalo tipo-luz)<sup>11</sup> e mostrar que realmente a velocidade da luz não é uma constante como na TRR. A métrica de Schwarzschild pode ser escrita como

$$c^2 (\Delta\tau)^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 (\Delta t)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} (\Delta r)^2 - r^2 \sin^2 \theta (\Delta\theta)^2 - r^2 (\Delta\phi)^2.$$

Fazendo  $\Delta\tau = 0$  e através da hipótese simplificadora que o movimento do pulso luminoso seja radial temos

$$0 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c^2 (\Delta t)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} (\Delta r)^2,$$

onde fizemos  $\Delta\theta = 0$ ,  $\Delta\phi = 0$  e  $\Delta\tau = 0$ . Calculando  $\frac{\Delta r}{\Delta t}$  segue que

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \pm \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c.$$

O sinal de “+” na equação anterior indica um pulso luminoso que se move no sentido de crescimento de  $r$  e o sinal de “-” na equação anterior indica um pulso luminoso que se move no sentido de decrescimento de  $r$ . A equação anterior mostra que a velocidade da luz possui valores diferentes para distintos valores da coordenada  $r$ .

Reconhecidamente sabendo não termos esgotado a totalidade de trabalhos relacionados ao assunto, escolhemos a partir deste momento direcionar nosso foco aos percursos metodológicos a que esta tese se propõe. Todas as etapas metodológicas bem como sua delimitação e explicação serão feitas no capítulo seguinte.

---

<sup>11</sup> Uma discussão sobre os tipos de intervalo e essa aplicação na TRR e na TRG pode ser encontrada no apêndice A nas seções A.3.1 e A.7.2.

# Capítulo 3

## Metodologia

*A filosofia está escrita neste grande livro – quero dizer, o Universo – que está continuamente aberto ao nosso olhar, mas não pode ser entendido a menos que primeiro se aprenda a compreender a linguagem e a interpretar os caracteres em que está escrita. Está escrito na linguagem da matemática e seus caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas [...]*

---

*Galileu Galilei apud (Allday, 2019,  
p.5)*

Neste capítulo descreveremos as etapas de condução desta pesquisa. Inicialmente será discutida a escolha do local para a aplicação do curso de Teoria da Relatividade Geral (TRG) bem como a duração da aplicação da proposta de ensino. Na sequência, descreveremos como a literatura de ensino em TRG apoiou a sequência didática escolhida para a construção de um texto introdutório voltado para estudantes do Ensino Médio (EM). Em seguida serão descritas as aulas do curso de Teoria da Relatividade (TR) detalhando o conteúdo abordado em cada exposição. O material utilizado nesta tese para investigar as dificuldades na aprendizagem em TRG será apresentado utilizando como base os relatos da literatura em ensino acerca das dificuldades na aprendizagem deste tópico, sendo esse material denominado *instrumento de pesquisa*. Por fim, a última seção do capítulo fará uma discussão sobre a *Análise de Conteúdo* (AC).

que foi a metodologia escolhida para analisar as respostas dos estudantes.

### 3.1 Descrição do local de pesquisa e duração da aplicação da proposta de ensino de TRG

Imbuídos da ideia de realizar uma introdução à TRG para o EM nós realizamos um mapeamento para determinar os possíveis locais para a realização desta abordagem. Dentre os locais propícios para aplicação desta pesquisa, optamos por uma escola da rede federal em que o proponente da pesquisa é docente. Além do exposto anteriormente, a grade curricular da escola, no ano de 2019, apresentava o conteúdo de Física Moderna no currículo. Esse também foi um fator preponderante para a escolha do local devido ao fato da Física Moderna já estar imersa no projeto pedagógico da escola. Destacamos a seguir, de forma concisa, a grade curricular referente ao último ano das turmas do EM

- ótica geométrica e ótica física;
- Teoria da Relatividade Restrita (TRR): Postulados. Simultaneidade. Dilatação do tempo e contração do comprimento. Relação massa e energia relativística;
- espectroscopia. Quantização da energia. Efeito fotoelétrico.

Notamos um grande enfoque do currículo na Física Moderna, em especial na TRR e na Física Quântica, tornando propícia a introdução da TRG. Além dos fatores citados, esta instituição de ensino também apresenta um histórico de cursos e projetos<sup>1</sup> que versam sobre a temática FMC. Dessa forma, acreditamos que esta instituição seja um local profícuo para propormos uma nova abordagem do conteúdo de RG. Após a concretização da escolha da instituição, começamos a estabelecer a estratégia para a inserção da TRG. A estratégia utilizada foi inserir a TRG ao final da discussão sobre a TRR. Dessa forma, seria possível apresentar uma discussão completa sobre a TR para os estudantes. Entretanto, ressaltamos a nossa preocupação com o cumprimento da ementa oficial. Assim a introdução à TRG foi planejada de modo que todos os tópicos da ementa fossem trabalhados ao longo do ano letivo.

---

<sup>1</sup>Como, por exemplo, o curso de Física Moderna e Contemporânea (FMC) e, também, a participação dos estudantes em uma competição internacional promovida pelo CERN, o *Beamline for Schools (BL4S)*.

No planejamento inicial a discussão sobre a TR (Restrita e Geral) ocorreria de 11 de maio de 2020 até 27 de agosto de 2020, ao longo de onze semanas com aulas presenciais. Cada encontro com os estudantes apresentaria uma duração de 100 minutos (dois tempos de aula de 50 minutos) ao longo de 11 (onze) semanas. Nos quatro encontros iniciais seriam discutidos tópicos de TRR. Após essa imersão na TRR, em um encontro (dois tempos de 50 minutos) seriam trabalhadas as coordenadas cartesianas, polares e esféricas além de uma apresentação introdutória sobre a geometria não-euclidiana. Após esta etapa, três encontros, ao longo de três semanas, sobre a TRG seriam realizados. Por fim, ocorreriam três encontros para a discussão destinada aos buracos negros bem como os testes clássicos da TRG. Na décima segunda semana seria aplicado o *instrumento de pesquisa* para identificar as concepções dos estudantes que estão em desacordo com as concepções padrão da Física em relação à TRG.

Entretanto, a pandemia do Covid-19 alterou a data de aplicação da pesquisa e também a forma de como o curso seria desenvolvido. Com a suspensão das atividades presenciais nas escolas, o curso passou a ocorrer em formato não presencial (remoto) com atividades administradas pela plataforma *Microsoft Teams*. No regime remoto o curso precisou ser adiado, a nova data de aplicação ocorreu no período entre 11 de dezembro de 2020 até 2 de abril de 2021. Neste período, os estudantes tiveram um intervalo durante as festividades de final de ano (Natal e ano novo) e também um período de quinze dias de férias no mês de janeiro. No regime remoto os encontros foram compostos por atividades síncronas e assíncronas<sup>2</sup>. Devido às particularidades do regime não-presencial, dividimos a aplicação do *instrumento de pesquisa* em duas partes. A parte 1 contém as questões de 1 até 13 enquanto a parte 2 contém as questões de 14 até 21. Os encontros iniciais apresentavam um tempo médio de 75 minutos, mas com o passar das semanas aumentamos o tempo dos encontros para 100 minutos. Esse aumento de 25 minutos tinha como objetivo estabelecer uma maior participação dos estudantes nas aulas.

No regime remoto a TRR foi trabalhada ao longo de seis semanas em um total de seis encontros síncronos. Na sequência, em um encontro síncrono as coordenadas cartesianas, polares e esféricas bem como uma introdução à geometria não-euclidiana foram realizadas. Após os tópicos anteriores terem sido discutidos, iniciaram-se as aulas sobre a TRG. Nessa etapa foram trabalhados os seguintes tópicos: a insatisfação

---

<sup>2</sup>Atividade síncrona é aquela em que as atividades são realizadas em tempo real; enquanto as atividades assíncronas são atividades gravadas que ficam à disposição dos alunos para serem assistidas em quaisquer momentos.

de Einstein com o *status privilegiado* dos referenciais inerciais; o Princípio da Relatividade Geral (PRG); as diferentes formulações do Princípio da Equivalência (PE); e as consequências teóricas na utilização do PE na previsão de novos fenômenos. Após a finalização dos conteúdos descritos anteriormente, foi aplicada a parte 1 do *instrumento de pesquisa*. Na sequência, foi realizado o encerramento da parte inicial com uma discussão sobre o espaço-tempo curvo com uma breve discussão para a solução da *métrica* para um buraco negro. Utilizamos um total de três encontros (com duração de 100 minutos para cada encontro) na discussão inicial da TRG. Todas as atividades descritas até aqui foram realizadas de maneira síncrona, incluindo a aplicação da parte 1 do instrumento de pesquisa. Por fim, devido a problemas no calendário acadêmico o conteúdo final foi gravado e disponibilizado de forma assíncrona pela plataforma *Microsoft Teams* aos estudantes. O conteúdo final apresentava uma discussão sobre a solução de Schwarzschild; a aplicação da métrica de Schwarzschild ao desvio gravitacional para o vermelho; discussões qualitativas sobre a deflexão da luz e a precessão do periélio de mercúrio; e o diagrama espaço-tempo ao redor de um buraco negro de Schwarzschild. A duração aproximada do conteúdo gravado era de 110 minutos. O vídeo apresentava um conteúdo denso e os estudantes relataram que precisaram assistir o vídeo por duas vezes ou pausar a gravação e retroceder o vídeo para compreender as explicações sobre os tópicos listados. Se o conteúdo gravado fosse realizado de maneira síncrona teríamos que dividir esse conteúdo em dois encontros de 100 minutos. Após o encerramento do conteúdo do curso foi aplicada a parte 2 do instrumento de pesquisa (questões 14 até 21). As atividades ocorreram ao longo de treze semanas.

## 3.2 Conectando a abordagem utilizada com a literatura especializada

### 3.2.1 Construção do texto de apoio para o ensino de TRG

Nesta seção detalharemos como foram as etapas de construção de um material didático, chamado nesta tese de *texto de apoio*, produzido com o objetivo de fornecer uma introdução da TRG no EM. A versão completa do *texto de apoio* está colocada no apêndice A e uma versão resumida do texto está colocada no apêndice B. O *texto de apoio* está dividido em sete seções. A seção A1 apresenta uma breve explicação sobre a construção do texto. A seção A2 apresenta uma introdução à TRR. A se-

ção A3 apresenta os diagramas espaço-tempo e o intervalo invariante. A seção A4 traz as coordenadas cartesianas, polares, esféricas e uma discussão sobre a geometria não-euclidiana. A seção A5 apresenta uma breve revisão sobre temas em mecânica newtoniana. A seção A6 contém uma introdução à TRG. A seção A7 apresenta os buracos negros e os testes clássicos da TRG.

Na seção A2 fizemos uma introdução para discutir a TRR. A bibliografia principal para a construção deste capítulo foi o livro “Understanding Relativity” (SARTORI, 1996). Nesta seção, apresentamos os postulados da TRR e as previsões teóricas advindas da aplicação dos postulados em experimentos de pensamento. Dessa forma, a simultaneidade, a dilatação do tempo e a contração do comprimento são apresentadas. Seguindo a abordagem adotada em Sartori (1996), ao introduzirmos os conceitos da simultaneidade; da dilatação do tempo; e da contração do comprimento, apresentamos sua definição por extenso e de maneira matematizada para torná-los mais inteligíveis aos alunos. Na sequência, discutimos as transformações de Lorentz para as coordenadas espaço-temporais e para a velocidade. Complementamos esse capítulo trazendo o efeito Doppler, o momento linear relativístico e a energia relativística baseando nossas discussões nos autores Knight (2016) e Collier (2019).

Na seção A3, continuamos desenvolvendo tópicos de TRR que serão importantes para as discussões das seções A6 e A7. Iniciamos apresentando o intervalo invariante ou intervalo espaço-temporal. No processo de escrita da seção A3 nos baseamos nos resultados trazidos por Carageorge (2020). Nesse trabalho, o autor faz uma introdução à TRG para o EM discutindo também a TRR. De todos os estudantes que participaram da pesquisa de Carageorge, o autor destaca que nenhum estudante conseguiu responder o que era o intervalo espaço-temporal (CARAGEORGE, 2020, p. 73). Como o intervalo espaço-temporal representa uma parte fundamental de nossa abordagem para a introdução da TRG no ensino secundário, achamos necessário criar um novo capítulo para que pudéssemos dar ênfase a este tópico. Como dito por Taylor, Wheeler e Bertschinger (2018, p. 1-23), “em relatividade todo o invariante é um diamante”. Dessa forma escolhemos enfatizar a discussão sobre o intervalo espaço-temporal sempre que possível. Na sequência os diagramas espaço-tempo são discutidos para que os estudantes apresentem uma visão geométrica, juntamente com o intervalo invariante, da TRR. Combinando o intervalo invariante e o diagrama espaço-tempo podemos, por exemplo, discutir o paradoxo dos gêmeos em uma forma geométrica. Este capítulo segue as referências: (GRIFFITHS, 2010), (NATÁRIO, 2010), (TAYLOR; WHEELER;

BERTSCHINGER, 2018) e (COLLIER, 2019).

Na seção A4, fazemos uma apresentação das coordenadas cartesianas, polar e esférica, pois esse é um tópico desconhecido para os alunos que participaram da pesquisa. Além disso, apresentamos aspectos da geometria não-euclidiana, fazendo uma comparação entre os resultados da geometria euclidiana e da geometria não-euclidiana. Essa discussão torna-se importante porque, como descrito por Kersting, Henriksen, Bøe e Angell (2018, p. 010130-14), os alunos “dão como certa a natureza euclidiana do nosso universo”. Dessa forma, a existência de outras formas de geometria deve ser apresentada aos estudantes. A abordagem utilizada para discutir a geometria não-euclidiana seguiu a atividade apresentada no trabalho do autor Pössel (2018, p. 20) que pode ser acessada pelo seguinte link <https://youtu.be/-czyukZm94I>. Essa abordagem consiste em uma atividade prática em que são realizadas duas experiências. Na primeira experiência são medidos os ângulos internos de um triângulo traçado sobre uma superfície curva e, em seguida, a soma dos ângulos internos é comparada com o resultado da geometria euclidiana. Na segunda experiência uma circunferência é traçada sobre uma superfície curva. Após a medida do comprimento da circunferência e do raio da mesma é calculada a razão entre o comprimento da circunferência e do raio - novamente o resultado da medida anterior é comparado com o resultado da geometria euclidiana. Essas atividades, que podem ser realizadas em sala de aula, permitem que os estudantes explorem a geometria não-euclidiana. Como relatado por Junius (2008), à semelhança de Henri Poincaré: “não se aprende uma nova geometria, mas se acostuma.” Dessa forma, a opção de utilizar as atividades propostas por Pössel (2018) tem o objetivo de fazer com que os estudantes tenham um contato com medidas em superfícies curvas.

Na seção A5 apresentamos uma revisão sobre a mecânica newtoniana. Esse capítulo foi formulado em virtude de relatos de que as dificuldades na concepção dos alunos na aprendizagem de tópicos de TRG surgem, possivelmente, de concepções alternativas advindas do aprendizado de conteúdos anteriores; uso indiscriminado de conhecimentos prévios adquiridos durante a formação do estudante; ou devido à falta de atenção em detalhes importantes e discriminações conceituais sutis (REIF, 2008 apud BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b). Dessa forma, apresentamos a discussão dos seguintes tópicos: a formulação das leis de Newton; a gravitação; a análise das leis de movimento escritas em relação aos referenciais iniciais e não-iniciais. Logicamente, esse capítulo não tem a pretensão de ser um texto básico para a discussão

da mecânica newtoniana, mas sim um texto complementar para discutirmos detalhes importantes para o ensino de TRG.

Na seção A6 iniciamos a discussão sobre a TRG. A construção deste capítulo apresentou como inspiração inicial a sequência proposta por Kersting, Henriksen, Bøe e Angell (2018, p. 010130-5). A sequência proposta pelos autores é dividida em duas partes: base conceitual e fenômenos relativísticos. A base conceitual apresenta uma discussão sobre o PE, os referenciais, o PRG e, por fim, o espaço-tempo e a curvatura. Já em relação aos fenômenos relativísticos os seguintes conteúdos foram apresentados: a deflexão da luz, o desvio gravitacional para o vermelho e a dilatação gravitacional do tempo. Dessa forma, o início da escrita da seção A6 fundamentou-se na sequência proposta do Kersting, Henriksen, Bøe e Angell (2018). Entretanto, ao longo do desenvolvimento da nossa pesquisa, tivemos contato com os trabalhos de Bandyopadhyay e Kumar (2010a) e (2010b). Assim, combinando os trabalhos de Bandyopadhyay e Kumar com o livro de divulgação da TR de Einstein (EINSTEIN, 1999) modificamos a sequência inicial de escrita da seção A6. Por isso, iniciamos analisando a insatisfação de Einstein com o status privilegiado que os referenciais inerciais possuíam na MN e na TRR. Posteriormente, o PRG é analisado nos moldes propostos por Einstein e, em seguida, um exemplo que vai de encontro ao PRG é apresentado. Após essa discussão, apresentamos o PE e discutimos a importância do PE como argumento a favor do PRG. Para a discussão sobre o PE Kersting, Henriksen, Bøe e Angell (2018) argumentam que utilizar experiências cotidianas para discutir os princípios físicos é uma prática interessante, pois os estudantes se lembram com mais facilidade de experimentos que eles visualizaram. O exemplo cotidiano utilizado pelos autores consiste em analisar uma garrafa com água que possui furos em sua lateral, em queda livre. Quando a garrafa é colocada em queda livre a água deixa de escoar pelos furos. Para um referencial em queda livre, juntamente com a garrafa, é como se a gravidade tivesse desaparecido, sendo que esse mesmo efeito seria obtido se a garrafa estivesse no espaço livre (longe de qualquer corpo celeste). Essa proposta visa conectar uma experiência cotidiana com a física da relatividade. Entretanto, é relatado que os alunos podem apresentar dificuldades em relacionar a explicação do problema com o PE, indicando que as atividades propostas que relacionam as experiências cotidianas dos estudantes com a física da relatividade devem ser claras nessa associação (KERTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018, p. 010130-10). Esse mesmo resultado também foi encontrado por Carageorge (2020). Os estudantes até responderam corre-

tamente o que aconteceria com a água saindo da garrafa durante a queda, mas alguns não relacionaram a explicação com o PE (CARAGEORGE, 2020, p. 73). Além disso, devemos levar em consideração a dificuldade dos estudantes em lidar com o PE escrito em termos dos referenciais em queda livre (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 151). Dessa forma, optamos por discutir o PE através da seguinte sequência:

1. apresentação do PE em sua forma “fraca”: nenhuma experiência, mecânica, pode distinguir entre um campo gravitacional uniforme ( $\vec{g}$ ) e a aceleração uniforme equivalente ( $\vec{A} = \vec{g}$ );
2. interpretação física da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional utilizando o PE;
3. utilização do PE como argumento a favor do PRG;
4. apresentação do PE em termos dos referenciais em queda livre: um referencial não-girante em queda livre em um campo gravitacional uniforme é equivalente a um referencial inercial na ausência de gravidade;
5. ponderações sobre a aplicação do PE enunciado em termos dos referenciais em queda livre em campos gravitacionais não uniformes;
6. apresentação do PE em sua forma “forte”: Nenhuma experiência, mecânica ou não, pode distinguir entre um campo gravitacional uniforme ( $\vec{g}$ ) e a aceleração uniforme equivalente ( $\vec{A} = \vec{g}$ ).“
7. previsão teórica, utilizando o PE em sua forma “forte”, de dois novos fenômenos: a deflexão da luz em um campo gravitacional e o desvio gravitacional para o vermelho.

Assim, destacamos os livros Sartori (1996) e Einstein (1999) e os artigos dos autores Bandyopadhyay e Kumar (2010a); Bandyopadhyay e Kumar (2010b); e Kersting, Henriksen, Bøe e Angell (2018) na construção da seção A6. Destacamos ainda a utilização dos experimentos de pensamento em toda nossa abordagem. Os experimentos de pensamento ajudam os estudantes a raciocinar em situações fora do seu cotidiano e compreender conteúdos que se baseiam em pensamento abstrato (VELENTZAS; HALKIA, 2013, p. 3046). Na continuação da seção apresentamos o problema do disco girante cuja solução forneceu pistas para Einstein perceber que, na presença de matéria, temos um espaço-tempo curvo. Além disso, uma discussão qualitativa das equações de Einstein é feita e a solução de Schwarzschild é apresentada. O final desta seção é o prelúdio para a solução de Schwarzschild e o significado métrico das coordenadas.

Por fim, a seção A7 apresenta uma aplicação da TRG fazendo uma discussão sobre buracos negros. A escolha do conteúdo desta seção tem como inspiração a crítica

trazida em Kersting, Henriksen, Bøe e Angell (2018) de onde destacamos os seguintes trechos:

“[...] os alunos pediram mais abordagens matemáticas e cálculos fáceis para testar sua compreensão também. Essa foi uma crítica recorrente nas entrevistas que diz respeito à frustração que os alunos experimentam ao abordar a RG apenas qualitativamente.” (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018, p. 010130-14)

E na sequência,

“No entanto, o desafio em RG é que não temos cálculos fáceis à mão e que os alunos têm que confiar quase exclusivamente em explicações não matemáticas.” (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018, p. 010130-14)

Após uma reflexão sobre os trechos apresentados, iniciamos uma busca de abordagens quantitativas para a RG compatíveis com o ensino secundário. Dessa forma, fizemos uma leitura de livros e artigos que versassem sobre esse tema. O trabalho de Stannard, Blair, Zadnik, Kaur (2017) apresenta uma abordagem interessante na introdução de abordagens quantitativas. Destacamos também o livro dos autores Taylor, Wheeler e Bertschinger (2018). Na segunda edição do livro *Exploring Black Holes*, Taylor, Wheeler e Bertschinger apresentam a TRG sem ênfase no formalismo tensorial da teoria utilizando como objeto de estudo o buraco negro. O livro *Exploring Black Holes* foi produzido para o ensino universitário, porém em diversos momentos do livro as abordagens são compatíveis com o ensino secundário. Por isso, optamos por utilizar esse texto como referência principal em nossa abordagem quantitativa da TRG. Finalmente, a seção A7 culmina na descrição do buraco negro. Após essa discussão inicial, introduzimos as chamadas *estrelas negras* e também uma breve apresentação sobre a formação do buraco negro e a classificação dos mesmos segundo a massa, a carga e o momento angular. Posteriormente, a solução de Schwarzschild é apresentada, novamente, ilustrando o raio de Schwarzschild e o horizonte de eventos. Na sequência interpretamos as coordenadas de Schwarzschild. Essa interpretação fundamenta-se no capítulo 5 (Global and Local Metrics) do livro *Exploring Black Holes*. Essa discussão concentra-se na perplexidade de Einstein sobre a falta de significado métrico das coordenadas na TRG. Embora esse tópico seja um tanto técnico os autores Taylor, Wheeler e Bertschinger apresentam uma maneira simples e visual para ilustrar esse tópico. Posteriormente são apresentados os três testes clássicos da TRG: a deflexão da luz, a precessão do periélio de mercúrio e o desvio gravitacional para o vermelho.

Os dois primeiros são discutidos apenas de forma qualitativa enquanto o desvio gravitacional para o vermelho é deduzido a partir de uma análise quantitativa utilizando a métrica de Schwarzschild. Por fim, discutimos o traçado de raios de luz em um diagrama espaço-tempo ao redor de um buraco negro.

### 3.2.2 Conteúdo e descrição das aulas de TRG

Como já descrito, o curso de TR ocorreu de 11 de dezembro de 2020 até 2 de abril de 2021 em regime remoto pela plataforma Microsoft Teams. As aulas foram conduzidas utilizando slides para a apresentação dos conteúdos. A apresentação dos conteúdos foi realizada de maneira socrática, por meio de perguntas, para que os alunos participassem mais ativamente das aulas. Os encontros foram conduzidos ao longo de treze semanas, em que cada encontro apresentava duração média de 100 minutos. Os tópicos trabalhados nos encontros síncronos e assíncronos foram:

- semana 1 (síncrono) - relatividade de Galileu, postulados da TRR e o problema da simultaneidade;
- semana 2 (síncrono) – dilatação do tempo e contração do comprimento;
- semana 3 (síncrono) - transformações de Lorentz;
- semana 4 (síncrono) – aplicações das transformações de Lorentz;
- semana 5 (síncrono) – momento relativístico e energia relativística;
- semana 6 (síncrono) – diagramas espaço-tempo, intervalo invariante e o paradoxo dos gêmeos;
- semana 7 (síncrono) – coordenadas cartesianas, polar e esférica; e geometria não-euclidiana;
- semana 8 (síncrono) – introdução à TRG, a insatisfação de Einstein com o status dos referenciais inerciais e a proposição do PRG;
- semana 9 (síncrono) – o PE e suas consequências;
- semana 10 (síncrono) – aplicação parte 1 do *instrumento de pesquisa*;
- semana 11 (síncrono) – o espaço-tempo curvo e introdução aos buracos negros;
- semana 12 (assíncrono) – aplicação da métrica de Schwarzschild, significado métrico das coordenadas e testes clássicos da TRG (com aproximadamente 110 minutos de duração);
- semana 13 (assíncrono) - aplicação parte 2 do *instrumento de pesquisa*.

O planejamento inicial era realizar todos os encontros de forma síncrona com os estudantes. Entretanto, o encerramento do ano letivo foi antecipado pela instituição de ensino em aproximadamente um mês. Portanto, tivemos de compactar a aula da semana 12 e a aplicação da parte 2 do questionário em atividades assíncronas.

### 3.3 Construção do instrumento de pesquisa

Nesta etapa iniciamos o detalhamento da construção do instrumento de pesquisa para acessar possíveis *vulnerabilidades conceituais* dos estudantes após um curso introdutório de TRG voltado para o ensino secundário. Construímos um material contendo 21 (vinte e uma) questões objetivas. Esse conjunto de questões é chamado por nós de *instrumento de pesquisa*. O instrumento de pesquisa foi dividido em duas partes para facilitar a sua aplicação. A parte 1 foi fundamentada nos trabalhos de (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a) e (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b) combinado com livro de divulgação da TR de Einstein (EINSTEIN, 1999). A parte 2 são questões exploratórias que visam a avaliar tópicos pouco pesquisados na literatura. A consulta ao instrumento de pesquisa pode ser feita no apêndice C.

Na sequência detalharemos o processo de construção do *instrumento de pesquisa*. Apesar das questões serem todas objetivas destacamos que nossa análise se concentrará na justificativa atribuída pelos estudantes à alternativa escolhida. Justificamos essa escolha devido ao fato, como já relatado, de que as questões foram aplicadas de forma remota e, portanto, não possuímos total controle acerca de possíveis comunicações (“cola”) entre os alunos. Dessa forma, optamos por nos concentrar na análise da justificativa para uma determinada opção escolhida pelo estudante.

#### 3.3.1 Diferença entre descrever os fenômenos físicos e descrever as leis físicas

A construção das questões 1 até 4 tem como objetivo avaliar a compreensão dos estudantes sobre a distinção entre a descrição de um fenômeno físico e a determinação das leis da física. A descrição de um fenômeno físico corresponde à medição das grandezas físicas envolvidas no estudo do mesmo e a determinação das leis da Física corresponde a relações gerais entre as grandezas físicas medidas (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a, p. 020104-4). Além disso, investigamos a compreensão dos estu-

dantes acerca de afirmações que precisam de confirmação experimental e, também, de afirmações que não precisam de confirmação experimental. Os relatos na literatura sobre dificuldades na aprendizagem destes tópicos são:

1. dificuldade em diferenciar a descrição dos fenômenos físicos e a descrição das leis da natureza;
  2. dificuldade em diferenciar o que são afirmações óbvias a priori (não necessitam de confirmação experimental) e afirmações que não são óbvias a priori (necessitam de confirmação experimental).
- (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a, p. 020104-3)

As questões 1, 2, 3 e 4 apresentam um enunciado em comum. Neste enunciado temos dois referenciais que analisam a queda livre de uma lâmpada que se desprende do topo de um vagão em movimento em relação ao leito de uma estrada. O referencial fixo no leito da estrada é chamado de *referencial do solo* enquanto o fixo no vagão é, simplesmente, chamado de *referencial do vagão*. As questões 1 e 2 concentram-se na descrição dos fenômenos físicos, ou seja, na descrição do movimento de queda livre da lâmpada. Na questão 1 supomos que o vagão se move de maneira uniforme em relação ao leito da estrada de ferro. A partir das alternativas, analisamos se os alunos apresentam a compreensão de que é indiferente a escolha do referencial para a descrição da queda da lâmpada, embora a descrição possa ser mais simples no referencial do vagão, e que essa afirmação é óbvia a priori e, portanto, não necessita de confirmação experimental. A questão 2 é idêntica à anterior, porém agora o vagão está em movimento uniformemente variado em relação ao leito da estrada. Novamente a resposta, para a descrição da queda da lâmpada é idêntica a questão 1, ou seja, é indiferente a escolha do referencial para a descrição da queda da lâmpada e, novamente, essa afirmação não necessita de comprovação experimental. A proposta acerca destas questões está apoiada na discussão proposta por Einstein que trata do assunto da seguinte forma: “quando se trata apenas de constatar ou descrever o movimento, em princípio, é indiferente a que corpo de referência o movimento está relacionado” (EINSTEIN, 1999, p. 53). Já as questões 3 e 4 discutem a determinação das leis físicas. Na questão 3, em que o vagão se move de maneira uniforme, analisamos se os estudantes comprehendem que as leis da Física assumem a mesma forma nos referenciais inerciais e que essa afirmação necessita de confirmação experimental. Na questão 4, em que o vagão se move de maneira uniformemente variada, a determinação das leis da Física depende da escolha do referencial. As leis da Física assumem a sua forma mais simples nos referenciais inerciais, sendo essas afirmações não óbvias a priori e, assim, necessitando de

confirmação experimental. Novamente as questões 3 e 4 fundamentam-se nas palavras de Einstein:

“O princípio<sup>3</sup> afirma mais: se formularmos as leis gerais da natureza, tal como elas resultam da experiência, servindo-nos (a) do leito da estrada como corpo de referência e (b) do vagão como corpo de referência, estas leis gerais da natureza (por exemplo, as leis da mecânica ou a lei da propagação da luz no vácuo) têm exatamente a mesma forma nos dois casos [...] este último não tem necessariamente que ser verdadeiro a priori, pois não está contido nos conceitos de “movimento” ou de “corpo de referência”, nem pode ser derivado deles. Só a experiência pode decidir se ele está certo ou errado.” (EINSTEIN, 1999, p. 53)

A frase de Einstein ilustra que o primeiro postulado da TRR necessita de confirmação experimental e não advém das noções primitivas da escolha de um corpo de referência.

### 3.3.2 A insatisfação de Einstein e a sua busca pelo PRG

Para a construção da questão 5 utilizamos a insatisfação de Einstein com o status privilegiado dos referenciais inerciais e, como resultado da sua insatisfação, a proposição do PRG. A insatisfação de Einstein se refere ao fato que as leis da Física assumem a sua forma mais simples nos referenciais inerciais. O PRG estabelece que “todos os referenciais são equivalentes à formulação das leis gerais da natureza (Física) independentemente de seus estados de movimento”. Os relatos sobre as dificuldades de aprendizagem deste tópico são:

1. dificuldade em diferenciar o que é “descrição dos fenômenos” e o que é a “descrição das leis da natureza”;
2. dificuldade em perceber que as leis da Física apresentam formas diferentes para referenciais inerciais e não-inerciais e que esse fato entrava em conflito com o PRG proposto por Einstein.  
(BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a, p. 020104-5)

Os relatos de Bandyopadhyay e Kumar (2010<sup>a</sup>, p. 020104-5) mostram que a dificuldade na diferenciação entre a descrição dos fenômenos e a determinação das leis da natureza impactou na dificuldade acerca da compreensão do PRG. Por isso, a questão 5 inicia colocando a insatisfação de Einstein com o status privilegiado dos referenciais inerciais e, em seguida, é enunciado o PRG. Na sequência, apresentamos um exemplo

---

<sup>3</sup>O princípio a que Einstein se refere é o Princípio da Relatividade Restrita.

de um vagão que sofre uma desaceleração abrupta. A análise do vagão em movimento não-uniforme ilustra o conflito entre e a proposição do PRG com a determinação das leis da natureza em referenciais não-inerciais. As alternativas avaliam a compreensão dos estudantes de que a proposição de Einstein para o PRG se refere à equivalência da formulação das leis gerais da natureza para todos os referenciais (inerciais e não-inerciais), mas o exemplo do vagão em movimento não-uniforme entra em conflito com a validade do princípio proposto. Einstein, em seu livro de divulgação, traz de maneira muito simples essa discussão:

Depois de se haver comprovado o princípio da relatividade especial, é tentador para toda mente que aspira à generalização dar o passo em direção ao princípio da relatividade geral. (EINSTEIN, 1999, p. 55)

E prossegue

se o movimento do vagão passa a ser não-uniforme – por exemplo, em consequência de uma violenta freada -, o viajante experimenta um forte puxão para frente [...] por isso nos parece impossível que, em relação, ao vagão em movimento não uniforme, se apliquem as mesmas leis mecânicas que em relação ao vagão em repouso ou em movimento uniforme [...] Por isso nos sentimos de imediato forçados a, contrariamente ao PRG, atribuir ao movimento não uniforme uma espécie de realidade física absoluta. (EINSTEIN, 1999, p. 55)

A realidade física absoluta é justamente associada à presença dos efeitos de inércia provocado pela desaceleração do vagão.

### 3.3.3 A notável propriedade do campo gravitacional

Para a construção da questão 6 nós utilizamos o fato de que diferentes corpos abandonados próximos à superfície da Terra experimentam a mesma aceleração na ausência de resistência do ar. O relato sobre a dificuldade de aprendizagem deste tópico é:

1. dificuldade em perceber que a aceleração de um corpo sob a ação exclusiva de um campo gravitacional independe da massa do objeto.  
(BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a, p. 020104-4)

As alternativas da questão têm como objetivo avaliar a compreensão dos estudantes de que esta propriedade notável é exclusiva do campo gravitacional e que a aceleração adquirida por um corpo em queda livre, na ausência de resistência do ar, é independente da massa ou composição do objeto. Os relatos de Bandyopadhyay e Kumar

(2010a, p. 020104-4) não mostraram qualquer dificuldade dos estudantes em perceber que a independência da massa na queda dos corpos não se aplica ao campo elétrico e ao campo magnético. Entretanto, decidimos incorporar nas opções itens sobre a aceleração adquirida por corpos na presença de outros campos como o magnético, por exemplo. A justificativa para tal inclusão está relacionada ao fato da amostra de alunos que participaram do trabalho de Bandyopadhyay e Kumar apresentarem elevado nível acadêmico. A montagem elaboração desta questão tem como base a discussão proposta por Einstein:

“ O campo gravitacional, ao contrário do campo elétrico e magnético, apresenta uma propriedade extremamente notável, que é de fundamental importância para o que segue. Corpos que se movimentam sob ação exclusiva do campo gravitacional experimentam uma aceleração que não depende em absoluto nem do material nem do estado físico do corpo. Um pedaço de ferro e um pedaço de madeira, por exemplo, caem no campo gravitacional (no vácuo) exatamente da mesma maneira.” (EINSTEIN, 1999, p. 57)

### **3.3.4 Diferença entre a massa inercial e a massa gravitacional**

Para a construção da questão 7 utilizamos a diferença conceitual entre a massa inercial e a massa gravitacional. A primeira representa uma medida da resistência que um corpo oferece à alteração do seu estado de movimento enquanto a segunda representa o análogo gravitacional da carga elétrica. Além disso, exploramos o fato experimental que estabelece a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional. Os relatos sobre as dificuldades de aprendizagem deste tópico são:

1. concepção equivocada da massa gravitacional como algo que “resiste” a uma força gravitacional;
2. interpretação equivocada de que a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional (proporcionalidade entre as mesmas) é óbvia a priori, ou seja, sem a necessidade de confirmação experimental;
3. concepção equivocada de que a massa gravitacional é um caso particular da massa inercial.

(BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a, p. 020104-4)

A questão 7 inicia retomando a propriedade do campo gravitacional que leva, experimentalmente, ao resultado da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional.

### 3.3.5 Interpretação física para a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional

A construção da questão 8 tem por objetivo utilizar o PE em um problema baseado em um experimento de pensamento. Um detalhe importante na construção desse problema é a utilização do PE como ponto de partida para uma interpretação física para a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional. O relato sobre a dificuldade de aprendizagem deste tópico é:

1. dificuldade em colocar como ponto de partida a validade do PE e obter, como consequência, a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional.

(BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a, p. 020104-5)

A questão 8 inicia descrevendo dois referenciais que possuem em seu interior um dinamômetro com um objeto pendurado. O primeiro referencial consiste de uma nave que repousa na superfície da Terra e o segundo referencial consiste de uma nave que está em movimento não-uniforme no espaço livre (sem gravidade) com aceleração de mesmo módulo, mas sentido oposto ao campo gravitacional. A marcação no dinamômetro no primeiro caso determina a massa inercial do corpo enquanto a marcação do dinamômetro no segundo caso determina a massa gravitacional do corpo. A equivalência entre as duas situações apresentadas mostra a interpretação da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional. Nessa análise, o estudante deve interpretar que a tração (marcação no dinamômetro) medida nos dois referenciais devem ser iguais se o PE é válido e, como consequência dessa validade, a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional é obtida. A organização dessa questão tem como base a seguinte discussão proposta por Einstein:

“Suponhamos que o homem na caixa prenda na face interna do teto da caixa uma corda, e que na extremidade livre desta ele amarre um corpo. Por influência deste, a corda ficará tensa e pendurada “verticalmente”. Perguntemo-nos pela causa da tensão na corda. O homem na caixa dirá: “O corpo suspenso experimenta no campo gravitacional uma força para baixo [...] o que determina o valor da tensão da corda é a massa gravitacional [...] Mas, por outro lado, um observador que flutue livremente no espaço há de considerar a situação da seguinte maneira: “A corda é forçada a acompanhar o movimento acelerado da caixa e transmite este movimento ao corpo preso a ela [...] O que determina o valor da tensão na corda é a massa inercial.” Vemos, por este exemplo, que nossa extensão do princípio da relatividade faz aparecer como necessária a afirmação da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional. Com isto obtivemos uma interpretação física desta proposição.” (EINSTEIN, 1999, p. 60)

### 3.3.6 O PE como um poderoso argumento a favor do PRG

A construção da questão 9 tem por objetivo a interpretação da utilização do PE como um argumento a favor da proposição do PRG. Os relatos na literatura sobre as dificuldades acerca destes tópicos são:

1. dificuldade dos estudantes na análise de como Einstein utilizou o princípio da equivalência para generalizar o princípio da relatividade para referenciais acelerados (PRG). (BANDYO-PADHYAY; KUMAR, 2010a, p. 020104-5)

A questão 9 inicia colocando um trecho do livro de Einstein (EINSTEIN, 1999) analisando um vagão que sofre uma brusca freada. Neste trecho é analisada a interpretação de um observador, no interior do vagão, para o efeito percebido pelo mesmo durante a desaceleração do vagão. Essa questão visa a analisar a compreensão dos estudantes na utilização do PE como argumento a favor do PRG. A formatação dessa questão tem como base a ideia:

“É bem verdade que o observador que se encontra no vagão da estrada de ferro que está sendo freado experimenta, em consequência da freada, um puxão para frente, e que desta forma ele percebe o movimento não uniforme do vagão. Mas ninguém o obriga a atribuir o puxão a uma aceleração “real” do vagão. Ele também pode interpretar da seguinte forma o que experimentou: Meu referencial (vagão) está permanentemente em repouso. Mas, durante o período da frenagem, existe em relação ao mesmo um campo gravitacional dirigido para frente e que varia com o tempo [...] É este campo gravitacional que provoca também o puxão no observador.” (EINSTEIN, 1999, p. 61)

### 3.3.7 O PE como argumento para a deflexão da luz

As questões 10 e 11 têm por objetivo analisar a trajetória da luz em relação a um referencial acelerado e a utilização do PE na previsão de novos resultados como a deflexão da luz devido à influência da gravidade. Assim, a generalização do PE para contemplar todos os fenômenos físicos nos leva a concluir que os raios luminosos serão defletidos na presença de campos gravitacionais. Os relatos na literatura sobre dificuldades acerca destes tópicos são:

1. o conhecimento prévio de TRR, mais precisamente da equação  $E = mc^2$ , faz com que os alunos pesquisados achem a utilização desse argumento (associando uma massa para a luz) mais simples que a utilização do princípio da equivalência para explicar a deflexão da luz em um campo gravitacional;

2. alguns estudantes invocaram a imagem corpuscular da luz, utilizada por Newton, para prever a deflexão;
3. poucos estudantes se deram conta que Einstein precisava estender o Princípio de Equivalência do domínio restrito da mecânica, a chamada versão “fraca” do Princípio de Equivalência para todos os domínios da Física, a versão chamada “forte” do Princípio de Equivalência para prever a deflexão da luz.

(BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a, p. 020104-7)

A questão 10 e a questão 11 apresentam um enunciado em comum em que uma nave está em movimento uniformemente acelerado no espaço livre. Durante o movimento, um pulso luminoso atravessa a nave em uma direção perpendicular ao movimento da mesma. A questão 10 analisa a trajetória do pulso luminoso do ponto de vista do referencial uniformemente acelerado. Na questão 11, o PE é introduzido e a análise da trajetória do pulso luminoso sob a ação de um campo gravitacional é investigada. A questão tem como base o argumento:

“Em relação ao corpo de referência galileano  $K$  a luz se propaga em linha reta com a velocidade  $c$ . Em relação à caixa acelerada (corpo de referência  $K'$ ), como não é difícil concluirmos, a trajetória do mesmo raio luminoso já não é mais uma reta. Daí devemos concluir que *em um campo gravitacional os raios luminosos em geral se propagam segundo linhas curvas.*” (EINSTEIN, 1999, p. 64)

### 3.3.8 O PE e o pensamento mais feliz da vida de Einstein

A questão 12 visa a analisar se os estudantes compreendem que os efeitos percebidos por um observador em queda livre são idênticos aos efeitos descritos por um observador em movimento uniforme no espaço livre (sem gravidade). Essa percepção da equivalência entre as situações colocadas na frase anterior expressa o “pensamento mais feliz da vida de Einstein.” Já a questão 13 visa a analisar se os estudantes entendem o alerta de Einstein acerca da validade do PE apenas para pequenas regiões do espaço-tempo.

1. Dificuldade de alguns alunos em entender claramente que a situação de um observador em queda livre (em um campo gravitacional uniforme) é idêntica à de um observador inercial no espaço livre;
2. Para um campo gravitacional não uniforme, os alunos apresentaram dificuldade em associar a validade do PE a uma pequena região do espaço-tempo. Os estudantes tendem a citar apenas que a validade do PE é local (em um campo gravitacional não uniforme) e isso dependeria da

consideração apenas de uma pequena região do espaço.

(BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 147) e (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 151),

As questões 12 e 13 apresentam um enunciado em comum em que o PE é enunciado em termos do “pensamento mais feliz da vida de Einstein”. Na questão 12 o campo gravitacional é tratado como uniforme e imaginamos um elevador que cai em queda livre. No momento de queda do elevador, uma maçã é abandonada. O PE, em termos dos referenciais em queda livre, é apresentado também no enunciado. As alternativas visam a analisar se os estudantes interpretam corretamente o PE. Além disso, os estudantes devem analisar que uma maçã abandonada ficará flutuando em relação ao referencial em queda livre ou em relação ao referencial em repouso no espaço livre. Na questão 13, o campo gravitacional é não uniforme. As alternativas têm como objetivo investigar que o PE é válido apenas em uma pequena região do espaço-tempo. Além disso, os estudantes devem analisar os efeitos de maré associados à não-uniformidade do campo gravitacional associado à separação relativa entre duas maçãs abandonadas, em relação ao elevador, de alturas diferentes. A elaboração da questão teve como base a discussão:

“Então ocorreu-me o pensamento mais feliz de minha vida, na forma seguinte: um campo gravitacional tem existência relativa [...] pois para um observador que cai livremente do telhado de uma casa não há - pelo menos nas suas vizinhanças imediatas - campo gravitacional.” (PAIS, 1995, p. 178)

A seguir, apresentaremos a parte 2 do instrumento de pesquisa. A parte 2 investiga conceitos ainda pouco explorados na literatura. O trabalho de Kersting, Henriksen, Bøe e Angell (2018, p. 010130-11) traz algumas dificuldades dos estudantes no estudo do funcionamento de relógios na proximidade de um corpo massivo e, também, sobre o desvio gravitacional para o vermelho. Nessa etapa, as questões 14, 16, 17, 18 e 19 exploram as questões trazidas anteriormente relacionadas aos tópicos pouco explorados no ensino de TRG. Já a questão 15 ilustra a perda de significado métrico das coordenadas de forma conceitual, enquanto as questões 20 e 21 exploram a interpretação dos diagramas espaço-tempo ao redor de um buraco negro. As questões 15, 20 e 21 seguem a referência dos autores Taylor, Wheeler e Bertschinger (2018).

### 3.3.9 O funcionamento de relógios em campos gravitacionais

A questão 14 objetiva avaliar a compreensão dos estudantes sobre o funcionamento de relógios em um campo gravitacional. Assim, os estudantes deverão perceber que o funcionamento de relógios é afetado pela presença de um objeto massivo. A questão avalia uma comparação entre relógios mais próximos e relógios mais distantes de uma fonte de campo gravitacional.

### 3.3.10 A perda de significado métrico das coordenadas e a importância da métrica do espaço-tempo

A questão 15 procura investigar aspectos relacionados ao espaço-tempo curvo da TRG. Em um espaço-curvo as coordenadas perdem seu significado métrico e para que possamos realizar previsões de medidas físicas é necessário conhecermos a métrica do espaço-tempo ( $s^2$ ). Essa questão tem como base a discussão proposta por Taylor, Wheeler e Bertschinger (2018).

### 3.3.11 O uso da métrica e a interpretação do funcionamento de relógios em um campo gravitacional

A questão 16 explora a comparação entre relógios localizados nas coordenadas  $r = R$  e  $r = R + h$ . Um observador localizado em  $r = R + h$  envia pulsos luminosos para um observador localizado em  $r = R$ . Assim, pretendemos que o aluno utilize a métrica para comparar os intervalos de tempo medidos em  $r = R$  e  $r = R + h$  interpretando o resultado obtido. A questão 17 é uma extensão da questão anterior em que o estudante deve interpretar a questão em termos da frequência. Dessa forma, os estudantes devem comparar a frequência de emissão e a frequência de recepção. Já a questão 18 inverte a situação colocada na questão 16. Agora, o observador localizado em  $r = R$  envia pulsos luminosos para um observador localizado em  $r = R + h$ . Novamente, esperamos que o estudante utilize a métrica e interprete o resultado obtido. A questão 19 é uma extensão da questão anterior em que o estudante interprete a mesma questão em termos da frequência. Assim, os estudantes devem comparar a frequência de emissão e a frequência de recepção.

### 3.3.12 Observadores estacionários e o cone de luz

A questão 20 analisa a região interior ( $r < R_s$ ) ao horizonte de eventos e a região exterior ( $r > R_s$ ) ao horizonte de eventos. Na região exterior ao horizonte o estudante deve avaliar que podem existir observadores estacionários ( $r = \text{fixo}$ ) enquanto na região interior ao horizonte de eventos não é possível que existam observadores estacionários. Além disso, o estudante deve avaliar que após um objeto atravessar o horizonte, o mesmo só poderá se movimentar no sentido de decrescimento da coordenada radial  $r$ , ou seja, qualquer objeto que atrevesse o horizonte não pode mais retornar à região exterior ( $r > R_s$ ). A questão 21 descreve o comportamento do cone de luz sobre o horizonte de eventos e as linhas de mundo de partículas ou as linhas de mundo de pulsos luminosos. Nessa questão fizemos uma mudança de coordenadas de modo a remover a singularidade em  $r = R_s$ , sendo esta etapa omitida na questão. Assim, o estudante deve avaliar que a linha tracejada em laranja não pode representar a linha de mundo de qualquer partícula material ou pulso luminoso. Já a linha de mundo tracejada em preto pode representar a trajetória de uma partícula material e, no caso de ser um pulso luminoso, a linha de mundo deve ser tangente à geratriz do cone.

## 3.4 Coleta de dados de pesquisa

A pandemia da COVID-19 impactou sobremaneira a forma de condução desta pesquisa bem como sua etapa de aplicação. O instrumento que seria aplicado presencialmente foi colocado em um formulário *online* e aplicado de maneira remota. Ressaltamos que todos os estudantes, com idade mínima de 18 anos, concordaram espontaneamente em participar da pesquisa por meio de um termo de consentimento preenchido pelos mesmos e arquivado pelo proponente da pesquisa. Na parte 1 do instrumento de pesquisa era entregue um conjunto de 13 questões objetivas para os estudantes. Os estudantes deveriam retornar a alternativa escolhida e apresentar uma justificativa explicando a opção escolhida. Após a aplicação, os dados foram armazenados e transferidos para uma planilha Excel. Na parte 1 do instrumento de pesquisa, os estudantes dispunham de um total de duas horas para completar a solução de todos os itens. A parte 2 do instrumento de pesquisa foi aplicada para os estudantes também remotamente. Entretanto, devido a alguns problemas de instabilidade na internet dos discentes e conflitos de horário foi estabelecido um prazo maior para a conclusão da segunda atividade. Os estudantes, novamente, deveriam justificar todas as questões

objetivas enviando inclusive as manipulações matemáticas necessárias para as questões.

Na próxima seção descrevemos a utilização da AC como metodologia para a análise dos dados.

### 3.5 Análise de Conteúdo como metodologia para análise dos dados

Para analisar os dados obtidos utilizaremos a Análise de Conteúdo (AC) proposta por Bardin (1977). Uma definição interessante para a AC é colocada por Moraes (1999) em um artigo de discussão sobre esta metodologia. Nas palavras do autor:

“A análise de conteúdo constitui uma metodologia de pesquisa usada para descrever e interpretar o conteúdo de toda classe de documentos e textos. Essa análise, conduzindo a descrições sistemáticas, qualitativas ou quantitativas, ajuda a reinterpretar as mensagens e a atingir uma compreensão de seus significados que vai além de uma leitura comum.”  
(MORAES, 1999, p.2.)

A metodologia escolhida tem por objetivo investigar as vulnerabilidades conceituais apresentadas por estudantes após um curso introdutório de TRG. O material a ser examinado para a aplicação da AC consiste na análise das justificativas (escritas) dos estudantes para as opções escolhidas do instrumento de pesquisa.

De forma a organizar e analisar os dados, seguiremos as etapas propostas por Moraes (1999): preparação das informações; unitarização; categorização; descrição; e interpretação. A preparação das informações visa a decidir qual material será submetido à AC, pois em determinadas pesquisas a quantidade de dados poderá ser muito extensa e uma amostra pode ser selecionada. Esses materiais selecionados constituem o chamado *corpus da pesquisa*, que representa o conjunto de documentos a serem analisados (BARDIN, 1977, pag. 96). Em nosso trabalho o *corpus* é dado pelas respostas dos alunos ao instrumento de pesquisa. As respostas dos alunos foram colocadas em uma planilha Excel em que os estudantes foram dispostos nas linhas da planilha. Ainda na etapa de preparação é feita uma codificação para identificar os elementos do material analisado. Em nosso estudo um total de 41 (quarenta e um) alunos participaram da pesquisa. Os alunos foram rotulados com a letra “A” seguida de uma numeração, colocada ao lado da letra, que identifica o aluno. Por exemplo, o estudante A33 representa o aluno que está na trigésima terceira linha da planilha Excel. Para identificar

a resposta de um estudante para uma determinada questão escrevemos, por exemplo, “(A33).7” em que identificamos a resposta do estudante A33 para a questão 7 do instrumento de pesquisa. Na sequência iniciamos o processo de unitarização em que é determinada a Unidade de Registro<sup>4</sup> (UR) e a Unidade de Contexto (UC). Essa é uma etapa importante na AC devido ao seguinte fato destacado por Moraes:

“Toda categorização ou classificação necessita definir o elemento ou indivíduo unitário a ser classificado. Na análise de conteúdo denominamos este elemento de unidade de análise.” (MORAES, 1999, p.5.)

A autora Maria Laura Franco define a UR como “a menor parte do conteúdo, cuja ocorrência é registrada de acordo com as categorias levantadas” (FRANCO, 2005, p. 37). Em nossa pesquisa, utilizaremos como UR o *tema*. O *tema* é uma afirmação sobre determinado assunto, que pode ser uma frase, um conjunto de frases ou um parágrafo (FRANCO, 2005, p. 39). Em nossa pesquisa a UR será representada por frases que compõem as respostas dos alunos. Na sequência é determinada a UC, que visa trazer significado para a UR. A UC é considerada como a unidade básica para a compreensão do significado da UR, onde a UC apresenta dimensões superiores às da UR (FRANCO, 2005, p. 44). Em nosso trabalho a UR é dada por frases (trechos das respostas dos estudantes) e a UC será dado pela resposta completa do estudante. Utilizando a resposta completa do estudante como UC conseguimos analisar o contexto em que a UR foi retirada.

Após o processo de unitarização concluído inicia-se o processo da categorização. A categorização é uma forma de agrupar dados com base em uma parte em comum entre eles (MORAES, 1999, p. 6). Em nossa pesquisa as categorias visam a agrupar os estudantes que apresentam uma determinada vulnerabilidade conceitual. Como destacado em Moraes (1999) as categorias precisam obedecer a alguns critérios:

- validade ou pertinência - a categoria deve ser adequada ou pertinente de acordo com os objetivos da análise;
- exaustividade ou exclusividade – as categorias devem possibilitar o agrupamento de todo o conteúdo analisado definido de acordo com os objetivos da análise;
- homogeneidade - deve ser fundamentada em um único critério de classificação, ou seja, as categorias devem se relacionar entre si;

---

<sup>4</sup>A UR também pode ser chamada de Unidade de Análise ou Unidade de Significado.

- exclusividade ou exclusão mútua – cada elemento que está sendo classificado deve se adequar a uma única categoria;
- objetividade, consistência ou fidedignidade – as regras de classificação são explicitadas com suficiente clareza de modo que possam ser aplicadas consistentemente ao longo de toda a análise. (MORAES, 1999, p. 7)

Utilizando os critérios descritos anteriormente no processo de categorização iremos agrupar as UR que se assemelham criando um nome (categoria) que sintetize o agrupamento em questão. Destacamos, ainda, que utilizaremos critérios semânticos para a criação das categorias, pois queremos analisar as percepções dos estudantes na justificativa das questões objetivas.

Posteriormente, os processos de *descrição* e *interpretação* são realizados. Na *descrição* é comunicado o significado de cada uma das categorias criadas. Já a *interpretação* consiste na busca pela compreensão da comunicação analisada. É na parte da interpretação que se faz um esforço para alcançar não só os conteúdos manifestos pelos autores, mas também os conteúdos ocultados consciente ou inconscientemente pelos autores. Em nosso trabalho, buscamos descrever as vulnerabilidades conceituais em RG e interpretá-las à luz da literatura em ensino de RG, além de buscarmos novas vulnerabilidades como exporemos nos capítulos seguintes.

# Capítulo 4

## Resultados e Análise

*Quando Arthur Eddington voltou da famosa expedição do eclipse solar de 1919 que observou a luz de uma estrela distante curvando-se de acordo com a gravidade de Einstein, alguém lhe perguntou se era verdade que apenas três pessoas entendiam a teoria de Einstein. Eddington respondeu: "Quem é o terceiro?" A história, apócrifa ou não, é uma das muitas que dão à teoria de Einstein sua reputação imerecida de ser incompreensível.*

---

(A. Zee, 2013, p.xii)

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, serão apresentados os primeiros resultados desta pesquisa e, concomitantemente, uma discussão dos resultados será realizada. Por meio destas análises nós responderemos as nossas perguntas de pesquisa analisando também algumas premissas e hipóteses utilizadas ao longo desta tese. A análise do *instrumento de pesquisa* será feita de duas formas: primeiramente analisaremos as alternativas escolhidas pelos estudantes para as respostas; e, em seguida, nós utilizaremos a Análise de Conteúdo (AC) para examinar as justificativas dos estudantes para uma determinada alternativa escolhida no instrumento de pesquisa. Os resultados serão apresentados em forma de

tabela para facilitar a visualização e interpretação dos dados. Na análise das alternativas temos os dados dispostos da seguinte maneira: na primeira coluna são colocadas as alternativas com a opção correta marcada em azul; na segunda coluna a frequência das respostas; e na terceira coluna a frequência relativa. Na análise das justificativas a tabela traz na primeira coluna as categorias de análise; na segunda coluna a frequência relativa das justificativas pertencentes a uma dada categoria; e nas duas últimas colunas são apresentadas a Unidade de Registro (UR) e a Unidade de Contexto (UC) respectivamente. A UR e a UC são formadas a partir das respostas dos estudantes e justificam a criação de uma determinada categoria de análise. As categorias de análise representam as *vulnerabilidades conceituais* dos estudantes, ou seja, as concepções dos estudantes que não estão em acordo com a Física padrão (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 140). Buscaremos relacionar os resultados obtidos nesta pesquisa com os relatos trazidos na literatura em ensino de TRG. Cabe destacar que muitas palavras que compõem as respostas dos estudantes apresentam erro de digitação, pois foram escritas pelos alunos de maneira remota. Nós optamos por manter essas respostas na forma original, que foram escritas, sem qualquer correção/alteração das mesmas.

## 4.2 Resultados e análise das questões 1 até 4

### 4.2.1 Descrever os fenômenos físicos e descrever as leis Física

#### 4.2.1.1 Questões 1 e 2

Nas questões 1 e 2 do *instrumento de pesquisa* os estudantes deveriam analisar a descrição da queda livre de uma lâmpada, desprezando a resistência do ar, do ponto de vista de um referencial fixo no leito de uma estrada de ferro e de um referencial fixo em um vagão. Na questão 1 o vagão se move com velocidade constante em relação ao leito da estrada enquanto na questão 2 o vagão se move de forma uniformemente acelerada em relação ao leito da estrada. Os estudantes devem perceber que tanto na questão 1 quanto na questão 2 é indiferente a escolha do referencial para a descrição da queda da lâmpada e, também, que essa afirmação é óbvia a priori e, portanto, não precisa de confirmação experimental.

Analisando a opção escolhida pelos alunos notamos que 61% dos estudantes optaram pela alternativa correta que era dada pela letra (a) - Tabela 4.1. A alternativa incorreta dada pela letra (d), que contou com 34,2% das respostas, é semelhante a

alternativa (a), mas estabelece a necessidade de confirmação experimental.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	25	61,0%
(b)	1	2,4%
(c)	1	2,4%
(d)	14	34,2%

Tabela 4.1: Análise das frequências das respostas para a questão 1.

Entretanto, ao analisarmos as justificativas dos estudantes para as opções escolhidas percebemos algumas incongruências. Como já mencionado, utilizando a AC agrupamos as respostas dos estudantes em categorias que sintetizam a ideia principal contida nas respostas. A Tabela 4.2 apresenta as justificativas dos estudantes e mostra que apenas 5,1% dos estudantes apresentaram uma justificativa coerente e, assim, foram agrupados na categoria “*Justificativa Correta*”. A categoria “*Não distinção entre descrição e determinação*” agrupa os estudantes que não distinguiram entre a descrição de um fenômeno físico e a determinação das leis da Física. Como já mencionado, a *descrição de um fenômeno físico* refere-se à medição de grandezas físicas e que essa medição pode ser realizada em relação a qualquer referencial. Já a *determinação de uma lei Física* estabelece a relação matemática entre as grandezas físicas medidas. A resposta do estudante A5 ilustra essa falta de distinção: “[...] ambos são referenciais inerciais, e segundo o 1º postulado da relatividade restrita, as leis físicas são as mesmas em qualquer referencial inercial [...]”. A justificativa passa por empregar o 1º postulado da TRR e, assim, o estudante parece não compreender que a pergunta dessa questão não falava sobre a determinação de uma lei Física. A categoria “*Referenciais inerciais*” agrupa os estudantes que justificaram a resposta explicitando que era indiferente o referencial escolhido pelo fato de ambos os referenciais serem inerciais. Nessa categoria agrupam-se 17,9% dos estudantes. A categoria “*Interpretações errôneas da MN*” mostra as incongruências dos estudantes em aspectos relacionados a Mecânica Newtoniana (MN). A justificativa do estudante A27 traz à seguinte conclusão: “[...] Se levarmos em consideração o melhor referencial para medidas do máximo de grandezas físicas possíveis, o referencial do solo, possui uma visão mais privilegiada devido ao fato de ver todos os vetores de movimento da lâmpada (no eixo Y devido a força peso, e no eixo X devido a velocidade constante) [...]. Aqui percebemos que o estudante interpreta que a visão do referencial do solo é a melhor e, assim, esquece que o movi-

mento é relativo e não existe nenhum referencial privilegiado para realizar a descrição da queda livre embora a descrição possa ser mais simples em algum referencial. A categoria “*Incoerência na resposta*” apresenta as respostas cujo significado não conseguimos compreender e, assim, não adequamos estas respostas em nenhuma categoria criada. A categoria “*Não distinção entre descrição e determinação*” indica uma *vulnerabilidade conceitual* apresentada em (BANDYOPADHYAY; KUMAR. 2010a, p. 020104-4). Os autores relatam que a distinção entre “descrição dos fenômenos” e a “determinação das leis da natureza (Física)” são fundamentais para um entendimento adequado da Teoria da Relatividade (TR), mas que essa distinção é confusa entre os estudantes. Ressaltamos que a amostra de estudantes de Bandyopadhyay e Kumar era composta por estudantes universitários, que já haviam cursado toda a Física básica universitária e também cursos de TRR, enquanto a nossa amostra é composta por estudantes do Ensino Médio (EM) que estavam estudando, em sua grande maioria, a TR pela primeira vez. Dessa forma, já esperávamos que no ensino secundário essa dificuldade na distinção citada fosse potencializada. Uma segunda *vulnerabilidade conceitual* identificada relaciona-se à percepção de que a indiferença na descrição de um fenômeno físico advém do fato de os referenciais serem inerciais. Os estudantes aqui não perceberam que o fato de os referenciais serem inerciais é irrelevante para a resposta do problema.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa Correta	5,1%	A35: “[...] pois de ambos os referenciais consegue-se descrever a queda da lâmpada [...]”	A35: “Letra A, pois de ambos os referenciais consegue-se descrever a queda da lâmpada, talvez de dentro do trem ou de fora seja mais simples de se analisar, porém é óbvio que ação possa ser descrita nas duas posições de observador.”
Não distinção entre descrição e determinação	56,4%	A5: “[...] ambos são referenciais inerciais, e segundo o 1º postulado da relatividade restrita, as leis físicas são as mesmas em qualquer referencial inercial [...]”	A5: “a) Embora as descrições das trajetórias das lampadas nos referenciais sejam diferentes (no referencial do vagão a trajetória é retílinea e no referencial do solo ela é curva), ambos são referenciais inerciais, e segundo o 1º postulado da relatividade restrita, as leis físicas são as mesmas em qualquer referencial inercial, como é um postulado, essa afirmativa é levada como fato óbvio.”
Referenciais inerciais	17,9%	A1: “Como os dois referenciais encontram-se como inerciais, a escolha do referencial é indiferente nesses casos [...]”	A1: “Como os dois referenciais encontram-se como inerciais, a escolha do referencial é indiferente nesses casos(embora os resultados encontrados possam ser diferentes) e a situação descrita e o seu resultado pode ser inferido facilmente, não necessitando de confirmação experimental.”
Interpretações errôneas da MN	15,4%	A27: “[...] Se levarmos em consideração o melhor referencial para medidas do máximo de grandezas físicas possíveis, o referencial do solo, possui uma visão mais privilegiada devido ao fato de ver todos os vetores de movimento da lâmpada (no eixo Y devido a força peso, e no eixo X devido a velocidade constante), porém este fato por mais que óbvio, ainda sim é necessária uma ação experimental, pois toda e qualquer teoria deve-se ter um experimento comprovando-a.”	A27: “Letra B. Se levarmos em consideração o melhor referencial para medidas do máximo de grandezas físicas possíveis, o referencial do solo, possui uma visão mais privilegiada devido ao fato de ver todos os vetores de movimento da lâmpada (no eixo Y devido a força peso, e no eixo X devido a velocidade constante), porém este fato por mais que óbvio, ainda sim é necessária uma ação experimental, pois toda e qualquer teoria deve-se ter um experimento comprovando-a.”
Incoerência na resposta	5,1%	A24: “[...] independentemente do referencial a grandeza permanece a mesma.”	A24: “A, pois independentemente do referencial a grandeza permanece a mesma.”

Tabela 4.2: Análise das justificativas para a questão 1.

Na questão 2 o vagão está em movimento não-uniforme. Na análise das alternativas marcadas pelos estudantes notamos que apenas 4,9% marcaram a alternativa correta dada pela letra (a) – Tabela 4.3. A opção dada pela letra (b) colocava os referenciais inerciais como privilegiados para a descrição da queda da lâmpada e foi escolhida por

70,7% dos estudantes.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	2	4,9%
(b)	29	70,7%
(c)	4	9,8%
(d)	6	14,6%

Tabela 4.3: Frequência de resposta para a questão 2.

Na tabela 4.4 apresentamos as justificativas da questão 2. Nenhum aluno apresentou uma justificativa correta para a questão. Novamente a categoria “*não distinção entre descrição e determinação*” é composta pelos estudantes que não perceberam a diferença entre a descrição de um fenômeno físico e a determinação das leis da física. A *vulnerabilidade conceitual* acerca da distinção entre a descrição de um fenômeno físico e a determinação de uma lei Física é, então, manifestada em 35,0% dos estudantes. Notamos que a fala do estudante A22 ilustra essa confusão entre descrição de um fenômeno e determinação das leis da Física “[...] os referenciais inerciais tem prioridade para fazer a descrição dos movimentos em termo de grandeza física mensurável, pois, de acordo com o primeiro postulado [...]”. A categoria “*Referencial do vagão é privilegiado*” surgiu da justificativa de alguns estudantes que colocaram que o referencial do vagão era privilegiado pois é o referencial no qual a lâmpada encontra-se em repouso inicialmente e agrupa 12,5% dos estudantes. Na categoria “*Referencial inercial*” 10,0% dos estudantes atribuem o privilégio para a descrição do movimento da lâmpada ao fato do referencial da Terra ser inercial. Por último, a categoria *Interpretações errôneas da MN* mostra que 30,0% dos estudantes cometem algum erro ao afirmar, por exemplo, que as leis da Física são independentes do referencial. Essa *vulnerabilidade conceitual* mostra como o conhecimento prévio influencia na compreensão de novas ideias em domínios ainda não estudados pelos estudantes. Apesar das aulas abordarem muito a equação de movimento na MN temos que alguns estudantes ainda parecem ter dúvidas sobre a escrita das leis em referenciais inerciais e não-inerciais. A categoria “*Incoerência na resposta*” coloca as respostas dos estudantes que não conseguimos extrair um significado pertinente à questão.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa Correta	0,0%		
Não distinção entre descrição e determinação	35,0%	A22: “[...] os referenciais inerciais tem prioridade para fazer a descrição dos movimentos em termo de grandeza física mensurável, pois, de acordo com o primeiro postulado, as leis físicas têm que ser a mesma em todos os referenciais inerciais, não obrigatoriamente sendo as mesmas em referenciais não inerciais.”	A22: “Resposta: Letra B Na relatividade, os referenciais inerciais tem prioridade para fazer a descrição dos movimentos em termo de grandeza física mensurável, pois, de acordo com o primeiro postulado, as leis físicas têm que ser a mesma em todos os referenciais inerciais, não obrigatoriamente sendo as mesmas em referenciais não inerciais.”
Referencial do vagão é privilegiado	12,5%	A11: “[...] um referencial será melhor para analisarmos as grandezas, e como há o referencial do vagão junto à lampada, acredito que esse será o melhor a se basear.”	A11: “(C) Visto que temos um movimento acelerado na questão, um referencial será melhor para analisarmos as grandezas, e como há o referencial do vagão junto à lampada, acredito que esse será o melhor a se basear.”
Referencial inercial	10,0%	A30: “[...] o referencial que se encontra em repouso, consegue descrever melhor a trajetória da queda da lâmpada, uma vez que está em condições inerciais.”	A30: “Alternativa: B Pelo vagão estar em um movimento uniformemente acelerado, o referencial que se encontra em repouso, consegue descrever melhor a trajetória da queda da lâmpada, uma vez que está em condições inerciais.”
Interpretações errôneas da MN	30,0%	A24: “[...] mas em ambos os casos todas as leis aplicada independem do referencial.”	A24: “A, pois a única coisa que vai mudar na queda da lampada é a visão que você tem dela caindo, que para quem está de fora vai ser em parábola e quem tá dentro ve caindo em linha reta, mas em ambos os casos todas as leis aplicada independem do referencial.”
Incoerência na resposta	12,5%	A12: “B, pois no referencial de dentro do vagão a queda vai ser retilínea visto que o trem está em movimento uniforme enquanto de fora do vagão no solo inerte, o vagão vai estar sendo movimentado, desse modo a queda da lâmpada vai ser curvilínea dando maior visão do evento.”	A12: “B, pois no referencial de dentro do vagão a queda vai ser retilínea visto que o trem está em movimento uniforme enquanto de fora do vagão no solo inerte, o vagão vai estar sendo movimentado, desse modo a queda da lâmpada vai ser curvilínea dando maior visão do evento.”

Tabela 4.4: Análise das justificativas para a questão 2.

#### 4.2.1.2 Questões 3 e 4

Nas questões 3 e 4 do instrumento de pesquisa os estudantes deveriam analisar que na determinação das leis da Física não é indiferente a escolha do referencial. As leis da Física assumem uma forma mais simples nos referenciais inerciais. Além disso, o Princípio da Relatividade Restrita (PRR) que afirma que as leis da Física são as

mesmas para todos os referenciais inerciais deve ser verificado experimentalmente, pois não é uma afirmação óbvia a priori.

Na Tabela 4.5 a alternativa correta, letra (d) foi a opção escolhida por 39% dos estudantes. Porém, notamos que 58,5% dos estudantes escolheram a opção (a). A diferença nas opções (a) e (d) está na necessidade de confirmação experimental. Discutiremos a interpretação dos alunos quanto à necessidade da confirmação experimental para as questões 1, 2, 3 e 4 no final da seção 4.2, mas a análise dessa questão objetiva já indica que essa é uma dificuldade para os estudantes.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	24	58,5%
(b)	0	0,0%
(c)	1	2,4%
(d)	16	39,0%

Tabela 4.5: Frequência de resposta para a questão 3.

Na Tabela 4.6 a categoria “Justificativa correta” ilustra que 70,0% dos estudantes que justificaram que devido ao primeiro postulado da TRR as leis da Física possuem a mesma forma para todos os referenciais inerciais. Nessa categoria, foram colocados os estudantes que disseram que o princípio da relatividade necessita de confirmação experimental; os estudantes que disseram que não há necessidade de confirmação experimental; e, também, os estudantes que não mencionaram nada sobre isso na resposta. Posteriormente analisaremos dentro da categoria “Justificativa correta” essa distinção entre as respostas acerca da análise experimental. O estudante *A2* em sua resposta enfatiza o primeiro postulado da relatividade e, também, a necessidade de confirmação experimental do princípio da TRR. Na categoria “Não distinção entre descrição e determinação” temos que 12,5% ainda apresentam falta de distinção clara em sua justificativa e confundem os termos descrição e determinação. Logicamente, que as questões 1 e 2 mostram que essa falta de distinção atinge grande parte do corpo discente. A categoria “Interpretações errôneas da MN” novamente coloca os estudantes que cometem algum erro relacionado à MN. O estudante *A4* ilustra a falta de entendimento de que a trajetória não é idêntica só porque os referenciais são inerciais<sup>1</sup>. Por fim, a categoria “Incoerência na resposta” ilustram respostas que não conseguimos

<sup>1</sup>O estudante usa a expressão inerte mas, pelo contexto, nós inferimos que ele estava querendo dizer inercial. Cabe destacar, ainda, que muitos estudantes utilizaram a expressão “inerte” no lugar de “inercial” nas respostas.

identificar algum sentido ou não condizem como uma justificativa apropriada para a questão.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa correta	70,0%	A2: “ D - O primeiro postulado da relatividade é que as leis da física são as mesmas em todos os referenciais iniciais [...]”	A2: “ D - O primeiro postulado da relatividade é que as leis da física são as mesmas em todos os referenciais iniciais e mesmo sendo um postulado, é necessário confirmação experimental.”
Não distinção entre descrição e determinação	12,5%	A24: “A, no vagão voce tem uma percepção mais simples do fato ocorrendo e de fora em paróbola é mais complexo [...]”	A24: “A, no vagão voce tem uma percepção mais simples do fato ocorrendo e de fora em paróbola é mais complexo então não é óbvio.”
Interpretações errôneas da MN	5,0%	A4: “Letra D, pois os referenciais estão inertes e portanto o trajeto da queda do objeto seria a mesma, mesmo isso sendo algo que não óbvio e sim precisa de um experimento prático para confirmar que o trajeto do objeto é o mesmo nessas condições.”	A4: “Letra D, pois os referenciais estão inertes e portanto o trajeto da queda do objeto seria a mesma, mesmo isso sendo algo que não óbvio e sim precisa de um experimento prático para confirmar que o trajeto do objeto é o mesmo nessas condições.”
Incoerência na resposta	12,5%	A1: “Os fenômenos da deflexão da luz e do princípio da Equivalência demonstram de forma experimental como as leis físicas funcionam de acordo com cada referencial [...]”	A1: “Os fenômenos da deflexão da luz e do princípio da Equivalência demonstram de forma experimental como as leis físicas funcionam de acordo com cada referencial, sendo estas classificadas como fraca e forte.”

Tabela 4.6: Análise das justificativas para a questão 3.

Na Tabela 4.7 notamos que 72,5% dos estudantes optaram pela alternativa correta que é dada pela letra (b). O que mostra que muitos têm consciência de que as leis são diferentes no referenciais iniciais e não-iniciais. Os estudantes que marcaram a alternativa (c), que representam 20% do total, também mostram uma consciência nessa diferença entre as leis escritas em ambos os referenciais. A seguir analisaremos se essa consciência se mantém nas justificativas dos estudantes.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	0	0,0%
(b)	29	72,5%
(c)	8	20,0%
(d)	3	7,5%

Tabela 4.7: Frequência de resposta para a questão 4.

A Tabela 4.8 mostra que 52,5% apresentam em suas justificativas a consciência da diferença entre as leis físicas escritas nos referenciais inerciais e nos referenciais não-inerciais. Esse fato também ocorreu em Bandyopadhyay e Kumar (2010a, p. 020104-4), ou seja, os estudantes, da amostra, parecem entender que as leis são diferentes em referenciais não-inerciais. A categoria “Medições complexas no referencial não-inercial” indica que 7,5% também percebem que as leis da física são mais simples nos referenciais inerciais, mas também estabelecem que não só as leis são mais simples como também as medições e previsões como consta na resposta do estudante A15: “[...] as leis físicas no referencial do solo (inercial) correspondem a física de Newton, sendo então mais simples de serem feitas suas escritas, medições e previsões.” Dessa forma, os estudantes classificados nessa categoria não percebem que a simplicidade na medição e da previsão não está relacionada com o fato do referencial ser ou não inercial. A simplicidade se estabelece, na verdade, na escrita das leis. Dessa forma, identificamos aqui uma *vulnerabilidade conceitual* interessante. Essa vulnerabilidade extrapola a forma mais complexa na escrita das leis para a medição e a previsão de fenômenos. Na categoria “Interpretações errôneas da MN” os estudantes cometem algum de MN na sua justificativa, embora um número expressivo de estudantes, mesmo com os erros, também reconheça que as leis são diferentes nos referenciais não-inerciais. E, por último, na categoria “Incoerência na resposta” temos algumas incongruências na escrita.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa correta	52,5%	A41: “De acordo com a relatividade restrita, as leis físicas são as mesmas para todos os referenciais inerciais e como o referencial do vagão possui um movimento acelerado, enquanto o solo é um referencial inercial, o referencial do solo é privilegiado. Considerando a não aplicação de equações para descrever referenciais não inerciais, deve-se comprovar experimentalmente essa afirmação, a fim de garantir sua veracidade.”	A41: “B) De acordo com a relatividade restrita, as leis físicas são as mesmas para todos os referenciais inerciais e como o referencial do vagão possui um movimento acelerado, enquanto o solo é um referencial inercial, o referencial do solo é privilegiado. Considerando a não aplicação de equações para descrever referenciais não inerciais, deve-se comprovar experimentalmente essa afirmação, a fim de garantir sua veracidade.”
Medições complexas no referencial não-inercial	7,5%	A15: “[...] as leis físicas no referencial do solo(inercial) correspondem a física de Newton, sendo então mais simples de serem feitas suas escritas, medições e previsões.”	A15: “B) Como citado na questão 2, os referenciais do solo e do vagão são referencias inerciais e não inerciais, respectivamente, logo, as leis físicas no referencial do solo(inercial) correspondem a física de Newton, sendo então mais simples de serem feitas suas escritas, medições e previsões.”
Interpretações errôneas da MN	17,5%	A12: “B, pois a lâmpada sofre desaceleração em sua queda, porém, essa desaceleração só é vista pelo referencial do solo visto que é inerte [...]”	A12:“B, pois a lâmpada sofre desaceleração em sua queda, porém, essa desaceleração só é vista pelo referencial do solo visto que é inerte diferente do referencial do trem, desse modo. a queda vista pelo solo é curvilínea enquanto a queda vista por dentro do trem vai ser retilínea”
Incoerência na resposta	22,5%	A1: “Sendo o referencial do solo não inercial [...]”	A1: “ Sendo o referencial do solo não inercial, o mesmo se encontra privilegiado em relação ao referencial do vagão. A presença da força de inércia, por exemplo, comprova tal situação, encontrando-se presente somente no referencial do vagão (acelerado) e conhecida cotidianamente de forma experimental”

Tabela 4.8: Análise das justificativas para a questão 4.

#### 4.2.1.3 Análise acerca da necessidade ou não de confirmação experimental nas questões 1, 2, 3 e 4

Nas questões 1 e 2 a indiferença na utilização do referencial para descrição de um fenômeno físico é um fato óbvio e não necessita de confirmação experimental. Já na questão 3 o fato das leis da Física serem as mesmas para todos os referenciais inerciais (PRR) não é um fato óbvio a priori e necessita de confirmação experimental sendo o

mesmo verdadeiro na questão 4 em que as leis da física são diferentes para os referenciais inercial e não-inercial e esse fato necessita de confirmação experimental. Na questão 1 tivemos trinta e nove (39) estudantes que justificaram a opção escolhida. Desse total, dezessete (17) alunos mencionaram em suas respostas a necessidade ou não de confirmação experimental. Nove (9) estudantes apresentaram a justificativa de que não era necessária confirmação experimental enquanto os demais justificaram que era necessária essa confirmação. Onze (11), entre os dezessete que justificaram, estavam na categoria “Não distinção entre descrição e determinação”. Na justificativa “(A5).1” (justificativa do aluno A5 para a questão 1): “[...] segundo o 1º postulado da relatividade restrita, as leis físicas são as mesmas em qualquer referencial inercial, *como é um postulado, essa afirmativa é levada como fato óbvio.*” Notamos uma importante *vulnerabilidade conceitual* de que um postulado é sempre um fato óbvio e não necessita de confirmação experimental. Enfatizamos que na questão 1 é indiferente a escolha dos referenciais para a descrição da queda e que esse fato é óbvio e não necessita de confirmação experimental. Embora na questão 1 tenhamos referenciais inerciais a afirmação anterior é válida também para os referenciais não-inerciais. Na questão 2 apenas três (3) estudantes colocaram em suas justificativas a necessidade de confirmação experimental. Um estudante informou a necessidade de confirmação experimental enquanto os demais afirmaram que esse é um fato óbvio e não necessita da confirmação experimental. Na questão 3, um total de treze (13) estudantes de um total de quarenta (40) justificaram sobre a necessidade de confirmação experimental. Dos estudantes que foram colocados na categoria “Justificativa correta” tivemos quatro (4) que disseram que não há necessidade de confirmação experimental enquanto um total de sete (7) estudantes afirmaram que existe sim uma necessidade de confirmação experimental. O estudante A27 inclusive apresenta uma interessante resposta: “[...] As leis da física sempre devem ser as mesmas independente do referencial tomado como meio de medida, e o mesmo é necessário meios experimentais que comprovem tal fato uma vez que sempre é necessário uma comprovação experimental.” O estudante A27 relata que é sempre necessária a confirmação experimental. Ficamos em dúvida analisando isoladamente essa resposta se a afirmação de que é sempre necessária a confirmação experimental também seria válida para a afirmação que todos os referenciais são equivalentes para a descrição de fenômenos físicos. Entretanto, ao confrontar a resposta do estudante A27 para a questão 3 com a sua resposta para questão 1 nós removemos essa dúvida. O estudante afirma também que é necessária a confirmação experimental. Na

questão 4 dois estudantes colocados na categoria “Justificativa correta” afirmaram a necessidade de confirmação experimental. Como relatado em (BANDYOPADHYAY; KUMAR 2010a, p. 020104-3) o ponto central de que o PRR necessita de confirmação experimental não foi percebido por alguns estudantes. Em nossa amostra esse falta de percepção se mantém com uma *vulnerabilidade conceitual*. Além disso, a distinção de situações em que se faz necessária a confirmação experimental de situações em que não se faz necessária a confirmação experimental também é algo que provoca dificuldade em alguns estudantes. Após essa análise, destacamos que essa investigação para que fosse possível abranger todos os estudantes da amostra deveria ter sido analisada em perguntas separadas para que fosse possível analisar com mais profundidade as interpretações dos estudantes.

## 4.3 Resultados e análise das questões 5 até 9

### 4.3.1 A insatisfação de Einstein e a sua busca pelo Princípio da Relatividade Geral

#### 4.3.1.1 Questão 5

Na questão 5 do *instrumento de pesquisa* os estudantes deveriam analisar o conflito entre a proposição do Princípio da Relatividade Geral (PRG) e o exemplo de um vagão que sofre uma brusca freada. Na análise da opção escolhida pelos estudantes notamos que 90,2% optaram pela alternativa correta que era dada pela letra (d) como mostra a Tabela 4.9.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	2	4,9%
(b)	1	2,4%
(c)	1	2,4%
(d)	14	90,2%

Tabela 4.9: Análise das frequências das respostas para a questão 5.

Ao analisarmos as justificativas percebemos que a porcentagem de estudantes que justificaram corretamente diminuiu. A Tabela 4.10 ilustra que 38,5% dos estudantes apresentaram uma justificativa coerente. Para que os estudantes fossem agrupados na

categoria “*Justificativa correta*”, os mesmos deveriam explicitar a proposta de Einstein de um enunciado geral estabelecendo uma equivalência entre as leis da Física para todos os referenciais (inerciais ou não) compreendendo que o exemplo do vagão em movimento não-uniforme, à primeira vista, parece conflitar com essa tentativa. Destacamos a primazia da resposta do estudante A41: “D) A relatividade geral, diferente da relatividade restrita, que exclui os referenciais não inerciais, busca formular matematicamente, de forma geral, todos os referenciais (inerciais e não-inerciais) através de leis físicas equivalentes. Todavia, no exemplo do vagão isso não era verdade, pois as leis físicas não eram as mesmas das usadas em referenciais inerciais, devido o surgimento de uma força fictícia, o puxão para frente. Também vale salientar a diferença entre descrição e formulação: Descrição = contar minuciosamente como algo ocorreu (ex.: descrever um fenômeno = dizer como ele aconteceu, as etapas) Formulação = redigir segundo uma fórmula, no caso de Einstein, formular matematicamente um fenômeno. Logo, a resposta não poderia ser a letra A) por se tratar de uma descrição, tornando-se a letra D) por se tratar de uma formulação.” Na categoria “*O PRG e a descrição de fenômenos*” foram agrupados 7,5% dos estudantes. Os alunos agrupados nessa categoria não perceberam que Einstein procurou estabelecer uma equivalência entre as leis da Física para todos os referenciais (inerciais ou não-inerciais). A categoria “*PRG e o conflito com a experiência*” agrupa os estudantes que, apesar de terem consciência de que as leis são diferentes para os referenciais inerciais e não-inerciais, não estabeleceram a ligação entre a proposta de Einstein para o PRG e o conflito introduzido, a essa proposta, pela experiência do vagão em movimento não-uniforme. Por fim, a categoria “*Interpretações errôneas basílicas da MN*” novamente agrupa os estudantes que apresentaram justificativas conflituosas com as interpretações da MN. Em especial, a justificativa do estudante A9 mostra uma *vulnerabilidade conceitual* importante de se analisar “[...] Pois em referenciais não inerciais, outros fatores aparecem na formulação das leis da natureza, como a força inercial e força gravitacional [...]”. O estudante A9 argumenta que a força gravitacional surge também devido a um efeito de inércia. Essa interpretação pode ter alguma relação com a interpretação do PE. Dessa forma, vamos analisar se a justificativa do estudante A9 pode ser analisada em mais detalhes em paralelo à questão que trata do PE (questão 9).

Como relatado por Bandyopadhyay e Kumar (2010a, p. 020104-4), os estudantes de sua amostra perceberam prontamente que as leis apresentam uma forma distinta para os referenciais não-inerciais, porém os autores relatam que é duvidoso saber se

os estudantes apreciaram o quanto fundamental representou para Einstein compatibilizar a *realidade física absoluta de um movimento não uniforme* com o PRG. Em nossa amostra, percebemos alguns indícios de estudantes que apresentam uma reflexão interessante sobre o assunto como a da aluna A7: “[...] Einstein em primeiro momento afirma que todos os referenciais seriam contemplados pelas mesmas leis, porém, seu exemplo do vagão entra em contradição com essa mesma ideia inicial.” Além disso, Bandyopadhyay e Kumar chamam a atenção novamente para a distinção entre descrever fenômenos e determinar as leis.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa Correta	38,5%	A41: “[...] Todavia, no exemplo do vagão isso não era verdade, pois as leis físicas não eram as mesmas das usadas em referenciais inerciais, devido o surgimento de uma força fictícia, o puxão para frente [...]”	A41: “D) A relatividade geral, diferente da relatividade restrita, que exclui os referenciais não inerciais, busca formular matematicamente, de forma geral, todos os referenciais (inerciais e não-inerciais) através de leis físicas equivalentes. Todavia, no exemplo do vagão isso não era verdade, pois as leis físicas não eram as mesmas das usadas em referenciais inerciais, devido o surgimento de uma força fictícia, o puxão para frente. Também vale salientar a diferença entre descrição e formulação: Descrição = contar minuciosamente como algo ocorreu (ex.: descrever um fenômeno = dizer como ele aconteceu, as etapas) Formulação = redigir segundo uma fórmula, no caso de Einstein, formular matematicamente um fenômeno. Logo, a resposta não poderia ser a letra A) por se tratar de uma descrição, tornando-se a letra D) por se tratar de uma formulação.”
O PRG e a descrição de fenômenos	7,7%	A39: “[...] a descrição dos fenômenos da natureza depende se é um referencial inercial ou não inercial.”	A39: “A, pois a descrição dos fenômenos da natureza depende se é um referencial inercial ou não inercial.”
PGR e o conflito com a experiência	35,9%	A27: “[...] Letra D. Einstein defende que] a formulação é sim a mesma independente do referencial, com uma única exceção, que é para o referencial acelerado uma vez que a formulação não é a mesma em todos os referenciais [...]”	A27: “[...] Letra D. Einstein defende que a formulação é sim a mesma independente do referencial, com uma única exceção, que é para o referencial acelerado uma vez que a formulação não é a mesma em todos os referenciais.”
Interpretações errôneas da MN	17,9%	A9: “[...] Pois em referenciais não inerciais, outros fatores aparecem na formulação das leis da natureza, como a força inercial e força gravitacional. Porém a descrição dos fenômenos da natureza é idêntica para todos os referenciais [...]”	A9: “[...] Pois em referenciais não inerciais, outros fatores aparecem na formulação das leis da natureza, como a força inercial e força gravitacional. Porém a descrição dos fenômenos da natureza é idêntica para todos os referenciais.”

Tabela 4.10: Análise das justificativas para a questão 5.

### 4.3.2 A notável propriedade do campo gravitacional

#### 4.3.2.1 Questão 6

A questão 6 trata da notável propriedade do campo gravitacional, isto é, que a aceleração dos corpos sob ação exclusiva do campo gravitacional é independente da massa ou da composição do corpo. Notamos na Tabela 4.11 que 80,5% marcaram a alternativa correta dada pela letra (b). As demais alternativas colocavam, em relação ao campo gravitacional, variações possíveis da alternativa (b). Por exemplo, na alternativa (a) a opção colocava que a aceleração só seria idêntica para corpos de mesma massa. Além disso, as opções também mencionavam incorretamente que a propriedade notável do campo gravitacional também poderia ser aplicada ao campo magnético.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	2	4,9%
(b)	1	80,5%
(c)	1	2,4%
(d)	14	12,2%

Tabela 4.11: Análise das frequências das respostas para a questão 6.

A análise das justificativas é apresentada na Tabela 4.12. Um total de 60,5% dos estudantes foram colocados na categoria “Justificativa correta”. Apenas um estudante (2,6%) foi colocado na categoria “Campo magnético”, pois o mesmo afirma que a propriedade notável também seria aplicada ao campo magnético. Na categoria “Dependência da massa” apenas um estudante disse que os corpos deveriam ter a mesma massa para que os corpos submetidos ao campo gravitacional cheguem juntos ao solo. Na categoria “Independência da massa” temos também um único estudante colocado nessa categoria. O estudante afirma que somente a massa não interfere na velocidade de queda, mas não está claro se o estudante sabia que a composição do corpo também não influencia a velocidade de queda no caso de um corpo sujeito apenas a um campo gravitacional. O que reforça a nossa suposição para a criação dessa categoria para o estudante A28 foi a alternativa (d) escolhida por ele. Essa alternativa deixa claro que objetos com diferentes composições não possuirão a mesma aceleração. Por fim, a categoria “Incoerência na resposta” abarcou 31,6% dos estudantes que trazem algum tipo de incoerência em suas explicações.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa correta	60,5%	A2: “[...] o campo gravitacional (no vácuo) causa uma mesma aceleração em qualquer objeto, independente de sua massa ou composição [...]”	A2: “B - Como comentado no próprio texto da questão, o campo gravitacional (no vácuo) causa uma mesma aceleração em qualquer objeto, independente de sua massa ou composição. Ou seja, se lançados de uma mesma altura, atingiram os mesmos pontos”
Campo magnético	2,6%	A4: “[...] pode também ser aplicada ao campo magnético devido a propriedade notável mencionada por Einstein.”	A4: “Letra C, os objetos se forem lançados ao mesmo tempo, cairão ambos ao mesmo tempo e essa regra que pode ser provada facilmente na prática, pode também ser aplicada ao campo magnético devido a propriedade notável mencionada por Einstein.”
Dependência da massa	2,6%	A11: “[...] Acredito que só irá manter a mesma aceleração e o mesmo momento de igualdade de força se obtiverem a mesma massa [...]”	A11: “(A) A letra (A) condiz mais com o que entendo das características físicas dos elementos. Acredito que só irá manter a mesma aceleração e o mesmo momento de igualdade de força se obtiverem a mesma massa, porém o campo magnético reagiria melhor com o pedaço de ferro do que de madeira, observando as características do metal.”
Independência da massa	2,6%	A28: “[...] A massa não interfere na velocidade da queda.”	A28: “D. A massa não interfere na velocidade da queda.”
Incoerência na resposta	31,6%	A10: “[...] já no campo gravitacional sofre influencia da condutividade”	A10: “B, pois independente da massa e composição, na gravidade eles sofrem a mesma aceleração, já no campo gravitacional sofre influencia da condutividade”

Tabela 4.12: Análise das justificativas para a questão 6.

### 4.3.3 Diferença entre a massa inercial e a massa gravitacional

#### 4.3.3.1 Questão 7

Na questão 7 os estudantes eram perguntados acerca da noção de massa gravitacional e massa inercial. Na Tabela 4.13 percebemos que 70,7% dos estudantes marcaram alternativa correta que era dada pela letra (c). A alternativa (a) coloca a massa inercial e a massa gravitacional como conceitos idênticos e foi escolhida por 14,6% dos alunos. Já a letra (b) coloca uma *vulnerabilidade conceitual* observada por Bandyopadhyay e Kumar (2010a, p. 020104-5), ou seja, a de que a massa gravitacional é uma medida da inércia de um corpo em resposta à aplicação de uma força exclusivamente gravitacional e foi marcada por 14,6% dos estudantes. A alternativa (d) não foi selecionada por nenhum estudante.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	6	14,6%
(b)	6	14,6%
<b>(c)</b>	29	70,7%
(d)	0	0%

Tabela 4.13: Análise das frequências das respostas para a questão 7.

A análise das justificativas é apresentada na Tabela 4.14. Os estudantes que em suas justificativas apresentaram uma correta descrição do conceito de massa inercial e massa gravitacional foram colocados na categoria “Justificativa correta”. Essa categoria é ocupada por 36,8% dos estudantes. Na categoria “Resistência devido a igualdade” foram colocados os estudantes que, de certa forma, atribuíram à massa gravitacional uma medida de resistência a alteração do estado de movimento. A resposta do estudante A29 “[...] pois, devido a sua igualdade, sua função também se compara [...]” mostra que o mesmo não percebeu que as duas massas são diferentes conceitualmente. Um único estudante foi colocado na categoria “Igualdade como conveniência”. Esse estudante coloca da seguinte forma a sua interpretação, A13: “c, pois ambas são massas distintas, porém são próximas e por conveniência são utilizadas como algo unico.”. Nessa resposta ele faz menção ao enunciado da questão em que colocamos que a igualdade. Já a última categoria “Incoerência na resposta” traz as respostas que não conseguimos extrair um significado das mesmas, muitas vezes sendo respostas um pouco confusas.

Na questão 7, assim como nas questões 1, 2, 3 e 4, novamente notamos uma ênfase pequena nas justificativas sobre a necessidade de confirmação experimental. Dessa forma, para que pudéssemos explorar com profundidade a interpretação dos estudantes acerca da necessidade ou não de confirmação experimental para a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional deveríamos tratar do tema em uma questão separada. Por fim, analisamos se os estudantes que optaram pela alternativa (b), da questão 7, que apresentava a *vulnerabilidade conceitual* trazida no estudo de Bandopadhyay e Kumar (2010a, p. 020104-5) acerca da massa gravitacional como uma medida da inércia de um corpo sob a ação exclusiva de uma força gravitacional. Apesar dos estudantes terem escolhido essa alternativa, as respostas não parecem indicar esse raciocínio em nenhum dos seis (6) estudantes que escolheram essa opção. A única resposta que poderia apresentar indícios acerca dessa *vulnerabilidade conceitual* foi a da

aluna A2: “B - A massa gravitacional tem relação apenas com um objeto que possui a ação de uma força gravitacional [...].” Porém, no desenvolvimento da resposta a aluna não explica em mais detalhes essa afirmação de que a massa gravitacional tem relação apenas com um objeto que possui a ação de uma força gravitacional. No trabalho de Bandyopadhyay e Kumar (2010a, p. 020104-5) um estudante, chamado de *S5* no trabalho, apresentou um trecho de resposta semelhante à da estudante A2 que destacamos a seguir “Em contraste, a massa gravitacional responde apenas à força gravitacional. Se um corpo sofrer uma força gravitacional devido a algum objeto massivo ao seu redor, sua massa gravitacional ( $m_G$ ) resistirá a ela” (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a, p. 020104-5). Entretanto, na sequência da resposta o estudante *S5* colocou em mais detalhes a sua interpretação que gerou a *vulnerabilidade conceitual* apresentada no trabalho de Bandyopadhyay e Kumar. Aqui, com estes dados disponíveis não podemos inferir que essa concepção está presente.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa correta	36,8%	A5:“c) A massa inercial representa justamente a resistência que um corpo oferece à alteração de seu estado de movimento, e está presente na 2º Lei de Newton, $m_{inercial} =  F_{resultante} /a_l$ (massa inercial = força resultante dividido pela aceleração), e a massa gravitacional é análoga a carga elétrica, pois cria um campo gravitacional e está sujeita a campos gravitacionais, a massa gravitacional está presente na lei da Gravitação universal de Newton [...] A partir de experimentos o valor da massa inercial coincide com o valor da massa gravitacional [...]”	A5: “c) A massa inercial representa justamente a resistência que um corpo oferece à alteração de seu estado de movimento, e está presente na 2º Lei de Newton, $m_{inercial} =  F_{resultante} /a_l$ (massa inercial = força resultante dividido pela aceleração), e a massa gravitacional é análoga a carga elétrica, pois cria um campo gravitacional e está sujeita a campos gravitacionais, a massa gravitacional está presente na lei da Gravitação universal de Newton: $F_{grav} = G * M_{grav} * m_{grav} / r = m_{grav} * g$ (força gravitacional = constante da gravitação * Massa gravitacional 1 * massa gravitacional 2 dividido pelo quadrado do raio = $m_{gravitacional} * aceleração da gravidade$ ). A partir de experimentos o valor da massa inercial coincide com o valor da massa gravitacional, e também é apresentada sua igualdade no princípio da equivalência de Einstein.”
Resistência devido a igualdade	10,5%	A29: “[...] pois, devido a sua igualdade, sua função também se compara [...]”	A29: “A - pois, devido a sua igualdade, sua função também se compara, ou seja, oferecer resistência a mudança de movimento.”
A igualdade como conveniência	2,6%	A13: “[...] massas distintas, porém são próximas e por conveniência são utilizadas como algo único.”	A13: “c, pois ambas são massas distintas, porém são próximas e por conveniência são utilizadas como algo único.”
Incoerência na resposta	50,0%	A25: “[...] pois um corpo pode ser influenciado por um campo gravitacional passivo.”	A25: “Letra C, pois um corpo pode ser influenciado por um campo gravitacional passivo.”

Tabela 4.14: Análise das justificativas para a questão 7.

### 4.3.4 Interpretação física para a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional

#### 4.3.4.1 Questão 8

A questão 8 visava analisar a interpretação dada por Einstein para a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional. Nessa interpretação Einstein toma como ponto de partida o PE e chega à conclusão acerca da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional. Notamos que as opções com um maior número de marcações pelos estudantes foram a letra (b) com 46,3% e a letra (d) com 43,9%. As opções (b) e (d) apresentam pontos de partida diferentes na solução proposta pelo problema. Enquanto na letra (b) o ponto de partida é a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional; na letra (d) o ponto de partida é o princípio da equivalência. No livro do físico James Hartle o autor escreve o seguinte trecho acerca da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional: “A igualdade entre massa gravitacional e inercial não implica apenas que um campo gravitacional pode ser eliminado pela queda livre, mas também que um campo gravitacional pode ser criado por uma aceleração.” (HARTLE, 2003, p. 112, tradução livre). Assim, a igualdade entre as massas é central para a validade do PE. Contudo, essa questão chama a atenção para um detalhe que é discutido por Einstein em seu livro de divulgação: “ Vemos, por este exemplo, que nossa extensão do princípio da relatividade faz aparecer como necessária a afirmação da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional. Com isto obtivemos uma interpretação física desta proposição. ” (EINSTEIN, 1999, p. 60). O exemplo a que Einstein se refere na citação anterior é o mesmo apresentado na questão 8. Dessa forma, a questão trabalha uma util percepção do estabelecimento do PE como o princípio fundamental e é tomado como ponto de partida para a interpretação da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	1	2,4%
(b)	19	46,3%
(c)	4	9,8%
(d)	18	43,9%

Tabela 4.15: Análise das frequências das respostas para a questão 8.

A análise das justificativas é apresentada na Tabela 4.16. Na categoria “Justifi-

cativa correta” foram colocados os estudantes que colocaram em suas justificativas o PE como ponto de partida para a interpretação da igualdade entre as massas inercial e gravitacional. O estudante A9, apesar de optar pela opção (b), indica explicitamente o PE como ponto de partida: A9: “B. Einstein partiu do princípio que o princípio da equivalência fosse verdadeiro [...]. Já os estudantes que foram colocados na categoria “Igualdade entre as massas como ponto de partida” como é colocado explicitamente pelo estudante A23: “[...] Isso porque ao considerarmos as massas iguais, as marcações do dinamômetro e a aceleração em um obejto (que estaria flutuando dentro da nave) teriam o mesmo valor numericamente [...]”. Os estudantes colocados nessas duas categorias apresentaram em suas respostas consciência da importância na igualdade entre as massas inercial e gravitacional para o PE. Contudo, o sutil argumento de tomar o PE como ponto de partida foi percebido nas justificativas de 30,6% dos estudantes. Os estudantes colocados na categoria “Igualdade entre as massas como coincidência” continuam com a visão de que a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional é apenas uma coincidência e 5,6% dos alunos foram colocados nessa categoria. Por fim, 38,9% foram colocados na categoria “Incoerência na resposta”. Nessa categoria foram alocadas as respostas que não conseguimos extrair significados relevantes para a questão.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa correta	30,6%	A9: “B. Einstein partiu do princípio que o princípio da equivalência fosse verdadeiro, com isso, a aceleração gravitacional pode ser igualada a aceleração de módulo idênticos e sentido oposto. Dessa forma, com um dinamômetro, pode-se verificar experimentalmente que o T e o T* são ou idênticos ou muito parecidos. Assim, tendo $T = mg \cdot g$ e $T^* = mi \cdot A$ , e sabendo que $ g  =  a $ e $T = T^*$ , podemos afirmar que $Mg = Mi$ ”	A9: “B. Einstein partiu do princípio que o princípio da equivalência fosse verdadeiro, com isso, a aceleração gravitacional pode ser igualada a aceleração de módulo idênticos e sentido oposto. Dessa forma, com um dinamômetro, pode-se verificar experimentalmente que o T e o T* são ou idênticos ou muito parecidos. Assim, tendo $T = mg \cdot g$ e $T^* = mi \cdot A$ , e sabendo que $ g  =  a $ e $T = T^*$ , podemos afirmar que $Mg = Mi$ ”
Igualdade entre as massas como ponto de partida	25,0%	A23: “B. Para a validação do Princípio da Equivalência, Einstein vai precisar interpretar a coincidência newtoniana onde $mi = m_{grav}$ . Isso porque ao considerarmos as massas iguais, as marcações do dinamômetro e a aceleração em um objeto (que estaria flutuando dentro da nave) teriam o mesmo valor numericamente [...]”	A23: “B. Para a validação do Princípio da Equivalência, Einstein vai precisar interpretar a coincidência newtoniana onde $mi = m_{grav}$ . Isso porque ao considerarmos as massas iguais, as marcações do dinamômetro e a aceleração em um objeto (que estaria flutuando dentro da nave) teriam o mesmo valor numericamente. Sendo os valores medidos no dinamômetro sendo a massa multiplicada por $g$ (vetorial) e os valores de aceleração dos possíveis objetos flutuando igual a $g$ (vetorial)”
A igualdade como conveniência	5,6%	A25: “[...] é apenas uma consciência”	A25: “Letra D pois para o princípio da equivalência as massas precisam ser iguais mas é apenas uma consciência.”
Incoerência na resposta	38,9%	A24: “B, pois einstein diz que é igual independente do campo [...]”	A24: “B, pois einstein diz que é igual independente do campo então os resultados devem ser iguais.”

Tabela 4.16: Análise das justificativas para a questão 8.

### 4.3.5 O princípio da equivalência como um poderoso argumento a favor do princípio da relatividade geral

#### 4.3.5.1 Questão 9

A questão 9 analisa como Einstein solucionou a aparente incompatibilidade entre a sua proposição do Princípio da Relatividade Geral (PRG) e o exemplo do vagão que sofre uma súbita freada. O caráter absoluto da aceleração de um referencial (que o torna identificável) desaparece com o auxílio do PE que estabelece uma equivalência entre um referencial inercial e um referencial não-inercial. Ao analisarmos as alternativas escolhidas pelos estudantes percebemos que 41,5% escolheram a alternativa

correta que era dada pela letra (c) enquanto 48,8% dos estudantes optaram pela letra (d). A diferença entre as duas alternativas estava na avaliação se é possível ou não diferenciar um vagão uniformemente acelerado de um vagão que está sujeito a um campo gravitacional de mesmo módulo, mas sentido contrário ao da aceleração. A alternativa (c) estabelecia que esses dois casos são indistinguíveis enquanto a alternativa (d) estabelece que existe uma maneira de distinguir eles. A análise das justificativas

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	1	2,4%
(b)	3	7,3%
<b>(c)</b>	17	41,5%
(d)	20	48,8%

Tabela 4.17: Análise das frequências das respostas para a questão 9.

é apresentada na Tabela 4.18. Na categoria “Justificativa correta” foram colocados os estudantes que perceberam que a contradição entre o PRG e o exemplo do vagão, que sofre uma freada, se desfaz com o auxílio do PE. Um total de 47,4% dos estudantes foram colocados nessa categoria. O aluno A5 coloca a seguinte afirmação: “c) O argumento de Einstein está juntamente no fato do observador do vagão não poder afirmar se o vagão está em um movimento não inercial ou se ele está em um referencial inercial sob a ação de um campo gravitacional [...]” mostrando claramente a indistingibilidade entre os dois referenciais. Já 18,4% dos estudantes colocados na categoria “Percepção da aceleração” têm a percepção da contradição entre o PGR e o exemplo do vagão, mas mostram também uma falta de entendimento de como o PE resolveu esse conflito. A resposta da aluna A14 ilustra essa interpretação “[...] o observador consegue afirmar que está em movimento não uniforme em relação ao solo.”. Os autores Bandyopadhyay e Kumar (2010a, p. 020104-6) relatam, em sua amostra, que nas respostas escritas somente dois estudantes responderam claramente que o PE faz o caráter absoluto da aceleração desaparecer. Contudo nas entrevistas todos os estudantes conseguiram explicar em mais detalhes e conseguiram desenvolver o raciocínio sobre como o PE ajudou na proposição do PRG. A categoria “Observador” traz dois estudantes (5,3%) que cometem o erro de dizer que a força de inércia também era percebida por um observador em um referencial inercial. Por fim, a categoria “Incoerência na resposta” ilustra as respostas que não conseguimos extrair um significado relevante.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa correta	47,4%	A5: “c) O argumento de Einstein está juntamente no fato do observador do vagão não poder afirmar se o vagão está em um movimento não inercial ou se ele está em um referencial inercial sob a ação de um campo gravitacional [...]”	A5: “c) O argumento de Einstein está juntamente no fato do observador do vagão não poder afirmar se o vagão está em um movimento não inercial ou se ele está em um referencial inercial sob a ação de um campo gravitacional, isso é explicado por Einstein pelo princípio da equivalência, que justamente deixa indistinguível um referencial inercial de referencial não inercial com aceleração com módulo igual ao do referencial inercial porém com sentido oposto.”
Percepção da aceleração	18,4%	A14: “[...] o observador consegue afirmar que está em movimento não uniforme em relação ao solo.”	A14: “D. Com a saída da inércia por parte do referencial, o observador consegue afirmar que está em movimento não uniforme em relação ao solo.”
Observador	5,3%	A10: “D, pois para alguém dentro e fora do vagão é evidente o a força de inércia [...]”	A10: “D, pois para alguém dentro e fora do vagão é evidente o a força de inércia causada pela freada súbita.”
Incoerência na resposta	28,9%	A12: “[...] caso o vento fosse em direção oposta haveria a massa inercial empurrando o viajante na direção oposta. Desse modo, o princípio da equivalência que iguala a massa inercial e a massa gravitacional seria comprovado, visto que a força gravitacional e a massa gravitacional teriam o mesmo valor.”	A12: “D, devido à força gravitacional pode-se afirmar que está em movimento não-uniforme graças à ação da mesma no corpo do viajante e graças ao princípio de equivalência, caso o vento fosse em direção oposta haveria a massa inercial empurrando o viajante na direção oposta. Desse modo, o princípio da equivalência que iguala a massa inercial e a massa gravitacional seria comprovado, visto que a força gravitacional e a massa gravitacional teriam o mesmo valor.”

Tabela 4.18: Análise das justificativas para a questão 9.

## 4.4 Resultados e análise questões 10 e 11

### 4.4.1 O princípio da equivalência como argumento para a deflexão da luz

As questões 10 e 11 tratam da utilização do PE para a previsão da deflexão da luz. A questão 11 mostra um experimento de pensamento em que a figura apresentada na questão ilustra a trajetória de um pulso de luz sob o ponto de vista de um referencial inercial. Na sequência é perguntado sobre a trajetória do pulso luminoso no referencial de uma nave acelerada. Já na questão 12 temos uma discussão no enunciado acerca da forma fraca e da forma forte do PE e como aplicá-lo na previsão da trajetória da luz sob a ação de um campo gravitacional.

#### 4.4.1.1 Questão 10

Na Tabela 4.19 notamos que 75,6% dos estudantes optaram pela alternativa correta dada pela letra (d) e, portanto, estavam conscientes de que a trajetória da luz no referencial acelerado  $S^*$  era curvilínea.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	2	4,9%
(b)	8	19,5%
(c)	0	0,0%
<b>(d)</b>	<b>31</b>	<b>75,6%</b>

Tabela 4.19: Análise das frequências das respostas para a questão 10.

A análise das justificativas é apresentada na Tabela 4.20. A categoria “Justificativa correta” agrupa 45,9% dos estudantes que afirmaram que se a luz entra pela abertura localizada à esquerda da nave e sai pela abertura localizada à direita da nave em relação ao referencial  $S$ , o mesmo deveria ocorrer para o referencial  $S^*$ . Logicamente, para que isso ocorra a trajetória da luz deve ser curva no referencial acelerado. Já 8,1% dos estudantes agrupados na categoria “Trajetória retilínea” afirmaram que a luz se manteria em linha reta em  $S^*$  e não atravessaria a nave do lado direito. Por fim, 45,9% dos alunos foram colocados na categoria “Incoerência na resposta” forneceram respostas não condizentes com a questão como é o caso do estudante A12 que afirma que a deflexão ocorre devido à gravidade sendo que na questão 10 o movimento ocorre no espaço livre.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa correta	45,9%	A5: “[...] Os fenômenos físicos devem ser os mesmos, logo, se o observador do referencial inercial S viu a luz entrar por uma janela e sair pela outra janela, o observador também deverá ver a luz entrar por uma janela e sair por outra, com uma diferença de trajetória, ao invés de realizar uma trajetória retilínea como para o referencial inercial, apresenta uma trajetória curvilínea, apresentando o começo da deflexão da luz e o princípio da equivalência na forma forte.”	A5: “d) Os fenômenos físicos devem ser os mesmos, logo, se o observador do referencial inercial S viu a luz entrar por uma janela e sair pela outra janela, o observador também deverá ver a luz entrar por uma janela e sair por outra, com uma diferença de trajetória, ao invés de realizar uma trajetória retilínea como para o referencial inercial, apresenta uma trajetória curvilínea, apresentando o começo da deflexão da luz e o princípio da equivalência na forma forte.”
Trajetória retilínea	8,1%	A4: “[...] o pulso luminoso será retilíneo e não atrevessaria a parte direita da nave.”	A4:“ Letra A, o pulso luminoso será retilíneo e não atrevessaria a parte direita da nave.”
Incoerência na resposta	45,9%	A12: “[...] devido à deflexão da luz pela gravidade.”	A12: “D, devido à deflexão da luz pela gravidade.”

Tabela 4.20: Análise das justificativas para a questão 10.

#### 4.4.1.2 Questão 11

Na Tabela 4.21 notamos que 70,7% dos estudantes optaram pela alternativa correta dada pela letra (c) na questão 11 que também é um valor próximo ao percentual de estudantes que acertaram a alternativa correta na questão 10.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	6	14,3%
(b)	6	14,3%
<b>(c)</b>	29	69,0%
(d)	1	2,4%

Tabela 4.21: Análise das frequências das respostas para a questão 11.

A análise das justificativas é apresentada na Tabela 4.22. Nessa questão foram criadas cinco categorias. A categoria “Justificativa correta” apresenta 66,7% dos estudantes que perceberam que o PE tomado como verdadeiro leva à afirmação de que a luz irá curvar-se sob a ação de um campo gravitacional. Poucos estudantes, colocados nessa categoria, incluíram em suas justificativas a afirmação de que a previsão da deflexão da luz sob a ação de um campo gravitacional passa pela generalização do PE para a sua *forma forte*. O estudante A41 demonstrou claramente a necessidade da generalização do PE na previsão do fenômeno da deflexão: “A41: C) O princípio da

equivalência na forma forte diz que nenhuma experiência (mecânica ou não, ou seja, a luz é incluída nisso) é capaz de distinguir entre um campo gravitacional uniforme e uma aceleração uniforme equivalente. Como o referencial inercial está inserido em um contexto de campo gravitacional, a situação pode ser trocada para um referencial acelerado em direção oposta, chegando no mesmo exemplo atribuído ao exercício 10), portanto, na presença de um campo gravitacional, a luz sofre desvio e sua trajetória é curva. Caso o princípio da equivalência na forma fraca fosse usado, a luz não estaria incluída e de acordo com a teoria, não sofreria desvio (ou precisaria de confirmação experimental). ”. A categoria “Ação da gravidade” apresenta um estudante que afirmou que a gravidade afeta a propagação, mas não justificou utilizando o PE. Já na categoria “Gravidade na Terra” agrupa os estudantes que justificaram dizendo que o efeito da deflexão da luz na Terra é muito pequeno e, portanto, não seria possível medi-lo e a luz propagaria em linha reta. Entretanto, essa escolha entra em contradição com a questão anterior em que a luz defletiu no referencial da nave acelerada, com um valor igual a  $g$  para a aceleração, então o mesmo deve acontecer quando a nave repousar na superfície da nave com um campo gravitacional também igual a  $g$ . Contudo, essa resposta também pode ilustrar uma fragilidade da questão, pois realmente esse efeito é muito pequeno na superfície da Terra. Para cada distância horizontal percorrida de 1km de um pulso de luz o desvio é da ordem de 1Å (NUSSENZVEIG, 2002, p. 308). A categoria “Meio de propagação” agrupou 11,1% dos estudantes que justificaram a deflexão da luz devido à refração. Essa resposta não era esperada, mas como os estudantes já tinham estudado Ótica Geométrica os mesmos utilizaram um conhecimento prévio para justificar a deflexão da luz. Os estudantes dessa categoria não perceberam que o efeito discutido na questão é decorre de uma previsão de Einstein utilizando o PE sendo comprovado experimentalmente em 1919 por meio de duas expedições britânicas na ilha de Príncipe e em Sobral. Como relatado em (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a, p. 020104-7) o conhecimento prévio utilizado de maneira não crítica pode levar a interpretações equivocadas. Aqui a utilização do conhecimento de refração utilizado de maneira acrítica na questão levou a uma interpretação equivocada do fenômeno. Por fim, a categoria “Incoerência na resposta” mostra os estudantes que apresentaram justificativas cujo significado não conseguimos interpretar ou não se relacionava com a questão.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa correta	66,7%	A6: “[...] Os fenômenos físicos devem ser os mesmos, logo, se o observador do referencial inercial S viu a luz entrar por uma janela e sair pela outra janela, o observador também deverá ver a luz entrar por uma janela e sair por outra, com uma diferença de trajetória [...]”	A6: “d) Os fenômenos físicos devem ser os mesmos, logo, se o observador do referencial inercial S viu a luz entrar por uma janela e sair pela outra janela, o observador também deverá ver a luz entrar por uma janela e sair por outra, com uma diferença de trajetória, ao invés de realizar uma trajetória retilínea como para o referencial inercial, apresenta uma trajetória curvilínea, apresentando o começo da deflexão da luz e o princípio da equivalência na forma forte.”
Ação da gravidade	2,8%	A35:“ [...] o faixo luminoso sofrerá a ação da gravidade e irá fazer uma curva para sair do lado direito.”	A35:“ Letra C, o faixo luminoso sofrerá a ação da gravidade e irá fazer uma curva para sair do lado direito.”
Gravidade da Terra	5,6%	A2:“ A - Por conta da aceleração da gravidade ser muito fraca, o observador dentro da nave não consegue perceber a deflexão da luz, parecendo que ela percorreu um caminho retilíneo, assim diferencia-se do princípio da equivalência.”	A2:“ A - Por conta da aceleração da gravidade ser muito fraca, o observador dentro da nave não consegue perceber a deflexão da luz, parecendo que ela percorreu um caminho retilíneo, assim diferencia-se do princípio da equivalência.”
Meio de propagação	11,1%	A30:“ Alternativa: A O que viria a interferir na propagação da luz seria a mudança de meio [...]”	A30:“ Alternativa: A O que viria a interferir na propagação da luz seria a mudança de meio, o que causaria uma refração da mesma.”
Incoerência na resposta	13,9%	A1: “C)Esse fenômeno demonstrou a equivalência dos fenômenos físicos mecânicos e não mecânicos [...]”	A1:“D C)Esse fenômeno demonstrou a equivalência dos fenômenos físicos mecânicos e não mecânicos, independente de seus respectivos referenciais.”

Tabela 4.22: Análise das justificativas para a questão 11.

## 4.5 Resultados e análise questões 12 e 13

### 4.5.1 O princípio da equivalência e o pensamento mais feliz da vida de Einstein

#### 4.5.1.1 Questão 12

A questão 12 visava analisar a equivalência entre um referencial em queda livre e um referencial em repouso (ou movimento uniforme) no espaço livre. A Tabela 4.23 ilustra que 73,2% optaram pela opção correta dada pela letra (d). Já 19,5% optaram pela alternativa (c) que dizia em sua alternativa que um referencial em queda não é equivalente a um referencial em repouso no espaço livre.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	2	4,9%
(b)	1	2,4%
(c)	8	19,5%
(d)	30	73,2%

Tabela 4.23: Análise das frequências das respostas para a questão 12

A análise das justificativas é apresentada na Tabela 4.24. Um total de 39,5% dos estudantes foram agrupados na categoria “Justificativa correta”. O estudante A5 explora em sua resposta um experimento discutido durante as aulas: “ d) O pensamento mais feliz da vida de Einstein descreve a equivalência de dois referenciais peculiares, o referencial em queda livre e o referencial em movimento constante no espaço livre. Como mostrado em aula um exemplo da garrafa de água com furos em queda livre, a água para de jogar pelos furos e é como se flutuasse dentro da garrafa, o mesmo acontece no elevador, quem está destro do referencial em queda livre sente-se flutuando, da mesma forma que o referencial inercial no espaço. ”. A resposta do estudante A5 vai ao encontro do resultado apresentado em (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018, p. 010130-10). Assim, os estudantes tendem a lembrar da experiência da garrafa em queda livre, descrita na subseção 2.4.1, para discutir o PE de Einstein escrito em termos dos referenciais em queda livre, pois esse exemplo de certa forma relaciona-se com o seu cotidiano. Um quantitativo de 5 alunos, de um total de 12 agrupados na categoria “Justificativa correta”, apresentaram o exemplo da garrafa em queda livre como parte da justificativa. Na categoria “Falta de Compreensão do PE” agrupamos 26,3% dos estudantes. Nessa categoria os estudantes apresentavam uma compreensão equivocada do fenômeno apresentado na questão e não interpretavam corretamente o PE. Na categoria “Referencial” nós agrupamos 15,8% dos estudantes que justificaram o PE analisando do ponto de vista de um referencial externo (inercial) que “vê” o referencial da nave em queda livre para justificar o porquê da maçã não tocar no chão da nave. Para esses estudantes nós percebemos uma confusão na hora de analisar o problema do ponto de vista do referencial em queda livre. A categoria “Incoerência na resposta” coloca 18,4% dos estudantes que escreveram alguma incoerência na resposta.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa correta	39,5%	A5: “d) O pensamento mais feliz da vida de Einstein descreve a equivalência de dois referenciais peculiares, o referencial em queda livre e o referencial em movimento constante no espaço livre [...]”	A5: “d) O pensamento mais feliz da vida de Einstein descreve a equivalência de dois referenciais peculiares, o referencial em queda livre e o referencial em movimento constante no espaço livre. Como mostrado em aula um exemplo da garrafa de água com furos em queda livre, a água para de jogar pelos furos e é como se flutuasse dentro da garrafa, o mesmo acontece no elevador, quem está dentro do referencial em queda livre sente-se flutuando, da mesma forma que o referencial inercial no espaço”
Falta de compreensão do PE	26,3%	A3: “[...] a mação irá tocar o chao do elevador. seria diferente se estive em um ambiente livre pois estria livre das forças externas mantendo se em inercia.”	A3: “Letra A. Mesmo estando em queda livre a força gravitacional estara atuando e a mação irá tocar o chao do elevador. seria diferente se estive em um ambiente livre pois estria livre das forças externas mantendo se em inercia.”
Referencial	15,8%	A3: “[...] a mação irá tocar o chao do elevador. seria diferente se estive em um ambiente livre pois estria livre das forças externas mantendo se em inercia.”	A3: “Letra A. Mesmo estando em queda livre a força gravitacional estara atuando e a mação irá tocar o chao do elevador. seria diferente se estive em um ambiente livre pois estria livre das forças externas mantendo se em inercia.”
Incoerência na resposta	18,4%	A1: D)a presença da aceleração g anula a aceleração não uniforme do referencial espacial,sendo este fenômeno responsável por fazer a maçã flutuar na nave no espaço, e este fato ocorre da mesma forma na Terra devido ao princípio da Equivalência.”	A1: “D)a presença da aceleração g anula a aceleração não uniforme do referencial espacial,sendo este fenômeno responsável por fazer a maçã flutuar na nave no espaço, e este fato ocorre da mesma forma na Terra devido ao princípio da Equivalência.”

Tabela 4.24: Análise das justificativas para a questão 12.

#### 4.5.1.2 Questão 13

A questão 13 analisava que o PE tem, para um campo gravitacional não-uniforme, aplicabilidade válida somente em pequenas regiões espaciais e curtos intervalos de tempo. A Tabela 4.25 ilustra que as respostas dos estudantes flutuaram por todas as opções e 39,0% optaram pela opção correta dada pela letra (b). A opção (a) trazia a impossibilidade do PE ser aplicado em campos gravitacionais não-uniformes, a opção (c) colocava que o PE pode ser aplicado em regiões espaciais pequenas e a opção (d) coloca que somente é necessário curtos intervalos de tempo para a validade do PE.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	8	19,5%
(b)	16	39,0%
(c)	8	19,5%
(d)	9	22,0%

Tabela 4.25: Análise das frequências das respostas para a questão 13.

A análise das justificativas é apresentada na Tabela 4.26. Nessa questão foram criadas cinco categorias. A categoria “Justificativa correta” apresenta os estudantes que perceberam que para o PE ser válido em um campo gravitacional não-uniforme é necessário que as medidas de um determinado experimento ocorram em pequenas regiões espaciais e em curtos intervalos de tempo, pois caso contrário resultados diferentes ocorrerão em um referencial em queda livre e em um referencial em movimento uniforme no espaço livre. Na categoria “Pequenas regiões espaciais” tivemos que 18,9% dos alunos afirmaram que as medidas são independentes do intervalo de tempo, dando a entender que somente uma pequena região do espaço é suficiente para a medida. Já na categoria “Curtos intervalos” um total de 10,8% dos estudantes afirmaram que, por exemplo, a distância que separam os corpos da questão é irrelevante e somente o intervalo de tempo é o fator preponderante para a validade do PE. A categoria “Campo uniforme” coloca os estudantes que afirmaram que o PE somente é válido para um campo gravitacional uniforme. Assim, 13,5% dos estudantes não perceberam que o PE continua válido mesmo em um campo gravitacional não-uniforme desde que apliquemos o PE a regiões pequenas do espaço e em curtos intervalos de tempo. A categoria “Incoerência na resposta” apresentam respostas que não conseguimos extrair significado e contém um total de 16,2% dos estudantes.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa correta	40,5%	A5: “b) Como indicado por Einstein, o princípio da equivalência só vale localmente e em curtos intervalos de tempo, se um experimento for feito em um campo não uniforme, como no caso da imagem, se for realizado em tempos muito longos (como a letra c), o princípio da equivalência não será respeitado, o mesmo acontecerá se o experimento for feito em distâncias muito longas, pois o campo gravitacional varia com a distância do centro de massa, então o único jeito do princípio da equivalência ser verdadeiro, é em curtos intervalos de tempo, e pequenas distâncias.”	A5: “ b) Como indicado por Einstein, o princípio da equivalência só vale localmente e em curtos intervalos de tempo, se um experimento for feito em um campo não uniforme, como no caso da imagem, se for realizado em tempos muito longos (como a letra c), o princípio da equivalência não será respeitado, o mesmo acontecerá se o experimento for feito em distâncias muito longas, pois o campo gravitacional varia com a distância do centro de massa, então o único jeito do princípio da equivalência ser verdadeiro, é em curtos intervalos de tempo, e pequenas distâncias.”
Pequenas regiões espaciais	18,9%	A24: “C, é independente do tempo [...] então estariam sempre uma perto da outra a todo momento, ou seja, com a mesma distância.”	A24: “C, é independente do tempo pois elas iriam ficar flutando juntas e caindo com o mesmo intervalo então estariam sempre uma perto da outra a todo momento, ou seja, com a mesma distância..”
Curtos intervalos	10,8%	A6: “[...] as maçãs podem estar em qualquer lugar do elevador com qualquer distância entre si [...]”	A6: “Letra D. Já que com micro intervalos de tempo, podemos dizer que o campo gravitacional é uniforme e tendo as duas maçãs dentro do elevador, que possui um tamanho desconsiderável perto do planeta terra, podemos dizer que as maçãs podem estar em qualquer lugar do elevador com qualquer distância entre si e a advertência de Einstein será válida já que a distância entre elas não será suficiente para produzir uma variação gravitacional considerável..”
Campo uniforme	13,5%	A29: “[...] o princípio da equivalência só é válido para campo gravitacional uniforme.”	A29: “A - pois o princípio da equivalência só é válido para campo gravitacional uniforme.”
Incoerência na resposta	16,2%	A1: “B)devido a variação do campo magnético de acordo com a sua distância da Terra, é necessário tomar cuidado com esta propriedade. Caso a medida não seja feita em um curto intervalo de distância e tempo, às medidas tomadas poderão possuir algum erro.”	A1: “B)devido a variação do campo magnético de acordo com a sua distância da Terra, é necessário tomar cuidado com esta propriedade. Caso a medida não seja feita em um curto intervalo de distância e tempo, às medidas tomadas poderão possuir algum erro.”

Tabela 4.26: Análise das justificativas para a questão 13.

## 4.6 Resultados e análise questões 14 até 19

### 4.6.1 O funcionamento de relógios em campos gravitacionais

#### 4.6.1.1 Questão 14

A questão 14 visava a analisar o funcionamento de um relógio em um campo gravitacional. Essa questão tinha como objetivo de sondar a compreensão dos estudantes em relação à passagem do tempo perto de um objeto massivo. A Tabela 4.27 ilustra

que 87,2% optaram pela opção correta dada pela letra (b) que afirmava que o intervalo de tempo medido por um relógio perto de um objeto massivo é menor quando comparado a um relógio distante do objeto. Já 10,3% optaram pela alternativa (a) que, basicamente, trocava a palavra *menor*, destacada anteriormente, pela palavra *maior*. A letra (c) apresentava a concepção newtoniana de que o intervalo de tempo medido por um relógio não depende da localização desse relógio. A letra (d) foi escolhida por apenas 2,6% dos estudantes e dizia que o efeito provocado pelo corpo massivo só ocorre perto do mesmo.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	4	10,3%
<b>(b)</b>	34	87,2%
(c)	0	0,0%
(d)	1	2,6%

Tabela 4.27: Análise das frequências das respostas para a questão 14.

A análise das justificativas é apresentada na Tabela 4.28. Um total de 64,1% dos estudantes foram agrupados na categoria “Justificativa correta”. Nessa categoria vinte e cinco estudantes aparentemente sabiam que o tempo medido próximo de um corpo massivo passa mais lentamente do que em relação ao tempo medido distante desse corpo. Entretanto, conseguimos elencar três tipos de justificativas para a diferença na passagem do tempo. Doze alunos apenas mencionaram que o intervalo de tempo é menor para um observador próximo da fonte gravitacional, mas não esboçaram nenhuma justificativa parra essa afirmação como apresentada pelo estudante A12: “B) Devido ao fato de quanto mais próximo à fonte do campo gravitacional menor será o intervalo de tempo. ”. Seis alunos justificaram essa diferença na passagem do tempo como uma consequência da métrica de Schwarzschild a qual destacamos a resposta do estudante A6: “Através da métrica de Schwarzschild, ao compararmos um referencial em um corpo massivo e outro longe de qualquer corpo, com  $r$  infinito, podemos observar que a passagem do tempo varia entre os referenciais. ”. Seis estudantes justificaram pela intensidade do campo gravitacional em termos da densidade das linhas de campo como do estudante A39: “ B, pois o campo gravitacional é mais denso perto do corpo massivo, fazendo com que o tempo passe "mais devagar", demonstrando um menor intervalo de tempo. ”. Interpretamos essa justificativa como uma tentativa na forma newtoniana de explicar o fenômeno e, portanto, incorreta. Por fim, um aluno justificou afirmando que relógios com energia potencial mais baixa apresentavam a

marcação do tempo menor. Acreditamos que, talvez, esse estudante tenha se confundido com a dedução do desvio gravitacional para o vermelho e, por meio desta dedução, o comportamento de relógios em um campo gravitacional utilizando o PE em que é mencionado que relógios colocados em potenciais gravitacionais menores medem um intervalo de tempo menor do que em relação aos relógios colocados em potenciais gravitacionais maiores. Apesar das inconsistências mencionadas, colocamos esses estudantes na categoria “Justificativa correta”, porém futuramente uma investigação mais detalhada torna-se necessária para avaliar com mais profundidade justificativas apresentadas. Na categoria “Conhecimento prévio” o estudante A1 apresentou a seguinte resposta: “A-A presença do campo gravitacional atrasa o tempo em relação a um referencial afastado de campo gravitacional, conforme a teoria do paradoxo dos gêmeos.” Essa justificativa mostra a não percepção da diferença do efeito provocado devido à presença de uma fonte de campo gravitacional e o efeito provocado devido ao movimento relativo na alteração do ritmo de um relógio. Apesar de somente um estudante apresentar essa *vulnerabilidade conceitual* destacamos que esse questionamento apareceu algumas vezes durante as aulas. Uma estratégia possível para colocar em discussão os efeitos da alteração da passagem do tempo na TRR e na TRG seja explorar, por exemplo, o funcionamento do GPS que traz uma discussão rica para explorar as correções na determinação do tempo utilizando tanto a TRR quanto a TRG. Essa discussão é um aprimoramento da nossa abordagem que deve ser trazido e, também, investigado em mais detalhes. O uso acrítico de conhecimentos prévios é um fator importante na assimilação de ideias novas na TRG (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a, p. 020104-10). Em nosso trabalho esse uso acrítico tentava explicar a alteração da passagem do tempo devido à presença da gravidade utilizando a TRR que estabelece uma alteração na passagem do tempo devido ao movimento relativo entre relógios. A categoria “Intervalo maior” traz estudantes que inverteram o raciocínio correto mencionando que o tempo passa mais rápido quanto mais próximo da fonte de campo gravitacional. Por fim, a categoria “Jargão” mostra que 20,5% dos estudantes tentam justificar a sua escolha através da tentativa de utilização de um termo técnico. A resposta da aluna A28 ilustra essa tentativa: “O vetor espaço-tempo passa por um campo gravitacional mais denso o que resulta no tempo passando “mais devagar”[...]. O jargão utilizado pelos estudantes não apresenta significado dentro da TRG, mas essa forma de responder perguntas utilizando jargões como parte das respostas também apareceu no trabalho de Bandyopadhyay e Kuma (2010a, p. 020104-8). Aparentemente,

grande parte dos alunos colocados na categoria “Jargão” sabiam sobre a passagem do tempo ser mais lenta próximo da fonte gravitacional, mas dificilmente eles sabiam uma justificativa para essa afirmação. Os estudantes colocados na categoria “Incoerência na resposta” foram alunos cujas respostas não conseguimos extrair nenhum significado. Por fim, destacamos ainda cinco estudantes, do total de trinta e nove que justificaram a questão 14, colocaram a expressão - *passa mais devagar-* entre aspas. Destacamos que essas aspas provavelmente surgiram devido à análise feita nas aulas sobre um trecho da referência Taylor, Wheeler e Bertschinger (2018, p. 4-8) denominado “Slogans and Observations”. Nesse trecho os autores discutem dois slogans famosos da TRR e da TRG respectivamente, a saber: “Os relógios em movimento funcionam devagar.” e “Relógios mais altos num campo gravitacional funcionam mais rapidamente. ”. Nessa análise os autores chamam a atenção de que as medidas na relatividade dependem do observador e a análise mais detalhada desses slogans pode ter gerado as aspas colocadas em algumas respostas. Essa análise também pode ser mais detalhada em investigações futuras.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa correta	64,1%	A125: “[...] quanto mais próximo à fonte do campo gravitacional menor será o intervalo de tempo.” [...] Os fenômenos físicos devem ser os mesmos, logo, se o observador do referencial inercial S viu a luz entrar por uma janela e sair pela outra janela, o observador também deverá ver a luz entrar por uma janela e sair por outra, com uma diferença de trajetória [...]”	A125: “B) Devido ao fato de quanto mais próximo à fonte do campo gravitacional menor será o intervalo de tempo.d) Os fenômenos físicos devem ser os mesmos, logo, se o observador do referencial inercial S viu a luz entrar por uma janela e sair pela outra janela, o observador também deverá ver a luz entrar por uma janela e sair por outra, com uma diferença de trajetória, ao invés de realizar uma trajetória retilínea como para o referencial inercial, apresenta uma trajetória curvilínea, apresentando o começo da deflexão da luz e o princípio da equivalência na forma forte.”
Conhecimento prévio	2,6%	A14:“ A-A presença do campo gravitacional atrasa o tempo [...] conforme a teoria do paradoxo dos gêmeos.[...] o pulso luminoso será retilíneo e não atrevessaria a parte direita da nave.”	A14:“ A-A presença do campo gravitacional atrasa o tempo em relação a um referencial afastado de campo gravitacional, conforme a teoria do paradoxo dos gêmeosLetra A, o pulso luminoso será retilíneo e não atrevessaria a parte direita da nave.”
Intervalo maior	5,1%	A19: “[...] Desse modo, é possível concluir que o intervalo deverá ser maior no relógio que estiver mais próximo do campo gravitacional.”	A19: “a) Isto porque quanto mais próximo do campo gravitacional mais vagarosamente tenderá o tempo a passar. Desse modo, é possível concluir que o intervalo deverá ser maior no relógio que estiver mais próximo do campo gravitacional.”
Jargão	20,5%	A28: “B. O vetor espaço-tempo passa por um campo gravitacional mais denso o que resulta no tempo passando “mais devagar”em comparação aos outros que não passam pelo mesmo.”	A28:“ B. O vetor espaço-tempo passa por um campo gravitacional mais denso o que resulta no tempo passando “mais devagar”em comparação aos outros que não passam pelo mesmo.”
Incoerência na resposta	7,7%	A34: “[...] o espaço-tempo sofre uma alteração ao se aproximar de campos gravitacionais.”A12: “[...] devido à deflexão da luz pela gravidade.”	A34: “B, pois o espaço-tempo sofre uma alteração ao se aproximar de campos gravitacionais.”A12: “D, devido à deflexão da luz pela gravidade.”

Tabela 4.28: Análise das justificativas para a questão 14.

## 4.6.2 A perda de significado métrico das coordenadas

### 4.6.2.1 Questão 15

A questão 15, sem dúvida, é a questão mais técnica do questionário e ela quase foi retirada do instrumento. Entretanto, a opção de mantê-la ocorreu porque a discussão do significado métrico das coordenadas é uma parte central de nossa abordagem. O trabalho de Stannard, Blair, Zadnik e Kaur (2017) faz uma excelente discussão sobre a medida do intervalo de tempo próximo a uma fonte de campo gravitacional e, no apêndice do artigo, fornece uma dedução para a dilatação (gravitacional) do tempo. Entretanto, a simplificação do termo  $dt^2$  na dedução da dilatação do tempo não é explicada em detalhes. Já no livro Taylor, Wheeler e Bertschinger (2018, p. 4-4) os autores explicam em detalhes a simplificação de  $dt$  para a discussão do resultado da dilatação gravitacional do tempo com uma discussão voltada para o significado métrico das coordenadas e, assim, tornando mais compreensível a manipulação matemática da métrica de Schwarzschild. Dessa forma, a questão 15 apresenta uma discussão mais próxima do livro de Taylor, Wheeler e Bertschinger (2018). A Tabela 4.29 mostra que 57,9% dos estudantes optaram pela alternativa correta dada pela letra (d) que diz que em um espaço-tempo curvo as coordenadas globais não possuem significado métrico imediato, ou seja, essas coordenadas não estão relacionadas diretamente com as quantidades físicas observáveis (medidas) e, por isso, a métrica é necessária. A alternativa (c) foi marcada por 39,5% dos estudantes. Nessa alternativa era dito que a métrica do espaço-tempo é dispensável visto que podemos relacionar as coordenadas globais diretamente com quantidades físicas.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	0	0,0%
(b)	1	2,6%
(c)	15	39,5%
<b>(d)</b>	<b>22</b>	<b>57,9%</b>

Tabela 4.29: Análise das frequências das respostas para a questão 15

Na Tabela 4.30 são apresentadas as justificativas dos estudantes para a opção escolhida. Na categoria “Justificativa correta” foram colocados 43,2% dos estudantes que responderam com exatidão que as coordenadas da métrica de Schwarzschild des-

<sup>2</sup>Esse termo  $dt$  é a coordenada “temporal” que aparece na métrica de Schwarzschild que pode ser vista na equação A81 no apêndice A em mais detalhes.

crevem eventos na TRG, mas não carregam consigo um significado métrico. Assim, o uso da métrica -  $\Delta s^2$  - é indispensável para a determinação previsões de quantidades físicas mesuráveis. A categoria “Impossibilidade” contém 10,8% dos estudantes e apresenta estudantes que, de certa forma, confundiram o papel das coordenadas globais na TRG. A categoria “Fórmula” conta com 37,8% dos estudantes e, a nosso ver, representa os estudantes que definitivamente não compreenderam a relação entre as coordenadas globais e a métrica. Todos os estudantes colocados na categoria “Fórmula” sabiam da necessidade da utilização da métrica, talvez pela importância dada para ela durante as aulas, e sabiam da necessidade de utilizá-la. Contudo, as justificativas combinadas com as opções escolhidas mostram que a necessidade da utilização da métrica não foi percebida com todo o seu significado pelos estudantes. Na categoria “Espaço-tempo” 5,4% dos estudantes apresentam uma *vulnerabilidade conceitual* em relação as coordenadas globais e o espaço-tempo curvo como mostrado na fala do aluno A24: “D, porque o tempo e o espaço são interligados então tecnicamente você não tem um espaço para ser mapeado/localizado, você pode matematicamente achar coordenadas para um local específico, mas até chegar lá já vai ter se tornado outra coisa, já que o espaço está ligado ao tempo entao se o tempo passou o espaço mudou.”. A afirmação dele se baseia na interligação do espaço e do tempo na TRG, entretanto na TRR o espaço e o tempo já estão interligados. Contudo, na TRR o espaço-tempo é plano e podemos utilizar coordenadas cartesianas juntamente com relógios sincronizados para localizar eventos. As coordenadas na TRR apresentam um significado métrico imediato, pois variações de coordenadas podem ser relacionadas diretamente com quantidades físicas mensuráveis como distâncias medidas com um régua e intervalos de tempo medidos com relógios. Por fim, na categoria “Incoerência na resposta” temos um único estudante, que apresenta jargões técnicos da TRG desconexos com pergunta em questão.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa correta	43,2%	A23: “D. O novo sistema de coordenadas vistos na solução de Schwarzschild – tidas como coordenadas globais – não possui um significado métrico imediato, ou seja, não conseguimos relacionar a variação de coordenadas globais com quantidades mensuráveis. [...] E a resposta encontrada foi que precisamos usar a métrica do espaço-tempo, assim esta é indispensável para prever as quantidades físicas mensuráveis.”	A23: “D. O novo sistema de coordenadas vistos na solução de Schwarzschild – tidas como coordenadas globais – não possui um significado métrico imediato, ou seja, não conseguimos relacionar a variação de coordenadas globais com quantidades mensuráveis. Então fica em questão como relacionariam esse novo sistema com tais quantidades mensuráveis. E a resposta encontrada foi que precisamos usar a métrica do espaço-tempo, assim esta é indispensável para a determinação de quantidades físicas mensuráveis.”
Impossibilidade	10,8%	A5: “D) Devido ao fato da relatividade geral trazer para a geometria espacial um espaço-tempo curvo, é impossível adotar as coordenadas globais, pois não são suficientes para um resultado métrico válido, por isso é necessário a utilização da métrica, pois só assim é possível obter os resultados métricos válidos, que determinem quantidades físicas mensuráveis.”	A5: “D) Devido ao fato da relatividade geral trazer para a geometria espacial um espaço-tempo curvo, é impossível adotar as coordenadas globais, pois não são suficientes para um resultado métrico válido, por isso é necessário a utilização da métrica, pois só assim é possível obter os resultados métricos válidos, que determinem quantidades físicas mensuráveis.”
Fórmula	37,8%	A26: “[...] com as coordenadas pode se encontrar $\delta S$ .“	A26: “Letra c pois com as coordenadas pode se encontrar S.”
Espaço-tempo	5,4%	A24: “D, porque o tempo e o espaço são interligados então tecnicamente você não tem um espaço para ser mapeado/localizado, você pode matematicamente achar coordenadas para um local específico, mas até chegar lá já vai ter se tornado outra coisa, já que o espaço está ligado ao tempo então se o tempo passou o espaço mudou.”	A24: “D, porque o tempo e o espaço são interligados então tecnicamente você não tem um espaço para ser mapeado/localizado, você pode matematicamente achar coordenadas para um local específico, mas até chegar lá já vai ter se tornado outra coisa, já que o espaço está ligado ao tempo então se o tempo passou o espaço mudou.”
Incoerência na resposta	2,7%	A4: “[...] Os corpos em um campo gravitacional seguem um caminho espacial curvo, mesmo que eles possam realmente estar se movendo como “linhas de mundo” possíveis “em linha reta” através do espaço-tempo curvo.”	A4: “Letra c, porque A curvatura do espaço-tempo é uma das principais consequências da teoria da relatividade geral, de acordo com a qual a gravidade é efeito ou consequência da geometria curva do espaço-tempo. Os corpos em um campo gravitacional seguem um caminho espacial curvo, mesmo que eles possam realmente estar se movendo como “linhas de mundo” possíveis “em linha reta” através do espaço-tempo curvo.”

Tabela 4.30: Análise das justificativas para a questão 15

### 4.6.3 O uso da métrica e a interpretação do funcionamento de relógios em um campo gravitacional

#### 4.6.3.1 Questões 16 até 19

As questões 16, 17, 18 e 19 tinham o objetivo de analisar como os estudantes poderiam utilizar a métrica de Schwarzschild para discutir o problema do desvio gravitacional para o vermelho e, também, o desvio gravitacional para o azul. Contudo, muitos estudantes se restringiram a apenas resolver matematicamente o problema, muitas vezes cometendo alguns erros em algumas passagens matemáticas básicas. Outros estudantes fizeram todas as passagens matemáticas de forma correta e, também, interpretaram o resultado. Em particular, para esse conjunto de questões não faremos uma análise detalhada com o número de acertos e depois uma categorização das alternativas devido à baixa quantidade de explicações fornecidas para essas questões. Contudo, colocaremos a solução do estudante *A5* - Figura 4.1 - fazendo um breve comentário sobre a solução do estudante.

O estudante *A5* manipulou corretamente a métrica observado que o intervalo  $\Delta t$  é idêntico para ambos os observadores. Outro detalhe que chama a atenção é a justificativa da questão 18 (identificada com o número 5 pelo estudante). O estudante percebe que a interpretação surge do receptor. Dessa forma, na questão 16 o observador *Rodrigo*, que recebe os sinais luminosos, tem a impressão que o relógio de *Mariana* está funcionando mais rapidamente do que o seu enquanto na questão 18 é *Mariana* que agora recebe os sinais luminosos emitidos por *Rodrigo* e afirma que o relógio dele está funcionando mais lentamente. Apesar de termos conseguido observar que alguns estudantes conseguem fazer manipulações simples da métrica de Schwarzschild, como o estudante *A5*, gostaríamos de desenvolver outros problemas semelhantes para uma melhor análise dessa habilidade.

3)  $\Delta T = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \Delta t$

Mariana ( $r_M$ ) =  $R + h$   $\Rightarrow \Delta T_m = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_m}} \Delta t$

Rodrigo ( $r_R$ ) =  $R$   $\hookrightarrow \Delta T_R = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_R}} \Delta t$

como  $r_R < r_M$ ,  $\Delta t$  é igual em ambos,

$\Delta T_m > \Delta T_R$  (B)

4) Da questão anterior:  $\Delta T_m > \Delta T_R$ ;  
 $f = \frac{1}{T}$ ;  $f_M = \frac{1}{T_M}$ ;  $f_R = \frac{1}{T_R}$   
 se  $T_M > T_R$  as grandezas são  
 inversamente proporcionais,  $f_R > f_M$   
 (B)  $\hookrightarrow$  esso descreve  
 característica do blueshift

5)  $\Delta T = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \Delta t$

Mariana ( $r_M$ ):  $R + h$   
 Rodrigo ( $r_R$ ):  $R$

do mesmo forma que na questão 3. Temos:  
 $r_M > r_R \Rightarrow \Delta T_M > \Delta T_R$ , porém como nesse caso,  
 quem emite é o Rodrigo, Mariana tem a impressão que o relógio  
 de Rodrigo anda mais devagar quando comparado ao seu relógio

6) Da mesma forma que na questão 4, tendo  $\Delta T_M > \Delta T_R$ ,  
 temos que  $f_R > f_M$ , logo, houve uma redução de frequência (pela observação de  
 Rodrigo para Mariana), o que caracteriza um redshift (A)

Figura 4.1: Solução para as questões 16, 17, 18 e 19 do estudante A5. Na numeração utilizada pelo estudante os itens 3, 4, 5 e 6 correspondem as questões 16, 17, 18 e 19 respectivamente.

## 4.7 Resultados e análise questões 20 e 21

### 4.7.1 Buracos Negros

#### 4.7.1.1 Questão 20

Na questão 20 analisamos o papel do horizonte de eventos ao “dividir” o espaço-tempo em duas regiões: a região interior ( $r < R_s$ ) e a região exterior ( $r > R_s$ ) ao horizonte de eventos. A Tabela 4.31 mostra que 92,3% dos estudantes escolheram a

opção correta. Os estudantes que optaram pelas alternativas (a) e (d) simplesmente não justificaram a sua escolha e, portanto, não conseguiremos analisar as suas justificativas que embasaram tal escolha. Na Tabela 4.32 estão apresentadas as justificativas

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	1	2,6%
(b)	0	0,0%
(c)	36	92,3%
(d)	2	5,1%

Tabela 4.31: Análise das frequências das respostas para a questão 20.

para questão 20. Na categoria “Justificativa correta” estão 54,3% dos estudantes que afirmaram que na região interna ao *horizonte de eventos* não é possível ter observadores estacionários e, uma vez, atravessando o horizonte é impossível retornar a região exterior. A aluna A23 coloca em sua justificativa as regiões de passado e futuro associadas ao cone de luz local em um diagrama espaço-tempo. Um estudante, que corresponde a 2,9% da amostra, foi colocado na categoria “Impossibilidade”. Essa categoria foi criada pela devido à inconsistência na resposta. O estudante afirma que somente podem existir observadores fora do horizonte de eventos. Contudo, sabemos que somente podem existir observadores *estacionários* fora do horizonte e, no interior, qualquer observador, corpo e a luz irão se deslocar para a  $r = 0$ . Não colocamos essa categoria como uma vulnerabilidade conceitual, pois acreditamos que o estudante possa ter cometido um erro na elaboração da resposta ao esquecer o termo “estacionário”. Além disso, o estudante A27 optou pela alternativa correta. Na categoria “Incoerência na resposta” temos que 42,9% apresentaram uma resposta sem significado ao afirmar que “os observadores da região interna horizontal voltam para o CT”. Essa categoria indica que não conseguimos extrair um significado para as respostas, mas também pode indicar, nesse caso, alguma dificuldade na análise e interpretação de um diagrama espaço-tempo. Como comentário final discutimos brevemente a resposta da aluna A7, colocada na categoria “Justificativa correta”, que apresentou a seguinte explicação: “[...] Segundo Schwarzschild, esse fenômeno acontece graças à incapacidade dos objetos e partículas escaparem do horizonte de eventos [...].” É interessante notar que Schwarzschild nunca propôs a existência de um buraco negro e, na verdade, ele encontrou uma solução para uma estrela com simetria esférica não girante. Contudo, a análise da solução sem a presença de uma estrela central, que não foi realizada por Karl Schwarzschild, leva à análise de um raio intrínseco, chamado de raio

de Schwarzschild. Essa análise envolvendo o raio de Schwarzschild ficou em segundo plano por um longo período. Contudo, em 1939 com os trabalhos de Oppenheimer e Snyder e, no final da década de 1950, com Wheeler e Kruskal a ideia de estrelas que sofrem colapso gravitacional (buracos negros) resultaram em uma compreensão física completa da solução de Schwarzschild (HERDEIRO; LEMOS, 2018b).

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa correta	54,3%	A23: “C. Pois se formos pensar que temos um Cone de Luz sobre o Horizonte de Eventos, qualquer objeto que atravesse esse horizonte para sua região interna não tem como retornar para a região externa, porque para isso ele teria que sair da região limitada pelas linhas de mundo dos pulsos luminosos (Cone de Luz) [...]”	A23: “C. Pois se formos pensar que temos um Cone de Luz sobre o Horizonte de Eventos, qualquer objeto que atravesse esse horizonte para sua região interna não tem como retornar para a região externa, porque para isso ele teria que sair da região limitada pelas linhas de mundo dos pulsos luminosos (Cone de Luz). Além disso, em uma região mais interna, as linhas de mundo sempre tendem a ir para $r = 0$ (singularidade essencial), e lá toda massa é compactada em um único ponto. Assim, como as linhas vão para $r = 0$ , sendo sobre o Horizonte de Eventos ou em sua região interna, eu não posso ter nessa região observadores estacionários.”
Impossibilidade	2,9%	A27: “[...] Somente é possível que existam observadores fora do horizonte de eventos uma vez que a partir deste ponto nada escapa da gravidade que o buraco negro produz.”	A27: “Letra C. Somente é possível que existam observadores fora do horizonte de eventos uma vez que a partir deste ponto nada escapa da gravidade que o buraco negro produz.”
Incoerência na resposta	42,9%	A24: “[...] os observadores da região interna horizontal voltam para o CT.”	A24: “C, porque os observadores da região interna horizontal voltam para o CT.”

Tabela 4.32: Análise das justificativas para a questão 20.

#### 4.7.1.2 Questão 21

Já questão 21 descreve o comportamento do cone de luz sobre o horizonte de eventos e as linhas de mundo de partículas ou as linhas de mundo de pulsos luminosos. A Tabela 4.33 apresenta que 89,5% dos estudantes que marcação a opção correta dada pela letra (d). Dos quatro estudantes que optaram pelas outras alternativas somente um justificou essa escolha, que será analisada em mais detalhes na sequência.

Alternativa	Frequência	Frequência relativa (%)
(a)	1	2,6%
(b)	1	2,6%
(c)	2	5,3%
(d)	34	89,5%

Tabela 4.33: Análise das frequências das respostas para a questão 21.

A Tabela 4.34 apresenta as justificativas dos estudantes para a questão 21. A categoria “Justificativa correta” traz 94,1% dos estudantes que justificaram que a trajetória dada pela curva pontilhada laranja não poderia representar a trajetória de nenhuma partícula material ou pulso luminoso. A categoria “Atravessando o cone” foi criada para a resposta da estudante A25. Aparentemente a estudante não apresentava a compreensão do papel do horizonte de eventos e da superfície do cone de luz que delimita as regiões do espaço-tempo que uma dada partícula ou pulso de luz pode ocupar. A categoria “Incoerência na resposta” mostra respostas que não conseguimos extrair nenhum significado. Por fim, gostaríamos de detalhar a resposta do estudante A16: “D, A linha tracejada preta pode representar uma partícula pois o único caminho possível é para  $r=0$ . A linha vinho representa um pulso luminoso pois se localiza na geratriz (linha mais externa do cone) do cone, que é o caminho que a luz percorre no diagrama espaço-tempo. A linha em laranja representa uma trajetória impossível de ser realizada, pois somente um corpo que se movimenta mais rápido do que a luz, impossível por conta do segundo postulado de Einstein, pode realizar esse caminho.”. O estudante A16 coloca que a linha laranja não pode representar uma trajetória de uma partícula pois, para isso, a partícula deveria possuir uma velocidade maior do que a velocidade da luz e isso violaria o segundo postulado de Einstein da TRR. Classificamos esse tipo de justificativa como correta, mas essa discussão sobre a velocidade da luz na TRG é uma situação interessante e complexa ao mesmo tempo. Logicamente, tanto a questão 20 quanto a questão 21 não pretendiam analisar se a constância da velocidade da luz se mantém na TRG embora tenhamos discutido isso durante as aulas. O trabalho de Bandyopadhyay e Kumar (2010a, p. 020104-9) coloca que a constância da velocidade da luz é algo enraizado nos estudantes que os mesmos levam essa ideia para a TRG. Dessa forma, em uma futura pesquisa seria interessante investigar essa concepção dos estudantes para a velocidade da luz na TRG. Na seção A.6.7 do *texto de apoio* (Apêndice A) e na referência (MACHADO; TORT; ZARRO, 2020) uma discussão

são sobre o diagrama de cone de luz e o traçado dos raios luminosos em um diagrama espaço-tempo são apresentadas em mais detalhes.

Categoria	Frequência (%)	Unidade de Registro	Unidade de Contexto
Justificativa correta	94,1%	A37: “[...] Uma vez na região interna do horizonte de eventos, não há como voltar à região externa (nem mesmo para a luz) [...] a linha tracejada em laranja não pode representar nem a trajetória de um material e nem a trajetória de um raio luminoso.”	A37: “Alternativa D - Uma vez na região interna do horizonte de eventos, não há como voltar à região externa (nem mesmo para a luz). Isso mostra que a linha tracejada em laranja não pode representar nem a trajetória de um material e nem a trajetória de um raio luminoso.”
Atravessando o cone	2,9%	A25: “Letra C, porque o pulso luminoso [...] pela área marcada.”	A25: “Letra C, porque o pulso luminoso ele passa pela área marcada.”
Incoerência na resposta	2,9%	A13: “[...] de modo algum algo pode voltar após atravessar o horizonte de eventos e atingir a região interna ( $r < R$ )”	A13: “D), pois de modo algum algo pode voltar após atravessar o horizonte de eventos e atingir a região interna ( $r < R$ )”

Tabela 4.34: Análise das justificativas para a questão 21.

## 4.8 Artigos publicados

Além dos resultados discutidos anteriormente, esta tese também apresentou alguns resultados qualitativos, quais sejam, a escrita de três artigos científicos. Destacamos que os artigos científicos trazem possíveis inserções da TRG para professores de Física do EM ou futuros professores cursando licenciatura em física. Os trabalhos serão descritos resumidamente a seguir.

O trabalho Machado, Tort e Zarro (2020) faz uma discussão sobre as forças de maré no quadro da MN. O trabalho se justifica pela importância que as forças de maré tem na TRG, elas são a marca indelével do efeito da curvatura do espaço-tempo. Assim, utilizamos nessa discussão a aplicação da equação de movimento para um referencial em queda livre (não-inercial). A primeira situação estudada no artigo consiste em analisar o efeito provocado pela força de maré em uma situação em que um corpo extenso está em queda livre em um campo gravitacional que cresce linearmente com a coordenada radial. Nesse caso, o corpo extenso experimenta um efeito chamado de esmagamento (“squashing”), em que o corpo é comprimido pela ação da força de maré. A segunda situação estudada é semelhante à primeira, porém agora o corpo extenso

está em queda livre submetido a um campo gravitacional que cai com o inverso do quadrado da distância. Nesse caso, o corpo extenso experimenta um efeito chamado de *espaguetificação* (“spaghettification”), em que o corpo é esticado pela ação da força de maré. Por fim, usando uma semelhança entre os resultados previstos pela mecânica newtoniana e pela relatividade geral é estimado o efeito da espaguetificação para o caso de um buraco negro.

O trabalho Machado, Tort e Zarro, (2021) faz uma introdução à relatividade geral utilizando o princípio da equivalência como fio condutor de toda a abordagem. O artigo inicia apresentando uma motivação relacionada ao status privilegiado que os referenciais inerciais possuem na mecânica newtoniana e na relatividade restrita e, também, a proposição de Einstein para estabelecer um princípio da relatividade geral. Na sequência, o princípio da equivalência é apresentado em termos dos referenciais em queda livre e as suas limitações são apresentadas. Então, o princípio da equivalência é generalizado para a sua forma “forte” válido para todos os domínios da física, e a curvatura do espaço-tempo é introduzida apresentando os problemas do desvio gravitacional para o vermelho e do disco girante. Posteriormente, a importância do princípio da equivalência é discutida e um resumo das origens históricas da relatividade geral é apresentada. Após essas discussões, a métrica de Schwarzschild é deduzida a partir do princípio da equivalência e, também, o espaço-tempo ao redor de um buraco negro de Schwarzschild é discutido a partir de uma mudança de coordenadas, as chamadas coordenadas de Painlevé-Gullstrand. Por fim, comentários sobre a formulação da relatividade geral de modo formal são feitos e, embora o princípio da equivalência não seja necessário nessa formulação, ele detém um caráter didático importante.

O trabalho Machado, Tort e Zarro (2024) discute um dos primeiros sucessos da TRG e tem por finalidade servir como texto complementar destinado a alunos mais curiosos e professores do EM sobre a história da TRG. Dessa forma, descreve-se o problema do avanço do periélio de Mercúrio e sua respectiva solução à luz da TRG. O artigo inicia apresentando o triunfo da mecânica newtoniana e discutindo as visões de Descartes e Newton para a descrição do movimento planetário. Na sequência, a penetração da obra de Newton na França é apresentada. Em especial, o artigo traz uma ênfase aos trabalhos de Pierre Simon Laplace e Urbain Le Verrier. A discussão do trabalho de Le Verrier ilustra a descoberta de Netuno devido a irregularidades na órbita de Urano. Também é descrita a tentativa de Le Verrier de completar a descrição do Sistema Solar em termos da mecânica newtoniana corrigindo as anomalias nas órbitas

dos planetas. Entretanto, para a órbita de Mercúrio, existia uma discrepância entre a previsão da mecânica newtoniana e as observações experimentais. De forma semelhante ao realizado para explicar a anomalia na órbita de Urano, Le Verrier propõe a existência de um planeta entre o Sol e o planeta Mercúrio, sendo chamado de Vulcano. Após uma observação do astrônomo amador Edmund Lescarbault, Le Verrier anuncia a descoberta de Vulcano. Porém, durante o grande eclipse de 1878, a observação de Lescarbault não foi confirmada. Dessa forma, a discrepancia entre os resultados teóricos newtonianos e os resultados experimentais para a órbita de Mercúrio permaneceram. Na seção final a teoria da relatividade geral é introduzida e é fornecida uma discussão sobre a solução do problema do avanço do periélio de Mercúrio.

Destacamos, ainda, um quarto trabalho sobre as *estrelas negras* (MACHADO; TORT, 2016) que foi publicado em um período anterior à redação desta tese, mas é pertinente ao nosso tema de pesquisa. O artigo tratou das ideias precursoras de Mitchell e Laplace sobre as estrelas negras. As estrelas negras seriam estrelas cujas massas seriam tão grandes que mesmo a luz não poderia escapar da atração gravitacional associada.

## 4.9 Discussões e respostas às perguntas de pesquisa

Para responder as nossas perguntas de pesquisa, repetidas abaixo por conveniência, nós iremos condensá-las em *vulnerabilidades conceituais* mais amplas que irão abarcar todas as interpretações equivocadas analisadas anteriormente. Essa maneira vai ao encontro da discussão feita na introdução desta Tese que coloca que, possivelmente, as dificuldades para o ensino da TRG estão relacionadas às concepções alternativas de domínios antecedentes, do uso acrítico de conhecimento prévio ou simplesmente da falta de atenção a discriminações conceituais mais refinadas (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010b, p. 140).

- **Quais vulnerabilidades conceituais relatadas na literatura os estudantes do Ensino Médio estão sujeitos a manifestar após a aplicação formal de um curso introdutório de relatividade geral?**
- **Em que medida podemos identificar vulnerabilidades conceituais relacionadas ao conteúdo ainda não relatadas na literatura?**

A categoria “*discriminações conceituais mais refinadas*” representa a primeira *vulnerabilidade conceitual* ampla que nós trataremos. Essas vulnerabilidades são:

1. Dificuldade na distinção entre a descrição de um fenômeno físico e a determinação de uma lei Física (questões 1 até 4);
2. Atribuição aos referenciais inerciais a explicação da indiferença na descrição de um fenômeno físico (questões 1 até 4);
3. Referenciais não-inerciais são mais complexos em relação à escrita das leis físicas, à descrição de fenômenos e à realização de previsões teóricas (questões 1 até 4);
4. Dúvidas sobre a necessidade de confirmação experimental (questões 1 até 4 e questão 7);
5. Não percepção do sutil argumento de Einstein na interpretação da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional tomando o PE como ponto de partida (questão 8);
6. Falta de percepção de como PE resolve o aparente conflito entre o PRG e o problema do vagão que sofre uma freada brusca e, consequentemente, a possibilidade de generalização do PRR (questão 9);
7. Descrição incorreta no caminho percorrido pela luz no referencial acelerado (questão 10);
8. Falta de percepção da necessidade da generalização do PE para a sua *forma forte* para realizar a previsão de que a luz sofre deflexão ao propagar em um campo gravitacional (questão 11);
9. Dúvidas da aplicação correta do PE em um campo gravitacional não uniforme. 18,9% dos estudantes restringiram a aplicação do PE à pequenas regiões espaciais enquanto 10,8% colocaram que as medidas deveriam ser feitas em curtos intervalos de tempo (questão 13);
10. A utilização de jargões (termos técnicos) sem significado para explicar resultados da TRG (questão 14);
11. Não percepção do papel das coordenadas globais na TRG (questão 15);

12. Interpretação equivocada de que somente a interligação do espaço e do tempo na TRG é responsável pela necessidade da utilização das coordenadas globais na descrição de eventos no espaço-tempo curvo da TRG (questão 15);
13. O papel do cone de luz e do horizonte de eventos na compreensão de um diagrama espaço-tempo para um buraco negro (questão 21).

Os itens de 1 até 6 e 8 até 10 elencam as vulnerabilidades conceituais encontradas em uma aplicação de um curso de TRG no EM e coincidem com algumas concepções dos estudantes relatadas nos trabalhos de Bandyopadhyay e Kumar (2010a) e respondem a primeira pergunta de pesquisa. O item 7 e os itens 11 até 13 consistem em *vulnerabilidades conceituais* não relatadas em nossas referências de estudo e respondem a segunda pergunta de pesquisa.

A categoria “*uso acrítico de conhecimento prévio*” traz as seguintes vulnerabilidades:

1. Utilização da refração da luz na tentativa da explicação da deflexão da luz em um campo gravitacional (questão 11);
2. Utilização do paradoxo dos gêmeos e, consequentemente, a dilatação do tempo da TRR para explicar o atraso na marcação do tempo de um relógio devido à ação gravitacional (questão 14);

Os itens 1 e 2 colocados acima se relacionam, a nosso ver, com as duas perguntas de pesquisa visto que os autores Bandyopadhyay e Kumar (2010a) chamam a atenção para o uso de conceitos da TRR na solução de problemas na TRG. Contudo, especificamente, essas duas explicações propriamente ditas não surgiram nos trabalhos dos autores e, dessa forma, acreditamos que as vulnerabilidades conceituais se encaixem mais para a segunda pergunta de pesquisa.

A categoria “*concepções alternativas de domínios antecedentes*” traz as seguintes vulnerabilidades:

1. . De que as leis são independentes do referencial escolhido (questão 2);
2. O campo magnético apresenta a mesma propriedade notável do campo gravitacional e, portanto, a aceleração adquirida por um objeto submetido à ação exclusiva do campo não dependeria da massa e da constituição interna do corpo (questão 6);

3. A igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional é apenas uma conveniência (questão 7);
4. a força de inércia também surge nos referenciais inerciais (questão 9).

Apesar de um quantitativo grande de nossa amostra saber que as leis da Física dependem da escolha do referencial, de que a aceleração de queda livre não depende da massa e da constituição interna de um corpo é exclusiva para o campo gravitacional, de que a igualdade da massa inercial e gravitacional é uma coincidência experimental na MN e que as forças de inércia só aparecem nos referenciais não-inerciais, nós tivemos um pequeno grupo apresentando essas dificuldades. Acreditamos que essas vulnerabilidades relatadas se relacionam mais à nossa segunda pergunta de pesquisa. Na sequência discutiremos brevemente as nossas premissas, repetidas abaixo por conveniência, para o desenvolvimento desta tese.

1. Os alunos do EM podem obter uma compreensão qualitativa de TRG quando fornecidos com recursos de aprendizagem apropriadamente projetados e estrutura suficiente de aprendizagem por meio da interação com professores e colegas (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018);
2. O uso de experimentos de pensamento ajuda a compreender as leis e princípios da Física que exigem alto grau de pensamento abstrato (VELENTZAS; HAL-KIA, 2013);
3. O conhecimento prévio influencia a maneira como os alunos tentam assimilar as novas ideias da relatividade geral (BANDYOPADHYAY; KUMAR, 2010a).

Apesar de nosso trabalho ter como foco identificar as *vulnerabilidades conceituais* que estudantes do EM possuem após um curso introatório da TRG nós também conseguimos extrair importantes informações sobre a compreensão de conceitos e ideias contidas na TRG pelos estudantes. Dessa forma, destacamos abaixo alguns itens que reforçam a nossa primeira premissa acerca da compreensão qualitativa da TRG

- Como a aplicação do PE na interpretação da igualdade entre as massas inercial e gravitacional;
- A aplicação do PE na previsão da deflexão da luz em um campo gravitacional;
- A utilização do PE na generalização do PRR;

- A mudança na passagem do tempo perto de um corpo massivo;

A utilização dos experimentos de pensamento foi outra estratégia central para a apresentação dos conceitos de TRG inclusive na análise e interpretação de manipulações algébricas. Além disso, a explicação do PE em termos dos referenciais em queda livre (questão 12) mostra que os alunos também tendem a utilizar experimentos reais mostrados em sala de aula em suas explicações como na resposta do estudante A5: “pensamento mais feliz da vida de Einstein descreve a equivalência de dois referenciais peculiares [...] Como mostrado em aula um exemplo da garrafa de água com furos em queda livre, a água para de jogar pelos furos e é como se flutuasse dentro da garrafa, o mesmo acontece no elevador, quem está destro do referencial em queda livre sente-se flutuando, da mesma forma que o referencial inercial no espaço. ” que vai ao encontro do resultado apresentado em (KERSTING; HENRIKSEN; BØE; ANGELL, 2018, p. 010130-10). Como mostrado anteriormente, a vulnerabilidade conceitual “concepções alternativas de domínios antecedentes” apresenta uma importante influência na assimilação de novas ideias.

Uma das nossas hipóteses de trabalho estava relacionada à possibilidade dos estudantes de EM realizarem manipulações algébricas simples da métrica do espaço-tempo. A análise anterior das questões 16, 17, 18 e 19 mostra a solução do estudante A5 mostrada na Figura 4.1. Esse estudante, assim como outros, mostrou certa habilidade na solução do problema do desvio gravitacional para o vermelho utilizando a matemática da TRG (manipulação da métrica). Contudo, em nossa amostra também registramos estudantes que reproduziram erros de matemática básica na dedução do desvio gravitacional para o vermelho. Contudo, sentimos a necessidade de ampliar essa análise posteriormente com outras situações que permitam testar o desenvolvimento dessa habilidade e aproximar os estudantes de fato da TRG.

# Capítulo 5

## Conclusão

*Tudo o que é importante é, no fundo,  
totalmente simples.*

---

*John Archibald Wheeler*

Esta tese teve como objetivo introduzir a Teoria da Relatividade Geral (TRG) no Ensino Médio (EM), como forma de instigar os estudantes no estudo desse tema fascinante, e investigar as *vulnerabilidades conceituais* manifestadas nos estudantes após um curso introdutório de TRG. Dessa forma, nossa análise começa com a escolha de quais tópicos nós iríamos discutir e como seria a abordagem. Para isso, foi necessária uma análise dos principais artigos publicados, relacionados ao ensino da TRG, bem como um olhar atento aos livros de introdução à TRG como em Taylor, Wheeler e Bertschinger (2018) e de divulgação das principais ideias da teoria como em Einstein (1999). Dessa forma, um *texto de apoio* foi construído para auxiliar a discussão da TRG em um nível compatível com o EM. Após essa construção voltamos a nossa atenção para a construção de um instrumento avaliativo, chamado de *instrumento de pesquisa*. O *instrumento de pesquisa* foi desenvolvido de modo a sondar as *vulnerabilidades conceituais* dos estudantes. Nossa propósito, contudo, transcendeu uma discussão apenas qualitativa da TRG, em nossa pesquisa percebemos que no trabalho de Kersting, Henriksen, Bœe Angell (2018, p. 010130-14) os estudantes questionavam também sobre abordagens quantitativas. Por isso, após um olhar atento ao livro *Exploring Black Holes* (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018) nós iniciamos uma busca para introduzir abordagens quantitativas da TRG que nós julgamos apropriadas ao EM com uma conexão conceitual importante. Em relação ao *texto de apoio* nós apresentamos a TRG inicialmente tendo como guia os seguintes tópicos: a insatisfação

de Einstein com o *status privilegiado* dos referenciais inerciais, o Princípio da Relatividade Geral (PRG), as diferentes formulações do PE e suas consequências, a introdução da métrica de Schwarzschild e os buracos negros. Dessa forma, iniciamos a discussão da TRG com a insatisfação de Einstein com o *status privilegiado* que os referenciais inerciais apresentavam tanto na Mecânica Newtoniana (MN) quanto na Teoria da Relatividade Restrita (TRR) por meio da análise do Princípio da Relatividade Restrita (PRR). Na sequência essa insatisfação leva à proposição do PRG. A incompatibilidade aparente entre o PRG e experiências cotidianas simples é apresentada. Essa incompatibilidade é, então, o ponto chave para a introdução do Princípio da Equivalência (PE). O PE desfaz a aparente incompatibilidade e guia Einstein na estreita relação entre gravidade e geometria. Para analisar essa relação o *texto de apoio* faz uma discussão extensa do PE com diferentes formulações. Após essa etapa, analisamos as implicações do PE na previsão de dois novos fenômenos: a deflexão da luz e o desvio gravitacional para o vermelho. Na sequência uma discussão é feita acerca das medidas realizadas por um observador em uma plataforma girante, o *paradoxo de Ehrenfest*. A análise desse experimento de pensamento permite perceber a relação entre a gravidade e a alteração da geometria euclidiana. Na sequência, a métrica de Schwarzschild é apresentada como uma solução das equações de Einstein e uma discussão sobre buracos negros é apresentada. A métrica de Schwarzschild é utilizada para que sejam feitas manipulações simples e uma análise quantitativa é realizada. Nessa análise quantitativa nós comentamos um aspecto central para uma correta manipulação da métrica do espaço-tempo que está relacionado ao significado métrico das coordenadas, essa discussão feita de forma simplificada no *texto de apoio* é mostrada com toda a sua profundidade e importância na referência (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018). O *texto de apoio* colocado no Apêndice A ainda traz discussões sobre a TRR, coordenadas curvilíneas e geometria não-euclidiana. Essas discussões visam a preparar o estudante para a discussão da TRG.

Uma parte importante do *texto de apoio* está relacionada a uma discussão sobre os chamados *testes clássicos* da TRG que comprovaram as previsões feitas por Albert Einstein. Essa discussão é apresentada de modo a responder perguntas ou questionamentos de estudantes mais curiosos sobre qual a base experimental para a aceitação de novos fenômenos por parte da comunidade científica. Perguntas com as quais podemos nos deparar em uma aula sobre o tema tais como: “Como nós sabemos disso?”, “Por que acreditamos ou aceitamos isso?” ou “Qual é a base para esta afirmação?” de-

vem ser parte integrante da nossa abordagem. Dessa forma, são apresentados os testes clássicos da precessão do periélio de Mercúrio, a deflexão da luz e o desvio gravitacional para o vermelho. O cálculo do valor para a precessão do periélio de Mercúrio foi apresentado por Einstein em novembro de 1915 quando ele apresenta quatro trabalhos na Academia Prussiana de Ciências e, em seu terceiro trabalho, obtém o valor para precessão do periélio de Mercúrio em acordo com os resultados experimentais da época de aproximadamente 43 segundos de arco por século. A deflexão da luz foi comprovada experimentalmente em 1919 por duas expedições britânicas. A primeira liderada por Arthur Eddington e Edwin Cottingham na ilha de Príncipe, na África e a segunda expedição liderada por Andrew Crommelin e Charles Davidson foi para Sobral localizada no Ceará, no Brasil. Já o desvio gravitacional para o vermelho foi medido em 1960 por Robert Pound e Glen Rebka na Universidade de Harvard. Outro ponto importante que este trabalho pretendeu enfatizar foi a presença de experimentos de pensamento importantes para a discussão de conceitos e ideias centrais da TRG como, por exemplo, na discussão inicial que acerca das ideias que motivaram Einstein na sua busca por generalizar o PRR e propor um PRG. A ênfase na previsão de novos fenômenos a partir de previsões da teoria. Aqui destacamos a utilização do PE para a previsão da deflexão da luz em um campo gravitacional e o desvio gravitacional para o vermelho. Todos esses pontos analisados visam também sempre ilustrar o pioneirismo e a criatividade de Einstein na solução de problemas e na interpretação de novos fenômenos.

A construção do instrumento de pesquisa foi feita para sondar possíveis *vulnerabilidades conceituais* dos estudantes após um curso introdutório de TRG. Dessa forma, foram montadas vinte e uma (21) questões que abordavam diferentes aspectos da TRG. As questões 1 até 4 investigavam se os estudantes sabiam discernir sobre a diferença na descrição de um fenômeno e na determinação de uma lei da Física e, também, sobre a necessidade de comprovação experimental do Princípio da Relatividade Restrita (PRR). A questão 5 tratava do Princípio da Relatividade Geral (PRG) que representa uma generalização do PRR. A questão 6 tratava da aceleração de corpos sujeitos a um campo gravitacional. A questão 7 discutia sobre o conceito das massas inercial e gravitacional. A questão 8 tratava da análise do uso do Princípio da Equivalência (PE) na interpretação da igualdade entre as massas inercial e gravitacional. A questão 9 avalia a utilização do PE na solução do aparente conflito entre o PRG e o exemplo de um vagão que sofre uma brusca freada. A questão 10 analisa a trajetória da luz em um referencial

acelerado e a questão 11 trata da utilização do PE na previsão da deflexão da luz. A questão 12 analisa o PE escrito em termos do referencial em queda livre e a questão 13 trata da limitação do PE em campos gravitacionais não-uniformes. A questão 14 trata da passagem do tempo na TRG. A questão 15 discute o papel das coordenadas e o papel da métrica na TRG. As questões 16, 17, 18 e 19 discutem a utilização da métrica na discussão da passagem do tempo na TRG e o desvio gravitacional para o vermelho e para o azul. As questões 20 e 21 tratam de um diagrama espaço-tempo na presença de um buraco negro de Schwarzschild. Para que pudéssemos interpretar os dados obtidos, que correspondem as justificativas dos estudantes para as questões, utilizou-se a Análise de Conteúdo (AC) para analisar as *vulnerabilidades conceituais* manifestadas pelos estudantes após a aplicação do *instrumento de pesquisa*. Assim, no capítulo 4 (seção 4.9) nós apresentamos uma discussão respondendo as nossas perguntas de pesquisa que visavam a identificar as *vulnerabilidades conceituais* relatadas na literatura e, também as vulnerabilidades não relatadas. Conseguimos condensar, assim como no trabalho de Bandyopadhyay e Kumar (2010), as concepções equivocadas dos estudantes em três categorias maiores: concepções alternativas de domínios antecedentes, do uso acrítico de conhecimento prévio e uma falta de atenção em alguns detalhes conceituais mais refinados em certos domínios da Física. Em relação à primeira vulnerabilidade geral destacamos a falta de clareza na diferença entre descrever um fenômeno físico e determinar uma lei da Física, quando se faz necessária a necessidade de confirmação experimental, a interpretação da igualdade entre as massas inercial e gravitacional tomando o PE como ponto de partida, a aplicação do PE na proposição de PRG, a relação entre a propagação da luz em referenciais acelerados e sob a ação de um campo gravitacional, a aplicação do PE em campos gravitacionais não-uniformes, o papel das coordenadas na TRG e a interpretação de um diagrama espaço-tempo na vizinhança de um buraco negro. Em relação à segunda vulnerabilidade geral ressaltamos a utilização de conhecimentos prévios na tentativa de explicar novos fenômenos. E, por fim, em relação à terceira vulnerabilidade geral apontamos que o conhecimento anterior como o da MN e o Eletromagnetismo também impacta na aprendizagem.

Dessa forma, esperamos que o nosso trabalho possa contribuir com as discussões na tentativa de discutir a TRG de uma maneira consistente no EM. Assim, esperamos poder somar com as iniciativas propostas no Brasil como em (GUERRA; BRAGA; REIS, 2007), (ZAGO, 2018), (CARAGEORGE, 2020) e, também, no mundo como

em (BALDY, 2007), (VELENTZAS; HALKIA, 2013), (WATKINS, 2014), (ZAHN; KRAUS, 2014), (KAUR; BLAIR; (MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017a), (KAUR; BLAIR; MOSCHILLA; STANNARD; ZADNIK, 2017c), (ZAHN; KRAUS, 2018a), (ZAHN; KRAUS, 2018b), (KERSTING; HENRIKSEN; BŒ; ANGELL, 2018), (KERSTING; STEIER, 2018), (KERSTING, 2019), (CHOUDHARY; KRAUS; KERTING; BLAIR; ZAHN; ZADNIK; MEAGHER, 2019), (KERSTING; TOELLNER; BLAIR; BURMAN, 2020) e (KERSTING; BLAIR, 2021)

Em relação às perspectivas futuras, destacamos a seguir algumas iniciativas que já estão sendo planejadas. A primeira consiste no aprimoramento e validação do *instrumento de pesquisa*. Em paralelo à iniciativa anterior pretendemos realizar uma atualização do *texto de apoio* inserindo discussões detalhadas sobre o GPS, os buracos negros girantes, as ondas gravitacionais e a imagem de um buraco negro. Na sequência pretendemos, à luz da literatura em ensino de TRG, desenvolver uma abordagem da TRG sem utilizar a TRR como porta de entrada. E, por fim, publicar artigos que possam ajudar professores que estejam interessados na abordagem da TRG no EM.

# **Apêndice A**

## **Uma introdução à Teoria da Relatividade Restrita e Geral para o Ensino Médio**

### **A.1 Introdução ao texto**

Einstein publica, no final de 1915, a versão final da Teoria da Relatividade Geral (TRG). A TRG é uma teoria da gravitação que descreve o espaço-tempo curvo e o movimento de objetos na vizinhança de um objeto massivo, sendo a TRG indispensável na descrição de campos (gravitacionais) fortes. A beleza e o fascínio produzidos por este assunto capturam a atenção de estudantes e os motivam na busca de compreender a TRG. Entretanto, a TRG é uma teoria matematicamente e conceitualmente desafiadora. Dessa forma, o propósito deste texto é contribuir com um material em que a TRG seja apresentada em um nível compatível com o Ensino Médio e, também, apoiar a pesquisa em ensino da TRG em uma escola federal do Rio de Janeiro. Este texto, chamado aqui de *Texto de Apoio*, procurou conciliar livros de introdução à TRG com a literatura em ensino sobre o tema. A sequência utilizada neste *Texto de Apoio* consiste na apresentação da Teoria da Relatividade Restrita (TRR); uma breve introdução às coordenadas curvilíneas e à geometria não-euclidiana; e a apresentação da Teoria da Relatividade Geral (TRG) com uma aplicação aos buracos negros. Na versão final do texto de apoio retiramos o capítulo de revisão da Mecânica Newtoniana (MN), mas sugerimos que essa revisão ocorra ao longo de um curso de TRG que utilize propostas semelhantes às trazidas neste texto.

## A.2 A Teoria da Relatividade Restrita: postulados e suas implicações

### A.2.1 Os postulados da Teoria da Relatividade Restrita (TRR)

Começaremos com os postulados estabelecidos por Einstein, em uma forma sucinta, como escrevemos atualmente

- (i) Postulado 1: As leis da Física são as mesmas para todos os referenciais inerciais;
- (ii) Postulado 2: A magnitude da velocidade da luz  $c$ , é a mesma para todos os observadores inerciais, não dependendo do estado de movimento da fonte, ou seja,  $c = c'$ .

O primeiro postulado da TRR é uma extensão ao Princípio da Relatividade de Galileu e é chamado de *Princípio da Relatividade Restrita* (PRR). O segundo postulado é a parte revolucionária da TRR, pois o mesmo não está de acordo com as *Transformações de Galileu* (TG) e, também, foge ao nosso senso comum. De acordo com as TG, a velocidade da luz deveria apresentar valores diferentes para observadores em movimento relativo entre si. Entretanto, o segundo postulado da TRR afirma que a velocidade da luz independe do estado de movimento da fonte para um determinado conjunto de observadores. Por isso, um novo conjunto de transformações, que estejam de acordo com o segundo postulado, deve ser obtido. Tais transformações são conhecidas como *Transformações de Lorentz* (TL) e serão obtidas posteriormente.

Inicialmente faremos uma análise lógica dos postulados da TRR utilizando alguns *experimentos de pensamento*<sup>1</sup> para obter os resultados centrais da TRR. Além disso, na dedução dos resultados utilizaremos a hipótese de que o espaço é homogêneo e isotrópico<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Os “experimentos de pensamento”, “experimentos pensados” ou “experimentos mentais” são experimentos imaginados na mente humana os quais, a princípio, não podem ser realizados no laboratório. Os experimentos de pensamento permitem explorar, à luz de alguma teoria, resultados importantes que podem corroborar ou não a favor desta. No presente texto, analisaremos “experimentos” envolvendo luz sendo emitida no interior de um vagão e utilizando os postulados da TRR compararemos os resultados medidos por dois observadores em movimento relativo entre si. Em inglês o termo comumente utilizado para se referir aos experimentos de pensamento é “thought experiments”. A referência (KIOURANIS; SOUZA; SANTIN FILHO, 2010) traz uma interessante discussão sobre o assunto.

<sup>2</sup>O termo *homogêneo* significa que as medidas independem do local em que são realizadas para um referencial inercial. Já o termo *isotrópico* significa que não existe direção privilegiada para a realização das medidas.

Antes de iniciarmos a discussão dos experimentos de pensamento faremos uma breve discussão sobre definições e conceitos importantes para o restante desta seção. Assim, um *referencial* é definido como um sistema de coordenadas - fixo em algum corpo rígido - em que observadores dispondão de régua e relógios podem registrar a posição e o instante de tempo de um dado evento (acontecimento). Na TRR utilizamos os *referenciais inerciais*, que são os referenciais em que a primeira lei de Newton é válida, para a realização das medidas. Dessa forma, se um dado referencial  $S$  é dito inercial, então qualquer referencial que se move com velocidade constante em relação à  $S$  também será. O termo *restrita* na TRR refere-se justamente ao fato da teoria de Einstein dedicar-se ao estudo dos referenciais inerciais. Utilizaremos as letras  $S$  e  $S'$  para designar dois referenciais inerciais, em que  $S'$  se move em relação a  $S$  com velocidade  $v$  constante de acordo com a Figura A.1. Além disso, supomos que em  $t = t' = 0$  as origens de  $S$  e  $S'$  sejam coincidentes. Chamaremos de *configuração padrão* a disposição dos referenciais  $S$  e  $S'$  de acordo com a Figura A.1.

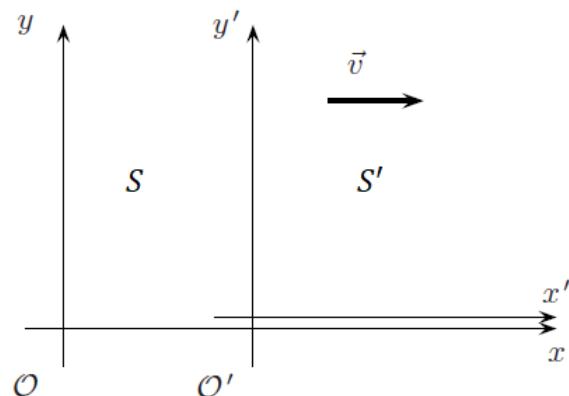


Figura A.1: O referencial  $S'$  tem velocidade constante  $\vec{v}$  em relação ao referencial  $S$ ; os eixos coordenados dos dois sistemas são paralelos e coincidem quando  $t = t' = 0$ .

### A.2.1.1 Eventos

Um dos conceitos centrais na TRR é denominado *evento*. Um evento é um acontecimento qualquer em uma determinada posição e em um dado instante de tempo. É comum, por exemplo, associar um evento a uma explosão, pois ela ocorre em uma determinada posição e em um dado instante de tempo. Para um evento ocorrido, o referencial  $S$  registrará as coordenadas espaciais  $(x, y, z)$  e a coordenada temporal  $t$  (medida com relógios fixos em  $S$ ) e o referencial  $S'$  registrará as coordenadas spa-

ciais  $(x', y', z')$  e a coordenada temporal  $t'$  (medida com relógios fixos em  $S'$ ). Sabemos que na *Mecânica Newtoniana* (MN) os valores de intervalo de tempo medidos por observadores, em referenciais em movimento relativo entre si, são iguais, ou seja,  $\Delta t = \Delta t'$ . Entretanto, queremos investigar por meio dos postulados de Einstein se esse fato também é verdadeiro na TRR. A coordenada espacial e a coordenada temporal de um evento são geralmente chamadas de *coordenadas espaço-temporais*.

### A.2.1.2 Medições

Uma forma interessante de pensar em um referencial consiste em imaginar que ele é formado por um conjunto de réguas horizontais e verticais com relógios posicionados nas interseções - Figura A.2. Observadores podem determinar a posição (por meio da leitura das réguas utilizadas no referencial) e o instante de tempo (por meio dos relógios colocados nas interseções das réguas vertical e horizontal) para um determinado evento.

### A.2.1.3 Sincronização dos relógios

Os relógios em um dado referencial devem estar sincronizados, ou seja, devem apresentar o mesmo valor para a coordenada temporal. Para garantirmos a sincronia deles imagine que exista um relógio principal na origem do sistema de coordenadas e um segundo relógio a uma distância  $r$  da origem. Digamos que a distância entre os relógios seja de 600 m. Se um pulso luminoso for emitido na origem, ele irá demorar um intervalo de tempo para chegar ao segundo relógio. Esse intervalo de tempo é igual à razão entre a *distância do relógio à origem* e a *velocidade da luz*, ou seja,  $\Delta t = 600/(3 \times 10^8) = 2 \times 10^{-6}$  s. Imagine, então, que no instante de tempo em que o pulso de luz é emitido, o relógio na origem inicia a marcação do tempo. Se adiantarmos o relógio na posição  $r = 600$  m em  $2 \times 10^{-6}$  s e iniciarmos a sua marcação de tempo quando o pulso de luz o alcançar garantiremos que ambos os relógios estarão sincronizados. A Figura A.3 ilustra de maneira esquemática o procedimento descrito e pode ser aplicado para qualquer relógio fixo num dado referencial.

## A.2.2 A relatividade do tempo: simultaneidade

A TRR provoca uma ruptura na noção de tempo advinda da MN. O tempo para Newton apresenta um caráter absoluto. Eis aqui um trecho descrito por Newton que

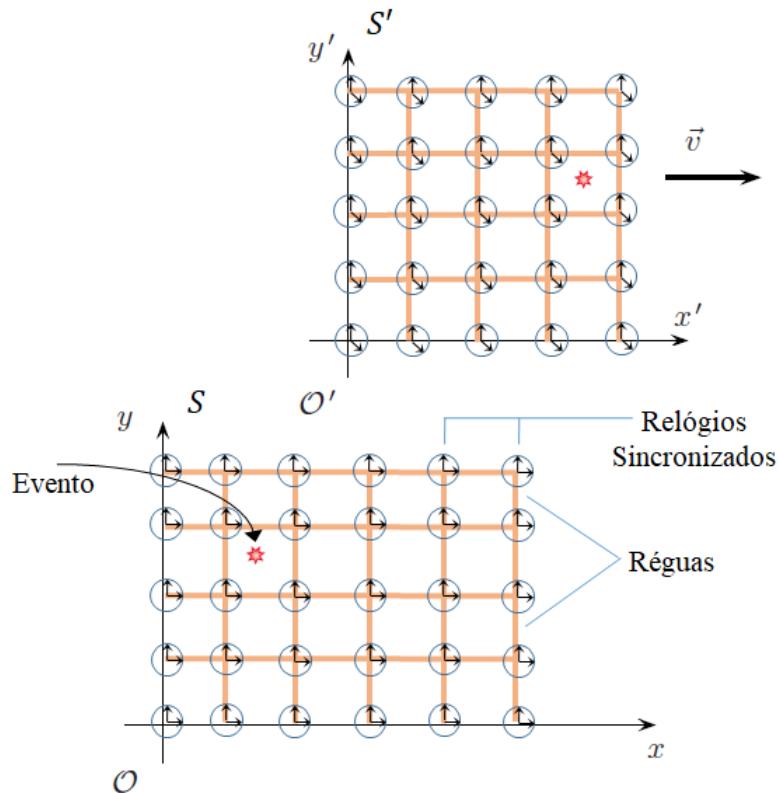


Figura A.2: Referenciais  $S$  e  $S'$  em movimento relativo com réguas dispostas na vertical e na horizontal e relógios sincronizados posicionados na interseção das réguas. Um evento é medido em  $S$  e  $S'$  com o auxílio das réguas e relógios mostrados.

ilustra essa concepção

“O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por si mesmo e por sua própria natureza, flui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa e é também chamado de duração.” (NEWTON, 2016, p. 45).

Analisaremos a seguir como a TRR modifica a noção de tempo absoluto. Seguiremos a referência (SARTORI, 1996) para apresentar a discussão sobre a simultaneidade. Dizemos que dois eventos são simultâneos, em um dado referencial, se eles ocorrem em um mesmo instante. A relatividade da simultaneidade pode ser enunciada da seguinte forma:

- Se dois eventos ocorrem em um mesmo instante de tempo e *na mesma posição* em um dado referencial, então os eventos *serão simultâneos* para qualquer referencial em movimento relativo;

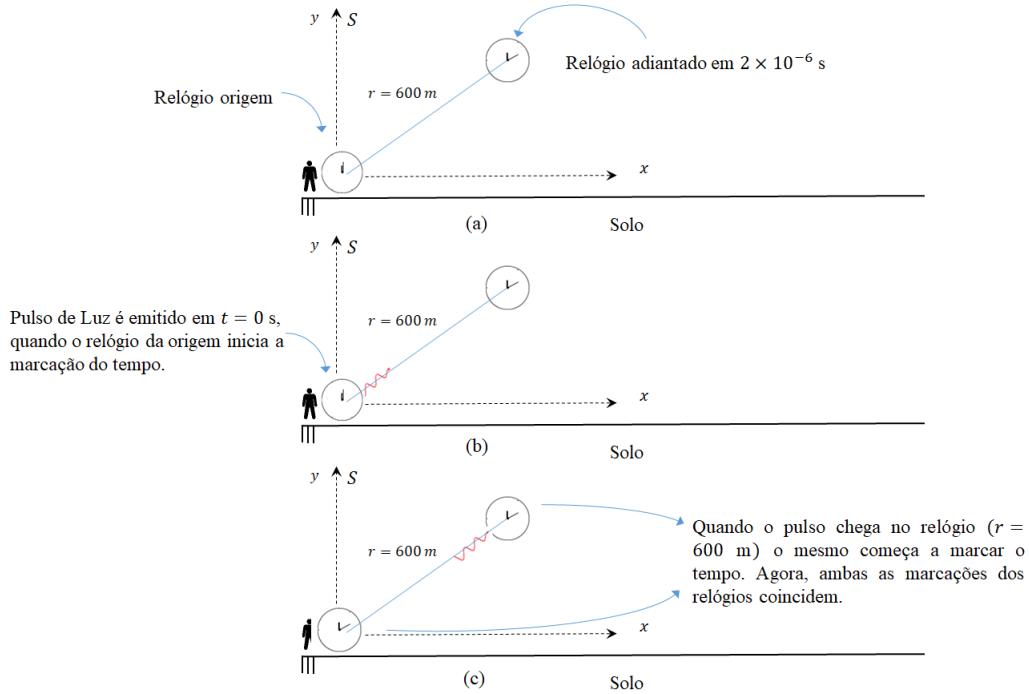


Figura A.3: Sincronização de relógios: (a) Dois relógios separados por uma distância de 600 m a qual o relógio distante da origem é adiantado em  $2 \times 10^{-6} \text{ s}$ , (b) um pulso luminoso é emitido a partir do relógio da origem e o relógio na origem começa a marcar o tempo e (c) o pulso luminoso chega no relógio que dista 600 m da origem e, após a luz atingir o relógio, o relógio distante da origem passa a marcar o tempo e ambos os relógios passam a marcar o mesmo valor para o tempo.

- Se dois eventos ocorrem em um mesmo instante de tempo e em *posições diferentes* em um dado referencial, então os eventos *não serão simultâneos* para qualquer outro referencial em movimento relativo.

Analisaremos o problema da simultaneidade utilizando os postulados da TRR por meio de um *experimento de pensamento*, descrito a seguir. Imagine uma lâmpada no ponto médio M de um vagão (referencial  $S'$ ). A lâmpada emite dois pulsos em sentidos opostos. Associaremos essa emissão ao evento 1. Os pulsos luminosos emitidos propagam-se para a parte traseira (T) e para a parte frontal (F) do vagão alcançando dois detectores posicionados nas extremidades. Associaremos a chegada do pulso na parte traseira do vagão ao evento 2 e a chegada do pulso na parte frontal do vagão ao evento 3. Um relógio posicionado no centro do vagão registra o instante de tempo  $t'_1$  para a emissão dos pulsos luminosos enquanto dois relógios, fixos no vagão, em T e F registram os instantes de tempo  $t'_2$  e  $t'_3$  para a ocorrência dos eventos 2 e 3 respecti-

vamente. A Figura A.4 ilustra a ocorrência dos eventos 1, 2 e 3 para um observador fixo no vagão. Como o ponto médio M do vagão, onde a lâmpada está posicionada, dista a mesma distância da parte traseira e da parte frontal do vagão podemos inferir, utilizando princípio da constância da velocidade da luz (postulado 2), que os instantes de tempo para a ocorrência dos eventos 2 e 3, medidos em  $S'$ , serão iguais. Dessa forma, teremos que

$$t'_2 = t'_3.$$

Assim, concluímos que os eventos 2 e 3 são simultâneos em  $S'$ .

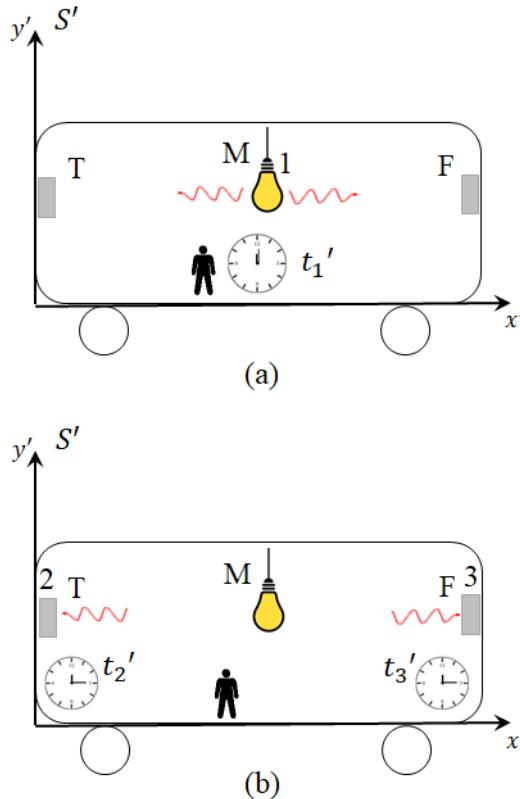


Figura A.4: Eventos medidos por um observador no vagão: (a) dois pulsos luminosos são emitidos no ponto médio do vagão (evento 1) e (b) chegada do pulso luminoso no sensor T (evento 2) e chegada do pulso luminoso no sensor F (evento 3).

Para um observador fixo no referencial  $S$  teremos uma sequência de eventos distinta, ilustrada na Figura A.5. Após o pulso de luz ser emitido no ponto médio, o vagão moveu-se para a direita. Por isso, a luz precisa percorrer um caminho menor para chegar na parte traseira do vagão em comparação ao caminho percorrido pela

luz para chegar na parte frontal dele. Dessa forma, os observadores localizados em  $S$  medirão o instante de chegada  $t_2$  do pulso luminoso na parte traseira do vagão com um valor menor que o instante de chegada  $t_3$  do pulso luminoso na parte frontal dele. Esse resultado indica que os eventos 2 e 3 não serão simultâneos em  $S$  embora sejam simultâneos em  $S'$ , ou seja,  $t_2 < t_3$ .

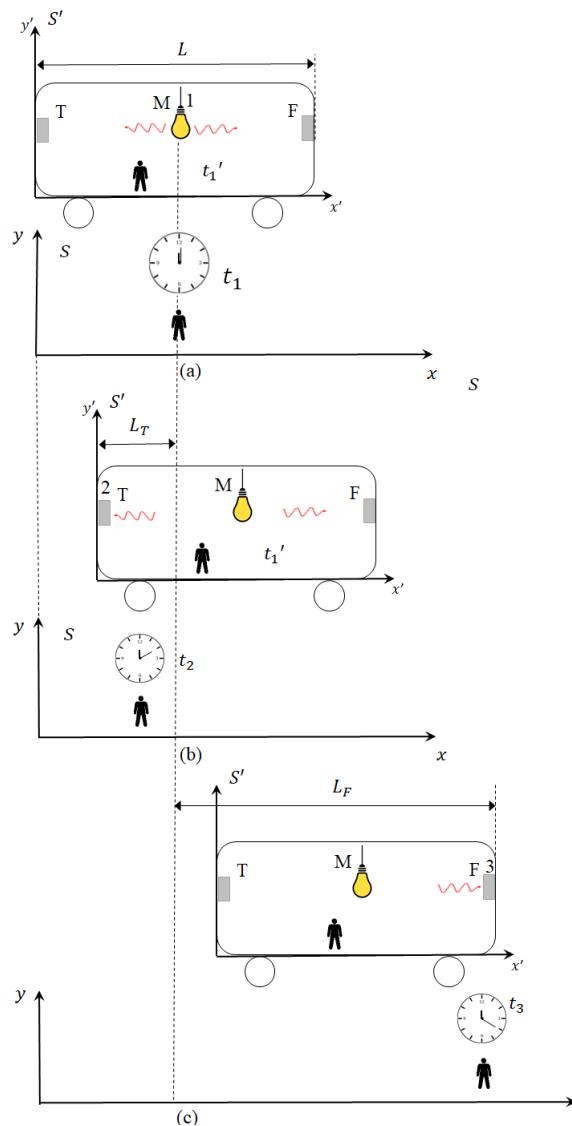


Figura A.5: Eventos medidos por um observador no solo (referencial  $S$ ):(a) pulsos de luz são emitidos no ponto médio do vagão (evento 1), (b) chegada do pulso luminoso no sensor T (evento 2) e (c) chegada do pulso luminoso no sensor F (evento 3).

Podemos mostrar matematicamente o resultado anterior de maneira simples. Sejam

$L$  o comprimento horizontal do vagão;  $L_T$  o caminho percorrido pela luz para chegar na parte traseira; e  $L_F$  o caminho percorrido pela luz para chegar na parte frontal do vagão medidos em  $S$ . Analisando a Figura A.5 e admitindo que o evento 1 ocorreu no instante  $t_1 = 0$  s podemos, lembrando do postulado 2 da TRR, escrever as seguintes equações

$$L_T = ct_2 = L/2 - vt_2$$

e

$$L_F = ct_3 = L/2 + vt_3.$$

Isolando os valores de  $t_2$  e  $t_3$  nas expressões anteriores segue que

$$t_2 = \frac{L/2}{c+v}$$

e

$$t_3 = \frac{L/2}{c-v}.$$

Calculando a razão entre  $t_2/t_3$  obtemos

$$\frac{t_2}{t_3} = \frac{c-v}{c+v} < 1.$$

Logo, o evento 2 ocorre antes do evento 3, ou seja,  $t_2 < t_3$ . Assim, os eventos 2 e 3, que apresentam uma separação espacial, são simultâneos em  $S'$  ( $t'_2 = t'_3$ ), mas não são simultâneos em  $S$  ( $t_2 < t_3$ ). Evidentemente, que eventos podem ser simultâneos em  $S$  e em  $S'$ , mas para que isso ocorra os eventos devem ocorrer em uma mesma posição. Portanto, a *simultaneidade é um conceito relativo* na TRR. Esse resultado mostra uma modificação no resultado previsto pela MN. Na MN a simultaneidade é um conceito absoluto, ou seja, dois eventos simultâneos em  $S$  também serão simultâneos em  $S'$ . Dessa forma, vemos que as previsões da MN e da TRR são distintas.

### A.2.3 A dilatação do tempo

Discutiremos agora a comparação entre intervalos de tempo medidos por observadores localizados em dois referenciais em movimento relativo entre si. A Figura A.6 mostra uma Fonte Luminosa (FL) juntamente com um receptor e um espelho, separados por uma distância  $h$ , fixos em um vagão que denotaremos como referencial  $S'$ .

Um sinal luminoso é emitido pela FL, evento 1, e propaga até o espelho localizado no teto do vagão. O pulso, então, é refletido no espelho e retorna ao receptor<sup>3</sup>, evento 2. No referencial  $S'$ , o intervalo de tempo entre a emissão e a recepção é dado por

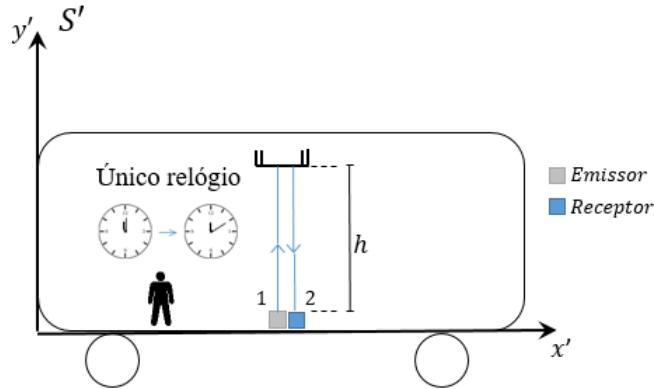


Figura A.6: Eventos observados por um observador no vagão ( $S'$ ): um pulso luminoso é emitido (evento 1) e propaga até o espelho localizado a uma altura  $h$  no teto do vagão. O pulso é, então, refletido e retorna ao receptor (evento 2). Os eventos 1 e 2 ocorrem na mesma posição em  $S'$ .

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}. \quad (\text{A.1})$$

A Figura A.7 ilustra a mesma sequência de eventos vistos por um observador em um referencial  $S$  que observa o vagão (omitido na Figura) movimentando-se para a direita com uma velocidade constante  $v$ . O intervalo de tempo  $\Delta t$  medido pelo observador em  $S$  é dado por,

$$\Delta t = \frac{2\ell}{c}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $2\ell$  representa a distância percorrida pela luz em  $S$  entre a emissão e a recepção do sinal luminoso. Da geometria da Figura A.7 é fácil ver que

$$\ell^2 = \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 + h^2. \quad (\text{A.3})$$

<sup>3</sup>Para fins didáticos nós introduzimos uma pequena separação entre o emissor e o receptor. Essa separação foi feita para que ficasse mais fácil a visualização da trajetória de subida e de descida da luz. Na verdade a luz é produzida no emissor propaga até o espelho refletindo sobre si mesma e descendo até o local de emissão.

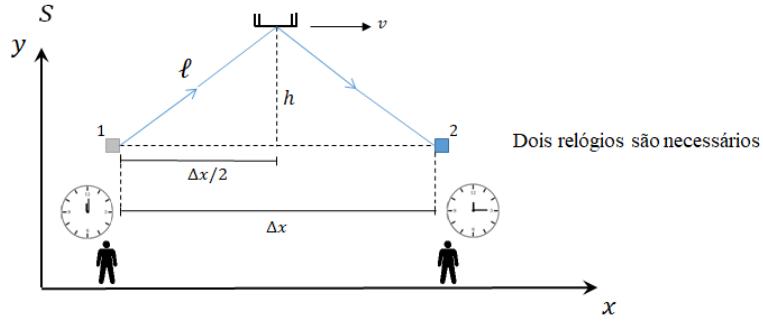


Figura A.7: Eventos vistos por um observador no solo ( $S$ ): um pulso luminoso é emitido (evento 1) e propaga até o espelho, percorrendo uma distância  $\ell$ , sendo, então, refletido e retornando ao receptor (evento 2). A separação horizontal entre os eventos 1 e 2 em  $S$  vale  $\Delta x$ . Para o observador no solo o emissor, o receptor e o espelho se movem para a direita juntamente com o vagão com velocidade constante  $v$ . Os eventos 1 e 2 ocorrem em posições distintas em  $S$ .

Para  $\ell$  e  $\Delta x$  podemos escrever

$$\ell = c \frac{\Delta t}{2}$$

e

$$\frac{\Delta x}{2} = v \frac{\Delta t}{2}.$$

Substituindo as duas relações acima na equação (A.3) segue que

$$\Delta t = \frac{2h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (\text{A.4})$$

Utilizando a equação (A.1) podemos reescrever a equação anterior como

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (\text{A.5})$$

Podemos ainda reescrever a equação (A.5) utilizando o fator de lorentz ( $\gamma$ )

$$\Delta t = \gamma \Delta t', \quad (\text{A.6})$$

onde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ . Como  $v < c$  temos que  $\gamma > 1$  e, assim, observamos que  $\Delta t > \Delta t'$ , ou seja, o intervalo de tempo medido pelos observadores em  $S$  é maior

que o intervalo de tempo medido pelo observador em  $S'$ . O resultado dado pela equação (A.6) é chamado de *dilatação do tempo ou dilatação temporal*. Porém, a dilatação do tempo deve ser interpretada com o devido cuidado, pois ela não afirma que o intervalo de tempo medido em  $S$  é sempre maior que o intervalo de tempo medido em  $S'$ . Caso isso fosse verdade  $S'$  seria privilegiado, pois o intervalo de tempo medido nele seria sempre o menor possível e, assim, entraríamos em conflito com o PRR. Devemos observar que o evento 1 e o evento 2 ocorrem no mesmo local (mesma posição  $x'$ ) para o observador em  $S'$  e, assim, um único relógio é necessário para marcar o intervalo de tempo entre esses dois eventos específicos. Chamaremos de *tempo próprio* o intervalo de tempo entre dois eventos que ocorrem em um mesmo local e podem ser medidos com um único relógio. Representaremos o tempo próprio por  $\Delta\tau$ . Com isso, reescrevemos o resultado da dilatação do tempo utilizando  $\Delta\tau$  para denotar o tempo próprio

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau.$$

Para o observador em  $S$  que registra os eventos ocorrendo em locais (posições) distintos precisamos de dois relógios para fazer a medida do intervalo de tempo. Dessa forma, o enunciado da dilatação temporal fica melhor ilustrado como colocado em (SARTORI, 1996, p. 71).

- O intervalo de tempo entre dois eventos é o menor quando medido em um referencial em que os eventos ocorrem no mesmo lugar (se tal referencial existir). Em qualquer outro referencial, o intervalo entre os eventos é maior por um fator  $\gamma$ .

Em livros de introdução à TRR é comum encontrarmos uma frase sobre o funcionamento de relógios em movimento: *relógios em movimento funcionam devagar*<sup>4</sup>. O Exercício 1 ilustra como comparar as leituras de relógios em movimento com relógios em repouso.

---

**Exercício 1** *Relógios em movimento funcionam devagar.* Imagine um vagão (referencial  $S'$ ) que se move com velocidade  $v$  em relação ao solo de uma estação de trem (referencial  $S$ ). Em um determinado instante um relógio  $A'$ , fixo em  $S'$ , passa por um relógio  $A$  fixo na estação (referencial  $S$ ) e ambos marcam o horário de 12:00 . Qual será a marcação do relógio  $A'$  (em movimento) quando este passar por um segundo

---

<sup>4</sup>O termo em inglês é “moving clocks run slow”.

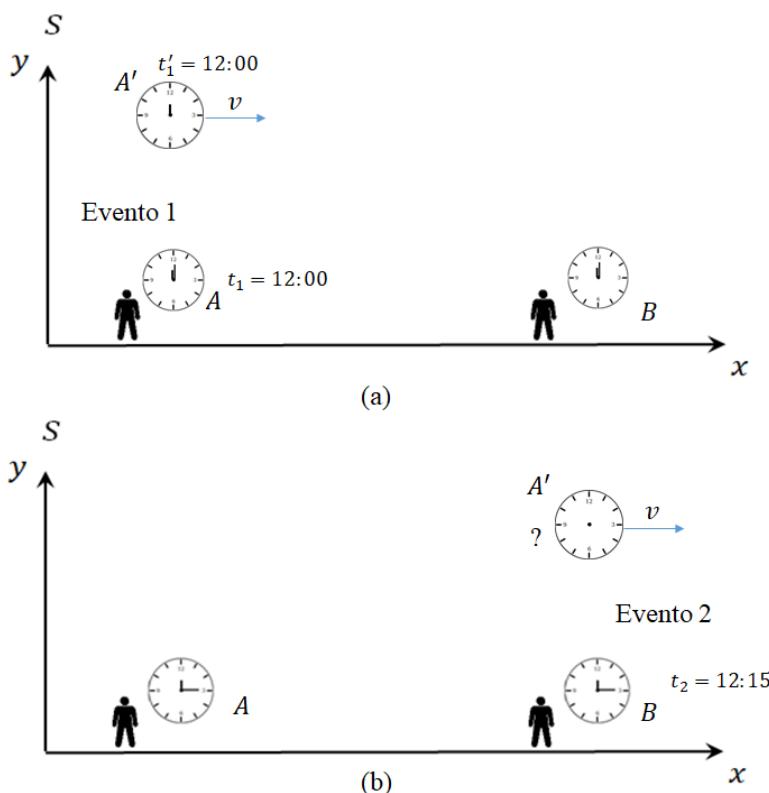


Figura A.8: Comparação de medidas de intervalo de tempo entre um relógio em movimento e dois relógios estacionários: (a) inicialmente um relógio em movimento  $A'$ , fixo em um vagão ( $S'$ ), passa por um relógio  $A$ , fixo em uma estação de trem ( $S$ ), e ambos os relógios registram o horário de 12:00 e (b) o relógio  $A'$  passa por um relógio  $B$ , fixo em uma segunda estação de trem, que registra o valor de 12:15.

relógio  $B$ , fixo em uma segunda estação de trem que apresenta a marcação de 12:15 como mostrado na Figura A.8? Compare o resultado obtido com a frase “relógios em movimento funcionam devagar”. ■

Podemos sintetizar o resultado obtido para a *dilação do tempo* percebendo que se o intervalo de tempo próprio for medido em  $S'$  escrevemos  $\Delta t = \gamma \Delta t'$  e se o intervalo de tempo próprio for medido em  $S$  escrevemos  $\Delta t' = \gamma \Delta t$ . Destacamos, ainda, que a afirmação sobre o funcionamento de relógios em movimento refere-se à passagem do tempo ser mais lenta para observadores em movimento quando comparada à passagem do tempo para observadores fixos. Resolvendo o exercício 1 perceberemos que o relógio  $A'$  irá atrasar em relação aos relógios estacionários  $A$  e  $B$ . Como a medida

dessa passagem do tempo é realizada, normalmente, com relógios incluímos os mesmos no enunciado da dilatação do tempo utilizando o *slogan*: “*relógios em movimento funcionam mais devagar*”.

#### A.2.4 A contração de Lorentz

Nessa seção iremos comparar a medida de comprimento em dois referenciais em movimento relativo. Considere um vagão em movimento em relação ao solo como mostrado na Figura A.9. No vagão temos uma FL, um receptor e um espelho. A FL e o receptor estão fixos na parte da traseira do vagão enquanto o espelho está fixo na parte frontal do vagão. O referencial  $S'$  está fixo no vagão e um observador no vagão analisa a seguinte sequência de eventos: emissão de um pulso luminoso (evento 1), reflexão do pulso luminoso no espelho (evento 2) e chegada do pulso luminoso no receptor (evento 3). Essa sequência de eventos é vista na Figura A.9.

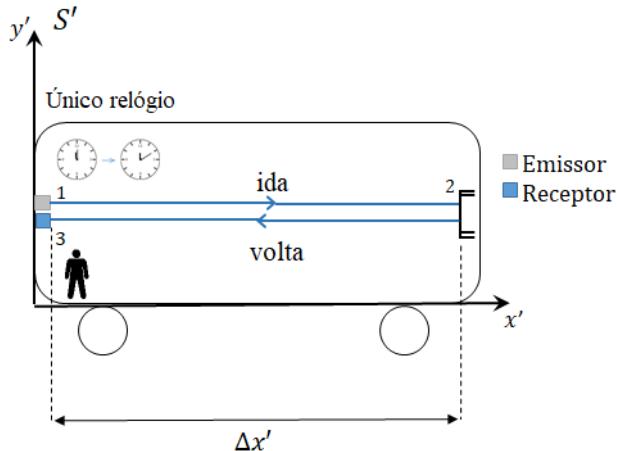


Figura A.9: Sequência de eventos visto por um observador em  $S'$ : o pulso de luz é emitido (evento 1) e propaga ao longo da direção horizontal sendo refletido no espelho (evento 2) e retornando ao receptor (evento 3).

Do ponto de vista de  $S'$  o intervalo de tempo entre os eventos 1 e 3 é dado por

$$\Delta t' = \frac{2\Delta x'}{c}, \quad (\text{A.7})$$

onde  $\Delta x'$  representa o comprimento do vagão no referencial  $S'$  (referencial de repouso do vagão).

A determinação do intervalo de tempo ( $\Delta t$ ), entre os eventos 1 e 3, em relação a

um referencial fixo no solo  $S$  é um pouco mais complicada. Em relação ao referencial  $S$ , o vagão se move para a direita com velocidade constante. Então, dividiremos o cálculo do intervalo de tempo em duas partes:  $\Delta t_{1-2}^{ida}$  representa o intervalo de tempo entre a emissão do pulso de luz e a reflexão dele no espelho; e  $\Delta t_{2-3}^{volta}$  representa o intervalo de tempo entre a reflexão do pulso e a chegada dele no receptor. O tempo total  $\Delta t$  entre os eventos 1 e 3 em  $S$  é escrito como

$$\Delta t = \Delta t_{1-2}^{ida} + \Delta t_{2-3}^{volta}. \quad (\text{A.8})$$

A Figura A.10 ilustra a sequência de eventos 1, 2 e 3 vista por um observador em  $S$ . O intervalo do tempo para a ida, do pulso luminoso, pode ser expresso, analisando a Figura A.10, da seguinte forma

$$c\Delta t_{1-2}^{ida} = \Delta x + v\Delta t_{1-2}^{ida}, \quad (\text{A.9})$$

onde  $\Delta x$  representa o comprimento do vagão em  $S$  e  $v$  a velocidade do vagão em relação ao solo ( $S$ ). Isolando  $\Delta t_{1-2}^{ida}$  segue que

$$\Delta t_{1-2}^{ida} = \frac{\Delta x}{c - v}. \quad (\text{A.10})$$

Já o intervalo de tempo para a volta é dado pela seguinte expressão

$$c\Delta t_{2-3}^{volta} = \Delta x - v\Delta t_{2-3}^{volta}. \quad (\text{A.11})$$

Isolando  $\Delta t_{2-3}^{volta}$  segue que

$$\Delta t_{2-3}^{volta} = \frac{\Delta x}{c + v}. \quad (\text{A.12})$$

Logo, o tempo total ( $\Delta t$ ) referente a viagem de ida e volta é dado por,

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c - v} + \frac{\Delta x}{c + v}. \quad (\text{A.13})$$

Com um pouco de álgebra pode-se mostrar que

$$\Delta t = \frac{2\Delta x/c}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}. \quad (\text{A.14})$$

Os eventos 1 e 3 acontecem no mesmo local para  $S'$  (um único relógio é necessário

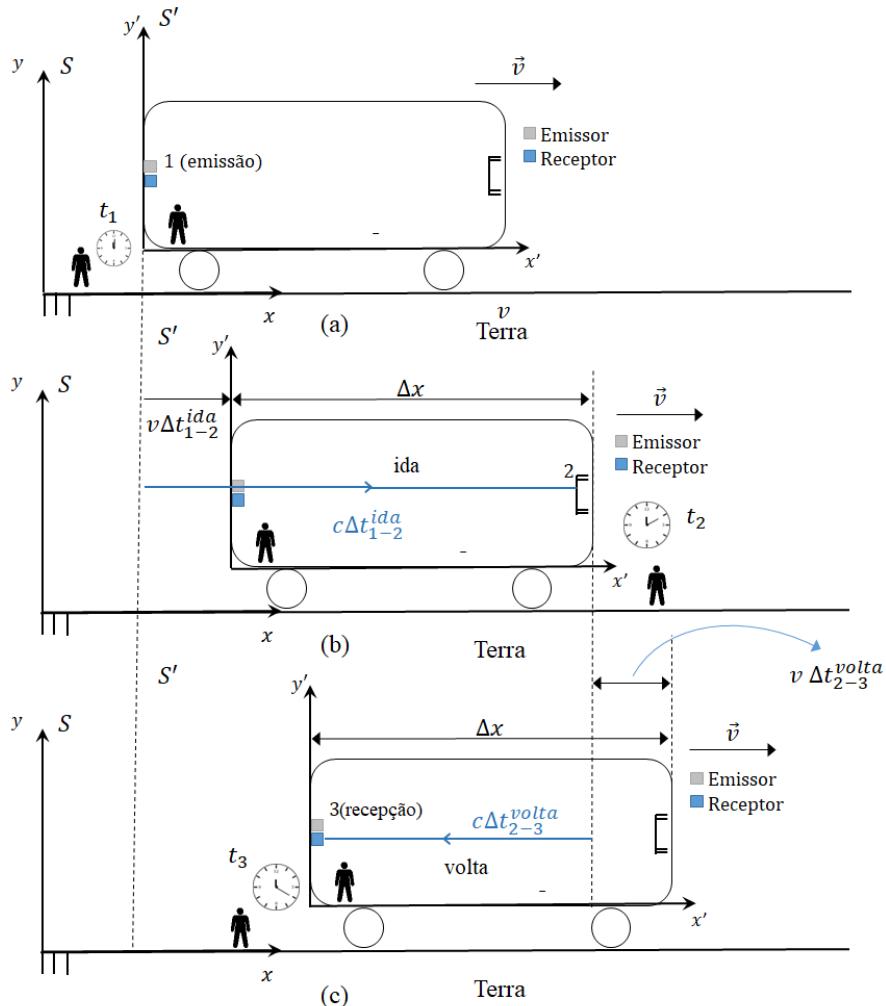


Figura A.10: Sequência de eventos visto por um observador em  $S$ : (a) o pulso de luz é emitido (evento 1), (b) o pulso propaga ao longo da direção horizontal e atinge o espelho (evento 2) e (c) o pulso de luz retorna e atinge o receptor (evento 3).

para a medição) - ver Figura A.9. Logo,  $\Delta t'$  e  $\Delta t$  estão relacionados pela dilatação do tempo dado pela equação (A.6), ou seja,

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{A.15})$$

Logo, levando (A.15) em (A.14) obtemos

$$\Delta t' = \frac{2\Delta x/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{A.16})$$

Levando a equação (A.7) em (A.16) segue que

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta x. \quad (\text{A.17})$$

Reescrevendo a equação acima temos

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}. \quad (\text{A.18})$$

A equação (A.18) descreve a chamada *contração de Lorentz* ou *contração do comprimento*, mostrando a contração de um corpo rígido na *direção do movimento*. Aqui, ela foi deduzida como consequência dos postulados da TRR. Assim, o comprimento de objetos é o maior possível quando medido no referencial de repouso do objeto. No nosso exemplo, o comprimento do vagão em  $S'$  é maior que o comprimento do vagão medido em  $S$ , ou seja,  $\Delta x' > \Delta x$ . O comprimento de um objeto medido no seu referencial de repouso é chamado de *comprimento próprio*.

---

**Exercício 2** *Uma maneira alternativa para a medida de comprimento.* Um observador em  $S$  (referencial do solo) registra um intervalo de tempo  $\Delta t$  para a passagem das extremidades dianteira e traseira de um vagão por ele. Suponha que o vagão se move para a direita em relação a  $S$ . Determine a relação entre o comprimento do vagão  $\Delta x$  medido em  $S$  e o comprimento do vagão  $\Delta x'$  em  $S'$  (referencial de repouso do vagão).

■

---

Podemos enunciar a *contração do comprimento* ou *contração de Lorentz* da seguinte forma (SARTORI, 1996, p. 85):

- O comprimento de objetos é o maior possível quando medido no referencial de repouso do objeto. Em qualquer outro referencial, o comprimento medido será menor por um fator igual a  $\gamma$ .

Podemos sintetizar o resultado obtido para a *contração do comprimento* da seguinte forma: se o comprimento próprio for medido em  $S'$  escrevemos  $\Delta x = \Delta x'/\gamma$  e se o comprimento próprio for medido em  $S$  escrevemos  $\Delta x' = \Delta x/\gamma$ .

### A.2.5 As Transformações de Lorentz

As Transformações de Lorentz (TL) estabelecem uma relação entre eventos medidos em dois referenciais inerciais em movimento relativo entre si e irão substituir as TG que são usadas na MN. Essas transformações devem ser compatíveis com os postulados da TRR e, partir delas, poderemos mostrar todos os resultados obtidos anteriormente tais como a relatividade da simultaneidade, a dilatação do tempo e a contração do comprimento. Faremos uma dedução das TL utilizando a dilatação do tempo e a contração do comprimento. Considere dois referenciais inerciais na configuração padrão como mostrado na Figura A.11. Considere também um ponto  $P$  no espaço, onde observadores em seus respectivos referenciais determinam as coordenadas espaciais de  $P$ . Do ponto de vista do referencial  $S$  podemos escrever

$$x = vt + x'_{visto\ de\ S}, \quad (\text{A.19})$$

onde  $x$  e  $x'_{visto\ de\ S}$  são as abscissas do ponto  $P$  em relação ao referencial  $S$ . Mas, em razão da contração de Lorentz podemos relacionar  $x'_{visto\ de\ S}$  e  $x'_{visto\ de\ S'}$ :

$$x'_{visto\ de\ S} = \frac{x'_{visto\ de\ S'}}{\gamma} \quad (\text{A.20})$$

Substituindo a equação (A.20) na equação (A.19) e fazendo  $x'_{visto\ de\ S'} = x'$  temos

$$x = vt + \frac{x'}{\gamma}, \quad (\text{A.21})$$

Reescrevendo a equação acima segue que

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (\text{A.22})$$

onde a equação (A.22) é a primeira de um conjunto de quatro equações que constituem as chamadas TL.

Se agora utilizarmos o PRR e analisarmos a situação do ponto de vista do referencial  $S'$ , Figura A.12, teremos

$$x' = -vt' + x'_{visto\ de\ S'}. \quad (\text{A.23})$$

Novamente, devido à contração de Lorentz

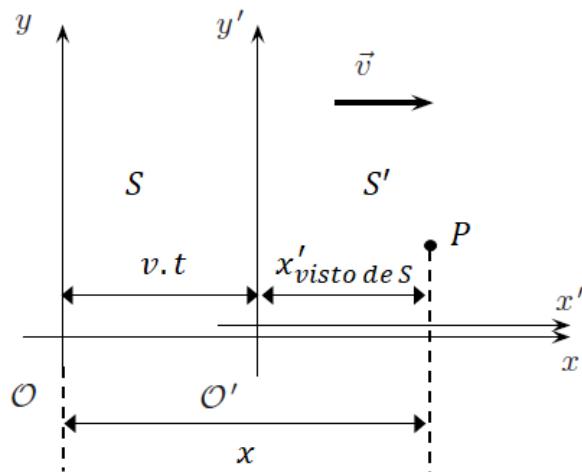


Figura A.11: Dedução das TL: referencial  $S'$  movendo-se com velocidade constante  $v$  para a direita em relação à  $S$ . A coordenada  $x$  representa a coordenada horizontal medida em  $S$  para o ponto  $P$ ; o valor  $vt$  representa a distância percorrida pelo referencial  $S'$  em relação à  $S$ ; e a coordenada  $x'_{visto\ de\ S}$  representa a distância de  $O'$  até  $P$  em  $S$ .

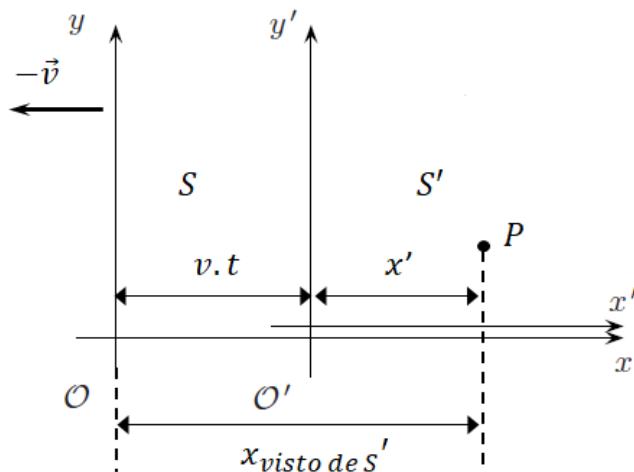


Figura A.12: Dedução das TL: como o movimento é relativo, do ponto de vista de  $S'$  quem está se movendo (para a esquerda) é o referencial  $S$ . O referencial  $S$  movendo-se com velocidade constante  $-v$  para a esquerda em relação à  $S'$ . A coordenada  $x'$  representa a coordenada horizontal medida em  $S'$  para o ponto  $P$ ; o valor  $v \cdot t$  representa a distância percorrida pelo referencial  $S$  em relação à  $S'$ ; e a coordenada  $x_{visto\ de\ S'}$  representa a distância de  $O$  até  $P$  em  $S'$ .

$$x_{visto\ de\ S'} = \frac{x_{visto\ de\ S}}{\gamma} \quad (\text{A.24})$$

Reescrevendo a equação (A.23) em termos da equação (A.24) e fazendo  $x_{visto\ de\ S} = x$  segue que

$$x = \gamma(x' + vt'). \quad (\text{A.25})$$

Se agora combinarmos as equações (A.22) e (A.25) e eliminarmos  $x'$ , obteremos

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right), \quad (\text{A.26})$$

que é a segunda equação de um total de quatro equações que constituem as TL. As transformações para os eixos  $y', y$  e  $z', z$  são trivialmente escritas, analisando a Figura A.11, pois  $y' = y$  e  $z' = z$ . Logo, as TL, que relacionam as coordenadas espaço-temporais entre os referenciais  $S'$  e  $S$ , são escritas como

$$x' = \gamma(x - vt); \quad (\text{A.27})$$

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right); \quad (\text{A.28})$$

$$y' = y; \quad (\text{A.29})$$

$$z' = z. \quad (\text{A.30})$$

Se conhecermos as coordenadas  $(x, y, z, t)$  em  $S$  de um determinado evento, podemos utilizar as TL para determinar as coordenadas  $(x', y', z', t')$  em  $S'$  para o mesmo evento.

Podemos, também, a partir do conhecimento das coordenadas  $(x', y', z', t')$  em  $S'$  determinar as coordenadas  $(x, y, z, t)$  em  $S$  para um dado evento. Essas transformações são chamadas de *Transformações de Lorentz Inversas* (TLI). As TLI são escritas da seguinte forma

$$x = \gamma(x' + vt'); \quad (\text{A.31})$$

$$t = \gamma \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right); \quad (\text{A.32})$$

$$y = y'; \quad (\text{A.33})$$

$$z = z'. \quad (\text{A.34})$$

A primeira equação, para as TLI, foi obtida anteriormente, equação (A.25). Para determinarmos a transformação inversa para o tempo podemos combinar as equações (A.22) e (A.25) e após eliminar  $x$  chegamos na equação (A.32). Supomos para as próximas duas subseções que tenhamos dois referenciais  $S$  e  $S'$  na configuração padrão.

Relacionaremos as medidas realizadas em  $S$  e  $S'$  utilizando as TL e revisitaremos os resultados obtidos para a dilatação do tempo e para a contração de Lorentz.

### A.2.5.1 Dilatação do tempo revisitado

Lembramos que o tempo próprio, entre dois eventos, é aquele medido por um único relógio. Imagine que um observador em  $S'$  carregue um relógio A, sendo a abscissa da coordenada onde o relógio está localizado igual a  $x'_A$ . O relógio A registra a marcação de dois eventos de coordenadas  $(x'_A, t'_1 = t')$  e  $(x'_A, t'_2 = t' + \Delta\tau)$ . Os eventos em  $S'$  ocorrem na mesma posição, mas estão espaçados no tempo por um valor  $\Delta\tau$ . Podemos utilizar as TLI, equação (A.32), para relacionar os instantes de tempo para os eventos 1 e 2

$$t_1 = \gamma \left( t'_1 + \frac{vx'_A}{c^2} \right)$$

e

$$t_2 = \gamma \left( t'_2 + \frac{vx'_A}{c^2} \right).$$

Subtraindo as equações acima segue que

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1).$$

Fazendo  $\Delta t = t_2 - t_1$  e  $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \Delta\tau$  temos

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau.$$

Como  $\gamma > 1$  temos que  $\Delta\tau < \Delta t$ . Esse resultado, como já visto anteriormente, é chamado de dilatação do tempo.

### A.2.5.2 Contração de Lorentz revisitado

Suponha que uma barra esteja em repouso em relação ao referencial  $S'$  e que as coordenadas de suas extremidades, A e B, sejam dadas por  $x'_A$  e  $x'_B$  como mostrado na Figura A.13. Como a barra está em repouso em relação a  $S'$ , as coordenadas  $x'_A$  e  $x'_B$  são constantes no tempo. Entretanto, para  $S$  as extremidades A e B da barra estão em movimento e, por isso, as coordenadas  $x_A(t)$  e  $x_B(t)$  variam no tempo. Dessa forma, para que o comprimento da barra seja efetivamente medido em  $S$ , as medidas das posições para as extremidades da barra devem ser feitas *em um mesmo instante de tempo*,

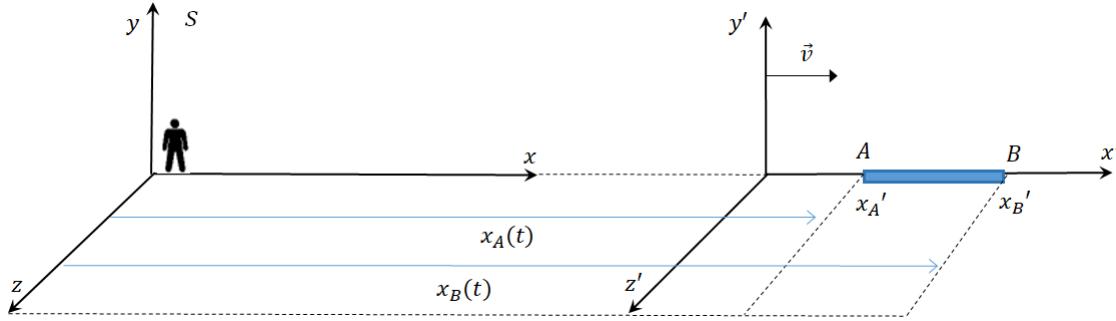


Figura A.13: Um barra  $AB$  fixa no referencial  $S'$  se move com velocidade constante  $v$  em relação ao referencial  $S$ . Os termos  $x_A(t)$  e  $x_B(t)$  representam as coordenadas das extremidades da barra  $AB$  medidas em  $S$  enquanto  $x'_A$  e  $x'_B$  representam as coordenadas das extremidades da barra  $AB$  em  $S'$ .

ou seja, as medidas devem ser simultâneas. Se, entretanto, as coordenadas  $A$  e  $B$  fossem medidas em instantes diferentes não estaríamos determinando o comprimento da barra em  $S$ . Para  $S'$  é indiferente se a medida é realizada em instantes de tempo idênticos ou não, pois as coordenadas  $x'_A$  e  $x'_B$  são constantes no tempo. Utilizando as TL para determinar as coordenadas  $A$  e  $B$ , equação (A.31), temos

$$x'_A = \gamma(x_A - vt_A)$$

e

$$x'_B = \gamma(x_B - vt_B).$$

Fazendo  $t_A = t_B$  (eventos simultâneos em  $S$ ) e subtraindo as equações acima segue que

$$x'_B - x'_A = \gamma(x_B - x_A).$$

Considerando  $\Delta x' = x'_B - x'_A$  e  $\Delta x = x_B - x_A$  podemos reescrever a equação anterior da seguinte forma

$$\Delta x' = \gamma \Delta x$$

ou

$$\Delta x = \Delta x' / \gamma.$$

Como  $\gamma > 1$  temos que  $\Delta x < \Delta x'$ . O comprimento  $\Delta x$  medido em um referencial

em que a barra está em movimento é menor do que o comprimento  $\Delta x'$  medido em um referencial em que a barra está em repouso. Como já mencionado, esse resultado é chamado de contração de Lorentz ou contração do comprimento.

Como último comentário ressaltamos que a contração de Lorentz somente ocorre para comprimentos medidos na direção de movimento. Comprimentos perpendiculares à direção de movimento, eixos  $y$  e  $z$  no nosso exemplo, não sofrem contração. Assim, estabelecemos aqui o seguinte enunciado

- Comprimentos transversais (perpendiculares) à direção do movimento não sofrem contração e apresentam a mesma medida em  $S$  e  $S'$ .

#### A.2.5.3 Transformações de Lorentz para a velocidade

Podemos também relacionar as velocidades que observadores fixos em  $S$  e  $S'$  determinam para um objeto que se move em relação a ambos os referenciais. As transformações, que relacionam as velocidades de um objeto em  $S$  e  $S'$ , são chamadas de Transformações de Lorentz para a Velocidade (TLV). Para evitar confusão com a notação, pois utilizamos a letra  $v$  para designar a velocidade de  $S'$  em relação a  $S$ , chamaremos a velocidade de um objeto medida em  $S$  de  $\vec{u}$  e a velocidade de um objeto medida em  $S'$  de  $\vec{u}'$ . A forma para calcularmos a velocidade na TRR é semelhante à maneira utilizada na MN. Podemos também escrever a velocidade em termos das componentes  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$  em  $S$  e  $u'_x$ ,  $u'_y$  e  $u'_z$  em  $S'$ . As componentes para a velocidade de um objeto medido em  $S$  e  $S'$  são dadas, respectivamente, pelas seguintes expressões

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}; u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}; u_z = \frac{\Delta z}{\Delta t};$$

e

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}; u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}; u'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'}.$$

Deixaremos como exercício para o leitor a determinação da relação entre as componentes para as velocidades medidas em  $S$  e  $S'$ .

---

**Exercício 3** *Transformações de Lorentz para a velocidade.* Obtenha as TL para as três componentes da velocidade,  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ , de um ponto material. Suponha que o referencial  $S'$  tenha velocidade constante  $\vec{v}$  ao longo do eixo horizontal em relação ao

referencial  $S$ , e que os eixos coordenados dos dois sistemas sejam paralelos, veja a Figura A.1. Você deve obter

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}};$$

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{u_y}{1 - \frac{v u_x}{c^2}};$$

$$u'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{u_z}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}.$$

Dica: Você deve utilizar as TL para substituir  $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$ ,  $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)$ ,  $\Delta y' = \Delta y$  e  $\Delta z' = \Delta z$ .

Mostre para o caso limite  $v u_x / c^2 \ll 1$  (baixas velocidades) que as equações acima resultam nas transformações de Galileu para a velocidade. Utilize a seguinte aproximação  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , se  $|x| \ll 1$ . Você deve obter

$$u'_x = u_x - v;$$

$$u'_y = u_y;$$

$$u'_z = u_z.$$

■

**Exercício 4** Um pulso luminoso é emitido em  $S$  com velocidade  $c$  no sentido positivo do eixo  $x$ . Utilizando as TLV, determine a velocidade desse mesmo pulso visto do referencial  $S'$  que se move com velocidade  $v$ , ao longo do eixo  $x$ , em relação a  $S$ . ■

O exercício 4 apresentará o resultado que a velocidade da luz medida em  $S'$  também será  $c$ . Esse resultado está em acordo com o segundo postulado da TRR, afirmando que a velocidade da luz independe do estado de movimento da fonte. Assim, o resultado do exercício 4 mostra que as TLV estão de acordo com os postulados da TRR. Entretanto, caso utilizássemos as TG para a velocidade, poderíamos mostrar que essas transformações estão em desacordo com o postulado 2 da TRR.

### A.2.6 Efeito Doppler

O efeito Doppler da luz ocorre quando há movimento relativo entre um observador e uma fonte luminosa. O movimento relativo entre a fonte e o observador faz com que a frequência da luz emitida pela fonte e a frequência da luz medida pelo observador sejam diferentes. Para ilustrar a alteração na frequência percebida pelo observador, imaginemos dois referenciais  $S$  e  $S'$  na configuração padrão. Uma fonte de luminosa (FL) em repouso em  $S$ , emite ondas luminosas de frequência  $f_{FL}$ . Um observador R, fixo em  $S'$ , se move com velocidade constante  $v$  em relação à FL. O observador R mede uma frequência  $f'_R$  para as ondas luminosas recebidas. Podemos pensar na frequência de uma onda como o número de cristas recebidas por unidade de tempo. A Figura A.14 ilustra as frentes de onda (representadas por cristas) sendo emitidas pela FL em  $S$  e sendo recebidas pelo observador R.

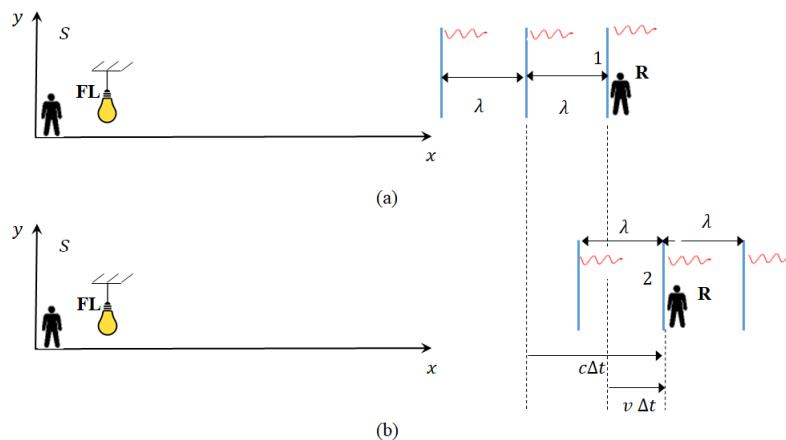


Figura A.14: (a) Um observador R, movimentando-se em relação a uma fonte de luz estacionária em  $S$ , recebe a primeira frente (linha azul) de onda (evento 1) e (b) o observador R recebe a segunda frente de onda (evento 2).

Analizando a Figura A.14 obtemos

$$c\Delta t = \lambda + v\Delta t,$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda<sup>5</sup> da luz medido no referencial  $S$ . Isolando  $\Delta t$  da

---

<sup>5</sup>Para mais informações consultar [https://pt.wikipedia.org/wiki/Comprimento\\_de\\_onda](https://pt.wikipedia.org/wiki/Comprimento_de_onda)

expressão anterior, obtemos

$$\Delta t = \frac{\lambda}{c - v}.$$

Lembrando da equação fundamental da ondulatória para a luz  $c = \lambda f$  segue que

$$\Delta t = \frac{1}{f_{FL}(1 - v/c)}. \quad (\text{A.35})$$

Podemos reescrever a expressão acima relacionando os intervalos de tempo medidos por um observador em  $S$  (referencial de repouso da FL) e pelo observador  $R$  (em repouso em relação a  $S'$ ). Os eventos 1 e 2 ocorrem em um mesmo local para  $R$  (medido com um único relógio), de modo que o resultado obtido a partir da dilatação do tempo, equação (A.6), pode ser escrito como

$$\Delta t = \gamma \Delta t'.$$

Se relacionarmos  $\Delta t'$  com o período da onda medido em  $S'$ , podemos escrever que  $f'_R = 1/\Delta t'$ . Combinando esse resultado com a equação (A.35) obtemos

$$\frac{1}{f'_R} = \frac{1}{\gamma f_{FL}(1 - v/c)} \quad (\text{A.36})$$

ou

$$f'_R = \gamma f_{FL}(1 - v/c) = f_{FL} \frac{(1 - v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (\text{A.37})$$

Podemos inserir o termo  $(1 - v/c)$  dentro da raiz, elevando o mesmo ao quadrado, e lembrar que  $(1 - v^2/c^2) = (1 - v/c)(1 + v/c)$ . Assim, podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma

$$f'_R = f_{FL} \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad (\text{afastamento}), \quad (\text{A.38})$$

onde a equação acima é válida quando há afastamento entre o observador e a FL. Podemos mostrar que quando há aproximação entre o observador e a FL a expressão se escreve como

$$f'_R = f_{FL} \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (\text{aproximação}). \quad (\text{A.39})$$

**Exercício 5** Mostre que para  $v/c \ll 1$  (velocidades não relativísticas) que as equações (A.38) e (A.39) se reduzem a

$$f'_R = f_F L(1 \pm v/c),$$

onde o sinal de  $(-)$  indica afastamento entre o observador e a FL e o sinal de  $(+)$  indica aproximação entre o observador e a FL. Dica: Use a seguinte aproximação  $(1+x)^n \approx 1 + nx$ , se  $|x| \ll 1$ . ■

**Exercício 6** Determine a velocidade com a qual um observador deve se mover para que a luz emitida por uma fonte na cor vermelha ( $\lambda = 650$  nm) pareça uma luz na cor azul ( $\lambda = 460$  nm) para ele. ■

---

## A.2.7 Momento linear e energia

As leis de conservação apresentam um papel de destaque em toda a Física. As leis de conservação do momento linear e da energia total são dois princípios fundamentais da MN. Descreveremos a seguir as versões relativísticas para a conservação do momento linear e para a energia total.

### A.2.7.1 Momento linear relativístico

A definição para o momento linear utilizada na MN é dada por

$$\vec{p}_{newt} = m\vec{u},$$

onde  $m$  representa a massa inercial do objeto e  $\vec{u}$  representa a velocidade do objeto em relação ao referencial inercial  $S$ . A partir dessa definição temos que na ausência de forças externas (sistema isolado) o momento linear total é conservado na MN. Se tivermos um referencial  $S'$  que se move com velocidade constante  $v$  em relação ao eixo  $x$ , pode-se mostrar que se o momento linear total se conserva em  $S$ , o mesmo também será conservado em  $S'$ . Essa demonstração é feita utilizando as TG para a velocidade.

Entretanto, se utilizarmos a definição newtoniana para o momento linear e utilizarmos as TL para a velocidade pode-se mostrar que se o momento linear for conservado em  $S$  o mesmo não será necessariamente conservado em  $S'$ . Dessa forma, para compatibilizar a conservação do momento linear com o PRR define-se o *momento linear*

*relativístico* da seguinte forma

$$\vec{p} = \frac{m \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (\text{A.40})$$

Utilizando-se o momento linear relativístico juntamente com as TLV pode-se mostrar que se o momento linear relativístico for conservado em  $S$ , ele também será conservado em  $S'$ . Na expressão (A.40)  $m$  representa a massa inercial do objeto. Destacamos que existem bibliografias que chamam  $m$  e  $\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$  de *massa de repouso* e *massa relativística* respectivamente. Entretanto, preferimos seguir propostas semelhantes à (LEMOS, 2001) e à (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018). Por isso, não utilizaremos os termos massa de repouso e massa relativística, pois adotamos a perspectiva de que a massa de um corpo não é alterada pela sua velocidade. Dessa forma, chamaremos  $m$  apenas de *massa*.

### A.2.7.2 Energia relativística

A *energia relativística (total)* de um objeto de massa  $m$  e velocidade de módulo  $u$  em  $S$  é definida como

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (\text{A.41})$$

onde  $c$  é a velocidade da luz. Fazendo  $u = 0$  (velocidade zero) na expressão (A.41) obtemos

$$E = E_0 = mc^2, \quad (\text{A.42})$$

onde o termo  $E_0$  é chamado de *energia de repouso*<sup>6</sup> da massa  $m$ . Podemos, ainda, escrever a energia relativística da seguinte maneira

$$E = E_0 + K, \quad (\text{A.43})$$

---

<sup>6</sup>Como discutido em Taylor, Wheeler, e Bertschinger (2018, p. 1-23) a massa de um corpo não é alterada pela velocidade, mas a energia sim. Logo, não há qualquer contradição em utilizar a expressão energia de repouso para determinar a energia de um objeto com velocidade nula e a expressão energia relativística para determinar a energia de um objeto com velocidade diferente de zero.

onde  $K$  é a parte da energia atribuída ao movimento, sendo chamada de *energia cinética relativística*. A energia cinética relativística escreve-se como

$$K = E - mc^2 = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (\text{A.44})$$

ou, simplesmente,

$$K = (\gamma - 1) m c^2.$$

Com as expressões relativísticas podemos escrever as leis de conservação do momento linear relativístico e da energia relativística da seguinte forma:

- Para todo sistema isolado, a energia relativística e o momento relativístico (totais) são conservados.

Um fato pioneiro trazido por Einstein é a expressão  $E_0 = mc^2$ , provavelmente a expressão mais famosa do mundo, que mostra que um corpo em repouso possui energia, a *energia de repouso*. Podemos nos perguntar se a *energia de repouso* pode ser convertida em outras formas de energia tal como a energia cinética, por exemplo. Seguindo a referência (TAYLOR; ZAFIRATOS; DUBSON, 2004, p. 59) apresentaremos um modelo para explorar a chamada *equivalência entre massa e energia*<sup>7</sup> e explorar o significado da equação  $E_0 = mc^2$ . Analisaremos dois tipos de sistemas: repulsivo e atrativo. O modelo para discutir o sistema repulsivo é constituído de dois blocos em que em um deles temos uma mola fixa e no outro bloco temos dispositivo utilizado para unir ambos - Figura A.15 (a). Suponha que nós unimos os blocos como mostra a Figura A.15 (b). Ao juntarmos os blocos nós transferimos energia para o eles e essa energia fica armazenada na mola, em nosso modelo. Se, agora, soltarmos o dispositivo que une os blocos, eles irão se afastar um do outro - Figura A.15 (c). Utilizando as expressões relativísticas para a energia nas Figuras A.15 (b) e A.15 (c) e, também, utilizando a conservação da energia podemos escrever

$$Mc^2 = m_1 c^2 + K_1 + m_2 c^2 + K_2, \quad (\text{A.45})$$

onde  $M$  representa a massa do conjunto constituído pelos blocos 1 e 2;  $m_1$  a massa do bloco 1 separada;  $m_2$  a massa do bloco 2 separada;  $K_1$  a energia cinética relativística

---

<sup>7</sup>Uma interessante discussão sobre o assunto é feita em (KNEUBIL, 2022).

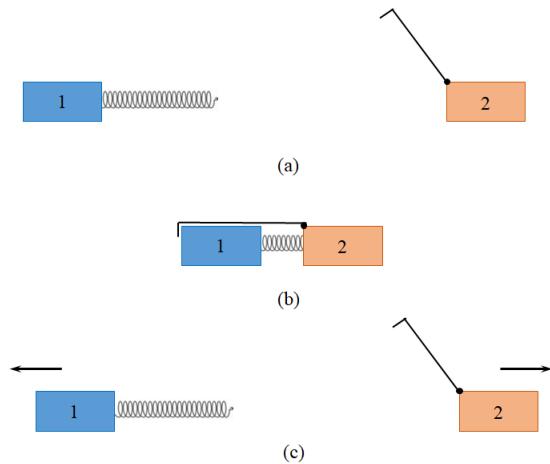


Figura A.15: (a) Sistema de dois blocos inicialmente separados em que um deles contém uma mola e o outro contém um dispositivo para uni-los, (b) os dois blocos são unidos e passam a formar um único corpo e (c) o dispositivo que mantém os blocos juntos é liberado e os blocos se afastam um do outro.

do bloco 1; e  $K_2$  a energia cinética relativística do bloco 2. Podemos, ainda, reescrever a equação acima

$$Mc^2 = K_1 + K_2 + (m_1 + m_2)c^2. \quad (\text{A.46})$$

Analisando a equação (A.46) notamos que a massa do conjunto  $M$  é maior que as massas  $m_1$  e  $m_2$  dos blocos separados, ou seja,  $m_1 + m_2 < M$ . Aqui utilizamos um modelo mecânico simples para ilustrar a repulsão de dois objetos por meio de uma mola, mas o resultado anterior se aplica a qualquer sistema repulsivo que se separa em duas ou mais partes. Fazendo  $\Delta M = M - (m_1 + m_2)$  podemos reescrever (A.46) como

$$\Delta Mc^2 = K_1 + K_2. \quad (\text{A.47})$$

Para o sistema repulsivo notamos que a massa dos constituintes (blocos 1 e 2 separados) é menor do que a massa do conjunto (blocos 1 e 2 unidos). Dessa forma, parte da energia de repouso do conjunto foi convertida em energia cinética dos blocos separados, sendo essa quantidade dada pela equação (A.47). Esse resultado é chamado de *equivalência massa e energia*. Essa equivalência, na verdade, representa uma conversão de *energia de repouso* em *energia cinética* (GRIFFITHS, 1999, p. 511).

---

**Exercício 7** Em uma reação nuclear o Tório (Th) 232 se divide espontaneamente nos átomos Rádio (Ra) 228 e Hélio (He) 4. Sabendo que a soma da energia cinética do

Rádio e do Hélio valem 4 MeV determine a diferença de massa  $\Delta M$  entre o sistema composto (Tório) e as suas partes (Rádio e Hélio). Dica utilize a unidade de massa escrita em  $MeV/c^2$  para o exercício. ■

Examinaremos agora um sistema atrativo que podemos imaginar como sendo composto por dois objetos de massa  $m_1$  e  $m_2$  quando eles estão separados. O nosso sistema pode ser formado, por exemplo, por um átomo de hidrogênio que é composto por um próton e um elétron. Quando os dois objetos formam o sistema composto é necessário fornecer energia para separá-los, pois agora consideramos que os objetos 1 e 2 formam um sistema atrativo. Supondo que a energia mínima necessária para os se-separar seja igual a  $B$  e, também, que após a separação os objetos tenham energia nula podemos escrever, utilizando a conservação da energia, a seguinte equação

$$Mc^2 + B = m_1c^2 + m_2c^2, \quad (\text{A.48})$$

onde  $M$  representa a massa do sistema composto. Na equação (A.48) percebemos que a soma das massas dos constituintes (objetos 1 e 2) separados é maior que a massa do sistema composto, ou seja,  $m_1 + m_2 > M$ . Fazendo  $\Delta M = (m_1 + m_2) - M$  podemos reescrever (A.48) como

$$\Delta Mc^2 = B. \quad (\text{A.49})$$

---

**Exercício 8** Suponha que energia é transferida para uma molécula de oxigênio e, então, os átomos se separam e, após a separação, os átomos apresentem energia cinética nula. Determine a diferença de massa entre as partes (os dois átomos de oxigênio) e o sistema composto (molécula de oxigênio). Suponha que a energia para que a separação ocorra seja  $B = 5$  eV. ■

---

**Exercício 9** Dois blocos de argila, cada um com massa  $m$ , colidem frontalmente a  $3/5 c$  ficando grudados após a colisão. Qual a massa do bloco composto após a colisão? Dica: utilize a conservação do momento linear e a conservação da energia relativística na solução do problema. ■

---

## A.3 Os intervalos invariantes e os diagramas espaço-tempo.

### A.3.1 Intervalo invariante

Quando um evento ocorre, como uma explosão de um fogo de artifício, observadores nos referenciais  $S$  e  $S'$  podem registrar as coordenadas espaço-temporais para ele. Escrevemos as coordenadas  $(t, x)$  para  $S$  e  $(t', x')$  para  $S'$  para localizar, no espaço e no tempo, tal evento<sup>8</sup>. As TL permitem relacionar as coordenadas espaço-temporais entre  $S$  e  $S'$ , porém, em geral, os valores para as coordenadas dependem do referencial, ou seja,  $x \neq x'$  e  $t \neq t'$ . Os resultados para a simultaneidade, a dilatação do tempo e a contração do comprimento mostram como as medidas das coordenadas de um evento são dependentes do referencial. Entretanto, vimos que a velocidade da luz é uma grandeza que apresenta o mesmo valor quando medida em  $S$  e  $S'$ . Por isso, dizemos que a velocidade da luz é uma grandeza *invariante*, pois o seu valor  $c$  é o mesmo para qualquer referencial inercial. Assim como a velocidade da luz, existe uma combinação entre  $t$  e  $x$  e, também, entre  $t'$  e  $x'$  que é uma grandeza *invariante*. Essa grandeza é chamada de *intervalo invariante* ou *intervalo espaço-temporal*<sup>9</sup> ( $\Delta s^2$ ) e é definida como

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2, \quad (\text{A.50})$$

onde  $\Delta x$  é a variação da coordenada  $x$  entre dois eventos e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo entre dois eventos.

**Exercício 10** Dois fogos de artifício explodem nas posições  $x_1 = 2\text{ m}$  e  $x_2 = 12\text{ m}$  no referencial  $S$ . O primeiro fogo de artifício explode no instante  $t_1 = 0\text{ s}$  e o segundo explode no instante  $t_2 = 3 \times 10^{-2}\text{ }\mu\text{s}$ . Encontre o valor para o intervalo invariante  $\Delta s^2$ . Dica: Faça  $c = 300\text{ m}/\mu\text{s}$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1$  e  $\Delta t = t_2 - t_1$  e substitua o resultado na equação (A.50) ■

---

<sup>8</sup>Por simplicidade não estamos considerando as coordenadas  $(y$  e  $z)$  e  $(y'$  e  $z')$  nessa análise. Entretanto, caso quiséssemos incluí-las nós escreveríamos  $(t, x, y, z)$  para  $S$  e  $(t', x', y', z')$  para  $S'$ .

<sup>9</sup> De acordo com a bibliografia utilizada, o intervalo invariante pode ser apresentado com outra convenção de sinais. Dessa forma, a parte temporal pode apresentar um sinal de (+) enquanto a parte espacial pode apresentar um sinal de (-). Assim, com essa convenção o intervalo invariante pode ser escrito como  $\Delta s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ .

Como dito anteriormente, o intervalo  $\Delta s^2$  é um invariante e, portanto, o seu valor é independente do referencial inercial em que é calculado. Para mostrar que essa afirmação é verdadeira podemos utilizar as TLI,  $\Delta t = \gamma (\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2})$  e  $\Delta x = \gamma (\Delta x' + v\Delta t')$ , e substituí-las na equação (A.50) para mostrar que

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 = -c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2, \quad (\text{A.51})$$

O resultado dado pela expressão (A.51)<sup>10</sup> mostra que  $\Delta s^2$  independe do referencial em que é calculado, ou seja, o *intervalo invariante* ou *intervalo espaço-temporal* é uma grandeza *invariante*.

---

**Exercício 11** Mostre que o intervalo espaço-temporal é invariante por uma transformação de Lorentz.

Dica: A partir da relação  $-c^2\Delta t^2 + \Delta x^2$ , use a transformações de Lorentz e mostre que para dois eventos arbitrários a relação  $-c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 = -c^2\Delta t'^2 + \Delta x'^2$  é válida.

■

---

**Exercício 12** Determine as coordenadas no referencial  $S'$ , utilizando as TL, para os eventos 1 e 2 a partir das coordenadas propostas no exercício 10 utilizando  $\gamma = 5$ . Além disso, determine o *intervalo espaço-temporal* utilizando a equação  $\Delta s^2 = -c^2\Delta t'^2 + \Delta x'^2$  e compare com o resultado do exercício 10. ■

---

A equação (A.51) é dita pelos autores da bibliografia (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p.1-3) como uma das mais importantes equações da Física, talvez de toda a Ciência.

A seguir discutiremos que o valor do intervalo espaço-temporal ( $\Delta s^2$ ) pode ser negativo, positivo ou nulo. Classificamos, dependendo do valor de  $\Delta s^2$ , o intervalo como: tipo tempo, tipo espaço e tipo luz.

### A.3.1.1 Intervalo tipo tempo: $\Delta s^2 < 0$

Quando  $\Delta s^2 < 0$  dizemos que *intervalo é do tipo tempo*. Para um intervalo do tipo tempo, entre dois eventos, podemos *sempre* encontrar um referencial em que ambos os eventos ocorrem em uma mesma posição. Imagine que analisemos o exemplo da

<sup>10</sup>Por simplicidade escreveremos  $(\Delta t)^2 = \Delta t^2$  e  $(\Delta x)^2 = \Delta x^2$ .

subseção A.2.5.1 utilizando o intervalo invariante. Nessa seção tínhamos um relógio  $A'$  fixo em  $S'$  que estava presente na marcação do tempo em dois eventos 1 e 2. As coordenadas medidas em  $S'$  eram  $(x'_A, t'_1 = t')$  e  $(x'_A, t'_2 = t' + \Delta\tau)$ . Logo, temos que  $\Delta x' = 0$  e  $\Delta t' = \Delta\tau$ , a qual  $\Delta\tau$  representa o tempo próprio entre os eventos 1 e 2. O tempo próprio entre dois eventos só existe se  $\Delta s^2 < 0$ . Então, utilizando a equação (A.51) e rearranjando alguns termos temos

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta\tau^2 + \underbrace{\Delta x'^2}_{=0} = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2,$$

ou seja,

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta\tau^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2.$$

Assim, podemos, para intervalos do tipo tempo, escrever que  $\Delta s^2 = -c^2 \Delta\tau^2$  e utilizar o tempo próprio  $\Delta\tau$  (que também é um invariante) para escrever o *intervalo espaço-temporal do tipo tempo* da seguinte forma

$$c^2 \Delta\tau^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2. \quad (\text{A.52})$$

### A.3.1.2 Intervalo tipo espaço: $\Delta s^2 > 0$

Quando  $\Delta s^2 > 0$  dizemos que o *intervalo é do tipo espaço*. Se o intervalo é do tipo espaço então *sempre* podemos encontrar um referencial em que dois eventos são simultâneos. Para intervalos do tipo espaço escrevemos o intervalo espaço-temporal como

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2$$

### A.3.1.3 Intervalo tipo luz: $\Delta s^2 = 0$

Quando  $\Delta s^2 = 0$  dizemos que o *intervalo é do tipo luz*. Assim, dois eventos separados por um intervalo do tipo luz estão conectados por um pulso luminoso com velocidade  $c$ . Por isso, nenhum referencial pode presenciar os eventos ocorrendo em uma mesma posição e em instantes de tempo distintos (tipo tempo) ou em locais distintos e num mesmo instante de tempo (tipo espaço). Para intervalos do tipo luz escrevemos o intervalo espaço-tempo como

$$0 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2$$

**Exemplo 1** Imagine dois eventos medidos em um referencial S. O evento 1 ocorreu em  $x = 0$  e  $t = 0$  e o evento 2 em  $x = 3$  m e  $t = 3 \times 10^{-2}$   $\mu$ s. Determine o tipo de intervalo entre esses dois eventos.

Sabemos que a velocidade da luz vale  $c = 3 \times 10^8$  m/s. Podemos reescrever a velocidade da luz da seguinte forma  $c = 300$  m/ $\mu$ s. Logo, calculando  $\Delta s^2$  utilizando o valor de  $c$  nessa nova unidade temos

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 = -(300 \text{ m}/\mu\text{s} \times 10^{-2} \mu\text{s})^2 + (3)^2 = 0.$$

Logo, o intervalo é do tipo luz. Assim, podemos descrever que em  $t = 0$  s um pulso luminoso é emitido na origem e em  $t = 10^{-2}$   $\mu$ s alcança posição  $x = 3$  m.

---

Na equação (A.51) restringimos a nossa análise à coordenada espacial  $x$  e à coordenada temporal  $t$ . A forma mais geral que leva em conta as dimensões espaciais  $y$  e  $z$  ou  $y'$  e  $z'$  pode ser escrita como

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = -c^2 \Delta t'^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2. \quad (\text{A.53})$$

### A.3.2 Os diagramas espaço-tempo

O espaço-tempo da TRR é denominado espaço-tempo de Minkowski. As transformações de Lorentz (redescobertas por Einstein) mostram que o tempo deve ser tratado como uma coordenada ordinária. Isto permite imaginar uma fusão do espaço e do tempo em uma única entidade: o *espaço-tempo*. Foi Hermann Minkowski, antigo professor de Einstein na ETH (Instituto Federal de Tecnologia de Zurique), quem introduziu e desenvolveu matematicamente o conceito em um ensaio de 1908. A citação a seguir é famosa

Doravante, o espaço em si mesmo e o tempo em si mesmo estão condenados a esmaecer transformando-se em simples sombras e somente uma espécie de união dos dois preservará uma realidade independente. (apud GRIFFITHS, 1999, p. 504, tradução livre).

A abordagem de Minkowski para a TRR leva a um tratamento geométrico do espaço-tempo que é vital para a TRG. O espaço-tempo da TRR é quadridimensional, então em um referencial inercial  $S$  descrevemos um evento fornecendo as coordenadas cartesianas ( $x, y, z$ ) e uma coordenada temporal  $t$  (medida com relógios estacionários nesse referencial). Um segundo conjunto de observadores em um referencial inercial

$S'$ , em movimento relativo em relação a  $S$ , indicaria para o mesmo evento as coordenadas cartesianas  $(x',y',z')$  e, com os relógios estacionários em seu referencial, o tempo  $t'$ . Na MN, eventos em referenciais iniciais em movimento relativo  $S$  e  $S'$  seriam descritos, em geral, por coordenadas cartesianas diferentes  $(x,y,z)$  e  $(x',y',z')$  e uma única coordenada temporal, pois  $t = t'$ .

Se quisermos construir um diagrama de uma sequência de eventos para o movimento de um objeto, precisaríamos fazer um gráfico quadridimensional, o que seria uma tarefa muito complicada. Por isso, iremos utilizar representações bidimensionais, mais simples, utilizando a coordenada espacial  $x$  e a coordenada temporal  $t$  para descrever o movimento de algum objeto ao longo de uma dimensão espacial. Em um primeiro contato com a cinemática, somos introduzidos à construção e conceitos básicos envolvendo gráficos. O gráfico descrevendo como a posição de um objeto varia com o tempo é, geralmente, um dos primeiros gráficos introduzidos. Para isso, colocamos a posição  $x$  no eixo vertical (variável dependente) e o instante de tempo  $t$  no eixo horizontal (variável independente). Além disso, estudamos algumas propriedades dos gráficos como, por exemplo, a inclinação (ou declividade) da reta tangente em um ponto. A inclinação da reta tangente, em um determinado ponto, para o gráfico  $x$  vs.  $t$  fornece a velocidade do objeto. Contudo, as referências na TRR costumam traçar os mesmos gráficos colocando a coordenada temporal  $t$  na vertical e a coordenada espacial  $x$  na horizontal. Além disso, a coordenada  $t$  é substituída pelo produto  $ct$ . Assim, os eixos vertical e horizontal ficam com as mesmas unidades.

Podemos representar o diagrama espaço-tempo na TRR para diferentes objetos como mostrado na Figura A.16. Pontos nesse diagrama caracterizam eventos. A reta (a) representa uma partícula material que se move com velocidade constante no sentido positivo do eixo  $x$  em um referencial inercial  $S$  a qual apresenta como equação a reta  $ct = 6 + \frac{3}{2}x$ . A reta (b) representa um pulso luminoso que se move com velocidade  $c$  no sentido positivo do eixo  $x$  que apresenta como equação a reta  $ct = -2 + 1x$ . A reta (c) representa uma partícula material que permanece em repouso na posição  $x = 16$  m para qualquer valor de  $ct$ . A “trajetória” de um objeto ou de um pulso luminoso em um diagrama espaço-tempo é chamada de *linha de mundo* ou *linha de universo*. As *linhas de mundo* mostradas na Figura A.16 são as retas (a), (b) e (c). A inclinação de uma reta em um diagrama espaço-tempo é dada por

$$\text{inclinação} = \frac{c}{v} = \frac{c \Delta t}{\Delta x},$$

a qual para a reta (b) apresenta uma inclinação igual a 1 e o ângulo que essa reta faz com a horizontal é de  $45^\circ$ . Além disso, para a reta (a) temos que a inclinação  $\frac{c}{v} = \frac{3}{2} > 1$  e, por isso, o ângulo que essa reta faz com a horizontal é maior do que  $45^\circ$ . Note também que a velocidade da partícula, cujo gráfico é dado pela reta (a), vale  $v = \frac{2}{3}c$ .

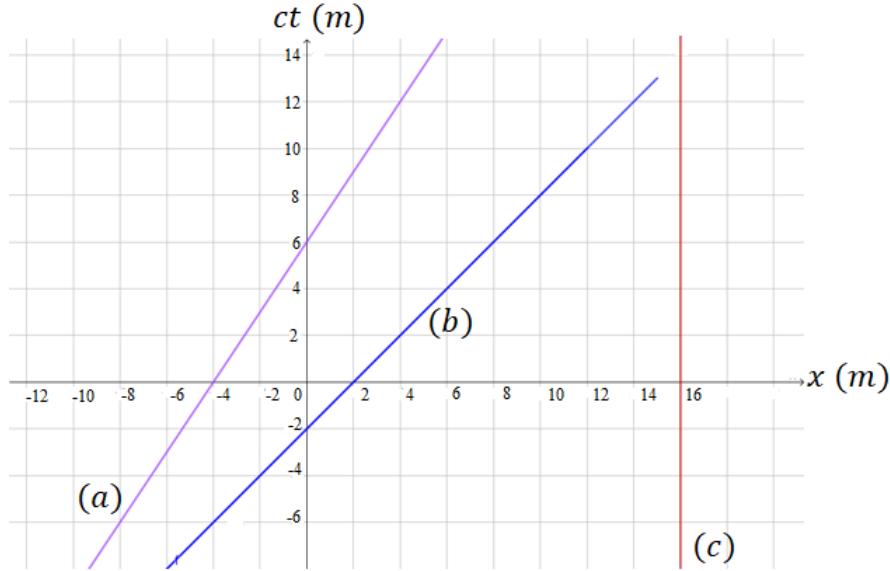


Figura A.16: Diagrama Espaço-tempo referencial em  $S$  de: (a) um objeto movendo-se com velocidade constante no sentido positivo do eixo  $x$ , (b) um pulso luminoso movendo-se no sentido positivo do eixo  $x$  e (c) um objeto em repouso.

Analisemos agora o gráfico da Figura A.17. A curva em preto representa o movimento de uma partícula uniformemente acelerada no referencial inercial  $S$ , chamada de partícula “A”, que, curiosamente, apresenta uma linha de mundo dada por uma hipérbole em vez da tradicional parábola para o movimento uniformemente variado na MN. Quando o instante  $t$  é igual a zero temos que a partícula “A” passa pela posição  $x = 4$  m. Se imaginarmos dois pulsos luminosos sendo emitidos, no sentido positivo e negativo do eixo  $x$ , no mesmo instante que a partícula “A” passa pela posição  $x = 4$  m teremos, em vermelho, as linhas de mundo de dois pulsos luminosos passando pela posição  $x = 4$  m no instante  $t = 0$ . As linhas na cor vermelha formam o chamado *cone de luz*. O vértice do cone está localizado no instante  $t = 0$  e na posição  $x = 4$  m. Note que a partícula “A” apresenta o seu movimento restrito à região delimitada pelo cone de luz tanto para  $t > 0$  quanto para  $t < 0$ . A região com hachura em azul representa o *futuro* da partícula “A” em  $t = 0$ , pois é o local de todos os pontos (eventos)

acessíveis à partícula na continuação do movimento. A região com hachura em verde constitui o *passado* da partícula “A” em  $t = 0$ , pois é o local de todos os pontos (eventos) possíveis que a partícula pode ter vindo. Passado e futuro podem ser definidos em relação a qualquer evento particular como no caso do evento B na Figura A.17 para o qual podemos traçar o respectivo cone de luz com vértice em B.

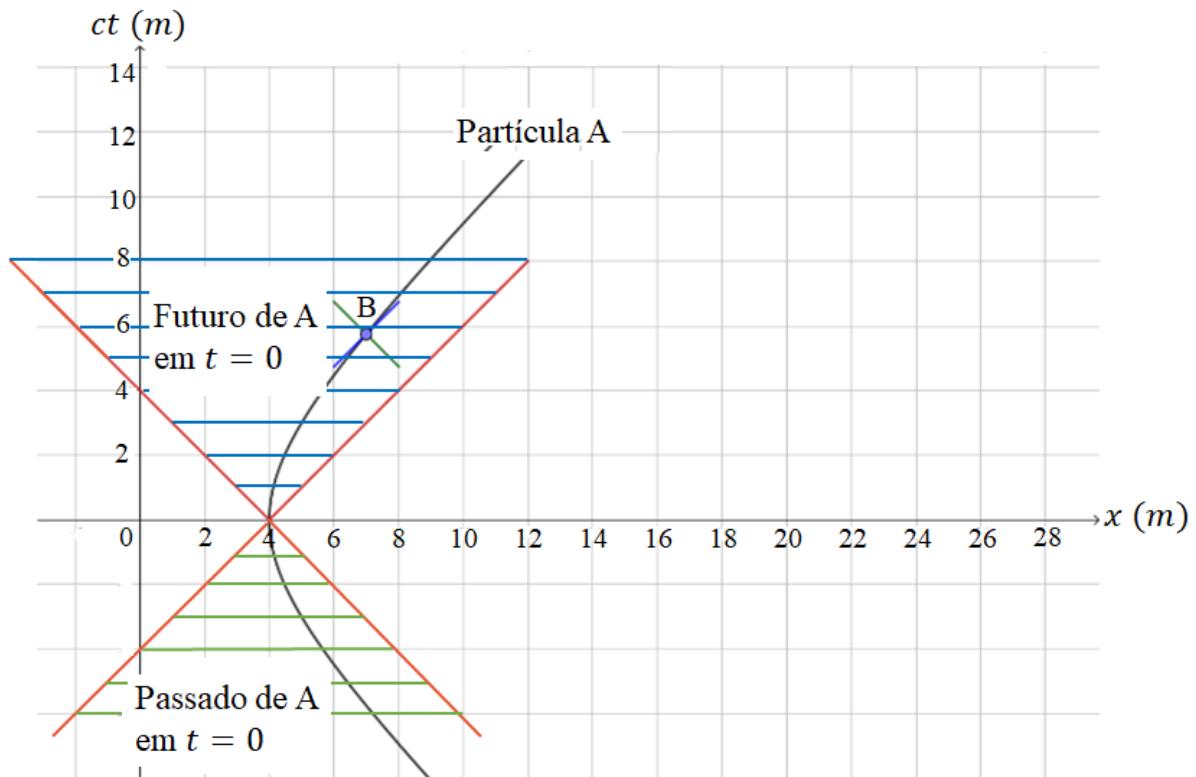


Figura A.17: Curva em preto: linha de mundo de uma partícula “A” uniformemente acelerada. Retas vermelhas (cone de luz): dois pulsos luminosos são emitidos no sentido positivo e negativo do eixo  $x$  no instante  $t = 0$  e na posição  $x = 4$ . Ponto B: é um ponto localizado sobre a linha de mundo da partícula A em que dois pulsos luminosos podem ser emitidos e formar um novo cone de luz.

**Exercício 13** (Paradoxo dos gêmeos) Dois irmãos gêmeos chamados Pedro e Edmundo acabaram de completar 21 anos. Edmundo decide viajar para uma estrela distante que está a 15 anos-luz da Terra por meio de um foguete que está se movendo com uma velocidade de  $\frac{3}{5}c$  em relação a Terra. Ao chegar na estrela Edmundo decide voltar imediatamente para a Terra para reencontrar o seu irmão Pedro. Determine: (a) O

tempo medido por Pedro para à viagem de ida e de volta de Edmundo. (b) O diagrama espaço-tempo representando as linhas de mundo para a viagem de ida e de volta de Edmundo e, também, a linha de mundo de Pedro (suposto estacionário na Terra). (c) Utilizando o intervalo invariante determine o tempo medido por Edmundo para a viagem de ida e de volta. (d) Compare o tempo total (ida e volta) para a viagem medidos por Pedro e Edmundo e diga se existe alguma diferença na idade dos irmãos gêmeos após se reencontrarem. ■

## A.4 Coordenadas e a geometria não-euclidiana

### A.4.1 Coordenadas Cartesianas

Os eixos e as coordenadas  $(x, y)$  cartesianas são comumente utilizados no Ensino Médio nas aulas de Física e Matemática. Através dessas coordenadas podemos localizar com facilidade um ponto  $P$  no plano informando os valores  $x_P$  e  $y_P$  como mostrado na Figura A.18 (a). A determinação das coordenadas é feita traçando, a partir de  $P$ ,

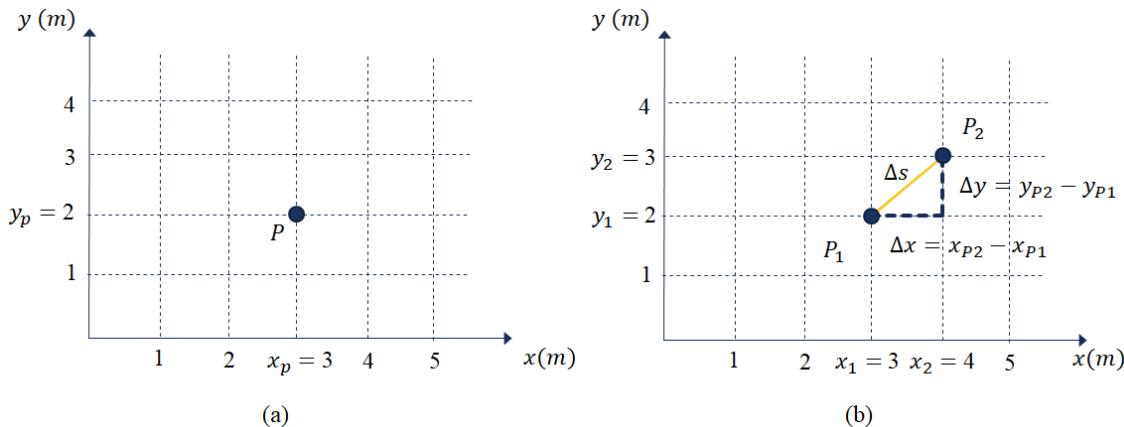


Figura A.18: (a) Coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  para localizar o ponto  $P$ . (b) Determinação da distância entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

uma linha vertical até o eixo  $x$  e uma linha horizontal até o eixo  $y$  e fazendo a leitura dos valores  $x_P$  e  $y_P$  nos eixos  $x$  e  $y$  respectivamente. Utilizando as coordenadas  $x_P$  e  $y_P$  podemos, também, calcular a distância  $\Delta s$ , entre o ponto  $P$  e a origem, a partir do teorema de Pitágoras:

$$\Delta s^2 = x_P^2 + y_P^2$$

Podemos generalizar a expressão anterior e determinar a distância  $\Delta s$  entre quaisquer dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  - Figura A.18 (b). A partir das coordenadas  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  podemos escrever

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \quad (\text{A.54})$$

onde  $\Delta x = x_2 - x_1$  e  $\Delta y = y_2 - y_1$ .

A seguir examinaremos a utilização de um novo conjunto de coordenadas para localizar um ponto no plano, com que (a princípio), os estudantes de Ensino Médio podem não estar familiarizados.

### A.4.2 Coordenadas Polares

Discutimos anteriormente que podemos localizar um ponto  $P$  no plano através das coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ . Entretanto, um ponto  $P$  no plano também pode ser localizado utilizando as chamadas *coordenadas polares*, que consiste na utilização das quantidades  $r$  e  $\phi$ . A coordenada  $r$  representa a distância do ponto  $P$  à origem enquanto a coordenada  $\phi$  representa o ângulo entre o eixo  $x$  e o segmento de reta que passa pela origem e pelo ponto  $P$  como ilustrado na Figura A.19 (a). É fácil ver que a

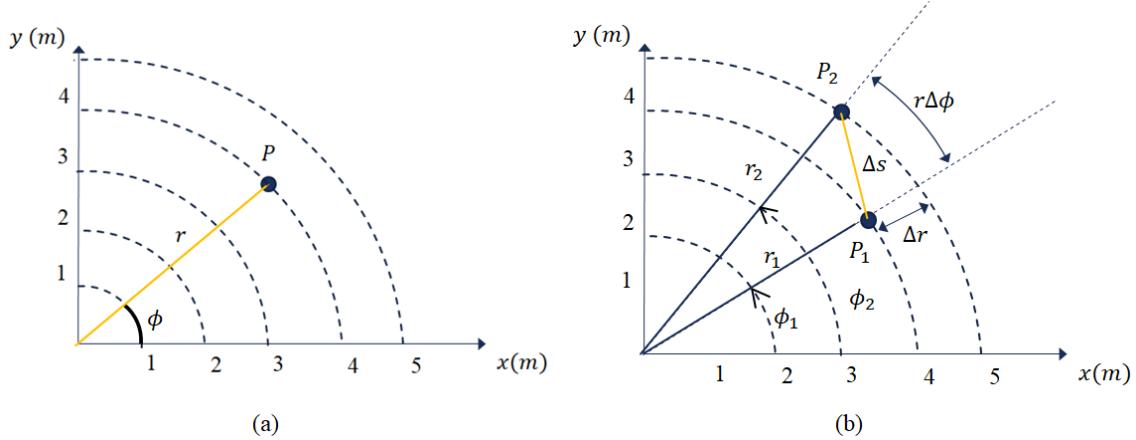


Figura A.19: (a) Coordenadas polares  $r$  e  $\phi$  para localizar o ponto  $P$ . (b) Determinação da distância entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

distância  $\Delta s$  entre a origem e o ponto  $P$  coincide com a coordenada radial  $r$ , ou seja,

$$\Delta s = r.$$

Podemos generalizar a expressão anterior e determinar a distância  $\Delta s$ , em coordenadas polares, entre quaisquer dois pontos próximos de coordenadas  $(r_1, \phi_1)$  e  $(r_2, \phi_2)$  - Figura A.19 (b). Para isso podemos utilizar o teorema de Pitágoras, aproximando por uma reta o arco de comprimento  $r\Delta\phi$  na Figura A.19 (b) e considerar um triângulo de hipotenusa  $\Delta s$  e catetos  $r\Delta\phi$  e  $\Delta r$  para escrever

$$\Delta s^2 = \Delta r^2 + r^2\Delta\phi^2, \quad (\text{A.55})$$

onde  $\Delta r = r_2 - r_1$  e  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ . A equação (A.55) é válida quando os pontos  $P_1$  e  $P_2$  são próximos e o ângulo  $\phi$  deve ser medido em radianos.

### A.4.3 Coordenadas esféricicas

As coordenadas esféricas permitem a localização de um ponto no espaço tridimensional. Assim, seja  $P$  um ponto no espaço, podemos utilizar o sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y, z)$  e, partir desse sistema, estabelecer as coordenadas esféricas  $(r, \phi, \theta)$  como mostrado na Figura A.20 (a).

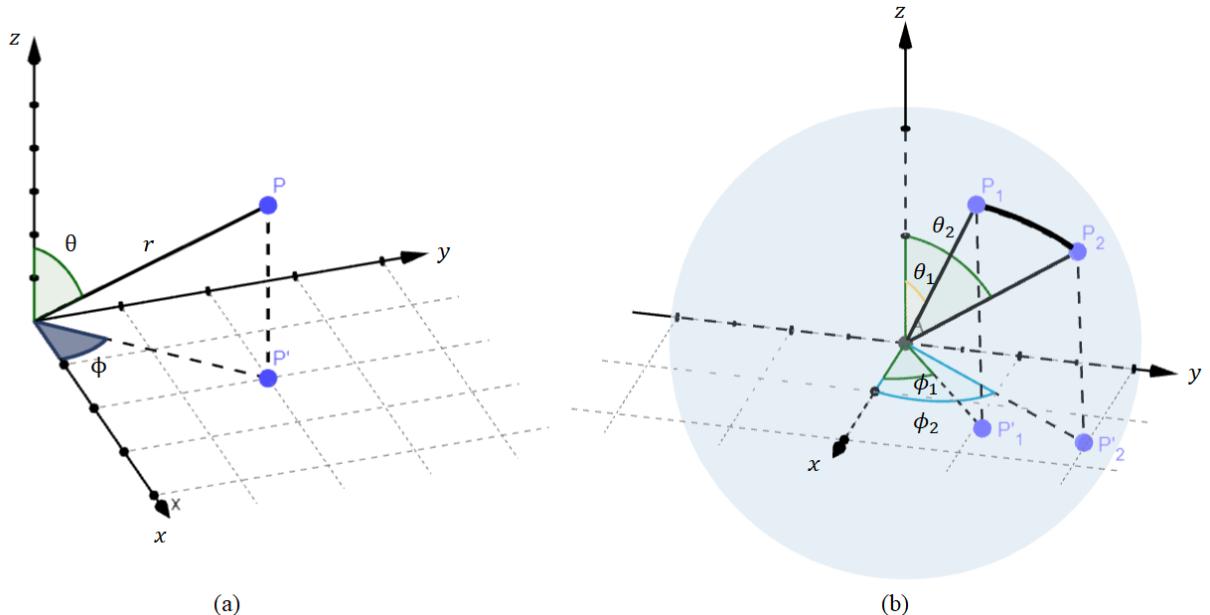


Figura A.20: (a) Coordenadas esféricas  $(r, \phi, \theta)$ . (b) Determinação da distância entre dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  sobre a superfície de uma esfera com coordenadas  $(r, \phi_1, \theta_1)$  e  $(r, \phi_2, \theta_2)$  respectivamente.

Para facilitar a compreensão das coordenadas esféricas na Figura A.20 (a) imaginemos que uma linha é traçada da origem do sistema de coordenadas até o ponto  $P$ . A coordenada  $r$  representa a distância da origem até  $P$  (comprimento da linha traçada). A coordenada  $\phi$  é análoga ao ângulo discutido para as coordenadas polares e é definida como o ângulo entre o semi-eixo positivo  $x$  e a linha traçada da origem até o ponto  $P'$ , a qual  $P'$  é a projeção de  $P$  no plano  $x - y$ . O ângulo  $\theta$  é o ângulo entre o semi-eixo positivo  $z$  e a linha traçada da origem até o ponto  $P$ .

Novamente, é fácil ver que a distância  $\Delta s$  entre a origem e o ponto  $P$  coincide com a coordenada radial  $r$ , ou seja,

$$\Delta s = r.$$

Podemos generalizar a expressão anterior e determinar a distância  $\Delta s$ , em coordenadas esféricas, entre quaisquer dois pontos próximos  $P_1$  e  $P_2$  de coordenadas  $(r_1, \phi_1, \theta_1)$  e  $(r_2, \phi_2, \theta_2)$ . Dessa forma, pode-se mostrar que a expressão para a distância  $\Delta s$  entre dois pontos arbitrários próximos é dada por

$$\Delta s^2 = \Delta r^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \Delta \phi^2 + r^2 \Delta \theta^2, \quad (\text{A.56})$$

onde  $\Delta r = r_2 - r_1$ ,  $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$  e  $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$ . Além disso, os ângulos devem ser medidos em radianos. A expressão (A.56) é um pouco complexa mas gostaríamos de discutir rapidamente dois casos particulares interessantes. Analisando a Figura A.20 podemos notar que se fixarmos  $\theta = 90^\circ$  estaremos restritos ao plano  $x - y$  e a equação (A.56) se reduz à equação (A.55).

---

**Exercício 14** Mostre que a equação (A.56) se reduz à equação (A.55) para  $\theta = 90^\circ$  ou  $\theta = \pi/2$ . Dica: Para isso escreva a expressão (A.56) e substitua  $\theta = 90^\circ$  e lembre que como  $\theta$  está fixo a sua variação é nula, ou seja,  $\Delta \theta = 0$ . ■

---

O segundo caso particular ocorre quando fixamos a coordenada  $r$  - Figura A.20 (b). Ao fixarmos a coordenada  $r$  temos que  $\Delta r = 0$  e, assim, podemos escrever a equação (A.56) como

$$\Delta s^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \Delta \phi^2 + r^2 \Delta \theta^2. \quad (\text{A.57})$$

A equação (A.57) permite calcular a distância entre dois pontos próximos  $P_1$  e  $P_2$  na superfície de uma esfera.

**Exercício 15** Calcule a distância  $\Delta s$  em uma superfície esférica de raio 1 m entre dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  de coordenadas  $(r_1 = 1, \phi_1 = 0, \theta_1 = \pi/2)$  e  $(r_2 = 1, \phi_2 = \pi, \theta_2 = \pi/2)$ . Faça um desenho e marque as coordenadas nele. Você conseguiria determinar a distância entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  sem utilizar a expressão (A.57)? ■

Segundo as referências (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018) e (NATÁRIO, 2011) chamaremos a expressão  $\Delta s^2$  de *métrica da superfície*. As equações (A.54), (A.55) descrevem a métrica de uma superfície plana em coordenadas cartesianas e polares respectivamente e a equação (A.57) descreve a métrica de uma superfície esférica.

#### A.4.4 Geometria plana

No Ensino Médio somos apresentados à geometria plana, chamada de geometria euclidiana<sup>11</sup>. Nessa geometria podemos mostrar as seguintes propriedades

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ ;
- O teorema de Pitágoras é válido:  $c^2 = a^2 + b^2$ , onde  $c$  representa a hipotenusa enquanto  $a$  e  $b$  representam os catetos de um triângulo retângulo;
- O comprimento da circunferência é igual a  $2\pi r$ , onde  $r$  representa o raio da circunferência;
- Duas retas paralelas (não coincidentes) nunca se encontram;
- A menor distância entre dois pontos é uma reta.

A Figura A.21 ilustra as cinco propriedades mencionadas anteriormente obtidas da geometria euclidiana. De modo geral, o estudo da geometria no Ensino Médio fica restrito à geometria euclidiana. Entretanto, podemos explorar a geometria de outras superfícies tais como a esfera e verificar se as propriedades descritas anteriormente permanecem válidas. Na próxima subseção exploraremos esse assunto.

<sup>11</sup>Essa nomenclatura se dá em homenagem a Euclides de Alexandria, cuja principal obra é intitulada *Os Elementos*.

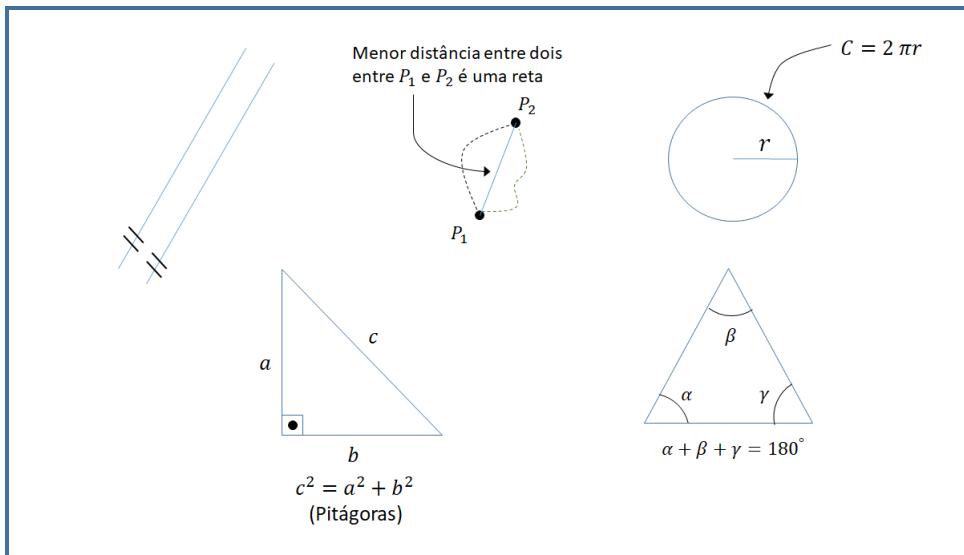


Figura A.21: Propriedades da geometria euclidiana.

#### A.4.5 Geometria esférica

Em nosso dia a dia conseguimos distinguir com certa facilidade uma superfície plana de uma superfície curva. Por exemplo, se tivermos um caderno (capa rígida) e uma bola de futebol em nossas mãos notamos claramente que a superfície do caderno é plana enquanto a superfície da bola é curva (esférica). Nesta situação conseguimos diferenciar superfícies planas de superfícies curvas analisando sob uma perspectiva tridimensional, em que a superfície bidimensional, do caderno ou da bola, está imersa (embebida). Entretanto, podemos nos perguntar se é possível realizar medidas sobre uma superfície e, a partir dessas informações, determinar se uma superfície é curva ou plana? A resposta é positiva e ilustraremos como podemos fazê-lo na sequência. Para tal, mostraremos como fazer medidas sobre uma dada superfície e, a partir dessas medidas, verificar se as propriedades mostradas na Figura A.21 se mantêm ou se sofrem algum tipo de alteração. Caso as propriedades da Figura A.21 sejam violadas estaremos em uma superfície curva.

Para mostrar tal processo seguiremos a referência (PÖSSEL, 2018, p. 20). Um vídeo muito elucidativo pode ser obtido em <https://youtu.be/-czyukZm94I><sup>12</sup>. Precisaremos dos seguintes materiais para fazer as duas atividades propostas abaixo: lápis; fitas de papel; uma caneta de tinta permanente; fita adesiva; duas bexigas (ou

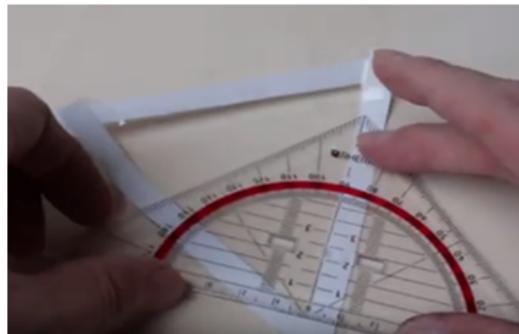
<sup>12</sup>Acesso em 28/02/2023.

uma bola); um transferidor; e um curvímetro<sup>13</sup>.

Atividade I<sup>14</sup>: Colocamos as fitas de papel sobre uma superfície esférica de acordo com a Figura A.22 (a). Utilizamos fitas adesivas para prender as tiras de papel sobre o balão (ou a bola) e, assim, construímos um triângulo esférico. Em seguida, descolamos o triângulo esférico da superfície da esfera e iniciamos o processo de medição dos ângulos do triângulo com o auxílio de um transferidor de acordo com a Figura A.22 (b). Realizamos a soma dos ângulos internos, digamos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , e dizemos se a sua soma é maior, menor ou igual a  $180^\circ$ .



(a)



(b)

Figura A.22: (a) Construção de um triângulo esférico com a colocação de três tiras de papel sobre a superfície. (b) O triângulo esférico é colocado sobre uma superfície plana e com o auxílio de um transferidor inicia-se a medida dos ângulos internos.

Atividade II: Utilizamos uma caneta permanente para desenhar uma circunferência de raio  $r$  sobre a superfície do balão (ou da bola). Para tal, podemos utilizar uma *tira de papel*, com dois furos nas extremidades, para traçar a circunferência e o raio - Figuras A.23 (a) e (b)<sup>15</sup>. A Figura A.23 (c) mostra a circunferência e o raio traçados. Em seguida, utilizamos o curvímetro para determinar o valor do raio e o comprimento da circunferência - Figura A.23 (d). Então, calculamos a razão entre o comprimento da

<sup>13</sup>O curvímetro é um instrumento utilizado para medir o comprimento de uma dada curva. Em inglês o termo utilizado para esse instrumento é *map-measuring device (opisometer)*.

<sup>14</sup>Um interessante vídeo que também trata de atividades práticas para explorar as geometrias não-euclidianas pode ser acessado em <https://www.youtube.com/watch?v=rMUIzmZsYuM>. Nesse vídeo o professor José Luiz Pastore ilustra a construção de um transferidor esférico para medidas de ângulos sobre a superfície da esfera.

<sup>15</sup>O vídeo <https://youtu.be/-czyukZm94I> ilustra o traçado da circunferência e do raio no balão.

circunferência ( $C$ ) e o raio ( $r$ ) medidos. Comparamos o resultado  $C/r$  com o valor dado pela geometria euclidiana  $C/r = 2\pi$ .

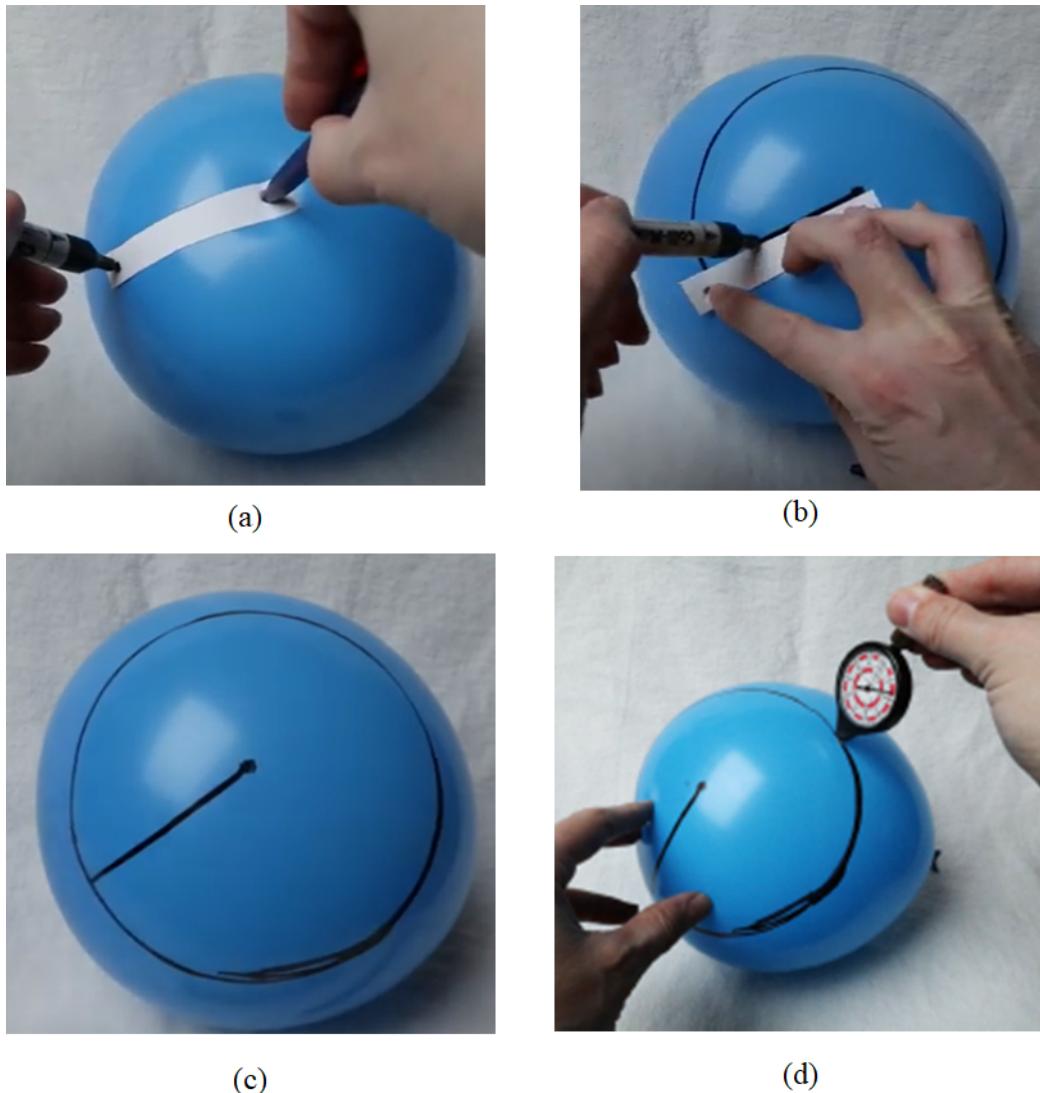


Figura A.23: (a) Traçado da circunferência sobre a superfície do balão. Com o auxílio de uma tira de papel fixamos uma extremidade da tira e traçamos a circunferência movendo com o auxílio de uma caneta de tinta permanente a outra extremidade da tira de papel. (b) Traçado do raio da circunferência na superfície do balão. (c) Circunferência e raio traçados. (d) Utilização do curvímetro para a determinação do comprimento da circunferência. O mesmo procedimento deve ser realizado para a determinação do comprimento do raio.

Conta-se uma história, que pode ser apócrifa ou não, de que o famoso matemático Carl Friedrich Gauss tentou verificar, no final da década de 1820, uma das propriedades da geometria euclidiana: a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$  (HARTLE, 2003, p.15). Para tal ele mediu os ângulos de um triângulo cujos vértices estavam dispostos em três picos de três montanhas diferentes. Gauss, com as precisões disponíveis para a medida, não encontrou nenhuma diferença entre a medida e a propriedade de Euclides, mas essa tentativa mostra uma busca, em torno de 1820, na verificação dessas propriedades. A discrepância,  $\sum(\text{ângulo internos}) - \pi$ , no experimento de Gauss seria de  $10^{-15}$  radianos, um valor muito pequeno para ser medido até nos dias atuais, como discutido por Hartle (2003, p. 17).

#### A.4.5.1 Geodésicas

Um resultado conhecido da geometria euclidiana é de que a menor distância entre dois pontos, no plano, é uma reta. Porém, sobre a superfície curva não existem linhas retas. Contudo, é possível encontrar curva, sobre uma superfície não plana, que minimiza a distância entre dois pontos. Essa curva é chamada de *geodésica* e representa a *linha mais “reta” possível* sobre a superfície. Uma geodésica sobre a superfície da esfera é um arco de grande círculo - Figura A.24. Um arco de grande círculo é dado por uma circunferência cujo centro coincide com o centro da esfera. Podemos definir uma geodésica como

- Uma geodésica é definida como a curva cujo comprimento é um extremo, podendo ser um máximo ou mínimo.

#### A.4.6 Curvatura

A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que  $180^\circ$  como você pode ter constatado realizando a *Atividade I*. O triângulo esférico da Figura A.25 possui a soma dos ângulos internos no valor de  $270^\circ$  ou  $3\pi/2$ , em radianos. Seguindo a referência (NATÁRIO, 2011, p. 41) definiremos três grandezas, a saber: o excesso esférico, a curvatura média e a curvatura de uma superfície. O excesso esférico é definido como a diferença entre soma dos ângulos internos do triângulo (em radianos) e  $\pi$ , ou seja,

$$\text{excesso esférico} = \sum \text{ângulos internos} - \pi. \quad (\text{A.58})$$

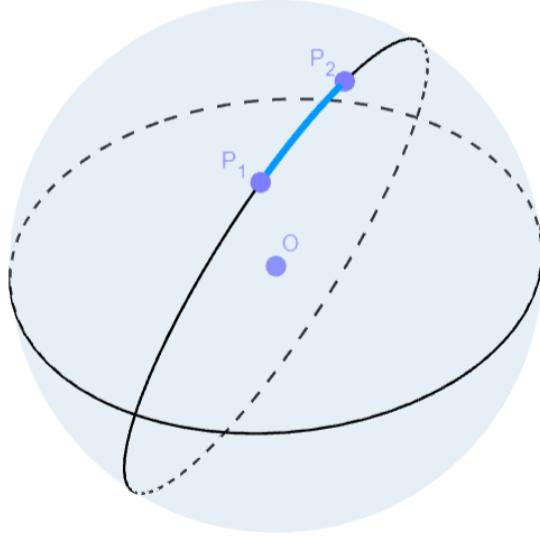


Figura A.24: A menor distância entre  $P_1$  e  $P_2$  é um arco de grande círculo (linha azul). Um grande círculo é uma circunferência cujo centro coincide com o centro da esfera.

Para o triângulo da Figura A.25 o excesso esférico vale  $\pi/2$ , pois a soma dos ângulos internos vale  $3\pi/2$  e, ao subtraímos  $\pi$ , o resultado é igual a  $\pi/2$ .

A curvatura média ( $K_m$ ) é dada pela razão entre o excesso esférico e a respectiva área do triângulo esférico (de onde o excesso esférico é calculado), ou seja,

$$K_m = \frac{\text{excesso esférico}}{\text{Área do triângulo esférico}}. \quad (\text{A.59})$$

Retornando novamente à Figura A.25, calculamos que o excesso esférico vale  $\pi/2$  e a área do triângulo pode ser obtida observando que podemos cobrir toda a esfera ao utilizarmos um total de 8 triângulos iguais ao da Figura A.25. Assim, a área de um único triângulo irá valer  $1/8$  da área total da esfera ( $A_{total} = 4\pi R^2$ ). Logo, a curvatura média  $K_m$  vale

$$K_m = \frac{\pi/2}{1/8 \times 4\pi R^2} = 1/R^2. \quad (\text{A.60})$$

A curvatura ( $K$ ) de uma superfície em um determinado ponto pode ser obtida ao calcularmos a curvatura média em triângulo esférico pequeno em torno do ponto. Calculando a curvatura de uma determinada superfície teremos a informação do quanto a geometria da superfície se afasta da geometria do plano, que apresenta curvatura nula. Além disso, se a soma dos ângulos internos de um triângulo, desenhado sobre a super-

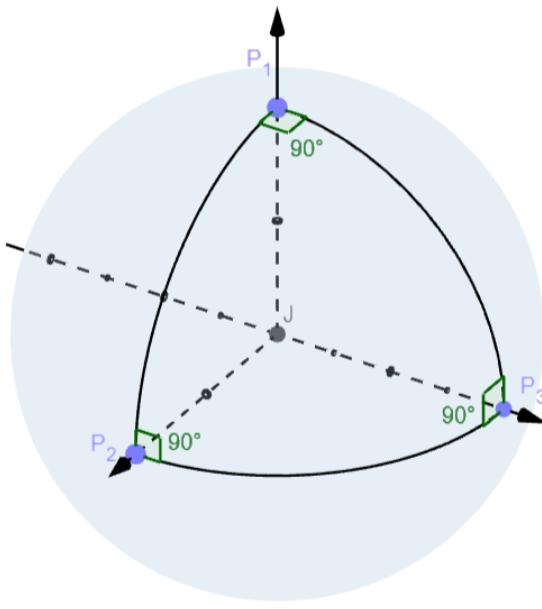


Figura A.25: Um triângulo esférico é traçado sobre uma superfície esférica com três ângulos retos.

fície, é maior que  $180^\circ$ , dizemos que a superfície possui *curvatura positiva*, se a soma for menor que  $180^\circ$ , dizemos que a superfície possui *curvatura negativa* e se a soma for  $180^\circ$  dizemos que a superfície possui *curvatura nula*. Para um triângulo esférico é possível mostrar que a soma dos ângulos internos, em radianos, é dada por

$$\sum(\text{ângulos internos}) = \pi + A/R^2, \quad (\text{A.61})$$

onde  $A$  representa a área do triângulo esférico e  $R$  o raio da esfera.

---

**Exercício 16** Determine a soma dos ângulos internos do triângulo esférico da Figura A.25 utilizando a equação (A.61) ■

---

#### A.4.6.1 Espaço plano local

Se reduzirmos o tamanho do triângulo esférico, observamos que a razão  $A/R^2$  irá ficar cada vez menor. Assim, se desenharmos um triângulo esférico cuja a razão  $A/R^2 \ll 1$  será extremamente difícil diferenciar a geometria plana (euclidiana) da geometria curva (não-euclidiana). Por isso, se  $A/R^2 \rightarrow 0$  ( $A/R^2$  é muito pequeno) a soma dos ângulos internos, equação (A.61), se aproximará de  $\pi$  (geometria euclidiana).

Por isso, ilustramos esse resultado com a seguinte afirmação (SARTORI, 1996, p. 272)

- Qualquer superfície com curvatura finita é localmente plana, ou seja, a geometria de uma pequena região é aproximadamente euclidiana.

Essa afirmação vai ao encontro da nossa noção intuitiva sobre medidas na superfície da Terra. Qualquer triângulo desenhado sobre a superfície da Terra (cujo comprimento dos lados do triângulo possamos medir com trenas) possui uma área pequena quando comparado com o quadrado do raio da Terra que vale  $(6,371 \times 10^6 \text{m})^2$ . Dessa forma, utilizamos a geometria plana sobre a superfície da Terra como uma aproximação que fica tão melhor quanto menor o valor da área da região. As questões centrais da geometria não-euclidiana foram, em grande parte, desenvolvidas pelos brilhantes matemáticos Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Georg Bernhard Riemann (1826 - 1866).

## A.5 A Teoria da Relatividade Geral (TRG)

### A.5.1 Introdução

A interação gravitacional é descrita pela lei da gravitação universal, proposta por Isaac Newton em 1687 no Principia. De acordo com a lei da gravitação universal, a intensidade da força entre dois objetos puntiformes de massas  $m_1$  e  $m_2$ , que no instante  $t$  estão separados por uma distância igual a  $|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|$ , é dada por

$$F = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|^2}, \quad (\text{A.62})$$

onde  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{N m}^2/\text{kg}^2$  enquanto  $\vec{r}_1(t)$  e  $\vec{r}_2(t)$ , representam os vetores de posição das massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente, em relação a um referencial inercial. A lei da gravitação universal combinada com as três leis do movimento de Newton permite-nos analisar e entender como o Sistema Solar e muitos outros sistemas similares que interagem gravitacionalmente funcionam.

A introdução em 1905 da TRR resolve problemas teóricos suscitados pela teoria eletromagnética de Maxwell como, por exemplo, a invariância das equações de Maxwell, mas ao mesmo tempo cria outros. Entre esses, a necessidade de uma nova teoria da gravitação compatível com a TRR. Por exemplo, na expressão acima, os vetores de posição das duas massas devem ser medidos ao mesmo tempo. Mas a TRR

nos ensina que a simultaneidade é um conceito relativo, e não absoluto. Além disso, a gravitação newtoniana é uma teoria de ação a distância. Aqui temos outro obstáculo, pois a TRR estabelece um limite para a velocidade com a qual a informação pode ser transmitida. Até a época em que Albert Einstein começava a enfrentar este problema não havia uma discrepância experimental marcante entre a gravitação newtoniana e os dados experimentais. Dessa forma, a TRG, que é uma teoria relativística para a gravitação, nasce de uma incompatibilidade teórica fundamental entre a gravitação newtoniana e a TRR. A busca de uma teoria relativística da gravitação leva a uma ruptura radical com a gravitação newtoniana. A lei da gravitação universal será no final substituída por uma geometrização completa dessa interação.

Mas, se a gravitação newtoniana é uma teoria bem-sucedida em muitos aspectos - afinal de contas fomos à Lua com ela - em que condições a TRG deixa de ser uma exigência formal e passa a ser experimentalmente relevante? De maneira simplificada podemos responder esta pergunta lembrando-nos do modo pelo qual decidimos se devemos ou não aplicar a cinemática relativística (seção A2) a um determinado problema. Se  $\vec{u}$  é a velocidade de um corpo, em um dado referencial inercial, e  $c$  é celeridade da luz, então se  $u/c \ll 1$  a situação é não-relativística. Por outro lado, se  $u/c \sim 1$ , então a situação é relativística. Para a relatividade geral, podemos ter um critério similar. De fato, o critério é fixado pela quantidade (HARTLE, 2003, p. 6)

$$\frac{GM}{Rc^2},$$

onde  $M$  é a massa da fonte gravitacional e  $R$ , o seu raio. Se esta quantidade for muito menor do que a unidade, a gravitação de Newton é uma boa aproximação para descrever o sistema. Se, por outro lado

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim 1,$$

o sistema exigirá que o analisemos do ponto de vista da TRG. Os sistemas que estudaremos neste texto, como o buraco negro de Schwarzschild, satisfazem este critério, como será visto posteriormente. A TRG é importante também nos problemas relacionados à localização precisa de um ponto sobre a superfície da Terra por meio do sistema GPS<sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup>Sistema de posicionamento global americano, cuja sigla GPS deriva do inglês *global positioning system*.

**Exercício 17** Calcule  $GM/(Rc^2)$  para:



1. a Terra;
2. o Sol;
3. uma estrela de nêutrons;
4. um buraco negro estelar;

Dados: Considere as massas e os raios para a Terra, o Sol, uma estrela de nêutrons, um buraco negro estelar e um buraco negro supermassivo iguais à  $M_{Terra} = 5,97 \times 10^{24}$  kg,  $R_{Terra} = 6,38 \times 10^6$  m,  $M_{Sol} = 1,99 \times 10^{30}$  kg,  $R_{Sol} = 6,96 \times 10^8$  m,  $M_{nêutrons} = 0,7 \times M_{Sol}$ ,  $R_{nêutrons} = 10^4$  m,  $M_{BNestelar} = 10 \times M_{Sol}$  e  $R_{BNestelar} = 3 \times 10^4$  m.

---

### A.5.2 Princípios da Relatividade Geral

Estudaremos a seguir os princípios que foram guias para a odisseia enfrentada por Einstein na construção da TRG. Através dos princípios podemos discutir alguns resultados importantes da teoria da TRG mesmo que de forma simplificada.

#### A.5.2.1 A busca do princípio da relatividade geral

Além da incompatibilidade entre a gravitação newtoniana e a TRR, um problema fundamental que incomodava Einstein estava relacionado ao descontentamento com o *status* que os referenciais inerciais possuem na MN e na TRR. Sempre que vamos descrever o movimento de um objeto, nós escolhemos um corpo rígido (um vagão ou a Terra) no qual fixamos um eixo de coordenadas e observadores munidos de réguas e relógios realizam medidas. Einstein argumenta que se queremos *descrever o movimento* de algum objeto - realizando medidas com réguas e relógios - é indiferente o referencial adotado para tal descrição. Entretanto, se quisermos *determinar as leis da Física* - relações entre as grandezas físicas medidas - estas apresentam uma forma mais simples quando escritas em relação aos referenciais inerciais. Sabemos da MN que a *equação de movimento* para um referencial inercial é dada pela *segunda lei de Newton*. Já para um referencial não-inercial a *equação de movimento* apresentará *termos extras*. Sabemos que a lei da inércia é violada nesses referenciais e objetos localizados em um

referencial não-inercial experimentarão a ação das chamadas *forças de inércia*. Podemos escrever as equações de movimento para um objeto de massa  $m$  no referencial inercial  $S$  e no referencial não-inercial  $S^*$ , respectivamente, da seguinte forma

$$m\vec{a} = \vec{F}_{res} \quad (\text{A.63})$$

e

$$m\vec{a}^* = \vec{F}_{res} - m\vec{A}, \quad (\text{A.64})$$

onde  $\vec{a}$  é a aceleração medida em  $S$ ,  $\vec{a}^*$  é a aceleração medida em  $S^*$ ,  $\vec{F}_{res}$  é a força resultante e o termo  $-m\vec{A}$  é a força de inércia. Analisando as equações (A.63) e (A.64) notamos que a equação de movimento assume uma forma mais simples em  $S$  do que em  $S^*$ . Um exemplo cotidiano elucida essa diferença, imagine que um conjunto de passageiros viajam em um ônibus com velocidade constante em relação ao solo (Terra). Em um determinado momento o ônibus realiza uma freada brusca, ou seja, a aceleração  $\vec{A}$  terá sentido contrário ao da velocidade do ônibus. Durante a freada, os passageiros no interior do ônibus irão experimentar uma forte sensação de puxão para frente. Esse puxão percebido pelos passageiros é justamente a força de inércia, que não possui um agente identificável. A força de inércia é dada por

$$\vec{F}_{inercia} = -m\vec{A}.$$

Se  $S^*$  se movimentar com velocidade constante, em relação ao referencial inercial  $S$ , as leis físicas, como a segunda lei de Newton, assumem a mesma forma simples em ambos os referenciais. Em nossa notação se  $S^*$  for inercial, movendo-se com velocidade constante em relação a  $S$ , escrevemos que  $S^* = S'$ . Os referenciais iniciais  $S$  e  $S'$  em movimento relativo entre si são completamente equivalentes. Um observador em um referencial inercial não consegue afirmar se o seu referencial está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Entretanto, se o referencial estiver acelerado o comportamento mecânico dos objetos será afetado pelas forças de inércia e um observador nesse referencial conseguirá identificar necessariamente que está em um referencial acelerado. Em um trecho do seu livro Einstein mostra a sua insatisfação com esse fato descrito:

“Como é possível que determinados corpos de referência (ou bem seus

estados de movimento) sejam privilegiados frente a outros (ou frente a seus estados de movimento respectivos)? Qual é a razão desse privilégio.”  
(EINSTEIN, 1999, p. 62)

Assim, Einstein propõe uma ampliação do PRR e enuncia o *Princípio da Relatividade Geral* (PRG) para incorporar os referenciais não-inerciais

As leis da natureza são válidas para todos os referenciais, qualquer que seja seu estado de movimento.

Entretanto, analisando o exemplo anterior do ônibus que sofre uma brusca freada notamos uma diferença importante entre os referenciais inerciais e não inerciais, pois caso um observador consiga medir a força de inércia ele detectará imediatamente que está em um referencial não-inercial. Esse obstáculo, então, precisará ser superado por Einstein na sua busca pela generalização do PRR. Discutiremos na próxima subseção um importante passo de Einstein na solução dessa aparente contradição do PRG.

#### A.5.2.2 O Princípio da Equivalência

O papel do Princípio da Equivalência (PE) na TRG é, atualmente, um tanto controverso, pois ele não é necessário para a introdução da TRG. Entretanto, não há dúvidas de que o PE teve um importante papel na formulação da TRG. A ideia do PE nasce em 1907 quando Einstein ainda trabalhava no escritório de patentes, na Suíça. Essa ideia foi chamada por ele de “*o pensamento mais feliz de minha vida*” e foi enunciado da seguinte forma:

“Então ocorreu-me o pensamento mais feliz de minha vida, na forma seguinte: O campo gravitacional tem existência relativa [...] pois para um observador que cai livremente do telhado de uma casa não há - pelo menos nas suas vizinhanças imediatas - campo gravitacional. De fato, se o observador deixar cair alguns corpos então estes permanecerão em repouso ou em movimento uniforme relativamente a ele, independentemente da sua natureza química ou física particular. O observador tem o direito de interpretar o seu estado como o de repouso.” (PAIS, 1995, p. 178)

O enunciado anterior traz uma equivalência entre um observador em queda e um observador em movimento uniforme no espaço livre<sup>17</sup>. Entretanto, para que possamos

---

<sup>17</sup>Espaço livre representa uma região do espaço que está livre da ação gravitacional de quaisquer corpos.

compreender este enunciado discutiremos, primeiramente, outras formulações mais simples do PE. Para isso utilizaremos dois referenciais: um referencial uniformemente acelerado e um referencial em repouso sobre a superfície da Terra.

Imagine, então, que uma nave repousa sobre a superfície da Terra. Suponha que o campo gravitacional gerado pelo planeta seja um campo uniforme  $\vec{g}$ . Um observador no interior da nave abandona uma maçã de massa  $m$  e ela cai atingindo o piso da nave - Figura A.26. A explicação para a queda da maçã utilizando a MN é de que a maçã é atraída pela Terra, que exerce uma força gravitacional nela. A maçã, então, adquire uma aceleração que coincide com  $\vec{g}$ . Nesta descrição desprezamos qualquer forma de atrito tal como a resistência do ar. Suponha, agora, que a nave seja colocada no espaço

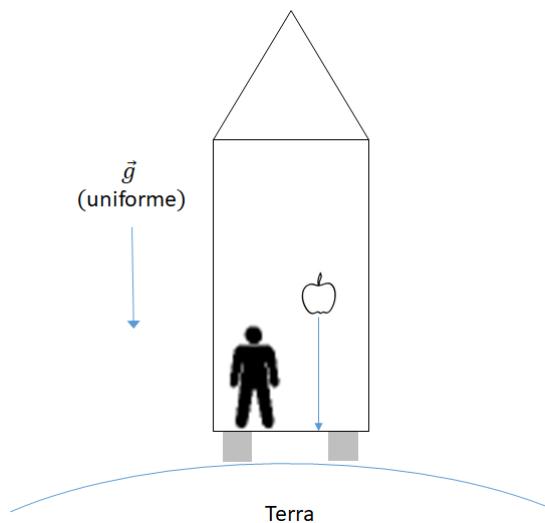


Figura A.26: Nave estacionária sobre a superfície da Terra.

livre, longe de qualquer corpo celeste, com uma aceleração  $\vec{A} = -\vec{g}$  (a aceleração da nave tem sentido oposto ao campo gravitacional) - Figura A.27. Se o observador na nave acelerada ( $S^*$ ) repetir o experimento anterior e abandonar uma maçã em seu referencial ela irá cair e atingirá o piso da nave, da mesma forma como ocorrido quando a nave estava em repouso na superfície da Terra. Na Figura A.26 a força exercida na maçã é a força gravitacional e na Figura A.27 a força exercida na maçã é a força de inércia. A força de inércia é dada por

$$\vec{F}_{inercia} = -m\vec{A} = m\vec{g},$$

onde na expressão anterior fizemos  $\vec{A} = -\vec{g}$ .

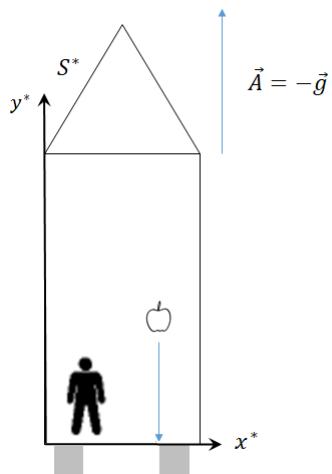


Figura A.27: Nave acelerada no espaço sideral longe de qualquer corpo celeste.

Poderíamos, ainda, imaginar outros experimentos e comparar os resultados para os referenciais  $S$  e  $S^*$ , mas os resultados encontrados seriam idênticos para ambos os referenciais. Dessa forma, se um observador, no interior de uma nave, não tiver qualquer informação sobre o que está ocorrendo fora dela ele não conseguirá afirmar se está em uma nave que repousa na superfície da Terra ou se está em uma nave acelerada no espaço livre. Esse fato é chamado de *Princípio da Equivalência* (PE) e afirma que:

**Nenhuma experiência, mecânica, pode distinguir entre um campo gravitacional uniforme ( $\vec{g}$ ) e a aceleração uniforme equivalente ( $\vec{A} = -\vec{g}$ ).**

O enunciado acima é chamado de *forma fraca* do PE, pois só leva em conta experiências de mecânica em sua formulação. A indistinguibilidade entre um referencial uniformemente acelerado e um referencial sob a ação de um campo gravitacional mostra um importante passo na busca de Einstein pelo PRG. O PE estabelece uma equivalência entre um referencial inercial e um referencial não-inercial fazendo com que a aceleração absoluta não tenha significado. A Figura A.28 ilustra o PE, mostrando que a marcação de dois dinamômetros colocados em situações distintas é idêntica e, também, que a aceleração de queda é a mesma em ambas as situações. A igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional é uma condição necessária para que o PE seja válido, pois qualquer pequena diferença entre as duas massas causaria uma distinção entre as situações destacadas na Figura A.28 e, dessa forma, invalidaria o PE.

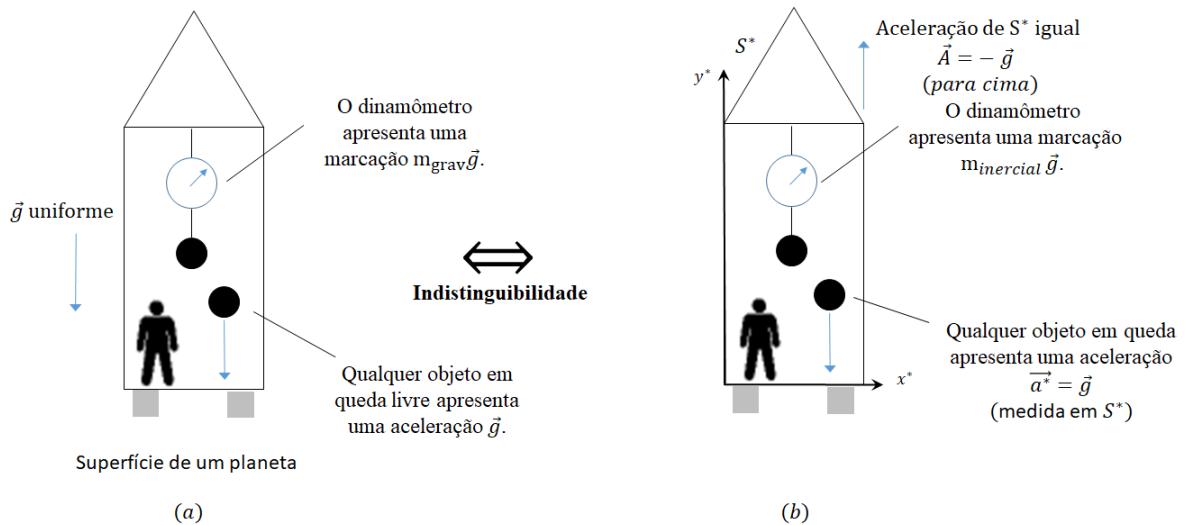


Figura A.28: Equivalência entre um referencial em repouso sobre a superfície do planeta e um referencial acelerado apresentando uma aceleração uniforme equivalente. Os mesmos resultados experimentais são obtidos nas duas situações.

A massa inercial é uma medida da resistência que um corpo oferece à alteração de sua velocidade, a inércia. A massa gravitacional é o análogo gravitacional da carga elétrica e está associada à interação gravitacional. A forma de medir as massas inercial e gravitacional é bastante distinta. Podemos medir a massa inercial ( $m_I$ ) de um objeto utilizando a segunda lei de Newton,

$$m_{inercial} = \frac{|\vec{F}_{res}|}{|\vec{a}|}.$$

A massa inercial também é a massa que aparece na equação (A.28). Já a massa gravitacional  $m_g$  do mesmo objeto pode ser medida com o auxílio de um dinamômetro, a qual medimos a força gravitacional exercida pela Terra e, dessa forma, por meio da leitura da escala do dinamômetro inferimos o valor da massa gravitacional. Analisando o equilíbrio de forças, podemos escrever uma relação entre a força  $T$ , que o dinamômetro exerce no objeto, com a força gravitacional, sendo dada por  $T = F_{grav}$ . Matematicamente escrevemos para  $m_{grav}$  a seguinte expressão

$$m_g = \frac{r^2 |\vec{F}_{grav}|}{G M},$$

onde  $r$  representa a distância entre o centro da Terra e o objeto;  $M$  a massa (gravitacional) da Terra; e  $G$  a constante de gravitação. Um resultado importante obtido por Galileu Galilei sobre a aceleração dos corpos em queda livre, na ausência da resistência do ar, é de que os corpos caem com uma mesma aceleração, que é dada pela aceleração da gravidade ( $g$ ). Para tal, a razão  $\frac{m_g}{m_I}$  deve ser igual à unidade. Assim, as massas inercial e gravitacional devem ser iguais embora a maneira de medi-las sejam bastante distintas. Experimentos têm sido realizados para testar essa igualdade. Podemos citar aqui os experimentos realizados pelos físicos Galileu Galilei, Isaac Newton, Barão Loránd von Eötvös, R. H. Dicke e, mais recentemente, S. Schlamminger que confirmaram a igualdade entre as massas inercial e gravitacional (OHANIAN; RUFFINI, 2013, p. 21). Dentro do escopo da MN essa igualdade é uma notável coincidência, pois não apresenta uma explicação ou justificativa com base na teoria:

“Até hoje a mecânica, na verdade, registrou este importante princípio, mas não o interpretou.” (EINSTEIN, 1999, p. 58)

Entretanto, Einstein consegue interpretar a igualdade  $m_I = m_g$  e diz

“Esta lei [...] da igualdade da massa inercial e da massa gravitacional foi então percebida por mim com todo o seu significado. Fiquei abismado com sua existência e conjecturei que ela deveria conter a chave para uma compreensão mais profunda da inércia e gravitação.” (NUSSENZVEIG, 2002, p. 307)

Essa interpretação apresenta o seguinte raciocínio: suponha o PE na sua *forma fraca* como ponto de partida e, dessa forma, consideramos ele válido na situação analisada. Utilizando, então, o PE analisaremos a consequência de sua aplicação em um *experimento de pensamento*, que é mostrado na Figura A.28. Na situação da Figura A.28 (a) temos uma nave em repouso na superfície da Terra em que duas medidas são realizadas, a medida do dinamômetro e a medida da aceleração de queda. Seja  $T$  o valor medido no dinamômetro e  $a$  o valor determinado para a aceleração. Suponha que as massas inercial e gravitacional do objeto “D” (fixo no dinamômetro) sejam  $m_{I_D}$  e  $m_{g_D}$  e que as massas inercial e gravitacional do objeto “Q” (corpo em queda) sejam  $m_{I_Q}$  e  $m_{g_Q}$  - Figura A.28 (a). Utilizando o equilíbrio de forças em “D” e a segunda lei de Newton em “Q” escrevemos

$$T = m_{g_D} \cdot g$$

e

$$a = \frac{m_{g_Q}}{m_{I_Q}} g.$$

Analisamos agora a situação mostrada na Figura A.28 (b). Nessa figura a nave está acelerada no espaço livre, com aceleração  $\vec{A} = -\vec{g}$ , sendo realizadas, novamente, a medida do dinamômetro e a medida da aceleração de queda. Seja  $T^*$  o valor medido no dinamômetro e  $a^*$  o valor determinado para a aceleração. Os mesmos corpos “D” e “Q” estão pendurados no interior da nave acelerada como mostra a Figura A.28 (b). Utilizando agora a equação de movimento (A.64) para um referencial não-inercial obtemos

$$T^* = m_{I_D} \cdot g$$

e

$$a^* = g.$$

Pelo PE na sua *forma fraca* as situações da Figura A.28 (a) e (b) são equivalentes (indistinguíveis) e, portanto, a marcação no dinamômetro deve ser a mesma em ambas as situações, ou seja,  $T = T^*$ . Logo,

$$m_{g_D} \cdot g = m_{I_D} \cdot g.$$

Cancelando os termos comuns segue que

$$m_{g_D} = m_{I_D}.$$

Analisando, agora, a aceleração do objeto “Q” em queda nas duas situações da Figura A.28 temos pelo PE que  $a = a^*$ . Assim,

$$\frac{m_{g_Q}}{m_{I_Q}} g = g.$$

Rearranjando a equação acima e eliminando os termos em comum obtemos

$$m_{g_Q} = m_{I_Q}.$$

Portanto, o PE na sua *forma fraca* leva à igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional e, dessa forma, nos permite interpretar fisicamente esta igualdade. Nas palavras de Einstein

Vemos por este exemplo, que nossa extensão do princípio da relatividade faz aparecer como necessária a afirmação da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional. Com isto obtivemos uma interpretação física desta proposição. (EINSTEIN, 1999, p. 60)

O exemplo mencionado por Einstein, na citação acima, é análogo ao discutido anteriormente. Einstein utiliza o PE, embora ele não utilize esse termo em seu livro, para interpretar a igualdade entre as massas inercial e gravitacional. Portanto, o PE estabelece uma equivalência entre um campo gravitacional uniforme ( $\vec{g}$ ) e uma aceleração uniforme (em sentido oposto ao campo gravitacional).

### A.5.2.3 Princípio da Equivalência em termos dos referenciais em queda livre

Podemos, também, reescrever o PE em termos dos referenciais em queda livre ilustrando o “pensamento mais feliz da vida de Einstein”:

Nenhuma experiência, mecânica, pode distinguir entre um referencial em queda livre e um referencial em movimento uniforme no espaço livre.

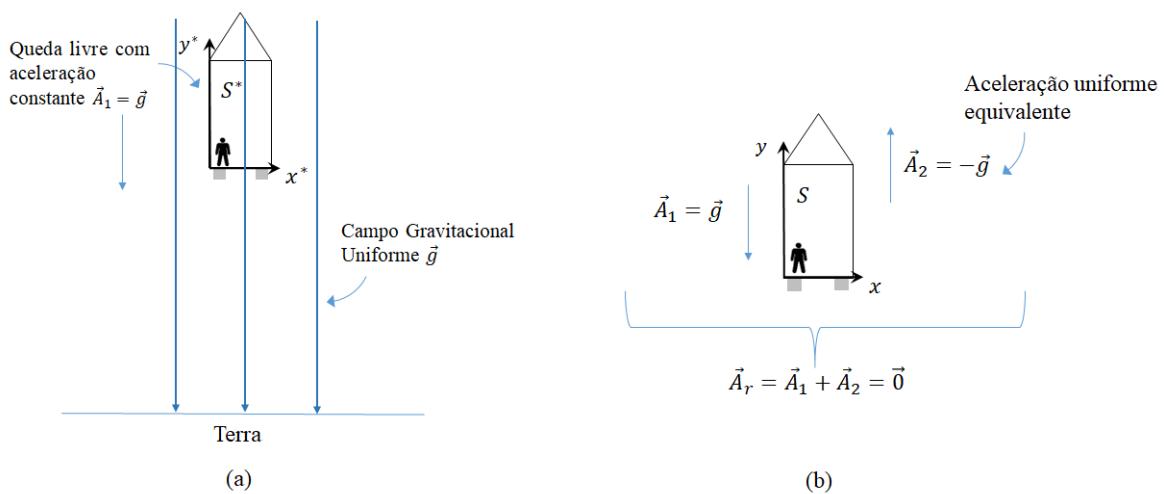


Figura A.29: (a) Nave em queda livre com aceleração  $\vec{A}_1 = \vec{g}$ . (b) Nave no espaço livre em repouso (ou movimento uniforme) com  $\vec{A}_r = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{g} - \vec{g} = \vec{0}$ .

O PE enunciado dessa forma traz uma equivalência entre um referencial uniformemente acelerado (queda livre) com um referencial inercial em repouso (ou movimento uniforme) no espaço livre. Para que possamos compreender esse enunciado, comece analisando a Figura A.29 (a). O referencial  $S^*$  (nave) está em queda livre com aceleração  $\vec{A}_1 = \vec{g}$  em um campo gravitacional uniforme  $\vec{g}$ . Vimos que existe uma equivalência entre um campo gravitacional uniforme e uma aceleração uniforme equivalente. Dessa forma, utilizando o PE substituímos o campo gravitacional  $\vec{g}$ , a qual  $S^*$

está sujeito, por uma aceleração equivalente  $\vec{A}_2 = -\vec{g}$  como mostrado na Figura A.29 (b). Assim, podemos determinar a aceleração resultante da nave, agora tratada como referencial  $S$ , no espaço livre da seguinte forma

$$\vec{A}_r = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{g} - \vec{g},$$

i.e,

$$\vec{A}_r = \vec{0}.$$

O Referencial  $S$  (nave no espaço livre) constitui um referencial inercial, pois possui aceleração nula. Assim, conseguimos interpretar o “pensamento mais feliz da vida de Einstein” repetido aqui por conveniência

**“[...] O campo gravitacional tem existência relativa [...] pois para um observador que cai livremente do telhado de uma casa não há [...] campo gravitacional.** De fato, se o observador deixar cair alguns corpos então estes permanecerão em repouso ou em movimento uniforme relativamente a ele, independentemente da sua natureza química ou física particular. O observador tem o direito de interpretar o seu estado como o de repouso.” (PAIS, 1995, p. 178 Grifo nosso)

Como mostrado, a equivalência entre esses referenciais ilustra que os mesmos efeitos serão sentidos por um observador em queda livre em um campo gravitacional uniforme e por um observador que está em repouso (ou movimento uniforme) no espaço livre. Objetos abandonados nas proximidades deles irão ficar em repouso tanto em relação ao observador em queda quanto em relação ao observador no espaço livre.

Até agora omitimos um detalhe importante relacionado ao campo gravitacional. Os campos gravitacionais, criados por distribuições de massa, são em geral não-uniformes, ou seja, a intensidade e a direção variam de ponto para ponto. Por exemplo, a intensidade do campo gravitacional da Terra varia com o inverso do quadrado da distância e, dessa forma, o campo apresentará um valor maior próximo da superfície do planeta do que para um local mais afastado. Imagine que dois objetos de massa  $m$ , presos por uma mola, serão soltos e irão cair em queda livre num campo gravitacional não uniforme criado pela Terra. Se analisarmos o movimento desse conjunto, perceberemos que a separação entre as massas  $m$  irá aumentar durante a queda - Figura A.30. A massa 1 que está mais próxima da superfície da Terra apresentará uma aceleração,

em módulo, maior do que a aceleração da massa 2, que está mais afastada da superfície da Terra, fazendo a mola ficar cada vez mais distendida. Se repetíssemos esse mesmo experimento e abandonássemos esse conjunto (massas presas por uma mola) em uma nave uniformemente acelerada, em sentido contrário ao do campo gravitacional, no espaço livre nós observaríamos que, durante a queda, a mola irá preservar o seu comprimento inicial. Esse fato, claramente cria uma distinção entre um campo gravitacional (não uniforme) e uma aceleração uniforme. Essa distensão da mola que o campo gravitacional não uniforme provoca é chamado de efeito de maré.

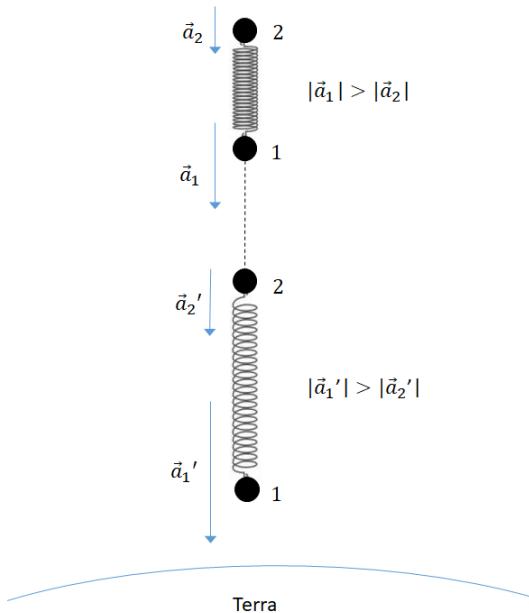


Figura A.30: Massas 1 e 2 presas por uma mola em queda livre num campo gravitacional não uniforme analisada em dois instantes de tempo diferentes.

A situação discutida acima não invalida o PE, mas impõe uma restrição. Discutiremos a seguir como enunciaremos o PE levando em conta campos gravitacionais não-uniformes e utilizando os referenciais em queda livre.

Para que possamos escrever o PE em termos dos referenciais em queda livre, em um campo gravitacional não-uniforme, primeiramente analisaremos o alerta de Einstein

“ [...]O campo gravitacional tem existência relativa [...] pois para um observador que cai livremente do telhado de uma casa não há - **pelo menos nas suas vizinhanças imediatas** - campo gravitacional [...]” (PAIS, 1995, p. 178 Grifo nosso)

O termo “*pelo menos nas suas vizinhanças imediatas*” mostra que é necessário restringir o tamanho da região analisada para que o campo gravitacional seja tratado como uniforme. Além disso, também devemos restringir o intervalo de tempo de nossa análise. Dessa forma, para um referencial em queda livre  $S^*$  podemos localmente (em uma pequena região do espaço e em curtos intervalos de tempo) substituir o campo gravitacional por uma aceleração uniforme equivalente. Logo, localmente um referencial em queda livre é equivalente a um referencial inercial na ausência de campo gravitacional. Assim, podemos reescrever o PE em termos dos referenciais em queda livre em um campo gravitacional não-uniforme da seguinte forma:

Nenhuma experiência, mecânica, pode distinguir *localmente* entre um referencial em queda livre e um referencial em movimento uniforme no espaço livre.

#### A.5.2.4 Princípio da equivalência na sua forma forte

Podemos, ainda, generalizar os enunciados anteriores para o PE estabelecendo uma equivalência entre um referencial em repouso sob a ação de um campo gravitacional e um referencial uniformemente acelerado no espaço livre para quaisquer experimentos, mecânicos ou não. O PE na sua *forma forte* pode ser escrito como

Nenhuma experiência, mecânica ou não, pode distinguir entre um referencial em queda livre e um referencial em movimento uniforme no espaço livre.

Essa generalização do PE possibilitará determinar a previsão de dois novos fenômenos como a deflexão da luz num campo gravitacional e o desvio gravitacional para o vermelho (*gravitational redshift*). Esses fenômenos serão discutidos posteriormente.

Ressaltamos, por fim, que o PE consiste em um poderoso argumento na busca de Einstein por um PRG. Vimos anteriormente um argumento que ia de encontro ao PRG, pois o comportamento mecânico dos objetos é afetado nos referenciais não-inerciais. Para ilustrar esse comportamento podemos lembrar do forte puxão que experimentamos no interior de um ônibus que sofre uma forte freada. Durante a freada, experimentamos um forte puxão para frente e, assim, observadores em um referencial não-inercial poderiam através de experimentos determinar que estão em um referencial acelerado. Entretanto, utilizando o PE poderíamos pensar que o ônibus está em

repouso em um campo gravitacional (em sentido contrário ao da aceleração) apontando para frente. Por meio do PE chegaríamos à conclusão que um observador no interior do ônibus não conseguiria distinguir se está no interior de um referencial acelerado ou se está em um referencial em repouso sob a ação de um campo gravitacional. Nesse contexto, o PE mostra-se um poderoso argumento contra o caráter absoluto (identificável) da aceleração de um dado referencial não-inercial.

#### A.5.2.5 Princípio da Consistência (ou Correspondência)

Como já mencionado, a TRG de Einstein é uma teoria relativística para a gravitação, que generaliza a gravitação newtoniana e, logicamente, reinterpreta os conceitos newtonianos. Sabemos que a teoria de Newton é capaz de explicar muito bem o funcionamento do Sistema Solar, incluindo os efeitos perturbativos que levam, por exemplo, à precessão das órbitas de alguns planetas<sup>18</sup>. Como qualquer teoria que pretende generalizar uma teoria que a precedeu, a nova teoria deve apresentar os mesmos resultados de sucesso da teoria antecessora. Assim, a TRG deve recuperar os resultados newtonianos para baixas velocidades ( $v/c \ll 1$ ) e interação gravitacional fraca ( $GM/Rc^2 \ll 1$ ).

### A.5.3 Desvio Gravitacional para o vermelho

Utilizando o PE na sua *forma forte* Einstein prevê dois novos fenômenos que posteriormente foram testados experimentalmente – o *desvio gravitacional para o vermelho*; e a *deflexão da luz em um campo gravitacional*. Para ilustrar o *desvio gravitacional para o vermelho* imagine uma nave, referencial  $S^*$ , movendo-se no espaço livre com uma aceleração vertical (para cima), em módulo, igual à  $g$ . O comprimento vertical da nave vale  $L$  e uma fonte de luz (FL), que repousa sobre a base da nave, emite luz a uma frequência  $f_{FL}$ . Um observador  $R$  fixo em  $S^*$  está no topo da nave e recebe a luz emitida pela FL, registrando o valor  $f_R$  para essa medida. Para relacionar a frequência  $f_{FL}$  da FL com a frequência  $f_R$  utilizaremos a equação para o efeito Doppler obtida na subseção A.2.6. Entretanto, o referencial  $S^*$ , no qual a FL e o observador  $R$  estão em repouso, é claramente não-inercial. Na dedução para o efeito Doppler utilizamos um observador que se movia com velocidade constante em relação a uma FL. Para compatibilizar a expressão do efeito Doppler com o fato do observador  $R$  estar em

---

<sup>18</sup>Uma exceção está na descrição da precessão na órbita de Mercúrio.

movimento uniformemente acelerado utilizaremos uma estratégia que será descrita a seguir. Sejam  $S$  e  $S'$  dois referenciais inerciais, a qual  $S'$  move-se com velocidade constante  $v$  em relação à  $S$ . No instante  $t = 0$  s, a FL, em repouso em  $S^*$ , emite um pulso de luz. Nesse mesmo instante, *e apenas nesse instante*, faremos os referenciais  $S^*$  e  $S$  (inercial) coincidirem. Para isso faremos com que  $S^*$  possua uma velocidade nula para  $t = 0$  s. Em um instante posterior, digamos  $t$ , o pulso luminoso chega no observador  $R$ . No instante  $t$ , faremos, agora, os referenciais  $S^*$  e  $S'$  coincidirem. No instante  $t$ , *e somente nesse instante*, admitiremos que  $S^*$  e  $S'$  possuam a mesma velocidade  $v$ . A Figura A.31 ilustra os argumentos discutidos até agora, relacionando o referencial não-inercial  $S^*$  com os referenciais inerciais  $S$  e  $S'$ . Admitindo baixas ve-

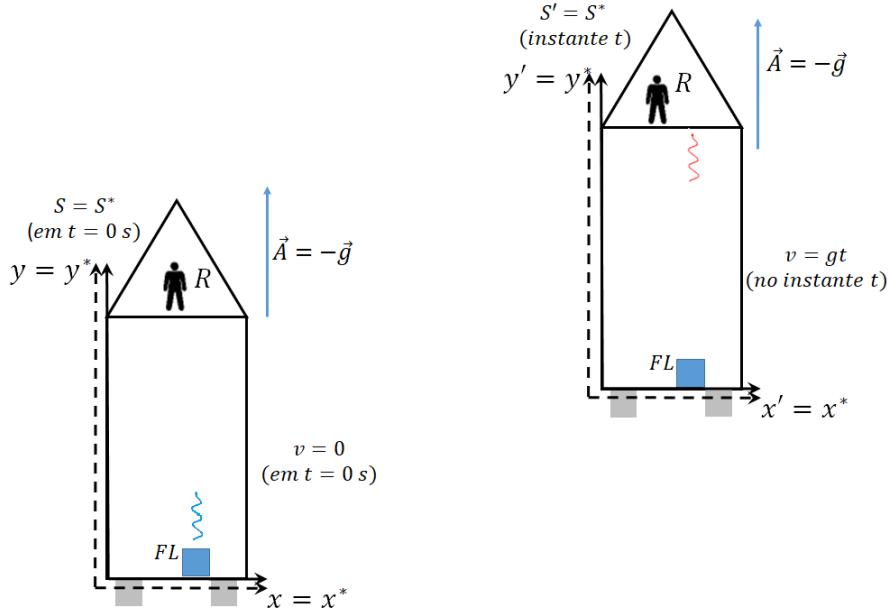


Figura A.31: Procedimento para utilizar a equação do efeito Doppler para um movimento acelerado: No instante  $t = 0$  os referenciais  $S$  e  $S^*$  coincidem, pois supomos a velocidade inicial do referencial  $S^*$  nula. No instante  $t$  os referenciais  $S'$  e  $S^*$  coincidem, pois supomos que eles apresentam a mesma velocidade  $v$  no instante  $t$ .

locidades ( $v \ll c$ ) utilizaremos a expressão para o efeito Doppler (afastamento), para baixas velocidades, obtida no exercício 5 da seção A2, que é dada por

$$f'_R = f_{FL}(1 - v/c). \quad (\text{A.65})$$

Na condição de baixa velocidade faremos simplesmente  $v = gt$  para a velocidade do referencial  $S^*$ , que é a expressão newtoniana para a velocidade no movimento unifor-

memente variado. O intervalo de tempo entre a emissão da luz e a recepção em  $R$  vale

$$t = L/c.$$

Assim, utilizando a expressão acima podemos reescrever a relação para a velocidade como

$$v = gt = gL/c.$$

Substituindo o resultado anterior na equação (A.65) segue que

$$f_R = f_{FL}(1 - gL/c^2), \quad (\text{A.66})$$

onde  $gL/c^2 \ll 1$ , que representa a condição de validade para a expressão acima. Como  $(1 - gL/c^2) < 1$  temos que  $f_R < f_{RL}$ . Dessa forma, como a frequência da luz recebida por  $R$  é menor do que a frequência da luz emitida pela FL, dizemos que a frequência medida em  $R$  foi reduzida e ocorreu um *desvio para o vermelho (redshift)*, pois dentro do espectro visível o vermelho é a cor de menor frequência. De acordo com o PE na sua *forma forte* o mesmo efeito deve ocorrer se a nave repousar sobre a superfície de um planeta (como a Terra, por exemplo) cujo campo gravitacional uniforme vale  $\vec{g}$  - Figura A.32.

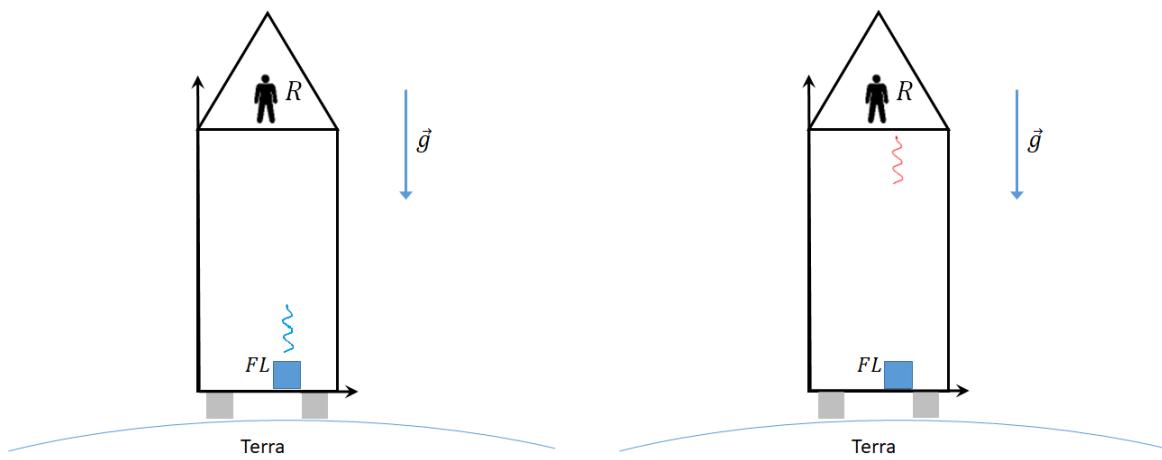


Figura A.32: Utilizando o PE na sua *forma forte* prevemos que o desvio para o vermelho deve ocorrer num campo gravitacional quando uma fonte FL de luz emite um pulso luminoso na direção do observador  $R$ .

No caso da Figura A.32 ressaltamos que a FL e o observador  $R$  estão em repouso

entre si. O observador  $R$  percebe uma redução na frequência da luz recebida em relação à frequência da luz emitida pela FL, mas não pode atribuir essa alteração na frequência ao movimento relativo já que nessa situação a FL e  $R$  estão em repouso. Podemos, ainda, reescrever a equação (A.66) da seguinte forma

$$\frac{\Delta f}{f_{FL}} = -\frac{gL}{c^2}, \quad (\text{A.67})$$

onde  $\Delta f = f_{FL} - f_R$ . Na expressão (A.67) podemos interpretar a quantidade  $gL$  como a diferença de potencial gravitacional. Assim, a variação de frequência  $\Delta f$  de um pulso luminoso depende da diferença de potencial entre o ponto inicial e o ponto final da trajetória da luz entre a emissão e a recepção. Representando o potencial gravitacional (energia potencial por unidade de massa) pela letra  $\phi$  e escrevendo-o utilizando a aproximação de campo uniforme temos que  $\phi = gh$ , onde  $h$  representa a altura em relação à base da nave. Assim, podemos fazer  $gL = g(h_R - h_{FL}) = \phi_{rec} - \phi_{fonte}$  e escrever

$$\frac{\Delta f}{f_{FL}} = -\frac{gL}{c^2} = -\frac{(\phi_{rec} - \phi_{fonte})}{c^2} \quad (\text{A.68})$$

Observando a equação (A.68) atribuímos o *desvio para o vermelho à gravidade*. A luz apresenta um desvio para o vermelho ao se movimentar no sentido contrário ao do campo gravitacional. Esse efeito é chamado de *desvio gravitacional para o vermelho (redshift gravitacional)*.

---

**Exercício 18** Refaça a dedução anterior, porém considere que a FL está no topo da nave e o observador R está na base. A luz é emitida no topo da nave e propaga no mesmo sentido do campo gravitacional. O observador R também medirá um valor menor de frequência em relação a frequência da FL? Dica: Você deve utilizar a expressão do efeito Doppler para a aproximação entre observador e fonte. ■

---

**Exercício 19** Considere um pequeno laboratório de altura  $H$  em queda livre no campo gravitacional esfericamente simétrico gerado por uma massa  $M$ . Considere o valor de  $H$  pequeno para que o campo gravitacional possa ser aproximado como uniforme. Fixo no chão do laboratório há um emissor de ondas eletromagnéticas  $E$  verticalmente alinhado com um receptor  $R$ . No instante  $t = 0$ , o emissor emite uma onda eletromagnética de frequência  $f_E$  que atravessa o teto transparente do laboratório

e é registrada pelo receptor  $R$  no instante  $t = H/c$  - Figura A.33. Suponha que o observador externo (receptor  $R$ ) e a fonte emissora  $E$  afastem-se com velocidade  $V = gt$ , onde  $g$  representa a aceleração da gravidade. Determine a alteração na frequência percebida pelo receptor  $R$  em relação à frequência emitida pela fonte luminosa. Obs: Esse problema está resolvido em (MACHADO; TORT; ZARRO, 2021, p. 4). ■

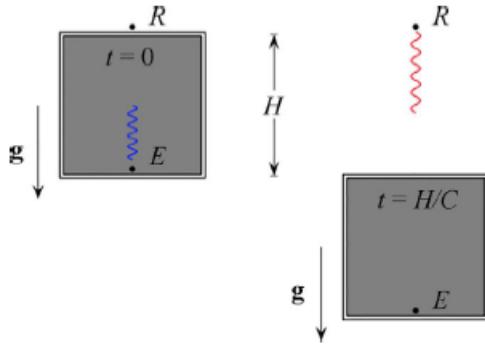


Figura A.33: Um laboratório de altura  $H$  está em queda livre. Uma fonte de luz fixa na base do laboratório emite luz que atravessa o teto transparente dele e é recebida por um receptor  $R$  que permanece fixo.

Analizando ainda a situação da Figura A.32, admita que a FL emita  $N$  frentes de onda e um observador, ao lado da FL, registre um intervalo de tempo  $\Delta t_{FL}$  para as  $N$  frentes de onda emitidas. Essas  $N$  frentes de onda alcançam o observador  $R$  que mede, com seu relógio, o intervalo  $\Delta t_R$ . Podemos determinar a frequência de uma onda calculando a razão entre  $N$  e o intervalo de tempo  $\Delta t$ , ou seja,  $f = N/\Delta t$ . Como o número de frentes de onda que saem da FL é igual ao número de frentes de onda que chegam para o observador  $R$ , podemos escrever

$$f_{FL}\Delta t_{FL} = N = f_R\Delta t_R.$$

Como  $f_{FL} > f_R$ , temos que

$$\Delta t_{FL} < \Delta t_R.$$

Podemos interpretar o resultado acima da seguinte forma: um relógio colocado em  $R$  funciona mais rapidamente quando comparado a um relógio colocado junto à FL. Lembramos aqui que o relógio ao lado da FL está mais próximo da Terra (fonte gravitacional) do que o relógio junto ao observador em  $R$ . Assim, o funcionamento de

relógios em um campo gravitacional pode ser enunciado da seguinte forma:

- Relógios próximos de um corpo massivo funcionam mais lentamente em comparação a relógios afastados dele.

A seguir discutiremos mais um resultado previsto por Einstein utilizando o PE.

#### A.5.4 Deflexão da trajetória da luz em um campo gravitacional

Apresentaremos aqui uma segunda aplicação do PE na sua *forma forte* para a discussão da trajetória da luz num campo gravitacional. Para tal utilizaremos a mesma estratégia anterior. Investigaremos o comportamento da luz num referencial uniformemente acelerado no espaço livre e, utilizando o PE, iremos inferir o comportamento da luz num referencial em repouso na superfície da Terra.

Suponha, então, uma nave acelerada  $S^*$ , em relação a um referencial inercial  $S$ , em movimento no espaço livre. Um pulso luminoso propaga no espaço livre em uma direção perpendicular ao movimento da nave. Supomos que o pulso luminoso atravessa a nave  $S^*$  entrando por uma abertura localizada em 1 e saindo por uma abertura localizada em 2 - Figura A.34. Analisando Figura A.34 notamos que a abertura loca-

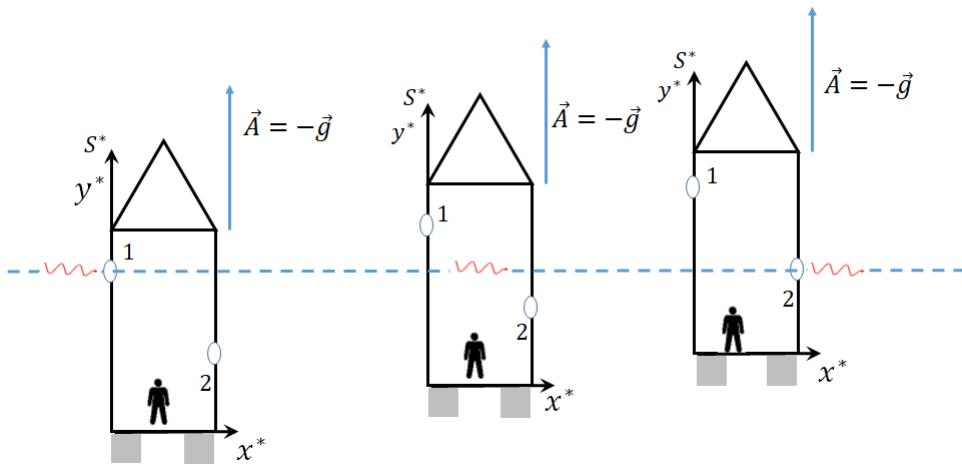


Figura A.34: Trajetória da luz (linha tracejada azul) vista do ponto de vista de um observador inercial  $S$ .

lizada à esquerda da nave (ponto 1) está a uma altura maior, em relação ao chão, do que a abertura localizada à direita da nave (ponto 2). A linha tracejada azul corresponde a trajetória da luz no referencial inercial  $S$  (não mostrado na figura). Podemos

agora, observar a mesma sequência de eventos vista por um observador na nave ( $S^*$ ). O observador na nave verifica que a luz entra pelo ponto 1 (de altura maior) e sai pelo ponto 2 (de altura menor). Assim, a trajetória da luz sob o ponto de vista de  $S^*$  é uma curva - Figura A.35. De acordo com o PE na sua *forma forte*, um referencial uniforme-

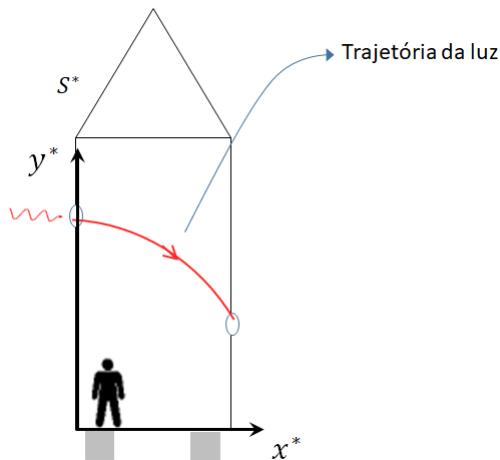


Figura A.35: Trajetória da luz (linha contínua vermelha) vista do ponto de vista de um observador não-inercial  $S^*$ .

mente acelerado é equivalente (os mesmos resultados experimentais serão obtidos) a um referencial em repouso sob a ação de um campo gravitacional uniforme. Assim, se repetirmos a mesma experiência com a nave repousando sobre a superfície do planeta Terra, o PE garante que o mesmo comportamento da luz no referencial não-inercial  $S^*$  ocorrerá no referencial em repouso sobre a superfície da Terra. A Figura A.36 ilustra que a luz sofrerá uma *deflexão* na sua trajetória ao propagar na presença de um campo gravitacional. A luz apresenta uma trajetória análoga ao de uma partícula em um lançamento horizontal na Terra, por exemplo.

Será que uma experiência pode ser realizada e efetivamente comprovar a previsão descrita acima? Na superfície da Terra o efeito da *deflexão* é muito pequeno, mas Einstein indicou como a *deflexão da luz* poderia ser testada. Essa previsão poderia ser testada quando a luz passasse por um corpo massivo como é o caso do Sol. Voltaremos a essa discussão na seção A6 ao falarmos sobre os testes clássicos da TRG.

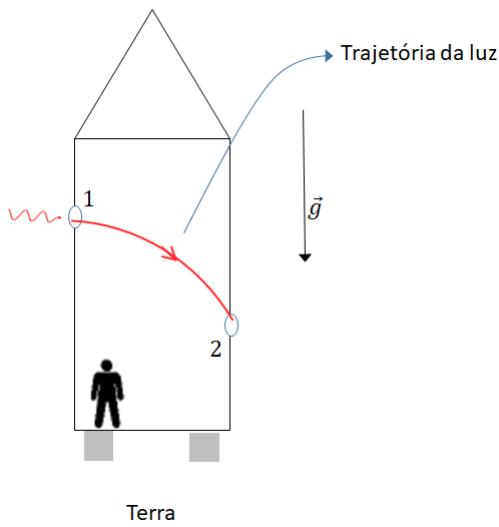


Figura A.36: Trajetória da luz (linha contínua vermelha) vista do ponto de vista de um observador em um referencial estacionário sobre a superfície da Terra.

## A.5.5 Espaço-tempo curvo

### A.5.5.1 Plataforma girante e o espaço-curvo.

Einstein chega a conclusão em 1912 que o espaço não poderia permanecer plano na presença de matéria (SARTORI, 1996, p. 277). Um experimento que, aparentemente, conduziu Einstein a essa percepção foi o experimento da plataforma (ou disco) girante (EINSTEIN, 1999, p. 67). Para ilustrar essa percepção de Einstein imagine uma plataforma horizontal de raio  $r$  que gira com velocidade angular constante  $\omega$  em relação a um eixo vertical - Figura A.37. Um referencial inercial  $S$  está fixo no solo e um referencial não-inercial  $S^*$  está fixo na plataforma. Queremos aqui relacionar as medidas feitas por um observador em  $S$  com as medidas feitas com um observador em  $S^*$ . Digamos que, por exemplo, ambos queiram medir o comprimento de uma pequena barra  $B$  fixada na periferia da plataforma - Figura A.38. Para que possamos utilizar os resultados da TRR e comparar os comprimentos determinados, para a barra  $B$ , em  $S$  e  $S^*$  suporemos que a medida feita pelo observador  $S^*$  coincide com a medida feita em um referencial inercial  $S'$  (*somente em um instante*), onde  $S'$  move-se com velocidade constante em relação a  $S$  - Figura A.39. Como a barra  $B$  está fixa na plataforma, o observador em  $S^*$  mede o comprimento próprio dela, sendo denotado esse comprimento por  $L_0$ . Para o observador em repouso sobre o solo ( $S$ ), ele medirá um comprimento menor que o comprimento próprio, pois a barra  $B$  está em movimento em relação à

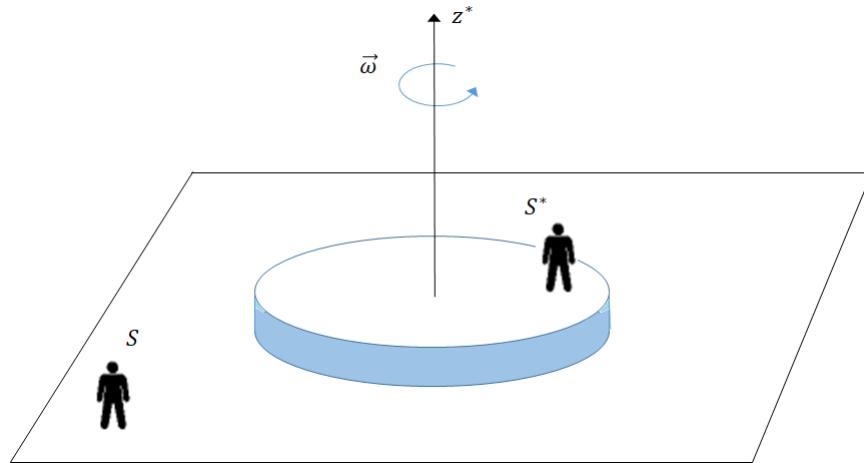


Figura A.37: Plataforma girante em relação a vertical com velocidade angular  $\omega$  constante.

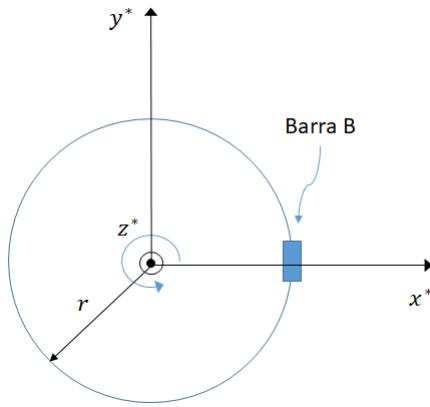


Figura A.38: Vista superior da plataforma girante e barra B posicionada na periferia da plataforma.

$S$ . Denotaremos o comprimento da barra  $B$  medido em  $S$  por  $L$ . Podemos relacionar a medida feita em  $S^*$  (utilizando o referencial inercial  $S'$ ) com a medida feita em  $S$  através da *contração de Lorentz*

$$L = L_0 / \gamma, \quad (\text{A.69})$$

onde  $\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2} = 1 / \sqrt{1 - (\omega r)^2/c^2}$ . Note que  $v$  representa o módulo da velocidade tangencial da periferia da plataforma e, também, a velocidade do referencial  $S'$  e pode ser relacionada com a velocidade angular e o raio  $r$  da plataforma através da equação  $v = \omega r$ .

Analizando a equação (A.69) notamos que o comprimento da barra em  $S$  é menor

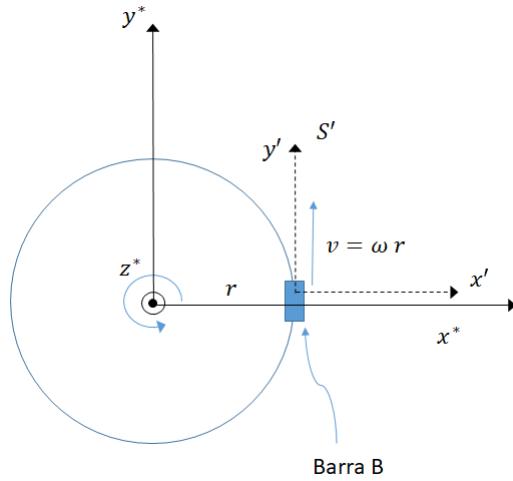


Figura A.39: Vista superior da plataforma girante de raio  $r$  e barra B posicionada na periferia da plataforma e a relação entre a medida do referencial não-inercial  $S^*$  com o referencial  $S'$ .

do que o comprimento da barra em  $S^*$ . Se, agora, colocarmos diversas barras ao longo do comprimento da circunferência da plataforma, teremos que observadores no solo ( $S$ ) e na plataforma girante ( $S^*$ ) irão medir valores diferentes para o comprimento da circunferência da plataforma. A expressão que relaciona o comprimento da circunferência medido em  $S^*$ , que denotaremos por  $C^*$  e, o comprimento da circunferência medido em  $S$ , que denotaremos por  $C$ , vale

$$C^* = \gamma C > C, \quad (\text{A.70})$$

onde utilizamos a equação (A.69) para obter a expressão acima. Se, agora, os observadores em  $S$  e  $S^*$  medirem o raio da plataforma, eles irão encontrar o mesmo valor. Analisando a Figura A.39 notamos que o raio da plataforma é perpendicular (faz  $90^\circ$ ) com a direção da velocidade e, por isso, não existe contração de Lorentz. Se os observadores em  $S$  (inerciais) medirem o raio  $r$  e o comprimento da circunferência  $C$ , podemos relacioná-los a partir dos resultados da geometria euclidiana como

$$C = 2\pi r. \quad (\text{A.71})$$

Já para os observadores em  $S^*$ , vimos na equação (A.70) que  $C^* > C$ . Logo, compa-

rando as equações (A.71) e (A.70) segue que

$$C^* > 2\pi r. \quad (\text{A.72})$$

A *geometria* na plataforma girante para um *observador em um referencial não-inercial é não-euclidiana*. Através do PE podemos substituir a aceleração da plataforma por um campo gravitacional equivalente. Dessa forma, teríamos em um referencial sob a ação de um campo gravitacional uma alteração na geometria. Na *presença de matéria* (fonte de um campo gravitacional) a *geometria do espaço é não-euclidiana*.

#### **A.5.5.2 Relação entre o desvio gravitacional para o vermelho e a curvatura**

Na subseção A.5.3 discutimos o desvio gravitacional para o vermelho. Observadores localizados em uma altitude maior registram uma redução na frequência da luz recebida de sinais luminosos emitidos por observadores em uma altitude menor. Chamemos o observador em uma altitude menor de  $A$  e o observador em uma altitude maior de  $B$ , podemos imaginar que  $A$  está no solo e  $B$  está no alto de uma torre. O observador em  $A$  emite sinais luminosos de frequência  $f_A$  e o observador em  $B$  registra os sinais luminosos com valor de frequência  $f_B$ . A relação entre as frequências, deduzidas na subseção A.5.3, mostra que  $f_B < f_A$ . Como o período da onda luminosa é dado pelo inverso da frequência podemos relacionar o período registrado por  $A$  e por  $B$  e escrever que  $T_B > T_A$ . Recordamos que nesse exemplo, os observadores estão em repouso no campo gravitacional. Segundo a TRR, observadores em repouso em um determinado referencial devem medir o mesmo intervalo de tempo para o período de um sinal luminoso, ou seja,  $T_A = T_B$ . Entretanto, na presença de um campo gravitacional (matéria)  $T_B > T_A$ , pois o espaço-tempo torna-se curvo e a passagem do tempo torna-se diferente dependendo da sua posição em relação a fonte gravitacional (matéria). O problema do disco girante e do desvio gravitacional para o vermelho forneceram pistas importantes que levaram Einstein a conjecturar que na presença de matéria o espaço-tempo da TRG seria um *espaço-tempo curvo*.

#### **A.5.5.3 Princípio da Relatividade Geral (PRG) na sua versão final e o Princípio da Covariância Geral (PCG)**

Na subseção A.4.1 mostramos como localizar pontos em uma superfície plana utilizando as coordenadas cartesianas e polares. Podemos, contudo, utilizar também para

localizar pontos em uma superfície plana um novo sistema de coordenadas que contém curvas arbitrárias  $u_1$  e  $u_2$ , não justapostas, como mostrado na Figura A.40. Einstein chama esse sistema de coordenadas composto por  $u_1$  e  $u_2$  de *coordenadas gaussianas* (EINSTEIN, 1999, p. 73). Entretanto, seguindo a nomenclatura proposta em (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018) chamaremos  $u_1$  e  $u_2$  de *coordenadas globais*.

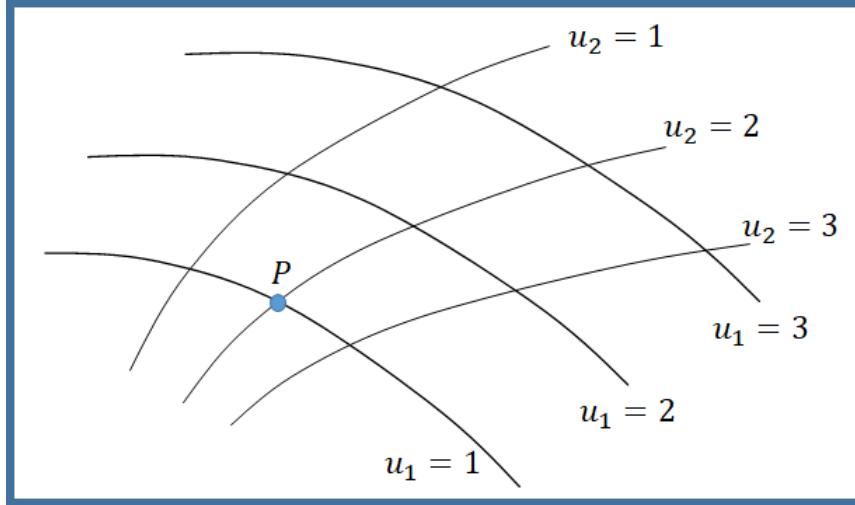


Figura A.40: Coordenadas globais (arbitrárias) sobre a superfície de uma mesa (contorno azul). Um ponto sobre a mesa é identificado fornecendo os valores de  $u_1 = 1$  e  $u_2 = 2$ .

Na Figura A.40 podemos localizar o ponto  $P$  fornecendo o valor das coordenadas globais  $u_1 = 1$  e  $u_2 = 2$ . É importante destacar que cada ponto sobre a superfície é especificado por valores únicos de  $u_1$  e  $u_2$ . Podemos também escrever a *métrica da superfície* para determinar a distância entre dois pontos próximos escrita em termos das coordenadas globais  $u_1$  e  $u_2$ , da seguinte forma

$$\Delta s^2 = f_1(u_1, u_2) \Delta u_1^2 + f_2(u_1, u_2) \Delta u_2^2. \quad (\text{A.73})$$

Caso as curvas  $u_1$  e  $u_2$  sejam linhas retas e perpendiculares entre si como mostrado na Figura A.41 teremos a métrica de uma superfície plana em coordenadas cartesianas

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \quad (\text{A.74})$$

onde fizemos  $u_1 = x$  e  $u_2 = y$  e as funções  $f_1(u_1, u_2) = f_2(u_1, u_2) = 1$ . No caso de

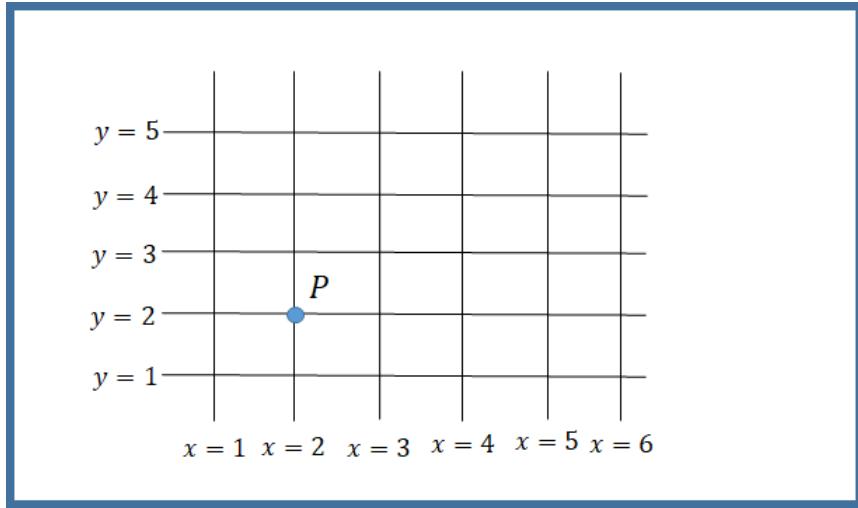


Figura A.41: Coordenadas cartesianas sobre a superfície de uma mesa (contorno azul). Um ponto sobre a mesa é identificado fornecendo os valores de  $x = 2$  e  $y = 2$ .

uma superfície curva, como a superfície de uma esfera, nós localizamos pontos sobre ela utilizando as coordenadas esféricas  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ . A métrica sobre a superfície da esfera, em coordenadas esféricas para  $r = R$ , se escreve como

$$\Delta s^2 = R^2 \Delta\theta^2 + R^2 \sin^2\theta \Delta\phi^2. \quad (\text{A.75})$$

Comparando as equações (A.73) e (A.75) vemos que  $u_1 = \theta$ ,  $u_2 = \phi$ ,  $f_1(u_1, u_2) = R^2$  e  $f_2(u_1, u_2) = R^2 \sin^2\theta$ . Note que aqui estamos em um espaço bidimensional (plano ou superfície da esfera), por isso precisamos de duas coordenadas para descrever a localização de um ponto. Se quisermos analisar espaços de dimensões maiores, precisaremos de um número de coordenadas compatível com a dimensão do espaço analisado. Na TRR para localizar eventos precisamos de quatro coordenadas, a sua localização no espaço ( $x, y, z$ ) e o seu instante de tempo ( $t$ ). Dessa forma, dizemos que o espaço-tempo da TRR é *quadridimensional*. A *métrica da TRR* é dada pelo intervalo espaço-temporal - equação (A.53) - que é escrita como,

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \quad (\text{A.76})$$

Generalizando a equação (A.73) para quatro dimensões temos

$$\Delta s^2 = f_1(u_1, u_2, u_3, u_4) \Delta u_1^2 + f_2(u_1, u_2, u_3, u_4) \Delta u_2^2 + f_3(u_1, u_2, u_3, u_4) \Delta u_3^2 + f_4(u_1, u_2, u_3, u_4) \Delta u_4^2. \quad (\text{A.77})$$

É interessante notar que para localizar pontos em uma superfície plana são utilizadas, normalmente, as coordenadas cartesianas. Embora fosse possível escolher as coordenadas globais arbitrárias  $u_1$  e  $u_2$  essa escolha não seria feita em um espaço plano. Isso decorre da simplicidade na utilização das coordenadas cartesianas. Contudo, para uma superfície curva bidimensional não é possível com coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  cobrir a superfície curva como um todo<sup>19</sup>. Em uma superfície curva bidimensional podemos introduzir um sistema de coordenadas cartesianos  $x$  e  $y$  apenas localmente (em uma pequena região). Para localizar pontos globalmente sobre uma superfície curva precisamos utilizar coordenadas globais  $u_1$  e  $u_2$  no caso de um espaço bidimensional<sup>20</sup>. Para que possamos ter informações sobre a geometria de uma determinada superfície precisaremos determinar a métrica da superfície.

Na TRG, o espaço-tempo é curvo, ou seja, é não-euclidiano. Vimos como os exemplos do desvio gravitacional para o vermelho e o problema da plataforma girante guiaram Einstein à conclusão de que na presença de matéria o espaço-tempo torna-se curvo. Dessa forma, para localizar eventos em um espaço-tempo curvo quadridimensional, Einstein substitui os corpos rígidos de referência (um vagão ou o solo) no qual fixamos eixos cartesianos ( $x, y, z$ ) dispostos de relógios sincronizados igualmente espalhados pelas coordenadas globais (coordenadas genéricas que localizam eventos). Assim, Einstein formula a versão final para do PRG (EINSTEIN, 1999, p. 81)

“Todos os sistemas de coordenadas globais<sup>21</sup> são essencialmente equivalentes para a formulação das leis gerais da natureza.”

O preço pago por essa generalização foi a perda de significado métrico das coordenadas na TRG. Nas palavras de Einstein

“Agora chegou a mim: [...] a independência da aceleração gravitacional da natureza da substância em queda pode ser expressa da seguinte forma:

<sup>19</sup>Logicamente, sabemos que podemos representar uma superfície curva bidimensional em uma superfície plana como nas projeções cartográficas, porém essas projeções contêm distorções.

<sup>20</sup>Na superfície da Terra podemos utilizar as coordenadas esféricas  $\theta$  e  $\phi$  para localizar pontos sobre a superfície do planeta.

<sup>21</sup>Aqui substituímos a nomenclatura utilizada por Einstein, coordenadas gaussianas, pelas coordenadas globais.

Em um campo gravitacional (de pequena extensão espacial) as coisas se comportam como no espaço livre de gravitação, [...]. Isso aconteceu em 1908. Por que outros sete anos foram necessários para a construção da teoria da relatividade geral? A principal razão reside no fato de que não é tão fácil se libertar da ideia de que as coordenadas devem ter um significado métrico imediato. ” (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 5-1, tradução livre)

A frase acima descrita por Einstein ilustra a dificuldade que a perda de significado métrico significou para ele. Essa perda de significado métrico representa que uma variação de coordenadas não está diretamente relacionada com uma grandeza física mensurável. Essa discussão será realizada com mais profundidade na subseção A.6.5 na seção sobre buracos negros. Além disso, a citação anterior mostra como o PE se mostrou uma peça fundamental na montagem do quebra cabeça que culminou na TRG.

Podemos ter diferentes conjuntos de coordenadas globais para localizar eventos na TRG. Se tivermos dois conjuntos diferentes de coordenadas globais as equações da Física devem apresentar a mesma forma independente do conjunto de coordenadas escolhido. Para que isso seja válido as equações da Física devem assumir uma forma tensorial. Discutir tensores foge do escopo deste texto, mas faremos alguns breves comentários. Estamos acostumados a tratar vetores como objetos que possuem módulo, direção e sentido. Esse tratamento nos ajuda a resolver problemas de Mecânica, por exemplo. Porém, poderíamos dizer que vetores são objetos que se transformam de um sistema de coordenadas para outro de uma maneira específica. Essa última forma é um tanto abstrata e, por isso, é evitada em cursos de Física introdutórios. Porém, essa é a chave para o entendimento dos tensores. Um tensor de ordem  $n$  pode ser representado por uma matriz de  $3^n$  valores (no espaço tridimensional) ou  $4^n$  valores (no espaço quadridimensional) chamados de “componentes do tensor” que se combinam com várias direções (base do espaço) para formar uma quantidade que não varia conforme o sistema de coordenadas é alterado (FLEISCH, 2008, p. 2 cap. 5). Para mais informações sobre tensores você pode consultar (FLEISCH, 2008) ou o vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=f5liqUk0ZTw>. Devido a essa característica dos tensores, as equações assumem na TRG uma forma tensorial:

“Uma equação Física da Relatividade Geral é verdadeira em todos os sistemas de coordenadas se a equação é uma equação tensorial (ou seja, preserva sua forma sob transformações gerais de coordenadas). ” (FOSTER,

NIGHTINGALE, 2005, p. 4, tradução livre)

O enunciado anterior é chamado de *Princípio da Covariância Geral* (PCG).

### A.5.6 As equações de Einstein

Einstein no final de 1915 chega a equação que informa a geometria do espaço-tempo para uma dada distribuição de matéria e energia. Essa equação é escrita utilizando a linguagem formal de tensores. Simbolicamente, podemos escrever

**(Tensor relacionado a curvatura do espaço-tempo) = constante  $\times$  (tensor relacionado a distribuição de matéria e energia).**

Ou, na forma tensorial

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.78})$$

onde  $G$  é a constante da gravitação universal e  $c$  é a velocidade da luz. O termo  $G_{\mu\nu}$  é chamado tensor de Einstein e o termo  $T_{\mu\nu}$  é chamado de tensor energia-momento. Tanto  $G_{\mu\nu}$  quanto  $T_{\mu\nu}$  são elementos de matrizes  $4 \times 4$ . A solução das equações de Einstein (A.78) nos informa a métrica ( $\Delta s^2$ ) para uma determinada distribuição de matéria-energia. A equação escrita na forma tensorial preserva a sua forma diante de uma transformação de um conjunto de coordenadas (globais) para outro conjunto de coordenadas globais, que é justamente o PCG.

Na seção A.6 discutiremos uma das soluções analíticas mais famosas das equações de Einstein, a *métrica de Schwarzschild*.

## A.6 Os Buracos Negros

### A.6.1 Introdução

Em 10 de abril de 2019, o *Telescópio Horizonte de Eventos* (THE)<sup>22</sup> apresentou a primeira imagem de um *buraco negro* como mostrado na Figura A.42 (THE EVENT HORIZON TELESCOPE COLLABORATION, 2019). Este objeto com massa aproximadamente seis bilhões de massas solares é conhecido com  $M87$  e situa-se na parte

---

<sup>22</sup>Tradução do inglês “Event Horizon Telescope”.

central da galáxia *Messier 87*. A imagem obtida pelo THE ilustra um buraco negro girante supermassivo, sendo classificado como buraco negro de Kerr<sup>23</sup>.

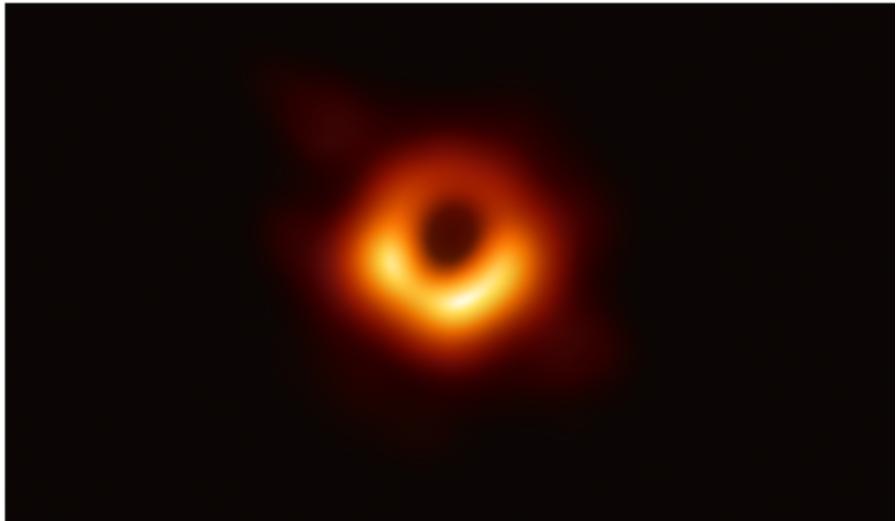


Figura A.42: A primeira imagem de um buraco negro obtida pelo Telescópio Horizonte de Eventos em 2019 – retirado de (THE EVENT HORIZON TELESCOPE COLLABORATION, 2019).

Um *buraco negro* é descrito, de modo simplificado, como uma região na qual a curvatura do espaço-tempo é tão intensa que qualquer objeto material ou forma de radiação fica impedida de escapar, sendo a fronteira que limita essa região denominada de *horizonte de eventos*. A intensa curvatura do espaço-tempo traz resultados que desafiam a nossa intuição como mostrado no filme *Interestelar* do diretor Christopher Nolan , de 2014. Em uma famosa cena, Cooper (Matthew McConaughey) e Brand (Anne Hathaway) viajam até o planeta de Miller (próximo ao buraco negro Gargantua) e depois retorna à base se reencontrando com Romilly (David Gyasi). Nesse reencontro, Romilly está notavelmente mais velho enquanto Cooper e Brand continuam jovens. Enquanto para Cooper e Brand pouco tempo se passou para Romilly passaram aproximadamente 23 anos. Essa cena do filme *Interestelar* ilustra que o tempo passa a diferentes taxas ao redor de um buraco negro, passando de forma mais lenta quanto mais próximos estivermos dele.

A criação e popularização do termo buraco negro é, em geral, atribuída ao famoso físico americano John Archibald Wheeler, que após uma palestra realizada em 1967,

---

<sup>23</sup>Essa classificação se dá em homenagem ao matemático Roy P. Kerr que apresentou a primeira solução exata do problema para a determinação da métrica em 1963.

no Instituto Goddard da Nasa, passou a empregar o termo (HERDEIRO; LEMOS, 2019, p. 6). Entretanto, a história associada a gênese do termo buraco negro é muito rica e sua criação e popularização conta com uma parceria entre John Wheeler e o físico e astrônomo americano Robert Henry Dicke (HERDEIRO; LEMOS, 2019).

Contudo, antes da formulação da TRG e do conceito moderno de buraco negro surgir já existia no século XVIII a ideia de corpos extremamente massivos que fariam com que até mesmo a luz não pudesse escapar de sua atração gravitacional. O reverendo e físico inglês John Michell (1724 - 1793) e o matemático francês Pierre Simon Laplace (1749 - 1827) foram os primeiros a propor a existência de tais objetos que foram chamados de *estrelas negras*<sup>24</sup> (MACHADO; TORT, 2016). Tais estrelas seriam invisíveis para um observador externo, pois devido à forte atração gravitacional nem mesmo a luz poderia escapar de sua superfície. Nas palavras de Laplace

A atração gravitacional de uma estrela com um diâmetro de 250 vezes o diâmetro do Sol e comparável em densidade com a [densidade] da Terra seria tão grande que a luz não poderia escapar da sua superfície. Os maiores corpos do Universo poderiam ser invisíveis por causa da sua magnitude [da velocidade de escape]. (MACHADO; TORT, 2016, p. 1)

Na descrição acima, Laplace descreve quais propriedades um objeto deve ter para que a velocidade de escape excedesse a velocidade da luz. Um detalhamento sobre os cálculos realizados feitos por Michell e Laplace pode ser encontrado em (MACHADO; TORT, 2016). Esboçaremos a seguir um cálculo simplificado sobre os trabalhos de Michell e Laplace. Partiremos da teoria corpuscular da luz que parte do pressuposto que a luz é formada por pequenas partículas, denominadas corpúsculos. Para a discussão do problema, colocaremos a hipótese adicional de que um corpúsculo luminoso interage com o campo gravitacional. Inicialmente, imagine uma estrela esférica de massa  $M$  e raio  $R$ . Um objeto de massa  $m$  é lançado radialmente da superfície da estrela. A expressão para a energia mecânica desse objeto, segundo a MN, a uma distância  $r$  do centro da estrela e com uma velocidade  $v$ , é dada por

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r},$$

onde o primeiro termo representa a energia cinética e o segundo termo representa a energia potencial de interação estrela e objeto. A *velocidade de escape* é definida como

---

<sup>24</sup>Tradução do inglês *dark stars*.

a velocidade com a qual precisamos lançar um corpo da superfície de uma estrela (ou planeta) para que muito distante da estrela ( $r \rightarrow \infty$ ) o objeto possua velocidade nula apresentando a sua energia mecânica no infinito (muito distante) igual a zero. Seja  $E_0$  a energia mecânica no ato do lançamento do objeto da superfície do planeta e  $E_\infty$  a energia mecânica do corpúsculo para  $r \rightarrow \infty$  (muito distante). Pela conservação da energia ( $E_0 = E_\infty$ ) temos

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = 0.$$

Substituindo  $v_0 = c$  na expressão anterior segue que

$$c^2 = \frac{2GM}{R}. \quad (\text{A.79})$$

A equação (A.79) ilustra a situação na qual a velocidade de escape é igual à velocidade da luz ( $c$ ). Podemos, a partir da substituição das constantes  $c$  e  $G$ , determinar a razão  $M/R$  na qual a equação (A.79) é válida. Para que a velocidade de escape seja maior que  $c$  podemos, por exemplo, elevar o valor da massa para  $M'(> M)$  mantendo o raio  $R$  da estrela fixo. Assim,  $\frac{2GM'}{R} > c^2$  e a velocidade de escape para essa estrela de massa  $M'$  e raio  $R$  excederia a velocidade da luz. Uma segunda maneira seria diminuir o raio da estrela para um valor  $R'(< R)$ , mas mantendo a massa  $M$  fixa. Assim,  $\frac{2GM}{R'} > c^2$  e, com isso, novamente, a velocidade de escape excederia a velocidade da luz. Se imaginarmos que o objeto descrito fosse um corpúsculo luminoso podemos determinar as condições às quais um corpúsculo retornaria à superfície de uma estrela após ser lançado radialmente. As estrelas com essas características foram chamadas de *estrelas negras*. Podemos, ainda, reescrever a equação (A.79) da seguinte forma

$$R = \frac{2GM}{c^2}. \quad (\text{A.80})$$

O valor de  $R = \frac{2GM}{c^2}$  é chamado de raio de Schwarzschild e será discutido em mais detalhes posteriormente.

## A.6.2 Formação de Buracos Negros

O conceito moderno de buraco negro advém do estudo de estrelas muito densas, chamadas de *estrelas compactas*. São exemplos de estrelas compactas as anãs bran-

cas<sup>25</sup> e as estrelas de nêutrons<sup>26</sup>. A evolução de uma estrela depende basicamente de sua massa inicial. Para estrelas com massa inicial de até  $10M_{Sol}$  o estágio final de sua evolução será a transformação em uma anã branca; para uma estrela que apresente massa entre  $10M_{Sol}$  e  $25M_{Sol}$  o estágio final de sua evolução será a sua transformação em um estrela de nêutrons; e para estrelas com massa inicial maior que  $25M_{Sol}$  o estágio final de sua evolução será a transformação em um buraco negro (Fazzoli, 2012, p. 48). A Figura A.43 ilustra os possíveis ciclos de estrelas. O destino final do Sol, por exemplo, é evoluir para uma anã branca até que o resfriamento, posterior, leve a estrela à evoluir e formar uma anã negra.

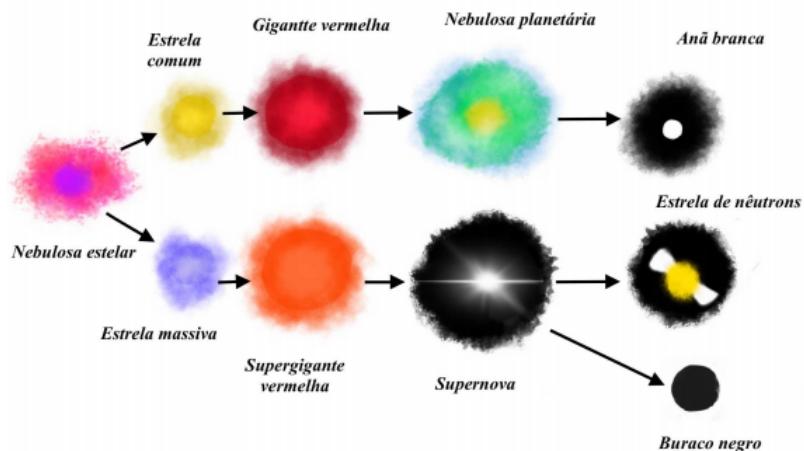


Figura A.43: Ciclos de vida das estrelas – retirado de (MACHADO, 2016, p. 35).

### A.6.3 Descrição de Buracos Negros

Buracos negros, descritos pela TRG, são caracterizados por três propriedades: massa ( $M$ ), carga ( $Q$ ) e momento angular ( $J$ ). Essas propriedades são as únicas informações que um observador distante terá acesso ao estudar a geometria do espaço-tempo no entorno de um buraco negro. Para destacar esse fato o físico John Wheeler estabeleceu a seguinte frase: “buracos negros não tem cabelo”<sup>27</sup>. O buraco negro

<sup>25</sup>A massa de uma anã branca é comparável à massa do Sol e apresenta um raio comparável ao raio da Terra.

<sup>26</sup>A massa de estrela de nêutrons é da ordem de duas vezes a massa do Sol e apresenta um raio da ordem de 10 km.

<sup>27</sup>Tradução do inglês “Black holes have no hair”. Este fato é conhecido matematicamente como teorema de unicidade de buracos negros.

Massa ( $M$ )	Mto. angular ( $J$ )	Carga ( $Q$ )	Nomenclatura
Sim	Não	Não	Schwarzschild
Sim	Sim	Não	Kerr
Sim	Sim	Sim	Kerr-Newman
Sim	Não	Sim	Reissner-Nordström

Figura A.44: Classificação de Buracos Negros.

mais simples de todos é aquele que só possui massa, chamado de *buraco negro de Schwarzschild*. Existem ainda quatro variantes possíveis, entre as propriedades destacadas anteriormente, de buracos negros que estão ilustrados na Figura A.44. Além disso, buracos negros podem ser caracterizados pela sua massa, em termos da massa do Sol ( $M_{Sol}$ ), como

- Miniburaco negro  $0 - 0,1M_{Sol}$ ;
  - Buraco negro estelar  $0,1 - 100M_{Sol}$ ;
  - Buraco negro de massa intermediária  $100 - 10^5 M_{Sol}$ ;
  - Buraco negro supermassivo  $10^5 - 10^{10} M_{Sol}$ .
- (COLLIER, 2019, p. 218)

Como mencionado no início deste capítulo, a Figura A.42 ilustra a primeira imagem já registrada de um buraco negro. A imagem é de um buraco negro de Kerr - que apresenta como propriedades massa a ( $M$ ) e o momento angular ( $J$ ), sendo classificado também como um buraco negro supermassivo. A imagem do buraco negro mostrada na Figura A.42 suscita algumas discussões interessantes sobre a localização do horizonte de eventos e sobre as regiões iluminadas na figura. Para essa discussão faremos um breve resumo da discussão feita por Derek Muller, com formação em Física e divulgador da Ciência, criador do conhecido canal *Veritasium* no *YouTube*. O vídeo com a explicação sobre a imagem do buraco negro pode ser acessado pelo link <https://www.youtube.com/watch?v=zUyH3XhpLTo>. Uma primeira dúvida que surge na imagem do buraco negro é em relação à localização do horizonte de eventos, que dista do centro do buraco negro o valor correspondente ao raio de Schwarzschild ( $R_s$ ). O horizonte de eventos na Figura A.42 está em uma região menor do que a sombra vista na imagem. Para entender essa afirmação primeiro precisamos saber que ao redor do buraco negro temos matéria (gás e poeira) orbitando

o mesmo e produzindo o chamado *disco de acreção*<sup>28</sup>. O disco de acreção, para um buraco negro não-girante e eletricamente neutro, está localizado a uma distância de  $3 R_s$  do centro dele, pois nessa distância temos órbitas estáveis para a matéria em movimento. Já a luz pode orbitar a uma distância de  $1,5 R_s$  do centro do buraco negro, porém em órbitas instáveis. Assim, será que a sombra na imagem do buraco negro consiste na região delimitada pelo disco de acreção ( $3 R_s$ ) ou na região delimitada pela órbita da luz  $1,5 R_s$ ? A resposta, devido a complexidade introduzida pela curvatura do espaço-tempo, é de que a região de sombra na imagem está a uma distância de  $2,6 R_s$  do centro do buraco negro. Isso ocorre porque para a luz que se aproxima do buraco com parâmetro de impacto<sup>29</sup> de  $2,6 R_s$  percorre a órbita instável da luz ( $1,5 R_s$ ) e depois se afasta indefinidamente do buraco negro. São esses raios de luz que são detectados pelos telescópios e compõem a parte brilhante da imagem. Para parâmetros de impacto menores que  $2,6 R_s$  a luz será captada pelo horizonte de eventos. Se nós olhássemos para o buraco negro *M87* em uma direção perpendicular ao disco de acreção nós veríamos uma imagem idêntica à da Figura A.42.

#### A.6.4 Buraco negro de Schwarzschild

Einstein publica a versão final da TRG no final do ano de 1915. Porém, pouco tempo após a publicação da versão final da TRG, o astrônomo e físico alemão Karl Schwarzschild (1873 - 1916) obtém uma solução exata das equações de Einstein. Einstein, então, envia uma carta para Schwarzschild destacando seu feito:

“Li a sua carta com o máximo interesse. Não esperava que se pudesse formular a solução exata do problema de maneira tão simples. Gostei muito do seu tratamento matemático sobre o assunto. Na próxima quinta-feira apresentarei o trabalho à Academia com algumas palavras de explicação”. (WIKIPÉDIA. Desenvolvido pela Wikimedia Foundation. Apresenta conteúdo enciclopédico. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Karl\\_Schwarzschild](https://pt.wikipedia.org/wiki/Karl_Schwarzschild). Acesso em março de 2023)

A solução obtida por Schwarzschild nos informa a *métrica do espaço-tempo*. A

---

<sup>28</sup>O disco de acreção corresponde ao arranjo que é formado devido ao movimento de gases e poeira em torno de algum corpo massivo.

<sup>29</sup>O parâmetro de impacto representa a distância perpendicular entre a direção da velocidade da luz e o centro do buraco negro.

métrica representa o intervalo espaço-temporal ( $\Delta s^2$ ) entre dois eventos arbitrários<sup>30</sup> próximos. A métrica de Schwarzschild descreve o espaço-tempo na região de *vácuo* em torno de uma massa  $M$ , não girante e neutra, com simetria esférica. A métrica de Schwarzschild, no plano equatorial ( $\theta = \pi/2$ ), para dois eventos próximos é dada pela seguinte expressão:

$$\Delta s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)(c\Delta t)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)}\Delta r^2 + r^2\Delta\phi^2, \quad (\text{A.81})$$

onde  $G$  é a constante de gravitação universal e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. As coordenadas  $(r, \phi, t)$  são as *coordenadas de Schwarzschild* no plano equatorial. As coordenadas  $(r, \phi)$  são generalizações das coordenadas polares apresentadas na subseção A.4.2 ou das coordenadas esféricas, para  $\theta = \pi/2$ , apresentadas na subseção A.4.3. As coordenadas de Schwarzschild serão interpretadas na próxima subseção. A métrica de Schwarzschild ( $\Delta s^2$ ) pode apresentar um sinal negativo, positivo ou nulo<sup>31</sup>. De acordo com a convenção de sinais adotada na equação (A.81) os intervalos  $\Delta s^2$  podem ser classificados da seguinte forma,

$$\Delta s^2 \begin{cases} < 0, & (\text{tipo tempo}); \\ > 0, & (\text{tipo espaço}); \\ = 0, & (\text{tipo luz}). \end{cases} \quad (\text{A.82})$$

Intervalos do tipo tempo Para  $\Delta s^2 < 0$  temos um intervalo do tipo tempo. Fazendo  $\Delta s^2 = -c^2\Delta\tau^2$  (ver subseção A.3.1), onde  $\Delta\tau$  representa o tempo próprio entre dois eventos medidos com um único relógio, temos a seguinte expressão para a métrica de Schwarzschild.

$$-c^2\Delta\tau^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)(c\Delta t)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)}\Delta r^2 + r^2\Delta\phi^2 \quad (\text{A.83})$$

ou

$$c^2\Delta\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)(c\Delta t)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)}\Delta r^2 - r^2\Delta\phi^2. \quad (\text{A.84})$$

Intervalos do tipo espaço Para  $\Delta s^2 > 0$  temos um intervalo do tipo espaço. Assim, fazendo  $\Delta s^2 = \Delta\sigma^2$ , onde  $\Delta\sigma$  representa o comprimento próprio para dois eventos

---

<sup>30</sup>Utilizaremos aqui a mesma nomenclatura utilizada em (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018).

<sup>31</sup>A discussão para o sinal da métrica na TRR foi feita na seção A.3.1.

que ocorrem simultaneamente obtemos

$$\Delta\sigma^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) (c\Delta t)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)} \Delta r^2 + r^2 \Delta\phi^2. \quad (\text{A.85})$$

Intervalos do tipo luz Para  $\Delta s^2 = 0$  temos um intervalo do tipo luz. Assim, fazendo  $\Delta s^2 = 0$  escrevemos

$$0 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) (c\Delta t)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)} \Delta r^2 + r^2 \Delta\phi^2. \quad (\text{A.86})$$

As expressões (A.84), (A.85) e (A.86) serão utilizadas posteriormente para relacionar eventos no espaço-tempo de Schwarzschild. Podemos, ainda, reescrever a métrica em termos do *raio de Schwarzschild* ( $R_s$ )

$$(\Delta s)^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) (c\Delta t)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} \Delta r^2 + r^2 \Delta\phi^2, \quad (\text{A.87})$$

onde  $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ .

---

**Exercício 20** Utilizando análise dimensional determine a unidade de medida para o raio de Schwarzschild ( $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ ) no SI. ■

---

Destacamos que a métrica de Schwarzschild é *válida somente* para valores de  $r > R_s$ . Para  $r = R_s$  temos uma singularidade, ou seja,  $\Delta s^2 \rightarrow \infty$  (lê-se que  $\Delta s^2$  tende ao infinito), pois  $\frac{1}{1-R_s/r} \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow R_s$ . Para  $r < R_s$  ocorre uma inversão de sinais na métrica e as coordenadas  $r$  e  $t$  invertem seus papéis (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 3-28). Se um objeto, como uma estrela, possuir um raio  $R$  menor que o seu respectivo raio de Schwarzschild ele será considerado um buraco negro. O raio de Schwarzschild determina uma superfície que é denominada *horizonte de eventos*. O horizonte separa duas regiões distintas do espaço-tempo: a região exterior ao horizonte ( $r > R_s$ ) e a região interior ao horizonte ( $r < R_s$ ). Se qualquer tipo de matéria ou forma de radiação atravessar o horizonte de eventos não poderá mais retornar à região exterior ao horizonte.

---

**Exercício 21** Determine: (a) o raio de Schwarzschild para a Terra e para o Sol; (b) a razão entre o raio da Terra e o raio de Schwarzschild da Terra e, também, entre o raio do Sol e o raio de Schwarzschild do Sol. Qual a conclusão sobre o cálculo da letra

(b)? Dica: Utilize uma tabela e encontre o valor das constantes físicas necessárias para resolver o problema. ■

1. a Terra;
  2. o Sol;
- 

Podemos também descrever a geometria do espaço-tempo de uma região exterior a uma estrela (ou planeta) com valor de  $R_s$  menor que o raio  $R$  da estrela<sup>32</sup> utilizando a equação (A.81). Entretanto, nesses casos não podemos aplicar a métrica para a região  $R_s < r < R$ , pois já não estaríamos em uma região de ausência de matéria, e a métrica de Schwarzschild é válida somente para região de vácuo.

Apesar de estarmos ligando a métrica de Schwarzschild com o buraco negro, essa ligação não é direta. O próprio Schwarzschild nunca propôs tal associação. Para isso é necessário interpretar o que ocorre com a métrica quando  $r = R_s$ . Ela é uma singularidade real ou uma singularidade devido a uma escolha ruim de coordenadas? Uma evidência de que para  $r = R_s$  temos uma singularidade devido a uma escolha ruim de coordenadas é de que o tempo próprio, de um observador em queda livre radial que ultrapassa o horizonte, é finito<sup>33</sup>. Deveremos, pois, entrar na região interior ao horizonte de eventos. Este foi um problema que ocupou os físicos logo após o aparecimento da solução de Schwarzschild. Matematicamente, em 1921, Paul Painlevé, em 1922, Allvar Gullstrand e Arthur Eddington, em 1924, mostram que se redefinirmos o tempo, a desigualdade em  $r = R_s$  desaparece. Em 1933, o padre belga George LeMaître interpreta a solução de Painlevé e Gullstrand como a métrica obtida por um observador em queda livre, partindo do repouso de uma grande distância do buraco negro. Entretanto a interpretação física da mudança de coordenadas proposta por Eddington só ocorreu em 1959, devido ao físico americano David Finkenstein. Nesta mesma época, em 1960, o problema final foi solucionado pelo matemático americano Martin Kruskal resolve o problema de obter o maior sistema de coordenadas possível que cobre toda solução de Schwarzschild. Nela, como esperado somente há singularidade em  $r = 0$ , representando o fato de nela existe uma massa pontual, o que leva a uma densidade de energia infinita naquele ponto. Não entraremos no detalhamento dessas mudanças de coordenadas discutidas acima, mas na subseção A.6.7 traçaremos, em diagramas espaço-tempo, os cones de luz que ilustrarão, em parte, a mudança de coordenadas chamada de *Painlevé-Gullstrand*. Com o passar do tempo, outras soluções foram surgindo como para os buracos negros girantes, a solução do matemático Roy Kerr.

<sup>32</sup>O Sol e a Terra são exemplos. Apesar a solução de Schwarzschild ser para um objeto não girante, podemos aproximar a solução para objetos que giram lentamente.

<sup>33</sup>Para mais discussões sobre a singularidade em  $r = R_s$  olhar (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 3-6).

### A.6.5 Interpretação das coordenadas de Schwarzschild

Discutimos as coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  na subseção (A.4.3). Ao fixarmos a coordenada  $\theta = \pi/2$  estamos restritos ao plano  $x - y$  (plano equatorial). Apresentamos a métrica limitada ao plano equatorial,  $\theta = \pi/2$ , na equação (A.81), escrita nas chamadas coordenadas de Schwarzschild. Podemos pensar que as coordenadas de Schwarzschild são generalizações das coordenadas esféricas. Iremos, então, interpretar as coordenadas de Schwarzschild  $r$  e  $t$ , além de analisar alguns aspectos da métrica de Schwarzschild ( $\Delta s^2$ ). A letra  $M$  na equação (A.81) representa a massa de um objeto esfericamente simétrico não girante como um buraco negro de Schwarzschild, por exemplo. Se fizermos  $M = 0$  em (A.81) obtemos

$$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta r^2 + r^2\Delta\phi^2. \quad (\text{A.88})$$

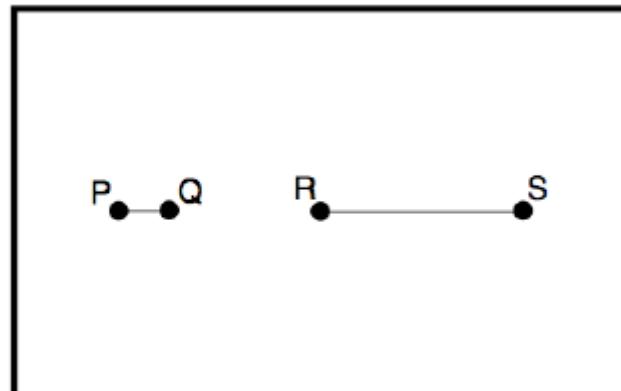
Nas subseções (A.4.1) e (A.4.2) mostramos que podemos escrever a distância entre dois pontos no plano em coordenadas cartesianas e polares da seguinte forma

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta r^2 + r^2\Delta\phi^2.$$

Logo, fazendo  $M = 0$  recuperamos o intervalo invariante (métrica) para o espaço-tempo da TRR escrita em coordenadas polares (restrito ao plano  $x vs. y$ )

$$\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta r^2 + r^2\Delta\phi^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

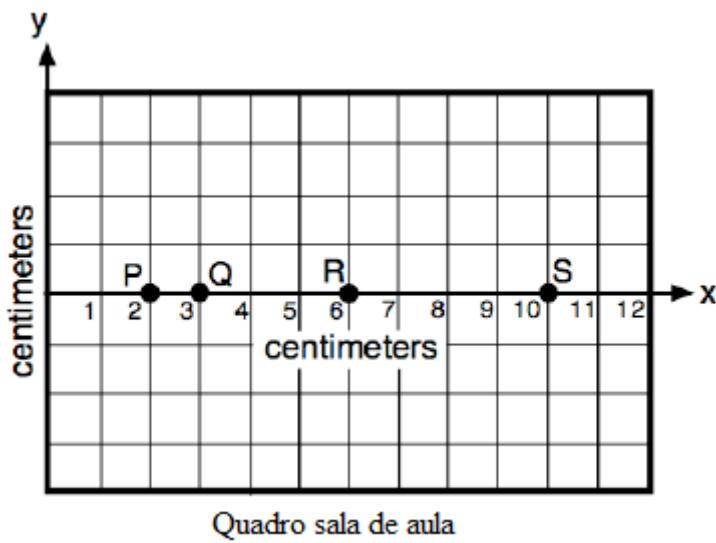
Na expressão acima  $t$  é o intervalo de tempo marcado por um relógio,  $r$  é a distância radial à origem do sistema de coordenadas e  $\phi$  é o ângulo em relação ao eixo  $x$ . Na TRR as coordenadas apresentam significado métrico, pois podem ser relacionar diretamente com quantidades físicas mensuráveis como, por exemplo, a coordenada  $t$  com o tempo medido por um relógio. Entretanto, na presença da massa  $M$  as variáveis  $t$  e  $r$  perdem o seu significado métrico. Na equação (A.81)  $t$  não representa o intervalo de tempo marcado por um relógio e  $r$  não representa mais uma distância radial mensurável. Precisamos, então, relacionar as coordenadas  $t$  e  $r$  com as quantidades físicas observáveis. Ilustraremos a perda de significado métrico das coordenadas na TRG por meio de um exemplo discutido no capítulo 5 da referência (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018). Esse exemplo mostra de maneira visual através de uma superfície bidimensional o problema da perda de significado métrico das coordenadas. Imagine uma superfície plana, como um quadro de uma sala de aula, com 4 pontos marcados - Figura A.45. Com o auxílio de uma régua podemos medir as distâncias entre os pontos  $P$  e  $Q$  e entre os pontos  $R$  e  $S$ . Digamos que, ao fazer as medidas, encontramos que a distância entre  $P$  e  $Q$  vale  $d(P,Q) = 1$  cm e a distância entre  $R$  e  $S$  vale  $d(R,S) = 4$  cm. Podemos, ainda, inserir um sistema de coordenadas cartesiano como ilustrado na Figura A.46. Sabendo a localização de cada ponto, rotulado pelos valores  $x$  e  $y$ , determinamos a variação entre as coordenadas para os pontos destacados:  $\Delta x_{PQ} = 3 - 2 = 1$  cm e  $\Delta x_{RS} = 10 - 6 = 4$  cm. Esse cálculo coincide com os



Quadro Sala de Aula

Figura A.45: Pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  marcados em um quadro plano (sala de aula) – retirado e modificado de (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 5-2).

valores medidos, com o auxílio de uma régua, para a distância entre os pontos  $P$  e  $Q$  e entre os pontos  $R$  e  $S$ . Logo, a *separação entre as coordenadas cartesianas*,  $\Delta x_{PQ}$  e  $\Delta x_{RS}$ , tem um significado métrico, pois essas quantidades estão *relacionadas com a distância entre os pontos*. A forma mais geral, em coordenadas cartesianas, para calcular a distância entre dois pontos, discutida na subseção A.4.1, ao longo do quadro da Figura A.46 é dada por,



Quadro sala de aula

Figura A.46: Sistemas de coordenadas cartesianas inserido em uma superfície plana (quadro de uma sala de aula) em que as coordenadas horizontais valem  $x_P = 2$  cm,  $x_Q = 3$  cm,  $x_R = 6$  cm e  $x_S = 10$  cm para os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  respectivamente – retirado e modificado de (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 5-3).

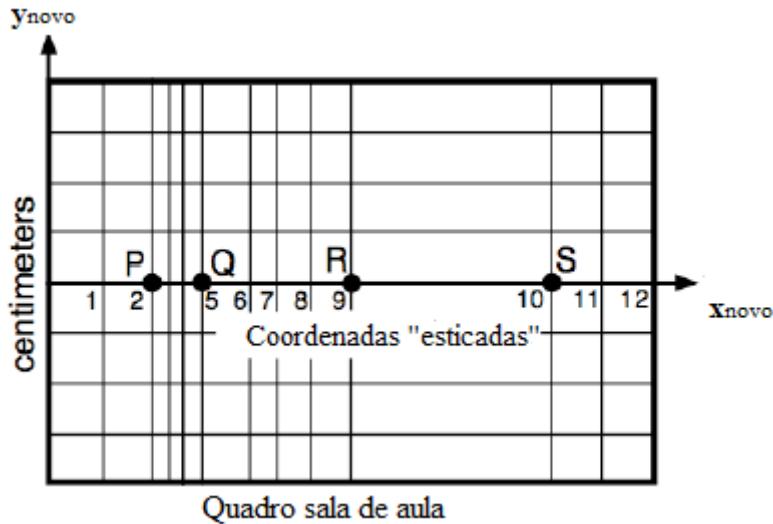


Figura A.47: Sistemas de coordenadas “esticada”  $P, Q, R$  e  $S$  marcados em um quadro plano (quadro de uma sala de aula) – retirado e modificado de (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 5-4).

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \quad (\text{A.89})$$

onde  $\Delta s^2$  representa o quadrado da distância entre dois pontos arbitrários ao longo do plano. No caso anterior, os pontos  $P, Q, R$  e  $S$  estavam todos ao longo de um mesmo valor de  $y$ . Logo, calculando a distância entre dois pontos coordenadas  $y$  constante temos

$$\Delta s^2 = \underbrace{\Delta y^2}_{=0} + \Delta x^2 = \Delta x^2.$$

Assim, a distância  $d = \sqrt{\Delta s^2}$  vale

$$d = \sqrt{\Delta x^2} = |\Delta x|.$$

Apesar da escolha do sistema de coordenadas cartesianas, para localizar pontos em um plano, seja a opção mais simples e natural nós podemos optar por outros sistemas de coordenadas. Esse novo sistema, entretanto, deve ser capaz de localizar de modo único pontos sobre a superfície plana. Dessa forma, poderíamos “esticar”, ao longo do eixo horizontal, o eixo cartesiano de maneira não-uniforme como mostrado na Figura A.47. Esse sistema de coordenadas alternativo – Figura A.47 - apresentará valores, para localizar pontos, dados por  $(x_{novo}, y_{novo})$ . Calculando a variação de coordenadas no novo sistema de coordenadas teremos

$$\Delta x_{novo}(P, Q) = 5 - 2 = 3$$

e

$$\Delta x_{novo}(R,S) = 10 - 9 = 1$$

Ao compararmos a medida descrita anteriormente, realizada com uma régua, para as distâncias entre os pontos  $(P,Q)$  e  $(R,S)$  obtivemos que a distância entre  $(P,Q)$  era menor que a distância entre  $(R,S)$ , ou seja,  $d(P,Q) < d(R,S)$ . Entretanto, a variação de coordenadas no novo sistema de coordenadas nos informa que  $\Delta x_{novo}(P,Q) > \Delta x_{novo}(R,S)$ . Essa diferença entre as duas interpretações e a aparente contradição entre os resultados se desfaz lembrando da citação de Einstein

“Isso aconteceu em 1908. Por que outros sete anos foram necessários para a construção da teoria geral da relatividade (1915)? A principal razão reside no fato de que não é tão fácil se libertar da ideia de que as coordenadas devem ter um significado métrico imediato.” (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 5-1, tradução livre)

A separação entre as coordenadas no novo sistema não possui significado métrico, ou seja, não podemos relacionar diretamente a separação entre as coordenadas, no novo sistema, com a distância entre os pontos. Assim, para compatibilizar a distância entre pontos com as coordenadas no novo sistema precisamos determinar a métrica ( $\Delta s^2$ ). A quantidade  $\Delta s^2$  escrita em termos das coordenadas do novo sistema de eixos fornecerá o quadrado da separação entre quaisquer dois pontos próximos. Essa relação pode ser escrita como

$$\Delta s^2 = f(x_{novo})\Delta x_{novo}^2 + \Delta y_{novo}^2, \quad (\text{A.90})$$

onde  $f(x_{novo})^{34}$  é uma função de  $x_{novo}$  que informa o quanto nosso sistema de coordenadas foi esticado ou comprimido. Pelo exemplo anterior, entendemos que uma separação de coordenadas não necessariamente representa uma grandeza física mensurável. Voltemos à métrica de Schwarzschild no plano equatorial - equação (A.81) - fixando também o valor da coordenada  $\phi$

$$\Delta s^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (c\Delta t)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \Delta r^2, \quad (\text{A.91})$$

onde fizemos  $\Delta\phi = 0$ . Comparando a equação (A.90) com a equação (A.91) vemos a seguinte similaridade

$$\Delta s^2 = f(x_{novo})\Delta x_{novo}^2 + \Delta y_{novo}^2,$$

e

$$(\Delta s)^2 = f_1(r) (c\Delta t)^2 + f_2(r) \Delta r^2.$$

---

<sup>34</sup>Se  $\Delta y = 0$  temos que  $d = \sqrt{\Delta s^2} = \sqrt{f(x_{novo})\Delta x_{novo}}$ , ou seja, a raiz de  $f(x_{novo})$  representa a escala que corrige  $\Delta x_{novo}$  para informar a distância entre dois pontos próximos.

A função  $f(x_{novo})$  nos informa o quanto a coordenada  $x_{novo}$  está “esticada”, representando a escala para o eixo horizontal. As funções  $f_1(r)$  e  $f_2(r)$  indicam também uma escala para as coordenadas  $r$  e  $t$ . A função  $f_1(r)$  indica a distorção (escala) para a coordenada  $t$  e a função  $f_2(r)$  indica a distorção (escala) para a coordenada  $r$ . Dessa forma, utilizando essa analogia bidimensional trazemos a nossa atenção para o problema enfrentado por Einstein no espaço-tempo. As coordenadas  $t$  e  $r$  na TRG perdem o seu significado métrico. Essa perda ocorre devido à curvatura do espaço-tempo. Em uma superfície plana nós temos a opção de escolher as coordenadas cartesianas e na TRR, em que o espaço-tempo é dito plano, nós podemos escolher a disposição de eixos apresentada na Figura A.2 e com essa escolha as coordenadas estão diretamente relacionadas com quantidades físicas mensuráveis. Entretanto, na TRG essa escolha não é mais possível e, assim, para localizar eventos precisamos das chamadas *coordenadas globais* - ver subseção (A.5.5.3). A seguir discutiremos como relacionar a coordenada  $r$  com a medida da distância realizada com uma régua (ou trena) e a coordenada  $t$  com a medida do intervalo de tempo realizado com um relógio na TRG.

#### A.6.5.1 Distância própria ( $\Delta\sigma$ )

Seguindo a referência (FOSTER; NIGHTINGALE, 2006, p. 124) iremos comparar, no plano equatorial, a diferença entre a variação da coordenada radial  $\Delta r$  - que não coincide com a distância medida entre dois pontos próximos - com a distância própria  $\Delta\sigma$  - que coincide com a distância medida entre dois pontos próximos. Suponha dois observadores que distam  $r_1$  e  $r_2$  de uma massa  $M$  esfericamente simétrica não girante e no vácuo. Os observadores 1 e 2 desejam medir a distância entre eles. Para isso eles esticam pequenas réguas entre  $r_1$  e  $r_2$  - Figura A.48. Utilizando a métrica de Schwarzschild podemos relacionar a distância própria ( $\Delta\sigma$ ) com  $\Delta r$  a partir dos eventos 1 e 2 de coordenadas  $(t_1, r_1, \phi_1)$  e  $(t_2, r_1, \phi_2)$  respectivamente. Fazendo  $t_1 = t_2$  e  $\phi_1 = \phi_2$  para medida da distância entre os observadores 1 e 2 temos um intervalo do tipo espaço. Por meio da equação (A.85) escrevemos

$$\Delta\sigma^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) \underbrace{(c\Delta t)^2}_{=0} + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)} \Delta r^2.$$

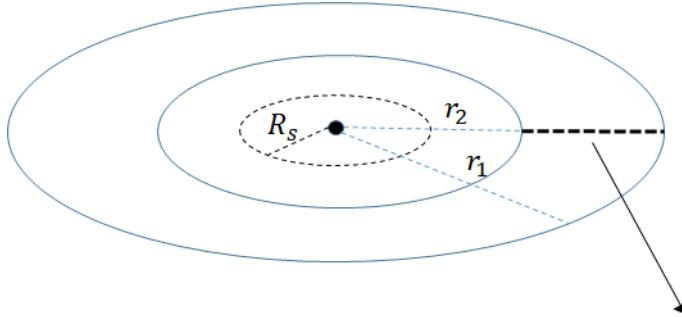
Logo, a relação entre o comprimento próprio ( $\Delta\sigma$ ) e a variação da coordenada  $\Delta r$  é dada por

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta r}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{1/2}}. \quad (\text{A.92})$$

Analisando a equação (A.92) notamos que o comprimento próprio é maior que  $\Delta r = r_2 - r_1$ , pois  $\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) < 1$  - Figura A.48.

---

**Exercício 22** Se a variação entre a coordenada radial de dois observadores locali-



**São necessárias mais pequenas réguas ( $\Delta\sigma$ ) entre  $r_1$  e  $r_2$  do que a separação  $\Delta r = r_2 - r_1$ .**

Figura A.48: Distância medida entre as coordenadas  $r_1$  e  $r_2$  na geometria de Schwarzschild.

zados em  $r_1$  e  $r_2$ , no plano equatorial, de uma estrela de massa  $M$  vale  $\Delta r = 1$  m, quantas pequenas réguas de 0,1 m são necessárias para medir a distância própria entre os observadores? Utilize o valor de  $2GM/c^2 = 10^{-2}$  m. ■

Se fizermos a massa  $M = 0$  (retornamos para o espaço-tempo plano da TRR) utilizando a equação (A.92) segue que

$$\Delta\sigma = \Delta r, \quad (\text{A.93})$$

ou seja, a coordenada  $r$  volta a ter um significado métrico e, dessa forma, volta representar um comprimento mensurável por um régua, por exemplo. Assim, na ausência de uma massa  $M$  temos o espaço-tempo plano da TRR. Com a presença de um campo gravitacional (uma massa  $M$ ) o espaço-tempo torna-se curvo e as coordenadas utilizadas para localizar eventos perdem o seu significado métrico e, assim, precisaremos da métrica de Schwarzschild para relacionar a variação de coordenadas com as grandezas físicas mensuráveis.

#### A.6.5.2 Tempo próprio ( $\Delta\tau$ )

A coordenada temporal  $t$  na TRG não irá coincidir com o intervalo de tempo marcado por um relógio. Para mostrar como relacionar a variação da coordenada temporal  $\Delta t$  com o intervalo de tempo medido com um relógio imaginemos, incialmente, um observador que esteja em repouso na coordenada  $r$  emite dois pulsos luminosos. As coordenadas para os dois eventos podem ser escritas como  $(t_1, r_1, \phi_1)$  e  $(t_2, r_2, \phi_2)$ . Fazendo  $r_1 = r_2$  e  $\phi_1 = \phi_2$ , observador em repouso, e utilizando a métrica de Schwarzs-

child no plano equatorial para um intervalo tipo-tempo, equação (A.84), temos

$$c^2 \Delta\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (c\Delta t)^2 - \underbrace{\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \Delta r^2}_{=0}, \quad (\text{A.94})$$

onde fizemos  $\Delta\phi = 0$ . Lembramos que  $\Delta\tau$  representa o tempo próprio. Assim, podemos imaginar que ao lado do observador temos um relógio que irá registrar a marcação do tempo. Assim, expressando  $\Delta\tau$  em função de  $\Delta t$  segue que

$$\Delta\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \Delta t. \quad (\text{A.95})$$

O intervalo de tempo  $\Delta\tau$  marcado por um relógio junto a um observador é menor do que o intervalo  $\Delta t$ . Notamos que fazendo  $M = 0$  (espaço-tempo plano da TRR) em (A.95) temos

$$\Delta\tau = \Delta t.$$

Assim, na TRR a coordenada  $t$  volta a apresentar um significado métrico (representa efetivamente o tempo medido por um relógio). Outra consideração importante está relacionada a medida do intervalo de tempo para um observador distante ( $r \rightarrow \infty$ ) da massa  $M$ . Para um observador distante a equação (A.95) mostra que a variação da coordenada temporal ( $\Delta t$ ) coincide com o intervalo de tempo marcado por um relógio junto ao observador distante ( $\Delta\tau_\infty$ ). Ou seja,

$$\Delta\tau_\infty = \Delta t,$$

pois quando  $r \rightarrow \infty$  a relação  $\frac{2GM}{c^2 r} \rightarrow 0$ .

### A.6.6 Testes clássicos da TRG

A TRG não apenas inclui as previsões da MN como também expande os seus resultados. Alguns resultados não explicados pela MN, como a precessão do periélio de mercúrio, tiveram que esperar até a construção da TRG para a sua solução. Discutiremos três testes clássicos que confirmaram as previsões teóricas da TRG. Os testes clássicos são:

1. O desvio gravitacional para o vermelho;
2. A precessão do periélio da órbita de Mercúrio;
3. A deflexão da luz pelo Sol.

### A.6.6.1 O desvio gravitacional para o vermelho utilizando a métrica de Schwarzschild

Utilizaremos aqui a métrica de Schwarzschild - que descreve o espaço-tempo na região exterior a uma massa ( $M$ ) esfericamente simétrica, estática e eletricamente neutra no vácuo – para discutir novamente o funcionamento de relógios em um campo gravitacional, ver subseção (A.5.3) para relembrar a discussão. Para corpos gigantes com baixa velocidade (comparadas à velocidade da luz), como é o caso da Terra e do Sol, podemos utilizar com boa aproximação a métrica de Schwarzschild para descrever o espaço-tempo ao redor desses corpos na condição de baixa velocidade.

Imagine dois observadores estacionários, o observador  $E$  está sobre a superfície da Terra, com coordenada  $r = r_E$ , e com um relógio para registrar a marcação do tempo. Já o segundo observador está localizado em uma torre de altura  $h$ , com coordenada  $r = r_E + h$ , estando o segundo observador munido também de um relógio. Por questões de simplicidade, imaginaremos que a torre apresenta uma altura  $h$  elevada ( $h \rightarrow \infty$ ), dessa forma faremos  $r = r_\infty$ . O observador localizado na superfície da Terra ( $r = r_E$ ) emite dois pulsos luminosos e mede o intervalo de tempo ( $\Delta\tau_E$ ) entre a emissão desses pulsos. Utilizando a equação (A.84) com  $\Delta r = 0$  temos

$$c^2 \Delta\tau_E^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_t}\right) (c\Delta t)^2 - \underbrace{\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_t}\right)} \Delta r^2}_{=0},$$

ou seja,

$$\Delta\tau_E = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_E}\right)^{1/2} \Delta t. \quad (\text{A.96})$$

Para o observador distante em  $r_\infty \rightarrow \infty$  temos que o termo  $\frac{2GM}{c^2 r_\infty} \rightarrow 0$ . Logo, a equação (A.84) para os eventos recepção dos sinais luminosos por um observador distante em  $r = r_\infty$  é dada por

$$c^2 \Delta\tau_\infty^2 = \left(1 - \underbrace{\frac{2GM}{c^2 r_\infty}}_{=0}\right) (c\Delta t)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_\infty}\right)} \Delta r^2.$$

Logo,

$$\Delta\tau_\infty = \Delta t. \quad (\text{A.97})$$

Calculando a razão das equações (A.96) e (A.97) obtemos

$$\Delta\tau_E = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_E}\right)^{1/2} \Delta\tau_\infty. \quad (\text{A.98})$$

Como  $\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_E}\right)^{1/2} < 1$  o intervalo de tempo medido pelo observador na superfície

da Terra é menor que o intervalo de tempo medido pelo observador distante, ou seja,  $\Delta\tau_E < \Delta\tau_\infty$ . Interpretando a equação (A.98) podemos dizer que *o funcionamento de um relógio é afetado pela proximidade desse relógio de um objeto massivo de massa M*. Dessa forma, relógios colocados em regiões de altitude menor (menores valores de  $r$ ) funcionam mais lentamente do que relógios colocados em regiões de altitude maior (maiores valores de  $r$ ). A gravidade afeta o ritmo dos relógios e faz o tempo passar mais lentamente.

Se, agora, o intervalo de tempo  $\Delta\tau_E$  representar o período de uma onda luminosa senoidal emitida na posição  $r = r_E$  e  $\Delta\tau_\infty$  representar o período, dessa mesma onda, medido na posição  $r = r_\infty$ , podemos relacionar o período da onda com a sua frequência por meio da relação  $f = 1/\Delta\tau$ . Dessa maneira, a equação (A.98) pode ser reescrita da seguinte forma.

$$f_\infty = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r_t}\right)^{1/2} f_E, \quad (\text{A.99})$$

onde  $f_\infty$  representa a frequência da onda luminosa recebida pelo observador localizado em  $r_\infty (\rightarrow \infty)$  enquanto  $f_E$  representa a frequência de emissão da onda luminosa emitida pelo observador localizado na superfície da Terra. Pela equação (A.99) percebemos que a frequência recebida pelo observador distante ( $f_\infty$ ) é menor que a frequência emitida pelo observador na superfície  $f_E$ , ou seja,  $f_\infty < f_E$ . Essa redução, como já discutido também na subseção (A.5.3), na frequência representa o *desvio gravitacional para o vermelho*, a qual foi obtida, agora, utilizando a métrica de Schwarzschild.

---

**Exercício 23** Imagine que o observador distante agora emita dois pulsos luminosos em direção ao observador localizado na superfície da Terra. Compare o período e a frequência dos sinais luminosos utilizando a métrica de Schwarzschild. ■

---

Os físicos Robert V. Pound e Glen A. Rebka em 1960 realizaram um experimento comprovando o desvio gravitacional para o vermelho com precisão em torno de 10%. Posteriormente, Pound e J. Snider melhoraram a precisão para algo em torno de 1%. Nesse experimento raios gama eram emitidos e percorriam uma distância vertical de 22,6m em uma torre na Universidade de Harvard e, assim, a diferença de frequência era determinada. Esses experimentos validaram a interpretação de que relógios funcionam com diferentes taxas em um campo gravitacional.

#### A.6.6.2 A precessão do periélio da órbita de Mercúrio

Em uma primeira abordagem sobre gravitação somos, geralmente, introduzidos às três leis de Kepler. A primeira lei de Kepler, também conhecida como lei das órbitas, afirma que as órbitas dos planetas em torno do Sol são elípticas, onde o Sol está posicionado em um dos focos da elipse. Contudo, essa afirmação é verdadeira apenas para planetas isolados, ou seja, levando em conta apenas a interação do Sol com o planeta.

A órbita elíptica pode ser determinada pela solução da segunda lei de Newton para o movimento de um planeta isolado em torno do Sol – para analisar essa solução ver (HIBBEKER, 2010, p. 155) ou (SYMON, 1971, p. 122)<sup>35</sup>. A Figura A.49 ilustra a órbita de um planeta hipotético em torno do Sol.

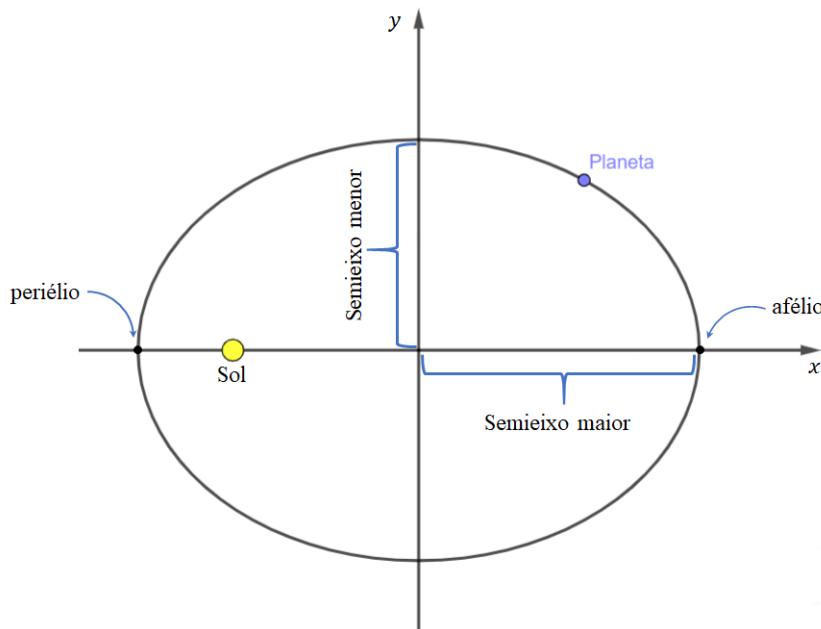


Figura A.49: Órbita elíptica de um planeta em torno do Sol. O afélio representa o ponto da trajetória do planeta mais distante do Sol enquanto o periélio representa o ponto da trajetória mais próximo do Sol.

A Figura A.49 ilustra, também, o periélio, ponto da trajetória do planeta que está mais próximo do Sol, e o afélio, ponto da trajetória do planeta que está mais afastado do Sol. Tanto o periélio quanto o afélio são fixos para repetidas órbitas de um planeta isolado em torno do Sol. Contudo, sabemos que um planeta que orbita o Sol também está sujeito à interação devido aos demais planetas que compõem o Sistema Solar. Essas interações (forças) provocam pequenas perturbações e alteram a órbita do planeta. Essas forças fazem, por exemplo, com que as órbitas dos planetas não sejam fechadas. Dessa forma, após uma volta completa em torno do Sol o periélio deixa de ser um ponto fixo e movimenta-se, sendo esse movimento chamado de *precessão do periélio*. A Figura A.50 ilustra, de maneira exagerada, o movimento de precessão do periélio para o planeta Mercúrio. A MN consegue prever com exatidão o avanço do periélio de diversos planetas do Sistema Solar. Contudo, a MN não consegue prever corretamente o avanço do periélio de Mercúrio. Existe uma discrepância entre a previsão da MN e os resultados experimentais. Ao aplicarmos a MN na previsão do valor para a precessão

<sup>35</sup>A solução desse problema é um tópico avançado. Estudantes que já estudaram Cálculo Diferencial e Integral podem analisar as soluções nas referências citadas.

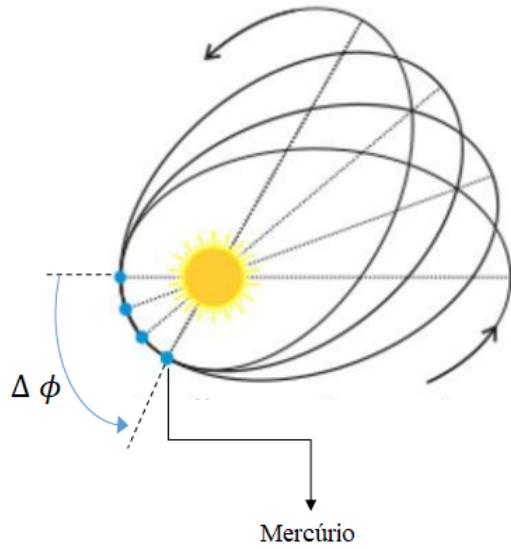


Figura A.50: Precessão periélio de Mercúrio – retirado e modificado de [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Perihelion\\_precession.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Perihelion_precession.svg) – acesso março de 2023.

do periélio de Mercúrio, considerando todas as perturbações devido ao demais planetas, notamos que existe uma discrepância de aproximadamente 38 segundos de arco por século (MACHADO; TORT; ZARRO, 2023, p. 6). Na época cogitou-se a existência de um planeta chamado *Vulcano* que estaria entre o Sol e Mercúrio, e que seria o responsável pela diferença entre o valor previsto pela MN e o valor experimental. No entanto, essa suposição foi descartada posteriormente devido a falta de evidência experimental, para mais informações sobre a precessão do periélio de Mercúrio e sobre Vulcano ver (MACHADO; TORT; ZARRO, 2023). Eis que, então, Einstein em novembro de 1915 apresenta quatro trabalhos na Academia Prussiana de Ciências e, em seu terceiro trabalho, obtém o valor para precessão do periélio de Mercúrio em acordo com os resultados experimentais da época de aproximadamente 43 segundos de arco por século. Podemos mostrar que a expressão para a precessão (ou avanço) do periélio de Mercúrio  $\Delta\phi$  é dada por (COLLIER, 2019, p. 211)

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2}, \quad (\text{A.100})$$

onde  $M$  é a massa total do sistema (que é aproximadamente a massa do Sol),  $a$  o tamanho do semi-eixo maior da elipse,  $e$  a excentricidade da elipse,  $G$  é a constante de gravitação universal, e  $c$  é a velocidade da luz.

---

**Exercício 24** Determine o valor de  $\Delta\phi$  para  $M = 1,99 \times 10^{30}\text{kg}$ ;  $a = 5,79 \times 10^{10}\text{m}$ ;  $e = 0,207$ ;  $G = 6,67 \times 10^{-11}\text{N m}^2/\text{kg}^2$ . Você irá obter o resultado em radianos. ■

**Exercício 25** Expresse o resultado anterior em “segundos de arco”. Para isso, você deve lembrar que 1 grau vale 3600”. Logo, para converter o ângulo acima para “segundos de arco” você deve multiplicar o resultado anterior por “ $180 \times 3600$ ”. ■

**Exercício 26** Expresse o resultado anterior em “segundos de arco por século”. Note que o resultado anterior estabele o avanço  $\Delta\phi$  por órbita. Para determinar o avanço por século podemos realizar uma regra de três simples notando que 1 órbita está para 87,97 dias (período de Mercúrio) assim como  $x$  órbitas estão para  $100 \times 365$  dias. Note que a expressão  $100 \times 365$  é a conversão de 1 século para dias. ■

O valor obtido no exercício anterior é de aproximadamente 43 segundos de arco que está, dentro do erro experimental, em acordo com o valor medido de  $43,1 \pm 0,5$  segundos de arco (COLLIER, 2019, p. 212).

#### A.6.6.3 Deflexão da Luz e o Eclipse do Sol

Vimos anteriormente na subseção A.5.4 como o PE na sua *forma forte* levava à previsão de que a luz sofre uma deflexão (desvio) ao movimentar-se num campo gravitacional. Einstein indicou que a deflexão da luz poderia ser testada durante um eclipse solar. A Figura A.51 ilustra a luz emitida, por uma estrela distante, que ao passar na vizinhança do Sol sofre uma deflexão  $\delta$ .

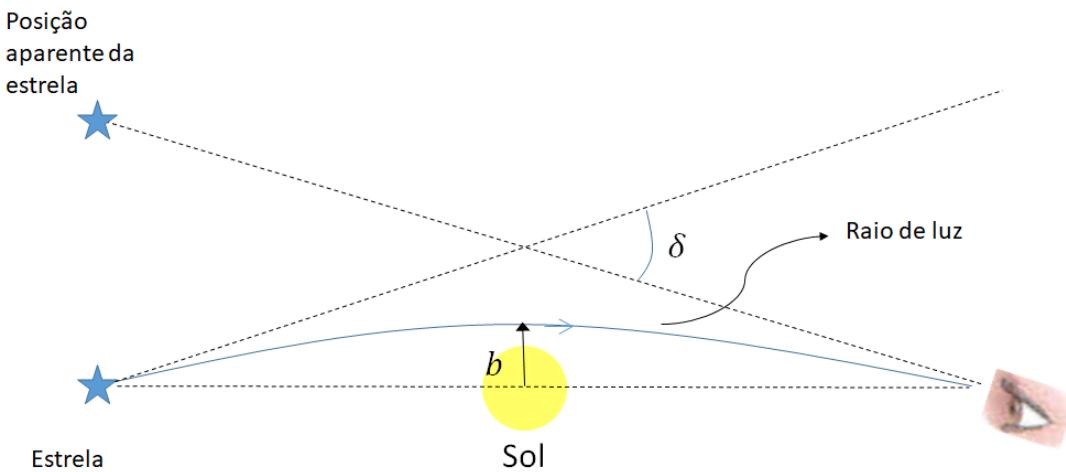


Figura A.51: Desvio da luz emitida por uma estrela ao passar na vizinhança do Sol.

Einstein em 1915 determina o valor  $\delta$  para a deflexão da luz que tangencia a supe-

ríficie do Sol no valor de

$$\delta = 1,75 \text{ segundos de arco.}$$

Esse valor corresponde ao dobro do previsto pela MN e pelo próprio Einstein em 1911 (MACHADO; TORT; ZARRO, 2023). Pode-se mostrar que a relação obtida por Einstein é dada por (COLLIER, 2019, p. 214)

$$\delta = \frac{4GM_{sol}}{R_{Sol}c^2}, \quad (\text{A.101})$$

---

**Exercício 27** Determine o valor de  $\delta$  em “segundo de arco” para  $M_{Sol} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ ;  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ ;  $R_{Sol} = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$ . Lembre-se de utilizar a conversão de radiano para segundo de arco discutida nos exercícios anteriores. ■

---

Em 29 de maio do ano de 1919, duas expedições britânicas realizaram medidas para determinar se a luz, de estrelas distantes, sofre deflexão ao passar nas proximidades do Sol durante um *eclipse solar*. A expedição liderada por Arthur Eddington e Edwin Cottingham foi para a ilha de Príncipe, na África. A segunda expedição liderada por Andrew Crommelin e Charles Davidson foi para Sobral localizada no Ceará, no Brasil. Um relato importante sobre os resultados obtidos em Sobral é trazido por Crispino e Kennefick:

“Ao resumir os resultados das duas expedições, o maior peso deve ser anexado aos obtidos com a lente de 4 polegadas em Sobral. Pela superioridade das imagens e pela escala maior das fotografias, reconheceu-se que estas seriam as mais confiáveis.” (CRISPINO; KENNEFICK, 2019, p. 416)

Foram as lentes utilizadas na medida da deflexão da luz em Sobral<sup>36</sup>, no Brasil, que confirmaram as previsões da TRG realizadas por Einstein. Destacamos, ainda, a contribuição da equipe brasileira, para as medidas em Sobral, liderada pelo físico Henrique Morize que era na época diretor do Observatório Nacional, localizado no Rio de Janeiro. As palavras trazidas no artigo do físico brasileiro Salinas retratam a importância dos resultados obtidos em Sobral

“O universo clássico do inglês Sir Isaac Newton, fundador da Royal Society, deveria ser substituído pelo “espaço-tempo curvo” de um físico alemão.” (SALINAS, 2019)

O eclipse teve um papel importante para as medidas, pois caso contrário a luz do Sol ofuscaria o brilho emitido pelas estrelas distantes. A Figura A.52 (a) apresenta

<sup>36</sup>Na página <http://www.mast.br/sobral/> o Museu de Astronomia e Ciências Afins - MAST - traz informações e imagens preciosas acerca do Eclipse de 1919.

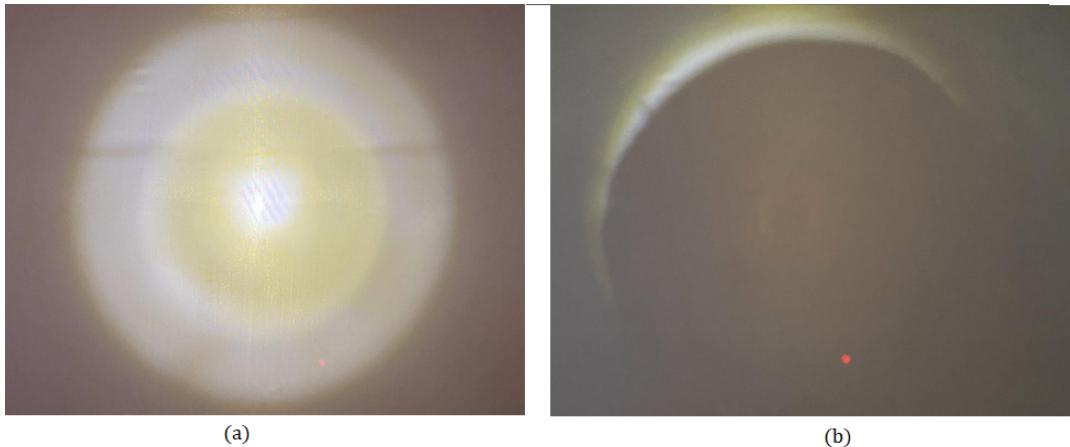


Figura A.52: (a) Um LED central acesso faz o papel do Sol e um LED vermelho faz o papel de uma estrela distante. Note que nessa figura conseguimos com dificuldade perceber o brilho do LED vermelho e (b) uma barreira que faz o papel da Lua é colocada bloqueando parte da luz do LED central. Note que com o bloqueio o brilho do LED vermelho torna-se muito mais evidente – retirado de (NETO, 2020, p. 52).

uma analogia para o problema da luz de uma estrela sendo ofuscada pela luz emitida pelo Sol. Assim, na Figura A.52 (a) temos um LED central e um LED vermelho iluminando uma tela. Fazendo um pouco de esforço conseguimos ver, na figura, um ponto vermelho não muito nítido. Na Figura A.52 (b) é utilizada uma barreira bloqueando parte da luz do LED central. Com isso, a luz do LED vermelho fica muito mais perceptível como podemos ver na Figura A.52 (b). Nessa analogia a luz do LED vermelho faz o papel da luz emitida por uma estrela nos arredores do sol, a luz emitida pelo LED central faz o papel da luz emitida pelo Sol e a barreira faz o papel da Lua que durante o eclipse solar bloqueia os raios de luz emitidos pelo Sol.

### A.6.7 Trajetórias de raios de luz

Se quisermos utilizar a métrica de Schwarzschild para descrever o movimento de um pulso luminoso, precisamos utilizar o *intervalo do tipo luz*. Para intervalos do tipo luz temos que  $\Delta s^2 = 0$ . Podemos, então, determinar a “velocidade”<sup>37</sup> na direção radial  $(\frac{\Delta r}{\Delta t})$  de um pulso luminoso. Utilizando a equação (A.86), com  $\Delta\phi = 0$ , temos

$$0 = - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) (c\Delta t)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} \Delta r^2. \quad (\text{A.102})$$

<sup>37</sup>A velocidade aparece entre aspas devido ao fato que  $r$  e  $t$  não apresentam significado métrico como discutido anteriormente. Para mais informações ver (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 4-2).

Isolando  $\Delta r/\Delta t$  segue que

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \pm \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c. \quad (\text{A.103})$$

O sinal de  $(-)$  na expressão indica um pulso luminoso aproximando-se do horizonte de eventos na direção radial e o sinal de  $(+)$  indica um pulso luminoso afastando-se do horizonte de eventos na direção radial. Um fato curioso é de que a “velocidade” radial nas coordenadas de Schwarzschild é menor que a velocidade da luz denotada por  $c$ , pois  $\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) < 1$ . O termo  $\frac{\Delta r}{\Delta t}$  representa uma taxa de variação nas coordenadas de Schwarzschild. Notamos também que se fizermos  $M = 0$  a expressão (A.103) fornece que

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \pm c. \quad (\text{A.104})$$

Assim, na ausência de uma massa curvando o espaço-tempo, temos o espaço-tempo da TRR em que as coordenadas voltam a apresentar significado métrico e, nesse caso, a velocidade da luz apresenta sempre valor igual  $c$ .

Voltemos agora a nossa atenção para as trajetórias de pulsos luminosos na presença de um buraco negro. A equação (A.103) mostra a relação para a “velocidade” radial de um pulso luminoso no espaço-tempo de Schwarzschild.

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \pm \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c.$$

Podemos resolver a equação acima utilizando um processo de integração. Entretanto, como esse passo foge do escopo desse texto iremos colocar diretamente a solução que é dada por<sup>38</sup>

$$ct - ct_1 = \pm \left[ r - r_1 + R_s \ln \left( \frac{r - R_s}{r_1 - R_s} \right) \right], \quad (\text{A.105})$$

onde  $(ct_1, r_1)$  representam as condições iniciais de emissão do pulso de luz. A equação (A.105) descreve linhas de mundo (geodésicas nulas  $\Delta s^2 = 0$ ) de pulsos luminosos. O sinal positivo descreve a linha de mundo de um pulso luminoso emitido no sentido positivo de  $r$  e o sinal negativo descreve a linha de mundo de um pulso luminoso emitido no sentido negativo de  $r$ . Por simplicidade construiremos um gráfico  $ct/R^*$  vs.  $r/R^*$ , onde  $R^* = R_s/2$ . Assim, podemos reescrever a equação (A.105) da seguinte forma

$$\frac{ct}{R^*} - \frac{ct_1}{R^*} = \pm \left[ \frac{r}{R^*} - \frac{r_1}{R^*} + 2 \ln \left( \frac{r/R^* - 2}{r_1/R^* - 2} \right) \right], \quad (\text{A.106})$$

O gráfico plotado na Figura A.53 foi construído a partir da equação (A.106) para diferentes valores de  $(ct_1, r_1)$ .

A análise do gráfico da Figura A.53 nos traz alguns *insights* importantes que discutimos na introdução da seção A.6, porém sem nenhuma demonstração. Para a região

---

<sup>38</sup>Para mais informações ver (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 3-24).

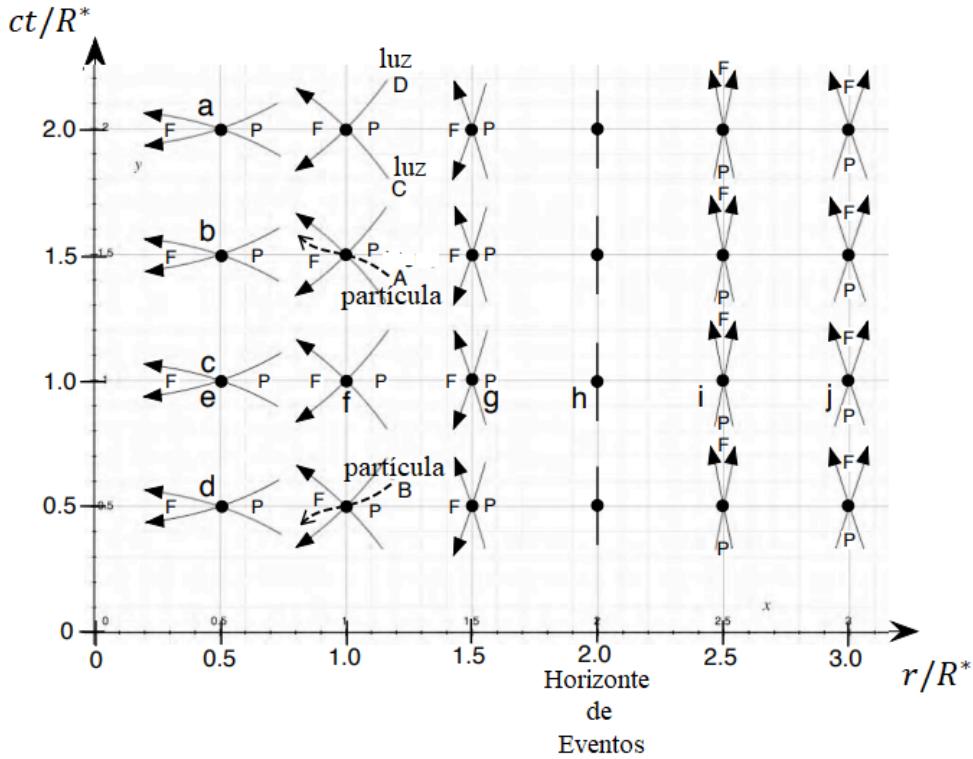


Figura A.53: Linhas de mundo para pulsos luminosos para diferentes valores de  $(ct_1, r_1)$ . Duas linhas de mundo de duas partículas arbitrárias  $A$  e  $B$  estão representadas. Repare que as linhas de mundo das partículas estão no interior dos seus respectivos cones de luz – retirado e modificado de (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 3-24).

interior ao horizonte de eventos vemos que tudo se move para valores de  $r$  decrescente – veja as linhas de mundo tracejadas das partículas  $A$  e  $B$  também representadas na figura. Entretanto, as coordenadas de Schwarzschild não são uma boa escolha de coordenadas para descrever fenômenos no horizonte de eventos ou em regiões interiores ao horizonte. Note que a linha de mundo da partícula  $B$  “avança” para valores decrescentes de  $t$ . Além disso, em cima do horizonte o valor da coordenada  $r$  para a luz permanece fixa. Já para a região exterior ao horizonte de eventos as coordenadas de Schwarzschild descrevem com perfeição os fenômenos no espaço-tempo.

Para que possamos descrever os fenômenos no espaço-tempo para valores de  $r \leq R_s$  precisamos fazer uma mudança de coordenadas. Essa mudança de coordenadas foge do escopo desse texto, mas uma discussão sobre o assunto pode ser obtida em (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 7-10) e/ou (MACHADO; TORT; ZARRO, 2021, p. 10). Esse novo conjunto de coordenadas são chamadas de *coordenadas de Painlevé-Gullstrand* (PG) e a mudança de coordenadas altera a coordenada temporal que nas coordenadas de PG será representada pela letra  $T$ . Nessas novas co-

ordenadas nós podemos repetir o gráfico desenhando os cones de luz para diferentes condições iniciais como mostrado na Figura A.54. Analisando a Figura A.54 nota-

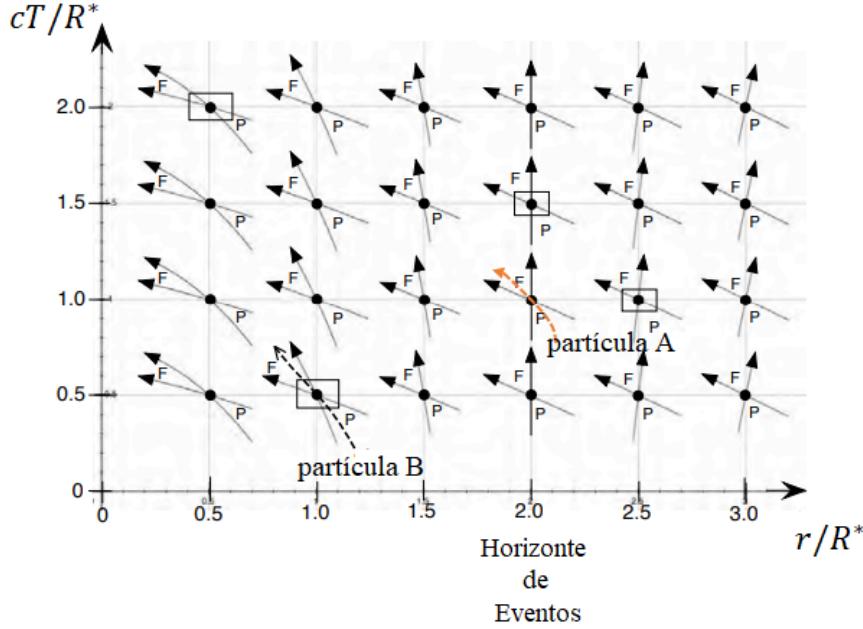


Figura A.54: Linhas de mundo para pulsos luminosos para diferentes valores de  $(cT_1, r_1)$ . Duas linhas de mundo de duas partículas arbitrárias  $A$  e  $B$  estão representadas – retirado e modificado de (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 7-26).

mos que para regiões interiores ao horizonte de eventos qualquer partícula estará em movimento até atingir a coordenada  $r = 0$  (singularidade). Com as coordenadas de Painlevé-Gullstrand a singularidade no horizonte de eventos desaparece e podemos traçar o cone de luz para  $r = R_s$  como mostrado na Figura A.54. Nessa figura notamos que a partícula A (linha tracejada laranja) após cruzar o horizonte não pode mais retornar a região exterior ao horizonte.

### A.6.8 Pense Globalmente e Meça Localmente

O nome dessa subseção é uma tradução da frase “*Think globally; measure locally*” da referência (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018). Lembramos que, para uma curvatura finita, uma pequena região de uma dada superfície curva é localmente plana, como visto na subseção A.4.6. No espaço-tempo curvo da TRG, podemos realizar medidas em uma pequena região do espaço-tempo e recuperar a geometria da TRR. A métrica de Schwarzschild, para o plano equatorial ( $\theta = \pi/2$ ) e para  $\phi$  fixo, é

dada por

$$\Delta s^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (c\Delta t)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \Delta r^2. \quad (\text{A.107})$$

Um observador local com  $r = r_{fixo}$  pode aproximar a equação acima como

$$\Delta s^2 \approx - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{fixo}}\right) (c\Delta t)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{fixo}}\right)} \Delta r^2. \quad (\text{A.108})$$

Para um pequena região do espaço-tempo ao redor de um observador localizado em  $r = r_{fixo}$ , o mesmo pode reescrever a equação anterior como

$$\Delta s^2 \approx -c^2 \underbrace{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{fixo}}\right) (\Delta t)^2}_{\Delta t_{local}^2} + \underbrace{\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{fixo}}\right)}}_{\Delta x_{local}^2} \Delta r^2, \quad (\text{A.109})$$

ou seja,

$$\Delta s^2 \approx -c^2 \Delta t_{local}^2 + \Delta x_{local}^2. \quad (\text{A.110})$$

Se o observador localizado em  $r = r_{fixo}$  medir dois eventos 1 e 2 associados a passagem de um pulso de luz por ele, temos utilizando a equação (A.110), para um intervalo do tipo luz ( $\Delta s^2 = 0$ ), que

$$0 \approx -c^2 \Delta t_{local}^2 + \Delta x_{local}^2. \quad (\text{A.111})$$

Reescrivendo a equação acima obtemos

$$\left(\frac{\Delta x_{local}}{\Delta t_{local}}\right)^2 \approx c^2. \quad (\text{A.112})$$

Aplicando a raiz quadrada na expressão anterior e selecionando a parte positiva segue que

$$\frac{\Delta x_{local}}{\Delta t_{local}} \approx c. \quad (\text{A.113})$$

Se fizermos o intervalo de tempo local tender a zero ( $\Delta t_{local} \rightarrow 0$ ) então a velocidade da luz medida por um observador local (em um pequena região do espaço-tempo) fica

$$v_{local} = \lim_{\Delta t_{local} \rightarrow 0} \frac{\Delta x_{local}}{\Delta t_{local}} = c. \quad (\text{A.114})$$

Assim, em uma pequena região do espaço-tempo recuperamos a TRR, pois um espaço-tempo curvo é localmente plano.

# **Apêndice B**

## **Uma introdução à Relatividade Restrita e à Relatividade Geral para o Ensino Médio - Resumo**

### **B.1 Relatividade restrita (RR): postulados e suas implicações**

#### **B.1.1 Os postulados da teoria da relatividade restrita**

Os postulados estabelecidos por Einstein na Teoria da Relatividade Restrita (TRR) podem ser escritos como

- (i) Postulado 1: As leis da física são as mesmas para todos os referenciais inerciais;
- (ii) Postulado 2: A magnitude da velocidade da luz, isto é: sua celeridade,  $c$ , é a mesma para todos os observadores inerciais, não dependendo do estado de movimento da fonte, ou seja,  $c = c'$ .

O postulado 1 é chamado de Princípio da Relatividade Restrita (PRR) é uma extensão do princípio da relatividade estabelecido por Galileu.

#### **B.1.2 Simultaneidade, dilatação do tempo e contração do comprimento**

Por meio dos postulados da TRR podemos determinar três resultados: a simultaneidade, a dilatação do tempo e a contração do comprimento.

A simultaneidade pode ser estabelecida através de dois enunciados simples:

- Se dois eventos ocorrem em um mesmo instante de tempo e na mesma posição em um dado referencial, então os eventos serão simultâneos para qualquer referencial em movimento relativo;

- Se dois eventos ocorrem em um mesmo instante de tempo e em posições diferentes em um dado referencial, então os eventos não serão simultâneos para qualquer outro referencial em movimento relativo.

A dilatação do tempo estabelece uma comparação para a passagem do tempo entre um relógio em movimento e relógios em repouso e pode ser enunciada da seguinte forma

- O intervalo de tempo entre dois eventos é o menor quando medido em um referencial em que os eventos ocorrem no mesmo lugar (se tal referencial existir). Em qualquer outro referencial, o intervalo entre os eventos é maior por um fator  $\gamma$ .

A Contração do comprimento estabelece uma comparação entre a medida do comprimento de um objeto entre dois referenciais em movimento relativo e pode ser enunciada da seguinte forma

- O comprimento de objetos é o maior possível quando medido no referencial de repouso do objeto. Em qualquer outro referencial, o comprimento medido será menor por um fator igual a  $\gamma$ .

O fator  $\gamma$  é chamado de fator de Lorentz e pode ser escrito pela seguinte equação  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , em que  $v$  é a velocidade relativa entre os referenciais e  $c$  é a velocidade da luz. Note que esses resultados vão de encontro aos resultados da Mecânica Newtoniana (MN).

### B.1.3 As Transformações de Lorentz

As Transformações de Lorentz (TL) estabelecem uma relação entre eventos mediados em dois referenciais inerciais em movimento relativo entre si. Além disso, essas transformações devem ser compatíveis com os postulados da TRR. Escreveremos as transformações para os referenciais  $S$  e  $S'$  mostrados na Figura B.1. As transformações para os eixos  $y', y$  e  $z', z$  são trivialmente escritas, pois  $y' = y$  e  $z' = z$ . Logo, as TL, que relacionam as coordenadas espaço-temporais entre os referenciais  $S'$  e  $S$ , são escritas como

$$x' = \gamma(x - vt); \quad (\text{B.1})$$

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right); \quad (\text{B.2})$$

$$y' = y; \quad (\text{B.3})$$

$$z' = z. \quad (\text{B.4})$$

Se conhecermos as coordenadas  $(x, y, z, t)$  em  $S$  de um determinado evento, podemos utilizar as TL para determinar as coordenadas  $(x', y', z', t')$  em  $S'$  para o mesmo evento.

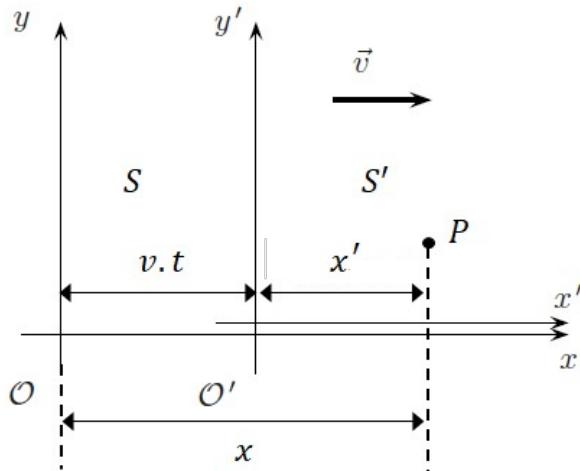


Figura B.1: Referencial  $S'$  em movimento relativo ao referencial  $S$  ao longo da direção  $x$ .

Podemos, também, a partir das coordenadas  $(x', y', z', t')$  em  $S'$  determinar as as coordenadas  $(x, y, z, t)$  em  $S$  e escrever as chamadas transformações de Lorentz inversas

$$x = \gamma(x' + vt'); \quad (\text{B.5})$$

$$t = \gamma \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right); \quad (\text{B.6})$$

$$y = y'; \quad (\text{B.7})$$

$$z = z'. \quad (\text{B.8})$$

Por meio das transformações colocadas acima podemos recuperar os resultados descritos anteriormente como a relatividade da simultaneidade, a dilatação do tempo e a contração do comprimento.

### B.1.3.1 Transformações de Lorentz para a velocidade

Podemos também relacionar as velocidades que observadores fixos em  $S$  e  $S'$  determinam para um objeto que se move em relação a ambos os referenciais. As transformações, que relacionam as velocidades de um objeto em  $S$  e  $S'$ , são chamadas de Transformações de Lorentz para a Velocidade (TLV). Para evitar confusão com a notação, pois utilizamos a letra  $v$  para designar a velocidade de  $S'$  em relação a  $S$ , chamaremos a velocidade de um objeto medida em  $S$  de  $\vec{u}$  e a velocidade de um objeto medida em  $S'$  de  $\vec{u}'$ . A forma para calcularmos a velocidade na TRR é semelhante à maneira utilizada na Mecânica Newtoniana (MN). Podemos também escrever a velocidade em termos das componentes  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$  em  $S$  e  $u'_x$ ,  $u'_y$  e  $u'_z$  em  $S'$ . As componentes para a velocidade de um objeto medido em  $S$  e  $S'$  são dadas, respectivamente, pelas seguintes

expressões

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}; u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}; u_z = \frac{\Delta z}{\Delta t};$$

e

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}; u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}; u'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'}.$$

As equações que relacionam as velocidades medidas em  $S$  e  $S'$ , deduzidas a partir das transformações de Lorentz, são escritas como

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}; \\ u'_y &= \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{u_y}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}; \\ u'_z &= \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{u_z}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}. \end{aligned}$$

#### B.1.4 Efeito Doppler

O efeito Doppler da luz ocorre quando há movimento relativo entre um observador e uma fonte luminosa. O movimento relativo entre a fonte e o observador faz com que a frequência da luz emitida pela fonte e a frequência da luz medida pelo observador sejam distintas. A Figura B.2 ilustra uma fonte em repouso no referencial  $S$  e um observador  $R$  (fixo no referencial  $S'$ ) em movimento com velocidade  $v$ . A equação que relaciona a frequência de emissão da fonte de luz e a a frequência medida por  $R$  é dada por

$$f'_R = f_{FL} \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad (\text{afastamento}), \quad (\text{B.9})$$

onde a equação acima é válida quando há afastamento entre o observador e a FL. Quando ocorre uma aproximação entre o observador e a fonte de luz a expressão para o efeito Doppler se escreve como

$$f'_R = f_{FL} \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (\text{aproximação}). \quad (\text{B.10})$$

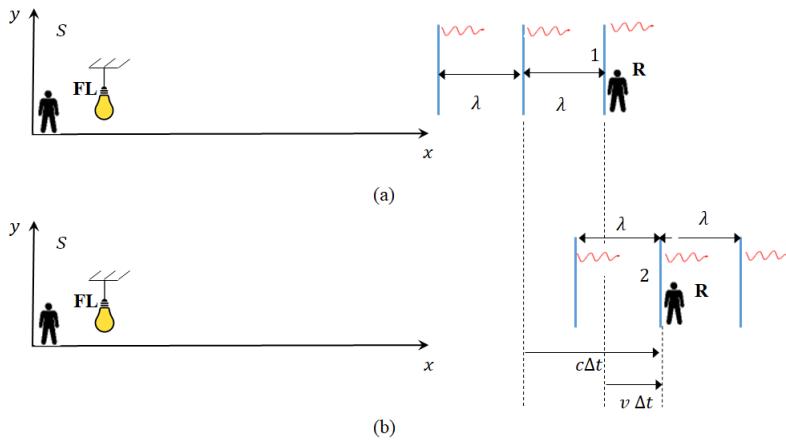


Figura B.2: (a) Um observador R, movimentando-se em relação a uma fonte de luz estacionária em S, recebe a primeira frente (linha azul) de onda (evento 1) e (b) o observador R recebe a segunda frente de onda (evento 2).

## B.1.5 Momento linear e energia

As leis de conservação do momento linear e da energia total são dois princípios fundamentais da MN. Descreveremos a seguir as versões relativísticas para a conservação do momento linear e para a energia total.

### B.1.5.1 Momento linear relativístico

A definição para o momento linear utilizada na MN é dada por

$$\vec{p}_{\text{newt}} = m\vec{u},$$

onde \$m\$ representa a massa inercial do objeto e \$\vec{u}\$ representa a velocidade do objeto em relação ao referencial inercial \$S\$. A partir dessa definição temos que na ausência de forças externas (sistema isolado) o momento linear total é conservado na MN. Se tivermos um referencial \$S'\$ que se move com velocidade constante \$v\$ em relação ao eixo \$x\$, pode-se mostrar que se o momento linear total se conserva em \$S\$, o mesmo também será conservado em \$S'\$. Essa demonstração é feita utilizando as transformações de Galileu para a velocidade.

Entretanto, se utilizarmos a definição newtoniana para o momento linear e utilizarmos as TL para a velocidade pode-se mostrar que se o momento linear for conservado em \$S\$ o mesmo não será necessariamente conservado em \$S'\$. Dessa forma, para compatibilizar a conservação do momento linear com o primeiro postulado da TRR define-se o *momento linear relativístico* da seguinte forma

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (\text{B.11})$$

onde  $c$  é a velocidade da luz. Utilizando-se o momento linear relativístico juntamente com as TLV pode-se mostrar que se o momento linear relativístico for conservado em  $S$ , ele também será conservado em  $S'$ .

### B.1.5.2 Energia relativística

A *energia relativística (total)* de um objeto de massa  $m$  e velocidade de módulo  $u$  em  $S$  é definida como

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (\text{B.12})$$

onde  $c$  é a velocidade da luz. Fazendo  $u = 0$  (velocidade zero) na expressão (B.12) obtemos

$$E = E_0 = mc^2, \quad (\text{B.13})$$

onde o termo  $E_0$  é chamado de *energia de repouso* da massa  $m$ . Podemos, ainda, escrever a energia relativística da seguinte maneira

$$E = E_0 + K, \quad (\text{B.14})$$

onde  $K$  é a parte da energia atribuída ao movimento, sendo chamada de *energia cinética relativística*. A energia cinética relativística escreve-se como

$$K = E - mc^2 = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (\text{B.15})$$

ou, simplesmente,

$$K = (\gamma - 1) mc^2.$$

Com as expressões relativísticas podemos escrever as leis de conservação do momento linear relativístico e da energia relativística da seguinte forma:

- Para todo sistema isolado<sup>1</sup>, a energia relativística e o momento relativístico (totais) são conservados.

## B.2 Os intervalos invariantes e os diagramas espaço-tempo.

### B.2.1 Intervalo invariante

Uma grandeza é dita um invariante na TRR quando apresenta o mesmo valor para qualquer referencial inercial. A velocidade da luz, por exemplo, é uma grandeza *invariante*.

---

<sup>1</sup>Um sistema está isolado se a resultante das forças externas é nula.

*riante*, pois o seu valor  $c$  é o mesmo para qualquer referencial inercial. Existe, também, uma combinação entre as coordenadas  $t$  e  $x$  e, também, entre as coordenadas  $t'$  e  $x'$  que é uma grandeza *invariante*. Essa grandeza é chamada de *intervalo invariante* ou *intervalo espaço-temporal*. O intervalo invariante é definido como

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2, \quad (\text{B.16})$$

onde  $\Delta x$  é a variação da coordenada  $x$  entre dois eventos e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo entre dois eventos.

Podemos mostrar, utilizando as TL, a seguinte expressão

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 = -c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2, \quad (\text{B.17})$$

O resultado dado pela expressão (B.17) mostra que  $\Delta s^2$  independe do referencial em que é calculada, ou seja, o *intervalo invariante* ou *intervalo espaço-temporal* é uma grandeza *invariante*. O valor do intervalo espaço-temporal ( $\Delta s^2$ ) pode ser negativo, positivo ou nulo, sendo classificados com intervalo tipo tempo, intervalo tipo espaço e intervalo tipo luz respectivamente.

## B.2.2 Os diagramas espaço-tempo

O espaço-tempo da TRR é denominado espaço-tempo de Minkowski. As transformações de Lorentz mostram que o tempo deve ser tratado como uma coordenada ordinária. Isto permite imaginar uma fusão do espaço e do tempo em uma única entidade: o *espaço-tempo*. Foi Hermann Minkowski, antigo professor de Einstein, quem introduziu e desenvolveu matematicamente o conceito em um ensaio de 1908.

A abordagem de Minkowski para a TRR leva a um tratamento geométrico do espaço-tempo que é vital para a TRG. O espaço-tempo da TRR é quadridimensional, ou seja, em um referencial inercial  $S$  descrevemos um evento a partir de três coordenadas espaciais e uma coordenada temporal. Se quisermos construir um diagrama de uma sequência de eventos para o movimento de um objeto, precisaríamos fazer um gráfico quadridimensional, o que seria uma tarefa muito complicada. Por isso, utilizamos representações bidimensionais, mais simples, utilizando a coordenada espacial  $x$  e a coordenada temporal  $t$  para descrever o movimento de algum objeto ao longo de uma dimensão espacial em um referencial inercial  $S$ , por exemplo. Na TRR costuma-se traçar gráficos colocando no eixo vertical o produto  $ct$  na vertical e no eixo horizontal a coordenada espacial  $x$  na horizontal.

Podemos representar o diagrama espaço-tempo na TRR para diferentes objetos como mostrado na Figura B.3. Pontos nesse diagrama caracterizam eventos. A reta (a) representa uma partícula material que se move com velocidade constante no sentido positivo do eixo  $x$ . A reta (b) representa um pulso luminoso que se move com velocidade  $c$  no sentido positivo do eixo  $x$ . A reta (c) representa uma partícula material que permanece em repouso na posição  $x = 16\text{ m}$ . A “trajetória” de um objeto ou de um

pulso luminoso em um diagrama espaço-tempo é chamada de *linha de mundo* ou *linha de universo*. As *linhas de mundo* mostradas na Figura B.3 são as retas (a), (b) e (c).

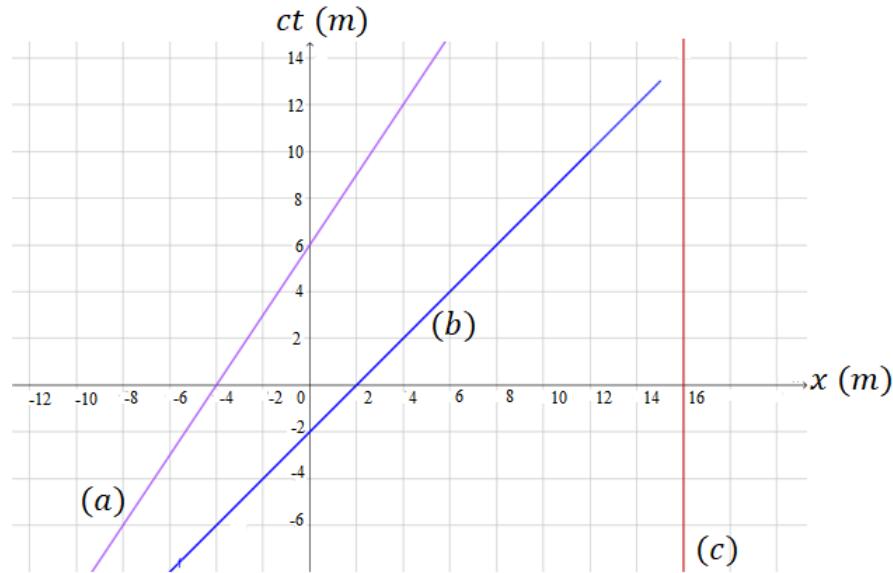


Figura B.3: Diagrama Espaço-tempo referencial em  $S$  de: (a) um objeto movendo-se com velocidade constante no sentido positivo do eixo  $x$ , (b) um pulso luminoso movendo-se no sentido positivo do eixo  $x$  e (c) um objeto em repouso.

O gráfico da Figura B.4 mostra o gráfico de uma partícula “A” acelerada (linha em preto) e, também, dois pulsos luminosos (linhas em vermelho) emitidos na posição  $x = 4$  m no sentido positivo e negativo do eixo  $x$ . As linhas na cor vermelha formam o chamado *cone de luz* a qual o vértice do cone está localizado no instante  $t = 0$  e na posição  $x = 4$  m. Note que a partícula “A” apresenta o seu movimento restrito à região delimitada pelo cone de luz tanto para  $t > 0$  quanto para  $t < 0$ . A região com hachura em azul representa o *futuro* da partícula “A” em  $t = 0$ , pois é o local de todos os pontos (eventos) acessíveis à partícula na continuação do movimento. A região com hachura em verde constitui o *passado* da partícula “A” em  $t = 0$ , pois é o local de todos os pontos (eventos) possíveis que a partícula pode ter vindo. Passado e futuro podem ser definidos em relação a qualquer evento particular como no caso do evento B na Figura B.4 a qual podemos traçar o respectivo cone de luz com vértice em B.

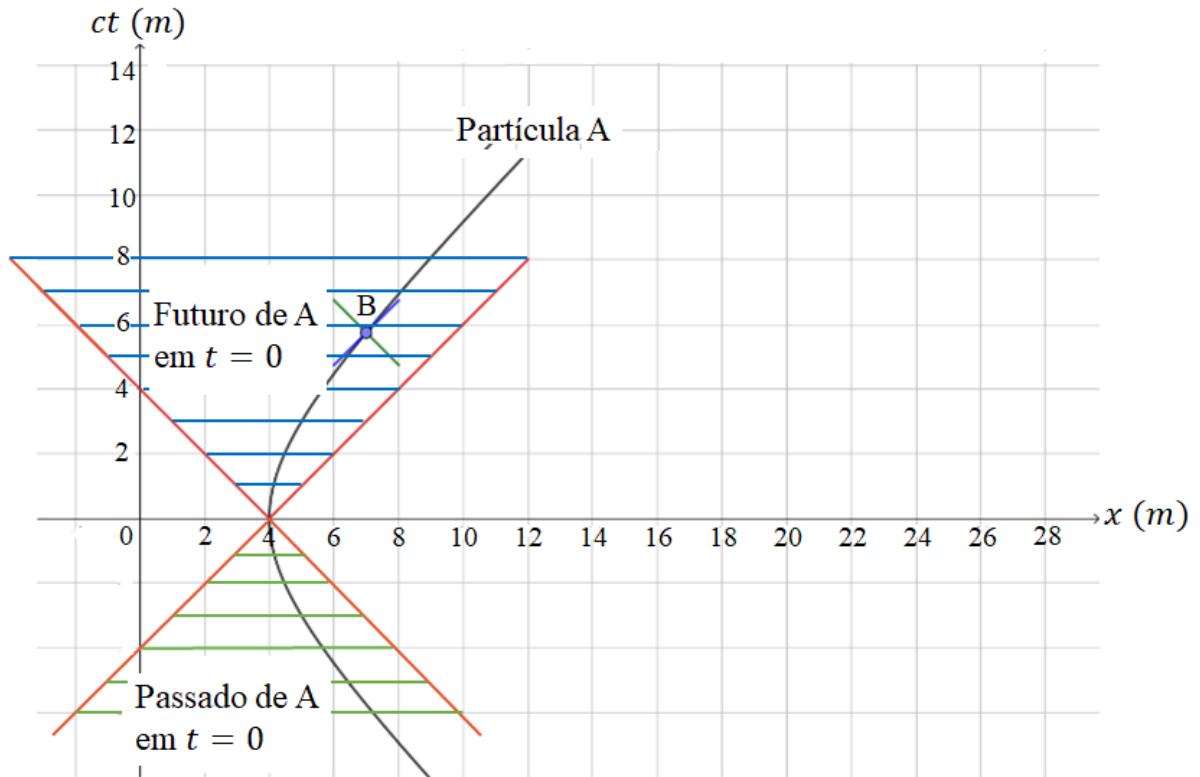


Figura B.4: Curva em preto: linha de mundo de uma partícula “A” uniformemente acelerada. Retas vermelhas (cone de luz): dois pulsos luminosos são emitidos no sentido positivo e negativo do eixo  $x$  no instante  $t = 0$  e na posição  $x = 4$ . Ponto B: é um ponto localizado sobre a linha de mundo da partícula A em que dois pulsos luminosos podem ser emitidos e formar um novo cone de luz.

## B.3 Coordenadas e a geometria não-euclidiana

### B.3.1 Coordenadas Cartesianas

Podemos utilizar os eixos e as coordenadas  $(x, y)$  para localizar um ponto  $P$  no plano informando os valores  $x_P$  e  $y_P$  como mostrado na Figura B.5 (a). Utilizando as coordenadas  $x_P$  e  $y_P$  podemos, também, calcular a distância  $\Delta s$ , entre o ponto  $P$  e a origem, a partir do teorema de Pitágoras:

$$\Delta s^2 = x_P^2 + y_P^2$$

Podemos generalizar a expressão anterior e determinar a distância  $\Delta s$  entre quaisquer dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  - Figura B.5 (b). A partir das coordenadas  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  podemos escrever

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \quad (\text{B.18})$$

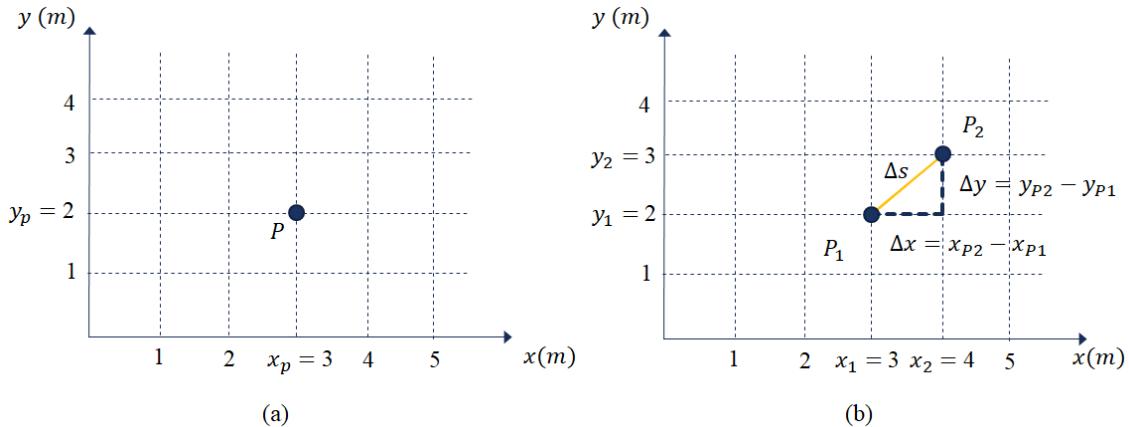


Figura B.5: (a) Coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  para localizar o ponto  $P$ . (b) Determinação da distância entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

onde  $\Delta x = x_2 - x_1$  e  $\Delta y = y_2 - y_1$ .

### B.3.2 Coordenadas Polares

O ponto  $P$  no plano também pode ser localizado no plano utilizando as chamadas *coordenadas polares*, que consiste na utilização das quantidades  $r$  e  $\phi$ . A coordenada  $r$  representa a distância do ponto  $P$  à origem enquanto a coordenada  $\phi$  representa o ângulo entre o eixo  $x$  e o segmento de reta que passa pela origem e pelo ponto  $P$  como ilustrado na Figura B.6 (a). É fácil ver que a distância  $\Delta s$  entre a origem e o ponto  $P$

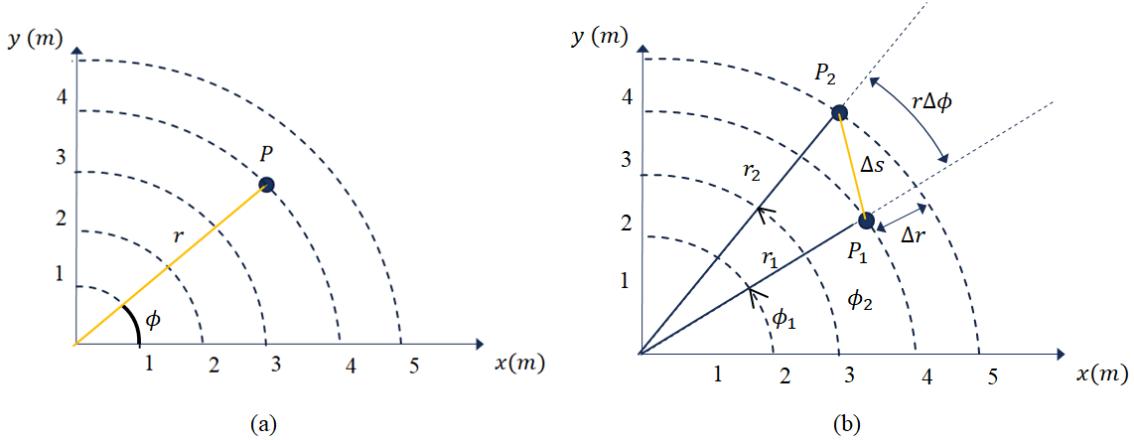


Figura B.6: (a) Coordenadas polares  $r$  e  $\phi$  para localizar o ponto  $P$ . (b) Determinação da distância entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

coincide com a coordenada radial  $r$ , ou seja,

$$\Delta s = r.$$

Podemos generalizar a expressão anterior e determinar a distância  $\Delta s$ , em coordenadas polares, entre quaisquer dois pontos próximos de coordenadas  $(r_1, \phi_1)$  e  $(r_2, \phi_2)$  - Figura B.6 (b) - para escrever

$$\Delta s^2 = \Delta r^2 + r^2 \Delta \phi^2, \quad (\text{B.19})$$

onde  $\Delta r = r_2 - r_1$  e  $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$ . A equação (B.19) é válida quando os pontos  $P_1$  e  $P_2$  são próximos e o ângulo  $\phi$  deve ser medido em radiano.

### B.3.3 Coordenadas esféricas

As coordenadas esféricas permitem a localização de um ponto no espaço tridimensional. Assim, seja  $P$  um ponto no espaço, podemos utilizar o sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y, z)$  e, partir desse sistema, estabelecer as coordenadas esféricas  $(r, \phi, \theta)$  como mostrado na Figura B.7 (a).

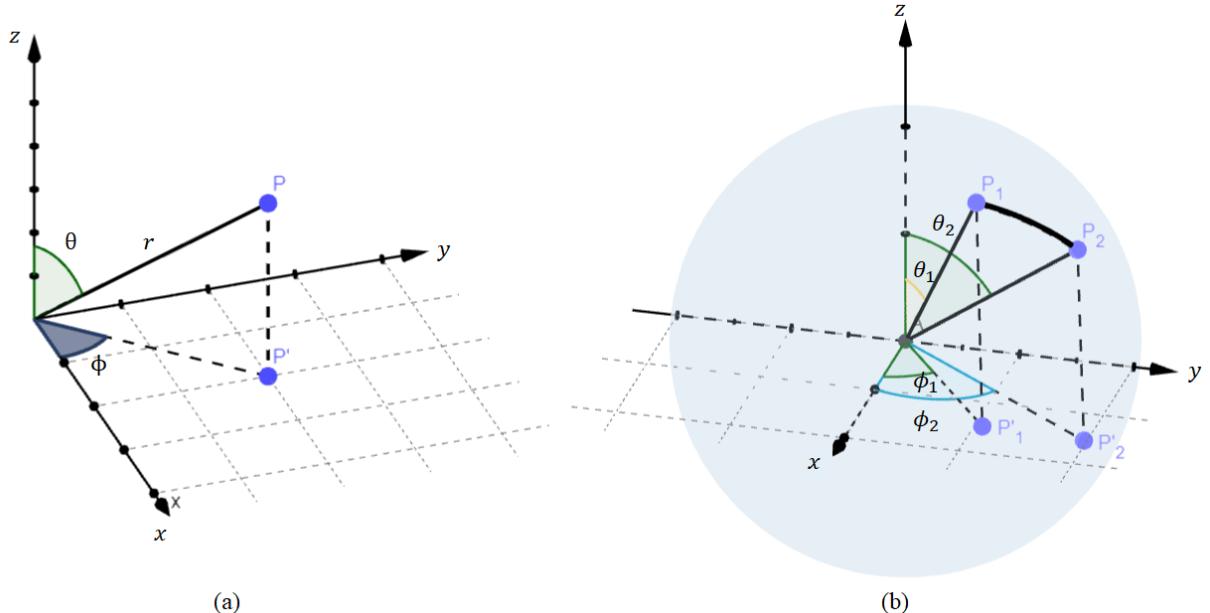


Figura B.7: (a) Coordenadas esféricas  $(r, \phi, \theta)$ . (b) Determinação da distância entre dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  sobre a superfície de uma esfera com coordenadas  $(r, \phi_1, \theta_1)$  e  $(r, \phi_2, \theta_2)$  respectivamente.

É fácil ver que a distância  $\Delta s$  entre a origem e o ponto  $P$  coincide com a coor-

nada radial  $r$ , ou seja,

$$\Delta s = r.$$

Podemos generalizar a expressão anterior e determinar a distância  $\Delta s$ , em coordenadas esféricas, entre quaisquer dois pontos próximos  $P_1$  e  $P_2$  de coordenadas  $(r_1, \phi_1, \theta_1)$  e  $(r_2, \phi_2, \theta_2)$  e escrever

$$\Delta s^2 = \Delta r^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \Delta \phi^2 + r^2 \Delta \theta^2, \quad (\text{B.20})$$

onde  $\Delta r = r_2 - r_1$ ,  $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$  e  $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$ .

### B.3.4 Geometria plana

No Ensino Médio somos apresentados à geometria plana, chamada de geometria euclidiana. Nessa geometria podemos mostrar as seguintes propriedades

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ ;
- O teorema de Pitágoras é válido:  $c^2 = a^2 + b^2$ , onde  $c$  representa a hipotenusa enquanto  $a$  e  $b$  representam os catetos de um triângulo retângulo;
- O comprimento da circunferência é igual a  $2\pi r$ , onde  $r$  representa o raio da circunferência;
- Duas retas paralelas (não coincidentes) nunca se encontram;
- A menor distância entre dois pontos é uma reta.

A Figura B.8 ilustra as cinco propriedades mencionadas anteriormente obtidas da geometria euclidiana. De modo geral, o estudo da geometria no Ensino Médio fica restrito à geometria euclidiana. Entretanto, podemos explorar a geometria de outras superfícies tais como a esfera e verificar se as propriedades descritas anteriormente permanecem válidas. Na próxima subseção exploraremos esse assunto.

### B.3.5 Geometria esférica

Em nosso dia a dia conseguimos distinguir com certa facilidade uma superfície plana de uma superfície curva. Por exemplo, se tivermos um caderno (capa rígida) e uma bola de futebol em nossas mãos notamos claramente que a superfície do caderno é plana enquanto a superfície da bola é curva (esférica). Nesta situação conseguimos diferenciar superfícies planas de superfícies curvas analisando sob uma perspectiva tridimensional, a qual superfície bidimensional, do caderno ou da bola, está imersa (embebida). Entretanto, podemos nos perguntar se é possível realizar medidas sobre uma superfície e, a partir dessas informações, determinar se uma superfície é curva ou plana? A resposta é positiva e ilustraremos como podemos fazê-lo na sequência.

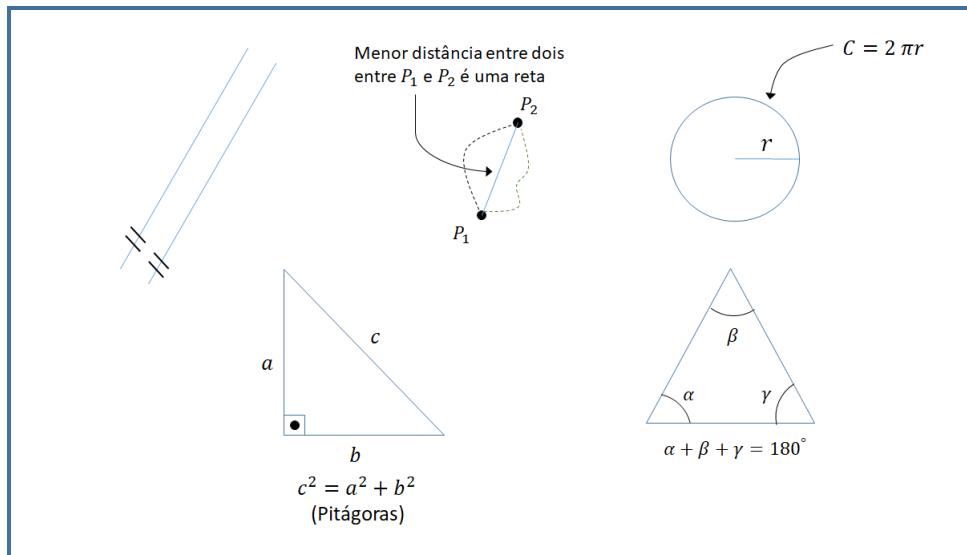


Figura B.8: Propriedades da geometria euclidiana.

Para tal, mostraremos como fazer medidas sobre uma dada superfície e, a partir dessas medidas, verificar se as propriedades mostradas na Figura B.8 se mantêm ou se sofrem algum tipo de alteração. Caso as propriedades da Figura B.8 sejam violadas estaremos em uma superfície curva.

Para mostrar tal processo seguiremos a referência (PÖSSEL, 2018, p. 20). Um vídeo muito elucidativo pode ser obtido em <https://youtu.be/-czyukZm94I><sup>2</sup>. Precisaremos dos seguintes materiais para fazer as duas atividades propostas abaixo: lápis; fitas de papel; uma caneta de tinta permanente; fita adesiva; duas bexigas (ou uma bola); um transferidor; e um curvímetro<sup>3</sup>.

Atividade I<sup>4</sup>: Colocamos as fitas de papel sobre uma superfície esférica de acordo com a Figura B.9 (a). Utilizamos fitas adesivas para prender as tiras de papel sobre o balão (ou a bola) e, assim, construímos um triângulo esférico. Em seguida, descolamos o triângulo esférico da superfície da esfera e iniciamos o processo de medição dos ângulos do triângulo com o auxílio de um transferidor de acordo com a Figura B.9 (b). Realizamos a soma dos ângulos internos, digamos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , e dizemos se a sua soma é maior, menor ou igual a  $180^\circ$ .

---

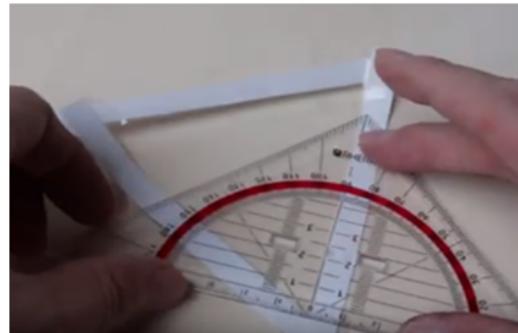
<sup>2</sup>Acesso em 28/02/2023.

<sup>3</sup>O curvímetro é um instrumento utilizado para medir o comprimento de uma dada curva. Em inglês o termo utilizado para esse instrumento é *map-measuring device (opisometer)*.

<sup>4</sup>Um interessante vídeo que também trata de atividades práticas para explorar as geometrias não-euclidianas pode ser acessado em <https://www.youtube.com/watch?v=rMUIzmzsYuM>. Nesse vídeo o professor José Luiz Pastore ilustra a construção de um transferidor esférico para medidas de ângulos sobre a superfície da esfera.



(a)



(b)

Figura B.9: (a) Construção de um triângulo esférico com a colocação de três tiras de papel sobre a superfície. (b) O triângulo esférico é colocado sobre uma superfície plana e com o auxílio de um transferidor inicia-se a medida dos ângulos internos.

Atividade II: Utilizamos uma caneta permanente para desenhar uma circunferência de raio  $r$  sobre a superfície do balão (ou da bola). Para tal, podemos utilizar uma *tira de papel*, com dois furos nas extremidades, para traçar a circunferência e o raio - Figuras B.10 (a) e (b)<sup>5</sup>. A Figura B.10 (c) mostra a circunferência e o raio traçados. Em seguida, utilizamos o curvímetro para determinar o valor do raio e o comprimento da circunferência - Figura B.10 (d). Então, calculamos a razão entre o comprimento da circunferência ( $C$ ) e o raio ( $r$ ) medidos. Comparamos o resultado  $C/r$  com o valor dado pela geometria euclidiana  $C/r = 2\pi$ .

---

### B.3.5.1 Geodésicas

Um resultado conhecido da geometria euclidiana é de que a menor distância entre dois pontos, no plano, é uma reta. Porém, sobre a superfície curva não existem linhas retas. Contudo, é possível encontrar curva, sobre uma superfície não plana, que minimiza a distância entre dois pontos. Essa curva é chamada de *geodésica* e representa a *linha mais “reta” possível* sobre a superfície. Uma geodésica sobre a superfície da esfera é um arco de grande círculo - Figura B.11. Um arco de grande círculo é dado por uma circunferência cujo centro coincide com o centro da esfera. Podemos definir uma geodésica como

- Uma geodésica é definida como a curva cujo comprimento é um extremo, podendo ser um máximo ou mínimo.

---

<sup>5</sup>O vídeo <https://youtu.be/-czyukZm94I> ilustra o traçado da circunferência e do raio no balão.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura B.10: (a) Traçado da circunferência sobre a superfície do balão. Com o auxílio de uma tira de papel fixamos uma extremidade da tira e traçamos a circunferência movendo com o auxílio de uma caneta de tinta permanente a outra extremidade da tira de papel. (b) Traçado do raio da circunferência na superfície do balão. (c) Circunferência e raio traçados. (d) Utilização do curvímetro para a determinação do comprimento da circunferência. O mesmo procedimento deve ser realizado para a determinação do comprimento do raio.

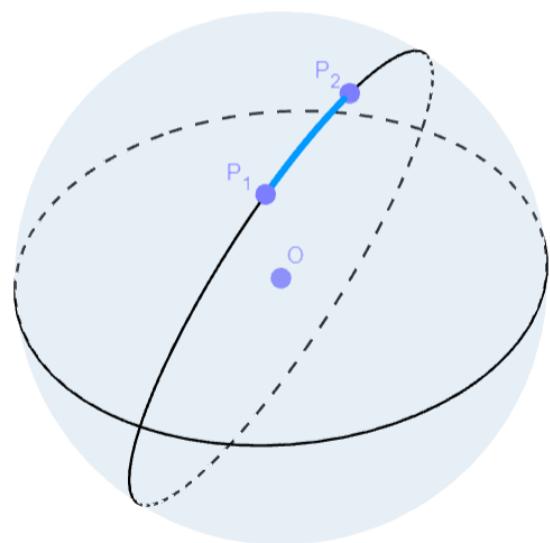


Figura B.11: A menor distância entre  $P_1$  e  $P_2$  é um arco de grande círculo (linha azul). Um grande círculo é uma circunferência cujo centro coincide com o centro da esfera.

## B.4 A Teoria da Relatividade Geral (TRG)

### B.4.1 Introdução

A introdução em 1905 da TRR resolve problemas teóricos suscitados pela teoria eletromagnética de Maxwell como, por exemplo, a invariância das equações de Maxwell, mas ao mesmo tempo cria outros. Entre esses, a necessidade de uma nova teoria da gravitação compatível com a TRR. Além disso, a gravitação newtoniana é uma teoria de ação a distância. Aqui temos outro obstáculo, pois a TRR estabelece um limite para a velocidade com a qual a informação pode ser transmitida. Até a época em que Albert Einstein começava a enfrentar este problema não havia uma discrepância experimental marcante entre a gravitação newtoniana e os dados experimentais. Dessa forma, a TRG, que é uma teoria relativística para a gravitação, nasce de uma incompatibilidade teórica fundamental entre a gravitação newtoniana e a TRR. A busca de uma teoria relativística da gravitação leva a uma ruptura radical com a gravitação newtoniana. A lei da gravitação universal será no final substituída por uma geometrização completa dessa interação.

### B.4.2 Princípios da Relatividade Geral

#### B.4.2.1 A busca do princípio da relatividade geral

Além da incompatibilidade entre a gravitação newtoniana e a TRR, um problema fundamental que incomodava Einstein estava relacionado ao descontentamento com o *status quo* que os referenciais inerciais possuem na MN e na TRR. Sempre que vamos descrever o movimento de um objeto, nós escolhemos um corpo rígido (um vagão ou a Terra) no qual fixamos um eixo de coordenadas e observadores munidos de réguas e relógios realizam medidas. Einstein argumenta que se queremos *descrever o movimento* de algum objeto - realizando medidas com réguas e relógios - é indiferente o referencial adotado para tal descrição. Entretanto, se quisermos *determinar as leis da física* - relações entre as grandezas físicas medidas - estas apresentam uma forma mais simples quando escritas em relação aos referenciais inerciais. Sabemos da MN que a *equação de movimento* para um referencial inercial é dada pela *segunda lei de Newton*. Já para um referencial não-inercial a *equação de movimento* apresentará *termos extras*. Sabemos que a lei da inércia é violada nesses referenciais e objetos localizados em um referencial não-inercial experimentarão a ação das chamadas *forças de inércia*. Em um trecho do seu livro Einstein mostra a sua insatisfação com esse fato descrito:

“Como é possível que determinados corpos de referência (ou bem seus estados de movimento) sejam privilegiados frente a outros (ou frente a seus estados de movimento respectivos)? Qual é a razão desse privilégio.”  
(EINSTEIN, 1999, p. 62)

Assim, Einstein propõe uma ampliação do PRR e enuncia o *Princípio da Relatividade Geral* (PRG) para incorporar os referenciais não-inerciais

As leis da natureza são válidas para todos os referenciais, qualquer que seja seu estado de movimento.

#### B.4.2.2 O Princípio da Equivalência

A ideia do Princípio da Equivalência (PE) nasce em 1907 quando Einstein ainda trabalhava no escritório de patentes, na Suíça. Essa ideia foi chamada por ele de “*o pensamento mais feliz de minha vida*” e foi enunciado da seguinte forma:

“Então ocorreu-me o pensamento mais feliz de minha vida, na forma seguinte: O campo gravitacional tem existência relativa [...] pois para um observador que cai livremente do telhado de uma casa não há - pelo menos nas suas vizinhanças imediatas - campo gravitacional. De fato, se o observador deixar cair alguns corpos então estes permanecerão em repouso ou em movimento uniforme relativamente a ele, independentemente da sua natureza química ou física particular. O observador tem o direito de interpretar o seu estado como o de repouso.” (PAIS, 1995, p. 178)

O enunciado anterior traz um equivalência entre um observador em queda e um observador em movimento uniforme no espaço livre<sup>6</sup>. Existem diferentes formulações do PE. Escreveremos inicialmente o PE em termos de dois referenciais: uma nave em repouso na superfície da Terra e uma nave uniformemente acelerada no espaço livre.

Se um observador, no interior de uma nave, não tiver qualquer informação sobre o que está ocorrendo fora dela ele não conseguirá afirmar se está em uma nave que repousa na superfície da Terra ou se está em uma nave acelerada no espaço livre. Esse fato é chamado de *Princípio da Equivalência* e afirma que:

**Nenhuma experiência, mecânica, pode distinguir entre um campo gravitacional uniforme ( $\vec{g}$ ) e a aceleração uniforme equivalente ( $\vec{A} = -\vec{g}$ ).**

O enunciado acima é chamado de *forma fraca* do PE, pois só leva em conta experiências de mecânica em sua formulação. A indistinguibilidade entre um referencial uniformemente acelerado e um referencial sob a ação de um campo gravitacional mostra um importante passo na busca de Einstein pelo PRG. A Figura B.12 ilustra o PE, mostrando que a marcação de dois dinamômetros colocados em situações distintas é idêntica e, também, que a aceleração de queda é a mesma em ambas as situações. A igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional é uma condição necessária para que o PE seja válido, pois qualquer pequena diferença entre as duas massas causaria uma distinguibilidade entre as situações destacadas na Figura B.12 e, dessa forma, invalidaria o PE.

<sup>6</sup>Espaço livre representa uma região do espaço que está livre da ação gravitacional de quaisquer corpos.

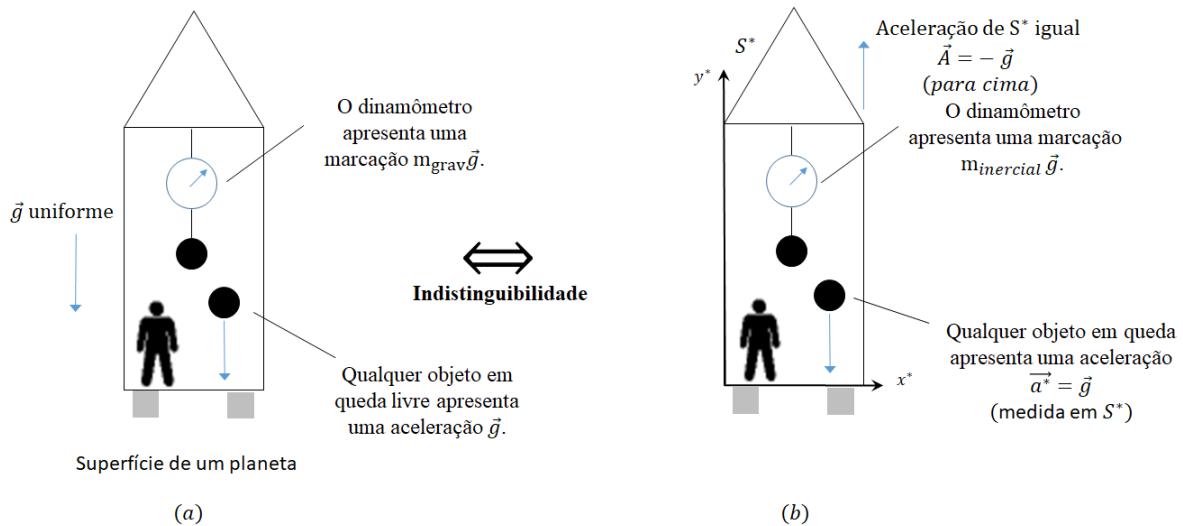


Figura B.12: Equivalência entre um referencial em repouso sobre a superfície do planeta e um referencial acelerado apresentando uma aceleração uniforme equivalente. Os mesmos resultados experimentais são obtidos nas duas situações.

A massa inercial é uma medida da resistência que um corpo oferece à alteração de sua velocidade, a inércia. A massa gravitacional é o análogo gravitacional da carga elétrica e está associada à interação gravitacional. Dentro do escopo da MN essa igualdade é uma notável coincidência, pois não apresenta uma explicação ou justificativa com base na teoria:

“Até hoje a mecânica, na verdade, registrou este importante princípio, mas não o interpretou.” (EINSTEIN, 1999, p. 58)

Entretanto, Einstein consegue interpretar a igualdade  $m_I = m_g$  e diz

“Esta lei [...] da igualdade da massa inercial e da massa gravitacional foi então percebida por mim com todo o seu significado. Fiquei abismado com sua existência e conjecturei que ela deveria conter a chave para uma compreensão mais profunda da inércia e da gravitação.” (NUSSENZVEIG, 2002, p. 307)

Essa interpretação apresenta o seguinte raciocínio: suponha o PE na sua *forma fraca* como ponto de partida e, dessa forma, consideramos ele válido na situação analisada. Utilizando, então, o PE analisaremos a consequência de sua aplicação em um *experimento de pensamento*, que é mostrado na Figura B.12. Na situação da Figura B.12 (a) temos uma nave em repouso na superfície da Terra em que duas medidas são realizadas, a medida do dinamômetro e a medida da aceleração de queda. Seja  $T$  o valor medido no dinamômetro e  $a$  o valor determinado para a aceleração. Suponha que as massas inercial e gravitacional do objeto “D” (fixo no dinamômetro) sejam  $m_{ID}$  e  $m_{gD}$  e que as massas inercial e gravitacional do objeto “Q” (corpo em queda) sejam  $m_{IQ}$

e  $m_{g_Q}$  - Figura B.12 (a). Utilizando o equilíbrio de forças em “D” e a segunda lei de Newton em “Q” na Figura B.12 (a) e a equação de movimento em um referencial não-inercial na Figura B.12 (b) podemos determinar os valores para a Tração e a aceleração em ambas as situações. Tomando, então, o PE como ponto de partida na Figura B.12 segue que

$$m_{g_D} = m_{I_D}$$

e

$$m_{g_Q} = m_{I_Q}.$$

Portanto, o PE na sua *forma fraca* leva à igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional e, dessa forma, nos permite interpretar fisicamente esta igualdade. Nas palavras de Einstein

Vemos por este exemplo, que nossa extensão do princípio da relatividade faz aparecer como necessária a afirmação da igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional. Com isto obtivemos uma interpretação física desta proposição. (EINSTEIN, 1999, p. 60)

#### B.4.2.3 Princípio da Equivalência em termos dos referenciais em queda livre

Podemos, também, reescrever o PE em termos dos referenciais em queda livre ilustrando o “pensamento mais feliz da vida de Einstein” - Figura B.13:

Nenhuma experiência, mecânica, pode distinguir entre um referencial em queda livre e um referencial em movimento uniforme no espaço livre.

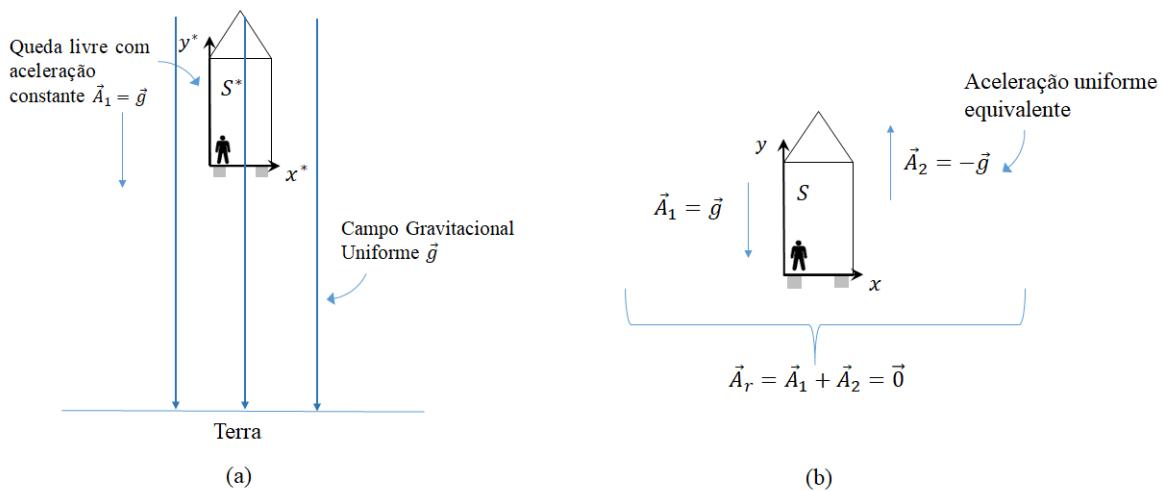


Figura B.13: (a) Nave em queda livre com aceleração  $\vec{A}_1 = g$ . (b) Nave no espaço livre em repouso (ou movimento uniforme) com  $\vec{A}_r = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{g} - \vec{g} = \vec{0}$ .

A equivalência entre esses referenciais ilustra que os mesmos efeitos serão sentidos por um observador em queda livre em um campo gravitacional uniforme e por

um observador que está em repouso (ou movimento uniforme) no espaço livre. Objetos abandonados nas proximidades deles irão ficar em repouso tanto em relação ao observador em queda quanto em relação ao observador no espaço livre. É importante notar que quando o campo gravitacional é não-uniforme o PE somente é válido para pequenas regiões espaciais e curtos intervalos de tempo.

#### B.4.2.4 Princípio da equivalência na sua forma forte

Podemos, ainda, generalizar os enunciados anteriores para o PE estabelecendo uma equivalência entre um referencial em repouso sob a ação de um campo gravitacional e um referencial uniformemente acelerado no espaço livre para quaisquer experimentos, mecânicos ou não. O PE na sua *forma forte* pode ser escrito como

Nenhuma experiência, mecânica ou não, pode distinguir entre um referencial em queda livre e um referencial em movimento uniforme no espaço livre.

Essa generalização do PE possibilitará determinar a previsão de dois novos fenômenos como a deflexão da luz num campo gravitacional e o desvio gravitacional para o vermelho (*gravitational redshift*). Esses fenômenos serão discutidos posteriormente.

Ressaltamos, por fim, que o PE consiste em um poderoso argumento na busca de Einstein por um PRG. Dessa forma, o caráter absoluto (identificável) da aceleração de um dado referencial não-inercial desaparece com o PE, pois temos uma equivalência entre um referencial inercial e um referencial não-inercial.

#### B.4.2.5 Princípio da Consistência (ou Correspondência)

Como já mencionado, a TRG de Einstein é uma teoria relativística para a gravitação, que generaliza a gravitação newtoniana e, logicamente, reinterpreta os conceitos newtonianos. Sabemos que a teoria de Newton é capaz de explicar muito bem o funcionamento do Sistema Solar, incluindo os efeitos perturbativos que levam, por exemplo, à precessão das órbitas de alguns planetas<sup>7</sup>. Como qualquer teoria que pretende generalizar uma teoria que a precedeu, a nova teoria deve apresentar os mesmos resultados de sucesso da teoria antecessora. Assim, a TRG deve recuperar os resultados newtonianos para baixas velocidades ( $v/c \ll 1$ ) e interação gravitacional fraca ( $GM/Rc^2 \ll 1$ ).

### B.4.3 Desvio Gravitacional para o vermelho

Utilizando o PE na sua *forma forte* Einstein prevê dois novos fenômenos que posteriormente foram testados experimentalmente – o *desvio gravitacional para o vermelho*; e a *deflexão da luz em um campo gravitacional*. Para ilustrar o *desvio gravitacional para o vermelho* podemos analisar o seguinte experimento de pensamento:

---

<sup>7</sup>Uma exceção está na descrição da precessão na órbita de Mercúrio.

Imagine uma nave, referencial  $S^*$ , movendo-se no espaço livre com uma aceleração vertical (para cima), em módulo, igual à  $g$ . O comprimento vertical da nave vale  $L$  e uma fonte de luz (FL), que repousa sobre a base da nave, emite luz a uma frequência  $f_{FL}$ . Um observador  $R$  fixo em  $S^*$  está no topo da nave e recebe a luz emitida pela FL, registrando o valor  $f_R$  para essa medida. Para relacionar a frequência  $f_{FL}$  da FL com a frequência  $f_R$  utilizaremos a equação para o efeito Doppler obtida na subseção B.1.4 - Figura B.14 Admitindo baixas velocidades ( $v \ll c$ ) utilizaremos a expressão

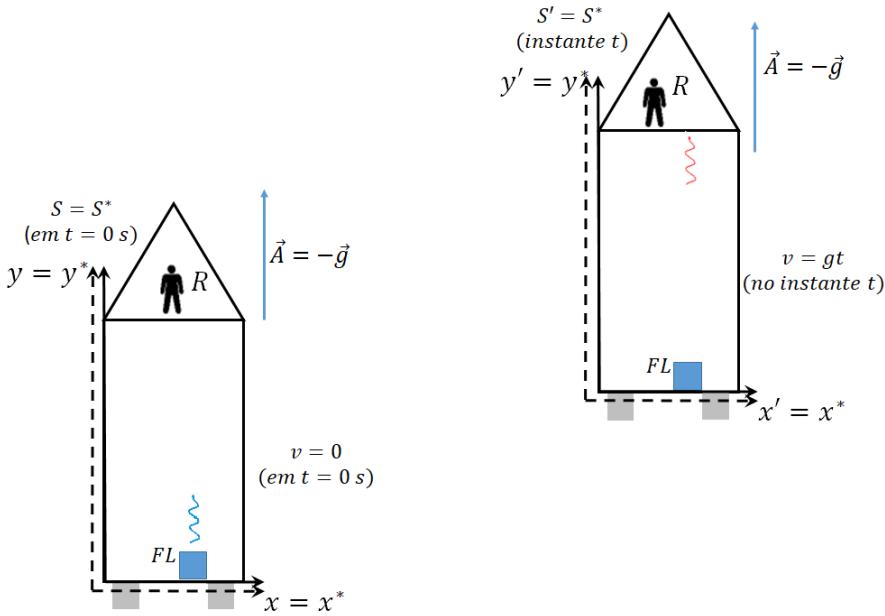


Figura B.14: Procedimento para utilizar a equação do efeito Doppler para um movimento acelerado: No instante  $t = 0$  os referenciais  $S$  e  $S^*$  coincidem, pois supomos a velocidade inicial do referencial  $S^*$  nula. No instante  $t$  os referenciais  $S'$  e  $S^*$  coincidem, pois supomos que eles apresentam a mesma velocidade  $v$  no instante  $t$ .

para o efeito Doppler (afastamento), para baixas velocidades, que é dada por

$$f'_R = f_{FL}(1 - v/c). \quad (\text{B.21})$$

Na condição de baixa velocidade faremos simplesmente  $v = gt$  para a velocidade do referencial  $S^*$ , que é a expressão newtoniana para a velocidade no movimento uniformemente variado. O intervalo de tempo entre a emissão da luz e a recepção em  $R$  vale

$$t = L/c.$$

Assim, utilizando a expressão acima podemos reescrever a relação para a velocidade como

$$v = gt = gL/c.$$

Substituindo o resultado anterior na equação (B.21) segue que

$$f_R = f_{FL}(1 - gL/c^2), \quad (\text{B.22})$$

onde  $gL/c^2 \ll 1$ , que representa a condição de validade para a expressão acima. Como  $(1 - gL/c^2) < 1$  temos que  $f_R < f_{RL}$ . Dessa forma, como a frequência da luz recebida por  $R$  é menor do que a frequência da luz emitida pela FL, dizemos que a frequência medida em  $R$  foi reduzida e ocorreu um *desvio para o vermelho (redshift)*, pois dentro do espectro visível o vermelho é a cor de menor frequência. De acordo com o PE na sua *forma forte* o mesmo efeito deve ocorrer se a nave repousar sobre a superfície de um planeta (como a Terra, por exemplo) cujo campo gravitacional uniforme vale  $\vec{g}$  - Figura B.15.

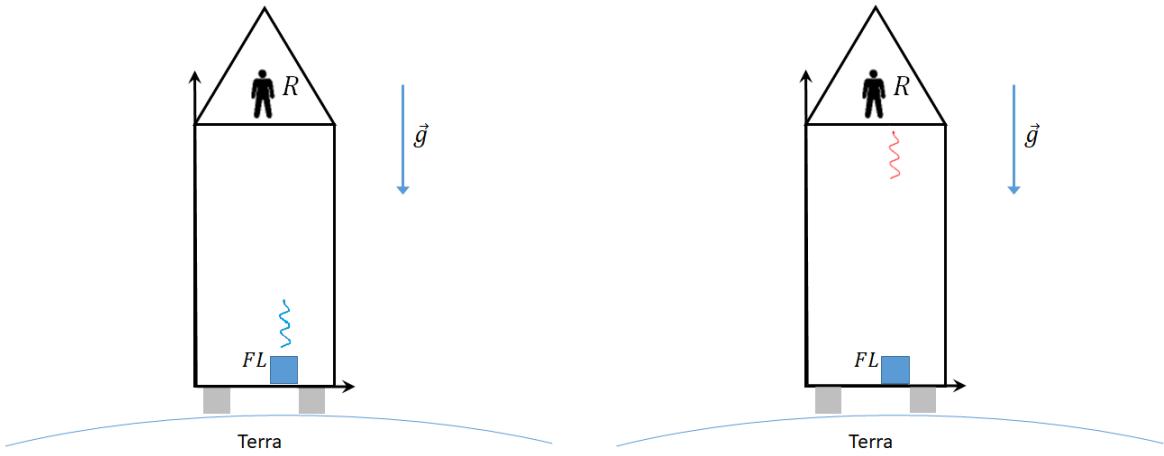


Figura B.15: Utilizando o PE na sua *forma forte* prevemos que o desvio para o vermelho deve ocorrer num campo gravitacional quando uma fonte FL de luz emite um pulso luminoso na direção do observador R.

Analizando ainda a situação da Figura B.15, admita que a FL emita  $N$  frentes de onda e um observador, ao lado da FL, registe um intervalo de tempo  $\Delta t_{FL}$  para as  $N$  frentes de onda emitidas. Essas  $N$  frentes de onda alcançam o observador R que mede, com seu relógio, o intervalo de tempo  $\Delta t_R$ . Podemos determinar a frequência de uma onda calculando a razão entre  $N$  e o intervalo de tempo  $\Delta t$ , ou seja,  $f = N/\Delta t$ . Como o número de frentes de onda que saem da FL é igual ao número de frentes de onda que chegam para o observador R, podemos escrever

$$f_{FL}\Delta t_{FL} = N = f_R\Delta t_R.$$

Como  $f_{FL} > f_R$ , temos que

$$\Delta t_{FL} < \Delta t_R.$$

Podemos interpretar o resultado acima da seguinte forma: um relógio colocado em

$R$  funciona mais rapidamente quando comparado a um relógio colocado junto à FL. Lembramos aqui que o relógio ao lado da FL está mais próximo da Terra (fonte gravitacional) do que o relógio junto ao observador em  $R$ . Assim, o funcionamento de relógios em um campo gravitacional pode ser enunciado da seguinte forma:

- Relógios próximos de um corpo massivo funcionam mais lentamente em comparação a relógios afastados dele.

A seguir discutiremos mais um resultado previsto por Einstein utilizando o PE.

#### B.4.4 Deflexão da trajetória da luz em um campo gravitacional

Apresentaremos aqui uma segunda aplicação do PE na sua *forma forte* para a discussão da trajetória da luz num campo gravitacional. Para tal utilizaremos a mesma estratégia anterior. Investigaremos o comportamento da luz num referencial uniformemente acelerado no espaço livre e, utilizando o PE, iremos inferir o comportamento da luz num referencial em repouso na superfície da Terra.

Suponha, então, uma nave acelerada  $S^*$ , em relação a um referencial inercial  $S$ , em movimento no espaço livre. Um pulso luminoso propaga no espaço livre em uma direção perpendicular ao movimento da nave. Supomos que o pulso luminoso atravessa a nave  $S^*$  entrando por uma abertura localizada em 1 e saindo por uma abertura localizada em 2 - Figura B.16. Analisando Figura B.16 notamos que a abertura loca-

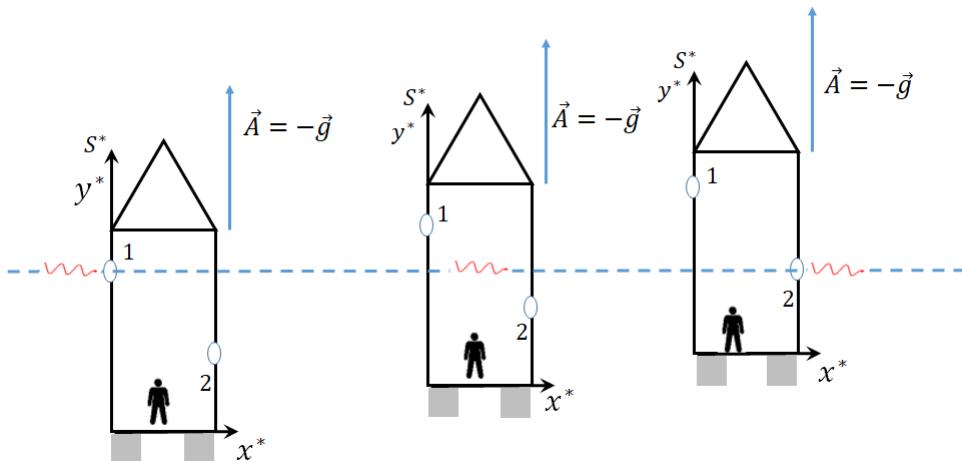


Figura B.16: Trajetória da luz (linha tracejada azul) vista do ponto de vista de um observador inercial  $S$ .

lizada à esquerda da nave (ponto 1) está a uma altura maior, em relação ao chão, do que a abertura localizada à direita da nave (ponto 2). A linha tracejada azul corresponde a trajetória da luz no referencial inercial  $S$  (não mostrado na figura). Podemos agora, observar a mesma sequência de eventos vista por um observador na nave ( $S^*$ ).

O observador na nave verifica que a luz entra pelo ponto 1 (de altura maior) e sai pelo ponto 2 (de altura menor). Assim, a trajetória da luz sob o ponto de vista de  $S^*$  é uma curva - Figura B.17. De acordo com o PE na sua *forma forte*, um referencial uniforme-

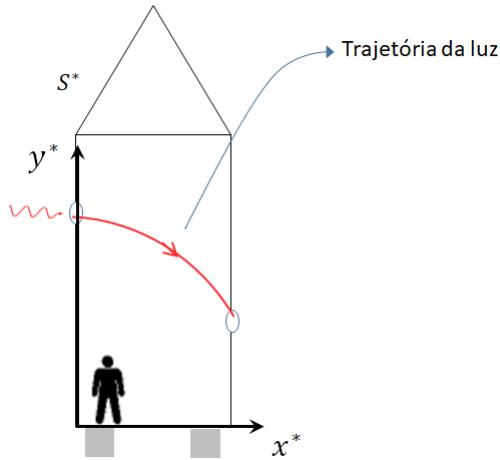


Figura B.17: Trajetória da luz (linha contínua vermelha) vista do ponto de vista de um observador não-inercial  $S^*$ .

mente acelerado é equivalente (os mesmos resultados experimentais serão obtidos) a um referencial em repouso sob a ação de um campo gravitacional uniforme. Assim, se repetirmos a mesma experiência com a nave repousando sobre a superfície do planeta Terra, o PE garante que o mesmo comportamento da luz no referencial não-inercial  $S^*$  ocorrerá no referencial em repouso sobre a superfície da Terra. A Figura B.18 ilus-

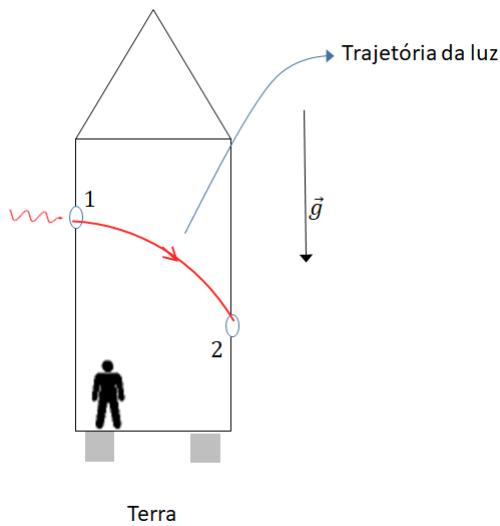


Figura B.18: Trajetória da luz (linha contínua vermelha) vista do ponto de vista de um observador em um referencial estacionário sobre a superfície da Terra.

tra que a luz sofrerá uma *deflexão* na sua trajetória ao propagar na presença de um campo gravitacional. A luz apresenta uma trajetória análoga ao de uma partícula em um lançamento horizontal na Terra, por exemplo.

Será que uma experiência pode ser realizada e efetivamente comprovar a previsão descrita acima? Na superfície da Terra o efeito da *deflexão* é muito pequeno, mas Einstein indicou como a *deflexão da luz* poderia ser testada. Essa previsão poderia ser testada quando a luz passasse por um corpo massivo como é o caso do Sol. Voltaremos a essa discussão na seção A6 ao falarmos sobre os testes clássicos da TRG.

## B.4.5 Espaço-tempo curvo

### B.4.5.1 Plataforma girante e o espaço-curvo.

Einstein chega a conclusão em 1912 que o espaço não poderia permanecer plano na presença de matéria (SARTORI, 1996, p. 277). Um experimento que, aparentemente, conduziu Einstein a essa percepção foi o experimento da plataforma (ou disco) girante de raio  $r$  e velocidade angular  $\omega$  - Figura B.19. Ao compararmos as medidas para o

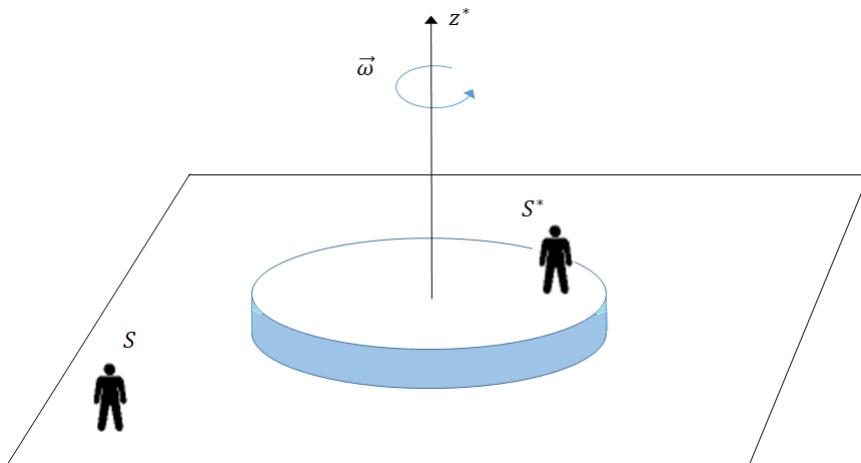


Figura B.19: Plataforma girante em relação a vertical com velocidade angular  $\omega$  constante.

comprimento da periferia do disco para um observador fixo no disco (Referencial  $S^*$ ) e para um observador inercial fixo no solo (Referencial  $S$ ) escrevemos

$$C^* = \gamma C > C, \quad (\text{B.23})$$

Ambos os observadores concordam com a medida do raio da plataforma. Se os observadores em  $S$  (iniciais) medirem o raio  $r$  e o comprimento da circunferência  $C$ , podemos relacioná-los a partir dos resultados da geometria euclidiana como

$$C = 2\pi r. \quad (\text{B.24})$$

Já para os observadores em  $S^*$  temos que  $C^* > C$ . Logo,

$$C^* > 2\pi r. \quad (\text{B.25})$$

A *geometria* na plataforma girante para um *observador em um referencial não-inercial é não-euclidiana*. Através do PE podemos substituir a aceleração da plataforma por um campo gravitacional equivalente. Dessa forma, teríamos em um referencial sob a ação de um campo gravitacional uma alteração na geometria. Na *presença de matéria* (fonte de um campo gravitacional) a *geometria do espaço é não-euclidiana*.

### B.4.6 As equações de Einstein

Einstein no final de 1915 chega a equação que informa a geometria do espaço-tempo para uma dada distribuição de matéria e energia. Essa equação é escrita utilizando a linguagem formal de tensores. Simbolicamente, podemos escrever

**(Tensor relacionado a curvatura do espaço-tempo) = constante  $\times$  (tensor relacionado a distribuição de matéria e energia).**

Ou, na forma tensorial

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (\text{B.26})$$

onde  $G$  é a constante da gravitação universal e  $c$  é a velocidade da luz. O termo  $G_{\mu\nu}$  é chamado tensor de Einstein e o termo  $T_{\mu\nu}$  é chamado de tensor energia-momento. Tanto  $G_{\mu\nu}$  quanto  $T_{\mu\nu}$  são elementos de matrizes  $4 \times 4$ . A solução das equações de Einstein (B.26) nos informa a métrica ( $\Delta s^2$ ) para uma determinada distribuição de matéria-energia. A equação escrita na forma tensorial preserva a sua forma diante de uma transformação de um conjunto de coordenadas (globais) para outro conjunto de coordenadas globais, que é justamente o PCG.

## B.5 Os Buracos Negros

### B.5.1 Introdução

Um *buraco negro* é descrito, de modo simplificado, como uma região na qual a curvatura do espaço-tempo é tão intensa que qualquer objeto material ou forma de radiação fica impedida de escapar, sendo a fronteira que limita essa região denominada de *horizonte de eventos*.

### B.5.2 Formação de Buracos Negros

O conceito moderno de buraco negro advém do estudo de estrelas muito densas, chamadas de *estrelas compactas*. São exemplos de estrelas compactas as anãs brancas<sup>8</sup> e as estrelas de nêutrons<sup>9</sup>. A evolução de uma estrela depende basicamente de sua massa inicial. Para estrelas com massa inicial de até  $10M_{sol}$  o estágio final de sua evolução será a transformação em uma anã branca; para uma estrela que apresente massa entre  $10M_{sol}$  e  $25M_{sol}$  o estágio final de sua evolução será a sua transformação em um estrela de nêutrons; e para estrelas com massa inicial maior que  $25M_{sol}$  o estágio final de sua evolução será a transformação em um buraco negro (Fazzoli, 2012, p. 48). A Figura B.20 ilustra os possíveis ciclos de estrelas.

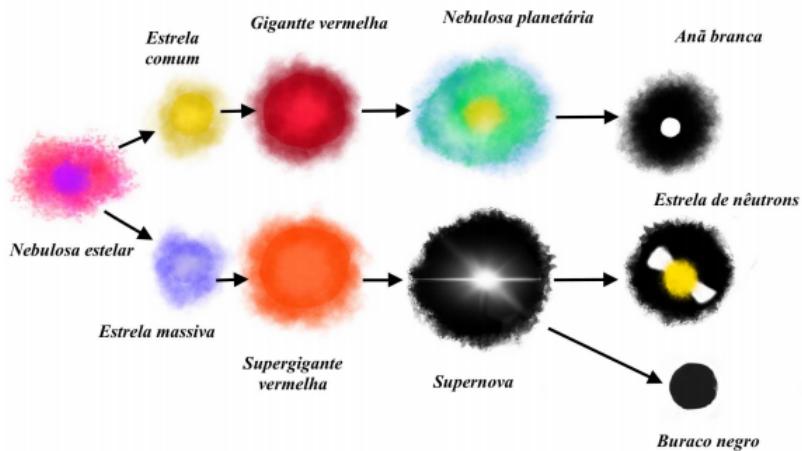


Figura B.20: Ciclos de vida das estrelas – retirado de (MACHADO, 2016, p. 35).

### B.5.3 Descrição de Buracos Negros

Buracos negros, descritos pela TRG, são caracterizados por três propriedades: massa ( $M$ ), carga ( $Q$ ) e momento angular ( $J$ ). Essas propriedades são as únicas informações que um observador distante terá acesso ao estudar a geometria do espaço-tempo no entorno de um buraco negro. O buraco negro mais simples de todos é aquele que só possui massa, chamado de *buraco negro de Schwarzschild*. Existem ainda quatro variantes possíveis, entre as propriedades destacadas anteriormente, de buracos negros que estão ilustrados na Figura B.21. Além disso, buracos negros podem ser caracterizados pela sua massa, em termos da massa do Sol ( $M_{sol}$ ), como

<sup>8</sup>A massa de uma anã branca é comparável à massa do Sol e apresenta um raio comparável ao raio da Terra.

<sup>9</sup>A massa de estrela de nêutrons é da ordem de duas vezes a massa do Sol e apresenta um raio da ordem de 10 km.

Massa ( $M$ )	Mto. angular ( $J$ )	Carga ( $Q$ )	Nomenclatura
Sim	Não	Não	Schwarzschild
Sim	Sim	Não	Kerr
Sim	Sim	Sim	Kerr-Newman
Sim	Não	Sim	Reissner-Nordström

Figura B.21: Classificação de Buracos Negros.

- Miniburaco negro  $0 - 0,1M_{sol}$ ;
- Buraco negro estelar  $0,1 - 100M_{sol}$ ;
- Buraco negro de massa intermediária  $100 - 10^5 M_{sol}$ ;
- Buraco negro supermassivo  $10^5 - 10^{10} M_{sol}$ .  
(COLLIER, 2019, p. 218)

#### B.5.4 Buraco negro de Schwarzschild

Einstein publica a versão final da TRG no final do ano de 1915. Porém, pouco tempo após a publicação da versão final da TRG, o astrônomo e físico alemão Karl Schwarzschild (1873 - 1916) obtém uma solução exata das equações de Einstein. A solução obtida por Schwarzschild nos informa a *métrica do espaço-tempo*. A métrica representa o intervalo espaço-temporal ( $\Delta s^2$ ) entre dois eventos arbitrários próximos. A métrica de Schwarzschild descreve o espaço-tempo na região de *vácuo* em torno de uma massa  $M$ , não girante e neutra, com simetria esférica. A métrica de Schwarzschild, no plano equatorial ( $\theta = \pi/2$ ), para dois eventos próximos é dada pela seguinte expressão:

$$\Delta s^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (c\Delta t)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \Delta r^2 + r^2 \Delta\phi^2, \quad (\text{B.27})$$

onde  $G$  é a constante de gravitação universal e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. As coordenadas  $(r, \phi, t)$  são as *coordenadas de Schwarzschild* no plano equatorial. As coordenadas  $(r, \phi)$  são generalizações das coordenadas polares. A métrica de Schwarzschild ( $\Delta s^2$ ) pode apresentar um sinal negativo, positivo ou nulo

$$\Delta s^2 \begin{cases} < 0, & (\text{tipo-tempo}); \\ > 0, & (\text{tipo-espacão}); \\ = 0, & (\text{tipo-luz}). \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

Podemos definir o chamado raio de Schwarzschild como  $R_s = 2GM/c^2$ . Assim, destacamos que a métrica de Schwarzschild é *válida somente* para valores de  $r > R_s$ .

Para  $r = R_s$  temos uma singularidade, ou seja,  $\Delta s^2 \rightarrow \infty$  (lê-se que  $\Delta s^2$  tende ao infinito), pois  $\frac{1}{1-R_s/r} \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow R_s$ . Se um objeto, como uma estrela, possuir um raio  $R$  menor que o seu respectivo raio de Schwarzschild ele será considerado um buraco negro. O raio de Schwarzschild determina uma superfície que é denominada *horizonte de eventos*. O horizonte separa duas regiões distintas do espaço-tempo: a região exterior ao horizonte ( $r > R_s$ ) e a região interior ao horizonte ( $r < R_s$ ). Se qualquer tipo de matéria ou forma de radiação atravessar o horizonte de eventos não poderá mais retornar à região exterior ao horizonte.

Podemos também descrever a geometria do espaço-tempo de uma região exterior a uma estrela (ou planeta) com valor de  $R_s$  menor que o raio  $R$  da estrela<sup>10</sup> utilizando a equação (B.27).

#### B.5.4.1 Tempo próprio

A coordenada temporal  $t$  na TRG não irá coincidir com o intervalo de tempo marcado por um relógio. Para mostrar como relacionar a variação da coordenada temporal  $\Delta t$  com o intervalo de tempo medido com um relógio imaginemos, incialmente, um observador que esteja em repouso na coordenada  $r$  emita dois pulsos luminosos. As coordenadas para os dois eventos podem ser escritas como  $(t_1, r_1, \phi_1)$  e  $(t_2, r_2, \phi_2)$ . Fazendo  $r_1 = r_2$  e  $\phi_1 = \phi_2$ , observador em repouso, e utilizando a métrica de Schwarzschild no plano equatorial para um intervalo tipo-tempo temos

$$c^2 \Delta\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) (c\Delta t)^2 - \underbrace{\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)} \Delta r^2}_{=0}, \quad (\text{B.29})$$

onde fizemos  $\Delta\phi = 0$ . Lembramos que  $\Delta\tau$  representa o tempo próprio. Assim, podemos imaginar que ao lado do observador temos um relógio que irá registrar a marcação do tempo. Assim, expressando  $\Delta\tau$  em função de  $\Delta t$  segue que

$$\Delta\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)} \Delta t. \quad (\text{B.30})$$

O intervalo de tempo  $\Delta\tau$  marcado por um relógio junto a um observador é menor do que o intervalo  $\Delta t$ . Notamos que fazendo  $M = 0$  (espaço-tempo plano da TRR) em (B.30) temos

$$\Delta\tau = \Delta t.$$

Assim, na TRR a coordenada  $t$  volta a apresentar um significado métrico (representa efetivamente o tempo medido por um relógio). Outra consideração importante está relacionada a medida do intervalo de tempo para um observador distante ( $r \rightarrow \infty$ ) da massa  $M$ . Para um observador distante a equação (B.30) mostra que a variação da coordenada temporal ( $\Delta t$ ) coincide com o intervalo de tempo marcado por um relógio

---

<sup>10</sup>O Sol e a Terra são exemplos. Apesar a solução de Schwarzschild ser para um objeto não girante, podemos aproximar a solução para objetos que giram lentamente.

junto ao observador distante ( $\Delta\tau_\infty$ ). Ou seja,

$$\Delta\tau_\infty = \Delta t,$$

pois quando  $r \rightarrow \infty$  a relação  $\frac{2GM}{c^2r} \rightarrow 0$ .

### B.5.5 Testes clássicos da TRG

A TRG não apenas inclui as previsões da MN como também expande os seus resultados. Alguns resultados não explicados pela MN, como a precessão do periélio de mercúrio, tiveram que esperar até a construção da TRG para a sua solução. Discutiremos três testes clássicos que confirmaram as previsões teóricas da TRG. Os testes clássicos são:

1. O desvio gravitacional para o vermelho;
2. A precessão do periélio da órbita de Mercúrio;
3. A deflexão da luz pelo Sol.

#### B.5.5.1 O desvio gravitacional para o vermelho utilizando a métrica de Schwarzschild

Utilizaremos aqui a métrica de Schwarzschild - que descreve o espaço-tempo na região exterior a uma massa ( $M$ ) esfericamente simétrica, estática e eletricamente neutra no vácuo – para discutir novamente o funcionamento de relógios em um campo gravitacional. Para corpos girantes com baixa velocidade (comparadas à velocidade da luz), como é o caso da Terra e do sol, podemos utilizar com boa aproximação a métrica de Schwarzschild para descrever o espaço-tempo ao redor desses corpos na condição de baixa velocidade.

Imagine dois observadores estacionários, o observador  $E$  está sobre a superfície da Terra, com coordenada  $r = r_E$ , e com um relógio para registrar a marcação do tempo. Já o segundo observador está localizado em uma torre de altura  $h$ , com coordenada  $r = r_E + h$ , estando o segundo observador munido também de um relógio. Por questões de simplicidade, imaginaremos que a torre apresenta uma altura  $h$  elevada ( $h \rightarrow \infty$ ), dessa forma faremos  $r = r_\infty$ . O observador localizado na superfície da Terra ( $r = r_E$ ) emite dois pulsos luminosos e mede o intervalo de tempo ( $\Delta\tau_E$ ) entre a emissão desses pulsos. Utilizando a equação (B.29) com  $\Delta r = 0$  temos

$$c^2\Delta\tau_E^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r_t}\right)(c\Delta t)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2r_t}\right)} \underbrace{\Delta r^2}_{=0},$$

ou seja,

$$\Delta\tau_E = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r_E}\right)^{1/2} \Delta t. \quad (\text{B.31})$$

Para o observador distante em  $r_\infty \rightarrow \infty$  temos que o termo  $\frac{2GM}{c^2 r_\infty} \rightarrow 0$ . Logo, a equação (B.29) para os eventos recepção dos sinais luminosos por um observador distante em  $r = r_\infty$  é dada por

$$c^2 \Delta\tau_\infty^2 = \left( 1 - \underbrace{\frac{2GM}{c^2 r_\infty}}_{=0} \right) (c\Delta t)^2 - \frac{1}{\left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r_\infty} \right)} \underbrace{\Delta r^2}_{=0}.$$

Logo,

$$\Delta\tau_\infty = \Delta t. \quad (\text{B.32})$$

Calculando a razão das equações (B.31) e (B.32) obtemos

$$\Delta\tau_E = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r_E} \right)^{1/2} \Delta\tau_\infty. \quad (\text{B.33})$$

Como  $\left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r_E} \right)^{1/2} < 1$  o intervalo de tempo medido pelo observador na superfície da Terra é menor que o intervalo de tempo medido pelo observador distante, ou seja,  $\Delta\tau_E < \Delta\tau_\infty$ . Interpretando a equação (B.33) podemos dizer que *o funcionamento de um relógio é afetado pela proximidade desse relógio de um objeto massivo de massa M*. Dessa forma, relógios colocados em regiões de altitude menor (menores valores de  $r$ ) funcionam mais lentamente do que relógios colocados em regiões de altitude maior (maiores valores de  $r$ ). A gravidade afeta o ritmo dos relógios e faz o tempo passar mais lentamente.

Se, agora, o intervalo de tempo  $\Delta\tau_E$  representar o período de uma onda luminosa senoidal emitida na posição  $r = r_E$  e  $\Delta\tau_\infty$  representar o período, dessa mesma onda, medido na posição  $r = r_\infty$ , podemos relacionar o período da onda com a sua frequência por meio da relação  $f = 1/\Delta\tau$ . Dessa maneira, a equação (B.33) pode ser reescrita da seguinte forma.

$$f_\infty = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r_t} \right)^{1/2} f_E, \quad (\text{B.34})$$

onde  $f_\infty$  representa a frequência da onda luminosa recebida pelo observador localizado em  $r_\infty (\rightarrow \infty)$  enquanto  $f_E$  representa a frequência de emissão da onda luminosa emitida pelo observador localizado na superfície da Terra. Pela equação (B.34) percebemos que a frequência recebida pelo observador distante ( $f_\infty$ ) é menor que a frequência emitida pelo observador na superfície  $f_E$ , ou seja,  $f_\infty < f_E$ . Essa redução, como já discutido anteriormente, na frequência representa o *desvio gravitacional para o vermelho*, a qual foi obtida, agora, utilizando a métrica de Schwarzschild.

Os físicos Robert V. Pound e Glen A. Rebka em 1960 realizaram um experimento comprovando o desvio gravitacional para o vermelho com precisão em torno de 10%. Posteriormente, Pound e J. Snider melhoraram a precisão para algo em torno de 1%. Nesse experimento raios gama eram emitidos e percorriam uma distância vertical de

22,6m em uma torre na Universidade de Harvard e, assim, a diferença de frequência era determinada. Esses experimentos validaram a interpretação de que relógios funcionam com diferentes taxas em um campo gravitacional.

### B.5.5.2 A precessão do periélio da órbita de Mercúrio

Em uma primeira abordagem sobre gravitação somos, geralmente, introduzidos às três leis de Kepler. A primeira lei de Kepler, também conhecida como lei das órbitas, afirma que as órbitas dos planetas em torno do sol são elípticas, onde o sol está posicionado em um dos focos da elipse. Contudo, essa afirmação é verdadeira apenas para planetas isolados, ou seja, levando em conta apenas a interação do sol com o planeta. A órbita elíptica pode ser determinada pela solução da segunda lei de Newton para o movimento de um planeta isolado em torno do sol – para analisar essa solução ver (HIBBEKER, 2010, p. 155) ou (SYMON, 1971, p. 122)<sup>11</sup>. A Figura B.22 ilustra a órbita de um planeta hipotético em torno do sol.

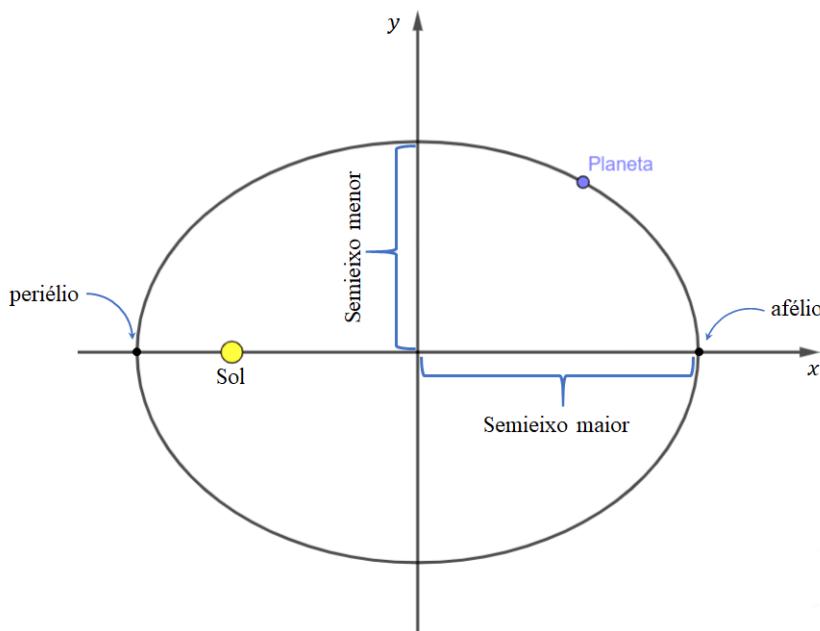


Figura B.22: Órbita elíptica de um planeta em torno do sol. O afélio representa o ponto da trajetória do planeta mais distante do Sol enquanto o periélio representa o ponto da trajetória mais próximo do Sol.

A Figura B.22 ilustra, também, o periélio, ponto da trajetória do planeta que está mais próximo do Sol, e o afélio, ponto da trajetória do planeta que está mais afastado do Sol. Tanto o periélio quanto o afélio são fixos para repetidas órbitas de um planeta

<sup>11</sup>A solução desse problema é um tópico avançado. Estudantes que já estudaram Cálculo Diferencial e Integral podem analisar as soluções nas referências citadas.

isolado em torno do Sol. Contudo, sabemos que um planeta que orbita o Sol também está sujeito à interação devido aos demais planetas que compõem o Sistema Solar. Essas interações (forças) provocam pequenas perturbações e alteram a órbita do planeta. Essas forças fazem, por exemplo, com que as órbitas dos planetas não sejam fechadas. Dessa forma, após uma volta completa em torno do sol o periélio deixa de ser um ponto fixo e movimenta-se, sendo esse movimento chamado de *precessão do periélio*. A Figura B.23 ilustra, de maneira exagerada, o movimento de precessão do periélio para o planeta Mercúrio. A MN consegue prever com exatidão o avanço do periélio de

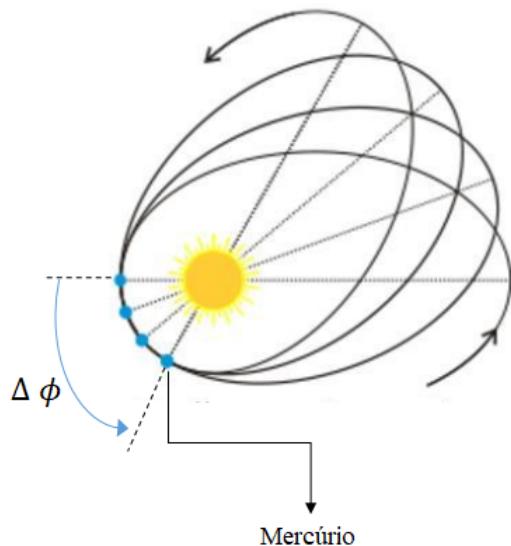


Figura B.23: Precessão periélio de Mercúrio – retirado e modificado de [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Perihelion\\_precession.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Perihelion_precession.svg) – acesso março de 2023.

diversos planetas do Sistema Solar. Contudo, a MN não consegue prever corretamente o avanço do periélio de Mercúrio. Existe uma discrepância entre a previsão da MN e os resultados experimentais. Ao aplicarmos a MN na previsão do valor para a precessão do periélio de Mercúrio, considerando todas as perturbações devido ao demais planetas, notamos que existe uma discrepância de aproximadamente 38 segundos de arco por século (MACHADO; TORT; ZARRO, 2023, p. 6). Na época cogitou-se a existência de um planeta chamado *Vulcano* que estaria entre o Sol e Mercúrio, e que seria o responsável pela diferença entre o valor previsto pela MN e o valor experimental. No entanto, essa suposição foi descartada posteriormente devido a falta de evidência experimental, para mais informações sobre a precessão do periélio de Mercurio e sobre Vulcano ver (MACHADO; TORT; ZARRO, 2023). Eis que, então, Einstein em novembro de 1915 apresenta quatro trabalhos na Academia Prussiana de Ciências e, em seu terceiro trabalho, obtém o valor para precessão do periélio de Mercúrio em acordo com os resultados experimentais da época de aproximadamente 43 segundos de arco por século. Podemos mostrar que a expressão para a precessão (ou avanço) do periélio

de Mercúrio  $\Delta\phi$  é dada por (COLLIER, 2019, p. 211)

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2}, \quad (\text{B.35})$$

onde  $M$  é a massa total do sistema (que é aproximadamente a massa do Sol),  $a$  o tamanho do semi-eixo maior da elipse,  $e$  a excentricidade da elipse,  $G$  é a constante de gravitação universal, e  $c$  é a velocidade da luz.

O valor obtido no exercício anterior é de aproximadamente 43 segundos de arco que está, dentro do erro experimental, em acordo com o valor medido de  $43,1 \pm 0,5$  segundos de arco (COLLIER, 2019, p. 212).

### B.5.5.3 Deflexão da Luz e o Eclipse do Sol

Vimos anteriormente como o PE na sua *forma forte* levava à previsão de que a luz sofre uma deflexão (desvio) ao movimentar-se num campo gravitacional. Einstein indicou que a deflexão da luz poderia ser testada durante um eclipse solar. A Figura B.24 ilustra a luz emitida, por uma estrela distante, que ao passar na vizinhança do Sol sofre uma deflexão  $\delta$ .

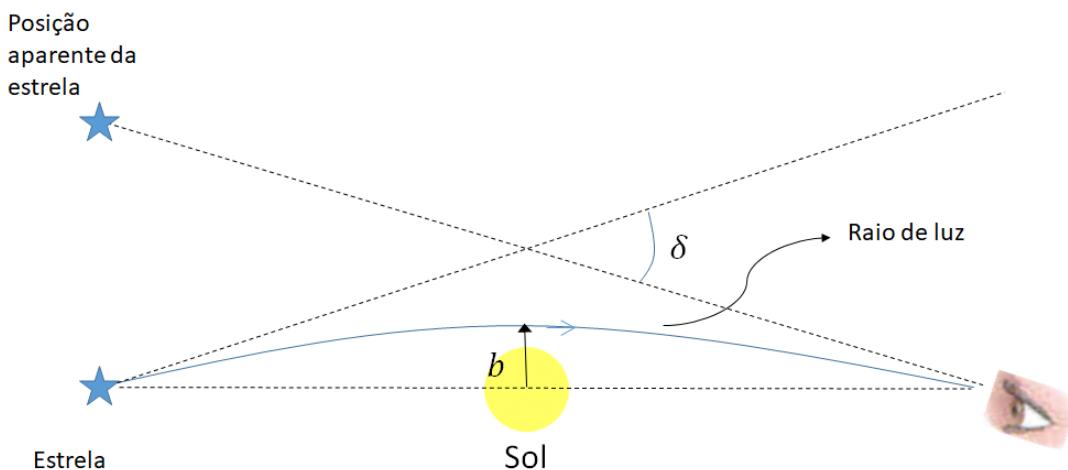


Figura B.24: Desvio da luz emitida por uma estrela ao passar na vizinhança do Sol.

Einstein em 1915 determina o valor  $\delta$  para a deflexão da luz que tangencia a superfície do Sol no valor de

$$\delta = 1,75 \text{ segundos de arco.}$$

Esse valor corresponde ao dobro do previsto pela MN e pelo próprio Einstein em 1911 (MACHADO; TORT; ZARRO, 2023). Pode-se mostrar que a relação obtida por Einst-

tein é dada por (COLLIER, 2019, p. 214)

$$\delta = \frac{4GM_{sol}}{R_{Sol}c^2}, \quad (\text{B.36})$$

Em 29 de maio do ano de 1919, duas expedições britânicas realizaram medidas para determinar se a luz, de estrelas distantes, sofre deflexão ao passar nas proximidades do Sol durante um *eclipse solar*. A expedição liderada por Arthur Eddington e Edwin Cottingham foi para a ilha de Príncipe, na África. A segunda expedição liderada por Andrew Crommelin e Charles Davidson foi para Sobral localizada no Ceará, no Brasil.

### B.5.6 Trajetórias de raios de luz

Se quisermos utilizar a métrica de Schwarzschild para descrever o movimento de um pulso luminoso, precisamos utilizar o *intervalo do tipo luz*. Para intervalos do tipo luz temos que  $\Delta s^2 = 0$ . Podemos, então, determinar a “velocidade”<sup>12</sup> na direção radial ( $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ ) de um pulso luminoso. Utilizando a métrica de Schwarzschild, com  $\Delta\phi = 0$ , temos

$$0 = - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) (c\Delta t)^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} \Delta r^2. \quad (\text{B.37})$$

Isolando  $\Delta r/\Delta t$  segue que

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \pm \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c. \quad (\text{B.38})$$

O sinal de  $(-)$  na expressão indica um pulso luminoso aproximando-se do horizonte de eventos na direção radial e o sinal de  $(+)$  indica um pulso luminoso afastando-se do horizonte de eventos na direção radial. Um fato curioso é de que a “velocidade” radial nas coordenadas de Schwarzschild é menor que a velocidade da luz denotada por  $c$ , pois  $\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) < 1$ . O termo  $\frac{\Delta r}{\Delta t}$  representa uma taxa de variação nas coordenadas de Schwarzschild.

Voltamos agora a nossa atenção para as trajetórias de pulsos luminosos na presença de um buraco negro. A equação (B.38) mostra a relação para a “velocidade” radial de um pulso luminoso no espaço-tempo de Schwarzschild.

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \pm \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) c.$$

Podemos resolver a equação acima utilizando um processo de integração. Entretanto, como esse passo foge do escopo desse texto iremos colocar diretamente a solução que

---

<sup>12</sup>A velocidade aparece entre aspas devido ao fato que  $r$  e  $t$  não apresentam significado métrico como discutido anteriormente. Para mais informações ver (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 4-2).

é dada por<sup>13</sup>

$$ct - ct_1 = \pm \left[ r - r_1 + R_s \ln \left( \frac{r - R_s}{r_1 - R_s} \right) \right], \quad (\text{B.39})$$

onde  $(ct_1, r_1)$  representam as condições iniciais de emissão do pulso de luz. A equação (B.39) descreve linhas de mundo (geodésicas nulas  $\Delta s^2 = 0$ ) de pulsos luminosos. O sinal positivo descreve a linha de mundo de um pulso luminoso emitido no sentido positivo de  $r$  e o sinal negativo descreve a linha de mundo de um pulso luminoso emitido no sentido negativo de  $r$ .

Por simplicidade construiremos um gráfico  $ct/R^*$  vs.  $r/R^*$ , onde  $R^* = R_s/2$ . Assim, podemos reescrever a equação (B.39) da seguinte forma

$$\frac{ct}{R^*} - \frac{ct_1}{R^*} = \pm \left[ \frac{r}{R^*} - \frac{r_1}{R^*} + 2 \ln \left( \frac{r/R^* - 2}{r_1/R^* - 2} \right) \right], \quad (\text{B.40})$$

O gráfico plotado na Figura B.25 foi construído a partir da equação (B.40) para diferentes valores de  $(ct_1, r_1)$ .

A análise do gráfico da Figura B.25 nos traz alguns *insights* importantes que discutimos na introdução da seção A.6, porém sem nenhuma demonstração. Para a região interior ao horizonte de eventos vemos que tudo se move para valores de  $r$  decrescente – veja as linhas de mundo tracejadas das partículas  $A$  e  $B$  também representadas na figura. Entretanto, as coordenadas de Schwarzschild não são uma boa escolha de coordenadas para descrever fenômenos no horizonte de eventos ou em regiões interiores ao horizonte. Note que a linha de mundo da partícula  $B$  “avança” para valores decrescentes de  $t$ . Além disso, em cima do horizonte o valor da coordenada  $r$  para a luz permanece fixa. Já para a região exterior ao horizonte de eventos as coordenadas de Schwarzschild descrevem com perfeição os fenômenos no espaço-tempo.

Para que possamos descrever os fenômenos no espaço-tempo para valores de  $r \leq R_s$  precisamos fazer uma mudança de coordenadas. Essa mudança de coordenadas foge do escopo desse texto, mas uma discussão sobre o assunto pode ser obtida em (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 7-10) e/ou (MACHADO; TORT; ZARRO, 2021, p. 10). Esse novo conjunto de coordenadas são chamadas de *coordenadas de Painlevé-Gullstrand* (PG) e a mudança de coordenadas altera a coordenada temporal que nas coordenadas de PG será representada pela letra  $T$ . Nessas novas coordenadas nós podemos repetir o gráfico desenhando os cones de luz para diferentes condições iniciais como mostrado na Figura B.26. Analisando a Figura B.26 notamos que para regiões interiores ao horizonte de eventos qualquer partícula estará em movimento até atingir a coordenada  $r = 0$  (singularidade).

---

<sup>13</sup>Para mais informações ver (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 3-24).

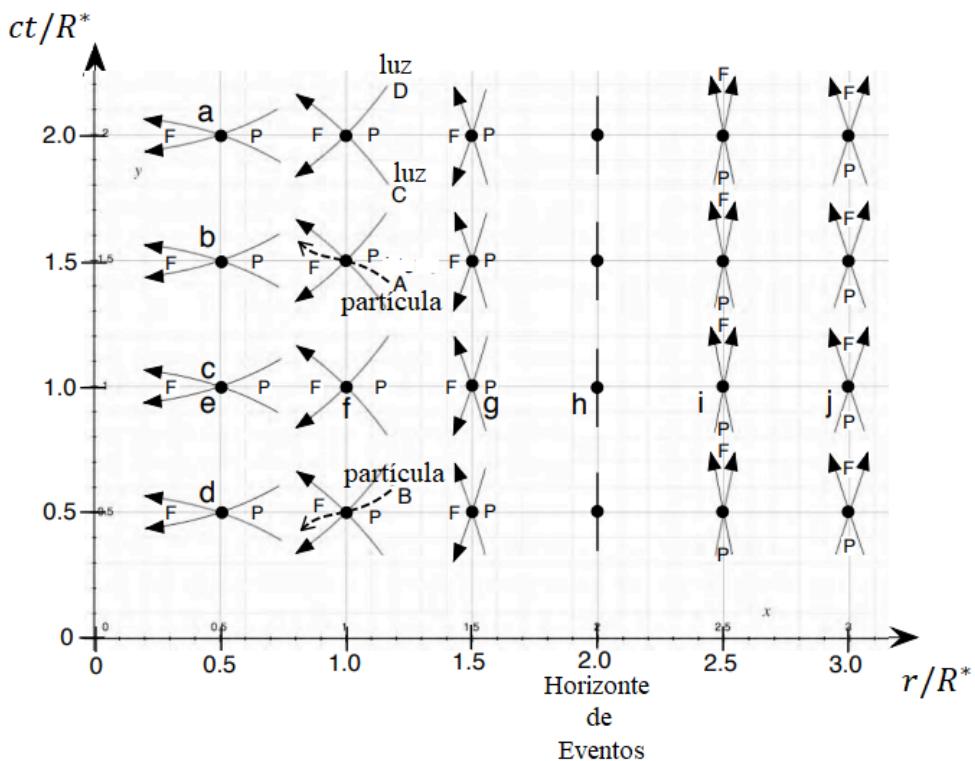


Figura B.25: Linhas de mundo para pulsos luminosos para diferentes valores de  $(ct_1, r_1)$ . Duas linhas de mundo de duas partículas arbitrárias  $A$  e  $B$  estão representadas. Repare que as linhas de mundo das partículas estão no interior dos seus respectivos cones de luz – retirado e modificado de (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 3-24).

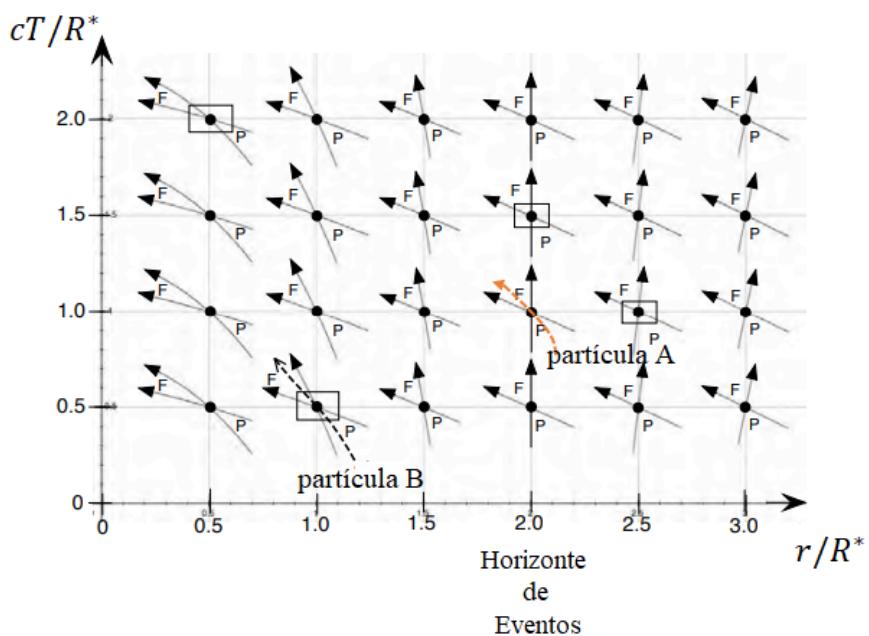


Figura B.26: Linhas de mundo para pulsos luminosos para diferentes valores de  $(cT_1, r_1)$ . Duas linhas de mundo de duas partículas arbitrárias  $A$  e  $B$  estão representadas – retirado e modificado de (TAYLOR; WHEELER; BERTSCHINGER, 2018, p. 7-26).

# Apêndice C

## Instrumento de Pesquisa

### Parte 1

**Com base nos seus conhecimentos de mecânica newtoniana e relatividade restrita responda as questões abaixo. Este enunciado é válido para as questões 1, 2, 3 e 4:** Um vagão move-se em relação aos trilhos de uma estrada de ferro. Observadores em repouso em relação ao leito da estrada (referencial do solo) e observadores em repouso em relação ao vagão (referencial do vagão) podem realizar medidas de comprimento e intervalo de tempo com réguas e relógios previamente sincronizados em seus respectivos referenciais. Em relação à **Descrição dos fenômenos físicos** (que corresponde à medição das grandezas físicas envolvidas na descrição do fenômeno) e em relação à **determinação das leis físicas** (que corresponde a relações gerais entre as grandezas físicas medidas) e ao princípio da relatividade restrita (as leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais), responda as questões abaixo.

- 1) Uma lâmpada desprende-se do teto do vagão quando o mesmo se movimenta de maneira uniforme em relação ao solo. Em relação à **Descrição da queda da lâmpada** é correto afirmar que
- a) É **indiferente** a escolha do referencial para a **Descrição** do movimento da lâmpada em termos das grandezas físicas mensuráveis (embora a descrição possa ser mais simples em algum dos referenciais em uma dada situação), sendo esse **fato óbvio** e, portanto, **não precisando** de confirmação experimental.
  - b) O referencial do solo é **privilegiado** para **Descrição** do movimento da lâmpada em termos das grandezas físicas mensuráveis em relação ao referencial do vagão, sendo esse **fato óbvio** e, portanto, **não precisando** de confirmação experimental.
  - c) O referencial do vagão é **privilegiado** para **Descrição** do movimento da lâmpada em termos das grandezas físicas mensuráveis em relação ao referencial do solo, sendo esse **fato óbvio** e, portanto, **não precisando** de confirmação experimental.
  - d) É **indiferente** a escolha do referencial para a **Descrição** do movimento da lâmpada em termos das grandezas físicas mensuráveis (embora a descrição possa ser mais simples em algum dos referenciais em uma dada situação), sendo esse fato **não óbvio** e, portanto, **precisando** de confirmação experimental.

**2)** Uma lâmpada desprende-se do teto do vagão quando o mesmo se movimenta de maneira uniformemente acelerada em relação ao solo. Em relação à **descrição da queda da lâmpada** é correto afirmar que:

- a) É **indiferente** a escolha do referencial para a **descrição** do movimento da lâmpada em termos das grandezas físicas mensuráveis (embora a descrição possa ser mais simples em algum dos referenciais em uma dada situação). Sendo esse fato **óbvio** e **independente** do referencial do vagão estar se movimentando de maneira **acelerada ou não**, portanto, **não precisando** de confirmação experimental.
- b) O referencial do solo é **privilegiado** para **descrição** do movimento da lâmpada em termos das grandezas físicas mensuráveis em relação ao referencial do vagão, pois o referencial do solo é inercial. Sendo esse fato **óbvio** e, portanto, **não precisando** de confirmação experimental.
- c) O referencial do vagão é **privilegiado** para **descrição** do movimento da lâmpada em termos das grandezas físicas mensuráveis em relação ao referencial do solo, pois o referencial do vagão é o referencial no qual inicialmente a lâmpada está em repouso. Sendo esse fato **óbvio** e, portanto, **não precisando** de confirmação experimental.
- d) É **indiferente** a escolha do referencial para a **descrição** do movimento da lâmpada em termos das grandezas físicas mensuráveis (embora a descrição possa ser mais simples em algum dos referenciais em uma dada situação), mesmo o referencial do solo sendo inercial e o referencial do vagão sendo não-inercial. Sendo esse fato **não óbvio** e, portanto, **precisando** de confirmação experimental.

**3)** O observador no vagão e o observador no solo realizam medidas para a descrição do movimento da lâmpada enquanto o vagão movimenta-se de maneira uniforme. É correto afirmar em relação às **leis físicas** encontradas pelo observador do solo e pelo observador do vagão que:

- a) As **leis da física são as mesmas** (e são escritas em sua forma mais simples) em ambos os referenciais, pois tanto o referencial do solo quanto o referencial do vagão são referenciais inerciais. Sendo esse fato **óbvio** e, portanto, **não precisando** de confirmação experimental.
- b) As **leis da física não são as mesmas** para ambos os referenciais, sendo o referencial do solo privilegiado pois as leis da física no referencial do solo assumem uma forma mais simples no mesmo. Sendo esse fato **óbvio** e, portanto, **não precisando** de confirmação experimental.
- c) As **leis da física não são as mesmas** para ambos os referenciais, sendo o referencial do vagão privilegiado pois as leis da física no referencial do vagão assumem uma forma mais simples no mesmo. Sendo esse fato **óbvio** e, portanto, **não precisando** de confirmação experimental.
- d) As leis da física **são as mesmas** (e são escritas em sua forma mais simples) em ambos os referenciais, pois tanto o referencial do solo quanto o referencial do vagão são referenciais inerciais. Sendo esse fato **não óbvio** e, portanto, **precisando** de confirmação experimental.

**4)** O observador no vagão e o observador no solo realizam medidas para a descrição do movimento da lâmpada enquanto o vagão movimenta-se para a direita de maneira uniformemente acelerada. É correto afirmar em relação às **leis físicas** encontradas pelos observadores no vagão e no solo:

- a) As **leis** da física **são as mesmas** (e são escritas em sua forma mais simples) em ambos os referenciais, pois tanto o referencial do solo quanto o referencial do vagão são referenciais inerciais. Sendo esse fato **óbvio** e, portanto, **não precisando** de confirmação experimental.
- b) As **leis** da física **não são as mesmas** para ambos os referenciais, sendo o referencial do solo privilegiado pois as leis da física no referencial do solo assumem uma forma mais simples no mesmo. Sendo esse fato **não óbvio** e, portanto, **precisando de confirmação** experimental.
- c) As **leis** da física **não são as mesmas** para ambos os referenciais, sendo o referencial do vagão privilegiado pois as leis da física no referencial do vagão assumem uma forma mais simples no mesmo. Sendo esse fato **não óbvio** e, portanto, **precisando** de confirmação experimental.
- d) As **leis** da física **são as mesmas** (e são escritas em sua forma mais simples) em ambos os referenciais, pois tanto o referencial do solo quanto o referencial do vagão são referenciais inerciais. Sendo esse fato **não óbvio** e, portanto, **precisando** de confirmação experimental.

**5)** Na mecânica Newtoniana e na relatividade restrita, os referenciais inerciais apresentam um status privilegiado, pois as leis da física apresentam uma forma mais simples em relação a esses referenciais. Einstein se mostra contrariado com essa preferência e, em seu livro de divulgação da teoria da relatividade, afirma:

“Como é possível que certos referenciais sejam privilegiados em relação a outros referenciais ?”

Com isso, Einstein propõe uma generalização do princípio da relatividade restrita e propõe o chamado princípio da relatividade geral. O **princípio da relatividade geral (PRG)** afirma que:

“Todos os referenciais são equivalentes à formulação das leis gerais da natureza (física), independentemente de seus estados de movimento.”

Entretanto, Einstein apresenta um argumento que vai de encontro ao seu princípio da relatividade geral, acerca do comportamento de objetos em referenciais acelerados. Como exemplo para ilustrar o seu argumento, Einstein analisa um vagão que irá sofrer uma violenta freada:

“se o movimento do vagão passa a não ser uniforme – por exemplo, em consequência de uma violenta freada -, o viajante experimenta um forte puxão para frente [...] por isso nos parece impossível que, em relação, ao vagão em movimento não uniforme, se apliquem as mesmas leis mecânicas (leis da mecânica) que em relação ao vagão em repouso ou em movimento uniforme.... Por isso nos sentimos de imediato forçados a, contrariamente ao princípio da relatividade geral, atribuir ao movimento não uniforme uma espécie de realidade física absoluta.”

A realidade física absoluta a que Einstein se refere está no comportamento mecânico de objetos nos referenciais em movimento acelerado. Em relação ao princípio da relatividade geral e ao argumento apresentado por Einstein contrário a este princípio, determine a alternativa correta:

- a) Einstein estabelece, em seu PRG, que a descrição dos **fenômenos da natureza deve** ser equivalente para todos os referenciais. Entretanto, o exemplo do vagão mostra uma clara evidência que se opõe ao PRG, pois nota-se que um vagão em movimento não-uniforme é identificável (realidade física absoluta) e a descrição dos fenômenos da natureza não é equivalente para todos os referenciais.
- b) Einstein estabelece, em seu PRG, que a descrição dos **fenômenos da natureza não deve** ser equivalente para todos os referenciais. Portanto, o exemplo do vagão apenas mostra uma clara evidência que se opõe ao PRG, pois nota-se que um vagão em movimento não-uniforme é identificável (realidade física absoluta) e a descrição dos fenômenos da natureza não é equivalente para todos os referenciais.
- c) Einstein estabelece, em seu PRG, que a formulação das **leis da natureza não deve** ser equivalente para todos os referenciais. Portanto, o exemplo do vagão apenas mostra essa clara evidência que se opõe ao PRG, pois nota-se que um vagão em movimento não-uniforme é identificável (realidade física absoluta) e a formulação das leis da natureza não é a mesma para todos os referenciais.
- d) Einstein estabelece, em seu PRG, que a formulação das **leis da natureza deve** ser equivalente para todos os referenciais. Entretanto, o exemplo do vagão mostra uma clara evidência que se opõe ao PRG, pois nota-se que um vagão em movimento não-uniforme é identificável (realidade física absoluta) e a formulação das leis da natureza não é a mesma para todos os referenciais.

6) Einstein menciona em seu livro de divulgação da teoria da relatividade o seguinte fato acerca do campo gravitacional:

“O campo gravitacional, ao contrário do campo elétrico e magnético, apresenta uma propriedade extremamente notável, que é de fundamental importância para o que segue. Corpos que se movimentam sob ação exclusiva do campo gravitacional experimentam uma aceleração que não depende em absoluto nem do material nem do estado físico do corpo. Um pedaço de ferro e um pedaço de madeira, por exemplo, caem no campo gravitacional (no vácuo) exatamente da mesma maneira.”

Acerca da frase dita por Einstein e a notável propriedade do campo gravitacional, avalie as alternativas abaixo:

- a) Ao abandonarmos um pedaço de madeira e um pedaço de ferro em um campo gravitacional, os pedaços cairão com a mesma aceleração somente se possuírem a mesma massa, sendo essa propriedade verdadeira apenas para o campo gravitacional. O resultado para o campo magnético seria diferente, pois o campo magnético não apresenta a propriedade notável mencionada por Einstein, ou seja, um pedaço de ferro e um de madeira abandonados sob ação exclusiva de um campo magnético não apresentariam a mesma aceleração mesmo que o pedaço de ferro e madeira apresentassem a mesma massa.

b) Ao abandonarmos um pedaço de madeira e um pedaço de ferro em um campo gravitacional os pedaços cairão com a mesma aceleração independente da sua massa ou composição, sendo essa propriedade verdadeira apenas para o campo gravitacional. O resultado para o campo magnético seria diferente, pois o campo magnético não apresenta a propriedade notável mencionada por Einstein, ou seja, um pedaço de ferro e um de madeira abandonamos sob ação exclusiva de um campo magnético não apresentariam a mesma aceleração.

c) Ao abandonarmos dois objetos em um campo gravitacional os objetos cairão com a mesma aceleração somente se possuírem a mesma massa e forem idênticos em composição, sendo essa propriedade verdadeira não só para o campo gravitacional. O resultado para o campo magnético seria idêntico, pois nesse caso o campo magnético também apresentaria a propriedade notável mencionada por Einstein, ou seja, a aceleração adquirida por esses dois objetos abandonamos sob ação exclusiva de um campo magnético apresentariam o mesmo valor.

d) Ao abandonarmos dois objetos em um campo gravitacional os objetos cairão com a mesma aceleração independente de suas massas, porém esse resultado é válido para objetos idênticos em composição, sendo essa propriedade verdadeira apenas para o campo gravitacional. O resultado para o campo magnético seria diferente, pois o campo magnético não apresenta a propriedade notável mencionada por Einstein, ou seja, dois objetos de composições diferentes abandonamos sob ação exclusiva de um campo magnético não apresentariam a mesma aceleração.

**7)** A partir do fato experimental descrito na questão 6 sobre a propriedade notável do campo gravitacional conclui-se a proporcionalidade entre a massa inercial ( $m_I$ ) e a massa gravitacional ( $m_g$ ). Por simplicidade, podemos tomar a constante de proporcionalidade como igual à unidade e escrever: ( $m_I = m_g$ ). Acerca da noção de massa inercial e massa gravitacional é correto afirmar que:

a) A massa gravitacional e a massa inercial representam uma medida da resistência que um corpo oferece à alteração do seu estado de movimento devido à aplicação de qualquer força, independentemente de sua origem. Sendo a igualdade entre ambas **obvia a priori e não precisando** de verificação experimental.

b) A massa gravitacional representa uma medida da resistência que um corpo oferece à alteração do seu estado de movimento devido à aplicação exclusiva de uma força gravitacional. Já a massa inercial representa uma medida da resistência que um corpo oferece à alteração do seu estado de movimento devido à aplicação de qualquer força, independentemente de sua origem. Sendo a igualdade entre ambas **não obvia a priori e precisando** de verificação experimental.

c) A massa gravitacional representa o análogo gravitacional da carga elétrica, podendo atuar tanto de maneira ativa sendo uma fonte de campo gravitacional quanto de maneira passiva sofrendo a ação de um campo gravitacional externo. Já a massa inercial representa uma medida da resistência que um corpo oferece à alteração do seu estado de movimento devido à aplicação de qualquer força, independentemente de sua origem. Sendo a igualdade entre ambas **não obvia a priori e precisando** de verificação

experimental.

d) A massa gravitacional e a massa inercial representam o análogo gravitacional da carga elétrica podendo atuar atuam tanto de maneira ativa sendo uma fonte de campo gravitacional quanto de maneira passiva sofrendo a ação de um campo gravitacional externo. Sendo a igualdade entre ambas **obvia a priori e não precisando** de verificação experimental.

**8)** Um observador utilizando um dinamômetro deseja medir a tração em um fio em ambas as situações ilustradas abaixo. Considere  $m_I$  e  $m_g$  a massa inercial e a massa gravitacional respectivamente. Na imagem da esquerda, o observador está em uma sala (referencial  $S$ ) em repouso sobre a superfície da Terra cujo campo gravitacional é considerado uniforme e aponta para baixo. Na imagem da direita, o observador está em uma nave no espaço livre (referencial  $S^*$ ), longe de qualquer objeto massivo, com uma aceleração  $\vec{A} = -\vec{g}$ , para cima com módulo constante. Einstein propõe em 1907 um princípio que estabelece uma equivalência entre referenciais acelerados e referenciais sobre a influência de campos gravitacionais. Assim, podemos escrever o princípio da equivalência da seguinte forma: Nenhuma experiência, mecânica, pode distinguir entre um campo gravitacional uniforme ( $\vec{g}$ ) e a aceleração uniforme equivalente ( $\vec{A} = -\vec{g}$ ). A partir deste princípio, Einstein estabeleceu uma interpretação física para a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional. Analise a situação abaixo e marque a alternativa correta que ilustra a interpretação física proposta por Einstein para a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional:

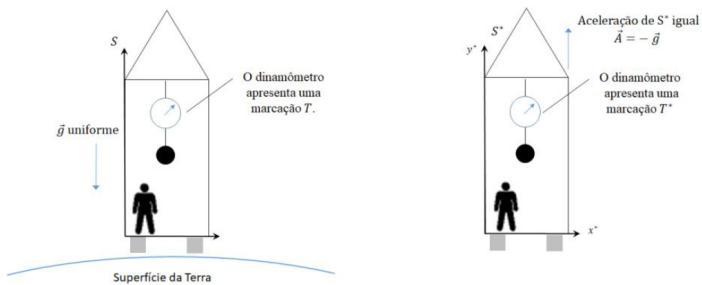


Figura C.1:

- a) As trações  $T$  e  $T^*$  marcadas pelos dinamômetros não apresentam qualquer relação visto que se tratam de referenciais diferentes e a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional constitui apenas uma coincidência.
- b) A tração em  $S$  vale  $T = m_g \cdot g$  e a tração em  $S^*$  vale  $T^* = m_I \cdot A = m_I \cdot g$ , onde  $g$  representa o campo gravitacional e  $A$  a aceleração do referencial  $S^*$ , que é, em módulo, igual a  $g$ . A interpretação física da igualdade feita por Einstein está em partir da igualdade ( $m_I = m_g$ ) e com isso afirmar que os valores de  $T$  e  $T^*$  serão idênticos, mostrando que a igualdade ( $m_I = m_g$ ) implica na validade do princípio da equivalência.
- c) A tração em  $S$  vale  $T = m_g \cdot g$  e a tração em  $S^*$  vale  $T^* = m_I \cdot A = m_g \cdot g$ , onde  $g$

representa o campo gravitacional e  $A$  o módulo da aceleração do referencial  $S^*$ , que é, em módulo, igual a  $g$ . A interpretação física está no fato que o princípio da equivalência é válido independentemente da igualdade entre  $m_I$  e  $m_g$ , pois mesmo que ( $m_I \neq m_g$ ) o princípio da equivalência se manteria verdadeiro.

d) A tração em  $S$  vale  $T = m_g \cdot g$  e a tração em  $S^*$  vale  $T^* = m_I \cdot A = m_I \cdot g$ , onde  $g$  representa o campo gravitacional e  $A$  a aceleração do referencial  $S^*$ , que é, em módulo, igual a  $g$ . A interpretação física para a igualdade entre  $m_I$  e  $m_g$  consiste em utilizar o princípio da equivalência como um princípio fundamental e assim não conseguirmos distinguir as situações da figura acima, fazendo com que  $T = T^*$  e, por conseguinte,  $m_I = m_g$ .

**9)** Einstein, em seu livro de divulgação da teoria da relatividade, revisita o exemplo do vagão sofrendo uma brusca freada que parecia conflitar com a sua tentativa de escrever o princípio da relatividade geral. A partir do princípio da equivalência, Einstein apresenta o seguinte argumento:

“É bem verdade que o observador que se encontra no vagão da estrada de ferro que está sendo freado experimenta, em consequência da freada, um puxão para frente, e que desta forma ele percebe o movimento não uniforme do vagão. Mas ninguém o obriga a atribuir o puxão a uma aceleração “real” do vagão. Ele também pode interpretar da seguinte forma o que experimentou: Meu referencial (vagão) está permanentemente em repouso. Mas, durante o período da frenagem, existe em relação ao mesmo um campo gravitacional dirigido para frente e que varia com o tempo [...] É este campo gravitacional que provoca também o puxão no observador.”

Analise as questões abaixo e marque a alternativa que ilustra como Einstein utilizou o princípio da equivalência para resolver o aparente conflito entre o princípio da relatividade geral e o exemplo do vagão, representado abaixo.

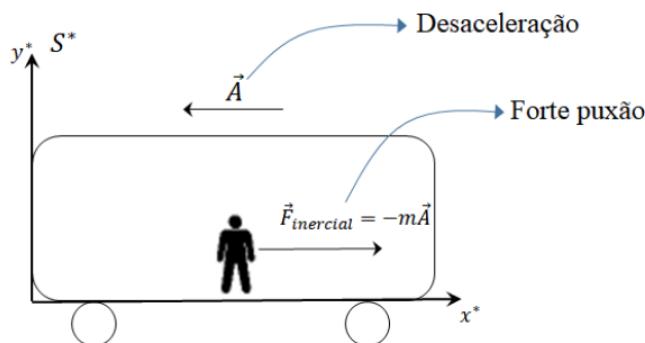


Figura C.2:

- a) O argumento de Einstein se baseia no fato que o observador, que sofre um forte puxão para frente devido à desaceleração do vagão ( $\vec{A}$ ), **não consegue identificar** que está em um vagão em movimento não-uniforme independentemente da validade do princípio da equivalência.

- b) O argumento de Einstein se baseia no fato que o observador, que sofre um forte puxão para frente devido à desaceleração do vagão ( $\vec{A}$ ), **somente pode afirmar** se está em um vagão em movimento não-uniforme em alguns casos, sendo a validade do princípio da equivalência utilizada apenas em casos específicos.
- c) O argumento de Einstein se baseia no fato que o observador, que sofre um forte puxão para frente devido à desaceleração do vagão ( $\vec{A}$ ), **não pode afirmar** se está em um vagão em movimento não-uniforme ou se o vagão está em repouso mas sofrendo a ação de um campo gravitacional no sentido oposto de  $\vec{A}$ , sendo este fato garantido pelo princípio da equivalência.
- d) O argumento de Einstein se baseia no fato que o observador, que sofre um forte puxão para frente devido à desaceleração do vagão ( $\vec{A}$ ), **pode afirmar** se está em um vagão em movimento não-uniforme mas essa situação seria equivalente caso o vagão estivesse em repouso mas sofrendo a ação de um campo gravitacional no sentido oposto de  $\vec{A}$ , sendo este fato garantido pelo princípio da equivalência.

**O enunciado abaixo é válido para as questões 10 e 11.**

Uma nave de altura  $L$  pode ser colocada em duas situações. Na primeira, a nave é acelerada de maneira uniforme no espaço livre longe de qualquer corpo massivo. Na segunda, a nave se encontra em repouso na superfície da Terra, onde o campo gravitacional pode ser considerado uniforme.

**10)** Imagine um referencial inercial  $S$  e um referencial  $S^*$  acelerado em relação a  $S$ , como ilustrado na figura abaixo. O referencial  $S^*$  se move no espaço livre com aceleração  $\vec{A}$ , cujo módulo coincide com o valor da aceleração da gravidade  $\vec{g}$  na superfície da Terra. Um pulso luminoso é emitido e entra em uma abertura localizada na parte superior da nave, do lado esquerdo, a uma altura de  $3L/4$  em relação ao chão da nave. Após um curto intervalo de tempo, o pulso luminoso sai pela parte inferior da nave, localizada no lado direito, a uma altura de  $L/4$  em relação ao chão da nave. A sequência descrita anteriormente é mostrada na figura abaixo, onde a linha tracejada azul representa a trajetória do pulso luminoso em relação ao referencial inercial  $S$ .

Em relação à trajetória do raio de luz vista por um observador no referencial acelerado  $S^*$ , que compreende a entrada do pulso luminoso pela abertura localizada do lado esquerdo da nave e a saída do pulso luminoso pela abertura localizada do lado direito da nave, determine a afirmação correta:

- a) A trajetória do pulso luminoso em  $S^*$  será retilínea, assim como em  $S$ , e atingirá a parede da nave localizada do lado direito a uma altura do chão igual a  $3L/4$ , não atravessando a abertura localizada na parte direita da nave.
- b) A trajetória do pulso luminoso em  $S^*$  será retilínea, assim como em  $S$ , e atingirá a parede da nave localizada do lado direito uma altura do chão igual a  $L/4$ , atravessando a abertura localizada na parte direita nave.
- c) A trajetória do pulso luminoso em  $S^*$  será curvilínea e atingirá a parede do lado direito da nave a uma altura do chão igual a  $3L/4$ , não atravessando a abertura locali-

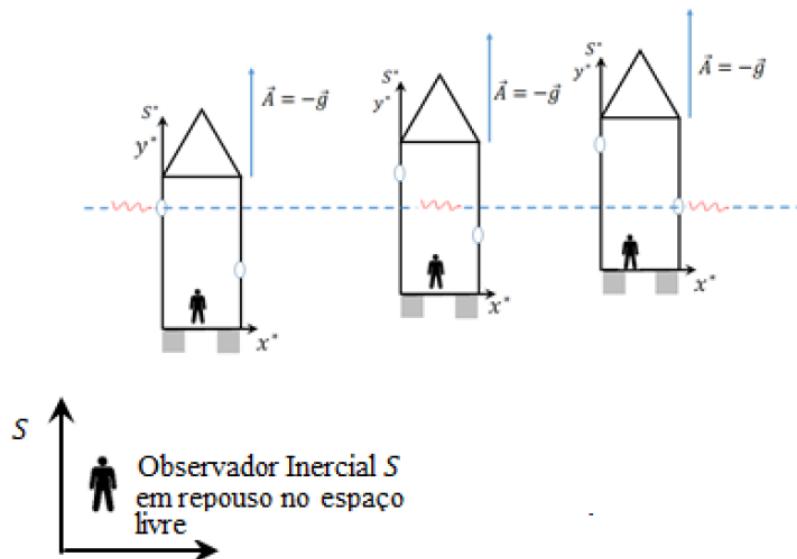


Figura C.3:

zada na parte direita da nave.

- d) A trajetória do pulso luminoso em  $S^*$  será curvilínea e atingirá a parede localizada do lado direito a uma altura do chão igual a  $L/4$ , atravessando a abertura localizada na parte direita da nave.

**11)** O princípio da equivalência afirma que “*Nenhuma experiência mecânica pode distinguir entre um campo gravitacional uniforme ( $\vec{g}$ ) e a aceleração uniforme equivalente  $\vec{A} = -\vec{g}$* ”, sendo esse enunciado chamado às vezes de forma “fraca” do princípio. Porém, para Einstein o princípio da equivalência é um princípio fundamental da teoria, sendo estendido então para todos os domínios da física, chamado de forma “forte” do princípio. A forma “forte” do princípio da equivalência escreve-se: “*Nenhuma experiência, mecânica ou não, pode distinguir entre um campo gravitacional uniforme ( $\vec{g}$ ) e a aceleração uniforme equivalente  $\vec{A} = -\vec{g}$* ”. Baseado nos enunciados anteriores sobre princípio da equivalência (forma “forte” e forma “fraca”), analise a situação descrita a seguir. Imagine que a nave descrita na questão 10 repouse na superfície de um planeta de massa  $M$  e que tratemos o campo gravitacional como uniforme. A nave, como antes, possui uma abertura localizada na parte esquerda e direita com alturas em relação ao chão de  $3L/4$  e  $L/4$  respectivamente. Qual será a trajetória percorrida para um pulso luminoso em relação ao observador localizado no interior da nave e como o princípio da equivalência se relaciona com a explicação para a trajetória do pulso luminoso analisada por esse observador?

- a) A trajetória do pulso luminoso para um observador localizado na nave será retilínea, onde o pulso luminoso entrará pela abertura localizada à esquerda da nave e colidirá

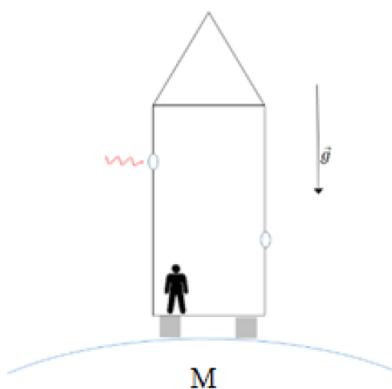


Figura C.4:

com a parede localizada à direita da nave a uma mesma altura em relação ao chão da nave. Esse fato não apresenta qualquer relação com o princípio da equivalência, pois a gravidade não influencia na propagação do pulso luminoso.

- b) A trajetória do pulso luminoso para um observador localizado na nave será curvilínea, onde o pulso luminoso entrará pela abertura localizada à esquerda e sairá pela abertura localizada à direita da nave. Utilizando o princípio da equivalência na forma fraca, seria possível chegar à afirmação que a trajetória do pulso luminoso na nave repousando em um campo gravitacional seria idêntica a trajetória do pulso luminoso no referencial acelerado (questão 10).
- c) A trajetória do pulso luminoso para um observador localizado na nave será curvilínea, onde o pulso luminoso entrará pela abertura localizada à esquerda da nave e sairá pela abertura localizada à direita da nave. Utilizando o princípio da equivalência na forma forte, seria possível chegar a afirmação que a trajetória do pulso luminoso na nave repousando em um campo gravitacional seria idêntica a trajetória do pulso luminoso no referencial acelerado (questão 10).
- d) A trajetória do pulso luminoso para um observador localizado na nave será retilínea, onde o pulso luminoso entrará pela abertura localizada à esquerda da nave e colidirá com a parede localizada à direita da nave, a uma mesma altura em relação ao chão da nave. Utilizando o princípio da equivalência na forma forte, seria possível chegar afirmação que a trajetória do pulso luminoso na nave repousando em um campo gravitacional seria retilínea e idêntica a trajetória do pulso luminoso no referencial acelerado (questão 10).

**Enunciado válido para questões 12 e 13.** Uma maneira equivalente de reescrever o princípio da equivalência é em termos dos referenciais em queda livre. A ideia central deste enunciado é que: um referencial em queda livre, não girante, é equivalente a um referencial (inercial) que se move de maneira uniforme no espaço livre. Einstein, em seu livro ilustra o pensamento mais feliz de sua vida:

“Então ocorreu-me o pensamento mais feliz de minha vida, na forma seguinte: um campo gravitacional tem existência relativa ... pois para um observador que cai livremente do telhado de uma casa não há - pelo menos nas suas vizinhanças imediatas - campo gravitacional.”

- 12)** Suponha que inicialmente o campo gravitacional seja tratado como uniforme. Imagine então que estejamos em um elevador e o mesmo despenque em queda livre, como ilustrado na figura abaixo e que exista uma maçã que irá ser abandonada assim que o elevador começar a despencar. Analise as opções abaixo e marque a alternativa que relaciona o princípio da equivalência, colocado em termos dos referenciais em queda livre, com o pensamento exposto no trecho destacado acima. Nas alternativas abaixo, consideraremos que o elevador esteja sempre em queda livre.

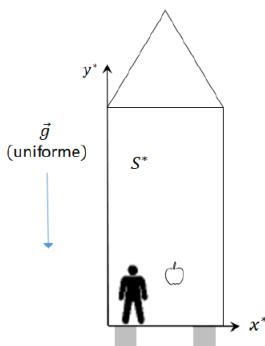


Figura C.5:

- a) Para um observador em queda livre tudo se passa como se não houvesse campo gravitacional, mas o referencial em queda livre **não é idêntico** a um referencial inercial na ausência de campo gravitacional. Portanto, uma maçã ao ser abandonada em um elevador em queda livre irá atingir o chão do elevador sendo esse comportamento diferente do que ocorreria se o elevador estivesse em movimento uniforme no espaço livre.
- b) Para um observador em queda livre tudo se passa como se não houvesse campo gravitacional e o referencial em queda livre **é idêntico** a um referencial inercial na ausência de campo gravitacional. Entretanto, uma maçã ao ser abandonada em um elevador em queda livre irá atingir o chão do elevador sendo esse comportamento diferente do que ocorreria se o elevador estivesse em movimento uniforme no espaço livre.
- c) Para um observador em queda livre tudo se passa como se não houvesse campo gravitacional, mas o referencial em queda livre **não é idêntico** a um referencial inercial na ausência de campo gravitacional. Entretanto, uma maçã ao ser abandonada em um elevador em queda livre ficará flutuando em relação ao chão do elevador sendo esse comportamento idêntico ao que ocorreria se o elevador estivesse em movimento uniforme no espaço livre.
- d) Para um observador em queda livre tudo se passa como se não houvesse campo

gravitacional e o referencial em queda livre é **idêntico** a um referencial inercial na ausência de campo gravitacional. Portanto, uma maçã ao ser abandonada em um elevador em queda livre ficará flutuando em relação ao chão do elevador sendo esse comportamento idêntico ao que ocorreria se o elevador estivesse em movimento uniforme no espaço livre.

**13)** Einstein no final de sua frase faz a seguinte advertência:

“[...] para um observador que cai livremente do telhado de uma casa não há - pelo menos nas suas vizinhanças imediatas - campo gravitacional.”

Einstein se preocupa em colocar que o efeito do desaparecimento do campo gravitacional só é verdadeiro nas suas vizinhanças imediatas para um referencial em queda livre em um campo gravitacional não-uniforme. Imagine que agora o elevador em queda livre em um campo gravitacional não-uniforme como ilustrado na figura abaixo e que existam agora duas maçãs que serão abandonadas de diferentes alturas em relação ao chão assim que o elevador esteja em queda. Analise as opções abaixo e indique a alternativa de acordo com a advertência proposta por Einstein.

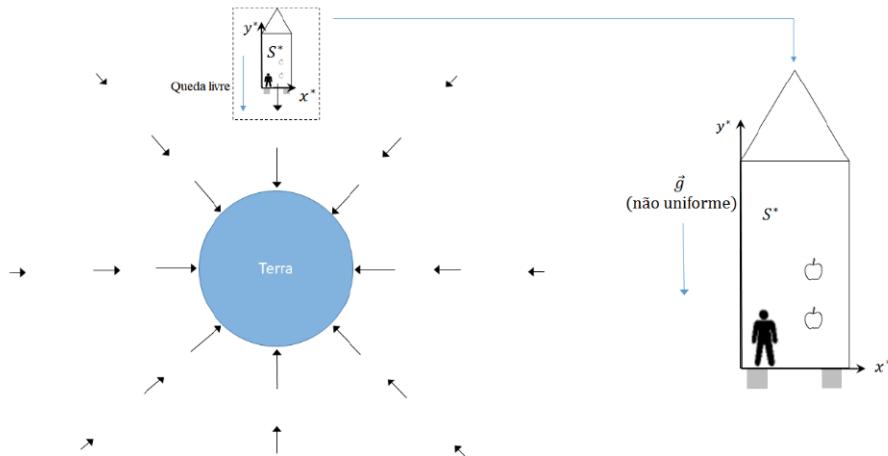


Figura C.6:

- a) A advertência de Einstein refere-se ao fato do princípio da equivalência ser válido apenas para campos gravitacionais uniformes. Assim, ocorreria uma impossibilidade da aplicação do princípio da equivalência em um campo gravitacional não-uniforme.
- b) A advertência de Einstein refere-se ao fato do princípio da equivalência ser válido apenas em uma pequena vizinhança espacial e em curtos intervalos de tempo, onde o campo gravitacional pode ser tratado como uniforme. Assim, ao abandonarmos duas maçãs de alturas diferentes as mesmas iriam ficar flutuando em relação a base do elevador e um observador no interior do elevador não detectaria qualquer diferença na separação entre as mesmas caso a medida fosse feita considerando que a separação

espacial entre as maçãs seja pequena e que essa medida seja realizada em curtos intervalos de tempo.

c) A advertência de Einstein refere-se ao fato do princípio da equivalência ser válido apenas em uma pequena vizinhança espacial, onde o campo gravitacional possa ser tratado como uniforme. Assim, ao abandonarmos duas maçãs de alturas diferentes as mesmas iriam ficar flutuando em relação a base do elevador e um observador no interior do elevador não detectaria qualquer diferença na separação entre as maçãs caso a experiência fosse realizada considerando que a separação espacial entre as maçãs seja pequena sendo esse resultado independente do intervalo de tempo em que essa medida é feita.

d) A advertência de Einstein refere-se ao fato do princípio da equivalência ser válido apenas em uma pequena vizinhança espacial e em curtos intervalos de tempo, onde o campo gravitacional pode ser tratado como uniforme. Assim, ao abandonarmos duas maçãs de alturas diferentes as mesmas iriam ficar flutuando em relação a base do elevador e um observador no interior do elevador não detectaria qualquer diferença na separação entre as maçãs caso a experiência fosse realizada em curtos intervalos de tempo sendo esse resultado independente do tamanho da separação espacial entre as mesmas.

## Parte 2

**14)** Um fato conhecido na relatividade geral é que o funcionamento de relógios em um campo gravitacional é afetado. Assim, algumas vezes argumenta-se que: o campo gravitacional afeta a marcha de um relógio: o relógio no campo gravitacional “anda mais devagar”. Analise as afirmações abaixo e indique a afirmação correta acerca do funcionamento de relógios em campos gravitacionais

a) O funcionamento de um relógio é afetado pela presença de um objeto massivo, fazendo com que o intervalo de tempo medido quando o relógio está mais próximo da fonte de campo gravitacional (a Terra, o Sol, por exemplo) seja maior quando comparado com relógios que estão mais distantes da fonte de campo gravitacional.

b) O funcionamento de um relógio é afetado pela presença de um objeto massivo, fazendo com que o intervalo de tempo medido quando o relógio está mais próximo da fonte de campo gravitacional (a Terra, o Sol, por exemplo) seja menor quando comparado com relógios que estão mais distantes da fonte de campo gravitacional.

c) O funcionamento de um relógio não é afetado pela presença de um objeto fonte de campo gravitacional, fazendo com que o intervalo de tempo medido independa da proximidade da fonte de campo gravitacional e a frase do enunciado pode ser considerada incorreta.

d) O funcionamento de um relógio é afetado, mas apenas em regiões muito próximas de um objeto massivo, fazendo com que o intervalo de tempo medido mais próximo da fonte de campo gravitacional (a Terra, o Sol, por exemplo) seja maior quando comparado com relógios que estão um pouco mais distantes da fonte de campo gravitacional.

**15)** Em relatividade geral, utilizamos as coordenadas globais para localizar eventos

em um espaço-tempo quadridimensional curvo. Entretanto, apesar das coordenadas globais, por exemplo  $(r,t)$ , cumprirem o seu papel em localizar eventos em um espaço-tempo curvo, as variações de coordenadas globais perdem o seu significado métrico imediato. Einstein lutou alguns anos para um profundo entendimento acerca da perda de significado métrico, que destacamos aqui em parte:

“[...] não é tão fácil se libertar da ideia de que as coordenadas devem ter um significado métrico imediato”.

A frase de Einstein ilustra o quanto difícil foi apresentar uma clareza entre a relação de uma variação das coordenadas globais com as grandezas físicas mensuráveis. Assim, para que reconciliemos a separação entre as coordenadas globais (sem significado métrico imediato) com medidas que possuem significado métrico é necessário conhecermos a métrica  $\Delta s^2$  (global) para o espaço-tempo. A métrica espaço-tempo em torno de uma distribuição esférica estacionária de matéria de massa  $M$ , na forma simplificada, é dada por

$$(\Delta s)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 (\Delta t)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} (\Delta r)^2,$$

onde  $G$  representa a constante da gravitação universal,  $c$  a velocidade da luz no vácuo,  $M$  a massa de uma distribuição esférica de matéria. As coordenadas globais  $r$  e  $t$  representam uma coordenada “radial” e uma coordenada “temporal”, respectivamente. Analise as alternativas abaixo e indique a alternativa que relaciona corretamente as quantidades físicas mensuráveis com as coordenadas globais.

- a) Em um espaço-tempo curvo é **sempre possível** encontrar coordenadas globais cuja separação apresenta significado métrico imediato **para qualquer** região do espaço-tempo considerado. Por isso, a utilização da métrica torna-se **dispensável** para a determinação de quantidades físicas mensuráveis.
- b) Em um espaço-tempo curvo é **possível** encontrar coordenadas globais cuja separação apresenta significado métrico imediato para regiões **específicas** do espaço-tempo considerado. Por isso, a utilização da métrica torna-se **dispensável** para a determinação de quantidades físicas mensuráveis.
- c) Em um espaço-tempo curvo é **sempre possível** encontrar coordenadas globais cuja separação apresenta significado métrico imediato **para qualquer** região do espaço-tempo considerada. Por isso, a utilização da métrica torna-se **indispensável** para a determinação de quantidades físicas mensuráveis.
- d) Em um espaço-tempo curvo é **impossível** encontrar coordenadas globais cuja separação apresenta significado métrico imediato para qualquer região do espaço-tempo considerado. Por isso, a utilização da métrica torna-se **indispensável** para a determinação de quantidades físicas mensuráveis.

**Enunciado válido para as questões 16, 17, 18 e 19.** Um observador (estacionário) chamado Rodrigo, localizado na coordenada  $r = R$ , está sobre a superfície da Terra munido de um relógio e uma observadora chamada Mariana, localizada na coordenada  $r = R + h$ , está no alto de uma torre de altura  $h$  também munida de um relógio. Além de possuírem os relógios com alta precisão ambos possuem lanternas para que possam emitir pulsos luminosos. Ao utilizarmos a métrica de Schwarzschild podemos relacionar o intervalo de tempo próprio  $\Delta\tau$  com a variação da coordenada (global)  $t$ , idêntica para ambos os observadores. Para um observador estacionário localizado em uma coordenada  $r$  genérica, podemos escrever a partir da métrica de Schwarzschild a seguinte equação relacionando o intervalo de tempo próprio com o intervalo da coordenada (global)  $\Delta t$

$$\Delta\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)}\Delta t,$$

**16)** Mariana, localizada em  $r_M = R + h$ , envia dois pulsos luminosos para baixo e determina o intervalo de tempo entre a emissão dos pulsos, medido com um relógio, de valor  $\Delta\tau_M$  de acordo com a figura abaixo. Rodrigo, localizado em  $r_R = R$ , recebe ambos os pulsos emitidos por Mariana e determina o intervalo de tempo entre a recepção dos pulsos, medido com um relógio, de valor  $\Delta\tau_R$ . Acerca da comparação entre as medidas de intervalo de tempo realizadas por Mariana e Rodrigo determine a afirmação correta:

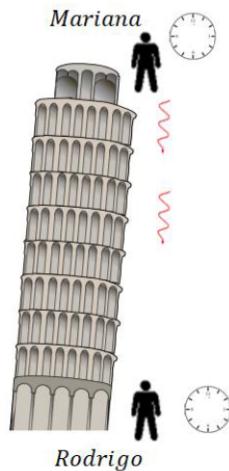


Figura C.7:

- a) O intervalo medido por ambos é idêntico ( $\Delta\tau_M = \Delta\tau_R$ ), pois ambos são observadores estacionários ( $r = \text{fixo}$ ).
- b) O intervalo de tempo medido por Mariana é maior que o intervalo de tempo medido por Rodrigo ( $\Delta\tau_M > \Delta\tau_R$ ). Assim, Rodrigo tem a impressão que o relógio de Mari-

ana “anda” mais rápido quando comparado com o seu próprio relógio.

- c) O intervalo de tempo medido por Mariana é menor que o intervalo de tempo medido por Rodrigo ( $\Delta\tau_M < \Delta\tau_R$ ). Assim, Rodrigo tem a impressão que o relógio de Mariana “anda” mais devagar quando comparado com o seu próprio relógio.
- d) Só podemos dizer que ( $\Delta\tau_M \neq \Delta\tau_R$ ), mas não podemos compará-los.

**17)** Imagine que os intervalos de tempo medidos por Rodrigo e Mariana na questão anterior representem o período de uma onda periódica, de valores respectivamente  $T_R$  e  $T_M$ . Acerca da frequência de emissão  $f_M$  da onda emitida por Mariana e a frequência da onda recebida  $f_R$  por Rodrigo, determine qual alternativa compara corretamente a relação entre essas frequências medidas:

- a) A frequência de recepção medida por Rodrigo é menor quando comparada com a frequência de emissão medida por Mariana, ou seja,  $f_R < f_M$ . Essa redução na frequência é conhecida como desvio gravitacional para o vermelho.
- b) A frequência de recepção medida por Rodrigo é maior quando comparada com a frequência de emissão medida por Mariana, ou seja,  $f_R > f_M$ . Esse aumento na frequência é conhecido como desvio gravitacional para o azul.
- c) A frequência de recepção medida por Rodrigo é idêntica quando comparada com a frequência de emissão medida por Mariana, ou seja,  $f_R = f_M$ .
- d) A frequência de recepção medida por Rodrigo é diferente quando comparada com a frequência de emissão medida por Mariana. Porém, não podemos compará-las para afirmar se a frequência apresenta uma redução ou aumento.

**18)** Agora invertemos a situação anterior, pois Rodrigo irá emitir dois pulsos luminosos enquanto Mariana irá receber os pulsos luminosos. Assim, Rodrigo, localizado em  $r = R$ , envia dois pulsos luminosos para cima e determina o intervalo de tempo, entre a emissão dos pulsos, de valor  $\Delta\tau_R$  de acordo com a figura abaixo. Mariana, localizada em  $r = R + h$ , recebe ambos os pulsos emitidos por Rodrigo e determina o intervalo de tempo, entre a recepção dos pulsos, de valor  $\Delta\tau_M$ . Acerca da comparação entre as medidas de intervalo de tempo realizadas por Mariana e Rodrigo, determine a afirmação correta:

- a) O intervalo medido por ambos é idêntico ( $\Delta\tau_M = \Delta\tau_R$ ), pois ambos são observadores estacionários ( $r = \text{fixo}$ ).
- b) O intervalo de tempo medido por Mariana é maior que o intervalo de tempo medido por Rodrigo ( $\Delta\tau_M > \Delta\tau_R$ ). Assim, Mariana tem a impressão que o relógio de Rodrigo “anda” mais devagar quando comparado com o seu próprio relógio.
- c) O intervalo de tempo medido por Mariana é menor que o intervalo de tempo medido por Rodrigo ( $\Delta\tau_M < \Delta\tau_R$ ). Assim, Mariana tem a impressão que o relógio de Rodrigo “anda” mais rápido quando comparado com o seu próprio relógio.
- d) Só podemos dizer que  $\Delta\tau_M \neq \Delta\tau_R$ , mas não podemos compará-los.

**19)** Imagine que os intervalos de tempo medidos por Rodrigo e Mariana na questão anterior representem o período de uma onda periódica, de valores respectivamente  $T_R$  e  $T_M$ . Acerca da frequência de emissão  $f_R$  da onda emitida por Rodrigo e a frequência

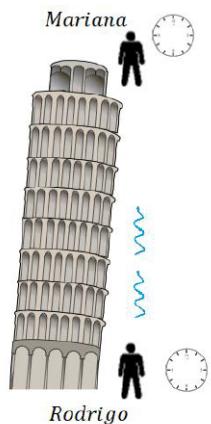


Figura C.8:

da onda  $f_M$  recebida por Mariana, determine qual alternativa relaciona corretamente a relação entre essas frequências:

- a) A frequência de recepção medida por Mariana é menor quando comparada com a frequência de emissão medida por Rodrigo. Essa redução na frequência é conhecida como desvio gravitacional para o vermelho.
- b) A frequência de recepção medida por Mariana é maior quando comparada com a frequência de emissão medida por Rodrigo. Esse aumento na frequência é conhecido como desvio gravitacional para o azul.
- c) A frequência de recepção medida por Mariana é idêntica quando comparada com a frequência de emissão medida por Rodrigo.
- d) A frequência de recepção medida por Mariana é diferente quando comparada com a frequência de emissão medida por Rodrigo. Porém, não podemos compará-las para afirmar se a frequência apresenta uma redução ou aumento.

**Enunciado válido para as questões 20 e 21.** Descritos de uma forma simplificada, os buracos negros são regiões das quais nenhum objeto físico, nem mesmo a luz, pode escapar. A fronteira que limita essa região é chamada de horizonte de eventos.

- 20)** Na figura abaixo vemos um diagrama espaço-tempo para um buraco negro de Schwarzschild. Os diagramas de cone de luz estão também colocados na figura. A região na qual a coordenada radial vale  $R_s = \frac{2GM}{c^2}$  determina o horizonte de eventos. Acerca do comportamento do cone de luz para a região externa ao horizonte de eventos  $r > R_s$  e para a região interna ao horizonte de eventos  $r < R_s$  analise os itens a seguir:
- a) É possível que existam observadores estacionários ( $r = \text{fixo}$ ) tanto na região interna ao horizonte de eventos  $r < R_s$  quanto na região externa ao horizonte de eventos  $r > R_s$ . No entanto, para a região externa ao horizonte de eventos um observador (ou partícula) pode se movimentar tanto para  $r$  crescente quanto para  $r$  decrescente

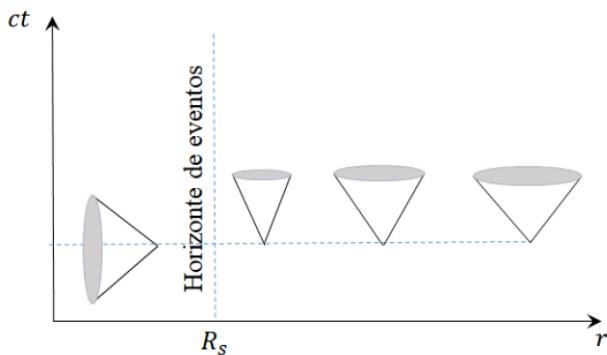


Figura C.9:

enquanto que um observador (ou partícula), na região interna, pode se movimentar apenas para  $r$  decrescente (no sentido de  $r = 0$ ).

- b) Somente é possível existir observadores estacionários ( $r = \text{fixo}$ ) na região interna ao horizonte de eventos  $r < R_S$ . Entretanto, para a região externa ao horizonte de eventos um observador (ou partícula) pode se movimentar tanto para  $r$  crescente quanto para  $r$  decrescente, enquanto que um observador (ou partícula), na região interna, pode se movimentar apenas para  $r$  decrescente (no sentido de  $r = 0$ ).
- c) Somente é possível que existam observadores estacionários ( $r = \text{fixo}$ ) na região externa ao horizonte de eventos  $r > R_S$ . Assim, para a região externa ao horizonte de eventos um observador (ou partícula) pode se movimentar tanto para  $r$  crescente quanto para  $r$  decrescente, enquanto que um observador (ou partícula) na região interna pode se movimentar apenas para  $r$  decrescente (no sentido de  $r = 0$ ).
- d) É possível que existam observadores estacionários ( $r = \text{fixo}$ ) tanto na região interna ao horizonte de eventos  $r < R_S$  quanto na região externa ao horizonte de eventos  $r > R_S$ . Entretanto, para a região externa ao horizonte de eventos um observador (ou partícula) pode se movimentar tanto para  $r$  crescente quanto para  $r$  decrescente, enquanto que um observador (ou partícula) na região interna pode se movimentar apenas para  $r$  decrescente (no sentido de  $r = 0$ ).

**21)** A figura abaixo representa um cone de luz sobre o horizonte de eventos, onde as linhas representadas no diagrama **podem ou não** representar trajetórias (linhas de mundo) de partículas materiais ou de pulsos luminosos em um diagrama espaço-tempo. Analisando a figura abaixo, analise as afirmações a seguir:

- a) A linha tracejada (em preto) pode representar a trajetória de uma partícula material enquanto a linha pontilhada (em laranja) pode apenas representar a trajetória de um pulso luminoso, pois somente um pulso luminoso ao atravessar o horizonte de eventos ( $r < R_S$ ) pode retornar para a região exterior ao horizonte de eventos ( $r > R_S$ ).
- b) A linha tracejada (em preto) pode representar a trajetória de uma partícula material, a linha continua (em vinho) pode representar a trajetória de um pulso luminoso, enquanto a linha pontilhada (em laranja) pode apenas representar a trajetória de um pulso

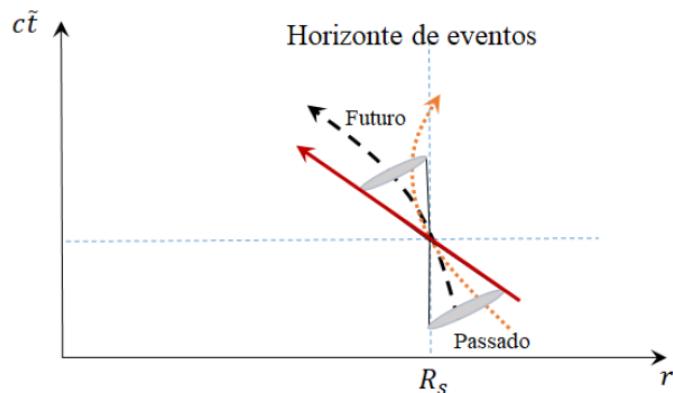


Figura C.10:

luminoso. Somente um pulso luminoso ao atravessar o horizonte de eventos ( $r < R_S$ ) pode retornar para a região exterior ao horizonte de eventos ( $r > R_S$ ).

- c) A linha tracejada (em preto) ou a linha continua (em vinho) podem representar a trajetória de uma partícula material enquanto a linha tracejada em laranja pode representar tanto a trajetória de um pulso luminoso quanto de uma partícula material. Tanto um pulso luminoso ou uma partícula material ao atravessar o horizonte de eventos ( $r < R_S$ ) podem retornar para a região exterior ao horizonte de eventos ( $r > R_S$ ).
- d) A linha tracejada em preto pode representar a trajetória de uma partícula material , a linha continua (em vinho) pode representar a trajetória de um pulso luminoso, enquanto a linha tracejada em laranja não pode representar a trajetória de um pulso luminoso ou qualquer outra partícula material. Uma partícula material ou um pulso luminoso que atravesse o horizonte de eventos ( $r < R_S$ ) não pode retornar para a região exterior ao horizonte de eventos ( $r > R_S$ ).

**GABARITO:**

Parte 1: 1-a; 2-a; 3-d; 4-b; 5-d; 6-b; 7-c; 8-d; 9-c; 10-d; 11-c; 12-d; 13-b.

Parte 2: 14-b; 15-d; 16-b; 17-b; 18-b; 19-a; 20-c; 21-d.

## **Apêndice D**

### **Iniciativas em um curso de Licenciatura em Física**

Nesse apêndice apresentaremos um brevíssimo relato sobre uma inserção feita em uma disciplina eletiva para o estudo da Teoria da Relatividade Geral (TRG) em um curso voltado para a Licenciatura em Física. Essa iniciativa surge como requisito para o Estágio de Docência realizada ao longo do curso de doutorado. A disciplina acontecia uma vez por semana com duração de duas horas no ano de 2021, em regime remoto. A disciplina foi dividida em três blocos. O bloco 1 apresentou a Teoria da Relatividade Restrita (TRR). O texto principal para a preparação deste bloco de aulas foi o texto de apoio contido no Apêndice A. O bloco 2 tratou do triunfo da gravitação newtoniana, a TRG e uma a discussão da precessão de Mercúrio. O texto principal para a elaboração deste bloco foi escrito pelo professor Alexandre Tort e serviu de base para o artigo “O avanço do periélio de Mercúrio” (MACHADO; TORT; ZARRO, 2023). O bloco 3 discutiu a TRG sob um ponto de vista adequado para a Licenciatura em Física. O texto principal para essa discussão foi o texto de apoio (Apêndice A). Contudo, destacamos que o texto de apoio foi desenvolvido para estudantes do Ensino Médio (EM) e, por isso, discussões extras também foram colocadas nesse bloco. Esses tópicos extras tratavam de temas mais abstratos como a dedução da métrica de Schwarzschild, a métrica de Painlevé-Gullstrand e detalhes sobre a imagem do buraco negro. Assim, esses tópicos extras apresentaram como base o artigo “O princípio da equivalência: Uma introdução à relatividade geral” (MACHADO; TORT; ZARRO, 2021). Abaixo destacamos os tópicos tratados em cada bloco:

#### **Bloco 1 - Teoria da Relatividade Restrita (TRR)**

- Os postulados da TRR.
- Consequência 1: a dilatação do tempo.
- Consequência 2: contração de Lorentz.

- As transformações de Lorentz.
- O intervalo invariante  $(\Delta s)^2$ .
- O espaço-tempo de Minkowski.

## Bloco 2 - O triunfo da gravitação newtoniana e a TRG para a Precessão de Mercúrio

- A gravitação newtoniana e o sistema solar. O problema de dois corpos e sua solução. (Qualitativo).
- As órbitas planetárias não são estritamente elípticas! Perturbações: a precessão de Mercúrio. (Qualitativo).
- Forças de maré na gravitação newtoniana.
- A incompatibilidade entre a Lei da Gravitação Universal e a TRR.

## Bloco 3 - Teoria da Relatividade Geral (TRG)

- O Princípio da Equivalência com diferentes formulações. O peso como força fictícia.
- Alice e o túnel através do centro da Terra.
- A deflexão da luz em um campo gravitacional. A precessão de Mercúrio (qualitativo)
- O efeito Doppler em um campo gravitacional.
- O disco girante.
- A geometrização do espaço-tempo: curvatura, geodésicas.
- O Princípio da Equivalência e a métrica de Schwarzschild.
- O deslocamento para o vermelho e a a métrica de Schwarzschild.
- As estrelas negras de Mitchell e Laplace. Buracos negros: conceito, tipos de buracos negros.
- O Buraco negro de Schwarzschild. Astronauta em queda-livre em direção ao buraco negro. Dentro do buraco negro. A métrica de Painlevé-Gullstrand.
- Buracos negros girantes. (Qualitativo).
- As evidências observacionais em favor da TRG. A primeira imagem de um buraco negro.

# Referências Bibliográficas

- [1] ACEVEDO, O.A.; MORAIS, E.M. de; PIMENTEL, B.M.. O Princípio de Equivalência. Revista Brasileira de Ensino de Física, [S.L.], v. 41, n. 3, p. 1-17, 2019. FapUNIFESP (SciELO). <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2018-0329>.
- [2] ALLDAY, Jonathan. Space-time: an introduction to einstein's theory of gravity. Broken Sound Parkway Nw: Crc Press Taylor & Francis Group, 2019. 353 p.
- [3] ARONS, Arnold B.. Teaching Introductory Physics. S.L: John Wiley & Sons, 1996. 824 p.
- [4] BALDY, Elise. A New Educational Perspective for Teaching Gravity. International Journal Of Science Education, [S.L.], v. 29, n. 14, p. 1767-1788, 5 nov. 2007. Informa UK Limited.<http://dx.doi.org/10.1080/09500690601083367>.
- [5] BANDYOPADHYAY, Atanu; KUMAR, Arvind. Probing students' understanding of some conceptual themes in general relativity. Physical Review Special Topics - Physics Education Research, [S.L.], v. 6, n. 2, p. 1-14, 28 jul. 2010a. American Physical Society (APS).
- [6] BANDYOPADHYAY, Atanu; KUMAR, Arvind. Probing students' ideas of the principle of equivalence. European Journal Of Physics, [S.L.], v. 32, n. 1, p. 139-159, 30 nov. 2010b. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/32/1/013>.
- [7] BARDIN, Laurence. Análise de Conteúdo. Lisboa: Edições 70, 1977. 225 p. Tradução de Luís Antero Reta e Augusto Pinheiro.
- [8] BLOCH, Marc Leopold Benjamin. APOLOGIA DA HISTÓRIA: ou o ofício de historiador. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 2001. 161 p. Tradução: André Telles.
- [9] CARAGEORGE, Edward Cespedes. Uma proposta de sequência didática para ensino da relatividade geral no ensino médio. 2020. 204 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

- [10] CHOUDHARY, Rahul; KRAUS, Ute; KERSTING, Magdalena; BLAIR, David; ZAHN, Corvin; ZADNIK, Marjan; MEAGHER, Richard. Einsteinian Physics in the Classroom: integrating physical and digital learning resources in the context of an international research collaboration. *The Physics Educator*, [S.L.], v. 01, n. 04, p. 1950016, dez. 2019. World Scientific Pub Co Pte Lt. <http://dx.doi.org/10.1142/s2661339519500161>.
- [11] COLLIER, Peter. *A Most Incomprehensible Thing:: notes towards a very gentle introduction to the mathematics of relativity*. 3. ed. S.L: Incomprehensible Books, 2019. 274 p.
- [12] CRISPINO, Luís C. B.; KENNEFICK, Daniel J.. A hundred years of the first experimental test of general relativity. *Nature Physics*, [S.L.], v. 15, n. 5, p. 416-419, maio 2019. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1038/s41567-019-0519-3>.
- [13] D'INVERNO, Ray. *Introducing Einstein's Relativity*. S.L: Oxford University Press, 1992. 383 p.
- [14] EARMAN, John; GLYMOUR, Clark. Lost in the tensors: einstein's struggles with covariance principles 19121916. *Studies In History And Philosophy Of Science Part A*, [S.L.], v. 9, n. 4, p. 251-278, dez. 1978. Elsevier BV. [http://dx.doi.org/10.1016/0039-3681\(78\)90008-0](http://dx.doi.org/10.1016/0039-3681(78)90008-0).
- [15] EFFING, Rev. Myron. Squashed space: an activity concerning general relativity. *The Physics Teacher*, [S.L.], v. 15, n. 5, p. 298-299, maio 1977. American Association of Physics Teachers (AAPT). <http://dx.doi.org/10.1119/1.2339638>.
- [16] EINSTEIN, Albert. Die feldgleichungen der gravitation (As equações de campo da gravitação). *Sitzungsberichte Der Preussischen Akademie Der Wissenschaften* (Atas da Academia Prussiana das Ciências), Berlin, v. 2, p. 844-847, 25 nov. 1915. Uma tradução de Irene Brito para o português pode ser obtida em “Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, v. 73, pp. 127 144. 2015.”.
- [17] EINSTEIN, Albert. *A teoria da relatividade especial e geral*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1999. 136 p. Tradução do original alemão Carlos Almeida Pereira.
- [18] FLEISCH, Daniel A.. *A Student's Guide to Vectors and Tensors*. New York: Cambridge University Press, 2012.
- [19] FOSTER, James; NIGHTINGALE, J. David. *A Short Course in General Relativity*. 3. ed. New York: Springer, 2006. 292 p.
- [20] FRANCISQUINI, Mariana Faria Brito. O Ensino de Física no Brasil na Reforma Capanema por meio dos seus livros didáticos: uma análise didático-histórica.

2019. 279 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.
- [21] FRANCO, Maria Laura Puglisi Barbosa. Análise de Conteúdo. 2. ed. Brasília: Liber Livro, 2005. 79 p.
- [22] FRAZZOLI, Jean Feital Frazzoli. Astrofísica de estrelas compactas como atividade suplementar no ensino médio. 2012. 113 f. Dissertação - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.
- [23] GOULD, Roy R.. Why does a ball fall?: a new visualization for einstein's model of gravity. American Journal Of Physics, [S.L.], v. 84, n. 5, p. 396-402, maio 2016. American Association of Physics Teachers (AAPT). <http://dx.doi.org/10.1119/1.4939927>.
- [24] GREENE, Brian. Until the End of Time:: mind, matter, and our search for meaning in an evolving universe. S.L., 2020. 752 p.
- [25] GRIFFITHS, David J.. Introduction to Electrodynamics. 3. ed. Upper Saddle River: Pearson Prentice-Hall, 1999. 576 p.
- [26] GUERRA, Andreia; BRAGA, Marco; REIS, José Cláudio. Teoria da relatividade restrita e geral no programa de mecânica do ensino médio: uma possível abordagem. Revista Brasileira de Ensino de Física, [S.L.], v. 29, n. 4, p. 575-583, 2007. FapUNIFESP (SciELO). <http://dx.doi.org/10.1590/s0102-47442007000400016>.
- [27] HARTLE, James B.. Gravity: an introduction to einstein's general relativity. San Francisco: Addison Wesley, 2003. 582 p.
- [28] HERDEIRO, Carlos A. R.; LEMOS, José P. S.. The black hole fifty years after:: genesis of the name. Genesis of the name. 2018. Disponível em: arXiv:1811.06587. Acesso em: 4 jul. 2021.
- [29] HIBBEKER, R. C.. Dynamics. 12. ed. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2010. 732 p.
- [30] JANIS, Allen I.. On Mass, Spacetime Curvature, and Gravity. The Physics Teacher, [S.L.], v. 56, n. 1, p. 12-13, jan. 2018. American Association of Physics Teachers (AAPT). <http://dx.doi.org/10.1119/1.5018679>.
- [31] JUNIUS, Premalatha. A case example of insect gymnastics: how is non-euclidean geometry learned?. International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology, [S.L.], v. 39, n. 8, p. 987-1002, 16 out. 2008. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.1080/00207390802136529>.

- [32] KAUR, Tejinder; BLAIR, David; MOSCHILLA, John; STANNARD, Warren; ZADNIK, Marjan. Teaching Einsteinian physics at schools: part 1, models and analogies for relativity. *Physics Education*, [S.L.], v. 52, n. 6, p. 065012, 22 set. 2017a. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6552/aa83e4>.
- [33] KAUR, Tejinder; BLAIR, David; MOSCHILLA, John; ZADNIK, Marjan. Teaching Einsteinian physics at schools: part 2, models and analogies for quantum physics. *Physics Education*, [S.L.], v. 52, n. 6, p. 065013, 22 set. 2017b. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6552/aa83e1>.
- [34] KAUR, Tejinder; BLAIR, David; MOSCHILLA, John; STANNARD, Warren; ZADNIK, Marjan. Teaching Einsteinian physics at schools: part 3, review of research outcomes. *Physics Education*, [S.L.], v. 52, n. 6, p. 065014, 22 set. 2017c. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6552/aa83dd>.
- [35] KERSTING, Magdalena; STEIER, Rolf. Understanding Curved Spacetime. *Science & Education*, [S.L.], v. 27, n. 7-8, p. 593-623, 17 set. 2018. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1007/s11191-018-9997-4>.
- [36] KERSTING, Magdalena; HENRIKSEN, Ellen Karoline; BØE, Maria Vetlester; ANGELL, Carl. General relativity in upper secondary school: design and evaluation of an online learning environment using the model of educational reconstruction. *Physical Review Physics Education Research*, [S.L.], v. 14, n. 1, p. 1-18, 25 maio 2018. American Physical Society (APS). <http://dx.doi.org/10.1103/physrevphyseducres.14.010130>.
- [37] KERSTING, Magdalena; TOELLNER, Richard; BLAIR, David; BURMAN, Ron. Gravity and warped time—clarifying conceptual confusions in general relativity. *Physics Education*, [S.L.], v. 55, n. 1, p. 015023, 4 dez. 2019. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6552/ab56d7>.
- [38] KERSTING, Magdalena; TOELLNER, Richard; BLAIR, David; BURMAN, Ron. Gravity and warped time—clarifying conceptual confusions in general relativity. *Physics Education*, [S.L.], v. 55, n. 1, p. 015023, 4 dez. 2019. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6552/ab56d7>.
- [39] KERSTING, Magdalena. Free fall in curved spacetime—how to visualise gravity in general relativity. *Physics Education*, [S.L.], v. 54, n. 3, p. 035008, 19 mar. 2019. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6552/ab08f5>.
- [40] KERSTING, Magdalena. How History and Philosophy of Science Can Inform Teaching and Learning of General Relativity in Upper Secondary School. 2020.

- Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/342122841\\_How\\_History\\_and\\_Philosophy\\_of\\_Science\\_Can\\_Inform\\_Teaching\\_and\\_Learning\\_of\\_General\\_Relativity\\_in\\_Upper\\_Secondary\\_School](https://www.researchgate.net/publication/342122841_How_History_and_Philosophy_of_Science_Can_Inform_Teaching_and_Learning_of_General_Relativity_in_Upper_Secondary_School). Acesso em: 4 jul. 2021.
- [41] KERSTING, Magdalena; BLAIR, David. Teaching Einsteinian Physics in Schools:: an essential guide for teachers in training and practice. London And New York: Routledge, 2021. 424 p.
- [42] KIOURANIS, Neide Maria Michellan; SOUZA, Aguinaldo Robinson de; SANTIN FILHO, Ourides. Experimentos mentais e suas potencialidades didáticas. Revista Brasileira de Ensino de Física, [S.L.], v. 32, n. 1, p. 1507-1510, mar. 2010. FapUNIFESP (SciELO). <http://dx.doi.org/10.1590/s1806-11172010000100019>.
- [43] KNEUBIL, Fabiana Botelho. E=MC2 E O MUNDO DA MATÉRIA. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2022. 103 p.
- [44] LEMOS, Nivaldo A.. E=mc2 : Origem e Significado. Revista Brasileira de Ensino de Física, [s. l.], v. 23, n. 1, p. 3-9, mar. 2001.
- [45] MACHADO, Rodrigo Rodrigues. Uma introdução aos ciclos térmicos quânticos, à termodinâmica de buracos negros e às temperaturas absolutas negativas. 2016. 125 f. Dissertação - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.
- [46] MACHADO, R. R.; TORT, A. C.. Michell, Laplace e as estrelas negras: uma abordagem para professores do ensino médio. Revista Brasileira de Ensino de Física, [S.L.], v. 38, n. 2, p. 1-8, jun. 2016. FapUNIFESP (SciELO). <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2016-0017>.
- [47] MACHADO, R. R.; TORT, A. C.; ZARRO, C. A. D.. Squashing and spaghettiification in Newtonian gravitation. Revista Brasileira de Ensino de Física, [S.L.], v. 42, p. 1-7, 2020. FapUNIFESP (SciELO). <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2020-0278>.
- [48] MACHADO, Rodrigo Rodrigues; TORT, Alexandre Carlos; ZARRO, Carlos Augusto Domingues. O princípio da equivalência: Uma introdução à relatividade geral. A Física na Escola, S.L., v. 19, n. 2, p. 1-12, maio 2021.
- [49] MACHADO, Rodrigo Rodrigues; TORT, Alexandre Carlos; ZARRO, Carlos Augusto Domingues. Avanço do periélio de Mercúrio. A Física na Escola, [S.L.], v. 22, p. 230041, 24 maio 2024. Sociedade Brasileira de Física. <http://dx.doi.org/10.59727/fne.v22i1.41>.

- [50] MCDERMOTT, Lillian C. Guest Comment: how we teach and how students learn: a mismatch?. American Journal Of Physics, [S.L.], v. 61, n. 4, p. 295-298, abr. 1993. American Association of Physics Teachers (AAPT). <http://dx.doi.org/10.1119/1.17258>.
- [51] MISNER, Charles W.; THORNE, Kip S.; WHEELER, John Archibald. Gravitation. S.L: W. H. Freeman And Company, 1973. 1279 p.
- [52] MORAES, Roque. ANÁLISE DE CONTEÚDO. Revista Educação, Porto Alegre,, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.
- [53] NATÁRIO, José. General Relativity Without Calculus: a concise introduction to the geometry of relativity. S.L: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. 128 p.
- [54] NEWTON, Isaac. Principia: princípios matemáticos de filosofia natural livro i. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2016. 325 p. Tradução de: Trieste Ricci, Leonardo Gregory Brunet, Sônia Terezinha Gehring, Maria Helena Curcio Célia.
- [55] NETO, Artur Alberto G.. Teoria da Relatividade Geral: uma proposta em Ensino não formal. 2020. 146 f. Dissertação - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.
- [56] NUSSENZVEIG, H. Moysés. Curso de Física Básica 1: mecânica. 4. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2002.
- [57] OHANIAN, Hans C.; RUFFINI, Remo. Gravitation and Spacetime. 3. ed. S.L: Cambridge University Press, 2013. 503 p.
- [58] OSTERMANN, Fernanda; MOREIRA, Marco Antonio. UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE A ÁREA DE PESQUISA “FÍSICA MODERNA E CONTEMPORÂNEA NO ENSINO MÉDIO”. Investigações em Ensino de Ciências, S.L., v. 5, n. 1, p. 23-48, mar. 2000.
- [59] OSTERMANN, Fernanda; RICCI, Trieste F.. RELATIVIDADE RESTRITA NO ENSINO MÉDIO: CONTRAÇÃO DE LORENTZ-FITZGERALD E APARÊNCIA VISUAL DE OBJETOS RELATIVÍSTICOS EM LIVROS DIDÁTICOS DE FÍSICA. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, S.L., v. 19, n. 2, p. 176-190, ago. 2002.
- [60] PAIS, Abraham. Subtle is the Lord ...: the science and the life of albert einstein. Great Britain: Oxford University Press, 2005. 552 p.
- [61] PÖSSEL, Markus. Relatively complicated?: using models to teach general relativity at different levels. Using models to teach general relativity at different levels. 2018. Disponível em:<https://arxiv.org/abs/1812.11589>. Acesso em: 4 jul. 2021.

- [62] PRICE, Richard H.. Spatial curvature, spacetime curvature, and gravity. American Journal Of Physics, [S.L.], v. 84, n. 8, p. 588-592, ago. 2016. American Association of Physics Teachers (AAPT). <http://dx.doi.org/10.1119/1.4955154>.
- [63] RĘBILAS, Krzysztof. Comment on “Why does a ball fall?: a new visualization for einstein’s model of gravity” [am. j. phys. 84, 396402 (2016)]. American Journal Of Physics, [S.L.], v. 85, n. 1, p. 66-67, jan. 2017. American Association of Physics Teachers (AAPT). <http://dx.doi.org/10.1119/1.4972045>.
- [64] SALINAS, Silvio R.A.. Apresentação: cem anos da observação do eclipse solar de Sobral. Revista Brasileira de Ensino de Física, [S.L.], v. 41, n. 1, p. 1-2, 2019. FapUNIFESP (SciELO). <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2019-0272>.
- [65] SARTORI, Leo. Understanding Relativity: a simplified approach to einstein’s theories. Berkeley, Los Angeles, London: University Of California Press, 1996.
- [66] SCHWARZSCHILD, Karl. On the gravitational field of a mass point according to Einstein’s theory. 1916. Translation and foreword by S.Antoci and A.Loinger May 1999. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/physics/9905030>. Acesso em: 4 jul. 2021.
- [67] SOUZA, Maira Giovana de; SERRANO, Agostinho. Resenha – Teaching Einsteinian physics in schools: an essential guide for teachers in training and practice de magdalena kersting e david blair. Revista Brasileira de Ensino de Física, [S.L.], v. 45, p. 1-3, 2023. FapUNIFESP (SciELO). <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2022-0250>.
- [68] STANNARD, Warren; BLAIR, David; ZADNIK, Marjan; KAUR, Tejinder. Why did the apple fall? A new model to explain Einstein’s gravity. European Journal Of Physics, [S.L.], v. 38, n. 1, p. 015603, 2 nov. 2016. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/38/1/015603>.
- [69] SYMON, Keith R.. Mechanics. 3. ed. Massachusetts: Addison-Wesley, 1971. 639 p.
- [70] TAYLOR, Edwin F.; WHEELER, John Archibald. Spacetime Physics: introduction to special relativity. New York: W . H. Freeman And Company, 1992. 312 p.
- [71] TAYLOR, Edwin F.; WHEELER, John Archibald; BERTSCHINGER, Edmund. EXPLORING BLACK HOLES: introduction to general relativity. 2. ed, 2018. Disponível em: <https://www.eftaylor.com/exploringblackholes/>. Acesso em: 26 jun. 2021.

- [72] TAYLOR, John; ZAFIRATOS, Chris; DUBSON, Michael. Modern Physics for Scientists and Engineers. 2. ed. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2004. 720 p.
- [73] The Event Horizon Telescope Collaboration et al. FIRST M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, [s. l], v. 875, n. 1, p. 1-17, 10 abr. 2019.
- [74] VELENTZAS, Athanasios; HALKIA, Krystallia. The Use of Thought Experiments in Teaching Physics to Upper Secondary-Level Students: two examples from the theory of relativity. *International Journal Of Science Education*, [S.L.], v. 35, n. 18, p. 3026-3049, dez. 2013. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.1080/09500693.2012.682182>.
- [75] VIDEIRA, Antonio Augusto Passos; FRANCISQUINI, Mariana Faria Brito. A instituição da “Física de Partículas Elementares” como disciplina científica e sua relação com a formação de professores. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, [S.L.], v. 35, n. 1, p. 81-96, 25 abr. 2018. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). <http://dx.doi.org/10.5007/2175-7941.2018v35n1p81>.
- [76] WATKINS, Tiffany Rae. GRAVITY & EINSTEIN: ASSESSING THE RUBBER SHEET ANALOGY IN UNDERGRADUATE CONCEPTUAL PHYSICS. 2014. 82 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Master Of Science In S.T.e.M. Education, Boise State University, S.L, 2104.
- [77] WEINBERG, Steven. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1972. 657 p.
- [78] WOOD, Monika; SMITH, Warren; JACKSON, Matthew. Curvature of space-time: a simple student activity. *The Physics Teacher*, [S.L.], v. 54, n. 9, p. 572-573, dez. 2016. American Association of Physics Teachers (AAPT). <http://dx.doi.org/10.1119/1.4967905>.
- [79] ZAGO, Letícia. SITUAÇÕES DIDÁTICAS NO ENSINO DA RELATIVIDADE GERAL: ANÁLISE DO ENGAJAMENTO DOS ALUNOS. 2018. 215 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Interunidades em Ensino de Ciências, Faculdade de Educação, Instituto de Física, Instituto de Química e Instituto de Biociências, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.
- [80] ZAHN, Corvin; KRAUS, Ute. Sector models—A toolkit for teaching general relativity: i. curved spaces and spacetimes. *European Journal Of Physics*, [S.L.], v. 35, n. 5, p. 055020, 31 jul. 2014. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/35/5/055020>.

- [81] ZAHN, C; KRAUS, U. Sector models—a toolkit for teaching general relativity: ii. geodesics. *European Journal Of Physics*, [S.L.], v. 40, n. 1, p. 015601, 23 nov. 2018. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6404/aae3b7>.
- [82] ZAHN, C; KRAUS, U. Sector models—a toolkit for teaching general relativity: iii. spacetime geodesics. *European Journal Of Physics*, [S.L.], v. 40, n. 1, p. 015602, 23 nov. 2018. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6404/aae3b5>.
- [83] ZEE, A.. Einstein gravity in a nutshell. New Jersey: Princeton University Press, 2013. 866 p.