



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM/UFRJ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA
E DA FÍSICA

Magno Luiz Ferreira

**JJ SYLVESTER E A COMUNIDADE FORMADA
ATRAVÉS DO DESENVOLVIMENTO DA TEORIA
DOS INVARIANTES**

Rio de Janeiro
Novembro de 2023

Magno Luiz Ferreira

JJ SYLVESTER E A COMUNIDADE FORMADA ATRAVÉS
DO DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DOS INVARIANTES

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Ensino e História da Matemática e da Física, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Prof. Dr. Gérard Emile Grimberg
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Coorientador: Prof. Dr. Prof. Dr. Frédéric Brechenmacher
École Polytechnique

Rio de Janeiro
Novembro de 2023

CIP - Catalogação na Publicação

F383j Ferreira, Magno Luiz
JJ SYLVESTER E A COMUNIDADE FORMADA ATRAVÉS DO
DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DOS INVARIANTES / Magno
Luiz Ferreira. -- Rio de Janeiro, 2023.
484 f.

Orientador: Gérard Émile Grimberg.
Coorientador: Frédéric Brechenmacher.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio
de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós
Graduação em Ensino de Matemática, 2023.

1. James Joseph Sylvester. 2. Teoria dos
Invariantes. 3. Comunidades de Práticas. 4.
Polinômios Homogêneos. I. Grimberg, Gérard Émile,
orient. II. Brechenmacher, Frédéric , coorient.
III. Título.

Magno Luiz Ferreira

**JJ SYLVESTER E A COMUNIDADE FORMADA ATRAVÉS DO
DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DOS INVARIANTES**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Ensino e História da Matemática e da Física, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ensino de Matemática.

Aprovada em 16 de Novembro de 2023

Assinaturas dispensadas, resolução CEPG/UFRJ N^o 128, de 11/11/2022.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Gérard Emile Grimberg
Orientador/PEMAT IM-UFRJ

Prof. Dr. Frédéric Brechenmacher
Co-Orientador/LinX-École Polytechnique

Prof. Dr. Thiago Hartz Maia
PEMAT IM-UFRJ

**Prof. Dr. Rogério Monteiro de
Siqueira**
USP

**Prof. Dr. Cleber Haubrachs dos
Santos**
IFRJ - Campus Nilópolis

Dedico este trabalho à minha família. Cada membro tem um motivo especial para estar aqui. Meu pai é o maior incentivador que tive em toda minha vida; minha mãe sempre dedicou todos os esforços pelo meu melhor; minha esposa, que sempre esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis desta caminhada; e minha filha, meu grande orgulho. Esta tese tão minha, quanto deles.

AGRADECIMENTOS

Depois de um longo trabalho e de tantas dificuldades que se apresentaram no caminho, várias pessoas se tornaram importantes nos diversos momentos que formaram o processo de concepção desta tese. Agradeço a Deus, pela vida que me permitiu chegar até aqui e a todas essas pessoas, sem as quais eu não teria conseguido.

Aos meus pais, **Laerte Luiz Ferreira** e **Florentina Caneca Ferreira**, por todo cuidado e apoio que sempre manifestaram por mim.

À minha esposa e à minha filha, **Sabrina Andrade da Silva Bello Ferreira** e **Ísis Helena Andrade Bello Ferreira**, pelo apoio e pela paciência que tiveram nos momentos em que estive ausente por conta dos trabalhos com a pesquisa.

Ao meu orientador, **Gérard Emile Grimberg**, pelos vários conselhos, ensinamentos e por me proporcionar uma nova perspectiva sobre a pesquisa em História da Matemática. *Merci Beaucoup!*

Ao meu coorientador, **Frédéric Brechenmacher**, pelas ideias que enriqueceram o trabalho de pesquisa e pela paciência ao longo de nossas reuniões. *Merci Beaucoup!*

Aos membros da banca, por terem aceitado participar da defesa e pelas contribuições para a redação desta tese.

Ao grupo de pesquisa sobre geometria do XIX, liderado pelo professor **Gérard Emile Grimberg**. Aos membros **Chaves, Leandro, Daniel, Ana Clara, João Victor, Jonathan, Lucas** e **Robson**. Muito obrigado a todos pelo acolhimento

Aos amigos **Chaves, Leandro** e **Diego**, pelas animadas conversas em um momento em que eu precisava muito de apoio para o trabalho.

Aos amigos do programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (**PEMAT**), muito obrigado pela convivência e pelas trocas de ideias. Aos professores do programa, que contribuíram na minha formação. Aos colegas e professores do seminário da linha de História da Matemática, pelas frutíferas discussões e conversas.

Ao **Instituto Federal do Rio de Janeiro**, pela permissão de licença para escrever esta tese. Em particular, à **equipe de matemática do Campus Volta Redonda**, pela pronta liberação para meu afastamento.

Aos amigos, **Joicy, Reinaldo, Tiago** e **Larissa**, pela convivência na época da

pandemia.

Por fim, à psicóloga **Nívea Lopes**, pelo auxílio para lidar com minhas dúvidas e inseguranças. Muito obrigado por tudo.

RESUMO

Esta tese se concentra nos contextos que acompanharam o desenvolvimento da obra de James Joseph Sylvester (1814 - 1897) em um período de consolidação da pesquisa britânica em matemática. Esse período se inicia em 1837, ano de fundação do primeiro jornal especializado na área, o *Cambridge Mathematical Journal* (CMJ), e vai até o surgimento da London Mathematical Society (LMS) em 1865. Investigamos a atuação do matemático através dos seguintes aspectos: as práticas e conceitos chave elaborados por ele ao longo do período investigado; a relação que estas práticas tiveram com publicações de outros autores britânicos, bem como a forma como foram recebidas no continente; além dos desdobramentos que contribuíram para transformar nosso personagem de pesquisa em um dos pilares da formação do chamamos de *Comunidade Britânica dos Invariantes*. A seleção do corpus de textos ocorreu após uma análise prévia da obra de Sylvester, onde identificamos seis temáticas fundamentais: Teoria de Eliminação, Locus de Curvas e Superfícies Algébricas, Problemas de Contatos, Transformações Lineares, Redução de Polinômios e Movimentos de Rotação. A organização dos artigos foi realizada com a metodologia de redes de textos, as quais foram estabelecidas a partir de critérios distintos que nos permitiram elucidar os aspectos citados. As redes de interações nos mostraram o modo como os autores britânicos se relacionaram através de seus interesses sobre temas associados à *Teoria dos Invariantes*; as redes temáticas revelam como os conceitos chave se articularam entre as publicações; e as redes de divulgação/recepção evidenciaram o modo como as práticas britânicas foram difundidas no continente europeu e trouxeram credibilidade ao estilo de produção de conhecimento matemático do Reino Unido em meados do século XIX. A partir dessas organizações, foi possível destacar a visão geométrica compartilhada nas práticas sobre os *invariantes* e compreender o papel de cada um dos autores, que se relacionaram com a obra de Sylvester, na formação da *Comunidade Britânica dos Invariantes*. Nesse contexto, revelamos a influência da obra de Julius Plücker (1801 - 1868), além de desdobramentos que trouxeram credibilidade ao matemático, frente a outros centros, como no caso da Lei de Inércia para formas quadráticas e sua contribuição definitiva para o problema sobre a natureza das raízes de um polinômio de grau dois, que é associado ao problema da *Equação Secular*. Também destacamos a difusão da *Teoria dos Invariantes* em livros-textos que trataram do tema de forma didática, como nos livros de álgebra moderna publicados por George Salmon (1819 - 1904) em quatro edições até 1885. Entendemos que essas análises representam mais uma contribuição para investigações sobre história da matemática no século XIX.

Palavras-chave: James Joseph Sylvester. Teoria dos Invariantes. Comunidades de Práticas. Polinômios Homogêneos.

ABSTRACT

This thesis focuses on the contexts that accompanied the development of the work of James Joseph Sylvester (1814 - 1897) in a period of consolidation of British research in mathematics. This period begins in 1837, the year in which the first specialized journal in the field was founded, *Cambridge Mathematical Journal* (CMJ), and continues until the emergence of the London Mathematical Society (LMS) in 1865. We investigated the mathematician's performance through the following aspects: the key practices and concepts developed by him throughout the period investigated; the relationship these practices had with publications by other British authors, as well as the way they were received on the continent; in addition to the developments that contributed to transforming our research character into one of the pillars of the formation of what we call *British Community of Invariants*. The selection of the corpus of texts occurred after a prior analysis of Sylvester's work, where we identified six fundamental themes: Elimination Theory, Locus of Algebraic Curves and Surfaces, Contact Problems, Linear Transformations, Polynomial Reduction and Rotation Movements. The organization of the articles was carried out using the text network methodology, which were established based on different criteria that allowed us to elucidate the aspects mentioned. The networks of interactions showed us how British authors related to each other through their interests in topics associated with *Theory of Invariants*; thematic networks reveal how key concepts were articulated between publications; and the dissemination/reception networks highlighted the way in which British practices were disseminated on the European continent and brought credibility to the United Kingdom's style of mathematical knowledge production in the mid-19th century. From these organizations, it was possible to highlight the geometric vision shared in practices on *invariants* and understand the role of each of the authors, who were related to Sylvester's work, in the formation of the *British Community of Invariants*. In this context, we reveal the influence of the work of Julius Plücker (1801 - 1868), in addition to developments that brought credibility to the mathematician, compared to other centers, as in the case of the Law of Inertia for quadratic forms and its definitive contribution to the problem of nature of the roots of a polynomial of degree two, which is associated with the *Secular Equation* problem. We also highlight the diffusion of *Theory of Invariants* in textbooks that dealt with the topic in a didactic way, such as in the modern algebra books published by George Salmon (1819 - 1904) in four editions until 1885. We understand that these analyzes represent more a contribution to investigations into the history of mathematics in the 19th century.

Keywords: James Joseph Sylvester. Invariant Theory. Communities of Practice. Homogeneous Polynomials.

LISTA DE FIGURAS

1	James Joseph Sylvester por volta de 1840	49
2	Universidade de Cambridge	51
3	Localização do St. John's College	52
4	Irenée-Jules Bienaymé	78
5	Carl Wilhelm Borchardt	80
6	James Joseph Sylvester por volta de 1888	88
7	Construção de Clairaut	97
8	Teoria de Eliminação na Obra de Sylvester	110
9	Cônica Projetiva: Considerando o plano projetivo, as soluções da equação U geram o cone destacado na figura. Tomando a carta afim $\zeta = 1$, temos a cônica no plano afim	114
10	Tipos de Intersecção: As cônicas podem se cruzar em pontos reais ou imaginários. Nesta imagem temos a intersecção real, mista ou imaginária. 115	
11	Cônicas Degeneradas: Para cada raiz (R_1, R_2 e R_3) do <i>discriminante</i> temos um par de retas do quadrângulo.	117
12	Regiões sobre a natureza das cônicas	121
13	Generalização do problema de eliminação através da interpretação dos contatos das cônicas	126
14	Conexões entre os problemas de contato	132
15	Conexões entre as investigações sobre transformações	151
16	Modelo para descrição do movimento de rotação	166
17	Conexões entre as investigações sobre rotação	167
18	As abordagens sobre a equação que ajuda no problema das desigualdades seculares	168
19	Representação das Linhas Temporais Fase 1	189
20	Projeção das Linhas Temporais Fase 1	190
21	Rede de Interações Fase 1	195
22	Rede de Interações Fase 2	204
23	Principais Interações Internacionais	208
24	Rede de Interações - Fase 3	216
25	Rede de Eliminação	228
26	Rede de Locus de Curvas e Superfícies	243
27	Rede de Contatos	259
28	Rede de transformações	283
29	Rede de Redução	288
30	Rede de Movimentos de Rotação	294

31	Assuntos tratados pela <i>Comunidade britânica dos Invariantes</i> no <i>Jornal do Crelle</i>	320
32	A <i>Comunidade Britânica dos Invariantes</i> nos jornais franceses	324
33	As ideias que circularam nos artigos selecionados dos jornais franceses	343
34	As ideias que circularam nos artigos selecionados do <i>Jornal do Crelle</i> .	360

LISTA DE TABELAS

1	Artigos que lidaram com eliminação	101
2	Artigos que lidaram com práticas geométricas	112
3	Artigos que tratam de transformações	134
4	Artigos que tratam de rotação	157
5	Distribuição dos autores no CMJ	193
6	Fase 1 da Comunidade de Práticas nos jornais britânicos	194
7	Distribuição dos autores no CDMJ	200
8	Fase 2 da Comunidade de práticas nos jornais britânicos	203
9	Distribuição dos autores no QJPAM	212
10	Fase 3 da Comunidade de práticas nos jornais britânicos	214

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AJM	American Journal of Mathematics
BAAS	British Association for the Advancement of Science
CMJ	Cambridge Mathematical Journal
CMDJ	Cambridge and Dublin Mathematical Journal
CPS	Cambridge Philosophical Society
LMS	London Mathematical Society
QJPAM	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics
RAS	Royal Astronomical Society
RIA	Royal Irish Academy
RSE	Royal Society of Edinburgh
RSL	Royal Society of London
SMF	Société Mathématique de France
UCL	University College of London

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Problemática da Tese	18
1.2	Sobre significados dos conceitos que utilizamos nesta tese	21
1.2.1	Sobre o uso do termo comunidade de práticas	22
1.2.2	Sobre os tipos de redes de textos	26
1.3	Revisão Bibliográfica	27
1.3.1	Biografia e Contexto sócio acadêmico	27
1.3.2	Pesquisas sobre a <i>Teoria dos Invariantes</i>	32
1.3.3	Um desdobramento da <i>Teoria dos Invariantes</i> : pesquisas sobre a Equação Secular	36
1.3.4	Sobre os Periódicos Especializados	39
1.4	Divisão dos Capítulos	44
2	O PROCESSO DE CONSTITUIÇÃO DE UMA COMUNIDADE DE PESQUISA EM MATEMÁTICA E A CARREIRA DE SYLVESTER	48
2.1	Parte 1: 1814 - 1837	49
2.1.1	A Formação Inicial de Sylvester	49
2.1.2	Entre os Muros de Cambridge.	51
2.1.3	O papel do matemático entre 1814 e 1837: da Analytical Society à necessidade de um periódico especializado	55
2.2	Parte 2: 1837 – 1855	60
2.2.1	UCL, Virgínia e o Atuário: a trajetória inicial de um matemático	60
2.2.2	O desenvolvimento da <i>Teoria dos Invariantes</i>	66
2.2.3	Organizando uma rede de interesses no entorno da <i>Teoria dos Invariantes</i>	76
2.3	Parte 3: 1855 - 1865	81
2.3.1	O surgimento do <i>The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics</i> (QJPAM)	81
2.3.2	O surgimento da London Mathematical Society	83
	Conclusão	85
3	PRÁTICAS DIFUNDIDAS POR SYLVESTER NO DESENVOLVIMENTO DA <i>TEORIA DOS INVARIANTES</i>	89
3.1	A matemática Britânica na primeira metade do Século XIX	90
3.2	Teoria de Eliminação	101

3.3	Problemas de Contato	111
3.4	Transformações Lineares	134
3.5	Rotações	157
	Conclusão	169
4	A COMUNIDADE DE PRÁTICAS: PERSONAGENS NO ENTORNO DA <i>TEORIA DOS INVARIANTES</i>	173
4.1	Os periódicos não especializados que lidaram com matemática: características gerais	176
4.1.1	As <i>Philosophical Transactions</i> das Sociedades científicas	176
4.1.2	O Jornal Sociedade Astronômica e o Relatório da Associação Britânica para o Avanço da Ciência.	178
4.2	Os periódicos especializados na Inglaterra	180
4.3	Os autores base da <i>Comunidade britânica dos Invariantes</i>	184
4.4	Sobre a construção das redes de interações	188
4.5	Fase 1: 1837-1845.	192
4.6	Fase 2: 1845-1855.	199
4.7	Fase 3: 1855-1865.	211
	Conclusão	218
5	A COMUNIDADE DE PRÁTICAS: TÉCNICAS, IDEIAS E CONCEITOS COMPARTILHADOS	222
5.1	Sobre a construção das redes temáticas	223
5.2	Teoria de Eliminação	224
5.3	Locus de Curvas e Superfícies Algébricas	230
5.4	Problemas de Contato	245
5.5	Transformações Lineares	260
5.6	Redução de Polinômios Homogêneos à Soma de Quadrados Positivos e Negativos	284
5.7	Movimentos de Rotação.	289
	Conclusão	295
6	A RECEPÇÃO NO CONTINENTE E UM DESDOBRAMENTO EMBLEMÁTICO	300
6.1	Sobre a construção das redes de divulgação/recepção	301
6.2	Os matemáticos do continente, relevantes para a <i>Comunidade britânica dos Invariantes</i>	302
6.3	Os Trabalhos da <i>Comunidade britânica dos Invariantes</i> nos Jornais do Continente	308
6.3.1	A <i>Comunidade britânica dos Invariantes</i> no <i>Jornal do Crelle</i>	308

6.3.2	A <i>Comunidade britânica dos Invariantes</i> nos jornais franceses	322
6.4	A repercussão nos jornais franceses: Os casos do <i>Journal de Mathématiques Pures et Appliquées</i> e do <i>Nouvelles Annales des Mathématiques</i>	325
6.4.1	O <i>Jornal de Liouville</i>	326
6.4.2	O <i>Jornal de Terquem</i>	333
6.5	A repercussão nos jornais alemães: O caso do <i>Journal für die reine und angewandte Mathematik</i>	345
6.5.1	Desenvolvimento e convergência da <i>Teoria dos Invariantes</i>	349
6.6	Um desdobramento relevante: A Lei de Inércia e a <i>Equação Secular</i>	362
6.6.1	A relação entre movimentos de rotação e a <i>Comunidade britânica dos Invariantes</i> nos jornais britânicos	363
6.6.2	A relação entre a <i>Equação Secular</i> e a <i>Teoria dos Invariantes</i>	364
6.7	A <i>Teoria dos Invariantes</i> após 1865	372
	Conclusão	378
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	382
7.1	Sobre a estrutura da tese	382
7.2	Sobre as Redes de Textos	385
7.3	Sobre as práticas e os objetos comuns	389
7.4	Sobre a <i>Comunidade britânica dos Invariantes</i>	392
7.5	Respostas e o Futuro deste Trabalho	395
	Referências Bibliográficas	398

Apêndices

APÊNDICE A	PRODUÇÕES DOS AUTORES BRITÂNICOS E SUAS TEMÁTICAS	422
APÊNDICE B	CITAÇÕES DOS AUTORES BASE	445
APÊNDICE C	AUTORES INTERNACIONAIS	469

1 INTRODUÇÃO

A *Teoria dos Invariantes* foi um tema importante de pesquisa na matemática europeia na segunda metade do século XIX. Os matemáticos que mais participaram das pesquisas sobre esse assunto eram oriundos de países como os Estados Alemães, a França, a Itália e o Reino Unido. Tendo, entre seus protagonistas, nomes como: Alfred Clebsch (1833 – 1872), Arthur Cayley (1821 – 1895), Charles Hermite (1822 – 1901), David Hilbert (1862 - 1943), Francesco Brioschi (1824 – 1897), Francesco Faà di Bruno (1825 - 1888), George Boole (1815 - 1864), George Salmon (1819 – 1904), James Joseph Sylvester (1814 – 1897), Paul Gordan (1837 – 1912) e Siegfried Aronhold (1819 – 1884), essa Teoria foi percebida de diferentes maneiras até se mostrar como uma área específica proeminente do conhecimento matemático.

Desde um resultado particular sobre transformações lineares, passando pelos nomes "funções derivadas" e "funções críticas", até a expressão "teoria das formas binárias", presente em alguns livros-textos que trataram do assunto, os invariantes foram parte significativa dos estudos sobre formas algébricas associadas aos polinômios homogêneos.

Esta tese se concentra nos artigos que lidaram com esses objetos e se relacionaram com estudos que se associaram ao que receberia o nome de *Teoria dos Invariantes*, como os determinantes, contatos de curvas e superfícies, geometria em coordenadas homogêneas, resultantes, Teoria de Eliminação e a pesquisa sobre formas algébricas que permanecem inalteradas após transformações lineares.

Nesse contexto, é possível olhar para o papel das contribuições dos matemáticos envolvidos na disseminação do assunto. No caso dos britânicos, a necessidade de recolocar a matemática produzida no Reino Unido em sintonia com aquela produzida no continente gerou algumas iniciativas. De acordo com Durand-Richard e Paris (1999), a partir de 1810, eventos como o surgimento da Analytical Society, a fundação da Associação Britânica para o Avanço da Ciência, em 1831, e a criação do *Cambridge Mathematical Journal*, primeiro periódico especializado em matemática do país, em 1837, influenciaram instituições de ensino. As Universidades de Cambridge e Oxford passaram a discutir a introdução dos métodos analíticos utilizados no continente nos currículos de Matemática. Estes fatores nos fazem perceber que existiram movimentos que tentaram conectar o modo de produzir matemática no Reino Unido com as abordagens desenvolvidas no continente.

O foco principal desta tese está na discussão dos conceitos que surgem a partir da produção de um grupo específico de matemáticos britânicos, o qual se formou em

consonância com o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*¹. É importante destacar que, apesar de nos concentrarmos na obra de Sylvester como ponto de partida, nosso olhar está voltado para uma produção conjunta de significados que se materializa através das publicações da comunidade de que ele é parte. Em outras palavras, estamos propondo a utilização de uma nova lente historiográfica, que leva em consideração o contexto coletivo no qual o matemático esteve inserido. Como forma de organizar o trabalho de pesquisa, optamos por investigar três aspectos que norteiam este trabalho:

1. O processo de formação do pesquisador em matemática britânico na primeira metade do século XIX: a leitura da biografia e de pesquisas que contextualizam a vida de Sylvester mostram que as mudanças no ensino de matemática, que buscavam adequação aos métodos do continente, exerceram forte influência na formação deste profissional.
2. A evolução dos conceitos e ideias elaborados na obra do matemático: os conceitos chave da *Teoria dos Invariantes* revelam seu papel na atração de outros matemáticos do período, que se interessaram pela teoria e por suas ligações com outras áreas da pesquisa em matemática, em especial, a geometria e a mecânica.
3. O papel das revistas que publicaram matemática na formação de uma comunidade de práticas vinculada à obra de Sylvester na Era Vitoriana: os periódicos científicos exerceram forte influência na divulgação e na formação das ideias do grupo de matemáticos britânicos. Destacamos que nosso personagem de pesquisa se tornou editor do *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* (QJPAM), a partir de 1855.

Como pode ser visto, Sylvester é o personagem central da investigação proposta por esta tese. Esse fator se justifica por conta das motivações do matemático, que se formaram em consonância com as demandas por ampliação dos espaços especializados de publicação, por possibilidades de trabalhar exclusivamente com a pesquisa em matemática e por reconhecimento da matemática desenvolvida em solo britânico pelos pesquisadores do continente. Como veremos ao longo dos capítulos, existem episódios que mostram as dificuldades que ele teve para se estabelecer como um profissional que ganhasse a vida com matemática. Essa característica levou o inglês a delimitar a *Teoria dos Invariantes*, o que contribuiu para o surgimento de um conjunto de práticas que identificou o modo de produzir matemática no Reino Unido.

¹Do ponto de vista cronológico, a expressão *Teoria dos Invariantes* não foi sempre usada com estas palavras. Neste texto, optamos por utilizá-la devido ao fato de ser o nome pelo qual esta história é conhecida nos dias atuais.

1.1 Problemática da Tese

Em 1998 e 2006, Karen Parshall, escreveu duas biografias sobre Sylvester. Na primeira (PARSHALL, 1998), a autora se concentrou na leitura da correspondência que o matemático mantinha com outros personagens envolvidos na pesquisa matemática produzida em solo britânico e no continente. Na segunda (PARSHALL, 2006b), mais completa, a pesquisadora se dedicou a explorar os contextos sociais que trazem pano de fundo para o desenvolvimento da vida e da carreira do protagonista de seu trabalho biográfico.

Nesta tese, estamos interessados no conteúdo da obra do matemático britânico e em seus desdobramentos, através de uma perspectiva coletiva de suas produções. A expressão "Perspectiva Coletiva" se refere a uma mudança de olhar para a produção deste personagem, pois, de modo diverso à abordagem de suas biografias, nos dedicamos a investigar as relações das publicações do autor com as de outros pesquisadores da época.

Entre 1904 e 1912, Henry Frederick Baker (1866 - 1956) organizou a coleção dos artigos publicados por Sylvester ao longo de sua carreira. Nos concentramos nas temáticas que surgem a partir da leitura da obra do personagem, além dos fatores que revelam mudanças no rumo das ideias matemáticas que circularam no Reino Unido. Esse aspecto traz luz sobre alguns questionamentos ligados ao primeiro eixo da tese: conhecendo a trajetória Sylvester e as dificuldades impostas pela sociedade da época, como suas contribuições colaboram para a formação de uma comunidade de práticas, na qual ele se tornou tão influente? É fundamental compreender a posição social do matemático britânico na primeira metade do século XIX, bem como as oportunidades que se apresentaram, ou não, para os matemáticos nesse período. Entendemos que ainda existem detalhes que precisam ser mais bem desenvolvidos como, por exemplo: como a obra de Sylvester se apresenta frente à produção coletiva de uma comunidade de matemáticos que compartilham e disseminam interesses nas ilhas britânicas e no continente?

Nossa hipótese é a de que abordar a produção desse matemático, como parte de um conjunto de ações coletivas pode revelar características relevantes dos conceitos elaborados por ele, principalmente nos que diz respeito à *Teoria dos Invariantes*. Destacamos que, tendo o desejo de trabalhar com a pesquisa em matemática, ele se deparou com um cenário nacional que não estimulava essa profissão. Desta forma, estabelecer uma relação entre a carreira de Sylvester e as transformações que ocorreram na posição social do matemático britânico ao longo dos anos de sua carreira, nos permite compreender como a atuação deste personagem contribuiu para a formação de uma comunidade de práticas matemáticas no Reino Unido. Nesse sentido, o reconhecimento da produção britânica no continente é um aspecto importante para o estabelecimento da pesquisa em matemática como uma opção profissional no país.

Estabelecemos um recorte temporal entre 1837 e 1865, período que vai do ano de formatura de Sylvester em Cambridge, coincidentemente o mesmo ano de fundação do primeiro periódico especializado em matemática do país, até o ano de fundação da London Mathematical Society (LMS). Trabalhos como Rice et al. (1995) e Rice e Wilson (1998), demonstram que a fundação dessa sociedade é um ponto basilar na constituição da comunidade britânica de pesquisa em matemática. Despeaux e Rice (2016) apresentam um panorama da produção matemática no Reino Unido no período de 1840 a 1869 construído a partir das revisões de obras matemáticas feitas por Augustus De Morgan na revista "The Athenæum". No entanto, as especificidades desta tese em comparação ao estudo mencionado vão além do recorte temporal, uma vez que o presente trabalho propõe a análise dos interesses de pesquisa e das interações que fizeram parte de uma comunidade de práticas que lidou com problemas que envolvem polinômios homogêneos. Entendemos que esse assunto merece ser mais aprofundado, já que personagens encontrados nessa comunidade têm papel fundamental na consolidação da LMS.

Outro ponto importante da discussão aqui proposta diz respeito ao desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. Entendemos que ainda se faz necessária uma análise detalhada dos textos matemáticos produzidos por Sylvester e do modo como eles interagem com outras produções que se relacionaram com o desenvolvimento da Teoria. Em outras palavras, buscamos compreender as características de uma comunidade de práticas que se forma ao redor dos interesses de pesquisa do matemático inglês na segunda metade do século XIX. A opção por este período histórico foi influenciada pela mudança de perspectiva sobre a pesquisa em matemática que ocorre entre 1847 e 1850, devido à utilização das coordenadas homogêneas introduzidas por Plücker. Cabe destacar que esse novo aspecto apresenta uma conexão direta com o estatuto do matemático britânico, discutido anteriormente.

Seguindo os aspectos que norteiam nossas investigações, tratamos do segundo eixo norteador da tese: a evolução das ideias na obra de Sylvester e as interações existentes desta com as produções de outros matemáticos. Sobre este aspecto, nos propomos a responder aos seguintes questionamentos: qual o papel das técnicas e dos conceitos presentes nas publicações de Sylvester ao longo de suas contribuições para *Teoria dos Invariantes*? Quais são as características das interações entre essas técnicas e conceitos com outras publicações do período? Como essas interações constituem o legado deixado pela comunidade de práticas britânica que se forma ao redor da *Teoria dos Invariantes*? Que tipo de interação existiu entre esta comunidade e os matemáticos do continente? Sobre a última questão, estamos interessados na recepção dessas técnicas e conceitos em dois países: na França, onde Sylvester se tornou membro correspondente da seção de geometria da Academia de Ciências de Paris a partir da década de 1860; e na Alemanha, onde a *Teoria dos Invariantes* teve resultados determinantes, como o teorema de Gordan (GORDAN, 1868).

De maneira mais específica, a obra de Sylvester nos revela contribuições sobre a Teoria de Eliminação, técnica utilizada para resolução de sistemas de equações polinomiais; sobre transformações lineares, estudo sobre as influências exercidas em sistemas de polinômios através de substituições de variáveis; sobre geometria em coordenadas homogêneas, sistema de representação de pontos no plano projetivo descrito pelo matemático Julius Plücker no final dos anos 1820; sobre redução de polinômios homogêneos, estudo sobre transformações lineares que geram as formas canônicas dos polinômios; e sobre movimentos de rotação de corpos rígidos, aplicação mecânica de propriedades geométricas de objetos espaciais. Esses assuntos, que surgem a partir das análises da obra do personagem desta tese, nos permitiram investigar o grupo de matemáticos que se relacionou com ele por do estudo desses temas. Também foi possível identificar os interesses que aproximaram o Reino Unido ao continente no que diz respeito à produção matemática. Como poderemos notar na revisão bibliográfica, a *Teoria dos Invariantes* se faz presente nos assuntos citados e serve como elo para alguns pesquisadores britânicos e do continente no recorte histórico de nossas investigações.

Nossa análise tem como objetivo lançar luz sobre as inspirações que conduziram Sylvester em suas contribuições no desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. Além de não trabalhar diretamente sobre os textos, a historiografia tradicional não considera o fundo geométrico no qual essa Teoria foi desenvolvida, o que se mostra uma perspectiva local do tema, uma vez que ele surge em meio à ascensão da geometria em coordenadas homogêneas no Reino Unido. Entendemos que, ao olhar para a produção coletiva dos matemáticos, envolvidos nessa área, torna-se possível evidenciar novos aspectos a respeito da natureza desses trabalhos. Curiosamente, nota-se que os artigos que trataram da Teoria em desenvolvimento se encontram, nos periódicos que publicavam matemática, em seções que se referem a álgebra. Este é, possivelmente, um dos motivos pelos quais se atribui este caráter aos estudos dos *invariantes*.

Uma percepção puramente algébrica da *Teoria dos Invariantes* limita a compreensão das conexões com outras áreas da ciência. Sinaceur (1991, p. 131), destaca a conexão entre o teorema de Sturm e a Lei de Inércia para formas quadráticas enunciada por Sylvester em 1852. Um olhar mais próximo aos trabalhos que compõem essa conexão revela um desdobramento não totalmente explorado que, por sua vez, pode ser associado ao que ficou conhecido como "Equação auxiliar do problema das desigualdades seculares dos movimentos dos planetas", ou simplesmente "Equação Secular". Por esse motivo, se torna relevante compreender como ocorreram as interações entre o trabalho de Sylvester e outras publicações sobre o tema no âmbito das revistas britânicas e do continente. Mais uma vez destacamos a dimensão coletiva da produção matemática, uma vez que a relação entre a obra de nosso personagem de pesquisa e outras áreas, como o caso da mecânica, só emerge em meio a contribuições de autores diversos.

As revistas que lidaram com matemática no século XIX se mostram fontes importantes para o entendimento do processo de formação da comunidade britânica de matemática. Sobre esse assunto, Despeaux (2002) é uma referência importante e, apesar da amplitude de seu trabalho, entendemos que uma investigação mais detalhada da matemática produzida nos artigos das revistas ainda se faz necessária. O que nos traz ao terceiro eixo deste trabalho: pretendemos analisar artigos que trataram de práticas que envolvem polinômios homogêneos e desdobramentos da *Teoria dos Invariantes*. Para isso, pretendemos responder às seguintes perguntas: quais são as características da comunidade de práticas que se forma nas revistas que lidam com matemática, ao longo do desenvolvimento da Teoria? Quais são as práticas mais comuns nessa comunidade? Qual é o papel dos jornais de Cambridge na consolidação da *Comunidade Britânica dos Invariantes*?

É importante destacar o papel central desses jornais na formação dos matemáticos enquanto profissionais. Mesmo que não ganhassem a vida com pesquisa em matemática, o fato de existir um espaço onde pudessem compartilhar seus conhecimentos e descobertas fez com que surgisse um sentimento de identidade que se fortaleceu com a evolução das revistas especializadas. Com essa contextualização, percebemos a relevância de conhecer os personagens que participaram dessas produções contribuir para o entendimento do modo como a comunidade foi se formando.

1.2 Sobre significados dos conceitos que utilizamos nesta tese

Ao longo deste trabalho, utilizamos expressões cujos significados têm papel importante em nossa pesquisa. Nesta seção, nos concentramos nas explicações dos significados de termos específicos, de modo que seja possível trazê-los à luz e detalhar o modo como eles são colocados no contexto deste estudo. Iniciamos com as seguintes expressões: Comunidades de Práticas e Comunidades de Pesquisa.

As expressões citadas acima nos auxiliam na delimitação do grupo de matemáticos analisado através do *corpus* de textos deste trabalho. Outro fator importante é que esses termos permitem uma caracterização das ideias e técnicas, compartilhadas pelos autores, como um recorte de seus estilos ou culturas.

Junto a essa caracterização, precisamos discutir o conceito de "rede de textos". Essa ferramenta nos permitiu observar a comunidade através de diferentes perspectivas, como: as interações entre os autores, as conexões entre os assuntos tratados e a recepção, no continente, da produção da comunidade que estamos estudando. Para isso, utilizamos algumas configurações específicas, de modo que foi possível evidenciar aspectos que deram identidade à comunidade que investigamos. Nomeamos estas configurações da seguinte maneira: "redes de interações", "redes temáticas" e "redes de divulgação/recepção".

1.2.1 Sobre o uso do termo comunidade de práticas

Neste trabalho usamos o termo como uma unidade de análise. Diferentemente da expressão comunidade britânica de pesquisa em matemática, que se refere ao conjunto de pesquisadores que produziram matemática no Reino Unido no período vitoriano, a expressão "comunidade de práticas" se refere a um extrato da comunidade britânica de pesquisa em matemática. No nosso caso, esse extrato lidou com pesquisas que envolviam polinômios homogêneos em alguma das temáticas que destacamos ao longo do texto, de acordo com os interesses presentes na obra de Sylvester.

Essas diferenças podem ser mais bem compreendidas a partir de reflexões sobre o conceito de "comunidade científica". Em Hochman (1994, 201), encontramos a seguinte interpretação sobre a descrição apresentada por Thomas Kuhn: "comunidade científica é a unidade produtora e legitimadora do conhecimento científico". É importante destacar que essa definição não é definitiva, uma vez que existiram outras descrições do conceito após o trabalho de Kuhn.

Essa abordagem pressupõe uma organização hierárquica da comunidade, que participa do processo de validação do conhecimento. Uma vez consolidada, a comunidade recebe novos membros através do treinamento conduzidos pelos mais antigos. Um entendimento possível sobre "comunidade científica" descreve um grupo de pessoas fechado, onde os membros compartilham de um paradigma comum. É importante destacar que o termo "paradigma" tem um significado específico na descrição de Kuhn, o qual indica os pressupostos que determinam o modo de agir e investigar dos membros da comunidade. Em outras palavras, uma comunidade científica kuhniana é um grupo de pesquisadores circunscritos aos modelos de investigação dos pioneiros.

Nesse sentido, é possível afirmar que a comunidade de cientistas do Reino Unido apresentava essas características, uma vez que as sociedades científicas, como a Royal Society, restringiam a produção a seus membros (FLOOD et al., 2011), o que reflete o caráter hermético das comunidades descritas por Kuhn.

Outro ponto importante, destacado por Hochman (1994), é a ideia de anomalia da ciência normal, a qual representa um momento quando o paradigma da comunidade se torna mais flexível abrindo possibilidade para um movimento de ruptura. De acordo com o autor, esse movimento pode levar a uma revolução (no sentido descrito por Kuhn). Sob essa ótica, entendemos o advento da *Teoria dos Invariantes* como uma percepção de anomalia na produção matemática britânica no século XIX, uma vez que as novas técnicas permitiram tratar de geometria de espaço inconcebível, como Sylvester disse em 1849 em carta para Lord Henry Peter Brougham ² (1778 – 1868). Essa percepção se justifica pelo

²Lord Brougham foi alto chanceler de 1830 a 1834 e membro da câmara dos lordes de 1830 a 1868. De

fato de a nova Teoria britânica apresentar ideias e métodos inovadores do grupo, as quais contribuíram para mudanças na perspectiva sobre a produção matemática do Reino Unido.

Nesse contexto, entendemos que o olhar coletivo proposto nesta tese permite evidenciar os tensionamentos que ocorreram ao longo do processo de formação da *Comunidade Britânica dos Invariantes*, de modo a estabelecer as posições dos personagens que emergem no *corpus* de textos que selecionamos.

Outra descrição possível para comunidade científica é a apresentada por Bourdieu, que apresenta sua percepção de comunidade como um resultado de interações sociais. Essa visão se mostra em oposição à de Thomas Kuhn, uma vez que considera que a constituição de uma comunidade científica não é neutra (HOCHMAN, 1994). A imagem de um conjunto de ações voltadas, apenas, para o avanço da ciência dá lugar a um campo onde disputas por autoridade acontecem. Este aspecto pode ser percebido no editorial da revista *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* (QJPAM).

Todos os que estão interessados na causa da Ciência Matemática estão cientes da grande e benéfica influência que foi exercida sobre o estudo da matemática neste país com a publicação do *Cambridge* e subsequentemente do *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, que, se não se pode dizer estritamente que eles criaram a atual escola de matemáticos ingleses, pode-se justamente reivindicar terem fornecido a arena na qual foram capazes de medir sua força e evidenciar suas capacidades.³ (SYLVESTER; FERRERS, 1857, p. iii, Tradução Nossa)

Nesse trecho do primeiro volume da última versão dos jornais de Cambridge, podemos notar que os editores percebiam a produção científica como um espaço onde os pesquisadores “mediam forças”, ou disputavam as condições de autoridade do assunto no qual trabalhavam. Essa percepção e a ação de manter um periódico específico para matemática representam um esforço pela manutenção e/ou ampliação do que Bourdieu et al. (1989) chamariam de capital científico,⁴ através do compartilhamento de interesses e práticas.

Outra característica importante da oposição da visão de Bourdieu, em relação à de Kuhn diz respeito ao surgimento de novos pesquisadores, que não não dependeria, pelo

acordo com Parshall (1998), sempre foi um entusiasta da matemática e Sylvester contava com esse canal de comunicação.

³ All who are interested in the cause of Mathematical Science are aware of the great and beneficial influence which has been brought to bear upon the study of mathematics in this country by the publication of the *Cambridge* and subsequently of the *Cambridge and Dublin Mathematical Journals*, which, if they cannot strictly be said to have created the present school of English Mathematicians, may fairly lay claim to have provided the arena in which they have been able to measure their strength and give evidence of their capabilities.

⁴ Trata-se de uma analogia com a noção de capital financeiro do capitalismo. A noção de "capital financeiro" propõe a definição da posição hierárquica dentro da comunidade científica pelo nível de credibilidade dos pesquisadores e de sua produção acadêmica.

menos diretamente, dos matemáticos mais com mais tempo trabalhando no assunto. Tal surgimento estaria associado à repercussão do trabalho do autor entre os membros da comunidade, de maneira geral, não estando subordinado a uma validação hierárquica. Nesse sentido, o capital científico de Bourdieu é o que define a influência dentro da comunidade. Esse é o caso de Sylvester, que consegue um interesse internacional por suas práticas, o que faz seu capital se tornar muito significativo.

Destacamos que, na perspectiva de Bourdieu, as ações individuais de pesquisadores podem ser analisadas através das ações coletivas que compartilham dos interesses relacionados a uma mesma temática. É com esta ideia que utilizamos o conceito de "comunidade de práticas". Trata-se de uma expressão que entendemos como um estágio anterior a constituição de uma "comunidade de pesquisa" em matemática. As análises das publicações da comunidade de práticas que se formou no entorno da *Teoria dos Invariantes*, buscaram identificar características de um grupo de matemáticos que se mostrou um importante pilar da comunidade científica que se instituiu com o surgimento da LMS. De acordo com Wenger-Trayner e Wenger-Trayner (2015),

Comunidades de prática são grupos de pessoas que compartilham uma preocupação ou paixão por algo que fazem e aprendem como fazê-lo melhor, pois interagem regularmente.⁵ (WENGER-TRAYNER; WENGER-TRAYNER, 2015, p. 1, Tradução Nossa).

Apesar do termo ter sido cunhado no âmbito das ciências sociais, esta definição pode ser adaptada para o contexto no qual esta tese se desenvolve. Para isso, destacamos a importância de uma reflexão sobre os elementos que constituem as comunidades de práticas: domínio, comunidade e prática.

O domínio se refere aos assuntos que mobilizam os interesses do grupo em questão. No nosso caso, a *Teoria dos Invariantes* e os trabalhos que lidaram com polinômios homogêneos representam elementos característicos do domínio da comunidade pela qual estamos interessados. Um fator importante é que o domínio não precisa ser reconhecido fora da comunidade em questão. O início do desenvolvimento da nova Teoria se caracterizou por um compartilhamento de interesses (domínio), mesmo antes de suas discussões ganharem o continente. O processo de reconhecimento do continente é o que entendemos como um dos elementos que trouxeram credibilidade para a matemática produzida em solo britânico.

A ideia de comunidade trata de atividades e discussões realizadas em conjunto de acordo com a descrição de Wenger-Trayner e Wenger-Trayner (2015). No entanto, estas ações não são, necessariamente, realizadas de forma presencial ou com algum tipo

⁵ Communities of practice are groups of people who share a concern or a passion for something they do and learn how to do it better as they interact regularly.

de formalidade. No caso desta tese, entendemos que a comunidade de matemáticos do período em questão, realizou suas discussões através das publicações em periódicos que foram, nas próprias palavras de Sylvester no editorial do QJPAM de 1857, uma arena na qual matemáticos puderam medir suas forças e evidenciar suas capacidades. As correspondências trocadas no período também representam uma manifestação do espaço dessa comunidade. Em outras palavras, comunidade é o local onde as ideias circulam. A percepção de que Sylvester começa a se conectar com o espaço de outras comunidades, sobretudo em outros países, evidencia mais um retrato da constituição deste pilar.

A terceira característica descrita por Wenger-Trayner e Wenger-Trayner (2015) é a prática. Esse elemento se evidencia pelo compartilhamento de recursos como experiências, histórias, ferramentas e formas de abordar problemas recorrentes. No nosso caso, a utilização dos polinômios homogêneos e a interação de técnicas que trataram esse objeto matemáticos entre 1837 e 1865 formam práticas compartilhadas pelos personagens da comunidade. Essa característica evidencia mais uma parte do retrato que representa a constituição da comunidade de pesquisa.

Além das características apresentadas até aqui, destacamos um conceito chave: a resignificação ⁶. A negociação de significados é parte importante da formação da comunidade de práticas. Caso esse processo não exista, trata-se apenas de um grupo de pessoas que trabalham o mesmo assunto. De acordo com Wenger (1999), a resignificação é o resultado do processo de negociação, que reforça ou reformula significados no interior da comunidade. No caso desta tese, a *Teoria dos Invariantes* se mostra com uma fonte de resignificações de conceitos, técnicas e práticas que circulavam em solo britânico até a segunda metade do século XIX.

Com isso, esta tese se dedica a investigar o compartilhamento das práticas mobilizadas durante as etapas de evolução da obra de Sylvester em correlação com o desenvolvimento embrionário de uma comunidade de pesquisa que se constitui no entorno da *Teoria dos Invariantes* como uma de suas bases. Essa investigação será realizada através do levantamento de artigos publicados em revistas que trataram de matemática. Diferente da abordagem de Despeaux (2002), que lida com categorias que caracterizam o papel de cada periódico no cenário vitoriano, categorizamos os artigos por conceitos matemáticos comuns à obra de Sylvester.

⁶ Wenger (1999) utiliza o termo reificação. Optamos por resignificação por entender que o processo de elaboração dos conceitos dos *invariantes* se caracterizam por mudanças de entendimento dos objetos matemáticos.

1.2.2 Sobre os tipos de redes de textos

Como forma de identificar as características que descrevemos na última seção, as redes de textos se mostram uma ferramenta útil para identificar os personagens que participam da comunidade, a sua estrutura, o modo como as ideias do grupo se ressignificam e alcançam outros interessados fora do continente. Nossa inspiração surge do trabalho de Frédéric Brechenmacher, que aponta a utilidade desse objeto para seu trabalho:

A metodologia de rede visa permitir uma descrição das culturas matemáticas, suas interações e comunicações. Permite precisar a metáfora da trança aplicada à afirmação contemporânea do teorema de Jordan: o destaque de redes distintas permite colocar a questão das comunicações, das convergências, ou seja, do modo como as culturas locais tecem juntas e participam da história plural de um teorema durante o período 1870-1930. ⁷ (BRECHENMACHER, 2006, p. 19, Tradução Nossa)

Nessa descrição, encontramos a ideia central das redes: identificar as marcas culturais, características das interações e modo como as ideias são comunicadas. No trabalho do autor, o período histórico se definiu a partir do *corpus* de textos, elaborado através do esgotamento das conexões encontradas a partir de um conjunto inicial. No caso, os textos selecionados tratavam de ideias relacionadas ao teorema de Jordan. Ressaltamos que nosso trabalho busca encontrar temáticas que se relacionam a um objeto específico, no caso os polinômios homogêneos. Essa diferença nos levou a buscar os textos que emergem em um período pré-determinado. Dessa forma, uma descrição mais geral das redes se mostra útil.

Uma rede de textos consiste em um estudo sistemático de um coletivo de textos em torno de algum(s) tema(s) específico(s). Nesse estudo, buscam-se as relações intertextuais entre os elementos que compõem esse coletivo. É necessário salientar que a construção de uma rede de textos não se dá exclusivamente (e nem necessariamente) por citações explícitas. (SANTOS, 2015, p. 43)

A descrição acima apresenta as redes de textos como uma ferramenta heurística, caracterizada pelo compartilhamento de ideias. Nesse contexto, as conexões ocorrem entre as publicações e servem para organizar os textos em grupos de interesses. No nosso caso, com a necessidade de representar a comunidade através de diferentes fotografias, utilizamos redes de estilos diferentes: interação, temáticas, divulgação e recepção.

⁷La méthodologie des réseaux vise à permettre une description de cultures mathématiques, de leurs interactions et communications. Elle permet de préciser la métaphore de la tresse appliquée à l'énoncé contemporain du théorème de Jordan : la mise en évidence de réseaux distincts permet de poser la question des communications, des convergences, c'est-à-dire de la manière dont des cultures locales se tressent et participent de l'histoire plurielle d'un théorème sur la période 1870-1930.

As redes de interações focam nos personagens e no modo como eles se relacionam. A finalidade é identificar os nomes com maior influência dentro da comunidade, fator que nos mostra os primeiros indícios do desenvolvimento coletivo das práticas da comunidade. Por sua vez, as redes temáticas são o estilo mais tradicional dessa ferramenta. As conexões apresentadas entre os artigos nos mostrarão o caminho histórico das ideias, de modo que é possível identificar as ideias e conceitos que se consolidaram no período entre 1837 e 1865. Por fim, as redes de divulgação e recepção se focam nas práticas que circulam no interior da comunidade e fora dela. O foco desse estilo são os objetos matemáticos e o volume de citações, fatores que permitem a identificação das ideias compartilhadas da comunidade com o continente em maior frequência.

As análises dos textos que selecionamos para esta tese são conduzidas à luz dos conceitos que apresentamos nesta seção. Através das características gerais de uma comunidade de práticas, foi possível descrever as particularidades do que chamaremos de *Comunidade britânica dos Invariantes*.

1.3 Revisão Bibliográfica

1.3.1 Biografia e Contexto sócio acadêmico

A história de Sylvester e sua participação no desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes* já foi tratada por outros autores. Do ponto de vista biográfico, Parshall (1998) e Parshall (2006b) apresentam a história de Sylvester com foco em sua correspondência com outros matemáticos. Além do início de vida e período de formação escolar de Sylvester, as duas publicações mostram um matemático judeu buscando seu espaço dentro de uma sociedade anglicana, dividindo a história do matemático em seis períodos: 1837 - 1849, 1850 - 1854, 1855 - 1869, 1870 - 1875, 1876 - 1883 e 1884 - 1896. Essa divisão está relacionada às mudanças profissionais na vida do matemático.

O período de 1841 a 1849 representa o início da carreira. A correspondência escolhida revela um Sylvester preocupado em se estabelecer economicamente, iniciando como professor de Filosofia Natural na University College of London e tentando a sorte em sua passagem problemática pela Universidade da Virgínia. Além destas preocupações, Sylvester publicou trabalhos sobre Teoria de Eliminação. Parshall (1998, p. 8) discute que esses trabalhos serviram como base para apresentar a capacidade matemática de Sylvester frente a outros matemáticos, em particular na carta escrita a John Herschel em 1841 onde ele apresenta o artigo "Examples of the Dialytic Method of Elimination as Applied to Ternary Systems of Equations"(SYLVESTER, 1841a). Neste artigo, Sylvester apresentou uma nova abordagem para o teorema de Sturm. Esse período foi marcado pelo trabalho de Sylvester como atuário. Parshall (2006b) destaca a estabilidade financeira iniciada a partir

de 1845, quando ele consegue o emprego na Equity and Law. Nesse contexto, por volta de 1846 Sylvester conhece Cayley, um companheiro importante no desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes* (PARSHALL, 2006b, p. 91). Aparentemente, essa relação permitiu que Sylvester conhecesse os trabalhos de Plücker e Salmon.

De 1850 a 1854, a autora apresenta um Sylvester interessado em viver, exclusivamente, da pesquisa matemática (PARSHALL, 2006b, p. 107). Apesar de a profissão de matemático não existir nesse período, ele enxergava o trabalho com os *invariantes* como um caminho promissor para se colocar como pesquisador relevante. Essa percepção pode ser observada a partir do trabalho desenvolvido no período ao lado dos matemáticos Cayley e Salmon. Inicialmente, a autora destaca a discussão sobre o método para obtenção do locus dos pontos de uma superfície, nos quais uma reta tangente pode ser desenhada passando por 4 pontos, descrito por Salmon no artigo "On the Classification of Curves of Double Curvature" (SALMON, 1850b). Em uma carta escrita para Cayley em agosto de 1851, Sylvester se dedica a apresentar um vocabulário específico para a nova teoria (PARSHALL, 1998, p. 35).

As discussões destacadas por Parshall revelam a troca de métodos para gerar *invariantes* como os *Hyperdeterminantes* que foram desenvolvidos por Cayley em 1845 no artigo "On the Theory of Linear Transformations" (CAYLEY, 1845i). Na carta apresentada pela autora, Sylvester discute uma nova notação para descrever os *Hyperdeterminantes* (PARSHALL, 1998, p. 33). Paralelamente, a correspondência com Salmon se mostra como um apoio para aperfeiçoamento de técnicas do ponto de vista da geometria descritiva, como podemos notar em uma carta escrita de Salmon para Sylvester em Abril de 1852 onde ambos discutem a propriedade invariante do recíproco polar de uma forma cúbica ternaria (PARSHALL, 1998, p. 42).

O contato com o continente também começa a se fazer presente neste período. Correspondências com Chasles, Bienaymé dão conta da divulgação do "On the principles of Calculus of Forms" (SYLVESTER, 1852b) e (SYLVESTER, 1852c). De acordo com Parshall (1998, p. 56), Sylvester contou com o contato de Bienaymé para divulgar este artigo na França. Ele também se interessou pelos trabalhos algébricos dos franceses, em particular de Hermite sobre formas adjuntas (PARSHALL, 2006b, p. 108). Além disso, os franceses também podiam ter contato com outros matemáticos ingleses através dele, como é destacado pela autora na carta escrita por Chasles a Sylvester em agosto de 1852 (PARSHALL, 1998, p. 58).

O período de 1855 a 1868, destaca a vida de Sylvester como professor da Academia Militar de Woolwich. De acordo com Parshall (2006b), essa nova fase foi marcada por atritos com os dirigentes da instituição, uma vez que a expectativa de sequência ao trabalho de pesquisador teve que dividir espaço com divergências sobre o papel de um professor

de matemática. Paralelamente, ocorreu sua participação como editor do *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, a partir de 1855, e como um dos que auxiliaram na fundação da London Mathematical Society, a partir de 1865 (PARSHALL, 1998, p. 81).

Sylvester seguiu ampliando seus contatos internacionais, com destaque para a França, de onde recebe Camille Jordan em 1861 para reunião com Cayley e Thomas Hirst (PARSHALL, 1998, p. 101). Em especial, essas ações lhe proporcionaram a nomeação como membro correspondente da seção de geometria da Académie des Sciences de Paris em 1863, no lugar do falecido Steiner; além disso, pavimentaram seu caminho como matemático influente do ponto de vista internacional.

Após uma aposentadoria forçada na Academia Militar em 1870, Sylvester enfrentou um período de 5 anos de um certo ostracismo matemático. Sobre este período Parshall concentra sua narrativa na abordagem de outras atividades, como literatura e poesia. A autora indica que sua atividade matemática retorna nos Estados Unidos entre 1876 e 1883.

É importante notar que a autora consegue, através das cartas, descrever os temas de interesse entre os autores e o modo como eles se encaixam na teoria em desenvolvimento. No entanto, essa abordagem não dá conta de outras interações envolvidas com esses problemas como, por exemplo, a relação entre as transformações dos polinômios homogêneos e a rotação de corpos rígidos, através do elipsoide de Poinot,⁸ como foi destacado por Radau (1869). Este tema foi tratado por Sylvester entre os anos de 1864 e 1866 e seguiu o extenso trabalho sobre a regra de Newton para encontrar raízes de polinômios (PARSHALL, 2006b, p. 189).

Apesar de apresentar técnicas e discussões na formação dos conceitos do que Sylvester chamava de nova álgebra, Parshall não chega a tratar do interesse dessas técnicas para além do que diz respeito à própria *Teoria dos Invariantes*. O tratamento sobre os desdobramentos dos artigos sobre o cálculo das formas, revela o caráter catalisador da nova Teoria, uma vez que mostra o resultado da vasta comunicação entre o personagem desta tese e os companheiros Cayley e Salmon (PARSHALL, 2006b).

Do ponto de vista do contexto social e acadêmico, a carreira de Sylvester se desenvolve em conjunto com a evolução de uma comunidade de pesquisa em matemática britânica. De acordo com Enros (1983), a Analytical Society iniciou em 1812 uma demanda por uma sociedade especializada. Essa demanda se refletiu no surgimento do *Cambridge Mathematical Journal* em 1837, mas a primeira associação específica para a pesquisa em Matemática só surgiu em 1865 com a fundação da London Mathematical Society (LMS).

⁸ Modelo para descrição do movimento de rotação de corpos rígidos, apresentado em (POINSOT, 1851)

Rice et al. (1995) e Rice e Wilson (1998) são dois trabalhos que trataram o surgimento e do desenvolvimento da LMS. Até 1865 os matemáticos britânicos tiveram que conviver com sociedades científicas não exclusivas do seu campo de estudo. Apesar de algumas iniciativas como a Sociedade Matemática de Spitalfields, fundada no século XVIII e encerrada em 1845, os principais meios de comunicação de um matemático foram a Royal Society of London (RSL) e a sociedade filosófica de Cambridge (RICE et al., 1995).

Inicialmente, essa sociedade se apresenta como um clube de estudos. No entanto, a presença de matemáticos de renome, com Sylvester entre eles, representou maior credibilidade para a iniciativa. De acordo com Rice et al. (1995, p. 406), a primeira reunião oficial da LMS discutiu a vocação do novo grupo de pesquisadores. De Morgan, primeiro presidente da associação, alertava para a necessidade de valorização de áreas negligenciadas como história da matemática e lógica.

A sociedade lançou seu *Proceedings* em 1866 com artigos que trataram de determinantes, transformações no plano, combinações, movimento circular e astronomia. Foram poucos trabalhos (14 no total), mas o ano de publicação do novo periódico registrou várias novas adesões na LMS. Benjamin Gompertz (1779-1865), ex-presidente da sociedade de Spitalfields, Cayley, Sylvester e William Spottiswoode se tornaram membros em junho de 1865 e foram responsáveis pela mudança de perspectiva, de um clube de estudos para uma sociedade nacional, em 1866 (RICE et al., 1995, p. 411).

O período de 1867 até o final do século mostra uma LMS que, apesar de bem estabelecida nacionalmente, precisava se igualar ao patamar da RSL no que diz respeito à reputação internacional e ao nível de investimento (RICE; WILSON, 1998, p. 186). Ao olhar para o processo de desenvolvimento da comunidade de pesquisa em gestação, através da lente da LMS, Rice apresenta caminhos tomados pelos matemáticos britânicos e o modo como estes passam a interagir com matemáticos do continente.

Rice e Wilson (1998, p. 187) destacam que Sylvester e Hirst foram responsáveis diretos pelo processo de internacionalização da sociedade, através de suas boas relações com matemáticos do continente. Uma das primeiras ações da LMS foi a instituição de uma categoria de afiliação estrangeira, o que permitiu a atração do geômetra francês Michel Chasles (1793 - 1880). Além dele, outros matemáticos importantes do continente merecem destaque como: Enrico Betti (1823 - 1892), Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833 - 1872), Felix Christian Klein (1849 - 1925), Jean-Gaston Darboux (1842 - 1917), Paul Albert Gordan (1837 - 1912), Antônio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona (1830 - 1903), Charles Hermite (1822 - 1901) e Ludwig Otto Hesse (1811 - 1874).

As palestras presidenciais também foram uma tentativa de colocação da sociedade no cenário nacional e internacional. Em geral, os assuntos tratados eram referentes a áreas

de interesses do presidente, como o caso de Cayley que falou sobre superfícies quárticas e quánticas. No entanto, o alcance das mesmas se revelou muito restrito e teve pouca influência no desenvolvimento da LMS (RICE; WILSON, 1998, p. 192).

A maior parte dos membros da LMS não vivia da matemática. Estes, em geral eram advogados, clérigos ou professores. Entretanto, a iniciativa desses matemáticos amadores acabou estimulando o surgimento de outras sociedades nacionais como a Société Mathématique de France (SMF) em 1870 (RICE; WILSON, 1998, p. 193).

Outro aspecto destacado por Rice e Wilson (1998, p. 196), é fato de a sociedade ter recebido vários físicos matemáticos, o que indica uma forte interação entre matemáticos que eram considerados puros e os considerados aplicados. Sobre isso, os autores destacam a atuação de Maxwell nos dois campos. Além desse aspecto, a amplitude da LMS, já na década de 1870, também pode ser notada pelas visitas de matemáticos importantes como Camille Jordan e Benjamin Pierce.

Do ponto de vista das contribuições na matemática, é importante compreender como as áreas de interesse evoluíram na Inglaterra do século XIX. Nesse sentido, o período de 1837 a 1901, que ficou conhecido como era vitoriana, merece destaque. Essa época é marcada por um Reino Unido poderoso militar e economicamente, mas sem grande expressão na pesquisa matemática no continente Europeu (RICE, 2006, p. 165). Destacamos que se trata de um período de ressurgimento da matemática britânica, tanto no que diz respeito ao surgimento de um grupo de matemáticos talentosos como pelo fato de um processo de integração da matemática britânica com o continente.

Nesse contexto, destacam-se os principais desenvolvimentos matemáticos do período, classificados nas seguintes áreas: álgebra, lógica, geometria, física matemática, economia matemática e estatística, astronomia e tecnologia. Devido aos interesses desta tese, destacamos a descrição do autor de apenas algumas dessas áreas.

Ao olhar para o desenvolvimento da álgebra no Reino Unido é possível destacar o surgimento dos Quatérnios que introduziu a possibilidade de se lidar com sistemas sem a lei de comutatividade. A criação da *Teoria dos Invariantes*, pelas mãos de Cayley e Sylvester, colocou a matemática britânica novamente no cenário internacional. Apesar disso, a abordagem computacional utilizada pelos britânicos na nova teoria contrastava com abordagem simbólica utilizada por matemáticos alemães (RICE, 2006, p. 167).

Sobre a geometria destacam-se os trabalhos realizados por Cayley, Salmon e Cliford. Estes foram diretamente influenciados pela obra de Plücker e contribuíram para o desenvolvimento do que hoje é conhecido como geometria algébrica. Apesar disso, Rice (2006, p. 169) observa que a matemática britânica não se destacou por sua participação

em temáticas de geometria.

Esse levantamento feito por Rice (2006) mostra uma matemática britânica em desenvolvimento, que necessitava de uma organização de sua produção de pesquisa matemática em comunidades científicas que fossem capazes de estimular o surgimento de novos pesquisadores nas diferentes áreas. Ainda de acordo com Rice (2006, p. 173), Sylvester foi um personagem que compreendia bem essas necessidades.

1.3.2 Pesquisas sobre a *Teoria dos Invariantes*

Sobre a *Teoria dos Invariantes*, podemos destacar trabalhos como: Crilly (1986); Crilly (1988); o capítulo de Karen Parshall no livro "The History of Modern Mathematics" (PARSHALL, 1989) e os trabalhos de Charles Fisher (FISHER, 1966); (FISHER, 1967).

Os artigos de Tony Crilly tratam não apenas da ascensão da *Teoria dos Invariantes* do ponto de vista das publicações de Arthur Cayley e de suas correspondências com Boole e Sylvester no período de 1841 a 1862, mas também de seu declínio a partir das interações entre as abordagens inglesa e alemã. Nesse sentido, analisam-se artigos de 1845 e 1846, que o autor indica serem, ao lado do texto de Boole publicado em 1841, os textos fundadores da teoria. A esse respeito, Crilly observa que Cayley teve que lidar com uma posição de isolamento em Cambridge devido ao baixo interesse dos frequentadores do *Cambridge Mathematical Journal* até a década de 1850. Este fator fez com que Cayley procurasse em outros periódicos como o *Jornal do Crelle* (CRILLY, 1986, p. 243).

Crilly observa que, diferente de Boole que considerava polinômios homogêneos, Cayley, em seus artigos iniciais, os considerou como formas multilineares nestes artigos iniciais. No entanto, essa abordagem se revelou um meio para tratar dos polinômios homogêneos. Cayley entendeu que o papel da *Teoria dos Invariantes* é o cálculo de uma base para encontrar *invariantes*. Nesse sentido, ele observou que essa base se constitui como uma solução de um conjunto de equações diferenciais. Para lidar com os cálculos foi necessário utilizar o cálculo de operações de Peacock (CRILLY, 1986, p. 246).

A participação de Sylvester é destacada a partir de 1850, quando ele também começa a conceitos básicos geradores de *invariantes*. Ele reforça o interesse em fundar uma nova Teoria. O autor também utiliza a correspondência entre os dois amigos para apresentar o modo como são desenvolvidas técnicas para calcular *invariantes*. Esses cálculos geraram problemas computacionais, por conta de polinômios de alto grau (CRILLY, 1986, p. 248).

Crilly (1988) se concentra no declínio da Teoria sob o ponto de vista do trabalho de Cayley. O autor discute a abordagem alemã da *Teoria dos Invariantes* e o modo como

o matemático inglês reagiu a essa nova abordagem. Para Cayley, o método simbólico desenvolvido por Arnhold, Clebsch e Gordan era interessante, mas se mostrava abstrato demais para os padrões britânicos.

De acordo com Crilly (1988, p. 336), essa diferença entre os métodos para gerar *invariantes* dos matemáticos dos dois países aparentemente criou uma disputa inicial, uma vez que Cayley e Sylvester entendiam que o método inglês era mais amplo que o alemão e, na opinião de Sylvester, os alemães estariam roubando as técnicas britânicas. De fato, as abordagens apresentavam semelhanças, mas o método de Cayley para calcular os *invariantes* tendia a subestimar o número dessas expressões, enquanto o método alemão tendia a superestimá-los, então foram adotados os dois métodos como forma validação do número de formas irredutíveis, com as propriedades esperadas (CRILLY, 1988, p. 337).

Cayley se sentiu estimulado após a enunciação do teorema de Gordan, que mostrou que o número de *invariantes* de um *quantic* é finito, e passou a se dedicar a calcular todos as formas associadas a um *quantic*, que permaneciam inalteradas. Também era necessário calcular quantas eram as relações lineares entre os *invariantes* e *covariantes* de um *quantic*, o que ficou conhecido como problema dos *syzygies*.

Esse problema foi tratado por Sylvester a partir de um processo de análise numérica que se mostrava promissora, mas apresentava problemas no cálculo de *invariantes* para formas de alto grau. Em 1882 foi mostrado que o método de Sylvester não funcionava para formas binárias de ordem 7 (CRILLY, 1988, p. 339). Esse fracasso teria conduzido ao declínio o empreendimento de Cayley.

A abordagem de Crilly se concentrou na agenda de um matemático. Por outro lado, Parshall (1989) apresenta a *Teoria dos Invariantes* em um contexto mais geral, levando em conta matemáticos britânicos, alemães, franceses e italianos. Desta forma, ao iniciar pela abordagem britânica, se opta por apresentar o trabalho fundador de Boole, o qual se inspirou nos problemas aritméticos de Gauss e mecânicos de Lagrange (PARSHALL, 1989, p. 160). Nesse sentido, a obra apresenta pontos de convergência com os textos de Crilly. No entanto, destaca-se a relação de Cayley e Sylvester no desenvolvimento da nova teoria com mais detalhes. Mais uma vez são ressaltados a intensa correspondência entre os dois matemáticos no início da década de 1850, o compartilhamento de técnicas com Salmon e a problemática dos *syzygies*.

A distinção entre os dois trabalhos reside no tratamento da abordagem alemã, que adotou um tratamento geométrico diferente dos ingleses (PARSHALL, 1989, p. 170). De acordo com a autora, a nova Teoria começou a se desenvolver no continente a partir do trabalho de Gotthold Eisenstein que se interessou em estudar formas cúbicas e verificou que estas podem ser associadas a formas quadráticas através do processo que ficou conhecido

como Hessiano.⁹ Segundo Parshall (1989, p. 172), apesar do interesse de Hesse ter sido de natureza geométrica, o primeiro artigo alemão relacionado à *Teoria dos Invariantes* foi uma discussão essencialmente algébrica apresentada em 1849 por Siegfried Aronhold, que foi aluno de Hesse e Jacobi. Com isso, Aronhold passa a ser a principal figura alemã no desenvolvimento da nova teoria e, ao lado de Clebsch, elabora a abordagem simbólica como Crilly também destaca.

Essa abordagem simbólica permitiu que Paul Gordan demonstrasse o teorema da finitude em 1868, o qual garante que cada *covariante* e invariável de uma forma binária é uma função inteira com coeficientes numéricos de um número finito de tais formas. Essa demonstração corrigiu o equívoco de Cayley, que havia afirmado que a geração finita dos *invariantes* só se aplicava a formas de graus 2, 3 e 4 (PARSHALL, 1989, p. 178).

Parshall (1989) faz um relato generalizado dos principais eventos do desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. Desde seu nascimento com Boole, Cayley e Sylvester, passando pela adesão de Salmon, Hermite e Jordan. As contribuições dos alemães mudaram o patamar das ideias, indicando o princípio do fim da busca pelos *invariantes*. Sobre esse assunto, Charles Fischer se dedicou a uma análise social (FISHER, 1966) e (FISHER, 1967).

Esses trabalhos apresentam uma informação valiosa para esta tese: uma teoria não é um objeto fixo, mas uma categoria social que muda de acordo com as percepções dos matemáticos e o modo como sentem e agem sobre seu desenvolvimento (FISHER, 1966, p. 137). Com essa ideia, o autor propõe dois grupos de matemáticos envolvidos com a teoria: os teóricos invariantes, que são aqueles que cultivam seu desenvolvimento; e os usuários da teoria, que são aqueles que utilizam as técnicas desenvolvidas e reconhecem que estas pertencem a esse campo de estudo. Outro ponto importante do estudo é a afirmação de que os eventos ganham e perdem importância de acordo com o período histórico no qual são analisados. Desta forma, o olhar para a *Teoria dos Invariantes* é impregnado dessas perspectivas.

Fisher (1966) trata o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes* de modo semelhante a Crilly e Parshall. A teoria se iniciou com Boole e foi conduzida por Cayley e Sylvester nos anos 1850, as contribuições de Aronhold e Clebsch através de suas técnicas simbólicas até a publicação do teorema de Gordan em 1868. A partir desse ponto, o autor discute a relação dos participantes da Teoria em desenvolvimento. Clebsch lança um livro

⁹ Trata-se de um dispositivo computacional para determinar pontos críticos de uma curva representada por um polinômio homogêneo de grau m e n variáveis (x_1, x_2, \dots, x_n) explorado pelo matemático alemão Otto Hesse e aperfeiçoado por Jacobi. Hesse utilizou o determinante funcional $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|$, $1 \leq i, j \leq n$ para mostrar que este é um *covariante* do polinômio em questão

inspirado nas publicações de Salmon. De 1885 a 1887, o pedagogo Georg Kerschensteiner publica dois livros baseados no trabalho de Gordan, sendo o primeiro uma extensão da publicação de Clebsch e o segundo sobre formas quadráticas (FISHER, 1966, p. 144).

A partir dessa breve revisão histórica, Fisher apresenta seus argumentos para indicar o declínio da Teoria. Um desses argumentos é a incidência de artigos publicados e contabilizados no *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (MÜLLER; OHRT-MANN, 1868). O autor utiliza comentários de matemáticos do final do século XIX, de modo que se torna possível observar o olhar que era lançado sobre os rumos da Teoria.

Ao mesmo tempo em que se mostra que o número de publicações com essa temática vai diminuindo, se percebe que o interesse dos matemáticos vai se modificando. O autor cita o caso de Emmy Noether como exemplo dessa mudança de interesses. Ela foi aluna de Gordan, produziu trabalhos com *invariantes*, mas sua pesquisa não prosseguiu nessa linha (FISHER, 1966, p. 148). Assim, a ausência de matemáticos que tomassem o protagonismo da *Teoria dos Invariantes*, o interesse dos novos matemáticos em outras áreas e a mudança da percepção sobre a Teoria como uma parte de novas áreas representam o fim de uma categoria social de matemáticos.

Essa visão é retomada no artigo de 1967, onde Fisher discute o comportamento dos algebristas modernos (aqueles que surgem após 1920, segundo o autor) em relação aos eventos que ocorrem após 1893, quando Hilbert introduziu novas técnicas na *Teoria dos Invariantes*. A razão pela qual esse momento histórico foi considerado o final da Teoria se relacionada ao fato de não existirem matemáticos engajados na busca pelos *invariantes* nesse período e, assim, o status da Teoria teria ficado por conta de algebristas que tinham grande interesse pela mesma (FISHER, 1967, p. 218).

Nesse contexto, o autor faz um estudo com foco nos matemáticos da Grã-Bretanha, dos Estados Unidos e dos estados alemães que se encontravam engajados na *Teoria dos Invariantes* no final do século XIX e início do século XX. Um dos fatores que contribuíram para o declínio do engajamento de matemáticos na teoria desenvolvida por Cayley e Sylvester foi a ausência de incentivo institucional. Fisher (1967, p. 228) destaca o tipo de trabalho individualizado que era conduzido pelos matemáticos britânicos, uma vez que a atividade científica era vista como marginal na sociedade britânica. Outro ponto interessante é que, apesar dos algebristas da década de 1920 darem a Teoria como finalizada em 1893, percebe-se que ainda existiam matemáticos britânicos engajados após esse ano. Não entanto, estes não formam novos matemáticos para essa Teoria e quando se aposentam, acabam por isolá-la.

Nos Estados Unidos, a chegada de Sylvester a Baltimore é o ponto de partida para o desenvolvimento da Teoria. No entanto, sua volta para a Europa teve o efeito contrário,

desmobilizando os alunos que o seguiam e que, por consequência, passaram a procurar por outras áreas. Por sua vez, os matemáticos que tiveram potência para formar novos alunos e, com isso, dar sequência ao trabalho na Teoria, tomaram outros rumos e mantiveram a tradição como os caso de Leonard Dickson que começou a se afastar desse tema em 1910 (FISHER, 1967, p. 236).

Nas universidades de língua alemã, a nova teoria passou a ser objeto de pesquisa relevante a partir de 1850. Nesta época, os *invariantes* passaram a fazer parte de cursos e palestras ministradas nos ambientes de ensino, o que desenvolveu uma geração numerosa de matemáticos engajados. Entretanto, esses novos pesquisadores seguiram outras linhas de pesquisa, como o caso de Emmy Noether, que se notabilizou por seu trabalho com álgebra moderna (FISHER, 1967, p. 238).

A partir dos autores apresentados até aqui, é possível observar que a evolução da *Teoria dos Invariantes* foi tratada a partir de seus protagonistas e da forma como as técnicas e os conceitos utilizados contribuíram para o seu desenvolvimento. Os trabalhos de Parshall (1998), Parshall (2006b), Crilly (1986) e Crilly (1988) se concentram nas iniciativas de Sylvester e Cayley e no modo como ambos recebem os avanços da teoria ao longo do século XIX. Parshall (1989), destaca os avanços britânicos e alemães de maneira mais ampla, enquanto Fisher (1966) e Fisher (1967) tratam o assunto do ponto de vista do engajamento dos matemáticos após 1893, ano em que Hilbert apresenta sua abordagem moderna à teoria.

1.3.3 Um desdobramento da *Teoria dos Invariantes*: pesquisas sobre a Equação Secular

Um dos fatores que demonstram a importância da *Teoria dos Invariantes* é a forma como ela se adequou a problemas que já eram discutidos em um período anterior a seu desenvolvimento. Nesta tese, escolhemos apresentar o caso da equação que ajuda a determinar as desigualdades seculares no movimento dos planetas. Essa é uma temática discutida nos trabalhos de Frédéric Brechenmacher e Hourya Sinaceur: Brechenmacher (2006), Brechenmacher (2008), Brechenmacher (2012), Brechenmacher (2014) e Sinaceur (1991).

É fato que poderíamos tratar de outros desdobramentos da Teoria, como, por exemplo, o desenvolvimento do conceito de matriz ou a teoria das formas bi lineares. Cada uma destas problemáticas revela um determinado grupo de protagonistas e uma rede de interações que contribuiu para o reconhecimento da pesquisa em matemática britânica no século XIX. Com isso, uma pergunta natural é: por que a escolha pela problemática das desigualdades seculares como exemplo? A razão está na participação de Sylvester e seu

enunciado da Lei de Inércia para formas quadráticas.

De acordo com Sinaceur (1991, p. 131), existe uma relação próxima entre o teorema de Sturm¹⁰ e a Lei de Inércia, enunciada por Sylvester em 1852. Essa relação se faz presente através do estudo da *Equação Secular*. Apesar dessa afirmação, o foco do trabalho de Sinaceur incide sobre os desdobramentos do teorema do matemático francês que obteve grande notoriedade na Europa.

A autora destaca que a conexão entre a obra de Sylvester e o teorema de Sturm se manifesta pela primeira vez no texto "On Rational Derivation from Equations of Coexistence, that is to say, A New and Extended Theory of Elimination"(SYLVESTER, 1839). Segundo Sinaceur (1991, p. 124), esse artigo se inspira na ideia de Lagrange sobre as condições para a realidade das raízes de um polinômio dependerem apenas de suas características algébricas.

Em certa medida, essa é uma mudança que permite estruturar um novo estilo de abordagem para problemas analíticos e geométricos. A álgebra das matrizes estabelecida por Sylvester na década de 1850 se mostra como um ponto de referência importante para a compreensão do modo como se conectam os trabalhos que tratam de assuntos semelhantes.

O processo de algebrização do teorema também contou com a contribuição de outros personagens, como Cayley e Borchardt, os quais, ao apresentarem tentativas de demonstrações para o teorema de Sturm, vinculam este processo à problemática das desigualdades seculares dos movimentos dos planetas. Além deles, Sinaceur (1991, p. 133) também destaca os trabalhos sobre formas quadráticas de Hermite e as contribuições de Jacobi para Teoria de Eliminação.

Ao estabelecer essas conexões, Sinaceur nos mostra dois aspectos: em primeiro lugar, o assunto das desigualdades seculares conecta matemáticos com diferentes práticas e, em segundo lugar, o teorema de Sturm liga a *Teoria dos Invariantes* a essa discussão através dos desdobramentos da Lei de Inércia para formas quadráticas de Sylvester. Entendemos que essa problemática apresenta um dos aspectos que caracterizam processo de evolução da comunidade britânica de práticas que se forma no entorno das pesquisas sobre os *invariantes*.

O problema das desigualdades seculares é bem abordado em Brechenmacher (2006), que apresenta um levantamento dos trabalhos e personagens que fizeram parte da discussão de 1766 até 1874. O autor resalta as alterações das teorias e ideias que ocorreram neste período. Essas variações vão de questionamentos relacionados à mecânica até investigações

¹⁰Apresentado para a Academia de Ciências de Paris por Jacques Charles François Sturm (1803 – 1855) em 1829

aritméticas, passando por problemas de geometria.

Lagrange tratava o problema da estabilidade mecânica de um sistema de corpos com base na natureza das raízes de uma equação específica, que passou a ser chamada como "Equação que Auxilia na Determinação das Desigualdades Seculares dos Planetas" ou *Equação Secular* mais simplesmente (BRECHENMACHER, 2014). Essa abordagem revela o estilo de matematização adotado por Lagrange que o autor busca distinguir para além de uma mera algebrização de problemas mecânicos ou geométricos.

Teremos que qualificar esta descrição clássica do estilo de matematização de Lagrange. Com efeito, veremos neste presente artigo que a matematização do problema das pequenas oscilações nunca é reduzida a um formalismo e que as práticas algébricas são inseparáveis das interpretações mecânicas. Essas interpretações mistas desempenham um papel essencial na criatividade de Lagrange, mas também limitaram seu impacto e estão na base de um erro que foi propagado por quase um século graças à grande posteridade das obras de Lagrange na equação secular.¹¹ (BRECHENMACHER, 2014, p. 80, Tradução Nossa)

A interpretação mista, destacada no trecho acima, nos mostra que o problema das pequenas oscilações se expande através de diferentes ramos em outras áreas. No entanto, é importante notar que estes ramos, ou diferentes identidades como Brechenmacher (2008) se refere, permanecem conectados pela ideia dos movimentos de rotação ou das desigualdades seculares.

O autor destaca que essa expansão apresenta referenciais que aglutinam práticas, que ele chama de nós. Personagens como o próprio Lagrange, Cauchy, Weierstrass, Jordan e Kronecker demarcam as discussões sobre a *Equação Secular* (BRECHENMACHER, 2008, p. 2). Embora não constituam uma única teoria, uma vez que cada um dos matemáticos citados apresenta um encaminhamento diferente para a equação, essas discussões se caracterizam por práticas em comum: a transformação de um polinômio homogêneo em soma de quadrados, positivos ou negativos, de funções lineares.

Brechenmacher passa a discutir a identidade do *corpus* de textos que lida com os problemas das desigualdades seculares no período 1766 a 1874, o que faz com ele precise se ater às motivações que levam os matemáticos a lidar com práticas que hoje entenderíamos como a diagonalização de matrizes quadradas. No caso desta tese, estamos mais interessados no modo como os autores compartilham tal prática e como ela se conecta

¹¹We will have to qualify this classic description of Lagrange's style of mathematisation. In effect we will see in this present article that the mathematisation of the problem of small oscillations is never reduced to a formalism and that the algebraic practices are inseparable from mechanical interpretations. These mixed interpretations play an essential role in Lagrange's creativity, but they also limited his impact and lie at the basis of an error that was propagated for almost a century thanks to the great posterity of Lagrange's works on the secular equation.

como o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*, uma vez que o problema de Lagrange é mencionado no artigo fundador da Teoria, publicado por Boole em 1841:

procuraremos destacar tanto a variabilidade dos contextos em que nosso corpus se desenvolve quanto os legados que mostram a permanência de uma prática específica participando dos diferentes métodos desenvolvidos por autores como Lagrange, Laplace, Cauchy, Weierstrass, Jordan e Kronecker.¹² (BRECHENMACHER, 2008, p. 3, Tradução Nossa)

Nessa citação podemos perceber que existem diversos contextos que caracterizam o problema das desigualdades seculares e os métodos que foram desenvolvidos ao longo de suas discussões. Nesta tese, estamos interessados na transformação que foi mencionada por Boole. Quem são os autores que lidaram com o problema por este viés? Neste contexto, podemos notar que os interesses ambas as comunidades se sobrepõem, o que revela uma faceta importante dos estudos conduzidos por Sylvester e companhia, uma conexão com um problema que mobilizou tantos outros no continente traz lastro para a comunidade britânica.

1.3.4 Sobre os Periódicos Especializados

Entendemos que as relações aqui apresentadas podem ser analisadas através dos periódicos especializados da época, os quais direcionaram a formação de matemáticos ao longo do século XIX, uma vez que as condições para desenvolvimento de pesquisa não eram estimuladas por instituições de Estado (DESPEAUX, 2007, p. 103). Assim, existe uma relação estreita entre o sistema de ensino britânico e os periódicos especializados. Através de uma análise quantitativa dos periódicos britânicos, Despeaux (2002) mostra que os jornais que comportaram matemática em suas páginas durante o século XIX foram parte essencial para a formação da comunidade de publicadores em matemática do Reino Unido. A autora descreveu a evolução dos meios de divulgação científica e como eles deram, ou não, espaço para a produção matemática nos períodos de 1800 – 1836, 1837 – 1867, 1868 – 1900.

De 1800 a 1836, os matemáticos do Reino Unido contavam com os seguintes periódicos ligados às sociedades científicas gerais: *Philosophical Transactions of Royal Society of London* (Phil. Trans. RSL), fundado em 1665; *Abstracts of the Papers Printed in the Philosophical Transactions of the Royal Society of London* (futuro Proceedings of RSL) fundado em 1800; *Transactions of Royal Society of Edinburgh* (Trans. RSE), fundado

¹²nous nous attacherons à mettre en évidence aussi bien la variabilité des contextes dans lesquels notre corpus se déploie que les héritages manifestant la permanence d'une pratique spécifique participant des différentes méthodes élaborées par des auteurs comme Lagrange, Laplace, Cauchy, Weierstrass, Jordan et Kronecker.

em 1788; *Proceedings of RSE*, fundado em 1832; *Transactions of Royal Irish Academy* (Trans. RIA), fundado em 1787; *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* (Trans. CPS), fundada em 1819; *Monthly Notifications of Royal Astronomical Society* (MNRAS), fundada em 1827; *Memories of RAS* e o *Relatório da Associação Britânica para o Avanço da Ciência* (BAAS Report), fundada em 1831. Além disso, também era possível publicar matemática em jornais independentes como o *Philosophical Magazine* (PM) e series menores, das quais podemos destacar o *Ladies' Diary*, o *Gentleman's Diary* e o *Mathematical Repository* (Leybourne's Repository).

Inicialmente, esses títulos podem causar a impressão de que os matemáticos do início do século XIX contavam com um bom espaço para divulgar seus trabalhos. No entanto, Despeaux (2002) destaca diferenças entre as possibilidades de publicação de cada jornal. Os *Transactions* se caracterizavam por serem revistas restritas a membros de suas respectivas sociedades. Não membros interessados em publicar seus trabalhos nesses periódicos precisavam convencer membros a apresentar os textos aos comitês que decidiriam sobre a viabilidade da publicação. No caso da Royal Society, esse comitê era formado pelo presidente, o secretário, e membros da sociedade que fossem qualificados para avaliar os trabalhos submetidos, os quais eram nomeados pelo conselho da própria sociedade. Esse sistema tornava o processo de publicação lento e limitado aos interesses do comitê. De acordo com Despeaux, no período entre 1800 e 1836, as avaliações geraram decisões arbitrárias.

As tentativas de publicações matemáticas em revistas como Phil. Trans. RSL, Trans. RSE e Trans. RIA precisavam disputar por espaço com outras áreas do conhecimento, enfrentar decisões editoriais arbitrárias influenciadas pelos oficiais das sociedades, além de conviver com a incerteza da publicação e da perda do texto submetido, uma vez que este ficava arquivado nas sociedades, independente da aceitação. Os *Proceedings* se mostraram como uma opção de publicação mais veloz para os matemáticos do período. Tais periódicos se caracterizaram pela publicação de resultados mais recentes como trabalhos em andamento e palestras importantes, deixando memórias e trabalhos mais aprofundados para os *Transactions*.

Os MNRAS e as *Memórias da RAS* também apresentaram relações com autores do período. A partir 1827, a sociedade de astronomia passou a publicar notícias em uma seção da *Philosophical Magazine*, como forma de divulgar trabalhos selecionados mais rapidamente. Esta seção passou a ser publicada, como uma revista, pela RAS a partir de 1834. É importante destacar que, ao lado da BAAS, essa sociedade contou com um engajamento maior dos matemáticos em comparação às sociedades científicas gerais, no que diz respeito aos cargos oficiais. Esse fator, aparentemente, reflete o início de uma movimentação dos matemáticos britânicos em busca de interesses em comum, uma vez

que o surgimento dessas associações convive com um ambiente de reformas educacionais em Cambridge inspiradas nas ações da Analytical Society (1812- 1813).

Essas reformas foram incentivadas a partir da formação da Sociedade Filosófica de Cambridge em 1819. Nesse sentido, o surgimento das *Transactions* da nova sociedade representou mais um canal de comunicação matemática, principalmente para pessoas ligadas à universidade. Apesar de uma clara inclinação não matemática, a CPS foi rapidamente povoada por matemáticos, o que se reflete numa produção de matemática em 53,3% das páginas do novo periódico, até 1836.

A *Philosophical Magazine* se diferenciava das revistas das sociedades científicas na medida em que incorporava publicações de autores ingleses, irlandeses e escoceses independentemente da associação a que eles eram membros. A revista também incluía artigos reimpressos de periódicos estrangeiros, o que revela o caráter de disseminação da pesquisa em um nível mais amplo que as sociedades reais. No entanto, por ser uma revista comercial, a *Philosophical Magazine* precisava controlar os gastos com a publicação, o que resultava em poucas páginas para cada autor. No período de 1800 a 1836, a matemática representou 5,9% das páginas da revista, divididas nas áreas: Física Matemática, Mecânica, Astronomia, Álgebra, Geometria Analítica, Cálculo, Geometria Sintética, Combinatória e Probabilidade, História e Filosofia, Teoria dos Números, Teoria das Funções e Séries. A maior parte dos artigos se concentrou nas áreas de Astronomia e Física Matemática, o que pode explicar o engajamento dos matemáticos do período na RAS.

Por fim, esse período inicial do século contava séries matemáticas em jornais menores não científicos como o *Ladies' Diary* e o *Gentleman's Diary*, que reservavam espaço para problemas de matemática. Entre esses, o repositório de Leyborn merece destaque pois, além de problemas, contava com artigos originais e traduções de trabalhos internacionais.

Como Despeaux (2002) afirma, o período de 1800 a 1836 pode ser considerado como a gestação da comunidade britânica de publicações. As diferentes características dos periódicos que estavam disponíveis nessa época delimitaram o nível das produções neste intervalo de tempo. Os *Proceedings* e as *Transactions* publicavam, em sua maioria, artigo de membros das sociedades científicas gerais; a *Philosophical Magazine*, por sua vez, teve pouca adesão e as séries menores careciam de prestígio e adotaram uma tradição mais recreativa. Nesse contexto, as revistas da Sociedade Filosófica de Cambridge, da Associação Britânica para o Avanço da Ciência e da Sociedade Real de Astronomia foram boas alternativas aos pesquisadores. A maioria dos autores era ligada às universidades, divididos entre estudantes, professores e cargos gerais nessas instituições. Apesar disso, não existiu um incentivo institucional à pesquisa matemática nesse período. Exames, como o Mathematical Tripos, nortearam o currículo matemático das universidades, em especial

de Cambridge, o que se refletiu nas revistas através de publicações de matemática mista, ou seja, física matemática, astronomia e matemática analítica continental, que passou a receber atenção ao longo deste período.

O período de 1837 a 1867 se iniciou com a fundação de um periódico específico para matemática. O *Cambridge Mathematical Journal* (CMJ) funcionou até 1845 e contou publicações distribuídas da seguinte maneira: geometria analítica, com 23,7% dos artigos e 22,3% das páginas matemáticas, Cálculo Diferencial e Integral (18,3%; 22,5%), álgebra (10,4%; 12,2%), Mecânica (10,4%; 9,5%) e Física Matemática (10,0%; 10,6%). O que mostra que tópicos aplicados eram menos populares. Em 1842, a Sociedade Filosófica de Dublin lançou os seus *Transactions*, que também se caracterizaram pelas publicações matemáticas. Essas duas revistas, se juntaram em 1845 e formaram o *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* (CDMJ) que, por sua vez, deu lugar ao *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* (QJPAM) em 1855.

Além de ser um processo de herança, a evolução destas revistas representou mudanças nos interesses dos editores. O CMJ começou como um jornal ligado ao Mathematical Tripos e, conseqüentemente, aos interesses da universidade. O CDMJ representou interesses por artigos originais e maior abrangência do jornal. Por fim, o QJPAM representou uma busca pela internacionalização do empreendimento, o que foi refletido na formação do corpo editorial que contou com Sylvester, Ferrers, Cayley, Stokes e Hermite.

Como Despeaux (2002) destaca, o processo de evolução da infraestrutura de periódicos que se estabelecia na Grã-Bretanha era cumulativo, mostrando uma grande expansão da atividade matemática. Um sintoma disso é o surgimento do *Menssegers of Mathematics* em 1862. Com a internacionalização do QJPAM, os trabalhos mais ligados às instituições de ensino passaram a ser publicados no novo jornal ligado a universidade de Oxford. Destacamos também, o surgimento de uma seção de questões de matemáticas no jornal *Educational Times*, a partir de 1864.

Paralelo ao surgimento desses novos periódicos, os matemáticos se tornaram mais ativos nos jornais científicos gerais. Isso pode ser observado pelo aumento no percentual de publicação nos *Transactions* e *Proceedings* das sociedades britânicas, com crescimento mais significativo na RSE (de 13,1% para 23,7% nas páginas da revista) e na *Philosophical Magazine* (5,9% para 16,1%). Além deste fato, os matemáticos também aumentaram seu engajamento nas sociedades, ocupando cargos oficiais com mais frequência nesse período, o que também fez com que matemáticos se tornassem avaliadores de artigos submetidos em seus periódicos.

O número de professores que publicaram nesse período intermediário aumentou em relação ao período inicial. No entanto, os matemáticos que conseguiam mais tempo

para publicar eram advogados, clérigos ou empresários, uma vez que os professores se encontravam muito ocupados com atividades de ensino. Em particular, a aproximação entre as universidades e os exames como o Tripos, gerou oportunidades de empregos como treinadores de matemática para professores que estavam fora das instituições. As áreas que então receberam maior atenção foram cálculo, álgebra e geometria analítica, além da matemática considerada mista como mecânica e óptica em Cambridge e calor, eletricidade e magnetismo em Dublin.

Despeaux (2002) considera o intervalo de 1837 a 1867 como um período de construção da infraestrutura que incentivou o desenvolvimento da pesquisa britânica no século XIX. As séries matemáticas seguiam estimulando jovens discentes, que poderiam ingressar no universo de pesquisa através de jornais destinados a estudantes como o CMJ inicialmente e, em seguida o Messenger of Mathematics. Por fim, os trabalhos mais robustos poderiam ser publicações nas revistas especializadas como QJPAM. Nesse contexto, a London Mathematical Society (LMS) é fundada em 1865 com o intuito de atender às necessidades de uma grande quantidade de autores ainda muito afastados.

A LMS começou a publicar seu *Proceedings* já em 1866. De acordo com Despeaux (2002), a evolução da comunidade de pesquisa britânica criou um afastamento das questões pedagógicas. Entretanto, isso não significou o desaparecimento do grupo de pessoas interessadas no assunto, muitos passaram a apresentar artigos em outros meios de comunicação. A revista *Nature*, fundada em 1862, recebeu grande parte dessa contribuição pedagógica. A Associação para o Desenvolvimento do Ensino de Geometria (AIGT), fundada em 1871, se mostra como um indício da existência desse extrato da comunidade de autores matemáticos. Outra evidência dessa estratificação foi a fundação da Edinburgh Mathematical Society (EMS), em 1883, que também recebeu muitas contribuições de natureza pedagógica. É importante destacar que o fato de os periódicos delimitarem a natureza das publicações (pesquisa e atividades pedagógicas), não significa que os autores se dividiram. Foram encontradas contribuições de matemáticos como Sylvester e Cayley no *Educational Times*, por exemplo.

O último período do Século XIX, apresentou um aumento importante dos autores estrangeiros. Apesar da existência de autores de outros países nos outros dois períodos destacados por Despeaux (2002), o intervalo de 1868 a 1900 mostra aumento significativo nas publicações internacionais na PM, QJPAM, *Proceedings* da LMS e EMS e Messenger of Mathematics. Uma curiosidade é que as revistas ligadas às sociedades científicas gerais não refletiram esse aumento na publicação matemática internacional, o que se mostra como um sintoma do fenômeno de estratificação.

1.4 Divisão dos Capítulos

Esta tese está dividida em 7 capítulos. Além desta introdução, o capítulo 2 se destina a uma releitura da biografia de Sylvester sob o ponto de vista do desenvolvimento do estatuto de matemático no Reino Unido. A principal questão nesse capítulo é: como a trajetória de Sylvester reflete o modo de se produzir e comunicar matemática no Reino Unido do século XIX? Essa releitura foi conduzida de modo a identificar as influências coletivas dos matemáticos envolvidos no estabelecimento das ideias sobre os *invariantes* no período de 1837 a 1865.

Sobre essas influências coletivas, podemos notar os movimentos que, apesar de não terem sido decisivos, conduziram a perspectiva do fazer matemática no Reino Unido. Iniciativas como a Analytical Society, Cambridge Philosophical Society e a fundação de jornais especializados se mostraram como portas de entrada para a introdução de métodos analíticos nas universidades de Cambridge e Oxford, como destacam Durand-Richard e Paris (1999).

Apesar da profissão de matemático (no sentido de alguém que vive da disciplina) não ter sido uma realidade, é possível observar esse período como uma época embrionária da atividade. É importante estabelecer uma correlação entre os avanços matemáticos dessas iniciativas e os avanços na carreira de Sylvester. Para isso estabelecemos 3 períodos para investigação:

- 1814 - 1837, que se refere ao início de vida e ao processo de formação de Sylvester. Esse período coincide com o movimento de renovação da matemática em Cambridge que trouxe o pensamento analítico para o meio acadêmico. Cabe destacar que esse período também contou com o surgimento e o fim da Analytical Society, a fundação da British Association for Advanced of Science e do *Cambridge Mathematical Journal*. Investigar possíveis influências dessas iniciativas na vida da universidade é um ponto importante deste período, uma vez que esse fator apresenta relação com a formação de Sylvester;
- 1837 - 1855, que se refere aos primeiros passos de Sylvester após ser segundo Wrangler no Tripos Exam. Nesse período, ele se envolve com o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes* e convive com a evolução das revistas especializadas na Inglaterra. Outro fator importante desse período, foi o fato de Sylvester ter se tornado editor da versão final dos jornais de Cambridge, o *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*.
- 1855 - 1865, que se refere ao período em que Sylvester já contava com reputação internacional como matemático. É importante ressaltar que ele foi professor de

matemática na Royal Military Academy of Woolwich até 1870. Ele também se tornou membro correspondente da academia de ciência de Paris em 1863 e presidente da London Mathematical Society em 1866. Esse é um período no qual a matemática britânica evolui e passa a ser reconhecida como comunidade científica através da fundação da LMS.

Do ponto de vista da organização, o segundo capítulo busca apresentar o paralelo entre a vida de Sylvester e a evolução das iniciativas que buscaram adequar a matemática britânica àquela produzida no continente. Cada um dos intervalos de tempo descritos acima apresenta duas seções que tratam respectivamente da carreira de Sylvester e das iniciativas que visavam ao desenvolvimento da pesquisa no Reino Unido. Dessa forma, foi possível apresentar o papel importante que o matemático britânico tem nesse processo.

O capítulo 3 trata da matemática na obra de Sylvester. O foco principal é apresentar as etapas do desenvolvimento dos conceitos elaborados nos artigos publicados pelo matemático inglês entre 1837 e 1865. A opção por este período se refere ao surgimento do primeiro periódico especializado em matemática no Reino Unido e a fundação da London Mathematical Society, passando pelo início de sua participação na *Teoria dos Invariantes* na década de 1850, quando seu trabalho passa a ter influência da geometria em coordenadas homogêneas. Esse capítulo será dividido nas seguintes temáticas:

- Teoria de Eliminação: produção de artigos entre 1839 e 1851 - esses trabalhos lidaram com teoremas como o de Bézout e Sturm, além de problemas que envolvem raízes de polinômios de grau n ;
- Problemas de Contato: produção de artigos entre 1850 e 1854 - nestes textos se concentram as ideias geométricas que fizeram parte dos interesses de Sylvester, dentre os quais salientamos os polinômios homogêneos e a inspiração nas ideias de Plücker sobre coordenadas projetivas;
- Transformações: produção de artigos entre 1851 e 1855 - nestes textos, encontramos as contribuições do autor para o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*;
- Rotações: produção de artigos entre 1850 e 1866 - nestes trabalhos, encontramos desdobramentos dos interesses anteriores. Em particular, destacamos a relação que existiu entre os interesses de Sylvester e as investigações a respeito da *Equação Secular*.

Com base nessas temáticas, o objetivo do terceiro capítulo é identificar as técnicas e os conceitos comuns na evolução dos trabalhos de Sylvester. Sobre isso, entendemos que

é importante destacar os diferentes tipos de abordagem geométricas e algébricas que foram mobilizadas pelo autor no período. Como já apontamos anteriormente, o ano de 1850 pode ser visto como um divisor de águas, uma vez que o período anterior (1837 - 1850) é marcado por trabalhos que lidam com as relações entre os coeficientes e os polinômios e no período seguinte (1850 - 1865) encontramos trabalhos que lidam com interpretações dos polinômios do ponto de vista geométrico, em particular as coordenadas homogêneas.

Os capítulos 4 e 5 se dedicam ao terceiro eixo da tese. Ou seja, buscamos identificar a forma como ocorreram as interações entre a obra de Sylvester e de outros matemáticos britânicos de sua época. Para isso, estabelecemos redes de textos (de interação, temáticas e divulgação/recepção), as quais permitiram não apenas destacar características da *Comunidade Britânica dos Invariantes*, mas também identificar os personagens centrais e quais as principais ideias que circularam em seu interior. Essas características podem se manifestar através de formas de representação, procedimentos operatórios, ideias, valores e interconexão entre vários domínios científicos. Como indica Brechenmacher (2006, p. 20), a organização de uma rede fornece uma descrição de culturas matemáticas relacionadas a um tema específico.

Individualmente, o capítulo 4 se concentra nos personagens da comunidade de práticas dos *invariantes* e nas relações que existiram entre eles. Nesse sentido, optamos por representar as interações em três fases: 1) 1837 - 1845, período de existência do CMJ; 2) 1845 - 1855, período do CDMJ; e 3) 1855 - 1865, período do QJPAM. Com o auxílio das redes de interações, foi possível perceber o nível de influência de cada personagem da comunidade, de acordo com o volume de suas publicações e das conexões que se estabelecem entre eles.

Por outro lado, o capítulo 5 se concentra nas práticas publicizadas pela *comunidade britânica dos invariantes*, apresentada no capítulo anterior. Através das redes temáticas, destacamos os assuntos que foram foco principal dos interesses dos integrantes da comunidade de práticas. Os temas desse capítulo são semelhantes aos difundidos na obra de Sylvester: Eliminação, Locus de curvas e superfícies algébricas, Contatos, Transformações, Redução de polinômios e Rotações. A escolha dos assuntos se justifica pelo papel central do matemático na *comunidade britânica dos invariantes*.

As redes de divulgação/recepção surgem no capítulo 6, que se dedica a compreender a repercussão, nos jornais do continente, das práticas e ideias compartilhadas na *comunidade britânica dos invariantes*. Para isso, optamos por uma divisão em três partes:

- Os trabalhos publicados pelos personagens da *comunidade britânica dos invariantes* nos jornais do continente: *Jornal do Crelle*, *Liouville* e *Nouvelle Annales*. Nessa seção, estamos interessados em apresentar as principais ideias que se consolidaram

no Reino Unido e foram divulgadas para matemáticos europeus;

- A repercussão das práticas desenvolvidas em solo britânico e divulgadas nos periódicos do continente. Estamos interessados nas práticas britânicas que surgem nos textos publicados por matemáticos do continente;
- Os desdobramentos da *Equação Secular*. A ideia dessa seção é refletir sobre o papel das contribuições da *Teoria dos Invariantes* para o problema das raízes da equação que auxilia na determinação das desigualdades seculares dos movimentos dos planetas.

Com base nessa divisão, entendemos que o nível de divulgação/recepção das práticas sobre os *invariantes* revela o processo de ganho de credibilidade dos britânicos, em relação à matemática produzida na Europa. A aplicação das ideias da *Teoria dos Invariantes* para a solução do problema das Desigualdades Seculares representa um desdobramento importante para seu processo de credibilização. Nesse sentido, as análises dos textos que se ligam as discussões que surgiram nos capítulos 4 e 5 representam um fechamento importante na caracterização da *comunidade britânica dos invariantes* e no modo como ela se mostra um dos pilares da comunidade de pesquisa em matemática do Reino Unido. Nesse contexto, ideias como a Lei de Inércia para formas quadráticas mostram a relevância do trabalho de Sylvester.

Por fim, acreditamos que a releitura da obra de Sylvester com base nos eixos norteadores que foram descritos até aqui nos permite identificar os personagens que fizeram parte de produções associadas à *Teoria dos Invariantes*, as relações entre esses sujeitos, as práticas que compartilharam e a difusão de seus trabalhos pelo continente. Esperamos que o recorte histórico apresentado possa contribuir para o enriquecimento de estudos que analisam o desenvolvimento embrionário do matemático profissional no Reino Unido do século XIX.

2 O PROCESSO DE CONSTITUIÇÃO DE UMA COMUNIDADE DE PESQUISA EM MATEMÁTICA E A CARREIRA DE SYLVESTER

Este capítulo tem como objetivo apresentar a evolução de Sylvester como um profissional que busca seu espaço através de sua produção matemática, de modo que seja possível identificar as correlações entre o desenvolvimento embrionário de uma comunidade de pesquisa em matemática no Reino Unido do século XIX e as etapas de formação de um personagem que se tornou central nesse processo. É importante destacar que tal centralidade ocorre através do desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. Para isso, apresentamos um relato biográfico com foco nos eventos que contribuíram para a formação acadêmica do personagem principal desta tese, além da constituição do matemático pesquisador e os aspectos da evolução do meio britânico de pesquisa em matemática no período.

Apresentamos uma releitura da biografia de Sylvester em paralelo com o papel e a posição dos matemáticos nas sociedades científicas, instituições de ensino e revistas que trataram de matemática. A análise dessas fontes pretende revelar o cenário da pesquisa em matemática no Reino Unido entre 1814 e 1865, intervalo que representa o início da vida de nosso personagem de pesquisa até o ano anterior em que ele se torna o segundo presidente da London Mathematical Society.

Do ponto de vista metodológico, nos concentramos no grupo de pesquisadores que movimentam as comunidades científicas, a fim de compreender influências que foram absorvidas por Sylvester. O questionamento central deste capítulo é: que tipo de relação existiu entre os espaços britânicos de divulgação matemática e o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*? Como uma forma de resposta, as reflexões são conduzidas em três períodos: 1814 - 1837, período no qual Sylvester se formou como matemático; 1837 - 1855, período de surgimento e consolidação dos jornais especializados em matemática no Reino Unido; e 1855 - 1865, período no qual Sylvester foi editor do QJPAM.

É importante destacar que, com o passar do tempo, esses espaços se tornam cada vez mais amplos para os matemáticos, possibilitando a divulgação de ideias para outros centros. O conceito de comunidade descrito por Wenger (1999, p. 73) desempenha

um papel importante, uma vez que as condições de engajamento dos personagens, o compartilhamento de técnicas e ideias, e as ações conjuntas são características de uma comunidade de práticas.

2.1 Parte 1: 1814 - 1837

Figura 1 – James Joseph Sylvester por volta de 1840



Fonte: Parshall (2006b)

2.1.1 A Formação Inicial de Sylvester

A família de Sylvester é de origem alemã e seu avô, Simon Joseph, mudou-se para a Inglaterra em meados do século XVIII onde se casou com a, também alemã, Zipora com quem teve 4 filhos, entre eles Abraham, Pai de Sylvester.

Em 1810, o casal Abraham e Miram Joseph se mudou para Londres juntos com seus 8 filhos. A família residiu mais especificamente no número 7 da passagem Magdalen na rua Prescott, região conhecida por sua tradição judia, que era sua religião. Após um período de adaptação, nascem outros dois filhos: Frederick Joseph, em 1812 e James Joseph no dia 3 de setembro de 1814.

Aos seis anos de idade, o pequeno James foi enviado para uma escola de meninos Judeus em Highgate, onde já se destacava pela capacidade matemática (PARSHALL, 2006b). Essa capacidade foi examinada pelo professor Olinthus Gregory da Royal Military Academy of Woolwich, que chegou a sugerir um tutor para acompanhar o desenvolvimento

do jovem. No entanto James foi transferido para outra escola em Islington onde passou pouco tempo entre 1826 e 1827.

De 1828 a 1829, Sylvester estudou no University College of London (UCL), uma instituição não sectária, que tinha como objetivo fornecer formação acadêmica para todos os que, por razões religiosas, não podiam (FEUER, 1984). Essa instituição chegou a ser chamada de fundação judaica, devido ao grande número de adeptos da religião que estudaram lá. Sylvester teve aulas com Augustus De Morgan, que foi professor da instituição nos períodos de 1828 a 1831 e de 1835 a 1867. No entanto, por problemas de disciplina, ele acabou sendo expulso do colégio para o qual, curiosamente, 10 anos depois, ele voltaria para como professor de filosofia natural.

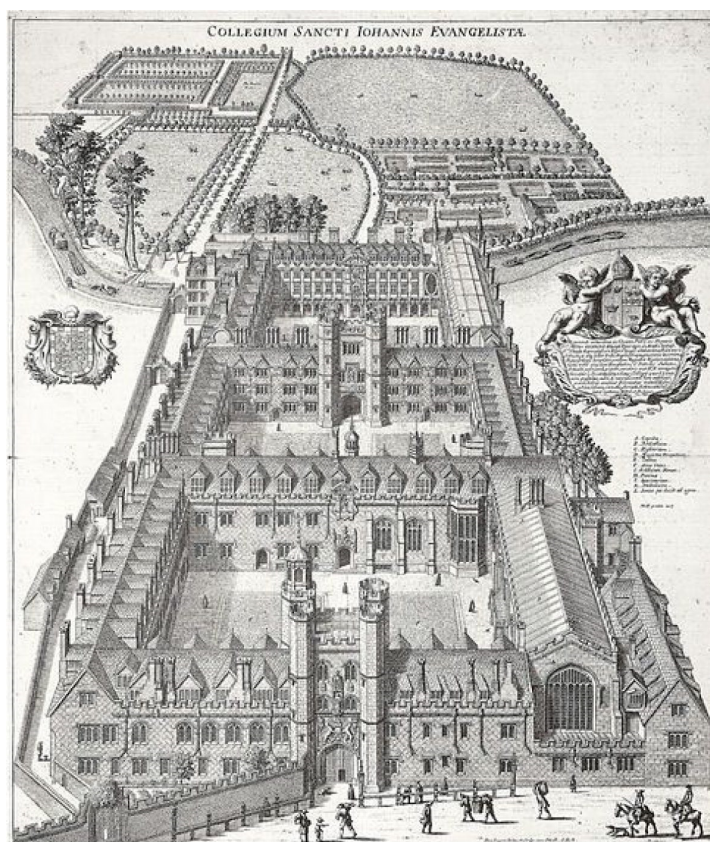
Após esse episódio, Sylvester foi transferido para a Royal Institution School, onde recebeu aulas de Richard Wilson (advogado, 15^o Wrangler ¹ do exame Tripos de 1824 e autor de “A System of Plane and Spherical Trigonometry”) que, ao final da passagem do jovem na instituição, escreveu uma declaração de qualificação, contribuindo para sua admissão no colégio St John’s em Cambridge.

De acordo com Baker (1912), a Royal Institution foi fundada 1814 a partir dos esforços do escritor Wiliam Roscoe (1753 – 1831). Sylvester foi premiado por seu desempenho em Matemática em fevereiro de 1830. Baker também destaca que esse período foi marcado por problemas de relacionamento, por conta de sua fé judaica.

¹ Título dado aos participantes do ranking do Exame Tripos. O primeiro colocado recebe o nome de Senior Wrangler e os demais recebem sua colocação.

2.1.2 Entre os Muros de Cambridge

Figura 2 – Universidade de Cambridge



Fonte: <https://www.parksandgardens.org/places/st-johns-college-cambridge>

Em 1831, Sylvester foi para o St. John's College, em Cambridge, onde conduziu seus estudos e sua formação até o exame Tripos de 1837. Nesse período, a Inglaterra passava por mudanças significativas em suas políticas de ensino. Discussões sobre as leis que impediam que dissidentes da igreja da Inglaterra assumissem cargos públicos influenciaram diretamente os rumos do ensino em Cambridge e conseqüentemente, os rumos de formação de Sylvester.

De maneira específica, essas discussões culminaram em mudanças curriculares como a introdução do cálculo leibniziano e lagrangiano como contraponto à versão newtoniana (PARSHALL, 2006b). Além disso, ocorreram debates sobre as restrições impostas a alunos e professores adeptos dos ensinamentos da igreja anglicana, fato que ganhou mais força após a implementação de um projeto de reforma no parlamento em 1833. As fortes discussões sobre esse tema começaram por volta de 1827 e se mantiveram durante a década de 1830.

O St. John's era considerado uma referência em matemática em Cambridge, fato que possivelmente influenciou a decisão de Sylvester de se matricular nesse colégio. O

apoio financeiro da instituição também pode ter representado um incentivo para sua matrícula. Cambridge dividia os estudantes em quatro categorias: Fellow-commoners, ricos membros da nobreza que pagavam seus estudos e desfrutavam de certas regalias; Pensioners, que também pagavam seus estudos, mas eram filhos de Clérigos; Scholars, que recebiam apoio parcial da faculdade; e, por fim, Sizars, que recebiam apoio integral, que incluía hospedagem e recursos financeiros adicionais. Havia 17 faculdades e o St. John's College era o que melhor trazia oportunidades de financiamento.

Figura 3 – Localização do St. John's College



Fonte: <https://www.parksandgardens.org/places/st-johns-college-cambridge>

Embora Sylvester fosse de uma família de classe média, ele ingressou em sua graduação como sizar em 1831. Isso fez com ele tivesse que lidar com outros preconceitos que se somavam aos já impostos por sua fé judaica. Como estudante, foi educado em matemática através dos livros escritos por James Wood por seu tutor Richard Gwatkin.

No primeiro ano, assistiu a palestras sobre Euclides, Álgebra e Trigonometria, além de palestras sobre literatura. O trabalho realizado nesse período tinha como finalidade o exame que seria realizado em maio de 1832, no qual Sylvester se mostrou o melhor candidato. De acordo com Bristed (1852), o currículo de Cambridge para preparação desses exames contemplava os seguintes temas: Euclides (livros 1, 2, 3, 4, 6 e 11); Álgebra (em particular a Teoria das Equações); Trigonometria Plana e Esférica; Principia de Newton (as 3 primeiras seções); Seções Cônicas; Estática; Dinâmica; Hidrostática e Óptica.

Deve-se ter em mente que a maioria desses assuntos é lida de maneira muito diferente do que seriam conosco. Assim, na trigonometria, os senos, os cossenos etc., não são linhas, mas proporções. Seções cônicas são lidas inteiramente por análise; embora possa haver uma "imagem" para cada

proposição, as relações das linhas são expressas inteiramente por fórmulas algébricas. Mas, pela ocasional recorrência dos termos "parábola" e "elipse", um principiante que lera *Bridge* não seria capaz de descobrir que *Hamilton* estava escrevendo sobre o mesmo assunto. Como os homens clássicos, com poucas exceções, são mais gentis com a geometria do que com a análise, isso torna tudo mais difícil para eles. ² (BRISTED, 1852, p. 274, Tradução Nossa)

Esta citação nos mostra uma característica importante na formação que Sylvester obteve em Cambridge. Os estudos sobre propriedades geométricas através de equações algébricas foram parte importante do currículo, o que pode justificar sua visão sobre o futuro da geometria no país.

A rotina no segundo ano foi semelhante ao anterior e os alunos foram preparados para realizar os exames Tripos e o Little go. Este último, apesar de ser um exame geral de Cambridge, não era considerado um desafio para os alunos da instituição (PARSHALL, 2006b). É possível afirmar que Tripos Mathematical era o principal norteador das atividades matemáticas do St Johns.⁸

O período de 1833 a 1835 foi conturbado e marcado pela luta contra as barreiras impostas aos Judeus nas universidades vitorianas. Sylvester se viu envolvido nessa luta, além disso enfrentou problemas de saúde e a morte de seu pai em 1834. Por esse motivo, sua carreira acadêmica só foi retomada em 1836, quando recebeu autorização para participar do Tripos, embora não estivesse liberado de aderir aos princípios da igreja anglicana para se formar. Nesse período de volta ao St John's ele assistiu a palestras do reverendo James Cumming, por meio de quem teve acesso à *Transactions of Philosophical Society*, uma vez que o próprio professor era um correspondente do periódico.

No terceiro ano em Cambridge, Sylvester dedicou-se a preparar-se para uma carreira na matemática. Buscando estabelecer uma reputação, se debruçou sobre os trabalhos de Newton, principalmente sobre o quinto dos onze lemas necessários na análise do movimento de massas presentes no "Mathematical Principles of Natural Philosophy". Em sua revisão intitulada "Suplemento para a Primeira seção de Newton", ele discutiu as definições de reta apresentadas em Euclides e Legendre em seu complemento do lema que afirma: "Todos os lados homólogos de figuras semelhantes, curvilíneas ou retilíneas, são proporcionais".

Essa publicação representa um estudante com capacidades matemáticas muito bem

² It must be borne in mind that most of these subjects are read very differently from what they would be with us. Thus, in Trigonometry, the Sines, Cosines etc., are not lines, but ratios. Conic Sections are read entirely by analysis ; though there may be a "picture" to each proposition, the relations of the lines are expressed entirely by Algebraic formulae. But for the occasional recurrence of the terms "parabola" and "ellipse," a tyro who had read *Bridge* would not be able to discover that *Hamilton* was writing on the same subject. As Classical men, with very few exceptions, take more kindly to Geometry than to Analysis, this makes it all the harder for them.

desenvolvidas. Além disso, ele esperava que uma boa colocação nos exames tradicionais lhe rendesse o destaque acadêmico necessário para trabalhar com pesquisas como as realizadas nesse ano. Sylvester não se preparou para o exame Tripos apenas com conhecimentos que adquiriu no St. Johns. De acordo com Parshall (2006b), ele contou com o auxílio de professores particulares que participaram de exames anteriores. Apesar de não se saber exatamente quantos foram esses professores, é certo que nomes como John Colenso (segundo wrangler e vencedor do prêmio First Smith ³ em 1836) e William Hopkins, 7º wrangler de 1826 (coincidentalmente professor de Cayley).

Além desses professores também estudou livros-textos como, “Elementary Treatise on Mechanics” (1819) de William Whewell; “An Analytical System of Sections Conics” (1828) de Henry Hamilton; “Treatise of Algebra” (1830) de George Peacock e “Treatise on the Integral Calculus” (1831) de John Hymers. No início de 1837, Sylvester encontrava-se pronto para sua inscrição no exame. O desempenho de Sylvester é bastante conhecido. Ele alcançou o posto de segundo Wrangler no Tripos de 1837, atrás de William Nathaniel Griffin, seu companheiro de St Johns. No entanto, de acordo com o obituário publicado pela Royal Society (1898), nesse ano não se mostrou exatamente vitorioso. Ao se recusar a assinar os 39 artigos da Igreja Anglicana ⁴, Sylvester é impedido de se formar e de assumir um posto em Cambridge.

Apesar desse revés, ele conseguiu um emprego como professor de Filosofia Natural na University College of London, a primeira universidade sem viés religioso na Inglaterra. Essa oportunidade se tornou possível por alguns aspectos que merecem destaque. Em 1837, Sylvester já começava a se destacar com a publicação de seu primeiro artigo “Fresnel’s Optical Theory of Crystals”, na *Philosophical Magazine* 11, e com sua crítica à definição de reta de Euclides, apresentada ao Lord Brougham, uma sequência do trabalho que foi produzido ao longo de sua passagem no St. John’s. Junto a isso, destacamos a recomendação feita por vários nomes importantes como J. W. Heaviside (Moderador Senior do Tripos de 1837), S. Earnshaw (Examinador Senior do exame), George Peacock, W. H. Miller, H. Philpot, J. Hymers, W. Hopkins, J. W. Colenso, P. Kelland, J. Bowstead, J. Cumrming, Frederick Thackeray, James Hildyard, E. Bushby, Richard Wilson, J. Challis,

³ Prêmio criado em 1769 como homenagem ao matemático e músico Robert Smith (1689 – 1768).

⁴ 1) fé na santíssima trindade; 2) verbo ou filho de Deus, que se fez verdadeiro homem; 3) descida de cristo ao inferno; 4) ressurreição de cristo; 5) espírito santo; 6) sagradas escrituras; 7) antigo testamento; 8) três credos; 9) pecado original; 10) livre arbítrio; 11) justificação do homem; 12) boas obras; 13) obras antes da justificação; 14) obras de super-rogação; 15) cristo único sem pecado; 16) pecado depois da conversão; 17) predestinação e eleição; 18) salvação eterna unicamente pelo nome de cristo; 19) igreja; 20) autoridade da igreja; 21) autoridade dos concílios gerais; 22) purgatório; 23) exercício do ministério na igreja; 24) língua no culto; 25) sacramentos; 26) pessoas indignas ministrando na congregação; 27) batismo; 28) ceia do senhor; 29) ímpios, que não comem o corpo de cristo na ceia do senhor; 30) ambas as espécies; 31) única oblação de cristo consumada na cruz; 32) casamento dos ministros; 33) confissão auricular; 34) tradições da igreja; 35) sucessão apostólica; 36) sagração de bispos e ministros; 37) magistrados civis; 38) que não são comuns os bens entre cristãos; 39) juramento do cristão.

e Olinthus Gregory (todos estes professores ou autores de livros-textos estudados por Sylvester em algum momento de sua formação), que garantem seu ingresso na instituição onde ele havia sido aluno dez anos antes.

2.1.3 O papel do matemático entre 1814 e 1837: da Analytical Society à necessidade de um periódico especializado

A formação de Sylvester foi contemporânea de movimentos que tinham o objetivo de gerar reformas na percepção da matemática produzida em solo britânico e a desenvolvida no continente. De acordo com Enros (1983), esses movimentos eram evidenciados por três aspectos: o debate sobre os méritos da matemática analítica versus matemática sintética, as ideias sobre o objetivo do ensino superior e as expectativas sobre matemática e ciências indicativas de crescente profissionalismo. Este último, evidencia o caráter não profissional dos pesquisadores que lidavam com matemática, os quais atuavam em outras profissões para ganhar a vida.

A oposição entre análise e síntese nos mostra evidências sobre o isolamento da matemática britânica em relação ao continente. De acordo com Koppelman (1971), homens como Robert Woodhouse, Charles Babbage, John Herschel e George Peacock, foram responsáveis por ações e produções de conhecimento que introduziram no mundo matemático inglês métodos e notações utilizados no continente. Em "The Principles of Analytical Calculation", (WOODHOUSE, 1803), o autor realizou comparações entre a notação fluxional britânica e diferencial utilizada no continente para argumentar sobre a importância do uso de uma boa notação (KOPPELMAN, 1971).

a pesquisa real me convenceu de que havia razões antecedentes para suspeitar, que não apenas na teoria das funções angulares, a demonstração é mais fácil e direta dando às quantidades sua representação verdadeira e natural; mas, que a introdução de expressões e fórmulas não analíticas, na investigação analítica, causou muita ambiguidade, noção confusa e paradoxo; que tornou a demonstração prolixa, ao torná-la menos direta, e a tornou deficiente em precisão e exatidão, ao desviar a mente da verdadeira fonte e derivação da expressão analítica.⁵ (WOODHOUSE, 1802, p. 87, Tradução Nossa)

Essa citação mostra que Woodhouse tinha a intenção de modificar a imagem que os britânicos tinham sobre matemática. Apesar dessas publicações não terem contado

⁵ actual research has convinced me of what there were antecedent reasons for suspecting, that not only in the theory of angular functions, demonstration is most easy and direct by giving to quantities their true and natural* representation ; but, that the introduction of expressions and formulas not analytical, into analytical investigation, has caused much ambiguity, confused notion, and paradox; that it has made demonstration prolix, by rendering it less direct, and has made it deficient in precision and exactness, by diverting the mind from the true source and derivation of analytical expression.

com repercussão ampla no Reino Unido, elas evidenciaram a necessidade de mudanças no ensino da disciplina, de modo que fosse possível se adequar à produção de conhecimento do continente.

Essa necessidade de adequação permaneceu viva na memória de alguns dos alunos de Woodhouse em Cambridge. É o caso de George Peacock, um dos fundadores Analytical Society em 1812 (ENROS, 1983, p. 27). Entendemos que tal sociedade pode ser considerada como o primeiro movimento organizado na busca pela adequação das práticas matemáticas britânicas às práticas do continente.

A Sociedade Analítica aderiu à forte visão da análise. Ele enfatizou a importância de desenvolver análises, purificá-las de elementos não analíticos e considerar a análise como a base da matemática. (...) A Sociedade considerava "geometria e demonstração geométrica como contrárias aos seus objetos finais". ⁶ (ENROS, 1983, p. 28, Tradução Nossa)

Como pode ser visto nessa citação, as ideias da Analytical Society eram baseadas em um sentimento de reforma na produção de conhecimento em matemática, tanto do ponto de vista conceitual quanto institucional. Como Durand-Richard (1996, p. 459) afirma, Babbage, Herschell e Peacock (nomes principais da sociedade) se engajam na implementação dos métodos analíticos na vida acadêmica de Cambridge. Ainda de acordo com a autora, a adoção das práticas leibnizianas representa um verdadeiro ato político, fator que é forte evidência da existência de uma comunidade com demandas não apenas pessoais, mas de formação de um pensamento nacional. O anseio por modificações na produção de conhecimento matemático no Reino Unido pode ser percebido no prefácio das memórias da sociedade publicadas em 1813:

É o espírito dessa linguagem simbólica, por esse tato mecânico (tanto em unísono com todas as nossas faculdades), que leva o olho de uma só vez através das mais intrincadas modificações de quantidade, para condensar páginas em linhas e volumes em páginas. ; encurtando o caminho para a descoberta e preservando a mente não fatigada por esforços contínuos de atenção às partes menores, para que possa exercer todo o seu vigor naquelas que são mais importantes; ⁷ (ANALYTICAL SOCIETY, 1813, p. i, Tradução Nossa)

⁶The Analytical Society adhered to the strong view of analytics. It emphasized the importance of developing analysis, purifying it of nonanalytic elements, and taking analytics to be the basis of mathematics. (...) The Society regarded "geometry, and geometrical demonstration, as contrary to its ultimate objects".

⁷It is the spirit of this symbolic language, by that mechanical tact, (so much in unison with all our faculties,) which carries the eye at one glance through the most intricate modifications of quantity, to condense pages into lines, and volumes into pages; shortening the road to discovery, and preserving the mind unfatigued by continued efforts of attention to the minor parts, that it may exert its whole vigor on those which are more important;

Em outro trecho do prefácio encontramos afirmação relevante: "O raciocínio simbólico parece ter sido introduzido no mundo sob auspícios desfavoráveis, e ter sido visto em sua infância com olhos de extremo ciúme."⁸ (ANALYTICAL SOCIETY, 1813, p. ii). Ambas as citações nos mostram dois aspectos importantes da sociedade. Primeiro que os membros da sociedade deixam explícitas suas intenções de disseminar o pensamento simbólico na produção matemática britânica. Por outro lado, o reconhecimento de que existiu forte resistência sobre a introdução dessa nova abordagem no Reino Unido. Esses conflitos de interesses refletem a disputa entre análise e síntese apontada no início da seção.

Esses episódios evidenciam o embrião de uma comunidade de práticas que é impulsionada pela iniciativa dos membros da Analytical Society. Dos personagens até aqui revelados, dois deles se encontram em posições determinantes para o futuro das atividades de Cambridge. Peacock e Babbage se tornaram, respectivamente, professores Lowndeano (Geometria) e Lucasiano (Matemática) em Cambridge. Além disso, Peacock foi revisor do Tripos Exam entre 1815 e 1823. Esses fatores contribuíram para a manutenção do espírito reformista destacado no prefácio das memórias da Analytical Society e para a continuidade de uma comunidade que compartilhava do interesse pelo cálculo simbólico. No entanto, essa sociedade não durou muito, tendo sido desmontada em 1813, o que limitou a perpetuação desse coletivo de práticas.

Do ponto de vista de Wenger (1999), o grupo oriundo da Analytical Society não se constituiu em uma comunidade de práticas. É possível observar um engajamento mútuo, mas o compartilhamento de repertório não se revela devido a ser um grupo com interesses em trazer as ideias do continente para solo britânico. Possivelmente, a curta duração da sociedade foi o motivo para a não constituição de práticas próprias. Apesar disso, a atuação desses matemáticos representa a necessidade de espaço para a divulgação das produções matemáticas no Reino Unido.

Após esse período, os matemáticos (no sentido de alguém que ganha a vida com pesquisa em matemática) não encontravam espaços específicos para divulgação de seus trabalhos. Na verdade, essa dificuldade de publicação se refere a trabalhos que lidavam especificamente com problemas internos à matemática. Nesse cenário, iniciativas como a Cambridge Philosophical Society (CPS) em 1819 se mostraram meios de comunicação capazes de atender à demanda.

De acordo com Cannon (1964), essa nova sociedade foi uma extensão da Analytical Society, uma vez que nomes como Herschel, Babbage, Peacock são nomes presentes nas

⁸Symbolic reasoning appears to have been ushered into the world under unfavourable auspices, and to have been regarded in its infancy with an eye of extreme jealousy.

primeiras publicações de suas *Transactions*. Além destes, outros personagens que lidavam com matemática estiveram presentes nas secretarias da sociedade: o próprio Peacock, William Hopkins (notável treinador para o Tripos Exam) e William Whewell.

O papel de Whewell no processo de disseminação das técnicas analíticas em solo britânico é bastante curioso. Ao mesmo tempo em que ele se tornou um dos principais divulgadores dessa abordagem, também foi seu principal rival. Apesar de ter empregado os métodos defendidos pela Analytical Society, o matemático era contrário aos estudos da análise pura e a considerava útil quando se identificava uma aplicação. Ele optou por uma abordagem que combinava análise e síntese nos problemas de mecânica para evitar uma "mácula do analista". (BECHER, 1980a, p. 16)

Devido à influência dos livros-textos de Whewell em Cambridge, a ideia de combinar as produções de conhecimento do Reino Unido e do continente se mostrou um meio importante de divulgação do pensamento analítico na Inglaterra Vitoriana. Esse episódio nos mostra como iniciativas voltadas para a pesquisa em matemática pura (sem uma aplicação direta em outras áreas) enfrentava resistência das sociedades científicas ao longo desse período. Essa constatação pode ser percebida no prefácio do primeiro volume das *Transactions* da Sociedade Filosófica de Cambridge:

Muitas produções de pessoas assim ligadas à Universidade foram, em diferentes momentos, recebidas com aprovação. Há, no entanto, razão para acreditar que muitos outros trabalhos - considerados talvez pelos autores deles, não suficientemente consideráveis para publicação separada, mas ainda assim repletos de informações importantes - foram deixados de lado; e que muitas observações, resultado de uma investigação cuidadosa, foram registradas de forma imperfeita. Nessas circunstâncias, pensava-se que grandes vantagens poderiam ser obtidas com o estabelecimento, na Universidade, de uma Sociedade, cujo objetivo principal deveria ser o avanço da Filosofia Natural. ⁹ (CPS, 1822, prefácio, p. iv, Tradução Nossa)

Nesse trecho, observamos mais uma vez o reconhecimento de que o espaço para algumas publicações específicas era limitado. Além disso, também se pode notar a semelhança com o discurso dos tempos da Analytical Society, no sentido de que existia uma demanda por criação de novos espaços capazes de divulgar a produção de conhecimento britânica. Sobre isso, é importante destacar dois fatores: a presença dos matemáticos

⁹ Many productions of persons thus connected with the University have, at different times, been received with approbation. There is, however, reason to believe that many other works - deemed perhaps by the authors of them, not sufficiently considerable for separate publication, but yet replete with important information - have been suffered to remain unknown ; and that many observations, the result of careful inquiry, have been imperfectly recorded. Under these circumstances, it was thought that great advantages might be derived from the establishment, in the University, of a Society, the main object of which should be the advancement of Natural Philosophy.

defensores do pensamento analista nos artigos publicados nas *Transactions*, o que inclui Whewell, e a seguinte afirmação: "Os vários departamentos de Aprendizagem Matemática e Filosófica ocupam há muito tempo um lugar de destaque no sistema de Educação adotado na Universidade de Cambridge"¹⁰ (CPS, 1822, prefácio, p. i). Tais fatores são indícios de que os matemáticos tinham esse periódico como um meio de divulgação de suas pesquisas.

Outro meio de comunicação com potencial para divulgação de pesquisas matemáticas, tanto analíticas quanto sintéticas, foi o relatório da British Association for the Advance of Science (BAAS), que surge a partir da crítica do estado de declínio da ciência britânica. A estrutura, na qual foram instituídas as sociedades reais de Londres, Edimburgo e Irlanda, não estimulava a presença de pessoas familiarizadas com as ciências (ORANGE, 1972).

Entre as várias manifestações sobre a situação da ciência no Reino Unido, o texto de Babbage publicado em 1830 destaca o isolamento da matemática britânica mais uma vez:

Que a ciência há muito foi negligenciada e declinando na Inglaterra, não é uma opinião originada em mim, mas é compartilhada por muitos, e foi expressa por uma autoridade maior do que a minha. Oferecerei alguns avisos sobre este assunto, que, por sua posição dispersa, provavelmente não terão chamado a atenção do leitor e que, quando combinados com os fatos que detalhei nas páginas subsequentes, admitiremos que merecem atenção considerável. ¹¹ (BABBAGE, 1830, p. iv, Tradução Nossa)

Nesse trecho inicial do prefácio de seu livro sobre o declínio das ciências britânicas notamos que as demandas pelas adequações não se limitavam à matemática, fato que pode ser constatado na seguinte afirmação: "Na matemática, há muito puxamos as rédeas e desistimos de uma corrida sem esperança."¹² (BABBAGE, 1830, p.viii). Além de ser uma extensão do discurso da Analytical Society, é possível perceber que a necessidade por mais espaço para pesquisas em matemática ainda não fora suprida, mesmo com as iniciativas que surgiram até este período.

Por fim, é importante compreender o significado do ponto em comum de cada uma das iniciativas que apresentadas nesta seção. A existência de personagens que demandaram por espaço para publicação voltada exclusivamente para matemática, mostra mais do

¹⁰The various departments of Mathematical and Philosophical Learning have long occupied a distinguished place in the system of Education adopted in the University of Cambridge

¹¹That science has long been neglected and declining in England, is not an opinion originating with me, but is shared by many, and has been expressed by higher authority than mine. I shall offer a few notices on this subject, which, from their scattered position, are unlikely to have met the reader's attention, and which, when combined with the facts I have detailed in subsequent pages, will be admitted to deserve considerable attention.

¹²In mathematics we have long since drawn the rein, and given over a hopeless race

que simplesmente o atraso da produção britânica em relação ao continente. Entendemos que esse fato expressa a necessidade de coesão entre os pesquisadores em matemática do período, a qual só vai se revelar com a formação da *Comunidade britânica dos Invariantes*.

2.2 Parte 2: 1837 – 1855

2.2.1 UCL, Virgínia e o Atuário: a trajetória inicial de um matemático

Sylvester permaneceu como professor de Filosofia Natural da UCL por 3 anos. Nesse período, ele produziu 10 artigos, todos publicados na *Philosophical Magazine*, que tratavam de óptica, movimento de corpos rígidos e Teoria de Eliminação. Esses trabalhos apresentam bem as áreas de interesse que nortearam o início de sua carreira profissional.

De acordo com James (1997), as atribuições de Sylvester incluíam o ensino de ciências e o de física em particular. Apesar de não ter feito grande sucesso como professor, (de acordo com Parshall (2006b), ele assumiu uma cadeira muito tradicional na UCL), ele aproveitou esse período para começar a se estabelecer como pesquisador.

O University College que ele encontrou, após 10 anos longe, lhe permitia se engajar tanto em causas acadêmicas quanto políticas. Isso aguçou sua motivação, fazendo com que participasse mais ativamente da vida na instituição. Em 1838, foi examinador do primeiro Flaherty Scholarship de matemática e física junto com Olinthus Gregory (URBAN, 1838). Nessa época, Sylvester publicou dois artigos, um apresentando uma abordagem analítica da teoria óptica para cristais de Fresnel e outro sobre movimento de fluídos. Esse foi resultado de seu trabalho como professor, no qual conduziu experimentos e palestras. Entretanto, é importante destacar que a discussão sobre o comportamento da luz fazia parte dos interesses da comunidade acadêmica e foi apresentada a Sylvester por Philip Kelland através do artigo publicado na *Cambridge Philosophical Transactions X*.

De acordo com Parshall (2006b), os cursos ministrados por ele exigiam fluência com notação algébrica, trigonometria, seções cônicas, equações quadráticas e geometria analítica. Além disso, devido a uma notória predileção própria, ele se esforçou para manter o curso o mais matemático possível. Os tópicos abordados incluíam estática, dinâmica, hidrostática, movimento elíptico, gravitação, óptica e astronomia, com pouca ou nenhuma referência ao calor, eletricidade ou magnetismo (RICE, 1996). Esses detalhes são indícios interessantes sobre como seus interesses se configuravam no início de sua carreira, fato que se manteve até o final da década de 1840.

O ano de 1839 foi marcado pela primeira publicação em matemática de Sylvester. O artigo Sylvester (1839) trata de uma técnica para solução de um sistema de duas equações de grau qualquer. Esse problema havia sido tratado por Sturm em 1835 em

suas memórias sobre equações numéricas publicadas na *Mémoires divers présentés par des savants étrangers*. Seu interesse por resolução de sistemas de equações o levou ao estudo das propriedades dos determinantes.

No mesmo ano, ele foi eleito membro da Royal Society of London por conta da qualidade de seu trabalho (JAMES, 1997). O fator importante é que essa eleição ocorreu, entre outros motivos, por conta de uma rede relacionamentos que Sylvester estabeleceu desde sua entrada na UCL. Essa candidatura foi apoiada por pessoas dessa rede, dentre as quais podemos destacar: Thomas Graham (1805 – 1869), professor de química da University College, John Herschel (1792 – 1871), membro da Royal Society e um dos principais entusiastas do movimento que Cannon (1964) chamou de “*rede de Cambridge*”¹³ e Isaac Goldsmid (1778 – 1859), um importante financiador da University College.

Em 1840, ocorreram apenas duas publicações sobre Teoria de Eliminação: a continuação do trabalho iniciado um ano antes e uma nota sobre o tema. Apesar de parecer pouco, esse trabalho com eliminação apresentou a forma matricial de organização dos coeficientes das equações envolvidas no sistema que conhecemos hoje e utilizou a permutação de linhas ou colunas para realizar o cálculo de determinantes.

Apesar de estar se estabelecendo profissionalmente, é possível afirmar que um cargo como professor de Matemática, fosse onde fosse, seria capaz de seduzir Sylvester para um novo desafio na carreira. Foi o que ocorreu no ano de 1841, devido a uma inusitada proximidade entre a UCL e a Universidade da Virginia (EUA). De acordo com Feuer (1984), a universidade americana e a londrina compartilhavam de ideais progressistas (e reformistas, no caso inglês) e o próprio Thomas Jefferson teria enviado um amigo, Francis W. Gilmer, para Londres em 1824. O objetivo da visita era recrutar os melhores professores possíveis para trabalhar em Charlottesville. De fato, Gilmer recrutou professores para a universidade americana, entre eles Thomas H. Key (1799 – 1875). Portanto, podemos afirmar que a Universidade da Virginia surge com inspirações liberais com a UCL e mantém contato constante com a universidade britânica.

É nesse contexto que o jovem matemático inglês se candidata à vaga de professor de matemática da Universidade da Virgínia. Em outubro de 1840, a morte do professor de Filosofia Natural e Matemática Charles Bonnycastle deixa vago o posto de docência e a notícia sobre a oportunidade profissional atravessa o atlântico. Em maio de 1841, Sylvester se encontra reunindo depoimentos de apoio à sua candidatura ao novo cargo (um movimento muito parecido com o realizado para o ingresso na UCL).

¹³Um grupo de cientistas, historiadores e outros estudiosos, composto por pessoas que se conheciam, mas não todas intimamente. Às vezes, os contatos presenciais eram comuns, como nos dons da mesma faculdade, mas com maior frequência eram periódicos, como nos batizados, nas celebrações de Natal e nas reuniões da Associação Britânica para o Avanço da Ciência. (CANNON, 1964)

Sobre esse período, duas cartas são destacadas por Parshall (1998): 1) em maio de 1841, Sylvester escreve para Herschel e, na carta, apresenta seu trabalho com teoria da eliminação e solicita apoio para a candidatura à Universidade da Virgínia, o qual foi acompanhado pelo apoio de Morgan, Charles Babbage, entre outros. 2) em agosto do mesmo ano, a UCL recebe a carta pedindo desligamento da instituição devido ao seu aceite na universidade americana.

Entretanto, essa contratação esteve envolvida por fatores que geraram certa desconfiança. Inicialmente destacamos que, apesar de um apoio qualificado a sua candidatura e de um título de mestre conquistado em Dublin ¹⁴, o contrato foi oferecido na condição de um ano de experiência. Essa aparente restrição ao nome de Sylvester era influenciada pelo clima de desconfiança que cercava Charlottesville.

Um ano antes da chegada do novo professor de matemática a Virgínia, a universidade se viu envolvida com o assassinato de um membro do corpo docente como consequência de uma manifestação de estudantes mascarados. Os problemas com o comportamento dos alunos eram frequentes por causa de uma população que relutava em aceitar professores estrangeiros no estado. Nesse sentido, é importante ressaltar que o jornal *The Watchman of South* apresentou uma nota em agosto de 1841 onde indicava a forte necessidade de contratação de professores da região, sobretudo cristãos: “o grande corpo das pessoas nesta comunidade é de profissões cristãs e não pagãs, nem mexilhões, nem judeus, nem ateus, nem infieis” ¹⁵ (FEUER, 1984, p. 156).

Em novembro de 1841, Sylvester desembarca em Charlottesville. De acordo com Feuer (1984), sua recepção na América é aparentemente boa tendo vários elogios. Logo de início, recebe uma turma com 47 estudantes (divididos em 3 níveis: primeiro júnior, segundo júnior e sênior), o terceiro maior número de inscritos, fato que pode indicar o quanto sua contratação gerou expectativas. É importante destacar que a primeira turma de iniciantes receberia palestras sobre álgebra, aritmética, geometria euclidiana. A segunda turma, por sua vez, acrescentavam-se tópicos de geometria descritiva, além de elementos de cálculo diferencial. A turma avançada aprofundaria os conhecimentos sobre cálculo e mecânica. Para isso, foram utilizados livros-textos de Lacroix, Legendre e Poisson, além do *Mécanique Celeste* de Laplace. Um fato interessante é que Sylvester se viu lidando com conhecimentos de geometria em coordenadas homogêneas, o que pode ter influenciado seu interesse nos trabalhos de Plücker no final da década.

¹⁴De acordo com Baker (1912), existia uma parceria entre a escola irlandesa e o St John's que garantia graduação em ambas as escolas. Além disso, as exigências de testes religiosos para obtenção de diploma haviam sido abolidas desde 1794 na Irlanda. Sendo assim, em julho de 1841 Sylvester estava no Trinity College of Dublin para receber o grau de bacharel e mestre.

¹⁵The great body of the people in this Commonwealth are by professions Christians and not heathen, nor musselmen, nor Jews, nor Atheists, nor Infidels.

Apesar dessa boa recepção, o cenário se modificou rapidamente por conta de desentendimentos causados por uma série de episódios de xenofobia que estavam se tornando comuns em Charlottesville. De acordo com Feuer (1987), o corpo discente da universidade contava com vários alunos que exigiam que os professores fossem, necessariamente da Virgínia. Além disso, Sylvester enfrentou problemas de disciplina com alguns alunos de suas turmas.

O principal problema foi com William H. Ballard, que teria sido desrespeitoso com o professor e foi, conseqüentemente, denunciado pelo mestre. Um fator importante é que denúncias como essa também surgiram em outras escolas da universidade.¹⁶ O caso foi discutido no conselho da universidade no dia 4 de fevereiro de 1842, que gerou apenas uma advertência para Ballard. Sylvester ficou realmente descontente com essa decisão e a discussão ainda durou até o mês seguinte.

Esses acontecimentos foram corroendo seu entusiasmo com o novo trabalho como professor de matemática. Ele acabou por ter que se despedir da Virgínia após quatro meses e meio de estadia, indo morar em Nova York próximo a seus irmãos Nathaniel e Sylvester. De acordo com Archibald (1936), nesse período ele conheceu o professor de Matemática de Harvard Benjamin Pierce, com quem morou até seu retorno para Londres em 1844.

Nesse tempo em Nova York, Sylvester chegou a fazer uma visita à Inglaterra junto com Pierce. Nessa relação ele reforçou seu contato com conceitos de mecânica, como é destacado em uma carta de 5 de setembro de 1842, onde ele apresenta ideias sobre movimento circular. Além disso, ele tentou ingressar na Universidade de Columbia na vaga de mecânica analítica como é possível ver no trecho da carta a seguir:

Quando eu me separei de vocês, você foi gentil o suficiente para expressar seu desejo de me servir pela influência do seu nome e recomendação se houver alguma vaga onde eles possam admitir ser levada efetivamente em jogo. Tal contingência acabou de cair através da demissão do Professor Anderson do Columbia College, que ele enviou ontem e que, em todas as provas, será aceito como final.¹⁷ [SYLVESTER para HENRY, jun/1843] (PARSHALL, 1998, p. 10, Tradução Nossa).

Sylvester conheceu o físico Joseph Henry (1797 – 1878) por intermédio de Pierce

¹⁶O caso da saída de Sylvester da Universidade da Virginia é realmente misterioso. Ao que tudo indica, o conflito com Ballard foi o motivo da saída, no entanto essa não é a versão oficial dos fatos que, aparentemente foram abafados pela universidade. Feuer (1984) apresenta um relato completo e detalhado dos acontecimentos daquela época.

¹⁷When I last parted from you, you were kind enough to express your desire to serve me by the influence of your name and recommendation should any vacancy occur where they might admit of being brought effectively into play. Such a contingency has just fallen in through the resignation of Professor Anderson of Columbia College, which he sent in yesterday and which will in all probability be accepted as final.

no período em que esteve em Nova York. Em sua carta, solicita recomendações para a candidatura à vaga de professor do Columbia College. Henry não hesitou em ajudar, mas a nomeação não aconteceu. É importante lembrar que os acontecimentos da Universidade da Virginia ainda eram recentes e muito mal explicados, o que possivelmente gerou um clima de desconfiança sobre os trabalhos do matemático inglês.

Sem possibilidades nos Estados Unidos, a volta para Inglaterra passou a ser uma alternativa, que se tornou possível com a oportunidade de trabalho na agência de seguros Equity and Law Life Assurance Society em Londres (ARCHIBALD, 1936). Um pouco antes, ele tentou se recolocar como pesquisador, embora tenha publicado apenas uma nota na *Philosophical Magazine* sobre um critério para determinar as raízes de uma equação numérica.

Sylvester iniciou seu trabalho como atuário no período em que a profissão estava se desenvolvendo, bem como o interesse por pessoas com habilidade matemática, fator que era reforçado por sua posição no Tripos. Apesar disso, existem relatos de que ele deu aulas particulares nesse período, o que pode mostrar que essa mudança profissional não era o seu principal desejo (BAKER, 1912). Uma curiosidade sobre esses relatos é que eles mostram que uma das pessoas que receberam aula foi Florence Nightingale.

Em 1845, a Equity and Law Life Assurance Society fazia um ano de existência em meio a uma disputa de mercado. Sylvester já se encontrava instalado no número 26 da Lincoln's Inn Fields, no mesmo prédio da agência. Além de atuário, suas atribuições eram equivalentes à de um secretário, cargo que foi criado para ele devido à impossibilidade de se tornar diretor, uma vez que, para isso, o estatuto do escritório exigia que se fosse advogado, como confessou em uma carta escrita para Joseph Henry no ano seguinte:

Minha ocupação atual é a de Atuário e Secretário de uma Sociedade de Garantia. Comecei sendo um pouco mais do que uma espécie de Conselheiro Científico da Sociedade, mas ocorreram eventos que colocaram em minhas mãos toda a responsabilidade da Gerência, de modo que agora sou, por vocação, um homem de negócios - realizo toda a correspondência do Escritório, supervisiono os livros, elaboro as minutas e, em uma palavra, me transformo em um novo personagem, e tenho que desempenhar uma parte que eu não deveria, doze meses atrás, sonhar em empreender.¹⁸ [SYLVESTER para HENRY, abr/1846] (PARSHALL, 1998, p. 16, Tradução Nossa).

¹⁸My present occupation is that of Actuary and Secretary to an Assurance Society. I began with being little more, than a sort of Scientific Counsellor to the Society, but events have occurred to throw the whole responsibility of the Management into my hands so that I am now by Vocation a Man of Business,—conduct the whole correspondence of the Office, superintend the Books, draw up the Minutes and in a word am transformed into a new character and have to perform a part which I should not twelve months ago have dreamt of undertaking.

Esta citação mostra que, em 1846, ele já vislumbrava assumir o cargo de diretor, mesmo que isso ainda não fosse realidade. Esse período coincide com a transição do *Cambridge Mathematical Journal* (CMJ) para o *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* (CDMJ), que seria editado por William Thomson (Lord Kelvin). Sylvester iniciou uma aproximação com o meio acadêmico através da participação da reunião anual da British Association for the Advancement of Science e se manteve informado sobre o surgimento da nova revista científica.

Ao mesmo tempo, o trabalho como atuário continuava a se desenvolver e era cada vez mais necessário estudar direito para exercer suas funções na seguradora. Em junho de 1846, Sylvester entrou no Inner Temple, instituição de treinamento para futuros advogados. Foi nesse contexto que ele conheceu seu futuro grande amigo Arthur Cayley, que residia na mesma Lincoln's Inn e que também estava se preparando para se tornar advogado (JAMES, 1997).

Como é conhecido, esse contato com Cayley rendeu muitos frutos do ponto de vista da produção matemática. Eles já se trocavam informações no ano de 1847, como registrado em uma correspondência de 24 novembro daquele ano, na qual discutem problemas relacionados à teoria dos números, mais especificamente sobre a obra *Théorie des Nombres* de Legendre (PARSHALL, 1998).

Ainda em 1847, Sylvester realizou uma viagem à França com a finalidade de estreitar os laços que esteve desenvolvendo desde sua volta para a Inglaterra. De acordo com o obituário da Royal Society London (1898), desde 1845 ele mantinha correspondência com matemáticos importantes do continente, em particular Charles Hermite (que viria a ser consultor do *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, editado por Sylvester em 1855); e Joseph Serret e Sturm, que acabaram se tornando um importante contato na produção dos artigos que trataram de teoria dos números com conexões com o último teorema de Fermat.

Resta mencionar minhas razões para apresentar essas descobertas de forma tão imperfeita. Eles me ocorreram durante uma rápida turnê no continente, e os resultados foram comunicados por mim ao meu ilustre amigo M. Sturm, em Paris, que gentilmente se comprometeu a torná-los conhecidos da minha parte no Instituto.¹⁹ (SYLVESTER, 1847, p. 191, Tradução Nossa).

Esta citação do trabalho “An Account of a Discovery in the Theory of Numbers

¹⁹It remains for me to state my reasons for putting forward these discoveries in so imperfect a shape. They occurred to me in the course of a rapid tour on the continent, and the results were communicated by me to my illustrious friend M. Sturm in Paris, who kindly undertook to make them known on my part to the Institute.

Relative to the Equation $Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz$ ” mostra que seu interesse por teorias dos números foi motivado, entre outros fatores, por seu contato com matemáticos franceses. Essas conversas geraram outras duas publicações ainda neste ano, as quais representaram variações do problema proposto neste último texto apresentado.

O ano de 1848 representou uma nova parada na produtividade de Sylvester após seu retorno à Europa. Devido à forte concorrência das agências de seguro e do desenvolvimento da profissão de atuário em Londres, em abril do referido ano se iniciaram reuniões com a finalidade de estabelecer um instituto de atuários e Sylvester passou a participar do comitê de implantação a partir de junho. Essas obrigações o afastaram do trabalho matemático, mas a pesquisa e a busca pelos assuntos relevantes do período seguiram.

Ainda em 1848, o matemático se encontrava estudando os textos de Plücker, como fica claro em carta enviada a Cayley em abril de 1849, na qual ele solicita mais tempo para leitura dos textos do autor alemão cuja obra o amigo havia lhe emprestado (PARSHALL, 2006b, p. 95). Essas leituras, aparentemente, influenciaram o trabalho que foi desenvolvido em geometria algébrica em conexão com a *Teoria dos Invariantes*, o que levou à correspondência enviada ao Lord Brougham, onde se discute o futuro da geometria através de sua ligação com conceitos algébricos.

A tendência atual da Geometria é apontar para uma generalidade que é incapaz de ser atingida por sua própria natureza, a menos que admitamos a doutrina do Espaço Inconcebível; espaço dotado de um número indefinido de dimensões. Linhas e figuras imaginárias no espaço comum há muito tempo são admitidas na Geometria Moderna, mas o Espaço Inconcebível (como me atrevo a chamá-lo) é um passo ainda mais alto na ordem do desenvolvimento transcendental. ²⁰ [SYLVESTER para LORD BROUGHAM, dez/1849] (PARSHALL, 1998, p. 20, Tradução Nossa)

É possível observar que diversas circunstâncias dificultaram a evolução da carreira de matemático até a década de 1850. No entanto, uma nova teoria e uma nova comunidade de práticas aguardava contribuições para seu desenvolvimento.

2.2.2 O desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*

Devido aos problemas que foram apresentados na seção anterior, podemos afirmar que a carreira de sucesso de Sylvester como matemático se iniciou em 1850. Esse ano

²⁰The present tendency of Geometry is to point to a generality which it is incapable from its very nature of attaining, unless we admit the doctrine of Inconceivable Space;—i.e. space endowed with an indefinite number of dimensions. Imaginary lines and figures in ordinary space have long been admitted into Modern Geometry, but Inconceivable Space (as I venture to term it) is a step still higher in the order of transcendental development.

é marcado por suas publicações sobre interpretações geométricas das propriedades dos polinômios homogêneos. Sua correspondência com Lord Brougham, também revela adequação aos movimentos que buscavam aproximar a matemática britânica à matemática do continente, uma vez que ele se propõe uma abordagem analítica dos problemas geométricos.

Além disso, também podemos afirmar que esse ano marca o início de seus trabalhos no desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. Nesta seção apresentaremos uma discussão a respeito do modo como essa Teoria chegou ao conhecimento de Sylvester, bem como se deu seu papel inicial no assunto. Como veremos, a nova Teoria exerce influência importante na produção matemática britânica. Esse fator que se possibilita não somente pelas interações nos jornais especializados, espaço que não existia nos períodos da Analytical Society e de outras iniciativas, mas também por conta da possibilidade de aplicações em situações como o caso dos problemas de contatos, que passam a ser discutidos no Reino Unido em 1850.

Compreender a perspectiva dos matemáticos sobre a nova Teoria se mostra importante para a analisar o papel dessas ações no desenvolvimento da matemática britânica entre 1850 e 1855. Para isso uma pergunta precisa ser respondida: do que trata a *Teoria dos Invariantes*? De acordo com Bernd Sturmfels, um matemático do século XIX responderia a essa pergunta afirmando que essa Teoria é a ponte entre álgebra e geometria (HILBERT, 1993). Essa perspectiva se aproxima da relação que Sylvester apontava no final da década de 1840.

Segundo Klein (1926), a *Teoria dos Invariantes* começa pela teoria dos números com o *Disquisitiones Arithmeticae* escrito por Gauss em 1801. O principal objetivo deste trabalho é estudar as formas quadráticas e as influências das substituições lineares sobre elas. Apesar disso, o tratamento algébrico/geométrico desse problema não foi visto como uma possibilidade imediata.

Além disso, outras problemáticas também podem explicar as origens da Teoria. Como exemplos, é possível apontar os seguintes episódios: as investigações sobre possibilidades e métodos para decomposição de formas quadráticas em somas de quadrados conduzidas por Lagrange, Laplace e Lebesgue; os teoremas sobre discriminantes de Joachimsthal e os *invariantes* diferenciais de Cauchy (MEYER, 1897, p. 3).

Em comum, essas problemáticas contavam com as investigações sobre transformações lineares em polinômios homogêneos. É nessa perspectiva que George Boole (1815 – 1864) retoma o problema, primeiro a partir de uma generalização, em 1840. Em seguida, como aponta a literatura sobre a história dos *invariantes*, escreve o texto fundador da Teoria em 1841 "Exposition of a General Theory of Linear Transformations" (BOOLE, 1841). Esse trabalho teve como uma de suas conclusões o fato de que é sempre possível

reduzir um polinômio homogêneo de grau 2 à soma de quadrados positivos e negativos através de uma transformação linear. Cabe destacar que esse problema foi revisitado por Sylvester em um artigo de 1852, onde ele enuncia a sua Lei de Inércia. Em outras palavras, as investigações iniciadas por Lagrange no século XVIII têm influência importante sobre o desenvolvimento da nova Teoria.

De acordo com Parshall (1989), foi ao lidar com a forma mais simples (um polinômio em duas variáveis) que Boole percebeu que o *discriminante* da forma quadrática permanece igual após uma transformação linear, a menos de uma potência do determinante dela. Além disso, Meyer (1897) acrescenta que a continuação do texto de 1841 estendeu essa ideia para formas de ordens superiores a 2 e chegou a esboçar o conceito de *covariante*, embora não tenha deixado explícito.

Ao tomar conhecimento desse artigo, Cayley entrou em contato com Boole enviando fórmulas e solicitando auxílio em suas pesquisas (CRILLY, 1986). Em seus trabalhos de 1845 e 1846, ele considerou formas multilineares, um avanço em relação ao trabalho que vinha sendo conduzido por Boole que se limitou a formas cúbicas binárias. A partir disso, ele descobriu novos *invariantes*, utilizando equações diferenciais parciais e propôs o objetivo principal da pesquisa da *Teoria dos Invariantes*: encontrar todos os derivados de formas algébricas que têm a propriedade de preservar sua estrutura inalterada após uma transformação linear de suas variáveis.

De acordo com Salmon (1885), Cayley foi responsável por apresentar os primeiros *invariantes* distintos dos discriminantes estudados por Boole. Em particular, o cálculo simbólico do produto das diferenciais parciais de um sistema de polinômios homogêneos, que ficou conhecido como *Hyperdeterminante*, se mostrou capaz de calcular *invariantes* diversos.

Existiram contribuições de matemáticos do continente para as pesquisas sobre polinômios homogêneos que se aproximaram do desenvolvimento de práticas referentes à nova Teoria britânica. Em 1844, Eisenstein trabalhou com solução geral de equações quárticas através do uso de determinantes, onde utilizou *invariantes* desenvolvidos por Cayley e Boole (SALMON, 1885). Apesar de não apresentar propriedades de invariância, ele se vale de objetos matemáticos que viriam a ser *invariantes*, como o caso do *discriminante* que já tinha sido discutido no trabalho de Boole. Esse episódio, destacado em Meyer (1897) e Salmon (1885), mostra uma característica importante da produção de conhecimento dos matemáticos britânicos. Apesar de encontrarmos os objetos comuns da Teoria em alguns trabalhos de matemáticos do continente, o interesse por sua propriedade central é uma agenda das pesquisas do Reino Unido nos primeiros anos da década de 1840.

Em 1850, as contribuições de Cayley são repercutidas pelo alemão Aronhold, que

apresenta *invariantes* diferenciais de formas cúbicas e quárticas. No mesmo ano, encontramos o início das publicações de Sylvester sobre o tema. Como afirmado anteriormente, ele conhece Cayley em 1846 e, a partir daí, os matemáticos começaram a trocar informações sobre a nova pesquisa em desenvolvimento. (PARSHALL, 1989)

Após as publicações das pesquisas citadas, no período de 1847 a 1849, a dupla britânica passou a se engajar nos problemas de contatos de cônicas, inspirados pelo trabalho de Plücker na década anterior. Destacamos aqui a correspondência que serviu como ponto de partida para a produção de Sylvester no início da década de 1850:

Estou extremamente agradecido pela sua pronta resposta (em um período em que eu sei que seu tempo está muito ocupado com a sua ocupação bifara) e sua referência ao artigo de Salmon. Eu mencionei que uma dúvida pendia sobre a afirmação de que, a menos que as raízes de $\square(U + \lambda V)$ ²¹ fossem todas reais, os pontos de inflexão devem ser todos imaginários. Ao olhar mais para o assunto, acho que a dúvida estava bem fundada, de fato, se todas as raízes são imaginárias, é verdade que as "flexões" são todas imaginárias, mas se duas raízes são reais e duas imaginárias, descobri com alguma surpresa que 4 das flexões (nem mais nem menos) não só podem, mas devem ser reais!²² [SYLVESTER para CAYLEY, dez/1850](PARSHALL, 1998, p. 28, Tradução Nossa)

Essa citação mostra que ambos estavam envolvidos nas pesquisas sobre intersecção de cônicas e apresenta mais um participante no desenvolvimento da nova teoria, o reverendo George Salmon. Parshall (2006a) indica que ele e Sylvester se conheceram entre 1850 e 1852 por intermédio de Cayley. Essa relação influenciou os trabalhos que tratam de geometria em polinômios homogêneos, através da relação que estes apresentam com o "On the Classification of Curves of Double Curvature", publicado no *Cambridge and Dublin*, periódico onde Sylvester publicou seu primeiro artigo sobre o tema, uma vez que Salmon utiliza os polinômios homogêneos para representação de curvas neste artigo.

Além disso, percebe-se o início do que chamaremos, nesta tese, de núcleo dos *invariantes*. Este é o grupo constituído pelos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da nova Teoria. Reconhecemos que, como a historiografia tradicional aponta, Boole, Cayley, Salmon e Sylvester são os principais nomes desse trabalho no

²¹A expressão $\square(U + \lambda V)$ se refere ao determinante de uma matriz formada pelos coeficientes do polinômio homogêneo $U + \lambda V$, onde U e V também são polinômios homogêneos. Trataremos melhor deste assunto no próximo capítulo.

²²I am exceedingly obliged by your prompt reply (at a period when I know your time is so much taken up with your bifarious occupation) and your reference to Salmon's paper. I mentioned that a doubt hung over my assertion that unless the roots of $\square(U + \lambda V)$ were all real, the points of inflexion must be all imaginary. On looking further into the matter I find that the doubt was well founded, in fact if all the roots are imaginary, it is true that the "flexures" are all imaginary, but if two roots are real and two imaginary, I have discovered with some surprise, that 4 of the flexures (neither more nor less) not only may but must be real!

Reino Unido. No entanto, a participação de outras pessoas é revelada em trocas de correspondência com o personagem central da tese, o que nos dá uma ideia sobre os movimentos desse período.

O ano de 1851 foi marcado pela entrada definitiva de Sylvester na *Teoria dos Invariantes* através de dois trabalhos publicados no *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*: “Sketch of a Memoir on Elimination, Transformation, and Canonical Forms” e “On the General Theory of Associated Algebraical Forms”. Esses trabalhos tratam diretamente do problema abordado por Boole em 1841, propondo uma expansão para polinômios de grau maior do que 2. Além disso, esses trabalhos também fazem referências às formas adjuntas apresentadas por Charles Hermite, ao lidar com operadores que geram resultantes nos processos de eliminação, os quais permanecem inalterados após transformações lineares das equações de sistema de coexistência.

O protagonismo de Sylvester passa a ser bastante acentuado no período de 1851 a 1855. Nesse intervalo, encontramos as publicações que o transformaram em um matemático de reputação internacional.²³ O estudo das formas canônicas é uma primeira contribuição de sua pesquisa, na qual ele apresenta a conhecida Lei de Inércia para formas quadráticas em 1852 (MEYER, 1897). Além disso, a relação entre equações diferenciais parciais e *covariantes* foi apresentada nos artigos sobre os cálculos das formas, onde o próprio autor reconhece a influência de Aronhold para a compreensão dessa relação.

Salmon (1885) destaca a parceria de Cayley, Sylvester e Aronhold, que gerou contribuições para o desenvolvimento da teoria. Nesse contexto, Salmon se preocupa em identificar os autores e suas contribuições particulares:

Concomitantes mistos são de Sylvester (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. vii p.80). O teorema, art. 135, é de Cayley e Sylvester. A aplicação de funções simétricas aos invariantes da quântica binária foi, acredito, feita pela primeira vez no apêndice de minhas curvas do plano superior (1852). O método (Art. 138) para daí encontrar condições para sistemas de igualdades entre as raízes é o de Cayley (*Philosophical Transactions*, 1857, p. 703). No que diz respeito ao assunto em geral, deve-se fazer referência à importante série de artigos de Sylvester, começando no sexto volume do *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*; a uma série de artigos sobre Quantics publicados por Cayley em *Philosophical Transactions*; e ao *Memoir on Invariants* de Aronhold (*Crelle*, vol. LXII.). O nome 'invariante', assim como o resto da nomenclatura, é de Sylvester.²⁴ (SALMON, 1885, p. 344, Tradução Nossa)

²³É fato que Sylvester já era conhecido por conta de seus trabalhos com a Teoria de Eliminação. No entanto, consideramos este período como a construção de sua imagem internacional, por causa do pioneirismo da *Teoria dos Invariantes* e de seu papel central no desenvolvimento dela.

²⁴Mixed concomitants are Sylvester's (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. vii p.80). The theorem, Art. 135, is Cayley's and Sylvester's. The application of symmetric functions to the invariants of binary quantics was, I believe, first made in the appendix to my *Higher Plane Curves* (1852). The

Quando o autor cita o artigo 135, ele se refere à propriedade do *discriminante* que, ao se anular, indica pontos contato das curvas ou superfícies. Além da colaboração de Aronhold com o compartilhamento de técnicas, essa citação nos mostra o papel central de Sylvester no desenvolvimento das pesquisas da *Teoria dos Invariantes*, em particular no vocabulário que ele vinha construindo com Cayley.

Ao longo das publicações do início da década de 1850, podemos encontrar manifestações de Sylvester para a criação de uma nomenclatura da nova Teoria. De acordo com Parshall (1998, p. 35-37), apesar de não ter usado todos os termos que criou, o matemático inglês tinha um interesse especial em sua criação, como uma forma de estabelecer um pioneirismo na pesquisa. Duas publicações podem nos trazer melhor percepção do desenvolvimento desse vocabulário: "On a Theory of the Syzygetic Relations of Two Rational Integral Functions, Comprising an Application to the Theory of Sturm's Functions, and That of the Greatest Algebraical Measure" (SYLVESTER, 1853f), onde Sylvester apresenta uma lista dos termos que julgava serem os mais apropriados para a nova teoria; e "Mathematics, Recent Terminology in" (CAYLEY, 1860a), onde o autor pretendia esclarecer significados de termos que tinham se consolidado até aquele momento.

Alguns termos podem revelar os passos que foram importantes para o processo de desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. Como forma de observar essa evolução, observamos as descrições dos dois matemáticos, em seus respectivos textos. É importante destacar que só levaremos em consideração os termos que surgem nos dois textos, de modo que essa lista representa a natureza criativa de Sylvester e o quanto estes termos se tornaram aceitáveis até 1860.

Permita-me aqui fazer uma digressão momentânea, a fim de poder evitar no futuro a inconveniência de usar a frase "invariante ou outro concomitante", e assim poder ao mesmo tempo simplificar o linguagem e dar uma unidade mais completa à questão da teoria, mostrando como todo concomitante pode de fato ser visto como um simples invariante, de modo que o cálculo das formas possa daqui em diante admitir ser citado, como proponho citá-lo, sob o nome de Teoria dos Invariantes.²⁵ (SYLVESTER, 1853g, p. 259)

method (Art. 138) of thence finding conditions for systems of equalities between the roots is Cayley's (Philosophical Transactions, 1857, p. 703). With regard to the subject generally, reference must be made to the important series of papers by Sylvester, beginning in the sixth volume of the Cambridge and Dublin Mathematical Journal; to a series of papers on Quantics published by Cayley in the Philosophical Transactions; and to Aronhold's Memoir on Invariants (Crelle, vol. LXII.). The name 'invariant,' as well as much of the rest of the nomenclature, is Sylvester's.

²⁵Here let it be permitted to me to make a momentary digression, in order to be enabled to avoid for the future the inconvenience of using the phrase "invariant or other concomitant," and so to be enabled at one and the same time to simplify the language and to give a more complete unity to the matter of the theory, by shewing how every concomitant may in fact be viewed as a simple invariant, so that the calculus of forms may hereafter admit of being cited, as I propose to cite it, under the name of the Theory of Invariants.

Como pode ser visto, a expressão que dá nome à nova área de pesquisa vislumbrada por Sylvester começa a ser estabelecida no mesmo período de seu desenvolvimento. O esforço do personagem central desta tese em construir um vocabulário passa pela necessidade de identificar o trabalho britânico com a nova Teoria.

O primeiro termo que surge nos dois textos é determinante. Cayley (1860a) e Sylvester (1853f) definem de maneira semelhante, como função linear dos termos de linhas e colunas de um sistema. Além disso, ambos os autores associam sua utilidade no cálculo das resultantes dos sistemas de equações homogêneas, os quais devem ser zerados para garantir a possibilidade de coexistência delas. Outro fator é destacado por Molk (1916), que relaciona os determinantes à redução de polinômios homogêneos à suas formas canônicas, utilizando a equação característica de Cauchy, a qual contribui para apresentação de um *invariante* por parte Sylvester: a assinatura de uma forma quadrática.²⁶

Os próximos termos não se fazem presentes em Sylvester (1853f), porém encontramos em um artigo anterior de 1851. Os *comutantes*, *permutantes*, *intermutantes* e *cumulantes* estão diretamente ligados ao conceito de determinante. Para Cayley (1860a), esses termos indicam representações permutações entre os termos dos determinantes e as regras de trocas de sinais

Qualquer arranjo de uma série de termos pode ser derivado (e de várias maneiras) de qualquer outro arranjo por intercâmbios sucessivos de dois termos; mas de qualquer maneira que isso seja feito, o número de trocas será constantemente par ou constantemente ímpar; e diz-se que os dois arranjos são do mesmo sinal ou de sinais contrários. Em particular, se qualquer arranjo for selecionado como o arranjo primitivo e considerado positivo, então qualquer outro arranjo será positivo ou negativo de acordo com o que for derivável do arranjo primitivo por um número par ou ímpar de trocas.²⁷ (CAYLEY, 1860a, p. 535, Tradução Nossa)

Esse trecho se refere às propriedades dos determinantes. Sylvester percebe estes métodos como uma fonte de propriedades dos *invariantes* no universo das transformações, em particular para investigações sobre funções simétricas. Tanto a descrição dada por Cayley, quanto as aplicações enunciadas por seu grande amigo são baseadas em um conceito específico descrito pelo termo *Matriz*.

²⁶Sylvester não utiliza esses termos, na verdade ele apenas se refere à diferença entre o número de quadrados positivos e o número de quadrados negativos de uma forma quadrática transformada em canônica. A invariância dessa diferença ficou conhecida como Lei de Inércia para formas quadráticas, sobre a qual trataremos com mais detalhes nos próximos capítulos

²⁷Any arrangement of a series of terms may be derived (and that in a variety of ways) from any other arrangement by successive interchanges of two terms; but in whatever way this is done, the number of interchanges will be constantly even or constantly odd ; and the two arrangements are said to be of the same sign or of contrary signs accordingly. In particular, if any arrangement is selected as the primitive arrangement, and taken to be positive, then any other arrangement will be positive or negative according as it is derivable from the primitive arrangement by an even or an odd number of interchanges.

Em Sylvester (1853f), esse termo tem o seguinte significado esperado: um arranjo quadrado ou retangular de termos em linhas e colunas. No entanto, esta se mostra uma definição organizacional, uma vez que a palavra aparece como uma forma de representar as possibilidades de cálculos para menores determinantes. Além disso, o termo matriz é utilizado para representar um polinômio homogêneo e a transformação linear aplicada a ele.

$$(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \end{pmatrix} (x, y, z) \\ \left| \begin{array}{ccc} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{array} \right|$$

Essa expressão representa o processo de mudança de variáveis, destacando a matriz da transformação de uma forma muito próxima com a notação atual. Esse formato foi utilizado por outros matemáticos do continente, como é o caso de Hermite. Além disso, essa notação também foi utilizada como indicação de polinômios homogêneos. Sobre isso, destacamos um termo específico utilizado na eliminação de fatores em um sistema de formas algébricas. Trata-se da *Matriz Bezoutiana*, que Cayley descreve, no artigo de 1860, Cayley da seguinte forma:

V, W são quaisquer duas quânticas binárias da mesma ordem *m*, e *V', W'* são o que *V, W* se tornam quando as variáveis (x, y) das duas quânticas são transformadas em (x', y') ; então $(VW' - V'W) \div (xy' - x'y)$ é uma função homogênea racional e integral do grau *m* - 1 em cada um dos dois conjuntos $(x, y)(x', y')$, e os coeficientes tomados em sua disposição quadrada natural constituem a matriz Bezoutiana. O determinante formado a partir desta matriz é de fato a resultante das duas funções, ou igualado a zero é a equação obtida pela eliminação das variáveis das duas equações $V = 0, W = 0$. Se *V, W* são as funções derivadas de uma e mesma quântica binária da ordem *m*, então a matriz correspondente, sendo naturalmente da ordem *m* - 2, é a matriz Bezoutoidal, e o determinante é então o discriminante do quântico único. ²⁸ (CAYLEY, 1860a, p. 547, Tradução Nossa)

O termo *quantic* se refere a um polinômio homogêneo. É importante observar que a descrição apresentada por Cayley nesse trecho caracteriza a *matriz bezoutiana* como

²⁸*V, W* are any two binary quantics of the same order *m*, and *V', W'* are what *V, W* become when the variables (x, y) of the two quantics are changed into (x', y') ; then $(VW' - V'W) \div (xy' - x'y)$ is a rational and integral homo geneous function of the degree *m* - 1 in each of the two sets $(x, y)(x', y')$, and the coefficients taken in their natural square arrangement constitute the Bezoutic matrix. The determinant formed out of this matrix is in fact the resultant of the two functions, or equated to zero it is the equation obtained by the elimination of the variables from the two equations $V = 0, W = 0$. If *V, W* are the derived functions of one and the same binary quantic of the order *m*, then the corresponding matrix, being of course of the order *m* 2, is the Bezoutoidal matrix, and the determinant is then the discriminant of the single quantic.

um objeto utilizado para identificar as condições para existência de solução de sistemas e equações. Sylvester acrescenta a característica de invariância ao determinante dessa matriz, a qual é formada pelos coeficientes do sistema gerado pelas derivadas parciais em relação a cada variável do polinômio inicial. Em ambos os casos, notamos que a aplicação desse objeto é a redução do grau das formas algébricas envolvidas na investigação.

A descrição de *bezoutiano* dada por Sylvester ganha uma nova perspectiva na obra "Lessons Introductory to the modern higher algebra" (SALMON, 1885). Na quarta edição desse livro, encontramos uma nota (SALMON, 1885, p. 343) onde o autor apresenta o objeto como a resultante de um sistema de equações homogêneas. Além disso, o autor relata a associação desse operador com o conhecido teorema de Sturm, o qual abordaremos com mais detalhes no próximo capítulo.

O termo resultante, que surge na descrição acima, também leva uma definição nos textos dos dois amigos britânicos. Cayley indica uma reflexão sobre o problema eliminação em um sistema de equações, uma vez que a nulidade desse objeto matemático implica em conclusões de natureza algébrica. Nas descrições apresentadas pelos dois matemáticos ingleses encontramos aplicações para solução de sistemas de equações, homogêneas ou não e para a existência de raízes em comum. Além disso, Sylvester apresenta o termo *discriminante*, que mostra a relação entre os resultantes e determinantes através de uma interpretação geométrica.

Se em um sistema de equações as funções igualadas a zero são as funções derivadas de uma única função homogênea racional e integral em relação a cada uma de suas variáveis, diz-se que a resultante do sistema é a discriminante da função única. A definição é facilmente aplicável ao caso de uma função não homogênea, as funções igualadas a zero são aqui a própria função e suas funções derivadas em relação a cada uma das diversas variáveis. Para uma única função, pode-se dizer que o discriminante é a função que igualada a zero dá a condição para um par de raízes iguais da equação obtida colocando a função igual a zero.²⁹ (CAYLEY, 1860a, p. 543, Tradução Nossa)

A descrição em Sylvester (1853f) também trata das derivadas parciais, o que nos mostra o alinhamento dos dois trabalhos. Além disso, nessa citação, podemos ver três contextos nos quais o *discriminante* tem aplicação: no caso de polinômios homogêneos, cujo sistemas podem ser interpretados como pontos de contatos de curvas e superfícies de

²⁹If in a system of equations the functions equated to zero are the derived functions of a single rational and integral homogeneous function with respect to each of the variables thereof, the resultant of the system is said to be the discriminant of the single function. The definition is easily made applicable to the case of a non-homogeneous function, the functions equated to zero are here the function itself and its derived functions with respect to each of the several variables. For a single function, it may be said that the discriminant is the function which equated to zero gives the condition for a pair of equal roots of the equation obtained by putting the function equal to zero.

2ª ordem (interpretação presente na obra de Sylvester como poderemos ver no próximo capítulo); nas condições de coexistência para sistemas de equações, homogêneas ou não; por fim, no critério para determinar a natureza das raízes de polinômios.

Como podemos notar, os *invariantes* são uma observação constante nas descrições das expressões destacadas até aqui. A necessidade de compreender os dois personagens entendem por *invariante* passa a ser natural. Em Cayley (1860a), esse termo se refere a uma função dos coeficientes de um polinômio homogêneo que não se altera, a menos de um fator, após uma transformação linear aplicada às variáveis independentes. Ele ainda destaca que o fator que diferencia a forma transformada da original é o módulo da transformação. Essa é uma descrição semelhante à dada, pela primeira vez, por Sylvester em 1851 no artigo “On General Theory of Associated Algebraical Forms” (SYLVESTER, 1851e). Nele, encontramos também o termo “formas associadas”, dando o tom de uma teoria específica. Essa afirmação se justifica pelo fato de que este é o primeiro trabalho de Sylvester que trata exclusivamente das formas, das quais se investiga a propriedade de invariância.

Na mesma linha, encontramos o termo *covariante*. No glossário de Sylvester (1853f, p. 559) há a seguinte descrição: “Uma função que está na mesma relação com a função primitiva da qual é derivada como qualquer uma de suas transformadas lineares para uma transformada similarmente derivada de sua primitiva”.³⁰ Essa afirmação indica que os *covariantes* são polinômios que se correlacionam por suas formas associadas, que permanecem inalteradas após transformações lineares. Por outro lado, Cayley (1860a) descreve como uma função que não depende apenas dos coeficientes do polinômio primitivo, descrição que corrobora a ideia de amigo de pesquisa. Como exemplo, eles apresentam o determinante hessiano como um *covariante* conhecido, uma vez que seus *invariantes* são os mesmos que os *invariantes* da forma primitiva.

É importante ressaltar que esse período de troca de informações e ideias sobre a nova Teoria tem como pano de fundo a busca pelos novos *invariantes* como sugerido por Cayley na década de 1840, de modo que essas iniciativas deram, aos dois matemáticos ingleses, o status de pioneirismo nas pesquisas sobre os *invariantes*. Essa percepção pode ser reforçada através da repercussão de publicações de artigos como os sobre o cálculo das formas e as memórias sobre os *quantics*. Nesses textos, podemos observar o caráter de divulgação do conhecimento produzido, que faz com que Sylvester se torne, na década seguinte, membro correspondente da Academia Ciências de Paris, como detalharemos melhor na próxima seção.

³⁰A function which stands in the same relation to the primitive function from which it is derived as any of its linear transforms to a similarly derived transform of its primitive.

Após os eventos que impulsionaram a carreira de Sylvester e o conectaram com a produção de conhecimento matemático no Reino Unido, mais especificamente o tornaram um pesquisador importante de uma teoria que colocaria os matemáticos britânicos no mapa da matemática continental, era de se esperar que ele finalmente conseguisse a tão esperada posição de professor em uma instituição onde poderia desenvolver suas pesquisas. Em Parshall (1998) e Parshall (2006b), vemos que ele se torna professor de matemática da Royal Military Academy of Woolwich, porém o espaço para a produção de pesquisa que ele esperava não surgiu naquela instituição.

A relação apresentada entre os personagens desta seção, no entorno as ideias dos *invariantes*, se revela um indício importante da comunidade que estava se formando em solo britânico. Diferente das outras iniciativas, esse grupo de matemáticos compartilhou um repertório de práticas, como descrito por Wenger (1999), que contou com engajamento mútuo nítido, devido ao interesse que surgiu a respeito das propriedades invariantes das transformações lineares. Outro aspecto importante é o fato de haver uma produção particular dos britânicos que, como veremos, gera intersecção e influência sobre os matemáticos do continente.

Dessa forma, podemos observar a formação de uma comunidade de práticas que lida com os interesses manifestados pelos personagens que foram apresentados nesta seção. Entretanto, é necessário compreender como esse grupo se relacionou com os assuntos que circulavam no Reino Unido no recorte temporal proposto por esta tese. Nesse sentido, um aspecto importante a ser observado é modo como outros matemáticos se aproximam, ou não, das práticas que surgem no núcleo da *Comunidade britânica dos Invariantes*, formado por: Sylvester, Cayley e Salmon.

2.2.3 Organizando uma rede de interesses no entorno da *Teoria dos Invariantes*

O desenvolvimento das práticas e do discurso da *Teoria dos Invariantes*, fez com que a matemática produzida em solo britânico ganhasse notoriedade. De fato, as ideias que foram desenvolvidas por Sylvester e seus conterrâneos apresentam adequação a temáticas relevantes, como veremos no próximo capítulo. Entretanto, é possível identificar que ele estabeleceu uma agenda cuja finalidade era divulgar a nova Teoria, bem como garantir o pioneirismo dos matemáticos do Reino Unido. Esta seção se dedica a apresentar o desenvolvimento inicial da *Teoria dos Invariantes*, sob o ponto de vista dos contatos realizados por Sylvester no período. Ressalta-se que esse aspecto representa um componente importante da formação de uma comunidade, uma vez que esta agenda formaliza os limites de atuação do grupo que se forma no entorno dos *invariantes* e estabelece as pontes com outros grupos, fator que possibilita a credibilidade da comunidade de prática e a torna um

dos pilares da comunidade de pesquisa em matemática que surge com a fundação da LMS.

Tendo tido em 1850 bastante atarefado, Sylvester manteve contatos mais frequentes com seus amigos Cayley e Hermite, o que nos dá um indício de como suas pesquisas foram influenciadas pelos trabalhos desses dois pesquisadores. Além disso, no decorrer desse ano, ainda apresentava obrigações de seu trabalho como atuário. A expansão de sua rede de interesses se evidencia a partir do ano seguinte, 1851. Como vimos na última seção, o texto "Sketch of a Memoir on Elimination, Transformation, and Canonical Forms", (SYLVESTER, 1851h) marca o início de suas pesquisas sobre os *invariantes* e nele, além das técnicas iniciais da teoria, encontramos os primeiros indícios da rede de interesses sobre as pesquisas que o matemático conduzia.

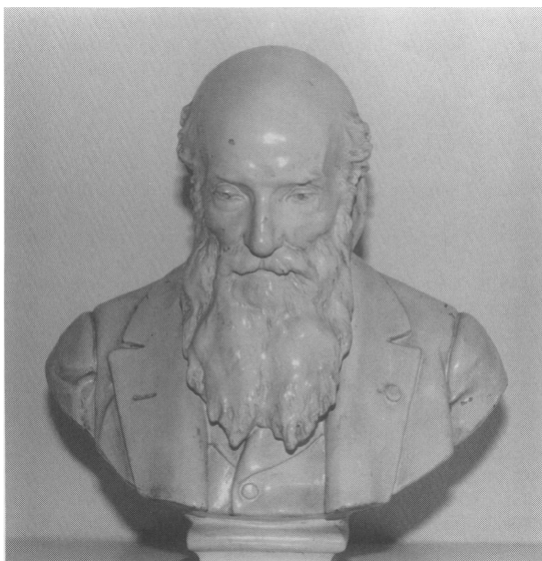
Aproveito esta oportunidade para entrar no meu simples protesto contra a apropriação do meu método de encontrar a resultante de qualquer conjunto de três equações de graus iguais ou diferindo apenas por uma unidade, uma das outras duas, pelo Dr. Hesse, até agora no que diz respeito às funções quadráticas, sem aviso prévio, quatro anos após a publicação de minhas memórias na Revista Filosófica: a ideia fundamental do método parcial do Dr. Hesse é idêntica à do meu geral.³¹ (SYLVESTER, 1851h, p. 191, Tradução Nossa)

Nesse trecho, podemos observar que Sylvester já mostra preocupação com o pioneirismo das ideias que estava difundindo. A reivindicação da autoria do método de eliminação é importante para consolidar sua reputação como pesquisador. Além disso, é possível notar a importância atribuída à divulgação das técnicas, de modo a marcar sua produção como pioneira. De acordo com Parshall (2006b), as conversas com o amigo Cayley eram permeadas por preocupações sobre confidencialidade até que eles pudessem publicar ou registrar a autoria através de correspondências. Essas características começam a ficar mais evidentes com os contatos internacionais, que se iniciam no ano seguinte.

No começo de 1852, uma correspondência consistente com o belga Irenee-Jules Bienayme (1796-1878) reforça o contato com a matemática francesa. A primeira carta entre os dois data de 15 de abril de 1851. Embora não tenhamos um registro definitivo, é provável que eles tenham se conhecido por causa das atribuições de Sylvester na Equity Law and Life Assurance Company. De acordo com Seneta (1998), ambos conheciam Augustus De Morgan e compartilhavam interesses sobre questões probabilísticas. A carta citada surge no contexto de apresentações profissionais.

³¹I take this opportunity of entering my simple protest against the appropriation of my method of finding the resultant of any set of three equations of degrees equal or differing only by a unit, one from those of the other two, by Dr. Hesse, so far as regards quadratic functions, without acknowledgment, four years after the publication of my memoir in the Philosophical Magazine: the fundamental idea of Dr Hesse's partial method is identical with that of my general one.

Figura 4 – Irenée-Jules Bienaymé



Fonte: (PARSHALL; SENETA, 1997)

A preocupação inicial de Sylvester estava na troca de informações sobre as práticas de seguradoras, através da troca de relatórios das empresas envolvidas (PARSHALL, 1998). É natural imaginar que esses contatos se subverteriam em algum momento e, de fato, foi o que aconteceu. Um ano e dois meses após a primeira troca de correspondência, ele estava solicitando a Bienaymé que apresentasse seus artigos sobre as bases da *Teoria dos Invariantes* aos membros da Société Philomathique de Paris, entidade para a qual ele havia sido nomeado membro correspondente em 1852.

A partir dessa solicitação, seus artigos foram levados a matemáticos como Michel Chasles, Charles Hermite, Olry Terquem, Eugene Catalan, Joseph Serret e Joseph Bertran, o que evidencia o interesse, não apenas na divulgação de suas práticas através de periódicos, mas uma tentativa de ampliar as contribuições para suas reflexões, de modo que a produção de matemática britânica estaria movimentando a produção de uma comunidade no continente. Essa característica pode ser observada no seguinte trecho:

Devolvo-lhe muitos e sinceros agradecimentos por sua atenção às minhas comissões. Estou esperando uma oportunidade para lhe enviar uma cópia do trabalho do Sr. Hendrick sobre Seguro de Vida. M. Franck, o livreiro da Rue Richelieu, terá um pacote para você endereçado à sua residência contendo a obra acima mencionada e 3 cópias de uma continuação de meu ensaio sobre formulários que me sentirei muito grato por você transmitir a M. Hermite, M. Liouville e à Société Philomathique. Desejo que o Sr. Liouville tenha uma cópia porque me disseram que o Sr. Eisenstein de Berlim enviou ao Diário de Liouville o mesmo tipo de assunto que está na minha Seção VI. Quando eu conseguir mais algumas cópias, ficarei orgulhoso em solicitar sua aceitação de uma. Receberei e estudarei com

muito interesse seu prometido tratado sobre os mínimos quadrados. ³²
 [SYLVESTER para BIENAYMÉ, jun/1852] (PARSHALL, 1998, p. 56,
 Tradução Nossa)

Podemos perceber a preocupação com a disputa do capital científico, no que diz respeito ao desenvolvimento de técnicas apresentadas por ele nos artigos que vinham sendo divulgados. Mais uma vez percebemos a relevância atribuída à demarcação da autoria referente aos trabalhos dele e de Cayley, no comentário sobre o artigo de Eisenstein, que havia sido publicado naquele ano. Além disso, Sylvester escolhe seu já amigo Hermite, com quem já compartilhava ideias e Liouville, como editor do *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées* na busca pela difusão de seu nome na França.

O envio de seus trabalhos para Chasles também teve importância estratégica na construção da imagem de Sylvester como pesquisador em matemática. De acordo com Parshall e Seneta (1997), a aproximação de entre os dois matemáticos já ocorria desde o início da década de 1850. Além disso, o matemático francês se tornou membro da Academia de Ciências de Paris e, portanto, representava uma porta para mais um núcleo de pesquisa importante do continente. Em carta do dia 26 de agosto de 1852, demonstrou interesse nos teoremas do matemático inglês, bem como afirmou que Terquem também gostou do trabalho com os determinantes e estava disposto a publicar algo no *Nouvelle Annales de Mathématiques*, jornal do qual ele era editor. De fato, no volume 11 do periódico, é publicado o texto "Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert à déterminer les inégalités séculaires des planètes"(SYLVESTER, 1852d), que também serviu como cartão de visitas para a comunidade francesa.

Outro centro importante para construir sua rede de interesses eram os Estados Alemães. Apesar disso, as interações foram menos intensas do que em território francês e o primeiro contato foi Carl Wilhelm Borchardt (1817 - 1880), que também mantinha diálogo com Hermite e Liouville e manifestou interesse sobre Teoria de Eliminação, teorema de Sturm e a *Equação Secular*, temas que surgem com frequência na obra de Sylvester. O matemático inglês enviou cópias de seus artigos para o novo contato (PARSHALL; SENETA, 1997). Além disso, essa relação também tornou-se espaço de disputa de autorias, de maneira semelhante ao que aconteceu com os matemáticos franceses.

³² I return you many and sincere thanks for your kind attention to my commissions. I have been waiting for an opportunity to send to you a copy of Mr Hendrick's work on Life Assurance. M. Franck the bookseller in Rue Richelieu will have a parcel for you addressed to your residence and containing the work above named and 3 copies of a continuation of my essay on forms which I shall feel greatly obliged by your transmitting to M. Hermite, M. Liouville and the Philomathic Society. I wish M. Liouville to have a copy because I am told that M. Eisenstein of Berlin has sent to Liouville's Journal the same kind of matter as is in my Section VI. When I get some more copies I shall be proud to request your acceptance of one. I shall receive and study with much interest your promised treatise on least squares.

Figura 5 – Carl Wilhelm Borchardt



Fonte: <https://en-academic.com/dic.nsf/enwiki/268497>

O problema de autoria sobre os métodos de eliminação aludido em Sylvester (1851h) é lembrado em carta de resposta de Borchardt escrita no dia 6 de abril de 1852. O conteúdo da carta é uma evidência da dedicação do matemático inglês para estabelecer, também nos Estados Alemães, sua imagem como pesquisador. Para isso, enviou cópia dos artigos com as bases da *Teoria dos Invariantes* para seus contatos no continente.

Esses contatos ao longo dos primeiros anos da década de 1850 serviram como auxílio para posicionar Sylvester como um pesquisador de relevância no continente. Outra evidência dessa conclusão é destacada em carta escrita em 9 de agosto de 1854 para Lord Brougham, onde ele reivindica o posto de professor na Royal Academy of Woolwich. Na carta, são apresentados os matemáticos que apoiavam sua candidatura. Os nomes destacados são: William Rowan Hamilton (1805-1865, Professor de Astronomia na Universidade de Dublin, Astrônomo Real da Irlanda), Charles Grave (1812-1899, matemático), Philip Kelland (1808-1879, professor de matemática na Universidade de Edimburgo), Rev. James Challis (1803-1882, Professor Plumian de Astronomia e Filosofia Experimental na Universidade de Cambridge), Jean-Victor Poncelet (1788-1867), Michel Chasles (1793-1880), Salmon, Jean-Marie-Constant Duhamel (1797-1872, professor de análise na Ecole polytechnique), Joseph Bertrand (1822-1900, professor da École Normale Supérieure), Joseph Serret (1819-1885) e Hermite (PARSHALL, 1998, p. 71).

Como destacado por Parshall e Seneta (1997), essa lista reflete a rede de contatos construída por Sylvester em período similar ao do desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. Ele ainda expandiria essas conexões para outros países do continente como a Itália. Entretanto, antes disso, dois novos desafios se apresentavam para sua carreira, a vaga como professor na Royal Academy e a edição do *The Quarterly Journal of Pure and*

Applied Mathematics.

Ao olharmos para a trajetória social do nosso personagem de pesquisa, podemos notar que ele teve papel decisivo no estabelecimento da *Teoria dos Invariantes* como um tema relevante, tanto no Reino Unido quanto nos outros países da Europa. Isso faz não apenas com que a comunidade ganhe credibilidade, mas também coloca o próprio matemático inglês como um pesquisador relevante em todo o continente. Esses aspectos, revelam todos os componentes descritos por Wenger (1999) e são fatores importantes para eventos que contribuíram para a consolidação da produção matemática britânica e o surgimento da London Mathematical Society.

2.3 Parte 3: 1855 - 1865

Como pudemos ver até aqui, o grupo de matemáticos que se envolveu com as ideias sobre os *invariantes* apresentava as características que os constituem como comunidade. Esta seção tem o objetivo de apresentar o papel central de Sylvester no processo de ganho de credibilidade, na Europa, da pesquisa britânica em matemática. Para isso, destacamos dois fatores que julgamos cruciais: o seu papel enquanto editor do *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* e sua participação na fundação da LMS.

2.3.1 O surgimento do *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* (QJPAM)

Como veremos no próximo capítulo, o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*, se mostrou uma marca significativa da matemática britânica e alçou seus protagonistas ao status de matemáticos influentes no continente europeu. No caso de Sylvester, suas contribuições para a nova Teoria são, em sua maioria, concentradas no período de 1850 a 1855.

Do ponto de vista de sua carreira profissional, o ano de 1855 se inicia com duas frentes capazes de proporcionar um espaço de pesquisa para Sylvester: a vaga de professor na Royal Military Academy of Woolwich e a editoria do QJPAM. De acordo com Parshall (1998), o trabalho com a educação de jovens cadetes não garantiu um relacionamento satisfatório com a pesquisa. Entretanto, o periódico herdeiro do CDMJ trouxe contatos importantes com outros pesquisadores.

Devolvo aqui o artigo do Sr. Spottiswoode sobre invariantes. Sinto-me colocado na mais difícil posição ao ser chamado a pronunciar-me sobre sua adequação para inserção nas Transações. O livro de memórias mostra grande iniciativa e tem alguns pontos de interesse; que contribui materialmente para promover o estado de conhecimento existente do

assunto que se trata de uma questão em aberto. ³³[SYLVESTER para o COMITÉ DE ARTIGOS DA ROYAL SOCIETY, abr/1855] (PARSHALL, 1998, p. 85, Tradução Nossa)

Nesse trecho é possível observar que Sylvester se encontrava envolvido com questões editoriais em 1855. Apesar de seu posicionamento a respeito da avaliação do trabalho de Spottiswoode, que se refere ao entendimento da incompletude da memória enviada pelo autor, o matemático já surge como uma autoridade no tratamento das publicações que lidam com a *Teoria dos Invariantes*.

As conversas para a formatação do primeiro volume do QJPAM se iniciaram em 1855, fato que pode ser observado na correspondência que Sylvester mantém com De Morgan, Ferrers e Cayley entre 1855 e 1856. Essas cartas demonstram o interesse por assuntos específicos, que revelam a centralidade da *Comunidade britânica dos Invariantes* na produção de matemática no Reino Unido. Além da nova Teoria britânica, o editor discute a abordagem analítica dos problemas algébricos, a partir da iniciativa de De Morgan, que expressa preocupação com técnicas de demonstração (PARSHALL, 1998, p. 84), ideias sobre Teoria de Eliminação e, ainda, interesses por problemas que envolvem mecânica aplicada.

Outro fator importante sobre a influência de Sylvester, exercida por meio do periódico especializado, em relação ao grupo de pesquisadores em matemática é o contato com Ferrers. Em 1852, os futuros editores do QJPAM discutiam possíveis soluções para as dificuldades financeiras para a manutenção do CDMJ (PARSHALL, 2006b). Essas conversas evoluíram para a formação de um corpo editorial que envolvia Stokes, Cayley e Hermite, além dos dois primeiros matemáticos citados. Como veremos nos próximos capítulos, esse periódico teve o objetivo de internacionalizar a matemática produzida no Reino Unido.

Destacamos que, dos personagens que participam da edição do QJPAM, apenas Stokes não teve produção referente à *Teoria dos Invariantes*. Essa característica nos revela a forte presença da comunidade de práticas que estamos analisando. Além dos editores, também observamos a participação outros nomes importantes do grupo, como é o caso de Spottiswoode, Boole e Michael Roberts. ³⁴

³³I return herewith Mr Spottiswoode's paper on Invariants. I feel placed in a most difficult position in being called upon to pronounce upon its fitness for insertion in the Transactions. The memoir shows great industry and has some points of interest; that it contributes materially to promote the existing state of knowledge of the subject in which it treats is open to question.

³⁴Abordaremos mais detalhes sobre esses personagens no capítulo 4. Neste momento, é importante saber que esses nomes são parte de um núcleo de pesquisadores de onde surgem as principais práticas da Comunidade britânica dos Invariantes.

De acordo com Parshall (2006b), o novo jornal tinha inspiração no *Jornal do Crelle* e de *Liouville*. A ideia dos editores era enfatizar as intersecções que existiam entre os diferentes círculos matemáticos, de modo que as ideias que circulavam em território nacional tivessem maior repercussão no continente. Essa postura fez com que o nome de Sylvester ganhasse uma nova dimensão no cenário internacional, como um articulador entre os grupos de pesquisadores. Um exemplo desse papel é o extrato da correspondência com Enrico Betti, matemático italiano, o que demonstra sua posição de relações públicas.

No decorrer da semana, irei a Pisa para ver Betti, que é professor de lá, junto com Matteucci e Mossotti. Claro que fui a Pavia, mas Brioschi não estava mais lá, tendo sido convocado a Turim para atuar como secretário-geral sob o Ministério da Instrução Pública. Claro que isso foi uma grande decepção, mas eu visitei Mainardi, Cattaneo, Costazza e Casorati (este último um jovem e muito promissor aluno de Brioschi e Professor da "Introdução à Análise Superior").³⁵ [SYLVESTER para CAYLEY, sem data](PARSHALL, 1998, p. 110, Tradução Nossa)

Nesse trecho de uma carta escrita para Cayley, Sylvester discute uma agenda de interações com matemáticos europeus. Os personagens que surgem nesses episódios compartilharam interesses da *Comunidade britânica dos Invariantes*, mais especificamente a teoria dos determinantes. De acordo com Bottazzini (1980), a dupla de amigos ingleses exerceu importante influência sobre a matemática produzida na Itália, fato que se deve, em particular, ao contato com pesquisadores como Betti e Brioschi.

Assim esse novo espaço de publicações proporcionou o ambiente para o surgimento de uma sociedade matemática não apenas por se tratar de um jornal com maior amplitude que seus antecessores, mas também por garantir o contato entre matemáticos com perspectivas coletivas sobre a produção dos britânicos. A construção de tal cenário foi fortemente influenciada pela atuação de Sylvester, que chega ao final da década de 1850 como uma referência, tanto do ponto de vista técnico quanto social.

2.3.2 O surgimento da London Mathematical Society

O dia 7 de novembro de 1864 representa um momento importante no processo de constituição da comunidade britânica de pesquisa em matemática. Trata-se da data da reunião preliminar à fundação da London Mathematical Society, ideia que surge através de conversas entre o astrônomo Arthur Cowper Ranyard (1845-1894) e o matemático George

³⁵In the course of the week, I shall go over to Pisa to see Betti who is Professor there along with Matteucci and Mossotti. I of course went to Pavia but Brioschi was no longer there having been summoned to Turin to act as Secretary General under the Minister of Public Instruction. This of course was a great disappointment but I visited Mainardi, Cattaneo, Costazza e Casorati (the latter a young and very promising pupil of Brioschi and Professor of the "Introduction to the Higher Analysis.")

Campbell De Morgan (1841-1867), filho do famoso Augustus de Morgan (RICE et al., 1995, p. 404).

Além dos dois idealizadores, um personagem muito importante para a aglutinação de outros matemáticos na iniciativa foi o professor da University College of London, Thomas Archer Hirst (1830 - 1892). De acordo com Rice et al. (1995), ele foi responsável pelos contatos com pesquisadores, tendo sido responsável pelos convites a Sylvester, Cayley e Spottiswoode.

Dado este contexto, o papel da *Comunidade britânica dos Invariantes* se estabelece através da relação de seus protagonistas com Thomas Hirst. Esta se constitui através de correspondências e contatos pessoais que ocorrem a partir de 1860, época na qual o matemático retornou a Londres após um longo período na Europa. Destacamos que, apesar de não ter publicados artigos que figuram entre os que lidam com assuntos relacionados aos polinômios homogêneos, pelo menos no intervalo entre 1837 e 1865, Hirst estava ciente da agenda dos *invariantes* iniciada por Sylvester por volta de 1853.

Em reflexão adicional, retiro minha opinião expressa ontem à noite e recomendo a continuação da palavra "Cataléticante". Esse tipo de invariante é tão importante e está em uma relação tão próxima com o Canonizante que não podemos deixá-lo sem nome e como esse nome foi usado por Cayley, assim como por mim, também pode permanecer.³⁶ [SYLVESTER para HIRST, dez/1862](PARSHALL, 1998, p. 111, Tradução Nossa)

Como podemos notar nesse trecho, existiu, entre os dois matemáticos, uma negociação direta, sobre os termos e expressões utilizados na nova Teoria. Esse episódio também evidencia a relevância de Sylvester na década de 1860, o que nos faz entender os interesses que circularam no grupo que se formou ao seu redor e que vieram a fazer parte dos assuntos centrais da LMS.

Mesmo com o contato com personagens relevantes, o primeiro ano da sociedade não contou com nomes de peso na composição dos membros. Além do presidente, Augustus De Morgan, e do próprio Thomas Hirst, existiram outros 25 membros, entre os quais a maioria eram alunos ou ex-alunos da University College of London (RICE et al., 1995). Em junho de 1865, tal composição começou a ser modificada com convites a personagens externos à universidade.

³⁶On further reflexion I retract my opinion expressed yesterday evening and recommend the continuance of the word "Catalecticant." This sort of invariant is so important and stands in such close relation to the Canonizant that we cannot afford to let it go unnamed and as this name has been used by Cayley as well as myself it may as well remain

25 de junho de 1865: . . . Na segunda-feira eu participei do Math. Soc. e propus Cayley, Sylvester, Spottiswoode e Green como membros. Sylvester nos deu uma comunicação capital sobre a regra de Newton para a descoberta das raízes imaginárias de uma equação. ³⁷ (GARDNER; WILSON, 1993, p. 833, Tradução Nossa)

Essa atitude qualifica a nova sociedade, uma vez que agrega nomes com reconhecimento internacional. Como detalharemos no capítulo 6, os nomes presentes na citação são responsáveis pela divulgação das práticas da *Comunidade britânica dos Invariantes* no continente europeu, com exceção de Green. Mais uma vez, essas ações revelam o papel central que a comunidade de práticas, objeto de estudo desta tese, no processo de constituição da comunidade britânica de pesquisa em matemática.

Sylvester e Cayley rapidamente se tornaram membros relevantes da sociedade, tendo sucedido De Morgan como o segundo e o terceiro presidentes, respectivamente. Como foi dito no final da seção anterior, a dupla de amigos era referência internacional da produção matemática britânica, o que reforça a importância de ambos para a LMS.

Conclusão

Entendemos que o processo de formação de Sylvester, no período de 1837 a 1865, ou seja, desde o surgimento do CMJ até a fundação da LMS, formou um pesquisador que entendia a necessidade construir uma reputação que não se limitou a seu país de origem. Logicamente, essa percepção não era de um personagem descolado da realidade da pesquisa em matemática no Reino Unido, mas o reflexo de uma demanda dos pesquisadores da área desde a Analytical Society.

É importante lembrar que a formação inicial de nosso personagem de pesquisa é influenciada pelas ideias que surgiram de iniciativas como a Analytical Society. O papel de matemáticos como Peacock e Babbage afeta a visão que Cambridge tem sobre os exames de larga escala, o que se reflete no ensino. Nesse contexto, notamos que a demanda por novos espaços de publicação vem acompanhada do surgimento de novas abordagens para os problemas que compunham o currículo das universidades. Essas mudanças são percebidas na geometria, que gradativamente incorpora práticas analíticas, como é descrito por Durand-Richard e Paris (1999), que mostram como os britânicos recebem as ideias algébricas do continente.

Como apresentado na seção 2.1.2, a formação de Sylvester em Cambridge foi

³⁷25th June 1865: . . . On Monday I attended the Math. Soc. and proposed Cayley, Sylvester, Spottiswoode and Green as members. Sylvester gave us a capital communication on Newton's rule for the discovery of the imaginary roots of an equation.

influenciada por essas mudanças. Como descrito por Bristed (1852), as disciplinas que lhe foram oferecidas já contemplavam ideias analíticas de autores como Lagrange, Lacroix, entre outros destacados na seção. Sendo assim, identificamos uma relação interessante entre a formação acadêmica do personagem central desta tese e sua perspectiva sobre a matemática produzida no Reino Unido. Esse aspecto pode explicar a busca por uma reputação de pesquisador através de contatos internacionais.

A construção dessa reputação revela o entendimento sobre as tendências de pesquisa desenvolvidas no período. A esse respeito, o trabalho com teoria da eliminação, bem elaborado na década de 1840, e a relação deste com os problemas de natureza geométrica, aparentemente, deram o tom do tipo de estudo que precisava ser executado na década seguinte. Do ponto de vista social, a aposta na Universidade da Virgínia não se mostrou proveitosa, porém reforça nossa percepção sobre a busca de Sylvester para se apresentar internacionalmente como um pesquisador em matemática.

Paralelamente ao caminho para se estabelecer como pesquisador, a amizade com Arthur Cayley funcionou como catalisador para ambos e despertou o interesse dos matemáticos britânicos. A abordagem analítica, que vinha se tornando parte das ideias matemáticas dos autores, e as coordenadas homogêneas de Plücker encontram uma frutífera intersecção na nova Teoria. A partir disso, revela-se importante a figura de George Salmon, fato que constitui o que ficou conhecido como "trio de ferro" da nova Teoria. Esse é primeiro vislumbre que temos da comunidade de práticas que nos propomos a investigar.

Os trabalhos conduzidos pelo trio, com inspiração no texto de Boole (1841), constituem o núcleo da comunidade, uma vez que compartilham práticas, elaboram ideias e negociam significados que determinam a identidade da matemática que é produzida pelo grupo. Nesse cenário, encontramos os principais interesses que constituem o repertório que atraiu outros personagens para a comunidade.

A repercussão que a *Teoria dos Invariantes* garante credibilidade aos matemáticos que participam de seu desenvolvimento. Nesse contexto, percebemos o movimento de divulgação realizado por Sylvester no continente. Destacamos que, além da apresentação da matemática britânica, essa iniciativa o coloca como um personagem central na visão dos pesquisadores com quem ele interage. Diferente de Cayley e Salmon, que se estabelecem academicamente a partir de suas contribuições em periódicos internacionais e da produção de livros-textos, Sylvester se caracteriza por uma ação política, que se dedica a demarcar os limites de práticas exclusivas no Reino Unido.

Sob o ponto de vista de Wenger (1999), podemos afirmar que as iniciativas de nosso personagem de pesquisa determinam as práticas que caracterizam o grupo que esta tese se dedica a investigar, cujo interesses se relacionam com as investigações sobre transformações

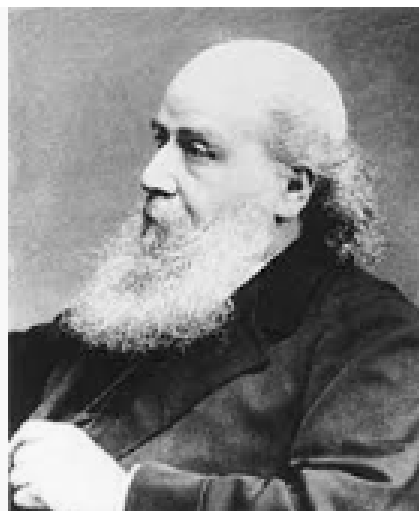
lineares em polinômios homogêneos e são divulgados por meio dos periódicos especializados, que já se mostravam bem estabelecidos na Inglaterra na segunda metade do século XIX. Dessa forma, a *Teoria dos Invariantes* pode ser compreendida como uma manifestação da comunidade de práticas que se constitui através dos espaços gerados após várias iniciativas que impulsionaram a matemática britânica e a aproximaram da matemática praticada no continente.

Além disso, essa mesma comunidade tem um ganho significativo de credibilidade, por conta da atuação de Sylvester. Quando observamos a imagem da matemática produzida no Reino Unido, vemos que ela é constantemente ligada ao amigo de Cayley (outro personagem central da comunidade). Esse fator é, justamente, o que faz do nosso personagem de pesquisa um dos responsáveis pelo sucesso das duas iniciativas que marcam a formação da comunidade matemática do Reino Unido.

A percepção da importância de Sylvester se reforça a partir do impulsionamento do processo de internacionalização da pesquisa matemática britânica que ocorre com a fundação do *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, periódico que contou com sua participação direta. Além disso, um cenário institucional pouco estimulante às atividades de pesquisa em matemática da primeira metade do século XIX, começou a se modificar a partir da atuação da *Comunidade britânica dos Invariantes* e se tornou mais estável com o surgimento da London Mathematical Society. Esses fatores revelam que a *Teoria dos Invariantes* aproveitou um momento oportuno, no qual a demanda por uma produção original recolocaria os matemáticos ingleses na cena da pesquisa do continente. Da mesma forma, Sylvester aproveitou esses espaços para se colocar como articulador das práticas desenvolvidas pelos personagens que manifestaram interesses semelhantes aos seus.

Por fim, entendemos que a análise das práticas que surgiram no interior da *Comunidade britânica dos Invariantes* pode ser realizada a partir da obra de Sylvester. Além das ideias publicadas nos seus artigos, seu trabalho para divulgar a obra mostra um engajamento pela pesquisa, do ponto de vista coletivo, fator que aparentemente não ocorre com os outros personagens. Portanto, os retratos da comunidade, apresentados nos próximos capítulos, necessitam do conhecimento das práticas que emergem na obra de nosso personagem de pesquisa.

Figura 6 – James Joseph Sylvester por volta de 1888



Fonte: Parshall (2006b)

3 PRÁTICAS DIFUNDIDAS POR SYL- VESTER NO DESENVOLVIMENTO DA *TEORIA DOS INVARIANTES*

Este capítulo aborda a matemática de Sylvester, que enfrentou um percurso não linear devido, principalmente, às condições sociais do Reino Unido para os matemáticos no período entre 1837 e 1865. Nessa época, observamos uma busca por novas direções na pesquisa matemática, o que se reflete na mudança de rumo em sua produção a partir de 1850. Essa perspectiva se torna evidente quando olhamos para a produção do coletivo de matemáticos que compartilharam ideias com Sylvester no recorte temporal abordado por esta tese. Além disso, destacamos que ele se tornou uma figura central no grupo de pesquisadores em matemática, não apenas do ponto de vista técnico, mas também político.

Dessa forma, as análises da obra desse matemático revelam indícios das temáticas que formaram o que denominamos de *Comunidade Britânica dos Invariantes*. A questão central deste capítulo é: quais são os assuntos com os quais Sylvester se envolveu entre 1837 e 1865? Essa pergunta nos conduziu a outra inquietação específica: em qual contexto esses temas surgiram?

Essas perguntas complementam as discussões do capítulo anterior, uma vez que a chegada das revistas especializadas em matemática viabilizou a disseminação de conteúdos específicos da área e atraiu outros protagonistas interessados nas temáticas. Compreender como elas emergem na obra de um dos matemáticos atraídos por esse novo cenário nos leva a examinar as práticas que sustentaram a formação daquilo que chamamos de *Comunidade Britânica dos Invariantes*.

Do ponto de vista metodológico, realizamos uma leitura prévia dos artigos publicados pelo nosso personagem de pesquisa, de modo que foi possível identificar seis temáticas, a saber: Teoria de Eliminação, locus de curvas e superfícies, problemas de contato, transformações lineares, redução de polinômios e rotações. Com os artigos classificados segundo cada tema, passamos para uma análise das práticas presentes nos textos, com a finalidade de determinar quais foram as mais influentes. Entendemos que essa informação nos permitirá compreender não só o papel de Sylvester na comunidade, mas também que tipo de influência mútua existiu entre ele e outros matemáticos que compartilharam de ideias semelhantes.

É importante destacar que os artigos não se limitam exclusivamente a uma única

temática, mas as abordam de acordo com a necessidade da discussão. Esse fato faz com que a análise da obra de Sylvester inclua alguns artigos que fazem parte de mais de uma temática. Diante disso, optamos por iniciar as seções com a lista dos trabalhos que serão analisados, de forma a apresentar os conjuntos de textos e suas possíveis intersecções.

Concentramo-nos nos temas que estão relacionados aos interesses manifestados pelos matemáticos britânicos durante nosso recorte temporal. De forma mais explícita, as discussões sobre a Teoria de Eliminação estão envolvidas com as mudanças na percepção da álgebra iniciadas por Peacock e a Analytical Society. Os problemas de contato são influenciados pelas ideias de Plücker. As transformações, por sua vez, são o pano de fundo para o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. Por fim, as rotações têm uma influência dos problemas ligados à *Equação Secular*.

Outro aspecto relevante é a apresentação das redes de textos neste capítulo. Com o intuito de compreender o papel de nosso personagem, utilizamos representações visuais que mostram como as contribuições de Sylvester se inserem em cada período de cada tema. Essas redes são denominadas redes temáticas. É importante ressaltar que tais redes não pretendem abranger a análise de todos os textos publicados nesse período específico. A seguir, oferecemos breves relatos sobre esses contextos.

3.1 A matemática Britânica na primeira metade do Século XIX

Antes de abordarmos diretamente a obra de Sylvester, é fundamental compreender em que estágio se encontrava a produção de conhecimento matemático na Grã-Bretanha. Portanto, esta seção tem como objetivo apresentar trabalhos e fontes de inspiração que, de alguma forma, contribuíram para o surgimento das novas perspectivas algébricas e geométricas presentes nos estudos que serão analisados nesta tese.

Quando olhamos para a primeira metade do século XIX, figuras como Woodhouse, Peacock, Gregory, De Morgan, Hamilton e Boole surgem como os principais autores. Os três primeiros foram responsáveis pelo movimento da Sociedade Analítica e por transformações no ensino de matemática em Cambridge e Oxford. Por meio de suas publicações, as abstrações da análise passaram a fazer parte do ambiente acadêmico dessas instituições, o que pode ser evidenciado pela inclusão de temas algébricos em exames de larga escala, como o Exame Tripos, no qual Peacock atuou como moderador de 1817 a 1821. Nos trabalhos desses três matemáticos, um aspecto em comum se destaca: a álgebra simbólica.

De acordo com Durand-Richard e Moktefi (2014), a álgebra simbólica e a lógica são portas de entrada do método analítico do continente em solo britânico. A introdução dessa nova forma de pensamento, em contraste com o modelo sintético tradicionalmente adotado nas universidades, exige uma mudança de perspectiva em relação à produção de

conhecimento em matemática.

Considerando isso, iniciamos este relato com Woodhouse e Peacock, que, de acordo com Becher (1980b), concentraram-se em caracterizar a atividade algébrica na Grã-Bretanha. Nesse contexto, Dubbey (1977) aponta que o texto *A Treatise on Algebra* (PEACOCK, 1830) reconhece que as regras de operações com símbolos não precisam estar vinculadas à aritmética. Essa percepção também é identificada por Charles Babbage, que colaborou com o autor do tratado na busca por uma reformulação do ensino de matemática no Reino Unido, ambos inspirados por Woodhouse ¹.

Em seu significado mais simples, os símbolos + - x designam adições, subtrações, multiplicações, a serem feitas na suposição de que os caracteres conectados por esses símbolos podem ser resolvidos em unidades; e nesta suposição, são demonstradas as primeiras regras de transposição e multiplicação; mas posteriormente à extensão das regras, pelas quais são introduzidas equações sem significado direto e símbolos incapazes de serem computados aritmeticamente, esses símbolos assumem uma significação mais extensa: assim, $a \pm b\sqrt{-1} + c \pm 2b\sqrt{-1}$ é colocado $a + c \pm 3b\sqrt{-1}$ onde os símbolos $b\sqrt{-1}, 2b\sqrt{-1}$ estão ligados entre si, da mesma maneira que os sinais das quantidades reais, isto é, das quantidades que admitem computação numérica: novamente $(a + b\sqrt{-1}) \times (c + d\sqrt{-1}) = ac + ad\sqrt{-1} + cd\sqrt{-1} - bd$, onde o sinal de conexão x indica uma operação a ser realizada: o que é essa operação, sabemos por ter previamente estabelecida sua natureza, nos casos em que os símbolos empregados deveriam representar coleções de unidades. ² (WOODHOUSE, 1803, p. 9, Tradução Nossa)

Destacamos que Woodhouse enfatizou as operações como sendo mais importantes que os números. Ao analisar essa citação, podemos perceber que certas restrições decorrentes de uma abordagem aritmética foram eliminadas. Por exemplo: a operação $(a + b\sqrt{-1}) \times (c + d\sqrt{-1}) = ac + ad\sqrt{-1} + cd\sqrt{-1} - bd$ considera que $(\sqrt{-1}) \times (\sqrt{-1}) = -1$, o que, do ponto de vista da aritmética, não é possível devido à manipulação de raízes quadradas de números negativos.

Essa característica mais ampla das noções aritméticas ficou conhecida como o princípio da permanência das formas equivalentes. Embora Peacock não tenha percebido

¹ A relação entre os trabalhos de Babbage, Peacock e Woodhouse é coerente, uma vez que os três fazem parte do desenvolvimento da Analytical Society

² In their simplest meaning the symbols + - x desig additions, subtractions, multiplications, to be made on the supposition that the characters connected by these symbols, can be resolved into units; and on this supposition, the first rules for transposition and multiplication are demonstrated; but subsequently to the extension of the rules, by which equations of no direct meaning and symbols incapable of being arithmetically computed are introduced, these symbols take more extensive signification: thus, $a \pm b\sqrt{-1} + c \pm 2b\sqrt{-1}$ is put $a + c \pm 3b\sqrt{-1}$ where the symbols $b\sqrt{-1}, 2b\sqrt{-1}$ are connected together, in the same manner, as the signs of real quantities are, that is, of quantities that admit numerical computation: again $(a + b\sqrt{-1}) \times (c + d\sqrt{-1}) = ac + ad\sqrt{-1} + cd\sqrt{-1} - bd$, where the connecting sign x indicates an operation to be performed: what that operation is, we know from having previously established its nature, in those cases where the symbols employed, were supposed to represent collections of units

que essas extensões não se limitavam aos números, ele representou um passo inicial no desenvolvimento de uma nova álgebra. Seguindo essa ideia, Augustus De Morgan apresentou sua contribuição com a obra *Trigonometry and Double Álgebra* (MORGAN, 1849), na qual ele se propõe a estender não apenas as noções sobre os números, mas também sobre as operações.

Esse livro de De Morgan apresenta uma lista de textos que abordam a expansão das ideias algébricas, dentre os quais destacamos o *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Root, of Negative Quantities* (WARREN, 1828), o artigo de Davies Gilbert "On the nature of negative and of imaginary quantities" (GILBERT, 1831) e o relatório do BAAS de 1834 que trata dos novos campos da análise. Estes textos têm em comum o uso das ideias iniciadas por Peacock e Woodhouse.

Outro autor britânico que contribuiu para desenvolvimento do pensamento algébrico no Reino Unido foi Duncan Gregory, que publicou duas obras no início da década de 1840. A primeira, *Examples of the Processes of the Differential and Integral Calculus* (GREGORY, 1841a), se caracteriza pelo uso da linguagem analítica leibniziana e se inspira nas iniciativas de Peacock.

A este respeito, será visto como concordando com a Coleção de Exemplos do professor Peacock; e, de fato, se uma segunda edição desse excelente trabalho tivesse sido publicada, eu não teria assumido a tarefa de fazer esta compilação. Mas como o professor Peacock me informou que não tinha tempo para supervisionar a publicação de uma segunda edição de seus "Exemplos" que estava há muito esgotada, pensei que deveria prestar um serviço aos alunos preparando um trabalho em um plano semelhante, mas com as modificações que pareciam exigidas pelo crescente cultivo da Análise nesta Universidade.³ (GREGORY, 1841a, prefácio, Tradução Nossa)

A expressão "crescente cultivo da análise" refere-se à álgebra simbólica utilizada desde as publicações de Woodhouse e que passou a ser estudada de maneira mais sistemática por meio das ações da Analytical Society. Conforme mencionado por Gregory (1839, p. 208), essa álgebra é a ciência que trata da combinação de operações definidas não por sua natureza, mas pelas leis às quais estão sujeitas. Com essas características, podemos afirmar que esse trabalho apresentou a álgebra como uma ciência independente de outros ramos do conhecimento.

³In this respect it will be seen to agree with professor Peacock's Collection of Examples ; and indeed if a second edition of that excellent work had been published I should not have undertaken the task of making this compilation. But as Professor Peacock informed me that he had not leisure to superintend the publication of a second edition of his "Examples" which had been long out of print, I thought that I should do a service to students by preparing a work on a similar plan, but with such modifications as seemed called for by the increased cultivation of Analysis in this University.

Essa independência impulsionou investigações em outras áreas, como a lógica. George Boole utilizou os resultados da álgebra simbólica para aplicar às regras da lógica, afirmando que "As leis, os axiomas e os processos dessa Álgebra serão idênticos, em toda sua extensão, às leis, axiomas e processos de uma Álgebra da Lógica"(DURAND-RICHARD; PARIS, 1999, p. 27). Essas modificações nas aplicações das expressões algébricas se difundiram pelo Reino Unido e despertaram o interesse de outras áreas, como a geometria.

Destacamos os trabalhos de William Rowan Hamilton, como por exemplo "On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra"(HAMILTON, 1844), que também apresentou um novo sistema algébrico, embora tenha discordado das ideias de Peacock sobre lidar com os símbolos desvinculados de interpretação. Por outro lado, existe a concordância sobre a necessidade de estabelecer uma álgebra capaz de lidar com os números negativos e raízes quadradas deles.

Nesse sentido, é importante ressaltar o fundo geométrico das conjecturas de Hamilton sobre os números imaginários. A ideia é associar pares a números formados por partes reais e imaginárias e triplas a números com duas partes imaginárias. A perspectiva geométrica pode ser percebida, por exemplo, na descrição do produto de duas triplas:

Não será (espero) considerado como reivindicando qualquer mérito para mim neste assunto, mas apenas como registro de uma suposição não perseguida, que pode ajudar a ilustrar toda essa investigação, se eu me atrever a mencionar aqui que a primeira conjectura a respeito de trigêmeos geométricos, que encontro notado em meus artigos (já em 1830), foi que, embora as linhas no espaço possam ser adicionadas de acordo com a mesma regra que no plano, elas podem ser multiplicadas multiplicando seus comprimentos e adicionando seus ângulos polares. No método, conhecido por mim então como o do Sr. Warren, se escrevermos $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, temos, para multiplicação dentro do plano, equações que podem ser escritas assim, $r'' = rr'$, $\theta'' = \theta + \theta'$. Portanto, ocorreu-me que, se empregássemos para o espaço essas outras transformações conhecidas de coordenadas retangulares para polares, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta \cos \phi$, $z = r \sin \theta \sin \phi$, pode ser natural definir a multiplicação de linhas no espaço pelas fórmulas ligeiramente estendidas, mas análogas, $r'' = rr'$, $\theta'' = \theta + \theta'$, $\phi'' = \phi + \phi'$: que, no entanto, conduziu a radicais, como na expressão, $x'' = xx' - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$, enquanto dentro no plano havia valores racionais para as coordenadas retangulares do produto, a saber, $x'' = xx' - yy'$, $y'' = xy' + yx'$.⁴ (HAMILTON, 1853, p. 39, Tradução Nossa)

⁴ It will not (I hope) be considered as claiming any merit to myself in this matter, but merely as recording an unpursued guess, which may assist to illustrate this whole inquiry, if I venture to mention here that the first conjecture respecting geometrical triplets, which I find noted among my papers (so long ago as 1830), was, that while lines in space might be added according to the same rule as in the plane, they might be multiplied by multiplying their lengths, and adding their polar angles. In the method [36], known to me then as that of Mr. Warren, if we write $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, we have, for multiplication within the plane, equations which may be written thus, $r'' = rr'$, $\theta'' = \theta + \theta'$. It hence occurred to me, that if we employed for space these other known transformations of rectangular to polar co-ordinates, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta \cos \phi$, $z = r \sin \theta \sin \phi$, it might be natural to define multiplication of lines in space by the slightly extended but analogous formulae, $r'' = rr'$, $\theta'' = \theta + \theta'$, $\phi'' = \phi + \phi'$: which, however, conducted

Destacamos que a multiplicação de dois números, representados aqui por pares ou triplas em coordenadas retangulares, é realizada por meio da rotação de segmentos orientados, utilizando a conversão das n-uplas para coordenadas polares. Além disso, é importante observar que, ao contrário das analogias com a aritmética realizadas antes dos avanços analíticos no Reino Unido, essa abordagem de Hamilton introduz um elemento mecânico na expansão dos números. Esse aspecto evidencia, mais uma vez, as novas possibilidades para o pensamento algébrico e geométrico no Reino Unido. É importante ressaltar que esse trabalho apresenta conexão com ideias sobre mecânica, uma vez que o autor se dedicou a investigações sobre dinâmica, como é caso do texto intitulado *On a General Method in Dynamics* (HAMILTON, 1834).

Segundo Richards (1986), as revistas matemáticas começaram a adotar a notação analítica como forma de descrever a geometria, conhecida na época como geometria descritiva. Isso fica evidente em artigos impulsionados pelos trabalhos de Boole, Cayley e, um pouco mais tarde, Sylvester sobre a *Teoria dos Invariantes*. A publicação de "On the Intersections, Contacts, and other Correlations of Two Conics Expressed by Indeterminate Coordinates" (SYLVESTER, 1850d) é o primeiro de uma série de artigos que discutem propriedades geométricas por meio de interpretações baseadas em características de polinômios homogêneos.

Sylvester inicia suas reflexões sobre problemas relacionados ao que ele denominou de "nova geometria", que se tornariam a base da *Teoria dos Invariantes*. Com base nessa ideia, podemos destacar alguns aspectos presentes em sua obra: 1) a natureza algébrica dos artigos publicados até 1847, quando ele se familiarizou com as coordenadas homogêneas descritas por Plücker; 2) as ideias geométricas que seriam fundamentais para pesquisas futuras, presentes em correspondências do final dos anos 1840 até os artigos publicados em 1850; e 3) as pesquisas sobre a *Teoria dos Invariantes*, que se iniciaram a partir de 1851.

Sobre esta influência geométrica na interpretação de expressões algébricas, podemos destacar a expressão "geometria algébrica". De acordo com Coolidge (1940), essa geometria está diretamente ligada à geometria analítica, que se trata do estudo dos lugares geométricos por meio de equações. Como vimos no último capítulo, essa expressão foi se tornando cada vez mais frequente na formação de Sylvester, sendo divulgada em os jornais especializados a partir de 1837.

No continente, as discussões sobre questões analíticas da geometria eram mais antigas, com influência obras como o *Introduction a l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques*, livro-texto publicado por Gabriel Cramer em 1750 (COOLIDGE, 1940). Nesse texto,

to radicals, as in the expression, $x'' = xx' - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$, whereas within the plane there were rational values for the rectangular co-ordinates of the product, namely, $x'' = xx' - yy'$, $y'' = xy' + yx'$.

encontramos as seguintes considerações sobre o tema:

as Curvas sempre foram um dos principais objetos das especulações dos Geômetras. Dificilmente a Geometria saiu da infância, do que cuidava de seções cônicas: logo depois, admirava as propriedades dos Conoide, dos Cissoide, das Espirais, ... e de várias outras linhas, cujo nome e conhecimento pereceram com a maioria dos monumentos da Geometria antiga. ⁵ (CRAMER, 1750, p. VI, Tradução Nossa)

Nessa citação, podemos observar que Cramer descreve uma faceta do trabalho geométrico, como o estudo de curvas. Por outro lado, o autor também deixa clara a necessidade da utilização da álgebra para alcançar avanços que eram importantes para o desenvolvimento das questões geométricas.

É especialmente na Teoria das Curvas que a utilidade de um método tão geral como o da Álgebra é muito sentida. Descartes, cujo espírito inventor não brilha menos na Geometria do que na Filosofia, ainda não havia introduzido a maneira de expressar a natureza das Curvas por equações algébricas, que essa Teoria mudou a face. As descobertas se multiplicaram com facilidade extraordinária: cada linha de cálculo consagrava novos teoremas. ⁶ (CRAMER, 1750, p. vii, Tradução Nossa)

E acrescenta,

... a Álgebra sozinha oferece os meios de distribuir as Curvas em Ordens, Classes, Gêneros e Espécies: que, como em um Arsenal onde as armas são bem ordenadas, torna possível escolher, sem hesitação, aquelas que podem ser usadas na resolução de um problema proposto. ⁷ (CRAMER, 1750, p. viii, Tradução Nossa)

Podemos observar a percepção de Cramer sobre as vantagens da utilização de recursos algébricos para lidar com problemas geométricos. Nessa obra, o matemático

⁵ les Courbes ont - elles toujours fait un des principaux objets des spéculations des Géomètres. A peine la Géométrie sortoit - elle de l'enfance , qu'elle s'occupa des Sections coniques : bientôt a- près elle admira les propriétés de la Conchoïde , de la Cissoïde , des Spirales , (Courbes très différentes de celles que nous désignons par ce nom, et qui sont les Hélices des Anciens) et de plusieurs autres Lignes , dont le nom et la connoissance a péri avec la plupart des monuments de l'ancienne Géométrie.

⁶ C'est sur-tout dans la Théorie des Courbes qu'on éprouve bien sensiblement l'utilité d'une Méthode aussi générale que l'est celle de l'Algèbre. Descartes, dont l'esprit inventeur ne brille pas moins dans la Géométrie que dans la Philosophie , n'eut pas plutôt introduit la manière d'exprimer la nature des Courbes par des équations algébriques, que cette Théorie changea de face. Les découvertes se multiplièrent avec une extraordinaire facilité: chaque ligne de Calcul ensantoit de nouveaux Théorèmes.

⁷ l'Algèbre seule sournit le moyen de distribuer les Courbes en Ordres, Classes, Genres et Espèces : ce qui , comme dans un Arsenal où les armes sont bien rangées , met en état de choisir, sans hésiter , celles qui peuvent servir dans la Résolution d'un Problème proposé.

estuda curvas representadas por equações explicitadas em termos de x , as classifica de acordo com sua ordem, apresentada métodos de mudanças de eixos, entre outros desdobramentos.

Com a compreensão bem estabelecida da possibilidade do uso das técnicas da geometria analítica, é possível elencar algumas práticas que se tornaram comuns na resolução de problemas geométricos ao longo dos séculos XVIII e XIX. Segundo Coolidge (1940), é possível encontrar uma referência ao uso de polinômios homogêneos para representar superfícies em três dimensões no artigo “Affections des superficies, et de leurs plans tangents”, de George Parent, que discute o problema de encontrar a equação de um plano tangente a uma esfera dada pela equação:

$$c^2 + y^2 - 2cy + b^2 + x^2 - 2bx + a^2 + z^2 - 2az = r^2$$

Para isso, o autor calcula duas subtangentes (projeções das tangentes em pontos específicos) às circunferências formadas ao considerar a variável y como constante e, em seguida, considerar a variável x como constante. De certa forma, é possível inferir que esse procedimento trata do que hoje chamamos de "escolha de cartas afim no espaço projetivo".

Outra observação possível sobre esse problema é a utilização de um polinômio homogêneo para a determinação de superfícies e o estudo de curvas geradas através de interseções. Nesse sentido, Coolidge destaca as contribuições de Alexis-Claude Clairaut (1713 – 1765) presentes na obra *Recherches sur les Courbes a Double Courbure* publicado em 1731.

Chamei curvas de projeções, as curvas formadas pelas perpendiculares que se realizam nos três planos deste ângulo sólido. E olhei para as equações de duas dessas três curvas de projeções tomadas indistintamente, como as da curva que nos propomos examinar, uma vez que elas podem determinar todos os pontos, e então eu dei métodos gerais de encontrar, por meio dessas equações, as propriedades e afeições desses tipos de curvas. como tangentes, diferentes perpendiculares, quadraturas, cubaturas, retificações etc. e tudo o que pode ser relacionado como pode ser visto pela distribuição do trabalho. ⁸ (CLAIRAUT, 1731, prefácio, Tradução Nossa)

Nesse trecho do prefácio do livro de Clairaut, é possível observar que o autor anuncia o estudo de curvas através do uso de equações, de modo que as propriedades

⁸ J'ai appelle courbes de projections , les courbes formées par les perpendiculaires que l'on mene sur les trois plans de cet angle solide, et j'ai regardé les équations de deux de ces trois courbes de projections prises indistinctement, comme celles de la courbe que l'on se propose d'examiner, puisqu'elles en peuvent déterminer tous les points, et ensuite j'ai donné des methodes générales pour faire trouver par le moyen de ces équations, les propriétés et affections de ces sortes de courbes, comme les tangentes, les différentes perpendiculaires, les quadratures, les cubatures, rectifications, etc. et tout ce' qui peut y avoir rapport comme on le peut voir par la distribution de l'ouvrage.

que eles teriam entre eles, ou mesmo que todos os termos dessas equações conteriam sempre variáveis no mesmo grau que na equação $axy + bxz = cy^2$ por exemplo, etc.¹⁰ (CLAIRAUT, 1731, p. 14, Tradução Nossa)

Outra contribuição para o desenvolvimento da geometria algébrica, foi a utilização de coordenadas retangulares e homogêneas e transformações no espaço. Coolidge (1940) indica que Euler discute o movimento rígido no espaço através da mudança de variáveis que descrevem coordenadas retangulares com o auxílio das seguintes fórmulas.

$$\begin{aligned}x &= x_0 + x'(\cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\psi\sin\phi) - y'(\cos\psi\cos\phi + \cos\theta\sin\psi\sin\phi) + z'\sin\theta\sin\phi \\y &= y_0 + x'(\sin\psi\cos\phi + \cos\theta\cos\psi\sin\phi) - y'(\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\psi\sin\phi) - z'\sin\theta\sin\phi \\z &= z_0 + x'\sin\theta\sin\phi + y'\sin\theta\cos\phi + z'\cos\theta\end{aligned}$$

Podemos notar que esses trabalhos estabelecem uma íntima relação entre conceitos geométricos e propriedades algébricas. Esse tipo de abordagem da geometria se manteve ativo no século XIX.

De acordo com Klein (1926), o campo da geometria algébrica se desenvolveu no continente a partir da elaboração de uma geometria projetiva fundada por Monge e Poncelet e desenvolvida por Möbius, Plücker e Steiner. Além disso, o campo se consolida a partir do desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*.

Nesse sentido, o autor destaca o uso das coordenadas homogêneas e a introdução da interpretação geométrica dos números na geometria projetiva, ou seja, o uso de métricas. De acordo com Klein (1926), a introdução dos irracionais e imaginários representaram problemas de ordem filosófica e foram solucionados pelos trabalhos do matemático alemão Karl Georg Christian von Staudt (1798 – 1867), que utilizou técnicas de involução como forma de projetar números conjugados na reta.

O trabalho com coordenadas homogêneas também se faz presente nos textos de Julius Plücker (1801 – 1868), que trata das curvas algébricas em sua publicação *System der analytischen Geometrie* de 1835. Podemos citar como um exemplo a dedução de que uma curva representada por uma equação de grau n apresenta $3n(n-2)$ pontos de inflexão (GRAY, 2011).

¹⁰On tire de cette solution une propriété commune à toutes les surfaces de cônes en général, qui est que leurs équations dont les coordonnées partent du pôle comme dans celle-ci n'auront jamais de parametre, j'entends par ce mot toute lettre constante dans une équation, qui exprime une ligne qui doit être absolument donnée pour la construction de l'équation comme le parametre dans la parabole, le rayon dans le cercle, etc. c'est-à-dire que s'il s'y rencontroit des constantes on n'auroit besoin de connoître que le rapport qu'elles auroient entr'elles, ou bien encore que tous les termes de ces équations renfermeroient des variables élevées toujours ensemble à un même degré comme dans l'équation $axy+bxz=cy^2$ par exemple, etc.

De acordo com Mansion (1873), Plücker prestou grande serviço para a geometria projetiva ao propor a interpretação de conceitos geométricos através das coordenadas homogêneas e das propriedades dos polinômios homogêneos. As contribuições do matemático alemão serviram de inspiração para os trabalhos de Sylvester sobre a natureza dos pontos de contato de curvas e superfícies. Destacamos que, em 1837, Plücker se dedicou a estabelecer relações sobre os pontos singulares de curvas de graus 3, 4 e 5 (PLÜCKER, 1837a).

O trabalho de Plücker nos interessa pela adequação de suas coordenadas homogêneas às ideias que surgem nas publicações de Sylvester a partir de 1850. É fato que este teve conhecimento dos textos de Plücker, como se pode observar na seguinte citação:

A característica de uma figura geométrica é a função que, igual a zero, constitui a equação para essa figura. Acho que Plücker, em algum lugar, chama isso de função de linha ou superfície, conforme o caso. A geometria, considerada analiticamente, se resolve em um sistema de regras para a construção e interpretação de características.¹¹ (SYLVESTER, 1850a, p. 367, Tradução Nossa)

Esta citação nos mostra que Sylvester se preocupou em apresentar a conexão entre seu trabalho e o de Plücker. A esse respeito, no trabalho "Über die allgemeine Gesetzes, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben" (PLÜCKER, 1829), encontramos equações algébricas que servem para representar superfícies .

O uso de coordenadas e polinômios homogêneos para lidar com objetos da geometria são encontrados em seus textos a partir de 1831, ano em que publica o 2º volume do livro *Analytisch-Geometrische Entwicklungen*, onde encontramos o uso dessas estruturas algébricas. Outro fator importante é o processo de transformar uma equação homogênea em não homogênea e vice-versa. Plücker utiliza essa técnica, que pode ser vista nos textos de Sylvester que tratam dos problemas de contato entre cônicas.

A conexão entre problemas de geometria e álgebra se revela em outros trabalhos britânicos através da expressão geometria algébrica. Os sumários do CMJ são um forte indício dessa mudança de perspectivas, uma vez que apresentam divisões por temas onde incluem discussões relacionadas aos dois campos da matemática. A utilização de polinômios homogêneos como meio para interpretações de resultados geométricos passou a figurar no *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, recebendo contribuições importantes

¹¹The characteristic of a geometrical figure is the function which, equated to zero, constitutes the equation to such figure. Plücker, I think, somewhere calls it the line or surface function, as the case may be. Geometry, analytically considered, resolves itself into a system of rules for the construction and interpretation of characteristics.

das mãos dos matemáticos que trabalharam com a *Teoria dos Invariantes*, caso de Boole, Cayley, Sylvester e Salmon.

É importante ressaltar que a expressão "Geometria Algébrica", aparentemente, representava investigações sobre propriedades analíticas de curvas descritas em coordenadas cartesianas. A introdução de noções projetivas e o uso de coordenadas homogêneas passa a ganhar espaço nos jornais especializados a partir da década de 1840.

A esse respeito, podemos destacar o texto "Exposition of a General Theory of Linear Transformations" (BOOLE, 1841), que apresenta uma discussão sobre a mudança de eixos de uma forma quadrática; o texto "On the Theory of Algebraic Curves" (CAYLEY, 1845h), que utiliza uma notação semelhante à introduzida por Plücker para representar curvas planas; e, por fim, o *Treatise on Conic Sections* (SALMON, 1850c), lançado no ano em que Sylvester inicia suas contribuições para estudos das cônicas.

O contexto no qual Sylvester retoma seu trabalho matemático, após as dificuldades enfrentadas na década de 1840, se encontrou influenciado por discussões que tratam de uma abordagem analítica da geometria em várias dimensões, com auxílio de polinômios homogêneos, além das investigações sobre transformações lineares, que haviam se iniciado a partir da publicação de Boole (1841). Neste sentido, entendemos que a comunidade de práticas desenvolvida no entorno dos interesses de Sylvester, se encontrava envolvida com a produção de práticas comuns sobre esses assuntos.

Também podemos destacar um artigo publicado por Cayley no *Jornal do Crelle* de 1850 "Sur le Problème des Contacts" (CAYLEY, 1850f), no qual o matemático apresentou uma representação de cônicas de forma idêntica à que Sylvester utilizaria, na mesma década, em seu primeiro trabalho com problemas de contatos de cônicas projetivas. O trabalho de Cayley também introduziu o conceito de "quadrângulo".

Para compreender melhor o papel desses conceitos e técnicas, apresentamos comentários a respeito de alguns trabalhos de Sylvester que compartilham desse conjunto de práticas e técnicas comuns na abordagem geométrica introduzida por Plücker no século XIX. De forma mais específica, apresentaremos como os polinômios homogêneos e as técnicas com determinantes têm papel importante no desenvolvimento de ideias geométricas na segunda metade do século XIX.

Após esta contextualização, analisaremos a obra de Sylvester de acordo com as temáticas que identificamos a partir de uma leitura prévia. Tais artigos apresentam abordagens de natureza algébrica, como é o caso daqueles iniciados em 1839. Entretanto, entendemos que essa produção conta com um pano de fundo geométrico, principalmente no caso dos trabalhos iniciados em 1850, além daqueles que tratam de transformações,

também iniciados na década de 1850, e dos textos sobre rotação de corpos rígidos, iniciados na década de 1860. Organizamos os comentários através dessas temáticas, de modo que foi possível evidenciar quais práticas foram utilizadas por Sylvester em cada assunto.

3.2 Teoria de Eliminação

Os trabalhos analisados nesta seção compõem a maior parte do início da obra de Sylvester. Como veremos, o foco principal da discussão reside na solução de equações de grau n e na resolução de sistemas de equações polinomiais. Outro elemento que merece destaque é a influência da obra de Bézout. Após uma análise preliminar dos artigos, selecionamos os seguintes:

Tabela 1 – Artigos que lidaram com eliminação

TEORIA DE ELIMINAÇÃO NA OBRA DE SYLVESTER		
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS
On rational derivation from equations of coexistence, that is to say, a new and extended theory of elimination, Part I	Philosophical Magazine 15 (1839)	428-435
On derivation of coexistence, Part II, being the theory of simultaneous simple homogeneous equations	Philosophical Magazine 16 (1840)	037-043
A method of determining by mere inspection the derivatives from two equations of any degree	Philosophical Magazine 16 (1840)	132-135
Note on elimination	Philosophical Magazine 17 (1840)	379-380
Examples of the dialytic method of elimination as applied to ternary systems of equations	Cambridge Mathematical Journal 2 (1841)	232-236
On a linear method of eliminating between double, treble, and other systems of algebraic equations	Philosophical Magazine 18 (1841)	425-435

Memoir on the dialytic method of elimination, Part I	Philosophical Magazine 21 (1842)	534-539
On a new class of theorems in elimination between quadratic functions	Philosophical Magazine 37 (1850)	213-218
Additions to the articles "On a new class of theorems", and "On Pascals theorem"	Philosophical Magazine 37 (1850)	363-370
Sketch of a memoir on elimination, transformation and canonical forms	Cambridge and Dublin Mathematical Journal 6 (1851)	186-200
Extensions of the dialytic method of elimination	Philosophical Magazine 2 (1851)	221-230

Fonte – Elaborada pelo autor

É importante destacar que a maioria desses textos possui uma natureza predominantemente algébrica, uma vez que lidam com os coeficientes de polinômios. No entanto, podemos observar que os artigos de 1850 e 1851 revelam uma abordagem geométrica dos problemas, como veremos nas análises desta seção. O primeiro artigo publicado sobre o tema, intitulado "On rational derivation from equations of coexistence, that is to say, a new and extended theory of elimination" (SYLVESTER, 1839), tem como objetivo estabelecer um método original de eliminação. Considerando um sistema de dois polinômios de graus m e n em uma variável, o primeiro passo foi apresentar teoremas sobre os resultantes do processo de eliminação. Esses resultados apresentam uma forte conexão com os de Bézout e Sturm.

Ao determinar que os derivativos primários ¹² podem ser escritos como funções das raízes das equações de coexistência, Sylvester destaca que o caso particular do polinômio gerado pela combinação das raízes de ambas as equações se anula e o compara com o teorema de Bézout ¹³. De acordo com Alfonsi (2008), a relação entre os métodos dos dois

¹²Dadas P e Q , duas equações polinomiais em uma variável (x) de graus m e n , os derivativos do sistema formado por elas é um polinômio C de grau r (especificamente para o artigo de 1839, Sylvester exigiu que r fosse menor que m e n) cujos coeficientes são combinações dos coeficientes de P e Q . o Derivativo primário é o polinômio irreduzível formado por essas características.

¹³Este teorema foi enunciado por Étienne Bézout (1730 - 1783) e afirma que o grau da resultante da eliminação de variáveis é igual ao produto dos graus das equações envolvidas no sistema.

matemáticos se torna mais explícita a partir do texto "A Method of Determining, by mere inspection, the Derivatives from two Equations of any Degree", (SYLVESTER, 1840), no qual o resultante é apresentado por meio da seguinte matriz:

$$P = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$Q = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

$$\begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

esta é uma matriz quadrada de dimensão m+n, atualmente conhecida como matriz de Sylvester, cujo determinante é o resultante do sistema formado pelos polinômios P e Q (BOSTAN, 2010, p. 162).

Os dois textos apresentados até aqui se mostram como uma sequência no desenvolvimento do trabalho de Sylvester sobre Teoria de Eliminação. Essa percepção é importante, uma vez que o estudo sobre as propriedades dos resultantes é diretamente relacionado com a *Teoria dos Invariantes*. De acordo com Molk (1916, p. 85), o *Método Dialítico* do matemático inglês é responsável pela conexão com outros métodos, como Bézout, Euler, Jacobi e Richelot. Em nota sobre o cálculo das formas,¹⁴ publicado em 1853, encontramos a seguinte declaração:

No que diz respeito a esse ramo particular da Teoria dos Invariantes que se relaciona com as resultantes, ou, em outras palavras, com a doutrina da eliminação, posso aqui enunciar o teorema aludido em um número anterior

¹⁴Essa expressão se refere à teoria das formas associadas aos polinômios homogêneos e foi apresentada pela primeira vez no artigo "On the Principles of the Calculus of Forms", publicado no Cambridge and Dublin 7 de 1852 por Sylvester.

do Journal, ou seja, se R for o resultante de um sistema de n funções homogêneas de n variáveis, escritas em sua forma completa e mais geral (de modo que por definição $R = 0$ é a condição de que as equações obtidas tornando as n funções dadas zero, sejam simultaneamente satisfazíveis por um sistema de razões), então a condição de que essas equações possam ser satisfeitas por i sistemas distintos de razões entre as n variáveis é $\delta^i R = 0$, sendo a variação δ tomada em relação a cada constante que entra em cada uma das n equações. ¹⁵ (SYLVESTER, 1853b, p. 64, Tradução Nossa)

Sylvester se refere ao resultante de um sistema de polinômios homogêneos. O interessante é notar ele entende que a Doutrina da Eliminação é, em suas palavras, parte integrante da *Teoria dos Invariantes*. Outro fator que merece destaque é o interesse no máximo divisor comum de dois polinômios, que é compartilhado com o teorema de Bézout. De fato, essa conexão surge no artigo de 1839, quando Sylvester apresenta os teoremas sobre os resultantes e afirma que o teorema famoso do matemático francês é um caso particular quando os polinômios de coexistência apresentam as raízes iguais. Esse fator faz com que o determinante e os menores formados a partir de divisões sucessivas dos polinômios sejam nulos, característica fundamental no desenvolvimento do método de Bézout (MOLK, 1916).

Outra comparação possível entre os dois métodos é através da técnica dos determinantes. Em 1840, Sylvester descreve uma maneira prática de determinar o resultante de um sistema de equações de coexistência com a organização dos coeficientes dos polinômios em uma matriz e o cálculo de seu determinante. Essa abordagem associa o processo de resolução do sistema à solução de um sistema linear, o que se assemelha ao método utilizado por Bézout (ALFONSI, 2013, p. 8). Outra semelhança entre os dois métodos é o fato de o resultante se mostrar como uma condição para a possibilidade solução das equações de coexistência e não um meio de determiná-la.

Essa conexão com o teorema de Bézout volta a ser considerada em problemas sobre contatos de cônicas que, como Alfonsi (2008) aponta, foi uma inspiração para os estudos sobre Teoria de Eliminação. Antes de iniciarmos a discussão sobre aspectos geométricos, trazemos uma análise das conexões do método de Sylvester e outro famoso teorema, o teorema de Sturm (STURM, 1835).

Diferentemente de Bézout o trabalho de Sturm, apresentado à Academia de Ciências

¹⁵As regards that particular branch of the theory of invariants which relates to resultants, or, in other words, to the doctrine of elimination, I may here state the theorem alluded to in a preceding Number of the Journal, to wit that if R be the resultant of a system of n homogeneous functions of n variables, written out in their complete and most general form (so that by definition $R = 0$ is the condition that the equations got by making the n given functions zero, shall be simultaneously satisfiable by one system of ratios), then the condition that these equations may be satisfied by i distinct systems of ratios between the n variables is $\delta^i R = 0$, the variation δ being taken in respect to every constant entering into each of the n equations.

de Paris em 1829, não trata de eliminação. Na verdade, trata-se de um método para determinar o número de raízes reais de um polinômio de grau m em um intervalo específico. Apesar disso, Sylvester percebeu uma conexão importante entre tal método e seus interesses em 1839.

Quando uma das equações de coexistência é o coeficiente diferencial em relação ao termo repetido da outra, os derivativos primários dados no teorema 2 que coincidem neste caso com as funções auxiliares de Sturm reduzidas a seus termos mais baixos, podem ser exibidas sob um aspecto integral.¹⁶ (SYLVESTER, 1839, p. 433, Tradução Nossa)

O teorema 2, citado nesse trecho, se refere ao fato de que os derivativos são sempre do mesmo grau, independentemente da utilização das raízes da primeira ou da segunda equação de coexistência. As funções auxiliares de Sturm, são os quocientes gerados a partir do processo de divisões sucessivas que determina o número de raízes em um intervalo dado. De acordo com Sinaceur (1991), a abordagem de Sylvester não só se conecta ao teorema de Sturm, mas também lhe acrescenta uma nova perspectiva.

Enquanto o teorema de Sturm se propõe a determinar o número de raízes reais de um polinômio em um intervalo dado, Sylvester apresenta uma relação entre as raízes através dos produtos dos quadrados de suas diferenças. O matemático inglês retoma a discussão que foi iniciada no *Mécanique Analytique* de Lagrange a respeito das soluções de equações polinomiais de graus maiores do que 4.

Sinaceur (1991), destaca essa distinção como uma mudança na natureza do pensamento sobre o teorema de Sturm, fator que ela chama de processo de algebrização do resultado. A autora ainda destaca que, enquanto a ideia original do teorema está baseada nas mudanças de sinal dentro do intervalo estudado, o que caracteriza um entendimento de continuidade do polinômio, o método de Sylvester se baseia apenas na estrutura dele, como uma combinação formal de caracteres e operações algébricas.

A natureza algébrica do trabalho que Sylvester desenvolveu nesse estudo sobre as raízes dos polinômios pode ser mais bem percebida no artigo "A New and More General Theory of Multiples Roots" (SYLVESTER, 1841b). Além de estabelecer uma notação capaz de representar as combinações das raízes em quadrados de diferenças, o autor apresentou uma abordagem que permite formar equações lineares que serão importantes no processo de eliminação das variáveis, dado um conjunto de pares de raízes iguais. A partir disso, era possível determinar as outras raízes. Podemos observar que esse método é, exclusivamente,

¹⁶When one of the equations of coexistence is the differential coefficient with respect to the repeated term of the other, the prime derivatives given in Theorem 2 which coincide in this case with Sturm's auxiliary functions reduced to their lowest terms, may be exhibited under an integral aspect.

baseado na estrutura formal do polinômio. Além disso, esse trabalho traz indícios de que a ideia de eliminação de Sylvester tem alicerce nas ideias de Lagrange.

Difícilmente se pode duvidar que o ilustre Lagrange, se tivesse escolhido aperfeiçoar a teoria incompleta de raízes iguais dada na *Resolução Numérique*, aplicando a ela sua própria máquina favorita de funções simétricas, dificilmente teria deixado de tropeçar por uma passagem para trás sobre teorema memorável de Sturm.¹⁷ (SYLVESTER, 1841b, p. 251, Tradução Nossa)

Nessa citação podemos verificar que Sylvester percebia a conexão entre a obra do autor do *Mécanique Analytique*, sua Teoria de Eliminação e o teorema de Sturm. É interessante perceber que o matemático inglês acreditava que Lagrange passaria pelo famoso teorema de seu amigo francês, caso prosseguisse em suas investigações sobre raízes de polinômios.

Como Molk (1916) destaca, o método de Sylvester ganhou alguma repercussão no continente. Em 1840, o matemático alemão Friedrich Julius Richelot (1808-1875) publicou uma nota no *Jornal do Crelle* onde reproduz o *Método Dialítico*, nome pelo qual ficou conhecido a partir dos anos 1840. Na nota, há indicação das funções multiplicadoras usadas por Sylvester no processo de eliminação.

A produção de Sylvester sobre Teoria de Eliminação tem uma pausa no ano de 1842. Aparentemente, isso tem relação com os eventos frustrantes que ocorreram na Universidade de Virgínia, além da brusca mudança que sua carreira apresentou com o trabalho de atuário. Após seu retorno ao Reino Unido, ele se dedica à investigação sobre a resolução de equações de grau 3 (SYLVESTER, 1847). Entretanto, a influência da obra de Plücker muda sua perspectiva sobre as investigações em matemática, que passa a apresentar um pano de fundo geométrico.

Em 1850, Sylvester escreve novos artigos "On a New Class of Theorems in Elimination Between Quadratic Functions" (SYLVESTER, 1850b) e "Additions to the articles "On a new class of theorems", and "On Pascals theorem" (SYLVESTER, 1850a). Esses trabalhos revelam uma conexão explícita entre álgebra e geometria. Por uma questão de organização, esta seção se concentra nos aspectos algébricos desses trabalhos.

O teorema geral, apresentado em tais artigos, afirma que dados dois polinômios U e V em m variáveis, se o determinante de $U + \mu V$ tem i pares de fatores lineares iguais, é possível eliminar $2i$ variáveis dos polinômios envolvidos no sistema, através da

¹⁷It can scarcely be doubted that the illustrious Lagrange, had he chosen to perfect the incomplete theory of equal roots given in the *Resolution Numérique*, by applying to it his own favourite engine of symmetric functions, could scarcely have failed of stumbling by a back passage upon Sturm's memorable theorem.

inserção de i equações lineares nas mesmas m variáveis. Em particular se $m=2n$ e $i=n$, todas as variáveis poderão ser eliminadas a partir da instituição n equações lineares e o determinante de $U + \mu V$ será um quadrado perfeito. Esse teorema é apresentado com o auxílio do que o autor chamou de teoria das ordens,

Uma função linear de todas as letras que entram em uma função ou sistema de funções em consideração chamo uma ordem das letras, ou simplesmente uma ordem. Agora está claro que podemos sempre considerar uma função de qualquer número de letras como uma função de quantas ordens houver letras; mas, em certos casos, uma função pode ser expressa em termos de um número menor de ordens do que as letras, como quando a função característica geral de uma cônica se torna a de um par de linhas cruzadas ou de um par de linhas coincidentes, caso em que perde respectivamente uma e duas ordens e, portanto, para a característica de um conóide se tornar o de um cone, um par de planos ou dois planos coincidentes, nos quais em vários eventos, uma função de quatro letras se torna a de apenas três ordens ou duas ordens ou uma ordem, respectivamente. ¹⁸ (SYLVESTER, 1850a, p. 363, Tradução Nossa)

Nessa citação, é possível observar o modo como o autor percebe a conexão entre álgebra e geometria. Em outras palavras, existe uma influência mútua entre as duas abordagens. Sobre a perspectiva algébrica, Sylvester (1850b) traz o seguinte exemplo: considere os polinômios homogêneos U e V , construídos da seguinte forma:

$$U = P + (lx + my + nz)t$$

$$V = Q + k(lx + my + nz)t$$

onde P e Q são polinômios homogêneos de grau 2 em 3 variáveis (x , y e z). O determinante de $\lambda U + \mu V$ será

$$(\lambda + \mu k)^2 \begin{vmatrix} \lambda a + \mu \alpha & \lambda a' + \mu \alpha' & \lambda c' + \mu \gamma' & l/2 \\ \lambda a' + \mu \alpha' & \lambda b + \mu \beta & \lambda b' + \mu \gamma' & m/2 \\ \lambda c' + \mu \gamma' & \lambda b' + \mu \gamma' & \lambda c + \mu \gamma & n/2 \\ l/2 & m/2 & n/2 & 0 \end{vmatrix}$$

¹⁸A linear function of all the letters entering into a function or system of functions under consideration I call an order of the letters, or simply an order. Now it is clear that we may always consider a function of any number of letters as a function of as many orders as there are letters; but in certain cases a function may be expressed in terms of a fewer number of orders than it has letters, as when the general characteristic function of a conic becomes that of a pair of crossing lines or a pair of coincident lines, in which event it loses respectively one and two orders, and so for the characteristic of a conoid becoming that of a cone, a pair of planes or two coincident planes, in which several events, a function of four letters becomes that of only three orders, or two orders, or one order, respectively.

Esse determinante gera um polinômio homogêneo nas variáveis λ e μ , cujo *discriminante* será o resultante da eliminação das formas U e V. Destacamos que esse processo é associado às intersecções das curvas P e Q, em contato com a reta descrita pela equação $lx + my + nz = 0$ (SYLVESTER, 1850b, p. 216). Do ponto de vista algébrico, o autor percebe que essa abordagem se adequa à ideia de eliminação do sistema $P = 0$, $Q = 0$ e $lx + my + nz = 0$.

Podemos notar que a Teoria de Eliminação se mostra revestida de técnicas que são comuns na discussão de problemas geométricos, uma vez que o uso dos determinantes e das combinações lineares dos polinômios homogêneos é uma prática utilizada nas investigações sobre o contato de curvas projetivas, como veremos na seção que analisa os artigos de Sylvester que tratam de geometria.

Em 1851, encontramos a conexão entre a Teoria de Eliminação e o ponto de partida da *Teoria dos Invariantes*, que lida com problemas de transformações lineares. No artigo "Sketch of a Memoir on Elimination, Transformation, and Canonical Forms" (SYLVESTER, 1851h), o autor faz referência às investigações de George Boole como o ponto de partida dos estudos sobre os *invariantes* algébricos¹⁹ e aponta o resultante de um sistema de equações como um exemplo, do que ele chama de "propriedade fixa" ou "imutável".

Além da referência ao trabalho de Boole, também encontramos a associação aos *Hyperdeterminantes* desenvolvidos por Cayley e ao estudo das *Formes Adjointes* conduzidos por Charles Hermite. Essas formas são comparadas, respectivamente, a outros dois tipos de operador, nomeados por Sylvester: 1) o operador *Aposicional*, que trata do acréscimo de funções binárias da forma: $x\xi + y\eta + z\zeta + \dots$ em substituições lineares; e 2) o operador *Derivacional*, que utiliza o processo

$$\chi = \xi \frac{d}{dx} + \eta \frac{d}{dy} + \dots + \zeta \frac{d}{dz}$$

que é semelhante ao utilizado por Boole para eliminar parcelas com duas variáveis distintas de um polinômio homogêneo de grau 2. De acordo com Sylvester (1851h, p. 189), esse operador gera os resultantes dos métodos de eliminação estudados na década de 1840.

Tais aspectos nos mostram que os esforços que desenvolveram a *Teoria dos Invariantes* foram constituídos por estudos sobre eliminação, de modo que essa Teoria atraiu matemáticos interessados nas duas temáticas, apesar da existência de motivações diferentes.

Entendemos que o artigo apresentado conecta diversas temáticas com as quais Sylvester se envolveu, a saber: Teoria de Eliminação, que se mostra adequada na busca

¹⁹Destacamos que Sylvester define o significado de invariante no mesmo volume deste jornal

pelos *invariantes* algébricos; Teoria das Transformações, que apresenta métodos capazes de determinar resultantes de sistemas de coexistência; problemas de contatos de curvas, que se vale dos determinantes associados a formas quadráticas para identificar os tipos de contatos; os problemas de redução das formas algébricas à suas formas canônicas, que utiliza transformações que são associadas à ideia da diagonalização de matrizes.

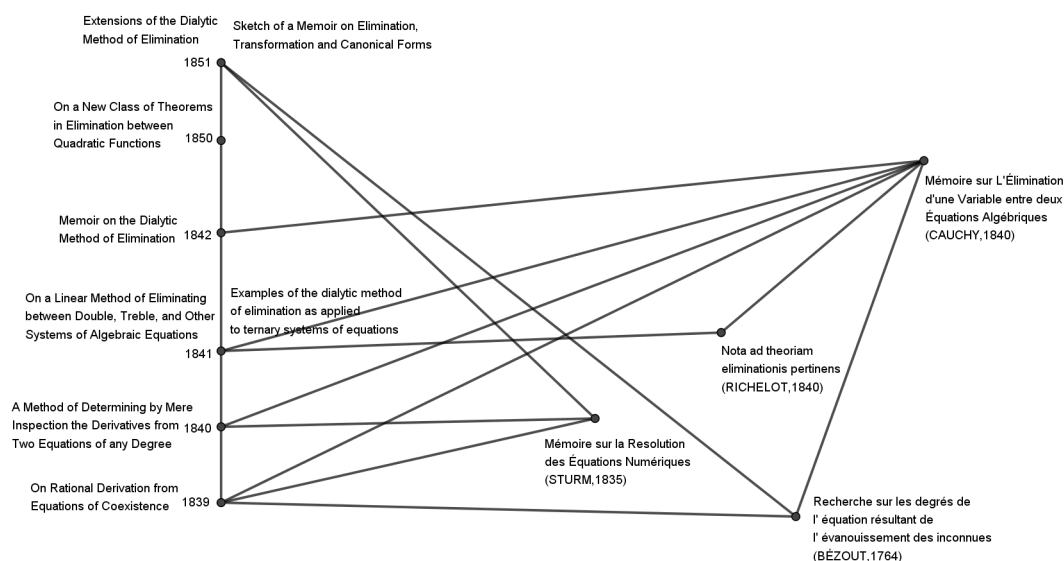
Essas conexões ainda podem ser percebidas em trechos dos textos produzidos por Sylvester na primeira metade do século XIX e nos primeiros anos da década de 1850, dentre os quais destacamos um como exemplo:

Da segunda dessas regras obtemos a primeira lei declarada, eu acredito, para funções além do segundo grau pelo Sr. Boole, a saber, que o determinante de qualquer função algébrica homogênea (significando assim a resultante de seus primeiros coeficientes diferenciais parciais) é inalterado por quaisquer transformações lineares das variáveis, exceto no que diz respeito à introdução de uma potência do módulo de transformação. Isso também é abundantemente aparente pelo fato de que a nulidade de tal determinante implica uma propriedade imutável, isto é, uma propriedade fixa e inerente de um certo lugar geométrico correspondente.²⁰ (SYLVESTER, 1851h, p. 187, Tradução Nossa)

Nessa citação, percebemos a intersecção entre as investigações britânicas sobre transformações lineares, além dos problemas de contato, e as ideias de eliminação de Sylvester. A seguir, apresentamos um esquema que representa a relação das referências do matemático inglês com os textos que analisamos nesse recorte:

²⁰From the second of these rules we obtain the law first stated I believe for functions beyond the second degree by Mr Boole, to wit, that the determinant of any homogeneous algebraical function (meaning thereby the resultant of its first partial differential coefficients) is unaltered by any linear transformations of the variables, except so far as regards the introduction of a power of the modulus of transformation. This is also abundantly apparent from the fact, that the nullity of such determinant implies an immutable, that is, a fixed and inherent, property of a certain corresponding geometrical locus.

Figura 8 – Teoria de Eliminação na Obra de Sylvester



Fonte – Elaborada pelo autor

Nessa imagem, o eixo à esquerda representa a linha do tempo das publicações de Sylvester. A partir desta linha apresentamos outros textos que colaboraram com resultados que foram importantes no desenvolvimento da teoria. Por outro lado, o gráfico revela, além das relações com os teoremas de Sturm e Bézout, uma conexão com investigações de Cauchy sobre as técnicas de eliminação produzidas até 1840.

O trabalho "Mémoire sur L'Élimination d'une Variable entre deux Équations Algébriques"(CAUCHY, 1840) é uma revisão dos métodos de eliminação. Como a rede acima representa, a publicação do matemático francês é um elo entre os textos de referência e as publicações analisadas até aqui. Além de referências às investigações realizadas por Euler em 1748, Cauchy apresenta de forma explícita a conexão entre os trabalhos de Sylvester e Bézout.

De acordo com um segundo método, dado em Paris por Bézout e em Berlim por Euler nas Memórias da Academia de 1764, para eliminar um fator desconhecido x entre duas equações algébricas dadas cujos graus são n e m , basta combinar essas equações entre si, adicioná-las, após tê-las multiplicado respectivamente por dois polinômios, sendo a primeira de grau $m - 1$, a segunda de grau $n - 1$; então escolher os coeficientes desses polinômios de forma a fazer com que todas as potências de x desapareçam na equação resultante.²¹ (CAUCHY, 1840, p. 385,

²¹Suivant une seconde méthode, donnée à Paris par Bézout et à Berlin par Euler dans les Mémoires de L'Académie de 1764, pour éliminer une inconnue x entre deux équations algébriques données dont les degrés sont n et m , il suffit de combiner ces équations entre elles par voie d'addition, après les avoir respectivement multipliées par deux polynomes dont le premier soit du degré $m - 1$, le second du degré $n - 1$; puis de choisir les coefficients de ces polynomes de manière à faire disparaître dans l'équation résultante toutes les puissances de x .

Tradução Nossa)

Nesse trecho da introdução do artigo de 1840, Cauchy apresenta a ideia de redução do grau dos polinômios de um sistema de equações. No texto, podemos observar o uso da notação matricial dos determinantes; além disso, faz-se de referência à representação utilizada no *Método Dialítico* descrito por Sylvester nos trabalhos de 1839 e 1840, o que indica um processo de influência mútua, como podemos ver na sequência do artigo:

A eliminação de x entre as duas equações algébricas dadas se reduz, portanto, à eliminação dos coeficientes de que acabamos de falar, entre as equações lineares que esses mesmos coeficientes devem satisfazer, ou seja, em outras palavras, ao cálculo de uma função alternada, formada com os coeficientes das duas equações algébricas, e assim somos imediatamente levados à regra de eliminação enunciada pelo Sr. Sylvester, no número 101 da Revista Filosófica (fevereiro de 1840). A função alternada em questão é, além disso, como observou M. Richelot, e como se poderia esperar, aquela que é deduzida diretamente da eliminação das várias potências de x entre as equações algébricas dadas e essas mesmas equações respectivamente multiplicadas por aquelas potências cujos graus são menores que os números m ou n .²² (CAUCHY, 1840, p. 386, Tradução Nossa)

Nesse segundo trecho, percebemos outro personagem que compartilha das práticas que são comuns no desenvolvimento da teoria de eliminação, o matemático alemão Friedrich Julius Richelot (1808-1875), que também utiliza o método de eliminação de Sylvester em seu trabalho. Podemos afirmar que essa temática gerou interesse por investigações de natureza puramente algébrica, o que abriu portas para uma nova perspectiva sobre a produção de conhecimento matemático no Reino Unido. Um dos desdobramentos dessa nova perspectiva se encontra na aplicação dos polinômios homogêneos em problemas de geometria, mais especificamente os problemas de contatos de curvas de 2^a e 3^a ordens.

3.3 Problemas de Contato

As publicações sobre Teoria de Eliminação representam a natureza algébrica da obra de Sylvester, característica que se mistura com contextos geométricos, que surgem a partir dos anos 1850 sob a influência dos textos de Plücker. Com isso, é importante

²²L'élimination de x entre les deux équations algébriques données se réduit donc à l'élimination des coefficients dont nous venons de parler, entre les équations linéaires auxquelles ces mêmes coefficients doivent satisfaire, c'est-à-dire, en d'autres termes, au calcul d'une fonction alternée, formée avec les coefficients des deux équations algébriques, et l'on est ainsi conduit immédiatement à la règle d'élimination énoncée par M. Sylvester, dans le numéro 101 du Philosophical Magazine (février 1840). La fonction alternée dont il s'agit est d'ailleurs, comme l'a remarqué M. Richelot, et comme on devait s'y attendre, celle qui se déduit directement de l'élimination des diverses puissances de x entre les équations algébriques données et ces mêmes équations respectivement multipliées par celles de ces puissances dont les degrés sont inférieurs aux nombres m ou n .

compreender o modo como as práticas geométricas da obra se articulam entre si e quais são seus desdobramentos. Para essa análise, selecionamos os seguintes artigos:

Tabela 2 – Artigos que lidaram com práticas geométricas

PROBLEMAS DE CONTATO NA OBRA DE SYLVESTER		
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS
On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates	Cambridge and Dublin Mathematical Journal 5 (1850)	262-282
An instantaneous demonstration of Pascals theorem by the method of indeterminate coordinates	Philosophical Magazine 37 (1850)	212
On a new class of theorems in elimination between quadratic functions	Philosophical Magazine 37 (1850)	213-218
Additions to the articles "On a new class of theorems", and "On Pascals theorem"	Philosophical Magazine 37 (1850)	363-370
On a Porismatic Property of two Conics having with One another a Contact of the Third Order	Philosophical Magazine 37 (1850)	438-439
On certain general properties of homogeneous functions	Cambridge and Dublin Mathematical Journal 6 (1851)	1-17
On the intersections of two conics	Cambridge and Dublin Mathematical Journal 6 (1851)	18-20
An enumeration of the contacts of lines and surfaces	Philosophical Magazine 1 (1851)	119-140
Note on the "enumeration of the contacts of lines of the second order	Philosophical Magazine 7 (1854)	331-334

Fonte – Elaborada pelo autor

A primeira vez que o problema de interpretar as correlações entre duas cônicas apareceu na obra de Sylvester foi no artigo "On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates" (SYLVESTER, 1850d). No texto encontramos reflexões sobre intersecções e pontos de contato de duas cônicas representadas por polinômios homogêneos de 2º grau em 3 variáveis. Os pontos estudados estão representados em coordenadas homogêneas, o que demonstra inspiração no trabalho de Plücker.

Todo lugar geométrico que é representado por uma equação homogênea de segundo grau entre as três grandezas variáveis u , v e w , que definem as coordenadas da linha, é chamado de lugar geométrico da segunda classe. Para a equação geral dos lugares desta classe, tomaremos o seguinte: $Aw^2 + 2Bvw + Cv^2 + 2Duw + 2Euv + Fu^2 = 0$.²³ (PLÜCKER, 1831, p. 47, Tradução Nossa)

Na citação, podemos notar o uso de um polinômio homogêneo para representar curvas no plano projetivo. Outro fator importante é o processo de transformar uma equação homogênea em não homogênea e vice-versa, o que pode ser observado no trecho a seguir:

Nesta equação, podemos considerar cada uma das três coordenadas como uma quantidade constante e defini-la como aproximadamente igual a um. Obtemos então da equação acima a equação completa do segundo grau entre as duas coordenadas restantes, que então, como os quocientes de duas das três coordenadas no caso anterior, obtêm certos valores para uma certa linha reta. As equações que obtemos desta maneira são tão gerais quanto a precedente, e tal equação de qualquer lugar entre duas grandezas variáveis, se almejarmos a simetria para desenvolvimentos posteriores, podemos imediatamente tornar homogêneos introduzindo a terceira grandeza variável.²⁴ (PLÜCKER, 1831, p. 47, Tradução Nossa)

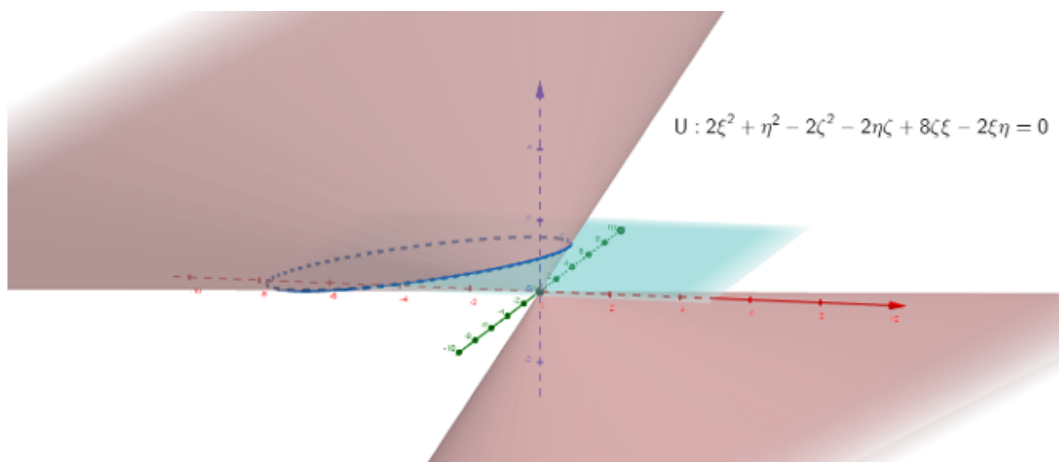
²³Jeder geometrische Ort, der durch eine homogene Gleichung des zweiter Grades zwischen den drei veränderlichen Grössen u , v und w , die linien coordinaten bedenten, dargestellt wird, nennen wir einen geometrischen Ort zweiter Classe. Für die allgemeine Gleichung der Oerter dieser Classe wollen wir folgende nehmen: $Aw^2 + 2Bvw + Cv^2 + 2Duw + 2Euv + Fu^2 = 0$

²⁴In dieser Gleichung können wir jede der drei Coordinaten als constante Grösse betrachten und etwa gleich Eins setzen. Alsdann erhalten wir aus der vorstehenden Gleichung die vollständige Gleichung des zweiten Grades zwischen den beiden Ubrigbleibenden Coordinaten, die alsdann, so wie die Quotienten je zweier der drei Coordinaten in dem frühem Falle, für eine bestimmte gerade Linie bestimmte Werthe erhalten. Die Gleichungen, welche wir auf diese Weise erhalten, sind eben so allgemein als die vorstehende, und eine solche Gleichung irgend eines Ortes zwischen zwei veränderlichen Grössen können wir, wenn wir für spätere Entwicklungen Symmetrie bezwecken, durch Einführung der dritten veränderlichen Grösse sogleich homogen machen.

A afirmação de que cada uma das variáveis pode ser considerada como constante remete à escolha de um plano onde a curva será representada. No texto de Plücker, considera-se $u = 1$, fazendo com que a equação deixe de ser homogênea. O autor ainda reforça a possibilidade de retornar, com a variável u , a transformar a equação da curva em homogênea.

O artigo de Sylvester trata das cônicas projetivas representadas nas variáveis ξ, η, ζ . A cônica considerada é o que hoje chamamos de “carta afim”, que é representada pelo plano $\zeta = 1$, como podemos verificar na figura abaixo:

Figura 9 – Cônica Projetiva: Considerando o plano projetivo, as soluções da equação U geram o cone destacado na figura. Tomando a carta afim $\zeta = 1$, temos a cônica no plano afim



Fonte – Elaborado pelo autor

Nessa figura, o polinômio U é a forma quadrática que gera o cone formado pelos pontos (ξ, η, ζ) que satisfazem a equação $U = 0$. É importante destacar que a abordagem das coordenadas homogêneas identifica todos os pontos caracterizados pela propriedade $(\xi : \eta : \zeta) = k(\xi : \eta : \zeta)$, $\forall k \in \mathbb{R}$, uma vez que os pontos no espaço projetivo são retas vetoriais. Sendo assim, sempre é possível tomar os pontos projetivos representados pela tripla $(\frac{\xi}{\zeta} : \frac{\eta}{\zeta} : 1)$ e identificá-los, através de uma bijeção natural, com pontos do \mathbb{R}^2 da forma $(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta})$.

Sylvester se propõe a analisar dois polinômios gerais da forma:

$$U = a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2a'\eta\zeta + 2b'\zeta\xi + 2c'\xi\eta = 0$$

$$V = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 + 2\alpha'\eta\zeta + 2\beta'\zeta\xi + 2\gamma'\xi\eta = 0$$

É fato que não se tinha conhecimento sobre o conceito de reta vetorial em 1850. No entanto, a análise apresentada nesse texto discute as condições dos pontos de contato ou de intersecção das cônicas e considera os pontos da forma $(\frac{\xi_i}{\zeta_i} : \frac{\eta_i}{\zeta_i} : 1)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$,

chamados pelo próprio autor de razões, o que identifica a abordagem ao que chamamos hoje de reta vetorial. Os pontos de intersecção podem ser determinados eliminando as variáveis de U e V no sistema abaixo: ²⁵

$$U = 0$$

$$V = 0$$

$$a\xi + b\eta + c\zeta = t$$

$$a'\xi + b'\eta + c'\zeta = u$$

que representa uma configuração das cônicas com duas retas, que são definidas pelos coeficientes envolvidos nos polinômios U e V . Uma vez identificadas, as retas poderão caracterizar a natureza dos pontos de intersecção.

É importante destacar que as coordenadas desses pontos podem ser reais ou imaginárias, e o artigo os discute em dois casos: as intersecções e os contatos. Iniciando pelos pontos de intersecção, há três possibilidades: as coordenadas podem ser todas reais, o que caracteriza quatro intersecções reais; podem ser duas triplas reais e duas imaginárias, caracterizando o caso de dois pontos de intersecção reais e dois imaginários; ou quatro triplas imaginárias, ou seja, as duas cônicas não se intersectam no plano. Os casos de pontos múltiplos são tratados como pontos de contato e aparecem mais à frente no artigo. Os tipos de intersecção estão representados na imagem a seguir:

Figura 10 – Tipos de Intersecção: As cônicas podem se cruzar em pontos reais ou imaginários. Nesta imagem temos a intersecção real, mista ou imaginária.

$$U : -3\xi^2 - \eta^2 - 2\zeta^2 + 4\eta\zeta + 10\zeta\xi - 2\xi\eta = 0$$

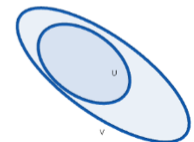
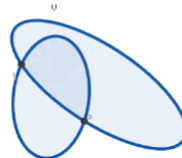
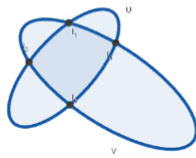
$$V : -\xi^2 - 2\eta^2 + 3\zeta^2 + 2\eta\zeta + 2\zeta\xi + 2\xi\eta = 0$$

$$U : -2\xi^2 - 3\eta^2 - 2\zeta^2 + 4\eta\zeta + 10\zeta\xi - 2\xi\eta = 0$$

$$V : -\xi^2 - 2\eta^2 + 3\zeta^2 + 2\eta\zeta + 2\zeta\xi + 2\xi\eta = 0$$

$$U : -2\xi^2 - 3\eta^2 - 2\zeta^2 + 4\eta\zeta + 6\zeta\xi - 2\xi\eta = 0$$

$$V : -\xi^2 - 2\eta^2 + 3\zeta^2 + 2\eta\zeta + 2\zeta\xi + 2\xi\eta = 0$$



Fonte – Elaborada pelo Autor

Os exemplos apresentados acima demandam uma tomada de decisão sobre as condições dos polinômios para determinar o tipo de intersecção. Para isso, Sylvester emprega a noção de quadrângulo, utilizada por Cayley no “Sur le Problème des Contacts”

²⁵Sylvester acrescenta as duas últimas equações para uma maneira direta de determinar as intersecções das cônicas.

(CAYLEY, 1850f). Esse objeto geométrico é constituído por quatro pontos, três pares de retas (que são determinadas pelas combinações dos pontos dois a dois) e três vértices, que são os pontos de encontro dos pares de retas. No caso de intersecções completamente reais, temos três pares de retas reais e três vértices reais; no caso de duas intersecções reais e duas imaginárias (intersecção mista como Sylvester chamava) temos um par de retas reais e um único vértice real; no caso completamente imaginário, temos apenas um par de retas real e três vértices reais; e, no caso misto, temos um par de retas reais e um único vértice real.

Com isso, é possível determinar em qual dos casos as intersecções das duas cônicas se encontram através de um estudo sistemático do feixe de cônicas com base em U e V , em outras palavras, um estudo sistemático das cônicas de forma $W = \lambda U + \mu V = 0$. É importante destacar que qualquer cônica pertencente a esse feixe passa pelos pontos de intersecção. A partir disso, Sylvester indica que é necessário determinar a razão de $\frac{\lambda}{\mu}$, que faça com que W se torne uma cônica degenerada, o que faria a representação para um par de retas do quadrângulo. Com isso podemos determinar a natureza dos pontos de intersecção das cônicas.

De acordo com Brechenmacher (2006), essa é a primeira vez que o cálculo de determinantes é utilizado para determinar pontos de intersecção e contatos de cônicas, pois o fato de o determinante da matriz associada à forma quadrática ser nulo é o que garante que a cônica $W = \lambda U + \mu V = 0$ se degenere. Para isso é necessário encontrar as raízes do polinômio característico de W , ou seja, os valores de $(\lambda : \mu)$ que fazem com que o determinante da matriz associada à forma quadrática W seja zero. Sendo assim,

dadas duas cônicas

$$U = a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2a'\eta\zeta + 2b'\zeta\xi + 2c'\xi\eta$$

$$V = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 + 2\alpha'\eta\zeta + 2\beta'\zeta\xi + 2\gamma'\xi\eta$$

Faz-se, $A = \lambda a + \mu\alpha$, $B = \lambda b + \mu\beta$, $C = \lambda c + \mu\gamma$, $A' = \lambda a' + \mu\alpha'$, $B' = \lambda b' + \mu\beta'$, $C' = \lambda c' + \mu\gamma'$.

Assim,

$$W = \lambda U + \mu V = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2A'\eta\zeta + 2B'\zeta\xi + 2C'\xi\eta$$

Por fim,

$$\square(\lambda U + \mu V) = \begin{vmatrix} A & C' & B' \\ C' & B & A' \\ B' & A' & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a + \mu\alpha & \lambda c' + \mu\gamma' & \lambda b' + \mu\beta' \\ \lambda c' + \mu\gamma' & \lambda b + \mu\beta & \lambda a' + \mu\alpha' \\ \lambda b' + \mu\beta' & \lambda a' + \mu\alpha' & \lambda c + \mu\gamma \end{vmatrix} = 0$$

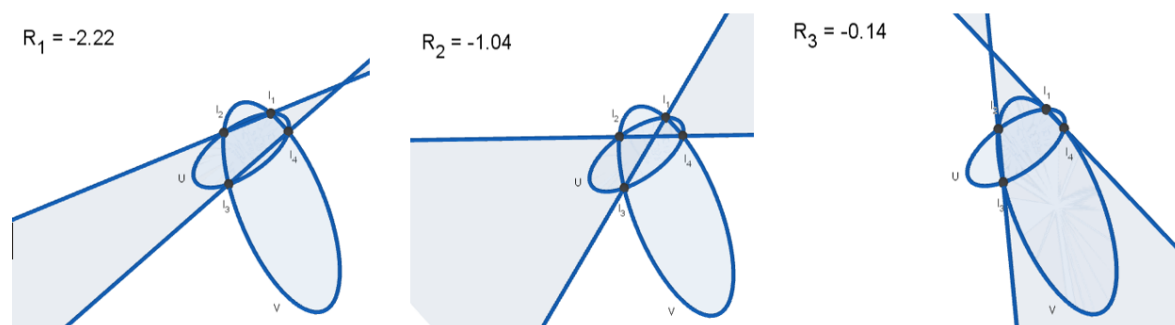
É importante lembrar que o determinante acima é o mesmo utilizado em Sylvester (1850b), para identificar o resultante da eliminação de dois polinômios homogêneos de graus 2 em 3 variáveis. Consideramos agora, o seguinte exemplo ilustrativo:

$$U = -3\xi^2 - 3\eta^2 + 2\zeta^2 + 4\eta\zeta + 6\zeta\xi - 4\xi\eta$$

$$V = -\xi^2 - 2\eta^2 + 3\zeta^2 + 2\eta\zeta + 2\zeta\xi + 2\xi\eta$$

Como o resultado do determinante da matriz associada ao feixe de cônicas, temos a equação $25x^3 + 85x^2 + 69x + 8 = 0$, onde $x = \frac{\lambda}{\mu}$ é a razão entre as coordenadas homogêneas $(\lambda : \mu)$ do feixe de cônicas. Cada uma das raízes dessa cúbica constitui uma das configurações abaixo:

Figura 11 – Cônicas Degeneradas: Para cada raiz (R_1, R_2 e R_3) do *discriminante* temos um par de retas do quadrângulo.



Fonte – Elaborada pelo Autor

Esse é o caso no qual o determinante da matriz associada à forma quadrática, resultante da combinação das formas originais, apresenta raízes distintas. Os outros casos de raízes múltiplas, são tratados em artigos posteriores da obra de Sylvester.

Além da utilização do termo quadrângulo, essa discussão revela outros pontos de conexão de Sylvester com o grupo de matemáticos que lidava com a relação entre problemas de contato das cônicas e o *discriminante* associado a um polinômio homogêneo. Ainda em 1850, em uma correspondência com Cayley, encontramos a seguinte declaração:

Eu mencionei que uma dúvida pendia sobre minha afirmação de que a menos que as raízes de $\square(U + \lambda V)$ [discriminante de $U + \lambda V$] fossem todas reais, os pontos de inflexão devem ser todos imaginários. ²⁶ [SYLVESTER para CAYLEY, dez/1850] (PARSHALL, 1998, p. 29, Tradução Nossa)

²⁶ mentioned that a doubt hung over my assertion that unless the roots of $\square(U + \lambda V)$ were all real, the points of inflexion must be all imaginary.

Além de marcar o início das contribuições de Sylvester, essa correspondência com Cayley produziu outros termos que se tornaram comuns na *Teoria dos Invariantes*. Por exemplo, a ideia de *discriminante* de uma forma quadrática apresentada por Sylvester foi publicada um pouco mais tarde no artigo “On a Remarkable Discovery in the Theory of Canonical Forms and of Hyperdeterminants” (SYLVESTER, 1851c), no qual encontramos a seguinte nota:

"Discriminante", porque fornece o critério ou teste para determinar se fatores iguais entram ou não em uma função de duas variáveis, ou mais geralmente da existência ou não de pontos múltiplos no locus representado ou caracterizado por qualquer função algébrica, as espécies de singularidades mais óbvias e observadas inicialmente em tal função ou locus. O progresso nessas pesquisas é impossível sem o auxílio de uma expressão clara; e a primeira condição de uma boa nomenclatura é que coisas diferentes sejam chamadas por nomes diferentes. As inovações na linguagem matemática aqui e em outros lugares (não sem grande sanção) introduzidas pelo autor, nunca foram adotadas, exceto sob a experiência real do constrangimento decorrente da falta delas, e não exigirão qualquer justificativa para aqueles que alcançaram aquele ponto onde a necessidade de algumas dessas adições é sentida. ²⁷ (SYLVESTER, 1851c, p. 406, Tradução Nossa)

Essa citação indica a relação observada por Sylvester entre o uso dos determinantes e a interpretação geométrica de sistemas de equações algébricas, fator que mostra como Sylvester percebia o novo campo em desenvolvimento e que evidencia seu trabalho para estabelecer um vocabulário que seria a base da *Teoria dos Invariantes*.

A natureza das intersecções é determinada pelas raízes do *discriminante* da forma quadrática gerada a partir da combinação linear das formas iniciais. Para cada raiz real temos um par de retas que podem ser reais ou imaginárias. Dessa forma, as seguintes equações passam a ser importantes:

$$Au^2 + \frac{AC - B'^2}{A}v^2 = 0$$

Ou,

$$Au^2 = \frac{B'^2 - AC}{A}v^2$$

²⁷Discriminant, "because it affords the discrimen or test for ascertaining whether or not equal factors enter into a function of two variables, or more generally of the existence or otherwise of multiple points in the locus represented or characterized by any algebraical function, the most obvious and first observed species of singularity in such function or locus. Progress in these researches is impossible without the aid of clear expression; and the first condition of a good nomenclature is that different things shall be called by different names. The innovations in mathematical language here and elsewhere (not without high sanction) introduced by the author, have been never adopted except under actual experience of the embarrassment arising from the want of them, and will require no vindication to those who have reached that point where the necessity of some such additions becomes felt.

Que é a redução do polinômio $\lambda U + \mu V$ na soma de quadrados positivos ou negativos, onde u e v são funções lineares das variáveis originais. A natureza real, ou não, das intersecções dependem do sinal da expressão $B'^2 - AC$. Caso essa expressão tenha valor negativo, teremos um par de retas imaginárias e as intersecções serão imaginárias; caso contrário, serão todas reais; no caso de valor nulo, teremos duas retas que se sobrepõem.

Como as intersecções podem ser identificadas utilizando as cônicas do feixe $\lambda U + \mu V = 0$ nas quais λ e μ são raízes da cúbica gerada a partir do *discriminante* do feixe, considera-se que as soluções são $(\lambda_1 : \mu_1)$; $(\lambda_2 : \mu_2)$; $(\lambda_3 : \mu_3)$. A partir disso, monta-se

$$\begin{aligned} A_1 &= a\lambda_1 + \alpha\mu_1 & A_2 &= a\lambda_2 + \alpha\mu_2 & A_3 &= a\lambda_3 + \alpha\mu_3 \\ C_1 &= c\lambda_1 + \gamma\mu_1 & C_2 &= c\lambda_2 + \gamma\mu_2 & C_3 &= c\lambda_3 + \gamma\mu_3 \\ B'_1 &= b'\lambda_1 + \beta'\mu_1 & B'_2 &= b'\lambda_2 + \beta'\mu_2 & B'_3 &= b'\lambda_3 + \beta'\mu_3 \\ A_1C_1 - B_1'^2 &= e_1 & A_2C_2 - B_2'^2 &= e_2 & A_3C_3 - B_3'^2 &= e_3 \end{aligned}$$

Como sabemos que as raízes do polinômio característico são, necessariamente reais (uma vez que o caso misto já foi destacado), sabemos que os valores de e_1 , e_2 e e_3 serão todos negativos ou apenas um deles será negativo, pois os pares de retas do quadrângulo precisam ser todos reais ou apenas um deles pode ser real. Se todos os valores forem negativos (pares de retas reais), as intersecções serão todas reais; se apenas um for negativo (apenas um par de retas real), elas serão imaginárias, de acordo com a separação de casos apresentada neste trabalho.

Nesse momento, Sylvester coloca o problema sobre outra ótica: quais são as condições do feixe dadas as intersecções? Para responder a essa pergunta, o matemático utiliza a combinação $U + \mu V = 0$.²⁸ Com isso, o estudo se inicia com as seguintes ponderações:

- As intersecções são todas reais: nesse caso o feixe não pode apresentar nenhuma cônica imaginária, ou seja, para qualquer valor real para μ a cônica $U + \mu V = 0$ é possível.
- As intersecções são todas imaginárias: nesse caso o feixe apresentará cônicas reais e não reais. Em outras palavras, dependendo do valor de μ , teremos uma cônica possível ou não.

É importante destacar que se $U + \mu V = 0$ é uma cônica imaginária, a função $W = U + \mu V$ nunca muda de sinal para todos os valores de ξ , η , ζ . Ou seja, existem

²⁸Em termos modernos trata-se de uma reta afim com a cônica V sendo utilizada como ponto no infinito. Ou ainda, uma equação paramétrica passando pelo ponto U e vetor direção V .

intervalos para os valores reais de μ , onde a função W apresenta máximos ou mínimos (não muda de sinal) e intervalos onde esses máximos ou mínimos não aparecem (W apresenta valores positivos e negativos). Nesse último caso, as cônicas terão duas ou todas as intersecções reais.

O modo como Sylvester trata essa análise é bastante interessante. Ele apresenta as condições necessárias para que a função $W = U - \mu V$ tenha máximos ou mínimos através do método dos multiplicadores de Lagrange.²⁹ A partir disso, conclui-se que a função do tipo $W = U + \mu V$ apresenta pontos de máximo ou de mínimo se a expressão não mudar de sinal em todo o seu domínio. Ressaltamos ainda que, neste momento, estamos lidando com uma função que associa a quádrupla (ξ, η, ζ, μ) a um número real e , fixado um μ , verifica-se se W tem mudanças de sinal ou não. Em outras palavras, queremos saber se W apresenta máximos ou mínimos.

Após essas ponderações, Sylvester analisa o feixe considerando V uma cônica real e as intersecções imaginárias. Nessa configuração, ele apresenta as equações das duas formas:³⁰

$$U = c(x^2 + y^2) - e(y^2 + z^2) = 0$$

$$V = -\gamma(x^2 + y^2) + \epsilon(y^2 + z^2) = 0$$

Onde x , y e z são funções lineares de ξ , η , ζ . Utilizando o teorema de Boole³¹, é possível afirmar que as raízes do polinômio característico do feixe de cônicas gerado por U e V , após a transformação para o novo sistema de eixos, são idênticas às raízes antes da transformação.

As raízes de $\square(U - \mu V) = 0$ são $\frac{e}{\gamma}$, $\frac{\epsilon}{\epsilon}$, $\frac{e-\epsilon}{\gamma-\epsilon}$ e sabemos que a última raiz precisa ser a maior ou menor das três, pois

²⁹Entendemos que a expressão $W = U - \mu V$ utiliza o sinal de menos apenas para facilitar os cálculos, uma vez que μ pode, a princípio, receber qualquer valor real. Além disso, esse é o único momento no qual a expressão aparece com essa modificação.

³⁰Esta é uma maneira conveniente de representar as equações das cônicas: de

$$U = c(x^2 + y^2) - e(y^2 + z^2) = 0$$

$$V = -\gamma(x^2 + y^2) + \epsilon(y^2 + z^2) = 0$$

temos $U = cx^2 + (c - e)y^2 - ez^2 = 0$ e $V = -\gamma x^2 + (\epsilon - \gamma)y^2 + \epsilon z^2 = 0$. Note que se trata da redução dos polinômios à soma de quadrados positivos ou negativos. Cabe destacar que Sylvester apresenta uma demonstração para a possibilidade dessa redução na *Philosophical Magazine* de 1852 sob o título “A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares”, texto que se tornou conhecido por ter enunciado a Lei de Inércia para formas quadráticas.

³¹Aqui, Sylvester se refere à invariância do *discriminante* de uma forma quadrática após uma transformação linear. Boole publicou esse resultado no *Cambridge Mathematical Journal* de 1841 sob o título “Exposition of General Theory of Linear Transformations” (BOOLE, 1841)

- Como V é uma cônica real, temos que γ e ϵ têm o mesmo sinal, caso contrário teríamos um polinômio com todos os quadrados positivos e V seria imaginária.
- $\frac{\epsilon}{\gamma} - \frac{c-e}{\gamma-\epsilon} = \frac{e\gamma - c\epsilon}{\gamma(\gamma-\epsilon)}$ e $\frac{\epsilon}{\epsilon} - \frac{c-e}{\gamma-\epsilon} = \frac{e\gamma - c\epsilon}{\epsilon(\gamma-\epsilon)}$.

Estas duas informações mostram que a última é um extremo. Com isso, temos três cônicas degeneradas no feixe, a saber:

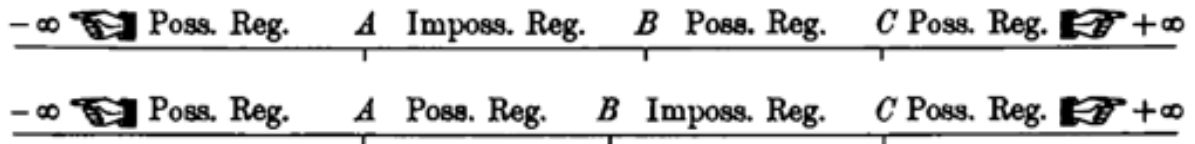
$$U - \frac{\epsilon}{\gamma}V = 0$$

$$U - \frac{\epsilon}{\epsilon}V = 0 \text{ e}$$

$$U - \frac{c-e}{\gamma-\epsilon}V = 0.$$

Em particular, a última é degenerada, ou ainda, gera um polinômio que é resultado de um produto de duas funções lineares. Qual delas é real e qual é não real? A resposta decorre da análise das possibilidades de μ . Para valores infinitos, a cônica se aproxima de V e, como esta é possível, o feixe também será. Restam os valores entre as raízes do *discriminante*. Sylvester apresenta o seguinte esquema:

Figura 12 – Regiões sobre a natureza das cônicas



Fonte – Sylvester (1850d, p. 167)

Onde A, B e C são os valores $\frac{c}{\gamma}, \frac{\epsilon}{\epsilon}, \frac{c-e}{\gamma-\epsilon}$, raízes de $\square(U - \mu V) = 0$. Precisamos testar valores que estejam nos intervalos (A, B) e (B, C) . Neste momento, Sylvester afirma que as raízes do polinômio $\frac{d}{d\mu} \square(U - \mu V)$ geram duas cônicas das quais, pelo menos uma é possível.

Até esse ponto do artigo, podemos observar o uso de técnicas no âmbito da Teoria da Eliminação, desenvolvidas pelo próprio Sylvester na década de 1840. Além disso, o *discriminante* se mostra o objeto chave dessa investigação. Esse fator caracteriza a percepção da relação que existe entre a *Teoria dos Invariantes* e os problemas de contato, uma vez que a forma algébrica representa um objeto geométrico (os pares de retas do quadrângulo) imutável após as transformações dos polinômios homogêneos.

Essas características da investigação se adequam ao contexto da pesquisa em matemática no Reino Unido e do continente, fato que se confirma através do reconhecimento

desse estudo por pesquisadores de outros centros de produção matemática, como é o caso de Michel Chasles em seu relatório sobre o progresso da geometria:

Encontram-se, por um lado, naquela parte da Álgebra que engloba funções transcendentais, nascidas, como sabemos, segundo a teoria das funções elípticas de Legendre, e formadas principalmente a partir da obra de Abel, de Jacobi, Gopel, Rosenhain, etc. ; por outro lado, em pesquisas mais recentes relacionadas a quantidades agora conhecidas sob os nomes de *invariantes*, *covariantes*, etc., que tanto devem ao trabalho de MM. Cayley, Sylvester, Aronhold, etc. Esses dois ramos consideráveis da Matemática, que se oferecem ao auxílio da Geometria, particularmente no estudo das linhas e superfícies curvas, podem contribuir não só para suas aquisições parciais, mas também para o desenvolvimento de seus próprios métodos. Ora, esses dois ramos da ciência, tão prósperos na Alemanha como na Inglaterra, e que há alguns anos têm encontrado discípulos tão ilustres na Itália, cujo número tende a aumentar, não são ensinados em nenhuma de nossas escolas. Portanto, é urgente apresentá-los, criando novas cadeiras, pelo menos uma primeira. atribuída à Análise Transcendente, segundo a expressão técnica de uma parte das matérias que nela entrariam ³² (CHASLES, 1870, p. 377, Tradução Nossa)

Essa citação nos mostra que a matemática produzida no Reino Unido por Cayley e Sylvester, ou seja, a *Teoria dos Invariantes* é reconhecida na França. O relatório de Chasles apresenta as práticas da teoria britânica como um auxílio no estudo das curvas e superfícies, afirmação que se reflete na obra de Sylvester no início da década de 1850 e que revela o pano de fundo geométrico de instigações a respeito de transformações de expressões algébricas.

Ainda no artigo de 1850, Sylvester segue com o estudo sobre cônicas que não se interceptam. Como verificar qual é externa a qual?

Para resolver este ponto, devemos primeiro estabelecer um critério para determinar se um determinado ponto é interno ou externo a uma dada cônica; o ponto sendo, em geral, dito ser externo quando duas tangentes

³²Elles se trouvent, d'une part, dans cette partie de l'Algèbre qui embrasse les fonctions transcendentes, née, comme on le sait, à la suite de la théorie des fonctions elliptiques de Legendre, et formée principalement des travaux d'Abel, de Jacobi, Gopel, Rosenhain, etc.; d'autre part, dans les recherches plus récentes relatives aux quantités connues maintenant sous les noms d'invariants, de covariants, etc., qui doivent tant aux travaux de MM. Cayley, Sylvester, Aronhold, etc. Ces deux branches considérables des Mathématiques, qui s'offrent au secours de la Géométrie, particulièrement dans l'étude des lignes et des surfaces courbes, peuvent contribuer non-seulement à ses acquisitions partielles, mais au développement aussi de ses propres méthodes. Or ces deux branches de la science, si prospères en Allemagne, comme en Angleterre, et qui trouvent depuis quelques années en Italie des disciples si distingués, dont le nombre tend à s'accroître, ne sont enseignées dans aucune de nos Écoles. Il y a donc urgence de les y introduire. par la création de nouvelles chaires, d'une première au moins, affectée à l'Analyse transcendente, suivant l'expression technique d'une partie des matières qui y entreraient.

reais podem ser tiradas dele para a curva, e interno quando isso não pode ser feito. ³³ (SYLVESTER, 1850d, p. 268, Tradução Nossa)

Aqui podemos notar mais uma interpretação geométrica de Sylvester. Para determinar se uma cônica é interna ou externa à outra, inicia-se por investigar quais as condições necessárias para um ponto de coordenadas (l,m,n) ser interno a uma cônica genérica $\phi(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'zx + 2c'xy = 0$. O critério é analisar o sinal do produto $\phi(l,m,n) \times \square\phi$, se for negativo, o ponto é externo; se for positivo, o ponto é interno.

Essa discussão sobre a posição relativa de pontos em relação a cônicas traz à luz investigações sobre propriedades de determinantes. Em nota, o matemático destaca o teorema de Cauchy sobre determinantes compostos (SYLVESTER, 1850d, p. 270). De acordo com Muir (1908), esse teorema foi enunciado pela primeira vez em 1812 e trata dos determinantes cujos elementos são os determinantes menores do geral. Apesar de não terem sido bem detalhados no artigo de 1850, Sylvester apresentou teoremas sobre propriedades dos determinantes envolvidos em transformações de polinômios homogêneos.

Mostrei na parte preliminar do meu artigo sobre Contatos no número de fevereiro desta Revista, por raciocínio a priori, que se uma função quadrática (U) for convertida linearmente em outra (V), qualquer determinante menor de qualquer ordem de V deve ser uma função syzygética de todos os determinantes menores de U da mesma ordem. ³⁴ (SYLVESTER, 1851g, p. 295, Tradução Nossa)

Podemos notar a presença de uma importante prática, compartilhada por vários personagens da comunidade de práticas descrita nesta tese, no desenvolvimento das teorias que orbitaram ao redor das investigações sobre polinômios homogêneos. Também merece destaque a associação entre duas temáticas (problemas de contato e transformações) que se revela na citação. Enquanto os teoremas sobre determinantes se desenvolveram no contexto das transformações lineares, Sylvester entende sua utilidade ao investigar as propriedades das cônicas.

Sylvester ainda discute pontos com multiplicidade nas interseções. Nesses casos, considera-se que a equação cúbica $\square(\lambda U + V) = 0$ apresenta raízes múltiplas, tendo duas

³³In order to settle this point we must first establish a criterion for determining whether a given point is internal or external to a given conic; the point being in general said to be external when two real tangents can be drawn from it to the curve, and internal when this cannot be done.

³⁴I showed in the preliminary part of my paper on Contacts in the February Number of this Magazine, by à priori reasoning, that if a quadratic function (U) be linearly converted into another (V), any minor determinant of any order of V must be a syzygetic function of all the minor determinants of U of the same order. Esta relação dos determinantes com as transformações será mais bem analisada na próxima seção

possibilidades: uma raiz de multiplicidade dois e uma raiz simples ou uma única raiz de multiplicidade três.

Como já comentamos anteriormente, as investigações sobre Teoria de Eliminação encontram um ponto de intersecção com os problemas de contato a partir das publicações dos anos 1850. A análise do artigo sobre as correlações entre as cônicas mostra que Sylvester percebia os problemas algébricos e geométricos através da mesma lente. Em outras palavras, ao identificar polinômios homogêneos como locus de curvas, os casos de intersecções reais delas são casos de coexistência das equações.

Essa noção se reflete no texto "On a New Class of Theorems in Elimination between Quadratic Functions"(SYLVESTER, 1850b). Diferentemente da abordagem sobre as técnicas de eliminação e sobre as propriedades de determinantes, esse trabalho apresenta um pano de fundo geométrico, como é possível verificar no trecho a seguir:

já foi feito o suficiente para apontar o caminho para uma nova e interessante classe de teoremas de uma só vez na eliminação e na geometria, que é tudo o que tenho atualmente de lazer ou de disposição para empreender.
³⁵ (SYLVESTER, 1850b, p. 218, Tradução Nossa)

Nele, Sylvester manifesta sua intenção de destacar a correlação entre álgebra e geometria. Essa relação entre os dois campos se mostra explícita, a partir do momento em que se apresenta uma demonstração geométrica para um teorema sobre a *resultante* de um sistema de equações. Como discutimos na última seção, esse artigo também faz uma interpretação algébrica do problema de eliminação, através do uso do determinante. Entretanto, a abordagem utilizada para investigar os contatos de duas cônicas se mostra eficaz para o mesmo problema. Nesse contexto, observamos que a equação $\lambda : \mu$

Notação de Sylvester	Notação Atual
$\square \quad \lambda U + \mu V + (lx + my + nz)t = 0$ $xyzt$	$\begin{vmatrix} \lambda a + \mu \alpha & \lambda a' + \mu \alpha' & \lambda c' + \mu \gamma' & l/2 \\ \lambda a' + \mu \alpha' & \lambda b + \mu \beta & \lambda b' + \mu \gamma' & m/2 \\ \lambda c' + \mu \gamma' & \lambda b' + \mu \gamma' & \lambda c + \mu \gamma & n/2 \\ l/2 & m/2 & n/2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$

onde U e V são polinômios homogêneos de grau 2, em três variáveis x, y, z . Destacamos que o problema de eliminar tais variáveis, pode ser interpretado como a busca pelos pontos de intersecção de três curvas algébricas.

³⁵enough has been done to point out the path to a new and interesting class of theorems at once in elimination and in geometry, which is all that I have at present leisure or the disposition to undertake.

Em outras palavras, o problema representa a natureza dos contatos de um feixe de duas cônicas projetivas acrescido de um conjunto de retas projetivas. As duas raízes, da equação (1) indicam quais são as cônicas do feixe $\lambda U + \mu V = 0$ que tocam a reta $r : lx + my + nz = 0$. Esse sistema só terá solução no caso em que os coeficientes l, m, n são tais que a reta passa por uma das intersecções das cônicas. É importante observar que, nessa configuração, apenas uma cônica do feixe satisfaz todas as condições. A solução do sistema:

$$U = 0$$

$$V = 0$$

$$lx + my + nz = 0$$

é um dos pontos $(x_i : y_i : z_i)$, com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, intersecção das cônicas U e V , que satisfaz a equação $lx_i + my_i + nz_i = 0$. Sylvester apresenta um exemplo para ilustrar a teoria, considerando as funções quadráticas

$$P = xy + yz + zx$$

$$Q = cxy + ayz + bzx$$

a resultante do sistema $P = 0$ e $Q = 0$ determinante de $\lambda P + \mu Q + (lx + my + nz)t$ será:

$$-4lmn(a - b)(a - c)l + (b - a)(b - c)m + (c - a)(c - b)n$$

Por outro lado, se tomarmos o sistema $P = 0$, $Q = 0$ e $lx + my + nz = 0$, a solução se encontrará nos pontos de intersecção de P e Q . Estes são $(1:0:0);(1:0:0);(0:0:1);((a - b)(a - c):(b - a)(b - c):(c - a)(c - b))$. Com isso o resultante do sistema será o produto da reta adicionada aplicada em cada um desses pontos, o que resulta em:

$$lmn(a - b)(a - c)l + (b - a)(b - c)m + (c - a)(c - b)n$$

Esse teorema e sua interpretação geométrica passam por uma expansão. Com os mesmos argumentos, é possível pensar em uma equação quadrática em quatro variáveis x, y, z, t que é, em caso de solução da equação equivalente a (1), temos que o conoide $\lambda U + \mu V = 0$ toca o plano $lx + my + nz + pt = 0$. A equação cúbica (equivalente àquela quadrática que surge no caso das cônicas) gerada pelo determinante, indica que podem existir, no máximo, conoides que passam pelas intersecções de U e V e tocam o plano. Caso a cúbica apresente duas raízes idênticas, teremos dois conoides coincidentes. Nesse caso o plano dado será tangente no ponto em discussão. No caso de uma raiz tripla, teremos um plano osculador.

Sylvester coloca o teorema em sua forma mais geral: Se U e V são quadráticos

homogêneos e L_1, L_2, \dots, L_n funções lineares homogêneas de $(n + 2)$ letras x_1, x_2, \dots, x_{n+2} , o determinante de todo o sistema de $n + 2$ funções é igual a

Figura 13 – Generalização do problema de eliminação através da interpretação dos contatos das cônicas

$$\boxed{\lambda, \mu} \quad \boxed{x_1, x_2 \dots x_{n+2} \quad t_1, t_2 \dots t_n} \quad \{\lambda U + \mu V + L_1 t_1 + L_2 t_2 + \dots + L_n t_n\};$$

Fonte – Sylvester (1850a, p. 364)

o que indica um *discriminante* tomado em duas etapas. Primeiro se calcula o determinante em relação às variáveis dos polinômios, como abaixo:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 & \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1} & \dots & \lambda a_{2n-1} + \mu b_{2n-1} & l_{11}/2 & l_{12}/2 & \dots & l_{1n}/2 \\ \lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1} & \ddots & \ddots & \lambda a_{3n-3} + \mu b_{3n-3} & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{2n-1} + \mu b_{2n-1} & \lambda a_{3n-3} + \mu b_{3n-3} & \dots & \lambda a_n + \mu b_n & l_{n1}/2 & l_{n2}/2 & \dots & l_{nn}/2 \\ l_{11}/2 & \dots & \dots & l_{n1}/2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ l_{1n}/2 & l_{2n} & \dots & l_{nn}/2 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

onde os elementos a_i e b_i são, respectivamente, coeficientes das formas quadráticas U e V . Na sequência, o autor calcula o determinante em relação às variáveis λ e μ .

Essa notação representa a extensão do problema para além de curvas ou superfícies. Em outras palavras, o autor indica que é possível determinar condições de contato de superfícies de n dimensões. Essa extensão exige interpretações dos determinantes através dos menores complementares. Sobre a ideia dos menores complementares, encontramos a seguinte descrição:

Imagine qualquer determinante estabelecido sob a forma de uma matriz quadrada de termos. Este quadrado pode ser considerado como divisível em linhas e colunas. Agora conceba qualquer linha e qualquer coluna a ser riscada, obtemos assim um quadrado, um termo a menos em largura e profundidade do que o quadrado original; e variando de todas as maneiras possíveis a seleção da linha e da coluna excluídas, obtemos, supondo que o quadrado original consista em n linhas e n colunas, tais quadrados menores, cada um dos quais representará o que eu chamo de primeiro

determinante menor relativo ao determinante principal ou completo.³⁶
(SYLVESTER, 1850a, p. 365, Tradução Nossa)

O conceito de *minor* é importante, uma vez que, a partir desse momento, tal objeto se torna parte integrante das análises dos problemas de contato das cônicas, retomando as discussões do artigo Sylvester (1850d). A relação entre os *minors* e os "determinantes completos" (como ele os chamava) demandava descrição de propriedades, o que ocorreu em artigos como "On the Relation between the Minor Determinants of Linearly Equivalent Quadratic Functions" (SYLVESTER, 1851g), o qual se concentra em uma notação específica para os determinantes, além de suas propriedades após as transformações lineares aplicadas aos polinômios associados.

Esse aspecto revela um novo ponto de intersecção das investigações de Sylvester com problemas de contatos. A *Teoria dos Invariantes* algébricos tem como pilar principal o estudo das transformações e suas consequências. É natural que as pesquisas com pano de fundo geométrico tenham se desenvolvido paralelamente às pesquisas que tinham sido iniciadas por Boole e Cayley na década anterior.

Essa aproximação com outros trabalhos pode ser percebida através de artigos como "On the Solution of a System of Equations in which Three Homogeneous Quadratic Functions of Three Unknown Quantities are Respectively Equated to Numerical multiples of a Fourth Non-Homogeneous Function of the Same" (SYLVESTER, 1850f), que apresenta a solução de um sistema de três equações homogêneas de grau dois e três variáveis. A ideia aqui é que, dada uma função ω não homogênea de grau n (nas mesmas três variáveis), o sistema abaixo pode ser resolvido através de uma equação cúbica e uma equação de grau n .

$$U = A\omega$$

$$V = B\omega$$

$$W = C\omega$$

Onde U , V e W são funções quadráticas homogêneas em três variáveis (x , y e z). Sylvester apresenta duas equações: $\square(fU + gV + hW) = 0$, o determinante da matriz associada ao feixe formado pela combinação dos três polinômios e $Af + Bg + Ch = 0$, a função linear adicionada.

³⁶Imagine any determinant set out under the form of a square array of terms. This square may be considered as divisible into lines and columns. Now conceive any one line and any one column to be struck out, we get in this way a square, one term less in breadth and depth than the original square; and by varying in every possible manner the selection of the line and column excluded, we obtain, supposing the original square to consist of n lines and n columns, an such minor squares, each of which will represent what I term a First Minor Determinant relative to the principal or complete determinant.

O determinante de $fU + gV + hW$ igualado a zero implica que esse polinômio representa um par de retas no plano projetivo. Portanto, para cada uma das três soluções da equação temos:

$$(l_1x + m_1y + n_1z)(\lambda_1x + \mu_1y + \nu_1z) = 0,$$

$$(l_2x + m_2y + n_2z)(\lambda_2x + \mu_2y + \nu_2z) = 0,$$

$$(l_3x + m_3y + n_3z)(\lambda_3x + \mu_3y + \nu_3z) = 0,$$

Reescrevendo essas equações como $PP'=0$; $QQ'=0$ e $RR'=0$, temos que $(P=0, P'=0)$; $(Q=0, Q'=0)$; $(R=0, R'=0)$. Em outras palavras, cada uma das equações acima representará os lados opostos do quadrângulo expresso por coordenadas gerais x, y, z .

Essa última afirmação evidencia o caráter geométrico da publicação. Quando Sylvester se refere ao quadrângulo para indicar os pares de retas geradas pelas raízes do determinante, faz uma forte referência ao seu primeiro artigo das cônicas, no qual utilizou feixes tendo como base $U = 0$ e $V = 0$.

O sistema proposto inicialmente representa a busca dos pontos de encontro das três cônicas com as curvas representadas por ω . Essa percepção é reforçada quando Sylvester apresenta um problema proposto por Cayley como aplicação deste teorema:

As equações conectadas com a solução do célebre problema de Malfatti, "Em um determinado triângulo, inscrevem-se três círculos de tal forma que cada círculo toca os dois círculos restantes e também os dois lados do triângulo", dado pelo Sr. Cayley no número de novembro de 1849 do Cambridge and Dublin Mathematical Journal, a saber

$$by^2 + cz^2 + 2fyz = \theta^2 a(bc - f^2)$$

$$cz^2 + ax^2 + 2gzx = \theta^2 b(ca - g^2)$$

$$ax^2 + by^2 + 2hxy = \theta^2 c(ab - h^2)$$

³⁷ (SYLVESTER, 1850f, p. 371, Tradução Nossa)

Nessa citação entende-se que U , V e W são os polinômios no lado esquerdo das igualdades, os quais representam as três circunferências, $\omega = \theta^2$. O problema pode ser resolvido por uma equação cúbica (o *discriminante* do feixe) e uma equação quadrática.

³⁷The equations connected with the solution of Malfatti's celebrated problem, "In a given triangle to inscribe three circles such that each circle touches the remaining two circles and also two sides of the triangle," given by Mr Cayley in the November Number for 1849 of the Cambridge and Dublin Mathematical Journal, to wit,

$$by^2 + cz^2 + 2fyz = \theta^2 a(bc - f^2)$$

$$cz^2 + ax^2 + 2gzx = \theta^2 b(ca - g^2)$$

$$ax^2 + by^2 + 2hxy = \theta^2 c(ab - h^2)$$

Retornando ao teorema geral, se considerarmos a equação $fU+gV+hW=0$, é possível representar W como combinação das outras duas cônicas. Em particular se estivermos lidando os valores de f , g e h que representam os pares de retas do quadrângulo, podemos afirmar que R e R' serão funções lineares de P e Q , P' e Q' , P e Q' , P' e Q . Assim, o problema se reduz a quatro sistemas lineares.

Outro trabalho que mostra integração com temáticas discutidas por outros matemáticos na época é o "On a Porismatic Property of Two Conics having with One Another a Contact of the Third Order"(SYLVESTER, 1850c), que trata de duas cônicas que se tocam em um único ponto, chamado de "contato de terceira ordem".

Os artigos apresentados até aqui evidenciam práticas compartilhadas por outros matemáticos no final do ano de 1850. Além da solução de sistemas de equações homogêneas, o ponto de vista geométrico de Sylvester revelou seus interesses por trabalhos como os de Plücker, uma vez que suas funções características (polinômios homogêneos representando cônicas) foram amplamente utilizadas nas publicações de 1850. Sobre esse aspecto, destacamos as semelhanças entre os artigos de Sylvester e o livro de Salmon publicado no mesmo ano.

No capítulo XIII do *Treatise on Conic Sections* (SALMON, 1850c), que aborda métodos de notação abreviada, Salmon apresenta sua noção de feixe de cônicas. A afirmação é direta: "Se $S=0$ e $S'=0$ são equações que representam duas cônicas, então $S - kS' = 0$ representa outra cônica que passa através das intersecções, reais ou imaginárias de S e S' ". Além disso, o autor afirma que os pontos de intersecção sempre serão 4, podendo ser consecutivos (multiplicidade). Salmon também se refere aos pares de retas do quadrângulo formado pelas intersecções das cônicas de base do feixe.

As produções sobre os problemas de contato continuaram em 1851. Sylvester retoma as investigações sobre as correlações entre cônicas no artigo "On Intersections of Two Conics", (SYLVESTER, 1851f), trabalho que apresenta uma nova condição para diferenciar as intersecções através de uma equação cúbica construída a partir das raízes do determinante que gera as cônicas degeneradas do feixe.

No artigo de 1850, foi mencionado que para cada raiz λ da equação $\square(U + \lambda V) = 0$, a função homogênea $U + \lambda V = 0$ representa um par de retas, que podem ser reescritas na forma: $Au^2 + \frac{AC - B'^2}{A}v^2 = 0$, onde A , C e B' são funções dos coeficientes da forma quadrática e de λ ; u e v , são funções lineares de x, y e z .

Nesse novo artigo, Sylvester ressalta que os pares de retas podem ser representadas de outras duas formas ³⁸ $Bu^2 + \frac{BC - A'^2}{B}v^2 = 0$ e $Cu^2 + \frac{AB - C'^2}{C}v^2 = 0$. O fato de as quatro

³⁸Em 1850, o próprio Sylvester alegou falta de simetria no critério apresentado, devido ao fato de as

intersecções serem todas reais ou todas imaginárias depende dos sinais das expressões

$$AC - B'^2, BC - A'^2, AB - C'^2$$

As quais são funções quadráticas de λ e podem ser todas negativas ou apenas uma delas negativa, como foi tratado no artigo de 1850. Com isso, é possível construir uma equação cúbica $\omega = Ly^3 + My^2 + Ny + P = 0$, cujas raízes são os valores de

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 - AB - AC - BC$$

para cada λ . É importante ressaltar que Sylvester está considerando o caso em que todas as três raízes de $\square(U + \lambda V) = 0$ são reais, uma vez que o caso de existirem duas raízes imaginárias levaria a uma intersecção mista das cônicas. Se todas as raízes de ω são positivas, teremos uma intersecção real, pois teremos três pares de retas reais no feixe de cônicas. Mais uma vez o caso de duplo contato está ligado a raízes com multiplicidade maior do que 1.

Utilizando uma observação de Cayley, Sylvester também manifesta um critério de distinção para casos em que as cônicas apresentam tangentes em comum ou não. Se referindo ao polinômio característico do feixe de cônicas por θ , à função cúbica gerada no início do artigo por ω e usando os termos congruente ou incongruente para as raízes terem o mesmo sinal ou não, Sylvester apresenta a seguinte argumentação:

Então ω congruente, θ congruente, implica que as intersecções e tangentes comuns são reais; ω congruente, θ incongruente, implica que as intersecções são reais, mas as tangentes comuns imaginárias; ω incongruente, θ congruente, implica que as intersecções e tangentes comuns são imaginárias; ω incongruente, θ incongruente, implica que as intersecções são imaginárias, mas as tangentes comuns reais. ³⁹ (SYLVESTER, 1851f, p. 20, Tradução Nossa)

Esse trecho retrata a relação próxima entre os contatos de curvas e as raízes de polinômios, uma vez que os zeros dos discriminantes de formas quadráticas determinam a natureza dos contatos. Aparentemente, Sylvester encerrou essa discussão no artigo "An Enumeration of the Contacts of Lines and Surfaces of the Second Order" (SYLVESTER, 1851a), trabalho que se inicia com a afirmação de que dois polinômios homogêneos, nas mesmas variáveis, podem ser simultaneamente transformados em formas quadráticas puras,

intersecções (todas reais ou todas imaginárias) não implicarem necessariamente no sinal da expressão $AC - B'^2$. A adição das duas representações garante a simetria.

³⁹Then ω congruent, θ congruent, implies that the intersections and common tangents are both real; ω congruent, θ incongruent, implies that the intersections are real, but the common tangents imaginary; ω incongruent, θ congruent, implies that the intersections and common tangents are both imaginary; ω incongruent, θ incongruent, implies that the intersections are imaginary, but the common tangents real.

ou seja, em soma de quadrados positivos ou negativos. Além disso, Sylvester utiliza as funções características de Plücker indicando que o número de variáveis, do polinômio indicam um locus (lugar geométrico) de uma unidade a menos.

O artigo em si trata do contato de lugares geométricos de, no máximo, três dimensões. Para compreender como os contatos ocorrem é necessário, além do determinante completo, estudar os determinantes menores da forma quadrática.

Como apresentado no artigo de 1850, o contato de duas formas quadráticas U e V é explicado pela forma $U + \lambda V$ e pelas propriedades de seu determinante. É importante destacar que os valores de λ que são raízes da equação $\Delta(U + \lambda V)$, permanecem inalterados frente a qualquer transformação que seja imposta à forma quadrática.⁴⁰ Além disso, caso os menores de qualquer ordem de $U + \lambda V$ tenham um fator em comum, estes permanecem inalterados após uma transformação.

Em seguida, passa-se à interpretação das relações de formas quadráticas conjugadas. Nesse ponto apresenta-se uma série de exemplos, cada um com destaques específicos.

1. O primeiro caso trata de intersecção de conjuntos de pontos projetados numa reta $U = x^2 + y^2$ e $V = ax^2 + by^2$, que terão um ponto em comum caso o determinante da matriz associada à forma quadrática $V + \lambda U = 0$ seja nula.
2. Um segundo exemplo é o caso dos pontos de contato de superfícies no espaço. Sobre esses casos são destacados, mais uma vez, os menores complementares das matrizes associadas às formas quadráticas.
3. O último exemplo é o das cônicas com intersecções imaginárias $U = x^2 + y^2 + z^2$ e $V = ax^2 + by^2 + cz^2$. Mais uma vez, observamos que Sylvester utiliza a ideia de uma forma quadrática reduzida à soma de quadrados positivos ou negativos.

Esse caso apresenta alguns desdobramentos. No caso da intersecção totalmente imaginária, os valores de λ que fazem o feixe de cônicas se tornarem pares de retas são $-a$, $-b$ e $-c$. Os quatro pontos de intersecção das cônicas ficam definidos pelas proporções $(\sqrt{b-c} : \sqrt{c-a} : \sqrt{a-b})$.

No caso da equação $\Delta(U + \lambda V) = 0$ apresentar duas raízes iguais é chamado de "contato simples", temos as cônicas se tocando em um ponto de tangência, pois dois dos

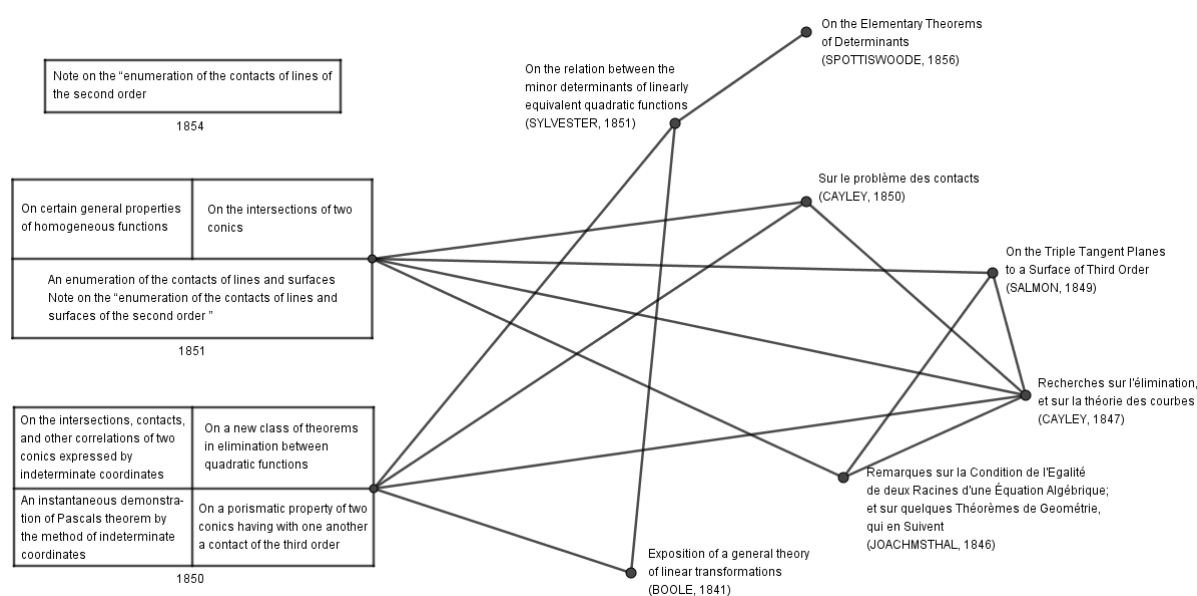
⁴⁰Essa afirmação faz referência ao texto Boole (1841), em que se afirma que o determinante de uma forma quadrática (*discriminante* na linguagem de Sylvester) não se altera, exceto por uma constante, após uma transformação linear. A relação entre os trabalhos de Sylvester apresentados neste capítulo e a *Teoria dos Invariantes* ficará mais clara no próximo capítulo.

pares de retas se tornam coincidentes. Caso as três raízes sejam iguais, chamado de "contato proximal", temos as cônicas se tocando em um único ponto de tangência, pois os três pares de retas são coincidentes.

Temos três tipos de intersecção descritas. Uma análise dos menores determinantes apresenta novos casos. Se os três primeiros determinantes de $\square(U + \lambda V)$ são nulos, temos a situação de "contato duplo". ⁴¹

Esses exemplos são tratados através da utilização dos estudos das raízes de polinômios homogêneos e da combinação das propriedades dos determinantes e menores complementares. Outro fator recorrente nos trabalhos de 1850 e 1851 é fato de que esses polinômios podem ser decompostos na soma de quadrados positivos ou negativos, através transformação das variáveis. Esse fato foi reforçado a partir da publicação do artigo de Sylvester em 1852, como veremos na próxima seção. Antes, é importante destacar as conexões dessas investigações sobre problemas de contato.

Figura 14 – Conexões entre os problemas de contato



Fonte – Elaborada pelo Autor

Nessa rede apresentamos os trabalhos que foram referências para os estudos sobre os problemas de contatos. É importante perceber que estes problemas revelam outra temática, que será analisada nesta tese: os Locus de Curvas Algébricas. Esse fator se

⁴¹Aqui, Sylvester faz referência à sua lei Homoloidal, descrita em 1850 no artigo “Additions to the Articles, "On a New Class of Theorems," and "On Pascal's Theorem" (SYLVESTER, 1850a), onde ele mostra que se os três primeiros menores complementares do determinante forem nulos, todos os outros menores também serão. Dessa forma, o estudo sobre a equação $\square(U + \lambda V) = 0$ pode ser feito através dos três primeiros menores complementares e, caso estes tenham um fator em comum, as intersecções das cônicas em questão estarão contidas em um par de retas coincidentes.

ratifica a partir da presença de outros trabalhos que se concentraram em investigações sobre a relação entre curvas e polinômios homogêneos, como discutiremos nos próximos capítulos. Um ponto em comum desses trabalhos é a utilização de polinômios homogêneos, o que nos mostra uma influência da obra de Plücker e o uso das coordenadas homogêneas.

Sobre essa prática, é possível notar a relação com os trabalhos de Cayley e Joachimsthal. O primeiro, apresenta equações que representam sistemas de retas em pontos de intersecção de duas curvas de segunda ordem e, conseqüentemente, equações de retas tangentes no caso de contato duplo. O segundo, apresenta a fórmula utilizada por Sylvester, também no cálculo de tangentes.

Como primeira aplicação do teorema (3), devo proceder para mostrar como a equação de Joachimsthal para a superfície traçada a partir de um dado ponto $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ pela intersecção de duas superfícies $\phi(x, y, z, t) = \theta(x, y, z, t) = 0$, pode ser expresso sob a forma explícita da equação para um cone.⁴² (SYLVESTER, 1851d, p. 6, Tradução Nossa)

O teorema 3, apresentado na citação, se refere à expansão de um polinômio homogêneo em soma de funções auxiliares construídas pelas derivadas parciais. Esse fator serve de componente para a determinação da equação da tangente. Essa conexão entre os três matemáticos inspira outras produções de Cayley no final da década de 1850. Além disso, o texto sobre tangentes de George Salmon também utiliza as fórmulas de Joachimsthal como uma maneira de calcular pontos de contato de retas com curvas de segunda ordem.

Em mais uma evidência da ligação entre a *Teoria dos Invariantes* e propriedades geométricas, encontramos investigações sobre propriedades dos determinantes nos textos de Sylvester, como já discutimos, e de Spottiswoode. Esse último apresenta um levantamento das práticas comuns utilizadas para lidar com os determinantes. De acordo com o autor, apesar do tema ser bem conhecido por matemáticos da época, não existia um trabalho elementar sobre ele (SPOTTISWOODE, 1856).

Esse histórico passa pelas contribuições de Cramer na resolução de sistemas de equações lineares de duas ou três variáveis, pelo teorema sobre resultantes do processo de eliminação de variáveis desenvolvido por Bézout, pelos determinantes de Vandermonde e pelo uso dos determinantes nos problemas de rotação destacados por Lagrange em 1773. No século XIX, Spottiswoode chama atenção para as técnicas que surgem no desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes* como os *Hyperdeterminantes* de Cayley e os teoremas apresentados por Sylvester em 1851 e 1852.

⁴²As a first application of theorem (3), I shall proceed to show how Joachimsthal's equation to the surface drawn from a given point $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ through the intersection of two surfaces $\phi(x, y, z, t) = \theta(x, y, z, t) = 0$, may be expressed under the explicit form of the equation to a cone.

Por fim, ressaltamos que o trabalho de Spottiswoode apresenta um fio condutor entre as duas temáticas que discutimos neste capítulo. Esse mesmo fio nos leva a trabalhos que lidam com as transformações como veremos na próxima seção.

3.4 Transformações Lineares

A temática das transformações lineares se revelou o ponto central da obra de Sylvester, sobretudo no que diz respeito ao desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. Ao analisar os artigos que tratam diretamente desse assunto, percebemos que existiu uma preocupação em tornar a nova Teoria um patrimônio britânico. Entendemos que esse recorte da obra revela práticas que permitem compreender o contexto no qual o matemático inglês produziu resultados que lhe proporcionaram notoriedade.

Para esta seção, selecionamos os seguintes artigos:

Tabela 3 – Artigos que tratam de transformações

TEORIA DOS INVARIANTES NA OBRA DE SYLVESTER		
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS
Sketch of a memoir on elimination, transformation and canonical forms	Cambridge and Dublin Mathematical Journal 6 (1851)	186-200
On the general theory of associated algebraical forms	Cambridge and Dublin Mathematical Journal 6 (1851)	289-293
An essay on canonical forms, supplement to a sketch of a memoir on elimination, transformation and canonical forms	Collected Mathematical Papers v.1 (1851)	203-216
On a certain fundamental theorem of determinants	Philosophical Magazine 2 (1851)	142-145
On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants	Philosophical Magazine 2 (1851)	391-410
On the principles of the calculus of forms	Cambridge and Dublin Mathematical Journal 7 (1852)	052-097

On the principles of the calculus of forms	Cambridge and Dublin Mathematical Journal 7 (1852)	179-217
Note on the calculus of forms	Cambridge and Dublin Mathematical Journal 8 (1853)	062-064
On the calculus of forms, otherwise the theory of invariants	Cambridge and Dublin Mathematical Journal 8 (1853)	256-269
On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure	Philosophical Transactions of the Royal Society of London 143 (1853)	407-548
A proof that all the invariants to a cubic ternary form are rational functions of Aronhold's invariants and of a cognate theorem for biquadratic binary forms	Philosophical Magazine 5 (1853)	407-548
On the Calculus of Forms, otherwise the Theory of Invariants	Cambridge and Dublin Mathematical Journal 9 (1855)	085-103

Fonte – Elaborada pelo autor

Essa tabela contém dois trabalhos que foram centrais na carreira de Sylvester: "On the principles of the calculus of forms" (SYLVESTER, 1852b); (SYLVESTER, 1852c) e "On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure" (SYLVESTER, 1853f). Esses artigos se destacaram por conta da sua repercussão no continente. No caso do primeiro, sua leitura na Société Philomatique de Paris, da qual o matemático inglês se tornou membro em 1852, foi determinante para sua nomeação como membro correspondente da Academia de Ciências de Paris em 1863 (PARSHALL; SENETA, 1997, p. 217). O segundo texto apresenta o estabelecimento de um vocabulário que se tornou um norteador das práticas da *Teoria dos Invariantes*. A análise desses trabalhos, junto com os demais apresentados na tabela, revela um processo de construção de conhecimentos que influenciou outros matemáticos envolvidos na Teoria,

uma vez que os britânicos ganharam reconhecimento por conta de suas práticas na área, o que pode ser visto em textos como NAM (1859).

O primeiro trabalho sobre transformações de Sylvester tem intersecção com as investigações sobre práticas de eliminação. Ao investigar as mudanças de variáveis independentes, o autor destaca a conexão entre seu trabalho e o desenvolvido por Boole em 1841 (SYLVESTER, 1851h, p. 187). Como visto na seção sobre Teoria de Eliminação, esse artigo faz uma conexão entre as temáticas apresentadas neste capítulo. Essa associação com Boole (1841) mostra como a obra de Sylvester na década de 1840 tem proximidade com as investigações iniciais em Cayley (1845f), uma vez que as práticas relatadas no artigo identificam *invariantes* a partir das resultantes de eliminação.

Sobre as práticas desenvolvidas no artigo, podemos notar uma preocupação específica com as transformações lineares como objeto de estudo. A apresentação de dois operadores que relacionam as resultantes com as formas associadas *invariantes*, revela a inclinação do autor para o estabelecimento de um novo campo de estudos para a matemática britânica.

Esses operadores, apresentados na seção sobre eliminação, revelam formas de gerar *concomitantes*, expressão utilizada em Sylvester (1851e) para se referir tanto aos *covariantes* quanto aos *contravariantes*. O operador *aposicional* é entendido como forma de gerar *contravariantes*, lida com as propriedades da expressão $y_0x_0 + y_1x_1 + \dots + y_nx_n$, a qual surge da forma reescrita $\frac{1}{2} \frac{df}{dx_0}x_0 + \frac{1}{2} \frac{df}{dx_1}x_1 + \dots + \frac{1}{2} \frac{df}{dx_n}x_n$ e se confunde com as *formes adjointes* descritas em Hermite (1850), que propõe uma mudança de variáveis para um polinômio $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de grau 2, da seguinte maneira: $y_0 = \frac{1}{2} \frac{df}{dx_0}$; $y_1 = \frac{1}{2} \frac{df}{dx_1}$; \dots ; $y_n = \frac{1}{2} \frac{df}{dx_n}$.

Por outro lado, o operador derivacional, entendido como uma forma de gerar *covariantes*, se confunde com os *Hyperdeterminantes* de Cayley, uma vez que também se trata de uma aplicação de mudança de variáveis. Em Sylvester (1853c, p. 545), esse operador recebe o nome de *emanante* e é descrito como o resultado da aplicação $\left(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy} + \dots + z' \frac{d}{dz}\right)$ um número n de vezes ao polinômio homogêneo. Destacamos que n é valor do grau polinômio e, a partir da inserção das novas variáveis, vemos a caracterização da transformação que indica o futuro *covariante*. Essa aplicação se tornou comum em livros-textos que se dedicaram a descrever técnicas desenvolvidas para a *Teoria dos Invariantes*, como é caso de Bruno (1876) e Salmon (1885).

No mesmo jornal, encontramos o primeiro artigo onde surge o termo *invariante*. Em “On General Theory of Associated Algebraical Forms” (SYLVESTER, 1851e), o autor retoma de forma mais ampla a discussão desenvolvida em seu artigo anterior, a começar pela natureza mais didática em relação ao primeiro artigo desta lista, o que pode ser percebido no seguinte trecho:

Em primeiro lugar, que um equivalente linear de qualquer função homogênea dada seja entendido como o que a função se torna quando funções lineares das variáveis são substituídas no lugar das próprias variáveis, sujeitas à condição do módulo de transformação (isto é, o valor do determinante formado pelos coeficientes de transformação) sendo a unidade.⁴³ (SYLVESTER, 1851e, p. 289, Tradução Nossa)

Esse cuidado está diretamente ligado à ideia de estabelecer um vocabulário para a nova Teoria, como destacamos no capítulo anterior. Mais uma vez, o que está em discussão no trabalho são as transformações e seus diferentes desdobramentos. Sylvester se propõe, inicialmente, a classificar as transformações em dois grupos: concorrentes e completares. As diferenças são apresentadas através da teoria das matrizes e determinantes. Como vimos no último capítulo, o papel desses conceitos vinha sendo discutido com seu amigo Cayley no mesmo período em que esse artigo foi publicado. O texto inicia com as seguintes considerações:

Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}.$$

as quais representam duas transformações que devem ser aplicadas a formas algébricas; e a seguinte relação entre os elementos das matrizes:

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}, \alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & b'' & c'' \end{vmatrix}, b = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha' & 0 & \gamma' \\ \alpha'' & 0 & \gamma'' \end{vmatrix}, \beta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a' & 0 & c' \\ a'' & 0 & c'' \end{vmatrix} \dots,$$

A e B são ditas reciprocamente complementares, uma vez que são inversas por conta de suas construções. Feitas essas definições, duas transformações $F(x,y,z)$ e $G(u,v,w)$, serão ditas concorrentes se:

$$\begin{aligned} x &= aX + bY + cZ & u &= aU + bV + cW \\ y &= a'X + b'Y + c'Z & e \quad v &= a'U + b'V + c'W \\ z &= a''X + b''Y + c''Z & w &= a''U + b''V + c''W \end{aligned}$$

⁴³In the first place, let a linear equivalent of any given homogeneous function be understood to mean what the function becomes when linear functions of the variables are substituted in place of the variables themselves, subject to the condition of the modulus of transformation (that is, the value of the determinant formed by the coefficients of transformation) being unity.

ou seja, ambas têm matrizes associadas compostas pelos mesmos elementos. Por outro lado, se

$$u = \alpha U + \beta V + \gamma W$$

$$v = \alpha' U + \beta' V + \gamma' W \quad ,$$

$$w = \alpha'' U + \beta'' V + \gamma'' W$$

com α, β e γ definidos pelos determinantes acima, F e G são ditas complementares. Destacamos que o autor se refere a duas transformações que ocorrem de forma simultânea em duas formas algébricas que se relacionam por manterem suas estruturas após serem aplicadas a F e G, respectivamente. A partir disso, define-se o conceito de concomitância, que se caracteriza por transformações lineares concorrentes ou complementares.

Antes de continuarmos é importante esclarecer algumas questões de nomenclatura. Apesar de, como mostramos no capítulo anterior, Sylvester estabelecer um vocabulário dos *invariantes* a partir de 1853, os termos *concomitantes*, *forma associada* e *equivalente linear* não figuravam nessa lista. Além destes, os termos *covariante* e *contravariante* ganham detalhes específicos para os conceitos apresentados no artigo analisado.

Um equivalente linear é o que um polinômio homogêneo se torna quando aplicamos uma transformação linear a ele (no caso, as aplicações F e G, geram esses equivalentes). É importante destacar que o artigo trata apenas de transformações unitárias. Duas formas são ditas associadas quando os coeficientes de uma são função dos coeficientes da outra. Como exemplos, podemos citar o *discriminante* e o hessiano de formas quadráticas. Os *concomitantes* são caracterizados a partir da seguinte comparação:

A primeira espécie de concomitância é definida pelos equivalentes correspondentes das duas formas associadas sendo deduzidas por transformações ou substituições precisamente semelhantes, ou, como dissemos, concorrentes, cada uma a partir de sua primitiva dada. A segunda espécie de concomitância é definida pelos equivalentes correspondentes sendo deduzidos não por substituições semelhantes, mas contrárias, isto é, recíprocas ou complementares.⁴⁴ (SYLVESTER, 1851e, p. 291, Tradução Nossa)

Observe que a noção de concomitância trata de uma comparação de formas. Mais especificamente, verificamos a existência desse fenômeno entre duas formas associadas. Como exemplo: na citação, podemos observar que a diferença entre os *covariantes* e

⁴⁴The first species of concomitance is defined by the corresponding equivalent of the two associated forms being deduced by precisely similar, or, as we have expressed it, concurrent transformations or substitutions, each from its given primitive. The second species of concomitance is defined by the corresponding equivalent being deduced not by similar but by contrary, that is, reciprocal or complementary substitutions.

contravariantes é baseada no tipo de transformação, concorrente ou complementar. Com essas definições, o autor apresenta os dois tipos de *concomitantes*:

- Os *covariantes*: formas associadas definidas por transformações concorrentes, ou seja, não complementares. Nesse caso, o autor se refere a substituições diretas das variáveis x_0, \dots, x_n pelas novas X_0, \dots, X_n , como abaixo:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

- Os *contravariantes*: formas associadas definidas por transformações complementares. Nesse caso, o autor se refere a substituições inversas das variáveis x_0, \dots, x_n pelas novas X_0, \dots, X_n , como abaixo:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Em 1876, o matemático Faa di Bruno escreveu o livro *Théorie des Formes Binaires*. Neste texto, encontramos uma descrição de *covariante* muito semelhante a dada por Sylvester em seu artigo de 1851. De acordo com o matemático italiano, os *covariantes* são formas derivadas (as formas associadas de Sylvester) de um polinômio homogêneo, cujos equivalentes lineares (das formas original e derivada) permanecem inalterados, a menos do módulo da transformação (BRUNO, 1876, p. 182). Essa descrição se mostra coerente com a aquelas estabelecidas no vocabulário elaborado por Cayley e Sylvester. Como exemplo, di Bruno apresenta o seguinte:

Sejam

$$f(x,y) = (ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2$$

$$g(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

os polinômios f e g são ditos *covariantes* pois o equivalente linear de f , transformado a partir de

$$T = \begin{cases} x = pX + qY \\ y = p'X + q'Y \end{cases}$$

só difere do equivalente linear de g , gerado pela mesma transformação, pelo produto do quadrado do módulo de T , ou seja,

$$(AC - B^2)X^2 + (AD - BC)XY + (BD - C^2)Y^2 = (pq' - p'q)^2 T(f)$$

onde A , B e C são os coeficientes do equivalente linear de g e $T(f)$ é o equivalente linear de f . É importante destacar que, do ponto de vista geométrico, os *covariantes* geram curvas ou superfícies a partir de outras curvas dadas, independente da escolha dos eixos (SALMON, 1885). Em outras palavras, os *covariantes* são movimentos rígidos no plano e no espaço. Por outro lado, a perspectiva de Sylvester extrapola as dimensões visíveis.

Os *contravariantes*, são a outra espécie de *concomitante* descrito no artigo e, neste caso, representam transformações que geram mudanças de eixo. Com esse contexto definido, Sylvester apresenta duas comparações importantes para o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*.

Covariantes são Hyperdeterminantes do Sr. Cayley; as contravariantes incluem, mas não coincidem com, as formas adjuntivas de M. Hermite, se entendermos pelo último termo as formas que podem ser derivadas pelo processo descrito por M. Hermite na terceira de suas cartas a M. Jacobi, "Sur différents objets de la Théorie des Nombres"(processo que é uma extensão daquele empregado para determinar o recíproco polar de um locus algébrico).⁴⁵ (SYLVESTER, 1851e, p. 291, Tradução Nossa)

Essa citação nos mostra um elo importante da nova Teoria, uma vez que percebe uma conexão entre as investidas de Cayley e Hermite. Por um lado, a comparação entre *Hyperdeterminantes* e os *covariantes* se adequa à agenda de seu amigo inglês, uma vez que traz uma descrição teórica para uma prática desenvolvida para gerar invariantes. Por outro, a citação das formas adjuntivas, apresentadas pela primeira vez em correspondência com Jacobi, traz uma nova perspectiva para as investigações sobre as transformações lineares.

Na primeira carta referente ao tema, Hermite propõe gerar um equivalente linear utilizando as diferenciais parciais do polinômio primitivo com expressões de substituição. A resultante do processo de eliminação aplicado ao sistema gerado por estas diferenciais é chamado de uma "forma adjuntiva"(HERMITE, 1850). Destacamos que a construção da, em termos modernos, matriz associada à transformação linear via formas adjuntivas caracteriza exatamente a noção de transformação complementar descrita por Sylvester.

⁴⁵Covariants are Mr Cayley's hyperdeterminants; contravariants include, but are not coincident with, M. Hermite's formes-adjointes, if we understand by the last-named term such forms as may be derived by the process described by M. Hermite in the third of his letters to M. Jacobi, "Sur différents objets de la Théorie des Nombres,"(which process is an extension of that employed for determining the polar reciprocal of an algebraical locus).

É possível afirmar que os artigos, Sylvester (1851h) e Sylvester (1851e), representam um nó que liga as temáticas pelas quais estamos interessados. Além disso, eles representam o direcionamento da agenda que conduzirá as novas investigações na *Teoria dos Invariantes* e aglutinará os personagens interessados nessas discussões. Em outras palavras, o núcleo dos *invariantes* estava definindo o domínio das práticas compartilhadas, abrindo espaço para elaboração de outras práticas relacionadas à referida agenda e iniciando uma comunidade com um assunto específico: as transformações lineares.

O estudo sobre os *concomitantes* tem prosseguimento no ano seguinte, com a publicação do "On the Principles of the Calculus of Forms"(SYLVESTER, 1852b) e (SYLVESTER, 1852c), trabalho onde se estabelecem de maneira sistemática as bases da *Teoria dos Invariantes*. Uma primeira característica que reforça essa percepção é o fato de Sylvester tomar o devido cuidado com as referências aos autores que compartilharam experiências no período. De fato, esse trabalho resulta de uma construção coletiva de ideias, uma vez que as ideias difundidas foram discutidas em correspondências com Cayley, Salmon, Hermite, Boole e Hesse. Além disso, como apresentado no capítulo anterior, esse trabalho foi criteriosamente distribuído no continente, por meio de matemáticos influentes como: Borchardt (matemático alemão com interesse nas transformações de formas canônicas, devido à resolução da equação que ajuda na interpretação dos movimentos seculares dos planetas) e Bienaymé (membro da Sociéte Philomatique de Paris). Este último, se mostrou um contato importante para a divulgação do trabalho de Sylvester entre os franceses, apresentando o texto a Academia de Ciências de Paris.

O artigo contou com duas partes, publicadas no mesmo volume do CDMJ e mais uma publicada no volume seguinte. Além disso, a obra foi dividida em sete seções, a saber: *Concomitância Simples*, *Concomitância Complexa*, *Comutantes*, Reciprocidade e propriedades de *invariantes*, Generalizações, Equações entre *Concomitantes* e *Combinantes*. Ao longo delas, o autor se propõe a estabelecer as bases das pesquisas sobre os *invariantes*.

Na primeira seção, encontramos uma extensão da noção de *concomitante* para o caso de várias classes de variáveis. ⁴⁶ O texto apresenta a possibilidade de compor as transformações com números distintos de variáveis, o que configura um caso de *concomitância composta*. Esse novo contexto permite enunciar uma das bases da teoria, a Lei da Sucessão.

A lei mais alta e a mais poderosa em suas aplicações que eu já descobri na teoria dos concomitantes pode ser expressa pela afirmação de que quando várias classes relacionadas de variáveis estão presentes em qualquer

⁴⁶Aqui a ideia é lidar com substituições lineares sucessivas e as classes de variáveis se referem às transformações em si. Se as classes são independentes, chamadas de *cogredientes*, temos o caso da *covariância*; se as classes estão relacionadas, o caso da *contravariância*.

concomitante, um novo concomitante, derivado do anterior, tratando um ou qualquer número dessas classes como independentes das classes restantes, ainda será concomitante da primitiva. Citarei isso a seguir como a Lei das Sucessões. Esta lei, à qual fui conduzido indutivamente, requer um exame extenso e uma prova rigorosa. É a pedra angular da matéria, e qualquer um que suponha que seja uma proposição auto-evidente (pela simplicidade da enunciação que poderia ser) não cometerá um pequeno erro. ⁴⁷ (SYLVESTER, 1852b, p. 55, Tradução Nossa)

A ideia de investigar *concomitantes* de *concomitantes* atende a uma agenda, iniciada por Cayley na década anterior, para buscar todas as *invariantes* da teoria das formas. É interessante observar que Sylvester cogita a combinação de transformações, sendo coincidentes ou inversas, ⁴⁸ como modo de estudar as propriedades dos polinômios homogêneos. Como o próprio autor afirma, esse é o ponto central da teoria e permite uma nova abordagem sobre os problemas comuns nesse período, a saber: Problemas de Contato, Movimentos de Rotação e Teoria de Eliminação.

É importante destacar que essas são temáticas que permeiam interesses de matemáticos do continente, tanto do ponto de vista da pesquisa quando do ponto de vista do ensino, como veremos no próximo capítulo. A lei da sucessão é utilizada para identificar novos *concomitantes* gerados através do operador que o autor chama de *Emanante*. ⁴⁹

Esse operador é um bom exemplo de *concomitante*. De acordo com o próprio Sylvester, é fácil mostrar que o *emanante* de um *covariante* de um polinômio homogêneo dado é um outro *covariante*. Em Bruno (1876), encontramos um exemplo de uma forma quadrática e seu *emanante* que ilustra bem a relação enunciada pelo matemático inglês. Considera-se o polinômio

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

⁴⁷The highest law and the most powerful in its applications which I have yet discovered in the theory of concomitants may be expressed by affirming that when several related classes of variables are present in any concomitant, a new concomitant, derived from the former by treating one or any number of these classes as independent of the remaining classes, will still be a concomitant of the primitive. I shall quote this hereafter as the Law of Succession. This law, to which I have been led up inductively, requires an extended examination and a rigorous proof. It is the keystone of the subject, and anyone who should suppose that it is a self-evident proposition (as from the simplicity of the enunciation it might be supposed to be) will commit no slight error.

⁴⁸O autor se refere a estas transformações sucessivas como *cogredientes*, quando as matrizes associadas são idênticas e *contragredientes*, quando as matrizes associadas são inversas. Por isso, optamos pelas palavras coincidentes e inversas.

⁴⁹Resultado de operar qualquer número de vezes (suponha i vezes) sobre uma dada função homogênea de qualquer número de variáveis $x, y, z \dots t$ com o símbolo operativo

$$\left(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy} + z' \frac{d}{dz} + \dots + t' \frac{d}{dt} \right)$$

e seu *emanante*

$$\left(x' \frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy}\right) = 2(ax + by)x' + 2(bx + cy)y'$$

a partir daí, analisa-se os equivalentes lineares destas formas, com relação ao sistema de substituições lineares *cogredientes*

$$\begin{array}{l} x = pX + qY \\ y = p'X + q'Y \end{array} \quad e \quad \begin{array}{l} x' = pX' + qY' \\ y' = p'X' + q'Y' \end{array}$$

construindo $F(X, Y) = AX^2 + BXY + CY^2$, onde $A = ap^2 + 2bpp' + cp'^2$, $B = apq + b(pq' + p'q) + cp'q'$ e $C = aq^2 + 2bqq' + cq'^2$ e seu *emanante*

$$\left(X' \frac{df}{dX} + Y' \frac{df}{dY}\right) = 2(AX + BY)X' + 2(BX + CY)Y'$$

Com isso, é possível comparar o *emanante* da forma transformada com a transformada do *emanante* da forma original

$$\begin{aligned} & 2(ax + by)x' + 2(bx + cy)y' \\ = & 2(a(pX + qY) + b(p'X + q'Y))(pX' + qY') + 2(b(pX + qY) + c(p'X + q'Y))(p'X' + q'Y') \\ = & 2(ap^2XX' + apqX'Y + apqXY' + aq^2YY' + bpp'XX' + bpq'X'Y + bp'qXY' + bqq'YY') \\ & + 2(bpp'XX' + bp'qX'Y + bpq'XY' + bqq'YY' + cp'^2XX' + cp'q'X'Y + cp'q'XY' + cq'^2YY') \\ = & 2(ap^2X + apqY + 2bpp'X + bpq'Y + bp'qY + cp'^2X + cp'q'Y)X' \\ & + 2(apqX + aq^2Y + bp'qX + bqq'Y + bpq'X + bqq'Y + cp'q'X + cq'^2Y)Y' \\ = & 2((ap^2 + 2bpp' + cp'^2)X + (apq + b(pq' + p'q) + cp'q')Y)X' \\ & + 2((apq + b(pq' + p'q) + cp'q')X + (aq^2 + bqq' + cq'^2)Y)Y' \\ = & 2(AX + BY)X' + 2(BX + CY)Y' \end{aligned}$$

O que demonstra que o *emanante* permanece igual apesar da transformação no polinômio original, ou seja, são *covariantes*. Esse exemplo também nos mostra que a ideia do *emanante* não se limitava apenas à mudança das variáveis, mas se estendia para a geração de formas algébricas constituídas tanto das novas variáveis quanto das antigas.

Outros *invariantes* também são destacados por Sylvester nesse trabalho, como é o caso do *concomitante* misto que ele chamou de teorema de Hermite, para o caso de uma forma quadrática, através da apresentação de Cayley. Esse novo operador utiliza a

introdução de dois conjuntos de variáveis no polinômio original para gerar um derivado que é capaz de gerar um novo *covariante* ou *contravariante*. Caso esse derivado seja um *invariante*, seu equivalente linear será um *contravariante*. Essa ideia teve início em investigações conduzidas por Hermite, como o autor destaca, mas também foi tratado por Eisenstein, como uma mudança de eixos principais.

Essa aplicação revela uma conexão com os problemas de contato que foram tratados por Sylvester no início da década de 1850. O *discriminante* da forma $\square(\lambda U + \mu V)$ é percebido como uma composição de *concomitantes*, em geral *invariantes*, que formam o *concomitante* geral da forma. Essa ideia abre espaço para discussão de *covariantes* já conhecidos, como o determinante de um sistema de transformações, que já fora evidenciado nos trabalhos de Boole e Cayley na década anterior; assim como o determinante jacobiano, que também se adequa à teoria dos *concomitantes* desenvolvida no princípio do cálculo das formas.

Até agora nos ocupamos em considerar apenas um caso particular de concomitância, cuja ideia verdadeira não se refere a uma forma individual associada (como tal), mas a um complexo de formas capaz de degenerar em uma forma individual. Tal complexo pode ser chamado de Plexo. Um plexo de formas é concomitante a uma determinada forma ou combinação de formas nas seguintes circunstâncias.⁵⁰ (SYLVESTER, 1852b, p. 59, Tradução Nossa)

Essa citação evidencia uma mudança de tratamento dos problemas de transformação destacados pelo autor. Essa distinção é ponto de partida da segunda seção do cálculo das formas. O conceito de *Plexus* se refere a uma coleção de *concomitantes* combinados, ou seja, os *concomitantes* identificados até aquele momento podem, e precisam, ser analisados a partir das formas que os constituem.

Encontramos em (SYLVESTER, 1852b, p. 71) um exemplo que ilustra a relação de invariância entre um polinômio homogêneo e o hessiano correspondente. O autor realiza a análise de um polinômio de 5^o grau nas variáveis x e y e considera o determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2 F}{dx^2} & \frac{d^2 F}{dx dy} \\ \frac{d^2 F}{dy dx} & \frac{d^2 F}{dy^2} \end{vmatrix} = \frac{d^2 F}{dx^2} \times \frac{d^2 F}{dy^2} - \frac{d^2 F}{dx dy} \times \frac{d^2 F}{dy dx}$$

que é compreendido como um *plexus*, ou *concomitante* complexo, composto pelos *concomitantes* básicos $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{d^2 H}{dx^2}$, $\frac{d^2 H}{dx dy}$, $\frac{d^2 H}{dy^2}$. Estes, formam cinco novos polinômios que, através de um processo de eliminação das variáveis envolvidas, geram um resultante que é da forma

⁵⁰We have hitherto been engaged in considering only a particular case of concomitance, the true idea of which relates not to an individual associated form (as such), but to a complex of forms capable of degenerating into an individual form. Such a complex may be called a Plexus. A plexus of forms is concomitant to a given form or combination of forms under the following circumstances.

□ $F - I_4^2$, respectivamente o determinante da matriz associada ao polinômio original e o *invariante* geral, como identificado por Cayley, de uma forma quártica.

Esse ponto nos mostra a intersecção entre a *Teoria dos Invariantes* e a Teoria de Eliminação, ambas investigadas por Sylvester. Neste trabalho de 1852, o autor identifica que as resultantes das equações de coexistência também geram *plexus* a partir das diferenciais parciais em relação às variáveis. Além disso, ele afirma que todo sistema completo deve constituir um *plexo* ou *conjunto de plexus invariantes*.

Podemos compreender que essas duas primeiras seções se preocuparam em estabelecer uma abordagem sistemática para a geração de *invariantes*, *covariantes* e *contravariantes*, através da busca por unidades básicas destas formas algébricas. Outra contribuição importante foi a apresentação de técnicas para gerar estes objetos matemáticos, como é o caso dos *comutantes*. Como discutido no capítulo anterior, apesar desse termo não figurar no vocabulário dos *invariantes*, que será elaborado em 1853, essa prática apresentaria papel importante no desenvolvimento da Teoria.

Sylvester inicia a terceira seção do cálculo das formas apresentando uma distinção entre os *comutantes* simples e totais. O caso simples, são os determinantes comuns, já tratados nas outras seções. O caso total se assemelha muito com os *Hyperdeterminantes* de Cayley, que pode ser visto como uma situação particular dos *comutantes totais*, uma vez que lidam com uma coleção de determinantes comuns.

Se supomos que ϕ é uma função de um grau par r de um único sistema de n variáveis x, y, \dots, t , de modo que os r sistemas $x_1, y_1, \&c, x_2, y_2, \&c, x_r, y_r, \&c$. tornam-se idênticos, podemos inferir imediatamente do esquema acima a existência e o modo de formar um invariante para ϕ da ordem n . Este último aparece para o caso $n = 2$, e deveria, para todos os outros valores de n , ter sido conhecido pelo autor da descoberta imortal dos invariantes, denominados por ele Hyperdeterminantes, no sentido que, segundo a nomenclatura aqui adotada, seria transmitida pelo termo Hyperdiscriminantes.⁵¹ (SYLVESTER, 1852b, p. 72, Tradução Nossa)

Podemos notar o reconhecimento da técnica dos *Hyperdeterminantes* desenvolvida por seu amigo Cayley. Entretanto, esse trecho evidencia o esforço de Sylvester para um tratamento sistemático das práticas comuns compartilhadas, de modo que a Teoria tenha um núcleo comum e marque as investigações conduzidas em solo britânico. É nesse sentido

⁵¹If we suppose ϕ to be a function of an even degree r of a single system of n variables x, y, \dots, t , so that the r systems $x_1, y_1, \&c, x_2, y_2, \&c, x_r, y_r, \&c$. become identical, we can at once infer from the above scheme the existence and mode of forming an invariant to ϕ of the order n . This last appears for the case $n=2$, and ought, for all other values of n , to have been known to the author of the immortal discovery of invariants, termed by him hyperdeterminants, in the sense which, according to the nomenclature here adopted, would be conveyed by the term hyperdiscriminants.

que a conexão dos *comutantes* totais se encaixam na busca pelos *invariantes* de polinômios homogêneos, como é descrito no trabalho.

Outra aplicação destacada diz respeito à descoberta de *invariantes* de formas algébricas de ordens 4 e 6. Um exemplo mostra que, apesar de não terem recebido o nome de *invariantes* ⁵², as expressões $m - m^4$ e $1 - 20m^3 - 8m^6$, respectivamente os *invariante* S e T de Aronhold, permanecem inalteradas após a transformação de $F = x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz$, realizada através do hessiano

$$\begin{vmatrix} x & mz & my & \xi \\ mz & y & mx & \eta \\ my & mx & z & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix}$$

Essa transformação reduz o grau do polinômio F para 2, além de introduzir um novo conjunto de variáveis. No exemplo, o processo utilizado para calcular o determinante é realizado através do conceito de *comutante total*, o qual leva à resultante cujas raízes são os *invariantes de Aronhold*.

Com essas duas aplicações, podemos afirmar que os *comutantes totais* representam uma forma de combinar os coeficientes, que precisam ser *cogredientes*, de modo a gerar *invariantes* mais gerais que lidam com sistemas de variáveis distintos. Apesar de apresentar um enunciado geral, Sylvester limita seu exemplo da aplicação de dessa técnica apenas ao cálculo de *invariantes* de formas quadráticas, ternária e bi quadráticas. Além disso, os *comutantes* se mostram úteis no desenvolvimento da Lei de Inércia para formas quadráticas, como poderemos observar na próxima seção.

A quarta seção dessa obra aparece em continuação no mesmo volume do CDMJ (SYLVESTER, 1852c) e trata de analogias de *invariantes* com práticas de outros matemáticos que trabalharam com polinômios homogêneos em diversos contextos. Inicialmente, o autor apresenta aplicações do que chamou de método de reciprocidade, o qual merece um destaque por conta das conexões que revela.

Como primeira conexão, encontramos uma comparação natural com o trabalho de Boole. Em artigo sobre transformações lineares, o matemático irlandês apresenta fórmulas que são *concomitantes* com o polinômio original. Como exemplo, considera-se a forma binária $\phi(x,y)$ e demonstra-se que a forma associada $\phi\left(\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx}\right)$ permanecerá

⁵²O artigo ao qual se refere aqui é "Zur Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln"(ARONHOLD, 1850), portanto, um ano antes de Sylvester ter cunhado o termo

inalterada após a transformação $\begin{cases} x = \lambda x' + \mu y' \\ y = \lambda' x' + \mu' y' \end{cases}$. Essa propriedade se encaixa na teoria

dos *concomitantes*, uma vez que se trata de uma relação de *contravariância*. Sylvester percebe uma possibilidade de generalização nessa ideia a partir da teoria dos *concomitantes* e acrescenta uma relação entre *covariantes* e *contravariantes*. Dado um polinômio $\phi(x, y, \dots, z)$ e seu *contravariante* $\theta(x, y, \dots, z)$, a expressão

$$\phi\left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \dots, \frac{d}{dz}\right) \cdot \theta(x, y, \dots, z)$$

é um *covariante* de ϕ , destacando que, no caso de uma transformação ortogonal, estas expressões coincidem e o teorema de Boole se confirma. Essa generalização, chamada pelo de autor de teorema de Eisenstein-Hermite,⁵³ também permite uma nova interpretação aos *invariantes de Aronhold*, através do operador *emanante* e do hessiano. Sobre esse aspecto, as combinações dos *invariantes* do matemático alemão, que são *invariantes* de quarta ordem de uma forma cúbica, são utilizadas para determinar o recíproco polar de formas algébricas.

Essa prática revela a natureza combinatória da *Teoria dos Invariantes*, além das conexões entre as temáticas que discutimos até aqui. A ideia de calcular o recíproco polar, ou simplesmente reciprocante como Sylvester chama, pode ser exemplificada da seguinte maneira: considerando uma quártica binária $(x, y)^4$, os *invariantes de Aronhold* podem ser associados a uma quártica equivalente linear da forma $(x, y, z)^4$.

Além disso, quem considerar atentamente as observações feitas na Seção II. do anterior em relação aos polares recíprocos, apreenderá sem qualquer dificuldade que a cada *invariante* de uma função de qualquer grau de qualquer número de variáveis corresponderá uma *contravariante* de uma função do mesmo grau de variáveis mais uma em número, e que entre tais *invariantes*, quaisquer que sejam as relações expressas independentemente de todas as outras quantidades, precisamente as mesmas relações devem existir entre as *contravariantes* correspondentes.⁵⁴ (SYLVESTER, 1852c, p. 179, Tradução Nossa)

Aqui percebemos a utilidade dos *concomitantes* totais para relacionar formas com diferentes dimensões. Nesse contexto, é interessante notar que a invariância em duas

⁵³As contribuições desses dois matemáticos serão mais bem analisadas no próximo capítulo

⁵⁴Furthermore, whoever will consider attentively the remarks made in Section II. of the foregoing relative to reciprocal polars, will apprehend without any difficulty that to every invariant of a function of any degree of any number of variables will correspond a contravariant of a function of the same degree of variables one more in number, and that between such invariants, whatever relations exist expressed independently of all other quantities, precisely the same relations must exist between the corresponding contravariants.

dimensões, como é caso do exemplo com o qual estamos lidando, se mostra associada a um processo de mudança de eixos quando adicionamos uma dimensão extra à forma investigada. A discussão sobre os recíprocos polares se adequa aos estudos sobre projeções, o que conecta o trabalho com as transformações e os problemas de contato ao interesse revelado por Sylvester na correspondência com Lord Brougham apresentada no capítulo 2, no qual o autor afirma a importância de lidar com uma geometria mais geral que não pode ser atingida pelos sentidos.

Retornando ao nosso exemplo, os *invariantes* s e t da quártica binária $(x,y)^4$ correspondem aos *contravariantes* σ e τ da quártica ternária $(x,y,z)^4$. Ao combinarmos esses *concomitantes* sob a forma $\rho = \sigma^3 + \tau^2$, faremos de ρ o recíproco polar de $(x,y,z)^4$. As analogias utilizando os *invariantes de Aronhold*, permitem a confirmação de outros resultados no texto. Entretanto, destacamos o fundo geométrico desses resultados, o que pode ser visto através das analogias com o livro-texto de Salmon *Higher Plane Curves* (SALMON, 1852). Em sua obra, o reverendo irlandês analisa o problema das tangentes através de operadores como o hessiano e os *invariantes de Aronhold*. Em suas analogias, Sylvester generaliza essa ideia para contatos entre linhas, curvas, superfícies e dimensões superiores.

Outra analogia com questões geométricas se apresenta através de pontos críticos de formas cúbicas. Caso o reciprocante seja nulo, teremos uma curva com ponto duplo, ou seja, se $\sigma^3 + \tau^2 = 0$; Para dois pontos duplos ou a transformação de uma cônica em reta, temos os hessianos dos *invariantes de Aronhold* nulo, ou seja $\frac{dS}{da} \frac{dT}{db} - \frac{dS}{db} \frac{dT}{da} = 0$; Se os *invariantes* S e T forem nulos, teremos um cúspide e o caso do contato entre uma cônica e sua tangente é representado pelas expressões $\frac{dT}{da} = 0, \frac{dT}{db} = 0$ e $S = 0$, que são exemplos dessa conexão com resultados geométricos.

Sylvester propõe essa abordagem sistemática da *Teoria dos Invariantes* e o estudo das formas associadas, como uma nova abordagem para problemas de natureza geométrica, de modo que seria possível tanto generalizar os mesmos para dimensões superiores, quanto lidar com objetos algébricos com uma perspectiva da geometria. Essas características se mostram mais claras na nota final do artigo, onde ele afirma o objetivo de investigar curvas de 6º grau ou superiores (SYLVESTER, 1852c)

As seções seguintes do artigo do cálculo das formas, se destinam a apresentar outras propriedades oriundas dessa ideia de generalização e as práticas utilizadas são semelhantes às que apresentamos até o momento. Entretanto, é importante um último destaque para o uso do determinante hessiano no trabalho. Esse objeto matemático é encarado aqui, principalmente, como uma forma de estabelecer transformações *cogredientes* e sua combinação com outros *invariantes*, como o caso de S e T , forma *contragredientes*.

A seção que trata das características dos *combinantes*, a última das sete que foram anunciadas, foi publicada no CDMJ em 1853. Entretanto, Sylvester publicou uma nota em um número anterior do periódico, na qual apresentou algumas reflexões sobre o desenvolvimento da pesquisa com os *invariantes*. Nesse pequeno texto, o autor destaca as conexões da teoria com trabalhos de matemáticos do continente, fato que pode ser observado a seguir:

Essa covariante fornece, por favor, funções simétricas em relação às duas extremidades de uma equação para determinar o número de suas raízes reais e imaginárias. As funções sturmianas ordinárias, é bem conhecido, não têm essa simetria. Como outro exemplo da aplicação bem-sucedida dos novos métodos a assuntos que existiam muito antes do mundo matemático e estão supostamente esgotados, posso notar que obtenho sem esforço, com a ajuda deles, um método muito mais simples, prático e completo da solução da questão da transformação simultânea de duas funções quadráticas, ou a transformação ortogonal de uma dessas funções, do que qualquer dada anteriormente, mesmo pelos grandes mestres Cauchy e Jacobi, que trataram desta questão.⁵⁵ (SYLVESTER, 1853b, p. 62, Tradução Nossa)

Aqui encontramos uma intersecção importante com as discussões sobre o teorema de Sturm, assunto que já despertara o interesse de Sylvester no final da década de 1830 e início da década de 1840, através de seus trabalhos com Teoria de Eliminação. Quando se refere a um *covariante* específico, o autor trata das formas associadas a polinômios homogêneos binários de grau qualquer que, através da prática dos *combinantes*, se assemelham ao determinante hessiano.

A possibilidade de determinar o número de raízes reais e imaginárias apresenta relação com investigações sobre a equação que ajuda a determinar as desigualdades seculares dos movimentos dos planetas, que ficou conhecida como *Equação Secular*. Esse mesmo problema foi tratado pelos famosos matemáticos Cauchy e Jacobi, além de já fazer parte dos interesses de Sylvester nesta época, uma vez que encontramos esse assunto em publicações em 1852 e na década seguinte, como poderemos ver na próxima seção. Outra conexão apontada pelo autor é a lei da reciprocidade demonstrada por Hermite, a qual representaria um papel importante no desenvolvimento das ideias do matemático inglês: "Esse teorema da reciprocidade numérica promete desempenhar um papel tão importante

⁵⁵This covariant furnishes, if we please, functions symmetrical in respect to the two ends of an equation for determining the number of its real and imaginary roots. The ordinary Sturmian functions, it is well known, have not this symmetry. As another example of the successful application of the new methods to subjects which have been long before the mathematical world and supposed to be exhausted, I may notice that I obtain without an effort, by their aid, a much more simple, practical, and complete solution of the question of the simultaneous transformation of two quadratic functions, or the orthogonal transformation of one such function, than any previously given, even by the great masters Cauchy and Jacobi, who have treated this question.

na Teoria das Formas quanto o célebre teorema da reciprocidade de Legendre na dos Números.⁵⁶ (SYLVESTER, 1853b, p. 64)

Retornando aos *combinantes*, o artigo "On the Calculus of Forms, otherwise the Theory of Invariants" (SYLVESTER, 1853g) traz uma descrição do conceito, que trata da busca por *concomitantes* estendida para além das substituições lineares realizadas sobre as variáveis, mais especificamente, para combinações lineares das funções envolvidas nos sistemas. Essa ideia remete ao cálculo das resultantes como pode ser visto em nota do artigo:

Um método semelhante será posteriormente aplicado à representação da resultante de duas equações cúbicas como uma função de Combinantes tendo relações com as invariantes quadráticas e cúbicas de uma função quártica de x e y , precisamente análogas àquelas que as Combinantes que entram na solução acima mencionada para suportar os invariantes Aronholdianos de uma função cúbica.⁵⁷ (SYLVESTER, 1853g, p. 256, Tradução Nossa)

Mais uma vez, os *invariantes de Aronhold* formam a base dos métodos de Sylvester. É importante ressaltar que essas bases servem como ponto de partida para o trabalho de generalização, uma vez que a teoria dos *combinantes*, como o próprio autor chama, lida com um número genérico de polinômios e graus deles.

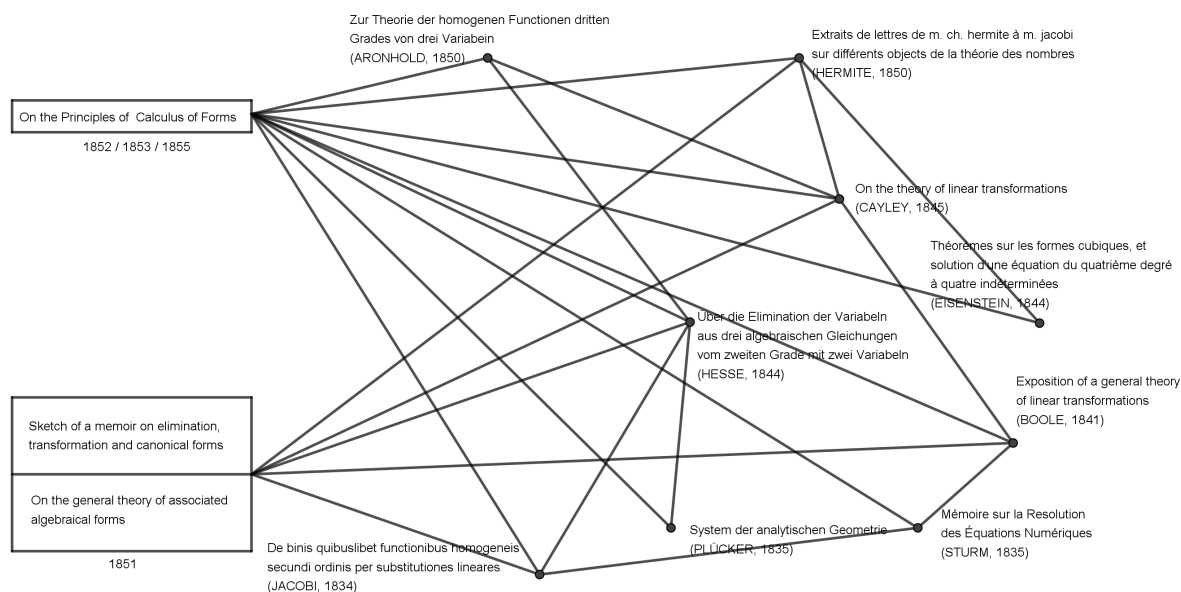
Os *combinantes* são divididos em simples, os quais são indecomponíveis em expressões *invariantes*; e complexos, que o autor considera como *invariantes de invariantes*. A partir daí, consideram-se uma coleção de polinômios e as combinações lineares possíveis deles. A resultante do sistema formado pelos *invariantes*, que se revelam nas combinações lineares citadas acima, será também um *invariante*.

Esse artigo também se destaca por ser o primeiro trabalho onde encontramos a expressão *Teoria dos Invariantes*. Por fim, os artigos sobre o cálculo das formas cunham termos e apresentam as práticas que são a base da geração das formas associadas, agora sob novo nome. Além disso, esses trabalhos trazem uma nova abordagem para problemas de outros matemáticos britânicos e do continente, como pode ser visto no esquema a seguir

⁵⁶This theorem of numerical reciprocity promises to play as great a part in the Theory of Forms as Legendre's celebrated theorem of reciprocity in that of Numbers.

⁵⁷A similar method will subsequently be applied to the representation of the resultant of two cubic equations as a function of Combinants bearing relations to the quadratic and cubic invariants of a quartic function of x and y , precisely analogous to those which the Combinants that enter into the solution above alluded to bear to the Aronholdian invariants of a cubic function.

Figura 15 – Conexões entre as investigações sobre transformações



Fonte – Elaborado pelo Autor

No esquema, os artigos que representam o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes* de Sylvester estão compactados em dois blocos, sendo o primeiro com os dois artigos de entrada na Teoria e o segundo concentrado nos textos que lidam com os cálculos sobre as formas. Com isso, percebemos que esse período foi marcado por uma agenda de lançamento⁵⁸ da nova Teoria, tanto para os matemáticos britânicos quanto para os do continente.

Outro aspecto revelado por esse esquema é a unificação das temáticas. Os trabalhos que lidaram com transformações permeiam as discussões sobre eliminação, contato e, como veremos a seguir, rotação. É importante destacar que as investigações conduzidas por Sylvester passam, a partir de 1851, a ter as próprias transformações como ponto central. Seguindo as iniciativas de Boole e Cayley, o interesse a respeito das propriedades das formas associadas e a busca por generalizações de resultados já apresentados para formas algébricas particulares, desenvolveram novas abordagens que permitiram lidar com problemas distintos, levando em conta a nova álgebra impulsionada pelos britânicos.

Este aspecto pode ser confirmado através das conexões com os autores que surgiram ao longo das análises realizadas nesta seção. Algumas inspirações são naturais, como são

⁵⁸A ideia de "lançamento" se reflete no conjunto de ações de Sylvester, desde seu desejo pelo estabelecimento como profissional de matemática (como apresentado no capítulo anterior), a correspondência com os matemáticos de seu entorno (mais especificamente Cayley e Salmon) e a ideia de comunicar os trabalhos para personagens importantes da França e dos Estados Alemães. Os artigos sobre o cálculo das formas carregam o desejo de colocação no mundo de pesquisa em matemática para além do próprio Sylvester, levando em consideração a produção britânica em si.

os casos dos trabalhos de Jacobi e Boole, os quais lidam diretamente com as substituições lineares. Apesar disso, uma diferença fundamental desses trabalhos para o de Sylvester reside no fato de este ter se concentrado nas técnicas que desenvolvem as formas *invariantes*, fator que fica claro na relação com as iniciativas de Cayley.

Além destas conexões naturais, é possível notar as inspirações geométricas, através das referências a Plücker, a relação com os determinantes de Hesse e o interesse pelos problemas de contato revelados na seção anterior. Outro ponto importante surge a partir das intersecções com interesses aritméticos, como a teoria dos números, através dos contatos com Hermite. Por fim, as conexões com as publicações de Aronhold e Eisenstein revelam o aspecto geral e unificador da Teoria, uma vez que os artigos destes dois matemáticos se caracterizam pelo tratamento dos polinômios como combinações de números e se assemelham aos problemas das partições. Nesse sentido, a identificação das formas tratadas nos trabalhos dos matemáticos alemães como *invariantes* bases, como no caso de Aronhold, representa esse caráter unificador.

Ainda sobre essa capacidade de aglutinação da obra de Sylvester, destacamos "On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure" (SYLVESTER, 1853f), que traz a lista de termos, comumente utilizados na *Teoria dos Invariantes*, da qual apresentamos parte no capítulo anterior. Apesar de vários termos terem se mostrado frutuosos, alguns não obtiveram o mesmo êxito como apontado por Joachimsthal, no ano seguinte a esta publicação:

As belas investigações de Hermite, que contêm uma extensão do teorema de Sturm a sistemas de equações com várias variáveis e que ele publicou em excertos no Comptes rendus da Academia de Paris, não têm relação com minhas investigações anteriores. Se os resultados ainda podem ser encontrados nos artigos do Sr. Sylvester, que infelizmente são um pouco difíceis de entender devido a uma nova terminologia, que concorda com os do presente artigo, então ninguém pode estar mais disposto do que eu a reconhecer os direitos prioritários do analista de inglês qualificado. ⁵⁹ (JOACHIMSTHAL, 1854, p. 408, Tradução Nossa)

A referência às investigações de Hermite diz respeito às investigações sobre métodos numéricos para resolução de equações polinomiais. Outro fator importante da ligação entre Joachimsthal, Hermite e Sylvester é a abordagem sobre o teorema de Sturm. Este

⁵⁹Die schönen Untersuchungen Hermite's, welche eine Ausdehnung des Sturm'schen Satzes auf Systeme von Gleichungen mit mehreren Variablen enthalten und die derselbe in den Comptes rendus der pariser Academie im Auszuge bekannt gemacht hat, sind mit meinen vorhergehenden Untersuchungen in keinem Zusammenhange. Sollten in den durch eine neue Terminologie leider etwas schwer verständlichen Abhandlungen Herrn Sylvesters sich noch Resultate finden, welche mit denen gegenwärtiger Abhandlung übereinstimmen, so kann niemand bereitwilliger als ich selbst sein, die Prioritätsrechte des gewandten englischen Analytikers anzuerkennen.

trabalho de 1853 trata diretamente do famoso teorema e destaca sua relação com a Lei de Inércia para formas quadráticas, enunciada pelo matemático inglês um ano antes. A análise desse artigo se mostra importante, uma vez que ele traz uma abordagem algébrica do teorema sobre a natureza das raízes de polinômios. Essa abordagem se relaciona com as investidas a respeito do problema da *Equação Secular*, o que faz com que esse trabalho seja uma transição importante entre a temática das transformações e a temática das rotações, que será discutida na próxima seção. Antes disso, apresentaremos uma análise do artigo em si.

A primeira noção que chama atenção no texto é o termo *syzygetic* que aparece no título. De acordo com o autor, esse termo se refere à soma de polinômios multiplicados por fatores arbitrários, a qual caracteriza um tipo especial de relação entre os polinômios envolvidos, quando se anula (SYLVESTER, 1853f, p. 563). Além disso, tanto Sylvester quanto Cayley utilizaram as relações *syzygéticas* entre os polinômios como uma forma de contabilizar o número de *covariantes* ligados a um polinômio homogêneo.

A ideia do autor é tratar da resultante associada a um problema de eliminação que, como indicaram as investigações conduzidas na década de 1840, apresenta intersecção com o teorema de Sturm. Voltando ao texto, Sylvester inicia a primeira seção com uma discussão sobre as propriedades dos restos que surgem no processo de divisão sucessiva, ou seja, a busca pelo maior divisor comum entre dois polinômios. Cabe destacar que esses "resíduos", como o autor se refere aos restos, apresentam uma relação *syzygética* com os polinômios envolvidos na divisão.

Nessa primeira seção, identificamos uma investigação sobre o número de dimensões dos restos dos processos de divisão sucessivas. Essas divisões são um artifício para determinar as propriedades da resultante de um sistema de equações de coexistência. O artigo representa uma retomada das investigações sobre Teoria de Eliminação embora, desta vez, será possível identificar a extensão do problema e a aplicação da Lei de Inércia para formas quadráticas. Ao analisar um sistema com dois polinômios, cujo graus não são necessariamente idênticos, o autor encontra uma relação entre a resultante e os fatores que ele chama de *allotrios*.

O fator allotrio a um resíduo ou quociente no processo de medida comum aplicado a duas funções algébricas é o fator constante de que tal resíduo ou quociente deve ser despojado para se tornar uma função integral e irreduzível.⁶⁰ (SYLVESTER, 1853f, p. 558, Tradução Nossa)

⁶⁰The allotrious factor to a residue or quotient in the process of common measure applied to two algebraical functions is the constant factor of which such residue or quotient must be divested in order to become an integral and irreducible function. Ressaltamos que este termo não se encontra na seção sobre o vocabulário do capítulo 1 por conta do fato de não figurar em outras fontes como Cayley (1860a). Entretanto, essa noção é central para compreender esta nova ideia de Sylvester.

Esse novo termo se refere a fatores que surgem ao representarmos o resto da divisão de polinômios através do algoritmo de Euclides. Como exemplo podemos considerar dois polinômios P e Q de graus m e n e apresentar as seguintes equações, que resultam da divisão $\frac{P}{Q}$:

$$P - M_0Q \pm R_1 = 0$$

$$Q - M_1R_1 \pm R_2 = 0$$

$$R_1 - M_2R_2 \pm R_3 \quad ^{61}$$

⋮

$$R_n - M_{n+1}R_{n+1} \pm R_{n+2}$$

onde M_i e R_i são, respectivamente, o quociente e resto da divisão. A partir destas equações, é possível escrever cada um dos restos em função de P e Q da seguinte forma: $R_i = Q_iQ + P_iP$, com Q_i e P_i compostas pelos quocientes M_i . É possível identificar fatores comuns a P e Q , de modo que a natureza da resultante do sistema se mostra possível.

A primeira seção do artigo passa a tratar das resultantes através do cálculo dos fatores *allotrios*, um método que o próprio autor afirmou ser semelhante ao que Sylvester chamou de método abreviado de Bézout, o qual exprime a resultante de um sistema através de um determinante de m linhas e m colunas que é formado pelos coeficientes dos resíduos simplificados, ou seja, dos resíduos despojados dos fatores *allotrios*.

Essa ligação com o método de Bézout se torna mais nítida quando se consideram os polinômios com o mesmo grau. Nesse caso, formam-se n equações de grau $n - 1$, as quais geram a *matriz bezoutiana*, descrita no capítulo anterior (SYLVESTER, 1853f). Esse determinante é um *invariante* importante na investigação sobre as transformações de sistemas de equações.

A segunda seção do artigo é dedicada ao estudo das relações entre as raízes dos polinômios de coexistência e a expressões *syzygéticas*: $\tau_i f - t_i \phi + \vartheta_i = 0$, onde ϑ_i é um polinômio que resulta do produto das diferenças entre as raízes das equações envolvidas no sistema pelo polinômio formado pelas raízes que sobram de uma equação em relação à outra, como podemos ver a seguir:

$$\vartheta_i = \sum \{P_{q_1 q_2 \dots q_i} \times (x - h_{q_1})(x - h_{q_2}) \dots (x - h_{q_i})\}$$

onde P é o produto das diferenças das raízes. É importante lembrar que a expressão é o derivativo utilizado nos artigos das décadas de 1830 e 1840, o que demonstra que o início

⁶¹Na verdade, Sylvester não utiliza "±", mas apenas "+". Optamos por esta notação devido a uma melhor adequação à ideia de algoritmo de divisão

desse artigo trata da natureza dos problemas de eliminação. Essa percepção tem uma mudança a partir da terceira seção:

As fórmulas da seção anterior referiam-se ao caso de duas funções absolutamente independentes e seus respectivos sistemas de raízes: quando as funções se tornam tão relacionadas que as raízes de um sistema tornam-se explícita ou implicitamente funções das raízes do outro sistema, as fórmulas tornar-se-ão exprimíveis apenas em termos destes últimos, e em alguns casos os termos (cuja soma é sempre essencialmente integral) tornar-se-ão separadamente e individualmente representáveis sob uma forma integral. Tal, como irei mostrar, é o caso de duas funções, das quais uma é a derivada diferencial da outra. ⁶² (SYLVESTER, 1853f, p. 461, Tradução Nossa)

Notamos que as duas primeiras seções apresentam métodos gerais. Nessa citação, o autor se refere às condições do teorema de Sturm, que se utiliza o algoritmo de Euclides como forma de determinar o número de raízes em um dado intervalo. Entretanto, é importante destacar a diferença entre os dois métodos. Enquanto o francês que dá nome ao famoso teorema trata o problema através de uma perspectiva analítica, ou seja, em termos modernos, utiliza o teorema do valor intermediário; Sylvester, por outro lado, apresenta um tratamento exclusivamente algébrico (SINACEUR, 1991), o qual pode ser percebido a partir das fórmulas que levam em conta as relações entre as raízes e os coeficientes, analisando a estrutura dos polinômios.

Ainda na terceira seção, encontramos conexões com a obra de Hermite que também investigou a temática do teorema de Sturm nos anos de 1852 e 1853 que apresenta contribuições que permitem a demonstração das propriedades que associam as funções auxiliares de Sturm às raízes dos polinômios através da Lei de Inércia.

Como preparação para algumas observações a serem feitas sobre as fórmulas relacionadas com o teorema de M. Sturm, é necessário premissa de dois teoremas de grande importância sobre funções quadráticas, um dos quais, apesar de sua extrema simplicidade, é, até onde sei, muito pouco (se é que é) conhecido, e o outro foi dado em parte há muitos anos por M. Cauchy, mas também não é geralmente conhecido. ⁶³ (SYLVESTER, 1853f, p. 489, Tradução Nossa)

⁶²The formulae in the preceding Section had reference to the case of two absolutely independent functions and their respective systems of roots: when the functions become so related that the roots of the one system become explicitly or implicitly functions of the roots of the other system, the formulas will become expressible in terms of these latter alone, and in some cases the terms (of which the sum is always essentially integral) will become separately and individually representable under an integral form. Such, as I shall proceed to show, is the case for two functions, of which one is the differential derivative of the other.

⁶³As preparatory to some remarks about to be made on the formulas connected with M. Sturm's theorem, it is necessary to premise two theorems of great importance concerning quadratic functions, one of which, notwithstanding its extreme simplicity, is as far as I know very little (if at all) known, and the other was given in part many years ago by M. Cauchy, but is also not generally known.

Os dois teoremas citados são a própria Lei de Inércia para formas quadráticas e o teorema apresentado por Cauchy em 1829, utilizado para uma abordagem de transformações ortogonais de formas cônicas com a finalidade classificar estas formas. Segundo Brechenmacher (2014), essa abordagem do famoso matemático francês faz parte de um conjunto de analogias que auxiliaram a organização do conhecimento matemático ao longo do século XIX. Entendemos que a relação entre a Lei de Inércia e a classificação das equações características das cônicas tem um papel importante nesse processo. Além disso, a lei enunciada, apresenta um novo critério para a determinação das raízes de um polinômio.

Nesse sentido, a quarta seção do artigo discute fórmulas para determinar a natureza das raízes de um polinômio, através dos restos do processo de medida comum com suas diferenciais, o que o autor chamou de resíduos *sturmianos*. Ao considerar propriedades das raízes, Sylvester utiliza notações apresentadas por Cayley e Hermite para caracterizar o que ele chama de função geradora (G), indicada a seguir:

$$\sum (\rho - h_1)^q \{ \phi_1(h_1)u_1 + \phi_2(h_1)u_2 + \dots + \phi_m(h_1)u_m \}^2$$

onde h_1 é uma raiz fixada, ϕ_i são funções arbitrárias com coeficientes reais e trata-se de um polinômio com variáveis u_i , o qual pode ser associado a uma *matriz bezoutiana*. Com isso, o autor apresenta os critérios para determinar a natureza das raízes:

A inércia da forma quadrática (G) é a medida do número de raízes reais de fx compreendidas entre ∞ e ρ , e pode ser estimada da maneira que achar mais conveniente. Se ρ for infinito, e $\phi_i h$ for tomado igual a h^{i-1} , e a inércia do valor correspondente de (G) for estimada por meio das fórmulas em uso comum pelos geômetras para determinar a natureza de uma superfície do segundo grau, o critério do número de raízes reais em fx será, ou poderá ser, simétrico em relação às duas extremidades da expressão fx .⁶⁴ (SYLVESTER, 1853f, p. 494, Tradução Nossa)

A ideia de inércia, como veremos na próxima seção, trata da diferença entre os quadrados positivos e negativos do polinômio (G), após sua transformação em soma de quadrados de funções lineares. Nessa citação, é possível perceber que Sylvester se propõe a solucionar problemas de outras abordagens, especificamente de Cayley e Hermite, como indicado por Sinaceur (1991).

Por fim, a quinta seção retoma a discussão dos *invariantes*. Sobre esse assunto, justifica-se a invariância da Lei de Inércia. Isso é feito a partir da consideração dos

⁶⁴The inertia of the quadratic form (G) is the measure of the number of real roots of fx comprised between ∞ and ρ , and may be estimated in any manner that may be found most convenient. If ρ be made infinity, and $\phi_i h$ be taken equal to h^{i-1} , and the inertia of the corresponding value of (G) be estimated by means of the formulae in ordinary use by geometers for determining the nature of a surface of the second degree, the criteria of the number of real roots in fx will be, or may be made to be, symmetrical in respect to the two ends of the expression fx .

concomitantes, os quais em geral são *contravariantes*. As técnicas são semelhantes às aquelas discutidas nos artigos dos cálculos das formas. Mais uma vez percebemos o interesse de Sylvester pelos problemas associados à *Equação Secular*, mais particularmente ao problema da mecânica das rotações, o que veremos na próxima seção.

3.5 Rotações

Os artigos tratados aqui são entendidos como desdobramentos das teorias que foram desenvolvidas nas outras seções deste capítulo. Iniciamos com comentários sobre o artigo que enuncia a Lei de Inércia ⁶⁵ para formas quadráticas e, em seguida, investigamos como as técnicas desenvolvidas se adequam aos problemas apresentados na abordagem da nova temática. Os textos selecionados para análise são os seguintes:

Tabela 4 – Artigos que tratam de rotação

MECÂNICA NA OBRA DE SYLVESTER		
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS
On the rotation of a rigid body about a fixed point	Philosophical Magazine 37 (1850)	440-444
Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert a déterminer les inégalités séculaires des planètes	Nouvelles Annales de Mathématiques 11 (1852)	434-440
A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares	Philosophical Magazine 4 (1852)	138-142
Théoreme sur les limites des racines réelles des équations algébriques	Nouvelles Annales de Mathématiques 12 (1853)	286-287

⁶⁵Sylvester apresenta este nome como uma analogia com a física: a law to which my view of the physical meaning of quantity of matter inclines me, upon the ground of analogy, to give the name of the Law of Inertia for Quadratic Forms, as expressing the fact of the existence of an invariable number inseparably attached to such forms. (SYLVESTER, 1852a, p. 142)

Nouvelle méthode pour trouver une limite supérieure et une limite inférieure des racines réelles d'une équation algébrique quelconque	Nouvelles Annales de Mathématiques 12 (1853)	329-336
The algebraical theory of the secular inequality determinantive equation generalised	Philosophical Magazine 6 (1853)	214-216
Sur l'involution des lignes droites dans l'Espace considérées comme des Axes de Rotation	Comptes Rendus de l'Academie des Sciences 52 (1861)	741-745
On the involution of axes of rotation	Manchester British Association Report (1861)	012-012
On an addition to Poinsot's ellipsoidal mode of representing the motion of a rigid body turning freely round a fixed point, whereby the time may be made to register itself mechanically	Proceedings of the London Mathematical Society 1 (1866)	001-002
On the motion of a rigid body acted on by no external forces	Philosophical Transactions of the Royal Society of London 156 (1866)	757-780
On the motion of a rigid body moving freely about a fixed point	Proceedings of the London Mathematical Society 15 (1866)	139-144

Fonte – Elaborada pelo autor

Apesar da organização cronológica da tabela, conduziremos as análises dos artigos através de três grupos menores: primeiro refere-se às contribuições sobre as abordagens da *Equação Secular*, o segundo, os artigos que retomam a discussão sobre raízes de polinômios; e, finalmente, o terceiro às investigações sobre mecânica de rotação. Essa sequência permite não apenas revelar a trajetória de um dos desdobramentos das técnicas da *Teoria dos Invariantes*, mas também como Sylvester percebia as possíveis contribuições da Teoria.

Seguindo a linha do final da última seção, as investigações que levaram a enun-

ciar a Lei de Inércia para formas quadráticas tiveram início em 1852 no artigo "Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert à déterminer les inégalités séculaires des planètes"(SYLVESTER, 1852d). Esse trabalho, que se inicia com uma contribuição do editor do jornal sobre as propriedades conhecidas dos produtos de determinantes da época, trata do problema de diagonalização de uma matriz simétrica. Mais especificamente, o autor apresenta uma relação entre as raízes da equação característica de uma matriz e a equação característica de sua potência. Em notação moderna temos: Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ são raízes da equação $|M - I| = 0$ então, $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_p^k$ serão raízes da equação $|M^k - I| = 0$, onde M é uma matriz quadrada simétrica e I a identidade de mesma ordem.

Essa prática foi retomada com o artigo "A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares"(SYLVESTER, 1852a), onde encontramos uma demonstração da possibilidade da redução de polinômios homogêneos à soma de quadrados positivos e negativos. Junto a isso, Sylvester apresenta sua conhecida Lei de Inércia para formas quadráticas. Essa lei afirma que o número de coeficientes positivos e negativos da forma reduzida é invariável, independentemente da substituição linear. O artigo se inicia com uma forma quadrática genérica em n variáveis, a saber:

$$(1,1)x^2 + 2(1,2)xy + (2,2)y^2 + \dots + (n,n)t^2$$

Utilizando o cálculo de autovalores, Sylvester associa o fato das raízes da função

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} (1,1) + \lambda & (1,2)\dots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) + \lambda\dots & (2,n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (n,1) & (n,2)\dots & (n,n) + \lambda \end{vmatrix}$$

serem todas reais com a possibilidade de redução da forma à soma de quadrados. Para garantir que essas raízes são sempre reais, o artigo faz referência a demonstrações feitas por Cauchy, Jacobi e Borchardt. Apesar disso, Sylvester se mostra convencido de que uma nova demonstração deste teorema será de interesse dos leitores, como pode ser observado a seguir:

mas a demonstração em anexo é, creio eu, nova; e sendo muito simples, e repousando sobre um teorema de interesse em si mesmo, e capaz, sem dúvida, de muitas outras aplicações, creio ser interessante para os leitores

matemáticos desta revista. ⁶⁶ (SYLVESTER, 1852a, p. 138, Tradução Nossa)

O outro teorema sobre o qual se repousa a demonstração de Sylvester é o que ele chama de Lei de Inércia para formas quadráticas. A prova do teorema consiste em argumentar a respeito da expressão

$$(-1)^n f(\lambda)xf(-\lambda) = (\lambda^2)^n - F(\lambda^2)^{n-1} + G(\lambda^2)^{n-2} + \dots \pm L$$

onde F, G ... L são somas de quadrados de funções lineares. Sylvester afirma, com auxílio da regra de Descartes, que as raízes desta função gerada não podem ser imaginárias e, portanto, são todas reais.

A Lei de Inércia parte do fato de que os polinômios homogêneos são redutíveis à soma de quadrados positivos e negativos e acrescenta a seguinte afirmação: dada a forma $(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^2$, ao construirmos sua redução, compactando os termos com x_1 , seguindo por x_2 até x_n vamos obter a forma:

$$A_1\zeta_1^2 + A_2\zeta_2^2 + \dots + A_{n-1}\zeta_{n-1}^2 + A_n\zeta_n^2$$

onde cada ζ é uma função linear das variáveis originais e os termos A_n são escritos da seguinte maneira: ⁶⁷

$$A_1 = |a_{11}|, A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \div |a_{11}| \dots$$

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

⁶⁶but the annexed demonstration is, I believe, new; and being very simple, and reposing upon a theorem of interest in itself, and capable no doubt of many other applications, will, I think, be interesting to the mathematical readers of this magazine

⁶⁷Este determinantes são representados por Sylvester uma notação que ele chamou de *umbral*, onde

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Aqui Sylvester faz referência a seu artigo “On The Relation Between The Minor Determinants Of Linearly Equivalent Quadratic Functions” (SYLVESTER, 1851g), publicado na *Philosophical Magazine*, I de 1851. Nesse artigo, ele apresenta uma nova notação para determinantes. Em suas próprias palavras dele:

Para que uma enunciação clara do teorema em vista possa ser possível, é necessário pressupor uma nova, mas simples, e, como a experiência provou para mim, um método de notação mais poderoso, porque natural, aplicável a todas as questões concernentes a determinantes. ⁶⁸ (SYLVESTER, 1851g, p. 295, Tradução Nossa)

Nesse artigo, Sylvester apresentou resultados sobre determinantes, utilizando a notação umbral, a qual ele descreve como poderosa por conta de sua capacidade de compactação. Essa notação é a chave para a dedução do resultado sobre a invariabilidade da quantidade de coeficientes positivos e negativos na forma reduzida de um polinômio quadrático homogêneo.

Como os novos coeficientes (apresentados acima) são resultados de permutações, Sylvester afirma que independentemente de como se organize a umbral $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ o número de variações e continuações, entre os novos coeficientes permanecerá o mesmo.

Como já apresentamos, esse resultado recebeu o nome de Lei de Inércia e representa a percepção de uma propriedade *invariante* das formas quadráticas. Esse fator nos mostra a importante relação com a nova teoria em desenvolvimento, o que explicita a conexão entre duas frentes: o problema da *Equação Secular* e a determinação dos momentos de inércia no movimento de rotação de um corpo rígido. Essas duas temáticas apresentam intersecções, como podemos observar nas próximas análises.

Além das investigações sobre as propriedades das raízes de polinômios e o teorema de Sturm, em 1853 encontramos o artigo "The algebraical theory of the secular inequality determinantive equation generalised" (SYLVESTER, 1853a), onde se apresenta uma nova versão da *Equação Secular*, utilizando-se uma sequência de determinantes como abaixo:

$$X_1 = ax + \alpha; X_2 = \begin{bmatrix} ax + \alpha & bx + \beta \\ bx + \beta & cx + \gamma \end{bmatrix}; X_3 = \begin{bmatrix} ax + \alpha & bx + \beta & dx + \delta \\ bx + \beta & cx + \gamma & ex + \epsilon \\ dx + \delta & ex + \epsilon & fx + \phi \end{bmatrix}; \dots$$

⁶⁸In order that a clear enunciation of the theorem in view may be possible, it is necessary to premise a new but simple, and, as experience has proved to me, a most powerful, because natural, method of notation applicable to all questions concerning determinants.

A partir desses objetos e com base em propriedades de determinantes de matrizes simétricas, é possível determinar que as raízes de X_i serão todas reais, de acordo com a alternância de sinal entre as raízes de X_{i-1} . É importante destacar que essa abordagem se vale da noção de continuidade que não se fez presente na utilização das funções auxiliares de Sturm, quando se utilizavam as propriedades algébricas do polinômio em questão. Além disso, essa abordagem revela que a *Equação Secular* era considerada como um tema de investigação em si, descolada do problema das desigualdades seculares que surgiu em meados do século XVIII, nos trabalhos de D'Alembert e Lagrange.

Outro resultado, um pouco mais geral, mostra que a diferença entre a quantidade de variações (m) e de continuações (n) dos sinais que surgem na sequência X_1, X_2, \dots, X_{m+n} , será o número máximo de raízes reais de X_{m+n} . Essa propriedade leva a um resultado bastante utilizado nos problemas de contato, a saber:

qualquer função quadrática homogênea, cujos coeficientes são funções lineares de θ , é convertida linearmente por substituições reais em uma soma de quadrados positivos e negativos, a maior diferença para qualquer valor de θ entre o número de quadrados positivos e o número de quadrados negativos tem por seu limite o número de raízes reais de θ no *discriminante* (também chamado de Determinante) da função dada. ⁶⁹ (SYLVESTER, 1853a, p. 215, Tradução Nossa)

O teorema apresentado na citação remete à abordagem de Sylvester para determinar as intersecções entre duas cônicas projetivas, segundo a qual número de pontos reais depende das raízes do *discriminante*, como já discutido na seção de problemas de contato. Esse fator reforça o argumento da perspectiva geométrica do matemático inglês a respeito de problemas de natureza algébrica. Outro fator importante é a propriedade de invariância do *discriminante*, descrita na citação, que demonstra o modo como as bases da teoria se conectam com problemas importantes do universo matemático do período.

Essa ideia da sucessão dos sinais faz parte de artigos que tratam da investigação de métodos sobre as propriedades de raízes de polinômios, o que inclui o artigo "Algebraical researches, containing a disquisition on Newton's Rule for the discovery of imaginary roots, in an allied Rule applicable to a particular class of equations, together with a complete invariante determination of the character of the roots of the general equation of the fifth degree" (SYLVESTER, 1864). Apesar de ser uma publicação posterior, em relação ao artigo que lida diretamente com a *Equação Secular*, esse texto contribui para as investigações

⁶⁹any homogeneous quadratic function, whose coefficients are linear functions of θ , is linearly converted by real substitutions into a sum of positive and negative squares, the greatest difference for any value of θ between the number of positive and the number of negative squares has for its limit the number of real roots of θ in the Discriminant (otherwise called the Determinant) of the given function.

sobre a natureza das raízes, ponto central das discussões, como pode ser visto no artigo em Sylvester (1853c).

Esses artigos apresentam em comum, a conexão entre teorema de Sturm e a Lei de Inércia. Essa ligação revela um aspecto importante do trabalho de Sylvester com relação às rotações. Apresentamos uma breve descrição cronológica dessas investigações, de modo que seja possível compreender a visão do autor sobre o tema.

Após o interesse manifestado nas décadas de 1830 e 1840, encontramos o texto "On the expression of the quotients which appear in the application of Sturm's method to the discovery of the real roots of an equation" de 1853 nos relatórios da BAAS, onde se apresenta a representação do quociente do teorema de Sturm como frações contínuas, além da distinção dos fatores que virão a receber o nome de *allótrios*; ainda no mesmo ano, há duas publicações no volume 12 da *Nouvelles Annales des Mathématiques*. No texto, "Théorème sur les limites des racines réelles des équations algébriques" (SYLVESTER, 1853h), o autor começa a analisar os intervalos das raízes, com a utilização de sequência de expressões lineares, como uma possibilidade de decomposição do polinômio. Em "Nouvelle méthode pour trouver une limite supérieure et une limite inférieure des racines réelles d'une équation algébrique quelconque" (SYLVESTER, 1853d), por sua vez, se constróem fórmulas que permitem tomar decisão sobre as raízes serem imaginárias ou reais, a partir das sequências X_i apresentadas nesta seção. O texto sobre as relações *syzygéticas* de Sylvester, deixa explícita a relação da Lei de Inércia.

Há uma teoria maior, da qual a de M. Sturm é um corolário, que contempla as relações das raízes de duas funções quaisquer. Isto é o que chamo de teoria das interposições, sobre a qual não proponho entrar aqui, mas que será totalmente desenvolvida em um livro de memórias quase concluído, e que em breve proponho apresentar à Royal Society, onde serão encontradas combinadas e fluindo em uma corrente, várias correntes de pensamento relacionadas a esse assunto que antes existiam desunidas, e parecendo seguir cada um curso separado.⁷⁰ (SYLVESTER, 1853e, p. 451, Tradução Nossa)

Como discutido na seção anterior, o texto sobre as relações *syzygéticas* (SYLVESTER, 1853f) representa um elo entre as abordagens da *Equação Secular* e a busca pelos *invariantes*. Essa citação mostra a percepção que Sylvester tinha dessa conexão, uma vez que procurava desenvolver uma teoria geral que permitiria uma prática comum em

⁷⁰There is a larger theory, to which M. Sturm's is a corollary, which contemplates the relations of the roots of any two functions whatever. This is what I term the theory of interpositions, upon which I do not propose here to enter, but which will be fully developed in a memoir nearly completed, and which I shortly propose to present to the Royal Society, wherein will be found combined and flowing into one current various streams of thought bearing upon this subject which had previously existed disunited, and appearing to follow each a separate course.

diferentes problemas. Note-se a sequência de artigos sobre raízes de polinômios para a publicação de "On remarkable modification of Sturm's theorem" (SYLVESTER, 1853e), a qual serve de suporte para o livro de memórias referenciado nesse trecho, o qual trata em particular da Lei de Inércia. Como prática, a utilização da sequência de funções lineares serve à teoria das interposições, que se vale da continuidade dos polinômios para estabelecer a natureza das raízes.

Após esta breve digressão sobre os trabalhos que investigam as propriedades das raízes, retornamos aos trabalhos que trataram diretamente da *Equação Secular*, Sylvester (1852d) e Sylvester (1853a). Estes dois trabalhos entram na tradição das investigações a respeito da mecânica dos movimentos de rotação ⁷¹, o que nos leva a outro desdobramento dos artigos desta seção.

Em 1850, Sylvester publica o artigo "On the rotation of a rigid body about a fixed point" (SYLVESTER, 1850e), um trabalho caracterizado por uma perspectiva geométrica (curiosamente, um dos raros que apresentam uma figura) e trata da rotação em um modelo esférico, onde pontos da superfície analisada são considerados como polos. O artigo se concentra na combinação de vários movimentos, ou seja, busca determinar uma única rotação que dê conta de operações sucessivas. Aparentemente, as rotações não seriam motivo de interesse, uma vez que o assunto só voltaria a figurar em suas publicações a partir de 1861, ano da publicação do artigo "Sur l'involution des lignes droites dans l'espace considérées comme des axes de rotation" (SYLVESTER, 1861), apresentado na Academia de Ciências de Paris. Mais uma vez através de uma abordagem geométrica, o autor trata de composição de rotações em eixos distintos. Entretanto, é possível identificar uma relação entre essa prática e os *invariantes* determinados por Cayley.

Em suas memórias sobre os *quantics*, Cayley apresenta o conceito de involução entre formas quadráticas através da análise do determinante formado pelos coeficientes envolvidos no sistema. Esse determinante caracteriza uma relação *syzygética*, o que caracteriza a ligação com os conceitos desenvolvidos na nova Teoria. No caso da investigação de Sylvester, as retas tomadas como eixos da rotação são colocadas em involução como forma de descrever o movimento.

Alguns anos depois, Sylvester se encontrava em busca de um modelo capaz de descrever os movimentos de rotação. É importante ressaltar que essa busca se relaciona diretamente com as investigações sobre órbitas, uma vez que ele alterna artigos sobre a natureza das raízes de um polinômio com movimentos de rotação. Sendo assim, compreen-

⁷¹É importante ressaltar que a *Equação Secular* era vista como uma herança das investigações sobre as desigualdades seculares dos movimentos dos planetas. Entendemos que o interesse demonstrado por Sylvester nestas questões revela seu olhar para problemas de mecânica, o que se reforça através ligação que existe com reflexões sobre momentos de inércia

der como essas noções se organizam se torna importante para revelar os desdobramentos das outras temáticas de seu interesse.

O artigo "On the motion of a rigid body acted on by no external forces" (SYLVESTER, 1866), traz uma discussão sobre o modelo de rotação estabelecido por Louis Poinsot na memória "Théorie Nouvelle de la Rotation des Corps" (POINSOT, 1851), texto em que encontramos o princípio que Sylvester utiliza em suas investigações.

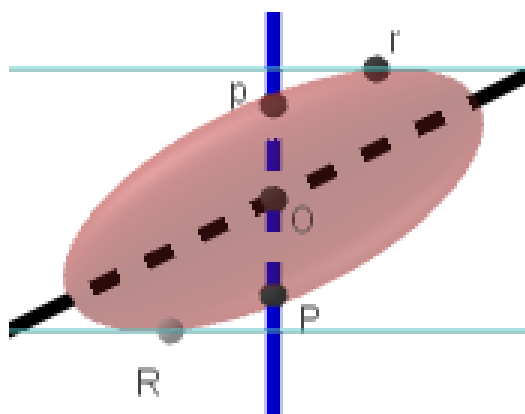
Vemos, de fato, por esta expressão que se quaisquer dois corpos tivessem os mesmos momentos de inércia A, B, C em relação aos seus eixos principais x, y, z , esses dois corpos também teriam o mesmo momento de inércia H com em relação a qualquer outra reta h fazendo os mesmos ângulos α, β, γ com os eixos principais. Quando consideramos apenas os momentos de inércia, podemos sempre desconsiderar a figura do corpo, podemos sempre supor que ela se reduz à de algum corpo mais regular, como um elipsoide, ou mesmo um simples paralelepípedo retangular, que teria os mesmos momentos principais de inércia.⁷² (POINSOT, 1851, p. 59, Tradução Nossa)

A ideia de considerar uma forma mais simples permite analisar os movimentos de rotação a partir, por exemplo, dos polinômios no caso do Elipsoide. É nesse ponto que o trabalho de Sylvester entra na discussão. O artigo que enunciou a Lei de Inércia trata diretamente da transformação de um polinômio homogêneo geral em soma de quadrados, cujos coeficientes determinam os momentos de inércia em relação aos eixos principais em três dimensões.

Ao citar o Elipsoide de Poinsot em seu artigo de 1866, Sylvester aponta uma falha do modelo, que não apresenta uma forma para determinar a velocidade do movimento, o que o próprio matemático inglês chama de "imperfeição óbvia". O cálculo da velocidade é feito através de propriedades geométricas sobre planos tangentes em formas quadráticas, considerando as transformações, *covariantes* ou *contravariantes*. Nesse ponto identificamos uma conexão com a *Teoria dos Invariantes*. Com essas considerações, o movimento é descrito a partir da seguinte imagem:

⁷²On voit, en effet, par cette expression que si deux corps quelconques avaient les mêmes moments d'inertie A, B, C par rapport à leurs axes principaux x, y, z , ces deux corps auraient aussi le même moment d'inertie H par rapport à toute autre droite h faisant les mêmes angles α, β, γ avec les axes principaux. Donc quand on ne considère que les moments d'inertie, on peut toujours faire abstraction de la figure du corps, on plutôt on peut toujours la supposer réduite à celle de quelque corps plus régulier tel qu'un ellipsoïde, ou même un simple parallépipède rectangle, qui aurait les mêmes moments principaux d'inertie.

Figura 16 – Modelo para descrição do movimento de rotação



Fonte – Elaborado pelo Autor

Nessa figura, observamos o elipsoide utilizado para descrever a rotação de um corpo rígido no entorno de seus eixos de inércia. A ideia é fazer o sólido rolar, sem deslizar, no plano inferior através do ponto de contato R. A combinação das rotações, sobre o eixo perpendicular aos planos e que passa pelo centro O (centro de massa do objeto em questão) e o eixo maior do elipsoide, descrevem a rotação sobre o eixo. Sylvester determina a velocidade do movimento ao considerar os ângulos o eixo vertical faz com os eixos principais do elipsoide modelo. De acordo com o autor, esse movimento é completamente determinado quando se define a posição e a velocidade do objeto.

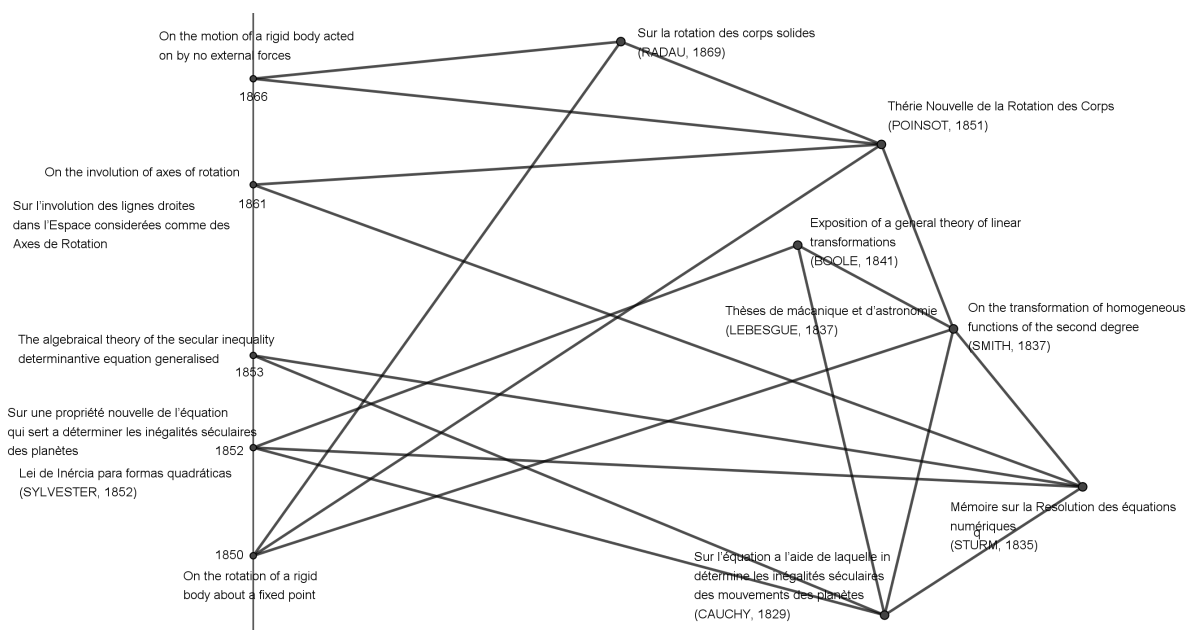
Sylvester trata o rolamento do elipsoide como uma relação entre elipsoides confocais, de modo que as transformações citadas anteriormente representam as modificações na direção dos eixos principais do objeto geométrico. A Lei de Inércia para formas quadráticas passa a ter papel central na descrição desse tipo de movimento, uma vez que sua invariância indica a possibilidade da rotação sem deformar o objeto em si.

Diferentemente do desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*, o qual se caracterizou pelo pioneirismo dos matemáticos britânicos, essa temática apresentava um interesse anterior às contribuições do Reino Unido no continente. É importante compreender quais abordagens ou investigações se conectam a esses trabalhos sobre rotação. A chave para essa resposta se encontra, como o problema do elipsoide mostra, na Lei de Inércia, a qual é elaborada no contexto das transformações, cuja matriz associada é diagonalizável.

Nesse sentido, é possível citar alguns trabalhos que apresentam interseções com a obra de Sylvester no que diz respeito a essa temática, a saber: "Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes"(CAUCHY, 1829); "Thèses de mécanique et d'astronomie"(LEBESGUE, 1837); "On the transformation of homogeneous functions of the second degree"(SMITH, 1839); e o próprio texto fundador

da Teoria dos Invariantes (BOOLE, 1841).⁷³

Figura 17 – Conexões entre as investigações sobre rotação



Fonte – Elaborado pelo Autor

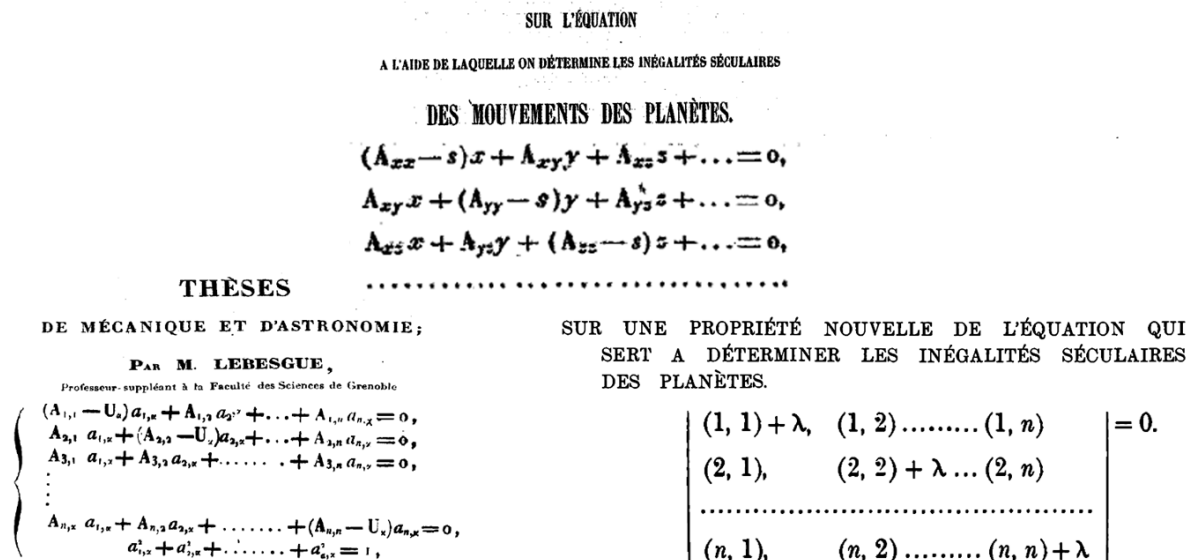
O primeiro elemento que podemos identificar na rede é a distinção entre as duas problemáticas que apresentamos nesta seção. Por um lado, os movimentos de rotação de corpos rígidos revelam a participação de Sylvester através da aplicação de uma nova abordagem sobre o modelo de Poinsot. Por outro lado, encontramos um problema que circulou o continente: as desigualdades seculares. Outro fator importante é que tais problemáticas se mostram conectadas pela obra do matemático inglês, uma vez que ambas mostram uma relação próxima com a Lei de Inércia para formas quadráticas: a primeira, devido à determinação dos momentos de inércia para os movimentos de rotação; e a segunda, em função da determinação da natureza das raízes da equação característica que, por sua vez, é necessária para a compreensão das órbitas dos planetas.

Sobre os textos que se ligam à obra analisada, ressaltamos a vertente mecânica do trabalho desenvolvido por Boole, que parte da necessidade de estudar as transformações lineares, no qual podemos encontrar uma referência direta à mecânica analítica de Lagrange e, por sua vez, a inspiração inicial de Boole (1841). Além disso, os textos de Lebesgue e Cauchy são referências para o irlandês. É importante destacar que esses trabalhos lidam com, em termos modernos, o problema da diagonalização da matriz que representa uma forma quadrática, ou a transformação do polinômio homogêneo de grau 2 em soma de

⁷³A trajetória e as temáticas que envolvem estes trabalhos são diretamente ligadas ao desenvolvimento das abordagens da *Equação Secular* e das investigações sobre o problema das desigualdades dos movimentos seculares dos planetas. Apresentaremos mais detalhes no capítulo 5.

quadrados positivos e negativos, de forma muito semelhante à realizada por Sylvester, como podemos ver na imagem a seguir:

Figura 18 – As abordagens sobre a equação que ajuda no problema das desigualdades seculares



Fonte – Elaborado pelo Autor

Note-se, apesar da diferença da notação, os três autores se envolveram com o mesmo problema, do ponto de vista matemático. Além disso, esses artigos apresentam contribuições importantes para a resolução da *Equação Secular*. Cauchy apresenta a caracterização das cônicas a partir das transformações; Lebesgue, por sua vez, trata de questões diretamente ligadas à órbita dos planetas, o que vai ao encontro de outros trabalhos publicados por Sylvester nesse período, como é o caso do "The algebraical theory of the secular inequality determinative equation generalised" (SYLVESTER, 1853a).

Outra conexão importante é percebida no texto de Smith. Assim como a obra de Sylvester sobre a temática desta seção, esse artigo apresenta relação tanto com as questões postas sobre rotação de corpos rígidos como sobre a transformação dos polinômios homogêneos em soma de quadrados.

Uma função homogênea, de segundo grau, de qualquer número de variáveis, sempre pode ser transformada em outra que conterà apenas os quadrados das novas variáveis. O método de fazer isso será encontrado em um artigo de M. Lebesgue, no Journal de Mathématiques de Liouville, tom. ii. pág. 337. Ocorre com frequência o caso em que as variáveis são em número de três e a transformação equivale a uma mudança nos eixos de coordenadas. Apresenta-se na redução da equação a superfícies de segunda ordem; e as propriedades dos eixos principais de rotação, dos

eixos de elasticidade de um cristal etc. pode ser mostrado para depender da mesma transformação.⁷⁴ (SMITH, 1839, p. 299, Tradução Nossa)

Observe que Smith reconhece as várias aplicações que emergem a partir do problema da redução do polinômio. Podemos identificar, através do estabelecimento dos momentos de inércia, a ligação entre a rotação de corpos rígidos e as órbitas de planetas, que se revela através da referência ao trabalho de Lebesgue. Por fim, o surgimento do artigo de Boole nos mostra que o estudo sobre as transformações lineares foi um elo importantíssimo entre problemas de mecânica.

Conclusão

É fato que a obra de Sylvester apresenta mais artigos do que os que foram discutidos neste capítulo. Entretanto, as práticas acabam por se repetir e a seleção que fizemos se justifica a partir do momento que os textos analisados apresentam um panorama capaz de demonstrar o papel de suas ideias na formação da *Comunidade Britânica dos Invariantes*.

Em um cenário onde essa comunidade não era bem definida, o surgimento da *Teoria dos Invariantes* mostra potencial de aglutinação, uma vez que é capaz de conectar assuntos inicialmente distintos e descolados entre si. Neste capítulo, apresentamos uma breve retomada dessas conexões, como forma de elucidar o papel de Sylvester, de modo que se torna possível balizar, a partir das publicações do pesquisador, as análises dos trabalhos produzidos por outros matemáticos que tenham orbitado ao redor dos assuntos aqui apresentados.

Após as reflexões sobre as temáticas apresentadas no capítulo, podemos perceber que os artigos se encaixam nos assuntos vigentes e torna relevante a produção de conhecimentos britânica aos olhos do continente. É importante notar que, diferentemente das iniciativas dos matemáticos britânicos do primeiro terço do século XIX que buscaram se adequar às discussões que ocorriam em outros países europeus, as contribuições de Sylvester participam de investigações que surgem no Reino Unido. Essa é uma característica central no processo de formação de uma comunidade de práticas que viria a ser reconhecida na Europa.

⁷⁴A homogeneous function, of the second degree, of any number of variables, may always be transformed into another which shall contain only the squares of the new variables. The method of doing this will be found in a paper by M. Lebesgue, in Liouville's Journal de Mathématiques, tom. ii. p. 337. The case in which the variables are three in number, and the transformation amounts to a change in the axes of coordinates, frequently occurs. It presents itself in the reduction of the equation to surfaces of the second order ; and the properties of principal axes of rotation, of the axes of elasticity of a crystal, etc. may be shown to depend upon the same transformation.

Não eram novidades a ideia de representar lugares geométricos com o auxílio de expressões algébricas e o estudo sobre técnicas de eliminação de variáveis. Entretanto, ao olhar para os trabalhos de Sylvester, notamos uma abordagem especificamente algébrica que se concentra nos coeficientes e nas propriedades das raízes, um estilo que evita a noção de continuidade da reta real.

Esse fator pode ser observado na seção sobre Teoria de Eliminação, onde se evidencia que o autor se concentrou em explicitar fórmulas de resultantes através dos coeficientes dos polinômios, com inspiração na obra de Bézout. Além disso, o matemático inglês percebe a generalidade do teorema do francês e expande as técnicas de eliminação para polinômios de qualquer número de variáveis. O famoso teorema de Sturm que tem uma essência analítica, como destaca Sinaceur (1991), recebe tratamento algébrico nos artigos que analisamos. Apesar de lidar com ideias que não são originalmente britânicas, Sylvester trouxe uma abordagem original para os problemas da temática.

Do ponto de vista das práticas, encontramos uma ressignificação do problema de contatos de cônicas projetivas para uma interpretação geral sobre as propriedades de eliminação. Essa mudança de perspectiva, inspirada na obra de Plücker em conjunto com a aplicação dos determinantes, permitiu ao autor lidar com problemas geométricos em n dimensões, uma vez que o matemático passou a olhar para a eliminação com um novo pano de fundo, como vimos em Sylvester (1850b) e Sylvester (1850a).

Retornando aos teoremas de Bézout e Sturm, as duas abordagens realizadas revelam uma faceta social do modo como Sylvester olha para a produção de matemática em um período em que o trabalho com a disciplina não era profissionalizado. Quando olhamos para suas produções à luz do trabalho de Parshall e Seneta (1997), percebemos que o matemático inglês se preocupava com a adequação de suas contribuições à matemática produzida no continente, uma vez que o próprio Sylvester declara sua vontade de viver da pesquisa em matemática. É importante destacar suas leituras sobre o trabalho de Plücker, que permitem olhar para a geometria em dimensões superiores às sensíveis.

Os problemas de contato trazem as principais contribuições do autor. A ideia do uso do *discriminante* como ferramenta para determinar pontos críticos de um sistema de cônicas, se mostra uma importante base para as ideias difundidas por Sylvester. Nesse contexto, um artigo como "On a New Class of Theorems in Elimination Between Quadratic Functions" (SYLVESTER, 1850b), que apresenta o início dos trabalhos que ampliam a perspectiva da geometria produzida em solo britânico, revela a ponte que fez com que a *Teoria dos Invariantes* ganhasse credibilidade no Reino Unido.

Outras contribuições importantes também trataram de problemas com fundo geométrico: a descrição da reta com setores que dividem as cônicas imaginárias e reais,

uma ideia que depende dos coeficientes dos polinômios; e o desenvolvimento de uma teoria sobre determinantes e menores complementares. Todas essas práticas têm uma participação importante de Sylvester, porém é indiscutível que seu real protagonismo reside nas investigações sobre as propriedades das formas associadas.

Além disso, destacamos a elaboração de um vocabulário, sendo que alguns termos ganharam repercussão e outros não. As práticas que envolvem as investigações sobre formas algébricas que se modificam, ou não, de acordo com as transformações lineares de polinômios homogêneos, identificam a matemática produzida por Sylvester e pelos matemáticos que compartilharam de seus interesses. Nos artigos que tratam destas questões, encontramos o elo que liga todas as temáticas. No "Sketch of a memoir on elimination, transformation and canonical forms"(SYLVESTER, 1851h), vemos referências à eliminação com base em um pano de fundo geométrico, além do ponto central dos artigos que tratam da *Teoria dos Invariantes*, que são as discussões sobre os operadores que determinam quais transformações mantêm formas algébricas invariáveis, a menos da potência do determinante da matriz associada à transformação.

Nesse contexto, junto a termos consagrados, como *covariância* e *contravariância*, a Lei de Inércia para formas quadráticas como uma retomada das reflexões sobre o teorema de Sturm e uma conexão importante com a equação que ajuda no problema das desigualdades seculares das órbitas dos planetas. Sobre isso, destacamos as iniciativas que nosso personagem de pesquisa teve, no intuito de aumentar o alcance de seu trabalho com os *invariantes*. Fator esse que se materializa através de correspondências com matemáticos do continente e da publicação dos artigos sobre os cálculos das formas.

Após essa rápida retrospectiva das ideias que surgiram na obra de Sylvester, podemos afirmar que seu protagonismo como produtor de conhecimento matemático no Reino Unido apresenta, pelo menos de um ponto de vista inicial, fases bem definidas: entre 1837 e 1850, quando o matemático busca se colocar em relação à matemática produzida na Europa; e de 1850 em diante, quando apresenta uma produção original, o que o coloca em uma posição de relevância na comunidade.

Apesar disso, essas fases não são dissociáveis, uma vez que carregam características pessoais do personagem e, ao mesmo tempo, a busca por um espaço em um universo de pesquisa que, como mostramos no primeiro capítulo, não existia na primeira metade do século XIX. Esse fator levanta um questionamento muito importante para a compreensão da *Comunidade britânica dos Invariantes*: quais são os outros personagens que compartilharam da mesma perspectiva que Sylvester? A pergunta se mostra relevante, a partir do momento em que a *Teoria dos Invariantes* se torna parte da identidade da matemática britânica.

Desta forma, investigar as produções de outros matemáticos, à luz das temáticas que

emergem das análises apresentadas neste capítulo, se mostra um movimento natural para compreender processo de formação de uma comunidade britânica de práticas matemáticas. Considerando a descrição apresentada por Wenger-Trayner e Wenger-Trayner (2015), essas categorias representam o domínio, ou seja, o conjunto de interesses comuns dos pesquisadores que trabalhavam com a disciplina. As análises que realizaremos no próximo capítulo estarão classificadas nestas temáticas: Teoria de Eliminação, Problemas de Contato, Transformações e Rotações. Além destas, optamos por acrescentar mais duas categorias: Locus de Formas Algébricas e Formas Canônicas. Estas duas últimas surgem a partir das circunstâncias internas aos artigos que analisamos. A temática de locus é diretamente ligada às inspirações do trabalho de Plücker e foi parte fundamental dos artigos sobre problemas de contato. Já a categoria sobre formas canônicas, surge nos estudos sobre rotação e *Equação Secular*.

Por fim, essas seis categorias serão a base da organização dos artigos selecionados para as análises a respeito da identidade da comunidade britânica de práticas matemáticas e a forma como ela se relaciona com as produções do continente europeu. Este é mais um aspecto pelo qual é possível compreender o desenvolvimento da pesquisa em matemática no Reino Unido. Por fim, considerando todos os fatores apresentados, relacionados ao contexto social, do ponto de vista de nosso personagem de pesquisa, passamos ao aspecto da produção no entorno de seus interesses.

4 A COMUNIDADE DE PRÁTICAS: PERSONAGENS NO ENTORNO DA *TEORIA DOS INVARIANTES*

Como apresentamos anteriormente, a noção de comunidade de práticas é constituída por três componentes: a comunidade em si, um grupo específico de pessoas; o domínio, um assunto que faz parte de seus interesses em comum do grupo; e as práticas, um conjunto de técnicas, métodos e conceitos que são compartilhados pelos participantes. Entendemos que o compartilhamento dessas práticas revela o papel dos pesquisadores que interagem entre si, de modo que é possível identificar os personagens com maior relevância para a formação da identidade do grupo.

No capítulo anterior, apresentamos características das práticas difundidas por Sylvester no domínio dos polinômios homogêneos ao longo de suas publicações no recorte temporal que definimos para esta tese. Nesse contexto, destacam-se duas partes que se relacionam através das práticas utilizadas pelo matemático inglês: 1) as investigações que envolvem os polinômios homogêneos, que incluem os estudos sobre curvas, superfícies e as propriedades de seus contatos, além do desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*; 2) os movimentos de rotação, investigados a partir do conceito de momentos de inércia e da redução de polinômios homogêneos para soma de quadrados, que também incluem a noção de invariância e as práticas que se relacionam com a *Equação Secular*, o que se liga aos interesses sobre as desigualdades seculares dos movimentos dos planetas.

Este capítulo se destina a apresentar os personagens que compartilharam métodos e conceitos com Sylvester entre 1837 e 1865. De forma mais direta, estamos interessados nos matemáticos britânicos, que tenham publicado artigos que lidaram com polinômios homogêneos e/ou compartilharam práticas que foram discutidas no último capítulo. Concentramo-nos nos pesquisadores em si e em seus interesses de pesquisa. Com essa representação, foi possível estabelecer um panorama geográfico da *Comunidade britânica dos Invariantes* no interior dos jornais do Reino Unido que lidam com matemática, sejam eles especializados ou não.

A expressão “panorama geográfico” é utilizada para indicar os papéis sociais de cada um dos personagens dentro da comunidade que estamos descrevendo. Quem são os principais influenciadores, quem são os personagens com maior volume de contatos com o continente, quem contribui durante mais tempo e quem são os personagens que

estabelecem mais contato entre si. Do ponto de vista apresentado por Wenger (1999), as interações que destacamos neste capítulo são reflexos do processo de negociação de significados. Nesse sentido, os autores com maior volume de interações se mostram os principais responsáveis pela identidade da comunidade, uma vez que estão envolvidos no maior número de processos de ressignificações. Esses fatores também nos permitiram compreender o nível de profundidade das contribuições de Sylvester.

A partir das leituras dos textos, destacamos dois grupos de pesquisadores que se revelam no panorama geográfico dos autores que surgem. O primeiro grupo lida com os polinômios homogêneos e é diretamente ligado ao desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. O segundo lida com questões que envolvem mecânica e está indiretamente ligado à nova Teoria britânica. A relação entre os interesses dos dois grupos, que inicialmente seriam distintos, reforça a importância da busca pelos *invariantes* como um evento que contribui de maneira significativa para a credibilidade da comunidade de práticas que se debruçou sobre as temáticas que lidam com polinômios homogêneos, uma vez esses desdobramentos tocam assuntos de interesse dos matemáticos do continente. O fato de a *Teoria dos Invariantes* ser o elo que conecta os dois grupos nos leva à necessidade de analisar os artigos relacionados ao primeiro grupo.

Identificamos os autores a partir da seleção de textos que lidam com polinômios homogêneos nos seguintes veículos de divulgação de produções da área no Reino Unido: Os *Transactions e Proceedings* da Royal Society, *Philosophical Magazine*, *Cambridge Mathematical Journal*, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* e *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*. Lembramos que o período determinado para o levantamento do *corpus* de textos foi de 1837 a 1865, o que corresponde ao surgimento do primeiro jornal especializado em matemática no Reino Unido e a fundação da London Mathematical Society.

Entendemos que essa análise das interações tem a função de revelar os aspectos de um dos descritores propostos por Wenger-Trayner e Wenger-Trayner (2015): a comunidade. Destacamos que este e os próximos capítulos seguem as seguintes etapas de organização:

1. Inicialmente avaliamos as características gerais dos jornais como: fundadores, editores, existência de seções e, principalmente, número de artigos que lidam com polinômios homogêneos. Essa primeira avaliação nos permite compreender o nível de adesão da comunidade nos jornais.
2. Em seguida identificamos os autores que publicaram sobre as temáticas apontadas no último capítulo. Essa etapa nos permite conhecer os personagens da comunidade e compreender como o espaço de compartilhamento das técnicas e conceitos se formou através de interesses em comum.

3. Por fim, entramos nos artigos selecionados, de modo que foi possível identificar as temáticas desenvolvidas no período. Essa etapa possibilita estabelecer redes que demonstram os desdobramentos no entorno da *Teoria dos Invariantes*.

Neste capítulo, tratamos apenas dos dois primeiros itens, deixando o último para os próximos. Entendemos que esta separação auxilia na compreensão do processo de formação da comunidade de práticas que estamos estudando, uma vez que nos concentramos nas relações entre os autores e relações entre os textos publicados por eles. Essas duas abordagens nos permitem estabelecer uma imagem que leva em conta aspectos sociais do panorama geográfico e aspectos sobre a forma como o conteúdo matemático foi produzido em solo britânico.

A organização deste capítulo apresenta a evolução do núcleo de pesquisadores que se forma a partir dos trabalhos publicados nas revistas britânicas que lidaram com matemática entre 1837 e 1865. Nosso questionamento aqui será: quem são os personagens que publicam trabalhos sobre as temáticas e como eles se comunicam entre si? Para responder a essa pergunta, estabelecemos o perfil de alguns personagens, de modo que foi possível descrever o papel dos principais matemáticos que participaram da *Comunidade britânica dos Invariantes*.

Além disso, utilizamos os jornais especializados de Cambridge como ponto inicial das investigações, o que significa que tais periódicos foram determinantes para estabelecer os intervalos históricos de nossas análises. Isto se deve ao fato destes serem os únicos jornais britânicos especializados em matemática da época, o que traz um caráter aglutinador para as revistas que foram produzidas na Universidade. Como Despeaux (2002) e Crilly (2004) destacam, é a partir do surgimento do *Cambridge Mathematical Journal*, seguido pelo *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* e herdado pelo *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* que a produção de pesquisas matemáticas ganha espaço no Reino Unido, o que justifica nossa decisão de conduzir as análises através da evolução desses documentos.

Todos os que estão interessados na causa da Ciência Matemática estão cientes da grande e benéfica influência que foi trazida para o estudo da matemática neste país pela publicação de Cambridge e, posteriormente, das Revistas Matemáticas de Cambridge e Dublin, que, se não se pode dizer que criaram a atual escola de matemáticos ingleses, podem reivindicar ter fornecido a arena na qual puderam medir sua força e evidenciar suas capacidades. Causas, sobre a natureza das quais não é necessário insistir aqui, tendo recentemente levado à desistência do último destes Diários, tornou-se uma questão e um assunto de ansiedade entre vários de seus antigos colaboradores e apoiadores como o seu lugar era ser fornecido. ¹ (SYLVESTER; FERRERS, 1857, p. III, Tradução Nossa)

¹ All who are interested in the cause of Mathematical Science are aware of the great and beneficial influence which has been brought to bear upon the study of mathematics in this country by the publication of the Cambridge and subsequently of the Cambridge and Dublin Mathematical Journals, which, if they cannot

Esse trecho do editorial do primeiro volume *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* (QJPAM) mostra que Sylvester entendia os periódicos especializados como um espaço importante para atender à demanda que existia no Reino Unido, desde o surgimento da Analytical Society, nas palavras dele, "uma arena onde é possível apresentar suas capacidades". Sob esse ponto de vista, o conceito de comunidade descrito por Wenger-Trayner e Wenger-Trayner (2015) se vê contemplado pelo fato de os periódicos de matemática serem encarados como espaços de compartilhamento de interesses (domínio e práticas).

Dado este contexto inicial, torna-se importante conhecer o perfil desses veículos de comunicação, tanto os especializados em matemática quanto os gerais. Com esse objetivo, apresentamos uma breve descrição dos periódicos não especializados e, em seguida passamos aos jornais da base de análise.

4.1 Os periódicos não especializados que lidaram com matemática: características gerais

Antes do surgimento dos jornais especializados, os matemáticos se viam obrigados a publicar em outros meios de divulgação do conhecimento. Esse fator é reflexo das restrições que apontamos no capítulo 2, as quais dificultavam a possibilidade de profissionalização dos matemáticos do período.

Nesta seção descrevemos algumas características dos periódicos que existiram antes do surgimento do CMJ em 1837. Destacamos os editores, os critérios de avaliação dos artigos que eram submetidos, o público-alvo de cada um dos jornais e a natureza dos textos que eram publicados. Além disso, como Despeaux (2002) relata, apresentamos informações sobre a participação dos matemáticos nesses veículos de divulgação.

4.1.1 As *Philosophical Transactions* das Sociedades científicas

Essas revistas eram vinculadas às sociedades científicas, sendo a primeira versão fundada 1665 pela Royal Society of London, tendo sido seguida pelas Royal Society of Edinburgh e Royal Irish Academy mais de um século depois, por volta da década de 1780. A seleção de artigos que poderiam ser publicados era responsabilidade de comitês, cujos membros eram os oficiais e os vice-presidentes (atuais ou anteriores). Apesar disso, um

strictly be said to have created the present school of English Mathematicians, may fairly lay claim to have provided the arena in which they have been able to measure their strength and give evidence of their capabilities. Causes, upon the nature of which it is not necessary here to insist, having recently led to the discontinuance of the latter of these Journals, it became a question and a subject of anxiety among several of its former contributors and supporters how its place was to be supplied.

membro da sociedade poderia submeter um artigo e os membros dos comitês podiam convidar outros membros com qualificação para avaliar os trabalhos, caso fosse necessário.

Esses critérios sofreram leve modificação na primeira metade do século XIX, uma vez que se passou a exigir um relatório de, no mínimo, dois membros do conselho para que o trabalho fosse apreciado para publicação. Essa ação se mostrou importante para garantir uma avaliação mais próxima do que se considerava justo em relação aos trabalhos apresentados às sociedades científicas.

Mas sendo a Sociedade nos últimos anos grandemente ampliada e suas comunicações mais numerosas, foi considerado aconselhável que um Comitê de seus membros fosse nomeado, para reconsiderar os documentos lidos diante deles e selecionar entre eles aqueles que julgassem mais adequados para publicação nas futuras Transações; o que foi feito em 26 de março de 1752. E os motivos de sua escolha são, e continuarão a ser, a importância e singularidade dos assuntos, ou a maneira vantajosa de tratá-los; sem pretender responder pela certeza dos factos, ou justeza dos raciocínios, contidos nos diversos trabalhos assim publicados, que devem ainda recair no crédito ou julgamento dos respectivos autores.² (RSL, 1851, prefácio, Tradução Nossa)

Esse trecho do prefácio do jornal de 1837 mostra que o acúmulo de autores interessados em divulgar suas pesquisas exigia mais espaços para publicações. Esse cenário mostra que existia uma intensa disputa entre as diferentes áreas do conhecimento. Apesar de a avaliação ter melhorado com a exigência de relatórios de membros que se interessavam pelo assunto do artigo em questão, os trabalhos que tratavam de matemática enfrentavam dificuldades para conseguir espaço para suas publicações.

De acordo com Despeaux (2002, p. 36), entre 1800 e 1900 a RSL contou apenas com 19% dos membros de seu comitê ligados à matemática, a RSE com 22% e a RIA com 44%.³ Em geral, 24% dos membros dos comitês das três sociedades eram ligados à matemática ao longo do século XIX. Essas estatísticas evidenciam que, apesar do espaço restrito para as publicações de pesquisas sobre matemática, as quais registraram 13,5% das páginas RSL, 13,1% das páginas da RSE e expressivos 36,8% das páginas da RIA, o número de matemáticos em cargos de liderança das sociedades era significativo, o que nos leva à conclusão sobre a necessidade do surgimento de jornais que se dedicassem exclusivamente ao tema.

² But the Society being of late years greatly enlarged, and their communications more numerous, it was thought advisable that a Committee of their members should be appointed, to reconsider the papers read before them, and select out of them such as they should judge most proper for publication in the future Transactions; which was accordingly done upon the 26th of March 1752. And the grounds of their choice are, and will continue to be, the importance and singularity of the subjects, or the advantageous manner of treating them ; without pretending to answer for the certainty of the facts, or propriety of the reasonings, contained in the several papers so published, which must still rest on the credit or judgement of their respective authors.

³ Esses percentuais foram calculados a partir da tabela desenvolvida por Despeaux (2002).

Sobre o aspecto concreto das revistas, elas se caracterizaram pelas publicações das memórias dos cientistas. Ou seja, a maioria dos artigos lidava com pesquisa já bem estabelecidas. As *Transactions* eram divididas em duas partes, lançadas no início e no meio do ano. Cabe destacar que a RSL foi a sociedade que manteve maior regularidade de publicação, tendo tiragens anuais, fato que não se repetiu nos outros periódicos ligados às sociedades científicas do Reino Unido.

É importante destacar a iniciativa da publicação dos *Proceedings*⁴, periódicos que se destinavam a comunicações de pesquisas que não conseguiram espaço nas *Transactions*. Como Despeaux (2002) aponta, além de não conseguir publicar seu trabalho, o autor não aceito na *Transactions* também perdia o documento original, uma vez que submissão era condicionada à entrega dele, que não era devolvido. Apesar disso, o espaço restrito nas páginas do jornal não representou um aumento nos personagens que escreviam sobre matemática.

4.1.2 O Jornal Sociedade Astronômica e o Relatório da Associação Britânica para o Avanço da Ciência

Além dos jornais mantidos pelas sociedades científicas como a RSL, RIA e RSE, os matemáticos usaram as publicações em periódicos para divulgar suas ideias. Na Inglaterra do século XIX, o processo de desenvolvimento dos jornais seguiu as etapas descritas a seguir:

primeiro, há o Anuário ou outro periódico, contendo ao final quebra-cabeças, problemas para solução etc., as melhores soluções e os nomes daqueles que enviaram as soluções corretas constam no número seguinte; por fim, são complementados por artigos curtos sobre assuntos específicos - frequentemente sugeridos pelos problemas - pelos principais colaboradores. O próximo passo é a revista matemática, composta por duas partes, uma contendo artigos originais, e outra bem distinta contendo um número limitado de problemas e soluções. Finalmente, temos a revista estritamente científica que não difere em nenhum aspecto essencial das *Transações* de uma sociedade; e não é necessário observar que, devido à extensão de muitas das fórmulas, um jornal in-quarto é preferível a um de tamanho in-oitavo.⁵ (GLAISHER, 1880, p. 74, Tradução Nossa)

⁴No caso da RSL, esse jornal contou com outros títulos: *Abstracts of the Papers Printed in the Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, de 1832 a 1851; *Abstracts of the Papers Communicated to the Royal Society*, de 1851 a 1856; e, finalmente, *Proceedings of the Royal Society*, a partir de 1856

⁵first, there is the Annual or other periodical, containing at the end puzzles, problems for solution, etc., the best solutions and the names of those who sent in correct solutions being given in the following number; at length these are supplemented by short articles on particular subjects-frequently suggested by the problems-by the leading contributors. The next step is the mathematical journal, consisting of two parts, the one containing original papers, and the other-quite distinct-containing a limited number of problems and solutions. Finally we have the strictly scientific journal differing in no essential respect from the *Transactions* of a society; and, it is scarcely necessary to remark that, on account of the length of many of the formulae, a quarto journal is preferable to one of octavo size.

Essa descrição se refere ao caminho trilhado pelos periódicos nas diferentes nações. No caso britânico, podemos identificar essas passagens na necessidade de espaços para publicação de artigos matemáticos, com movimentos como o da Analytical Society, a participação de matemáticos no BAAS até a fundação dos jornais especializados a partir da década de 1830. Observamos que, na opinião de Glaisher, um periódico com características próximas às *Transactions* seria um estágio final da constituição de um meio de comunicação científica.

Seguindo essa sequência, podemos destacar o *The Ladies' Diary* (1704 – 1840), que a partir de 1707 alterou a maioria de suas questões domésticas por questões de matemática e, a partir 1773, muitos dos editores e colaboradores eram ligados à equipe de matemática Royal Military Academy of Woolwich (FLOOD et al., 2011). Esse almanaque contou com sua versão masculina a partir de 1741, o *The Gentlemen's Diary* (1741 – 1840), que em 1840 se fundiu com o *Ladies* e funcionou até 1871. Esses jornais se caracterizavam pela publicação de problemas corriqueiros de matemática e suas respectivas soluções, o que era entendido como um problema. Para Glaisher (1880), embora seja compreensível, a publicação desse tipo atividade matemática ocupava o espaço de pesquisas originais.

O movimento de publicar resultados em periódicos cada vez mais próximos da produção matemática era natural. Esse era o caso do *Monthly* da Royal Astronomical Society (RAS). Ao compararmos esse jornal com as *Transactions*, o primeiro fator que chama atenção é o maior número de matemáticos em cargo de liderança, sendo 29% dos membros. Além disso, esse periódico ocupou 9,4% das páginas com matemática no período entre 1827 (ano de fundação) e 1867 (DESPEAUX, 2002). Entretanto, outros meios de divulgação ainda se faziam necessários, como foi o caso do Relatório da *British Association for Advanced of the Science* (BAAS).

Da mesma forma, é fácil conceber, por um lado, quanta vantagem pode ser obtida para os debates geológicos da presença de um matemático sóbrio e rigoroso; e como, por outro lado, o analista abstrato e o geômetra podem ter seus cálculos restringidos ou promovidos pela escuta do detalhe dos fatos, que podem dar àqueles que cultivam as ciências mais diretamente dependentes da observação e do experimento. ⁶ (MEETING, 1831, p. 29, Tradução Nossa)

Nesse trecho do prefácio do primeiro volume do relatório da BAAS, podemos identificar um primeiro olhar para a produção de conhecimento matemático. Apesar

⁶In like manner it is easy to conceive on the one hand, how much advantage might be derived to geological debates from the presence of a sober and rigorous mathematician; and how, on the other hand, the abstract analyst and geometer might have his calculations restricted or promoted by listening to the detail of facts, which those could give him who cultivate the sciences more directly dependent on observation and experiment.

do fato de, inicialmente, perceberem a matemática como uma ferramenta de outras áreas, o espaço para o matemático "puro" aparentemente é levado em consideração nessa apresentação. De fato, esse periódico traz uma seção de matemática. Outra característica que distinguia a BAAS das sociedades reais eram as reuniões itinerantes, o que possibilitava o surgimento de interessados em ciências e, conseqüentemente, em matemática.

Um fator importante para destacar é a presença dos matemáticos reformistas Peacock, Whewell e Babbage como colaboradores do periódico. Além destes, os amigos Sylvester e Cayley também figuraram como membros e apresentaram suas contribuições. As publicações destes, e de outros nomes, aparecem na seção A do relatório. Os periódicos não especializados serviram como um meio de comunicação de pesquisas matemáticas, embora não tenham garantido um espaço que atendesse a toda a demanda. Logicamente, essa demanda não era por pessoas, mas sim por pesquisas e interesses em temas matemáticos, no sentido do que os reformistas apontavam. Esse cenário só se tornou possível com os jornais especializados.

4.2 Os periódicos especializados na Inglaterra

De acordo com Flood et al. (2011), os jornais especializados em temas matemáticos britânicos foram estabelecidos a partir do ano de 1837 com a fundação do *Cambridge Mathematical Journal*. No entanto, existiram outras tentativas que merecem destaque nesta tese, uma vez que a comunicação através de publicação de artigos nos auxiliará na percepção do papel central dos periódicos especializados no processo de desenvolvimento embrionário da comunidade de pesquisa em matemática britânica.

Em 1795, surge o *Leybourne's Mathematical Repository*, que apesar de ainda manter a estrutura de apresentar problemas para serem resolvidos, incluiu trabalhos originais e algumas traduções. No entanto, esse jornal também não ganhou muita projeção, devido à falta de apoio financeiro. Essa realidade só teve chance de ser mudada com os periódicos apoiados por universidades.

Nessa linha, o *Cambridge Mathematical Journal* (CMJ) surge como a primeira manifestação de uma revista com esse objetivo. De acordo com Crilly (2004) o Reino Unido passou por um período de torpor após os trabalhos de Newton e renasceu no século XIX através de pioneiros, dentre os quais Sylvester estava presente. O ano de 1837 representa um marco com a fundação do CMJ. Esse periódico começou a ser discutido um ano antes quando Archibald Smith (1813 – 1872) e Duncan Gregory decidiram fundar um jornal que pudesse explorar questões para além dos exames que povoavam a vida em Cambridge. O jornal ainda contou com um terceiro fundador, Samuel S. Greatheed. No entanto, o principal condutor dos trabalhos foi Gregory. É possível notar esse aceno a uma mudança

para uma nova era no editorial do jornal.

Tem sido lamentável para muitas pessoas, que não existisse um canal adequado, nem nesta universidade nem em nenhum outro lugar deste país, para a publicação de artigos sobre assuntos matemáticos, que não pareçam ter importância suficiente para serem inseridos no *Transactions* de qualquer uma das Sociedades Científicas; os dois periódicos filosóficos que existem têm suas páginas geralmente dedicadas a assuntos físicos.⁷ (GREGORY; SMITH, 1837–1839, prefácio, Tradução Nossa)

Nesse trecho podemos observar que existia uma demanda por revistas que tratassem exclusivamente de matemática e que esta, não é comportada nas revistas gerais que já existiam na época como a *Philosophical Magazine* e a *Transactions* da Royal Society.

Nesse lugar em particular, onde a matemática é tão geralmente cultivada, seria de esperar que houvesse uma abertura para um trabalho exclusivamente dedicado àquela ciência que não desperta muito interesse no mundo em geral. Pensamos que não há dúvida de que aqui existem muitas pessoas capazes e dispostas a comunicar muita coisa valiosa a um periódico matemático, enquanto a própria existência de tal obra provavelmente atrairá outras pessoas e as fará direcionar sua atenção. atenção em algum grau à pesquisa original. Nosso objetivo principal, então, é fornecer um meio de publicação para artigos originais.⁸ (GREGORY; SMITH, 1837–1839, prefácio, Tradução Nossa)

Nesse trecho, podemos notar que se esperava que os alunos de Cambridge fossem os principais colaboradores do jornal. Apesar da ideia de valorizar trabalhos originais (como pode ser visto no fim da citação), o CMJ refletiu bastante o currículo do Tripos Mathematical Exam.

Este tradicional evento teve início em 1725 como um exame de proficiência matemática. No entanto, foi oficialmente reconhecido pela universidade apenas em 1750 e, a partir de 1753, passa a atribuir os títulos de Wrangler e Senior, os quais são utilizados até os dias atuais. O exame era oral e consistia em perguntas que tratavam de questões matemáticas e filosóficas. Ball (1889) destaca o fato de as questões serem encaradas como bases para

⁷ It has been a subject of regret with many persons, that no proper channel existed, either in this University or elsewhere in this country, for the publication of papers on Mathematical subjects, which did not appear to be of sufficient importance to be inserted in the *Transactions* of any of the Scientific Societies; the two *Philosophical Journals* which do exist having their pages generally devoted to physical subjects.

⁸ In this place in particular, where the Mathematics are so generally cultivated, it might be expected that there would be an opening for a work exclusively devoted to that science which does not command much interest in the world at large. We think that there can be no doubt that there are many persons here who are both able and willing to communicate much valuable matter to a Mathematical periodical, while the very existence of such a work is likely to draw out others, and make them direct their attention in some degree to original research. Our primary object, then, is to supply a means of publication for original papers.

discussões nas escolas. O Mathematical Tripos teve papel determinante na formação da comunidade matemática em torno de Cambridge. Como destacado na introdução, Sylvester participou do exame em 1837, quando conquistou o título de Segundo Wrangler, com William Nathaniel Griffin sendo o Senior Wrangler daquele ano.

Iniciamos nossas análises olhando para os jornais de Cambridge e em seguida levamos em consideração os artigos que foram publicados nos jornais não especializados. Após a leitura prévia das revistas citadas até este momento, foram selecionados 238 artigos que lidaram com polinômios homogêneos ou com problemas de rotação nos periódicos britânicos.

A leitura prévia que citamos no último parágrafo se manifestou através de uma classificação que realizamos nos jornais especializados, que nos permitiu compreender a perspectiva dos editores desses periódicos, principalmente no que diz respeito aos jornais de Cambridge. Optamos inicialmente por uma divisão dos artigos em três categorias: Geometria em Coordenadas Cartesianas (GCC), Geometria em Coordenadas Homogêneas (GCH), Mecânica de Rotação (MR) e outros assuntos (O). Essa divisão nos mostra características do jornal em si, uma vez que apresentam uma tendência dos interesses dos autores que publicaram no período, além de destacar a evolução do volume de produção no entorno do objeto central desta tese.

É importante indicar que esses artigos lidam com objetos de fundo geométrico. A geometria em coordenadas reúne os textos relevantes para grupo que buscamos investigar. Além disso, os trabalhos que tratam dos movimentos de rotação também merecem destaque, uma vez que podem representar um desdobramento que evidencia intersecções com o primeiro grupo através dos polinômios homogêneos. A organização nas rubricas elencadas expressa uma análise preliminar da produção impressa nos jornais britânicos.

Essa organização dos artigos serviu como forma de delimitar o grupo de matemáticos com interesses em comum, dentre os quais figuram os personagens que fazem parte da *Comunidade britânica dos Invariantes*. Ainda é importante destacar que a delimitação de categorias serve para representar a evolução da publicação de assuntos de interesse dos leitores dos jornais, uma vez que a geometria em coordenadas homogêneas vai surgindo de maneira gradativa no Reino Unido.

Lembramos que, inicialmente, esses periódicos se concentraram majoritariamente em trabalhos elementares ligados a problemas relacionados à vida acadêmica de Cambridge, de modo semelhante ao que era praticado no jornal da escola politécnica francesa. Além da leitura direta dos artigos, essa afirmação pode ser observada através do perfil dos autores presentes no primeiro volume do CMJ os quais eram, em sua maioria, professores e alunos da própria instituição ou treinadores do Tripos Exam.

De 1837 a 1844, o jornal editado pelos matemáticos Duncan Gregory e Archibald Smith apresentou um número limitado de autores frequentes. No total, foram 53 assinaturas diferentes nos artigos, entre as quais 16 apresentaram uma média de, pelo menos, uma publicação por volume. Destas, apenas Gregory e Robert Leslie Ellis (1817-1859), ambos fundadores do jornal, se fizeram presentes em todos os volumes produzidos no período. Além disso, é importante observar que alguns autores, que começaram a participar a partir do segundo volume do jornal, também publicaram pelo menos um artigo em cada um dos volumes. É o caso de William Walton (1813-1901), Boole, Cayley, Brownin e o William Thomson (lord Kelvin). Além destes, os nomes Greatheed e Smith se destacam com publicações nos três primeiros volumes. Os autores mencionados contribuíram com 141 publicações de um total de 222 textos no jornal. A concentração da maioria dos trabalhos em 8 assinaturas é um indício do núcleo restrito que permeou os artigos produzidos, o que traz a ideia de que a revista foi fortemente ligada à vida de Cambridge.

No período de 1845 e 1854, na publicação do CDMJ, o número de autores aumentou de 53 para 63. Além disso, os autores anônimos não existiam mais. Entre todas as assinaturas, encontramos onze com uma média superior a um artigo por volume. Apesar de parecer que se reduzia o interesse pela revista, o volume de produções representa o contrário, pois somam 9 volumes, 4 a mais do que a versão do CMJ. Se considerarmos uma média a cada quatro edições, o número de matemáticos frequentes passa para 22 personagens, os quais são responsáveis por 225 artigos dos 294. Este fator nos mostra que o interesse pela revista teve um aumento significativo no período.

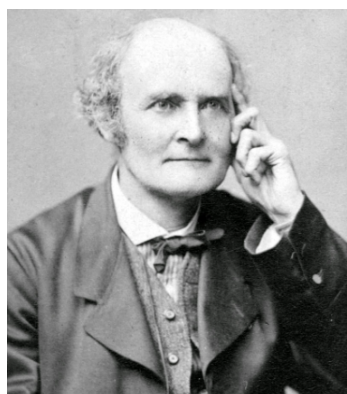
Por fim, o intervalo de 1855 a 1865, que contempla o surgimento do QJPAM até o surgimento da LMS, representa a constituição de um espaço de recepção de textos escritos tanto na ilha quanto no continente. Do total de textos previamente analisados, selecionamos 241 que são publicados no Reino Unido, dentre os quais 215 lidam diretamente com polinômios homogêneos (os quais são objeto de análise neste capítulo e no próximo) e 26 com problemas de rotação. Realizamos o mesmo processo de análise em jornais franceses e alemães e selecionamos 263 artigos publicados, dentre os quais 205 lidam diretamente com polinômios homogêneos e 58 com problemas de rotação.

Essa distribuição dos artigos através dos capítulos se justifica pela necessidade de olhar para a comunidade de práticas em aspectos diversos. Inicialmente nossas investigações se concentram no interior das produções do grupo de matemáticos, seguidos por sua repercussão no continente e, por fim, identificamos os desdobramentos dessas produções por um grupo de estudiosos que trata de assuntos correlatos, como os movimentos de rotação.

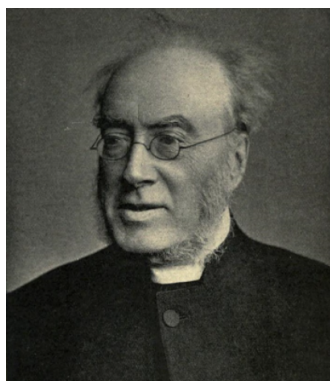
4.3 Os autores base da *Comunidade britânica dos Invariantes*

Como forma de selecionar os artigos que serviram para as análises que conduzimos ao longo desta tese, estabelecemos a presença das seguintes palavras-chave, como critério de inclusão: polinômios homogêneos, *invariantes* e seus derivados, coordenadas homogêneas e formas algébricas. Esses termos foram procurados no corpo dos textos publicados nos periódicos que descrevemos neste capítulo. Além disso, também levamos em consideração a adesão dos artigos às temáticas que emergem de nossa análise da obra de Sylvester. Como fator de exclusão, optamos por descartar os artigos cujos autores não foram identificados, uma vez que existia a possibilidade de um autor não assinar seus artigos.

Após a seleção dos artigos, foi necessário identificar os autores mais relevantes para a produção das práticas comuns da comunidade. Esses autores, os quais nomeamos de "autores base das redes", foram escolhidos de acordo com o volume de suas publicações. Estabelecemos, como critério de seleção, o número mínimo de 5 publicações ao longo do recorte temporal desta tese. Nessas condições, identificamos 20 personagens, sendo 9 deles autores presentes nos jornais britânicos e 11 deles presentes nos jornais do continente, os quais serão tratados no capítulo 6. Portanto, além de Sylvester, que foi responsável por 46 textos em nosso período de investigação, os autores base da *Comunidade Britânica dos Invariantes* são os seguintes:



Arthur Cayley (1821-1895, 110 textos publicados na rede) - Formado no Trinity College de Cambridge em 1842, quando se tornou Senior Wrangler no Mathematical Tripos e vencedor do prêmio Smith. Se tornou advogado em 1849 e trabalhou nessa profissão durante 14 anos, até se tornar professor na Universidade de Cambridge em 1863, sendo o primeiro a assumir a cadeira Sadleriana de Matemática. Os próximos 14 anos de sua vida, seguiu como advogado, mas não deixou de contribuir com a produção de conhecimento matemático. Cayley conta com uma vasta produção de artigos e, além de suas contribuições para o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*, publicou mais de 200 artigos. Foi o terceiro presidente da London Mathematical Society entre 1868 e 1870. (GILLISPIE, 1981)



George Salmon (1819-1904, 20 textos publicados na rede) - Formado no Trinity College Dublin em 1838, mesma instituição a qual se tornou membro 3 anos depois e foi tutor durante 25 anos. É considerado um dos principais responsáveis pelo desenvolvimento e divulgação da *Teoria dos Invariantes*, com Sylvester e Cayley. Particularmente, sua contribuição se consolidou através de livros-textos que foram publicados entre 1848 e 1862. Suas principais contribuições trataram de superfícies cúbicas, curvas algébricas e problemas de contatos. (GILLISPIE, 1981)



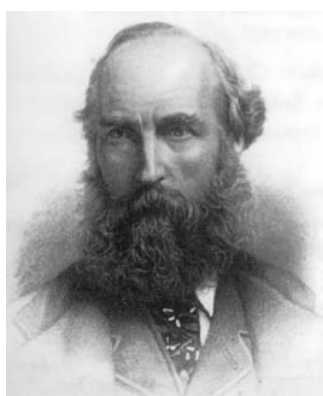
James Cockle (1819-1895, 11 textos publicados na rede) - Formado no Trinity College de Cambridge em 1842, se tornou mestre em 1845. Foi presidente da Sociedade Filosófica de Queensland e contribuiu com variados jornais que publicam matemática (SERLE, 1949). É mais um advogado nesta lista. É responsável pela apresentação de ideias alternativas para os estudos relacionados à *Teoria dos Invariantes*.



Norman Macleod Ferrers (1829-1903, 9 textos publicados na rede) - Formado no Caius College de Cambridge, Senior Wrangler no Mathematical Tripos de 1851 e vencedor do prêmio Smith. Ganhou a vida como advogado até 1866, quando se tornou professor na mesma escola de Cambridge onde se formou. Como matemático, suas principais contribuições são um tratado sobre "coordenadas tri lineares", publicado em 1861, e memórias sobre o desenvolvimento de Sylvester a respeito do Elipsoide de Poincaré. Além disso, foi editor do QJPAM de 1855 a 1891. (LEE, 1912b)



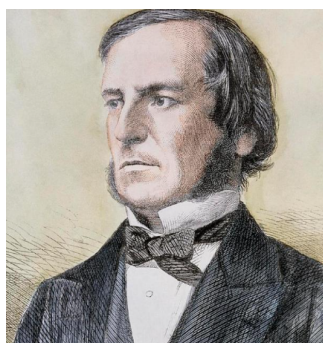
Michael Roberts (1817-1882, 8 textos publicados na rede) - Formado pelo Trinity College Dublin, onde obteve o bacharelado em 1838 e se tornou professor em 1862, cargo que ocupou até 1879. Nessa posição, proferiu palestras sobre *Teoria dos Invariantes*, fator que contribuiu significativamente para a difusão do assunto. Além disso, essa divulgação também ocorreu no período entre 1856 e 1860, quando publicou trabalhos importantes no *Nouvelles Annales des Mathématiques*. (LEE, 1912b)



William Spottiswoode (1825-1883, 8 textos publicados na rede) - Formado no Balliol College de Oxford em 1842, com um período de estudos em Lyon. Tornou-se presidente da seção de matemática da Associação Britânica para Avanço da Ciência em 1865. Antes desse evento, contribuiu com a produção de conhecimento matemático através de publicações sobre propriedades dos determinantes. (LEE, 1912b)



Thomas Weddle (1817-1853, 8 textos publicados na rede) - Membro da Sociedade Astronômica de Londres. Foi professor do Royal Military College de Sandhurst e professor particular em Newcastle. (POGGENDORFF, 1863)



George Boole (1815-1864, 7 textos publicados na rede) - Sua trajetória é diferente dos demais. Foi educado em matemática pelo seu pai e aos 15 anos começou a ensinar em uma escola própria em Lincoln. Em 1834, seu pai passou a ser curador da biblioteca da Mechanics Institution, fundada no mesmo ano. Esse fator permitiu a George ter acesso aos textos de Newton, Lagrange e às publicações da Royal Society. Rapidamente adquiriu sua reputação como conhecedor de matemática, o que o levou ao contato com o editor CMJ, Duncan Gregory, para a publicação do artigo fundador da *Teoria dos Invariantes*. Em 1849, apesar de não ter nenhum diploma universitário, foi nomeado professor do Queen's College em Cork, no sudoeste da Irlanda, onde lecionou até 1864. Em 1857, se tornou membro da Royal Society. Suas principais contribuições para a matemática são as publicações sobre lógica e as pesquisas sobre transformações lineares, tema que o coloca como importante personagem desta tese. (GILLISPIE, 1981)

Para análise da participação desses autores na comunidade, os artigos foram divididos em três fases, que acompanham as mudanças dos jornais de Cambridge: Fase 1, de 1837 a 1845; Fase 2, de 1846 a 1855; e Fase 3, de 1856 a 1865. Na Fase 1 o *Cambridge Mathematical Journal* surge como um espaço que permite tratar de problemas ligados à vida matemática da universidade. Entretanto, esse perfil não impediu que matemáticos como George Boole passassem a publicar no periódico. Na Fase 2 o jornal amplia seu alcance e assume novo nome, o *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. Essa versão extrapola a ideia de simples discussão dos problemas apresentados na universidade e em exames como o Tripos Exam, estabelecendo, assim, o surgimento de um espaço mais ligado a pesquisas originais. É importante lembrar que a segunda fase dos jornais de Cambridge abrigou o desenvolvimento inicial da *Teoria dos Invariantes*. Esse fator mostra que o CDMJ teve papel muito importante na trajetória da comunidade de práticas dos polinômios homogêneos, o que justifica a divisão da análise dos artigos nos três períodos já descritos. Por fim, na Fase 3 o jornal busca internacionalização, desta vez com o nome de *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*. Essa nova versão recebeu artigos do continente, entre os quais destacamos os publicados por Francesco Faá di Bruno (1825-1888) e Francesco Brioschi (1824 - 1897), que trataram de problemas relativos aos *invariantes* e à relação entre geometria e os polinômios homogêneos.

Dessa forma, olhar para o período de 1837 a 1865 através das três fases dos jornais de Cambridge nos permite compreender não apenas a relação entre autores, temáticas e influências mútuas, mas nos mostra o ritmo das contribuições de todos os personagens envolvidos em momentos distintos e bem delimitados pelas mudanças de expectativa em relação aos periódicos especializados em suas 3 versões.

A condução das análises será realizada utilizando a ferramenta das redes. Como apresentado na introdução desta tese, as redes permitem organizar um *corpus* de textos através de pontos de contatos e comunicações que estão presentes nos artigos (BRECHEN-MACHER, 2006). É possível descrever culturas matemáticas que podem estar, ou não, ligadas a uma teoria específica. Entendemos que o conceito de rede é capaz de mostrar como os autores base da comunidade de práticas que estamos descrevendo se articularam no entorno dos interesses que se manifestaram ao longo do desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes* e dos desdobramentos das técnicas e abordagens ligadas aos polinômios homogêneos.

4.4 Sobre a construção das redes de interações

Neste capítulo, utilizamos as redes de interações, as quais são centradas nas contribuições de Sylvester. A centralidade de um personagem específico, como é o nosso caso, não modifica a estrutura da rede, uma vez que o foco se concentra nas interações. Portanto, mesmo que a posição dos autores mude no grafo, as distâncias e o volume das conexões permanecem iguais e a análise não fica comprometida. Com isso, apresentamos os personagens que interagem não apenas com o autor central, mas também entre si, em citações diretas. Por meio desse estilo de rede, evidenciamos os núcleos das ideias que circularam entre personagens relevantes, de modo que foi possível identificar como as temáticas, destacadas no último capítulo, repercutiram no Reino Unido.

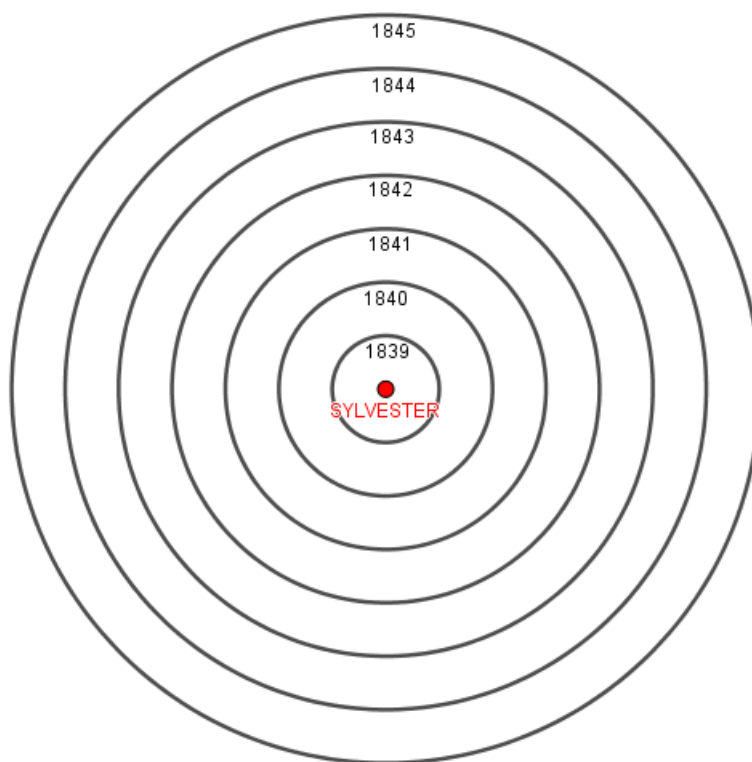
Estabelecidas as redes, é possível caracterizar o nível de influência que Sylvester exerceu sobre os outros matemáticos do grupo. Levando em consideração os aspectos sociais já discutidos no capítulo dois, as práticas que emergiram de sua obra representam sua relevância matemática, frente aos demais pesquisadores. As interações evidenciadas pelos grafos, trazem um elemento a mais sobre o papel de nosso personagem de pesquisa. Como afirmamos na última seção, um autor é considerado relevante para uma rede, quando teve 5 ou mais publicações no recorte temporal desta tese. Além disso, a evolução da comunidade, ao longo do tempo, é evidenciada nas três fases dos jornais de Cambridge.

Ao considerarmos as publicações sobre polinômios homogêneos no período da Fase 1, observamos que Cayley e Sylvester se caracterizam como autores base da rede. Além deles, Boole e Salmon também são considerados como base, uma vez que constam na lista

de 20 autores relevantes apresentados na seção anterior, quando levamos em conta todo o período de pesquisa, de 1837 a 1865. Destacamos que outros autores da lista, ou não são britânicos (o que os coloca nas redes de repercussão no próximo capítulo) ou têm seus trabalhos publicados em outras fases.

A representação da rede centralizada em Sylvester determina a posição dos outros autores em relação ao momento em que começaram a figurar na comunidade. Foi preciso estabelecer uma marca temporal, em relação ao centro do grafo. Para isso, inicialmente consideramos os anos que compõem a primeira fase dos jornais de Cambridge como circunferências centradas em Sylvester.

Figura 19 – Representação das Linhas Temporais Fase 1



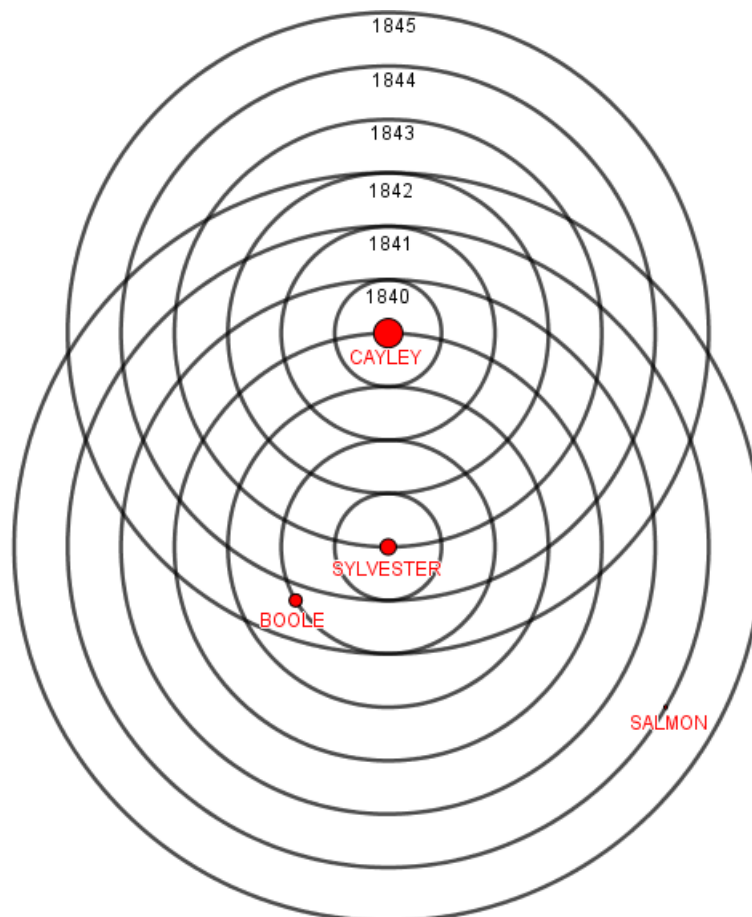
Fonte – Elaborada pelo autor

Como pode ser visto na imagem, iniciamos as projeções de Sylvester no ano de 1839. Este fato reflete a data de sua primeira publicação que trata de polinômios homogêneos. A localização dos outros personagens se define nas linhas temporais seguintes. Na sequência, a inclusão dos outros personagens relevantes da rede também ocorre no primeiro ano em que surgem nas páginas dos jornais. Entretanto, o primeiro ano desses novos autores é marcado nas projeções do primeiro.

Além disso, os referidos personagens (que tratei como personagens bases da rede) geram seus próprios círculos temporais, os quais se iniciam no primeiro ano em que

aparecem nas páginas dos jornais. Este fator faz com que surjam novas intersecções, que representam linhas temporais. Estes pontos serão referências para determinar as posições dos novos autores que surgem com as leituras dos artigos.

Figura 20 – Projeção das Linhas Temporais Fase 1



Fonte – Elaborada pelo autor

Na imagem acima podemos observar algumas particularidades na representação dos participantes base da rede. Primeiro, as linhas temporais que se projetam a partir de Cayley servem para representar um outro personagem citado por ele na época referente à linha temporal. Dessa forma, um autor citado por Sylvester em 1845 e citado por Cayley em 1843, deve aparecer na intersecção das linhas temporais referentes à citação de cada um dos personagens base da rede. É importante destacar que as intersecções são sempre consideradas em relação aos autores com maior número de publicações no período de análise. Em outras palavras, alguém citado por três autores base diferentes será marcado nas linhas temporais dos dois autores com o maior número de publicações.

Outro ponto importante a observar na construção das redes é o raio das circunferências que representam os personagens. Quanto mais publicações, maior o raio do ponto, o

que explica o fato de os pontos de Cayley e Sylvester serem os maiores pontos na rede. Esse tipo de organização permite destacar tanto os personagens mais influentes na fase analisada quanto o caminho dessa influência, levando-se em consideração a intensidade e o tempo.

Algumas características ainda precisam ser na metodologia de construção das redes de interações. Primeiro, as cores representam a nacionalidade do autor, sendo vermelho para os britânicos, azul para os franceses e verde para os alemães. A presença de um autor não britânico no grafo, indica que o personagem que o cita utiliza referências externas à comunidade, porém não se trata de um novo membro. Essas interações com personagens do continente são evidências importantes do processo de ganho de credibilidade que torna as práticas da comunidade relevantes.

Outra característica que merece destaque é a espessura dos vetores. Nesse tipo de rede, as interações são representadas por vetores com origem nos autores que citam, ou personagens que pertencem à comunidade, e destino nos autores que são citados, que podem ser os mesmos integrantes da comunidade ou pesquisadores externos a ela. A espessura desses vetores representa a intensidade das interações entre os autores. Quanto maior o número de citações entre os autores, maior a espessura do vetor. Como poderá ser visto, a rede evidencia que existiu um interesse maior entre os trabalhos de Cayley e Eisenstein, do que entre o matemático inglês e Hesse nos períodos abordados.

Também é importante chamar atenção para o surgimento de novos personagens distintos dos autores base da rede. Alguns matemáticos lidaram com as temáticas de interesse desta tese, porém não influenciam o grupo com o mesmo peso dos outros. Apesar de não lidarem diretamente com polinômios homogêneos, os autores que trataram de movimentos de rotação ou de movimento dos planetas serão colocados aqui devido a sua relação com os trabalhos ligados a temáticas como redução de polinômios e Teoria de Eliminação. Por fim, destacamos que nem todos os autores citados nos artigos selecionados aparecem na rede. Várias citações indicam referências a conceitos e métodos já consolidados e que não estavam em discussão, como é caso de Bézout em relação à Teoria de Eliminação. Apesar de o matemático francês ser frequentemente lembrado nos trabalhos publicados por Sylvester no recorte temporal abordado, as citações mostram que se trata de referências a métodos que auxiliam na resolução dos problemas discutidos nos artigos, mas não revelam uma interação em si. Durante a leitura prévia dos artigos, optamos por utilizar apenas os contatos contemporâneos nos quais houve compartilhamento de práticas.

Por fim, essa divisão leva os seguintes critérios em consideração: 1) se os autores produziram conhecimento matemático no mesmo período, a comparação é feita dois a dois; 2) se existiu contato entre os dois autores em questão, sendo importante verificar se houve troca de correspondência ou se os artigos apontam para conversas entre os autores;

3) a forma como os autores se apropriam das técnicas e dos conceitos compartilhados, assim, durante as leituras prévias, nos preocupamos em identificar citações que buscavam contribuir para uma discussão vigente da época, diferenciando-as de simples referências.

Por fim, ressaltamos que as redes de interação mostram como e em que momento as práticas foram compartilhadas. Além disso, é possível ter um vislumbre do modo como os autores contribuíram para resolução de problemas que permeavam os interesses da comunidade e apontaram para desdobramentos importantes que ajudaram a colocar a produção britânica de conhecimentos matemáticos no patamar de importância em que se encontrava em 1865 quando a LMS foi fundada. Como forma de aprofundar esses aspectos, as redes deste capítulo precisam do auxílio das redes temáticas, que serão discutidas no próximo capítulo. A seguir apresentamos as análises dos artigos, iniciando-as pelas redes de interações. Logo depois, passamos para a análise das redes de texto centradas na perspectiva de Sylvester.

4.5 Fase 1: 1837-1845

Como destacamos, a primeira fase do desenvolvimento da comunidade é centrada no CMJ. Esse periódico contou com 4 volumes, cada um constituído por 6 números, que foram distribuídos entre os anos de 1837 e 1845, sempre nos meses de fevereiro, maio e novembro, com exceção do primeiro número, que foi publicado em outubro de 1837. Dos artigos que selecionamos para essa fase encontramos um trabalho sobre resolução de equações biquadradas e dois artigos que lidam com projeções e transformações, mas não diretamente com os polinômios homogêneos. Os outros trabalhos, que lidam diretamente com as práticas de interesse desta tese, têm como principais autores Cayley, Boole e Gregory. No entanto, ao considerarmos todos os autores da temática dos polinômios homogêneos, encontramos a seguinte distribuição:

Tabela 5 – Distribuição dos autores no CMJ

POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS					
AUTOR	V1	V2	V3	V4	T
George Boole		1	2	1	4
Arthur Cayley			2	2	4
Duncan Gregory		1		1	2
Samuel Greatheed	1				1
Archibald Smith	1				1
JFH		1			1
JJ Sylvester		1			1
AQGC		1			1
TOTAL	2	5	4	4	15

Fonte – Elaborada pelo autor

Os dois artigos que lidaram com polinômios homogêneos no primeiro volume do jornal, foram publicados no número 6 em maio de 1839. O texto escrito por Samuel Greatheed apresenta um método para solucionar equações biquadradas, homogêneas ou não. Esse é um tipo de trabalho que encontramos na seleção dos textos e que não se adequa às práticas apresentadas no capítulo anterior. Artigos com essas características não entram na seleção final.

Outro aspecto da seleção dos artigos está relacionado com a contribuição para pesquisas que permearam problemas de interesse para a comunidade científica de maneira geral. Em outras palavras, a escolha dos artigos para análise exige originalidade do texto, seja no caso do desenvolvimento de uma nova teoria ou de um acréscimo a ideias e conceitos que já existiam. A decisão sobre a originalidade ou não de um artigo é determinada pelas próprias intenções dos autores. Isso se deve ao fato de os próprios autores apresentarem suas referências e indicarem o papel de seus trabalhos. Logicamente, existe a possibilidade de o autor não ter conhecimento de outras produções anteriores, o que pode comprometer a ideia de originalidade. Essas situações se resolvem quando analisamos a rede de textos e identificamos a temática através das interações com outros personagens.

Com essas considerações, os textos produzidos por Greatheed, JFH e AQGC não entram na lista dos artigos selecionados. Além disso, acrescentamos os artigos produzidos

em jornais não especializados em matemática publicados no período delimitado da Fase 1. Esses novos trabalhos também passaram pelos critérios que apresentamos nos últimos parágrafos. A partir disso, foi produzida a seguinte lista:

Tabela 6 – Fase 1 da Comunidade de Práticas nos jornais britânicos

PERSONAGENS DA 1ª REDE										
AUTOR	1837	1838	1839	1840	1841	1842	1843	1844	1845	TOTAL
Arthur Cayley						1	1	2	5	9
JJ Sylvester			1	2	2					5
George Boole				1	1	1		1		4
Duncan Gregory					1		1			2
Archibald Smith			1							1
George Salmon								1		1
TOTAL			2	3	4	2	2	4	5	22

Fonte – Elaborada pelo autor

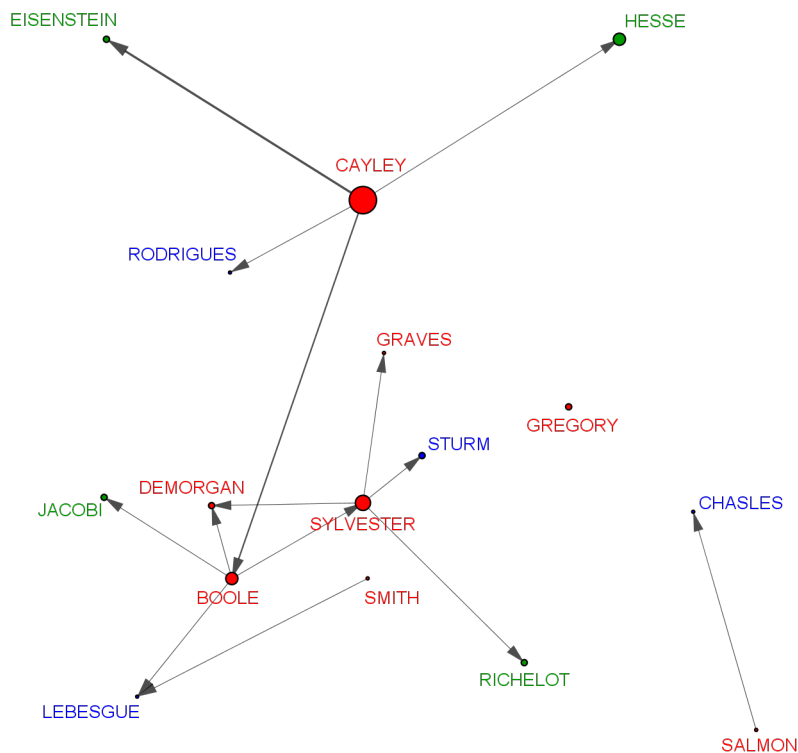
Como indicado, nota-se que os trabalhos relacionados aos polinômios homogêneos representam um grupo de matemáticos, inicialmente restrito. Além disso, a análise dos temas que atraíram os participantes e do modo como eles interagiram traz uma perspectiva da identidade da comunidade de práticas em formação. Boole e Cayley concentram os trabalhos sobre as propriedades das transformações lineares, Gregory apresenta trabalhos sobre contatos de curvas, Smith retoma uma discussão sobre momentos de inércia e Sylvester discute problemas ligados à Teoria da Eliminação. Além desses, encontramos um trabalho de Salmon na *Philosophical Magazine*, que trata de teoremas sobre geometria descritiva. Os temas centrais dos artigos produzidos na Fase 1 de nossas análises se adequam aos interesses de nosso personagem de pesquisa, o que reforça a percepção de sua integração ao grupo.

As referências diretas representam outro fator que auxilia na compreensão do modo como esses personagens se relacionam entre si e com a produção matemática ao seu redor. Dada a integração dos personagens da comunidade no domínio dos polinômios homogêneos, a rede textos centrada nos trabalhos produzidos por Sylvester nesse período, releva os interesses iniciais da comunidade de práticas que começava a se constituir.

Ressaltamos que revelar quais foram as referências de um grupo de autores nos ajuda na compreensão da identidade de uma comunidade, uma vez que elas revelam as

bases das práticas do grupo em questão. Essa compreensão se consolida através da análise das redes de textos, tanto de interações quanto temáticas. Como uma primeira fotografia dessa identidade, estabelecemos a seguinte configuração para a Fase 1:

Figura 21 – Rede de Interações Fase 1



Fonte – Elaborada pelo autor

Nessa imagem, é possível identificar que os autores não demonstram uma troca de ideias frequente. Essa percepção reflete o momento de produção de cada um dos matemáticos, ou seja, ao buscar publicações que lidam com polinômios homogêneos entre 1837 e 1845, encontramos os precursores das discussões em posições de busca por novos conhecimentos. É o caso de Cayley, que neste período se concentra em estudos sobre transformações de Eisenstein e Boole, além dos determinantes de Hesse. Já Sylvester se coloca como uma referência, apesar de não ser pioneiro, sobre técnicas de eliminação. Outro autor que merece destaque é Boole, que também se apresenta como referência a partir de seus textos precursores da *Teoria dos Invariantes*.

Os autores estrangeiros que surgem nessa rede, revelam o baixo nível de conexão dos matemáticos britânicos com o continente. Como veremos nos próximos capítulos, Sylvester e Cayley são dois personagens responsáveis pela divulgação das práticas britânicas, mais especificamente sobre os *invariantes*, no continente europeu. Entretanto, a rede da figura

21 nos evidencia uma fase inicial da busca por referências no exterior. Fator correlacionado às demandas que destacamos no capítulo 2.

A entrada no texto dos artigos revela outros aspectos dos interesses dos primeiros protagonistas das produções matemáticas do Reino Unido. Nesse sentido, torna-se importante observar quem são estes personagens, com quem eles interagem e quais interesses manifestam através desses contatos. Duncan F. Gregory (1813 – 1844) e Archibald Smith (1813 – 1872), ex-alunos do Trinity College de Cambridge e primeiros editores do CMJ, iniciam as publicações com contribuições de problemas que auxiliam na preparação para os exames da universidade. Entretanto, destacamos dois artigos do primeiro, que tratam dos estudos sobre os contatos de curvas de 2ª ordem; e um do segundo, que apresenta um trabalho que trata transformação de polinômios homogêneos em soma de quadrados positivos e negativos e sua relação com os momentos de inércia. Esse tipo de contribuição revela uma ligação importante com os movimentos de rotação e uma prática frequente sobre redução de polinômios para soma de quadrados, assunto que se liga ao problema de resolução da *Equação Secular*.

Gregory foi autor de dois livros-textos, um sobre cálculo e outro sobre aplicações da análise à geometria. Aparentemente essas publicações são reflexos dos movimentos iniciados pela Analytical Society, de analíticos de Cambridge. Isso se reflete nas referências que aparecem em seus artigos de pesquisa com Charles-François-Antoine Leroy (1780 – 1854) e Gaspard Monge (1746 – 1818), dois matemáticos franceses cujos trabalhos tratam de geometria descritiva (o que chamamos hoje de geometria projetiva) e de sua relação com a análise. Além disso, também podemos observar o interesse nessa abordagem analítica em Gregory (1841a, prefácio) e no prefácio de seu segundo livro, publicado por William Walton.

O objetivo principal deste Tratado é desenvolver um sistema de Geometria Sólida, de forma adequada aos estudantes de matemática, por meio de equações simétricas. A vantagem geral da simetria neste ramo da matemática é tão impressionante que a utilidade de tal trabalho será imediatamente reconhecida. ⁹ (GREGORY, 1845, prefácio, Tradução Nossa)

Tanto no primeiro livro do autor, quanto no segundo, podemos notar a influência das ideias de Peacock através de uma abordagem analítica. Em Gregory (1841a), percebemos isso diretamente quando o próprio autor lembra o avanço da análise em solo britânico e, nessa citação, ao anunciar o tratamento da geometria sólida por meio de equações simétricas, também mostra a influência da Analytical Society.

⁹The principal object of this Treatise is to develop a system of Solid Geometry, in a form suitable to mathematical students, by means of symmetrical equations. The general advantage of symmetry in this branch of mathematics is so striking, that the utility of such a work will be at once recognized.

Por outro lado, Smith não lidou diretamente com matemática, mesmo que seu interesse principal repousasse sobre o magnetismo. No entanto, seu artigo apresenta uma reflexão sobre o modo de determinar os eixos principais de rotação de um sólido através da mudança de variáveis. Seu trabalho com polinômios homogêneos se conecta com o texto de Victor-Amédée Lebesgue (1791 – 1875) publicado no *Jornal de Liouville* de 1837, que lida com a equação que ajuda a resolver o problema das desigualdades seculares.

A partir da análise inicial do perfil desses autores, é possível identificar os interesses pessoais dos editores do CMJ: pontos de contato de curvas e superfícies e movimentos de rotação. Apesar disso, é importante observar que suas produções sobre polinômios homogêneos não encontraram ressonância na rede.

Os trabalhos de relevância dessa rede ficam por conta dos textos de Salmon, Boole, Cayley e Sylvester, os autores base. Ao analisarmos seus trabalhos publicados durante período de 1837 a 1845, encontramos os artigos que lidam com o início da *Teoria dos Invariantes* influenciados pelos textos de Boole. Como a historiografia tradicional aponta, estes são trabalhos responsáveis pela fundação da nova Teoria (PARSHALL, 1989). Nesse contexto, notamos que as pesquisas analisadas estão diretamente ligadas ao problema da *Equação Secular*, como podemos verificar por meio da seguinte citação:

A transformação de funções homogêneas por substituições lineares é um problema de análise importante e frequentemente recorrente. Na *Mecanique Analytique* de Lagrange, ocupa um lugar de destaque, e foi tema de um livro de memórias especial de Laplace. Mais recentemente, chamou a atenção de Lebesgue e Jacobi; o primeiro dos quais estendeu suas investigações a funções homogêneas de segundo grau e de um número indefinido de variáveis, enquanto o último aplicou os resultados de tais investigações à transformação de integrais múltiplas. Um livro de memórias sobre o assunto também foi dado ao mundo por Cauchy; e um artigo engenhoso do Professor De Morgan, sobre suas relações geométricas, será encontrado no 6º volume das *Transações Filosóficas de Cambridge*.¹⁰ (BOOLE, 1841, p. 1, Tradução Nossa)

Nesse trecho podemos notar que o principal interesse de Boole era o processo de transformação de um polinômio homogêneo por meio de substituições lineares. No entanto, é possível perceber que o autor conhecia o problema de acordo com as interações apresentadas. Como Brechenmacher (2014) destaca, os trabalhos de Lagrange e Laplace

¹⁰The transformation of homogeneous functions by linear substitutions, is an important and oft-recurring problem of analysis. In the *Mecanique Analytique* of Lagrange, it occupies a very prominent place, and it has been made the subject of a special memoir by Laplace. More recently it has engaged the attention of Lebesgue and Jacobi; the former of whom has extended his investigations to homogeneous functions of the second degree, and of an indefinite number of variables, while the latter has applied the results of such inquiries to the transformation of multiple integrals. A memoir on this subject has also been given to the world by Cauchy; and an ingenious paper by Professor De Morgan, on its geometrical relations, will be found in the 6th volume of the *Cambridge Philosophical Transactions*.

que lidam com a transformação de polinômios homogêneos tratam da *Equação Secular*. O texto de Lebesgue é o mesmo que contou com a interação de Smith neste jornal. Já Jacobi, além de utilizar essa transformação para investigar integrais múltiplas, cita o texto de Cauchy nos "exercices de mathématiques" de 1829, o qual também trata da *Equação Secular*.

Observamos que a busca pela transformação de polinômios em somas de quadrados, positivos ou negativos, é um ponto central das motivações de Boole no início de suas investigações sobre o que viria a se tornar a *Teoria dos Invariantes*. Outro aspecto importante é sua ligação com o interesse de Smith, que não foi representada na figura 21 por não se tratarem de práticas semelhantes ou termos encontrado contatos entre ele e o autor dos texto fundador da *Teoria dos Invariantes*.¹¹

Sobre os *invariantes*, podemos notar que esse interesse se manifesta explicitamente nos textos de Cayley, que interage com Boole quase imediatamente. De acordo com Parshall (1989), os dois matemáticos se corresponderam em 1844 e, nessa época, o ex-aluno do colégio Trinity de Cambridge demonstrou seu interesse na propriedade destacada pelo matemático irlandês sobre a invariância de formas algébricas que são associadas aos polinômios homogêneos.

Diferente de Boole, os interesses de Cayley apresentam vínculo com a geometria em coordenadas homogêneas. Essa é uma conexão importante com seu amigo Sylvester, que apresentou um trabalho extenso sobre essa abordagem geométrica inspirada na obra de Plücker. Nesse sentido, os artigos "On the Theory of Algebraic Curves" e "Chapters in the Analytical Geometry of (n) Dimensions", publicados no volume 4 do CMJ, se dedicaram à geometria das curvas algébricas com um interesse específico nos problemas de contato.

Além de Plücker, Cayley teve outros autores de referência no período inicial da *Teoria dos Invariantes*, como é caso de Hesse e Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823 – 1852). O primeiro se destaca pelo trabalho com as transformações de formas algébricas, que foi generalizado por Cayley com seus *Hyperdeterminantes*, e o segundo pela conexão que se revela através de seus estudos sobre formas quadráticas e ternárias, publicados no *Jornal do Crelle* em 1844.

No caso de Sylvester, esse período de existência do CMJ foi marcado por contribuições para Teoria de Eliminação, a qual serviu de referência para o texto de Boole. Além disso, entre os autores dessa primeira fase, Sylvester é o que mais apresenta interações com matemáticos do continente. Destacamos aqui, a já citada conexão com o trabalho Sturm. Sinaceur (1991) mostra que o teorema de Sturm, apresentado na Academia de

¹¹Lembramos que Boole se torna um dos autores do CMJ por intermédio de Gregory.

Ciências de Paris em 1829, foi uma fonte de inspiração importante para o trabalho de Sylvester na Teoria da Eliminação.

Em 1839, Sylvester teve uma ideia, que se revelaria muito frutífera. Em uma nota sobre o teorema de Sturm, anexada a um breve artigo sobre a teoria da eliminação e escrita após uma estadia em Paris, onde ficou impressionado por Sturm, Sylvester estabelece uma relação entre as funções auxiliares de Sturm e as raízes da equação proposta, ou mais exatamente os quadrados das diferenças dessas raízes.¹² (SINACEUR, 1991, p. 124, Tradução Nossa)

Essa é uma relação direta entre os dois trabalhos. Como a autora destaca, Sylvester percebe a utilidade das funções auxiliares de Sturm no processo de eliminação do sistema dos polinômios coexistentes. Além disso, destacamos que a relação entre os matemáticos apresentou novos episódios interessantes como a utilização das raízes das funções auxiliares como meio para a redução de polinômios homogêneos em soma de quadrados positivos e negativos.

Por fim, encontramos um artigo de Salmon, publicado na *Philosophical Magazine* de 1844. Nesse texto, encontramos referência aos trabalhos de Poncelet e Chasles, o que indica uma evidência de que a ideia de uma geometria conectada com a teoria das coordenadas homogêneas de Plücker já estava presente em solo britânico.

Percebemos que essa primeira fase mostra que a matemática britânica contava com um pequeno grupo que começava a investigar problemas ligados a polinômios homogêneos. Entre os principais interesses, destacamos o estudo das transformações lineares de expressões algébricas, problemas de rotação, movimentos de planetas e geometria em coordenadas homogêneas. Estes dois últimos temas têm presença reduzida na primeira fase das análises das interações. No entanto, já encontramos manifestações que indicam uma tendência de adequação de práticas a problemas que tratam de tais assuntos. Como veremos na próxima seção, os temas ganham força com o surgimento de novos integrantes na comunidade e com a expansão das relações internacionais, que acompanha a evolução dos jornais de Cambridge.

4.6 Fase 2: 1845-1855

O segundo período representa a produção matemática no *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, em paralelo com as revistas científicas gerais. O CDMJ contou

¹²En 1839, Sylvester a une idée qui va se révéler très féconde. Dans une note sur le théorème de Sturm, accolée a un bref article sur la théorie de l'élimination et rédigée à la suite d'un séjour à Paris, où il fut impressionné par Sturm, Sylvester établit une relation entre les fonctions auxiliaires de Sturm et les racines de l'équation proposée, ou plus exactement les carrés des différences de ces racines.

com 9 volumes, ainda com fascículos trimestrais. Notamos um aumento significativo nas publicações de artigos que lidam com os assuntos relacionados às aplicações dos polinômios homogêneos. Esse fato representa um indício do processo de consolidação da *Comunidade britânica dos Invariantes*. Outro ponto que poderá ser observado através dos interesses e das interações nesse grupo de matemáticos é a centralidade das investigações sobre a *Teoria dos Invariantes* para os pesquisadores que lidaram com polinômios homogêneos. Após o primeiro olhar sobre as publicações no CDMJ, encontramos a seguinte distribuição dos autores:

Tabela 7 – Distribuição dos autores no CDMJ

POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS										
AUTOR	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	TOTAL
Arthur Cayley	5	1	3	5	4		3			21
JJ Sylvester					1	5	2	2	1	11
Thomas Weddle		1			2	1	2	2		8
George Salmon		1	1	1	1			1	1	6
George Boole						3	1	1		5
James Cockle		1	1			1	1	1		5
Robert Carmichael						1		2	2	5
Charles Hermite									2	2
Thomas Cotterill							2			2
Arthur Curtis									1	1
Benjamin Dickson					1					1
George Hearn				1						1
Thomas Kirkman					1					1
William Donkin									1	1
William Coltman							1			1

AUTOR	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	TOTAL
William Walton							1			1
TOTAL	5	4	5	7	10	11	13	9	8	72

Fonte – Elaborada pelo autor

Ao olhar para a tabela, percebemos o aumento do número de autores que se interessam pelos temas discutidos nesta tese. Além de Weddle e Cockle, personagens relevantes da comunidade, encontramos o primeiro estrangeiro que participa do assunto. A presença de Charles Hermite na lista mostra uma repercussão do estudo sobre polinômios homogêneos no continente. Para além disso, essa participação do matemático francês, que também é um autor com produtividade expressiva, ocorre nas investigações que se relacionam com a *Teoria dos Invariantes*. Como destacaremos nos próximos capítulos, onde discutiremos os artigos sobre transformações, Hermite é uma porta de entrada importante da nova teoria em francês. Logicamente, ele não é o único matemático do continente que trata da Teoria britânica no período. Porém, se torna um personagem importante quando passa a publicar nos jornais especializados do Reino Unido.

Além dos personagens que já destacamos, outros nomes inéditos surgem na tabela 7. Da mesma forma que na última seção, alguns desses autores podem estar ou não na lista definitiva da segunda fase. Apresentamos uma breve descrição sobre essa tomada de decisão, compartilhando informações sobre os personagens que aparecem, pela primeira vez na lista.

Robert Carmichael (1828 - 1861): Membro da Royal Irish Society e examinador de matemática na Queen's University na Irlanda, foi formado no Trinity College de Dublin. De acordo com Crilly (2004), Carmichael é um herdeiro do movimento reformista da Analytical Society, o que pode ser também observado em seu livro publicado em 1855:

A quantidade de assistência que obtive da valiosa coleção de Exemplos ilustrativos dos processos do Cálculo Diferencial e Integral pelo falecido Sr. Gregory, Fellow do Trinity College, Cambridge, é muito considerável, e muito da importância agora atribuída ao Cálculo de Operações deve-se à vindicação e ilustração de suas afirmações por esse ilustre matemático. Meus agradecimentos também são devidos a Sir John Herschel, cujo Suplemento à tradução do "Cálculo Diferencial e Integral de Lacroix", tão notável pela sutileza de seus raciocínios e pela amplitude de suas

concepções, estudei com muita vantagem.¹³ (CARMICHAEL, 1855, p. x, Tradução Nossa)

Ao apontar Lacroix, Herschell e Gregory como parte de suas referências, Carmichael demonstra sua perspectiva sobre a abordagem analítica da matemática e como o cálculo operacional se adequa a essa visão. No entanto, diferentemente do ex-editor do jornal de Cambridge, o matemático Irlandês concentrou seu trabalho nas regras do cálculo, o que fez com que ele não apresentasse contribuições para as temáticas de interesse desta tese, apesar de suas 5 publicações destacadas na tabela.

Outro personagem que não selecionamos foi Arthur Hill Curtis (1827 - 1886), professor de Filosofia Natural no Queen's College Dublin de 1857 a 1879 e moderador dos exames matemáticos no Trinity College Dublin em 1849, mesma instituição onde se formou. Concentrou seu trabalho em geometria das superfícies de segunda ordem até a segunda metade do século XIX (GOW, 1995). Sua contribuição com os polinômios homogêneos segue a linha de Carmichael, o que nos levou ao descarte para lista final referente a esta fase.

Por fim temos Thomas Penyngton Kirkman (1806 - 1895). Formado na Universidade de Dublin em 1833, trabalhou como tutor particular até 1843, quando se tornou reverendo. Seus trabalhos matemáticos incluem textos originais sobre Combinações, Partições, a Teoria dos Poliedros e a Teoria dos Grupos. Foi eleito membro da Royal Society em 1857, mesmo com boa parte de suas publicações figurando em jornais menores como o Ladies Diary (KIRKMAN, 1895). De acordo com Biggs (1981), este matemático contribuiu com vários outros, como Cayley e Salmon. Entretanto, o artigo sobre o produto de polinômios e a comparação do quadrado deles, não lida com os problemas de interesse desta tese.

Essas três descrições de perfil nos mostram o padrão sobre o modo como tais matemáticos ganhavam a vida: ou trabalhavam com tutoria, ou possuíam uma carreira clerical. Além disso, também identificamos personagens que trabalhavam com a lei. Entretanto, as ocupações com pesquisa eram, em sua vasta maioria restritas como pudemos discutir no capítulo 2. É possível afirmar que a *Comunidade britânica dos Invariantes* se desenvolveu em um cenário onde seus integrantes precisavam buscar novos espaços. Apesar da evolução desse panorama no que se reflete no aumento de autores entre 1845 e 1855, os números nos mostram a necessidade de reconhecimento da pesquisa em matemática

¹³The amount of assistance which I have derived from the valuable collection of Examples illustrative of the processes of the Differential and Integral Calculus by the late Mr. Gregory, Fellow of Trinity College, Cambridge, is very considerable, and much of the importance now attributed to the Calculus of Operations is due to the vindication and illustration of its claims by that distinguished mathematician. My acknowledgments are also due to Sir John Herschel, whose Supplement to the translation of "Lacroix's Differential and Integral Calculus," so remarkable for the subtlety of its reasonings and the breadth of its conceptions, I have studied with much advantage.

como profissão. O surgimento desse reconhecimento ocorre a partir das repercussões das práticas britânicas em outros países que, como veremos, têm os *invariantes* como ponto central.

Através desses perfis, o aumento do número de personagens com interesse nas práticas da comunidade revela o surgimento dos pesquisadores no âmbito da formação da LMS. Levando em consideração as revistas não especializadas e as exclusões dos autores aqui justificadas, obtivemos a seguinte configuração:

Tabela 8 – Fase 2 da Comunidade de práticas nos jornais britânicos

PERSONAGENS DA 2ª REDE												
AUTOR	1845	1846	1847	1848	1849	1850	1851	1852	1853	1854	1855	TOTAL
JJ Sylvester			2			8	8	6	7	1		32
Arthur Cayley	4	2	2	1	4	4		4		1		22
Thomas Weddle		1	1			1	1	2	2			8
George Salmon		1		1	1	1			1	1		6
James Cockle		1		2			1	1	1			6
William Donkin						1	1			1		3
George Boole							2		1			3
Benjamin Dickson						1	1					2
Charles Hermite										2		2
Thomas Cotterill									1			1
George Hearn					1							1
William Coltman								1				1
William Walton								1				1
TOTAL	4	5	5	4	6	16	14	15	13	6	0	88

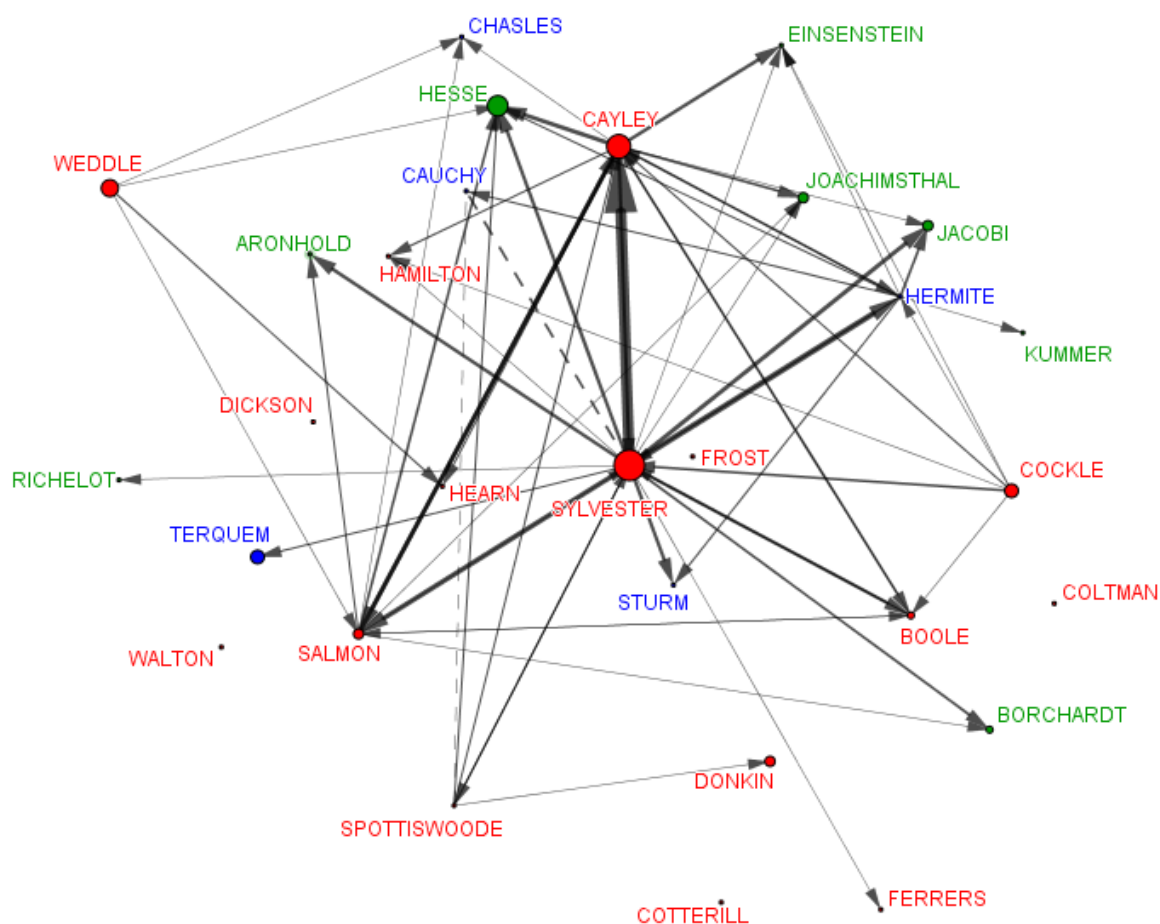
Fonte – Elaborada pelo Autor

O quadro nos mostra o peso que as publicações de Cayley e Sylvester têm sobre essa comunidade de práticas. Dos 88 artigos escolhidos, 54 foram escritos pelos dois amigos, o que demonstra a relevância dos interesses que vinham sendo manifestados por eles. As práticas difundidas por esses autores influenciaram os interesses dos novos pesquisadores.

Esses fatores podem ser mais bem evidenciados a partir da rede de interações dos matemáticos que participam dessa comunidade. Como no caso do CMJ, essa rede também destaca a interação dos matemáticos britânicos com os do continente e, com isso, evidencia como as interseções dos trabalhos criam o lastro para o surgimento da

comunidade de pesquisa em matemático no Reino Unido. Observando as referências dos artigos selecionados chegamos à seguinte configuração:

Figura 22 – Rede de Interações Fase 2



Fonte – Elaborada pelo Autor

O primeiro olhar sobre essa rede revela um aumento considerável no número de participantes em relação ao primeiro período. Além disso, a produção de conhecimentos dos autores base também aumentou. Sylvester, que antes havia publicado 5 trabalhos, publicou, nesse período, 37 artigos que lidam com polinômios homogêneos e rotação, enquanto Cayley saiu de 10 artigos para 22 trabalhos. Boole e Salmon mantiveram uma média de produção, tendo publicado 3 e 6 artigos respectivamente. Paralelamente às produções desses personagens, percebemos o surgimento de novos autores base: Thomas Weddle, com 8 artigos publicados nos jornais britânicos e James Cockle, com 7 trabalhos. Além destes, encontramos o primeiro autor relevante não britânico: Charles Hermite, que, apesar de apresentar uma produção de 2 artigos, entra na lista dos autores base por conta de sua produção ao longo das três fases em jornais britânicos ou não.

Os novos personagens reforçam as investigações sobre geometria do espaço, no

caso de Weddle; a busca por transformações que reduzam os polinômios a suas formas canônicas, no caso de Cockle; e novas contribuições para os estudos sobre os *invariantes* algébricos, no caso de Hermite. Destacamos que, com exceção do francês, apresentam abordagens alternativas para as discussões do grupo. Essa característica, que será melhor detalhada na análise das redes temáticas, revela a consolidação da comunidade, uma vez que suas práticas começaram a passar por um processo de ressignificação que permite a discussão de suas próprias práticas. Nesse sentido, o papel de autores como Cockle e Weddle auxilia no ganho de credibilidade de todos os matemáticos envolvidos na rede, pois reforçam suas bases teóricas aos olhos dos leitores dos periódicos.

Outro fator que merece destaque na segunda rede de interações é a intensidade das interações que existem entre os pesquisadores. Esse fator aparece de forma mais evidente que na rede constituída na Fase 1 e caracteriza o caminho por onde as práticas são difundidas. Esse trajeto das ideias define os limites da comunidade, uma vez que é possível verificar que esta é fechada. Em outras palavras, as conexões apresentadas pelos vetores mostram que os conceitos circulam entre os matemáticos sem se ligarem a autores que não interagem com outros, que não fazem parte da própria comunidade.

No caso de autores que não apresentam interação explícita, como é o caso de Ferrers e Donkin, estes participam das discussões sobre os temas em outros períodos, como fica mais evidente quando analisamos as redes temáticas. Lembramos que Ferrers é um dos autores base das redes de interação e conta com um número significativo de publicações. Já no caso de Donkin, o matemático se destaca por suas contribuições com o movimento de rotação. Por outro lado, os casos de Coltman, Walton e Frost lidam com problemas que utilizam as técnicas da comunidade.

As interações mais fortes ficam restritas a Sylvester, Cayley, Salmon e Hermite, justamente os matemáticos que se empenharam mais no desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. Com essa informação, é importante lembrar que o trabalho de Sylvester apresenta forte inspiração nas produções do continente, como destacamos no último capítulo. Nesse sentido, a rede evidencia a intensidade de suas interações com Sturm e Hermite. Existe uma diferença nas participações destes dois matemáticos na rede, uma vez que o primeiro não participa diretamente da produção de conhecimentos do grupo e o segundo influencia as práticas de outros membros da comunidade, como é o caso de Cayley e Cockle.

Como já discutimos neste trabalho, a relação entre Sylvester e Sturm se dá por intermédio da Lei de Inércia para formas quadráticas, a qual se mostra como um caminho para solução do problema da *Equação Secular* (SINACEUR, 1991). Essa equação fez parte do interesse de vários personagens que compõem a rede que apresentamos neste texto. Brechenmacher (2014) afirma que essa equação, apresentada por Lagrange na

década de 1760, desempenhou papel central na mecânica e na geometria europeias do século XIX. O problema da redução de polinômios homogêneos à soma de quadrados, positivos e negativos, faz parte dos interesses dos personagens das redes de interações e uma conexão comum, se revela através da *Equação Secular* e de sua relação com o teorema do matemático francês.

No caso de Hermite, destacamos seu papel no desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. Além de sua participação como membro do corpo editorial do QJPAM, o matemático francês demonstrou interesses pelo estudo da teoria aritmética de formas quadráticas e das funções contínuas entre 1847 e 1851 (GILLISPIE, 1981, v.6, p. 308). Essa afirmação o relaciona com Sylvester e com a *Teoria dos Invariantes*, uma vez que os interesses de Hermite no período citado estavam associados à redução de polinômios homogêneos, o que está diretamente conectado com Lei de Inércia para formas quadráticas e com a *Equação Secular* (BRECHENMACHER, 2012).

Outro fator, que aproxima Hermite e Sylvester é sua contribuição no desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*, o que pode ser verificado quando o matemático inglês associa seu trabalho sobre a nomenclatura da nova Teoria a uma das técnicas desenvolvidas pelo matemático francês. Como destacamos no capítulo anterior, o matemático inglês comparou seu conceito de *contravariantes* às formas adjuntivas do francês, através do processo de extensão empregado para determinar o recíproco polar de um locus geométrico. Esse fator, nos mostra como a *Teoria dos Invariantes* que estava sendo desenvolvida no Reino Unido tinha capacidade de adesão a teorias, técnicas ou conceitos de outras áreas. Além disso, evidencia-se a forma como a interação entre os dois matemáticos acontece. Outra conexão com um matemático do continente que merece destaque é a ligação com Jacobi, evidenciada através do texto publicado por Boole na Fase 1 e revelada através dos determinantes que são conhecidos como jacobianos. Na visão de Sylvester, esse objeto matemático pode ser compreendido como um *concomitante*.

Se agora todos os equivalentes lineares de uma ou de duas formas associadas estão similarmente relacionados aos equivalentes lineares correspondentes da outra, de modo que cada um pode ser derivado de cada um pela mesma lei, as formas assim associadas serão consideradas concomitantes cada uma com a de outros.¹⁴ (SYLVESTER, 1851e, p. 290, Tradução Nossa)

Na descrição acima, os equivalentes lineares são as formas algébricas transformadas através de substituições lineares. As formas associadas são expressões conectadas a essas

¹⁴If now all the linear equivalents of one or of two associated forms are similarly related to corresponding linear equivalents of the other, so that each may be derived from each by the same law, the forms so associated will be said to be concomitant each to the other.

formas, como é o caso do determinante da matriz formada pelas diferenciais parciais. O jacobiano foi tratado por Sylvester como um tipo de *invariante*, que resulta da combinação de um sistema de 9 funções homogêneas que derivam da diferenciação parcial de 3 outras em três variáveis x , y e z .

Essas relações evidenciadas através da *Teoria dos Invariantes* trazem conexões com outros matemáticos alemães, que também participaram do desenvolvimento da Teoria, como é o caso de Aronhold, Hesse Eisenstein e Joachimsthal. O primeiro estabeleceu uma teoria para obter *invariantes* a partir de diferenciais de primeira ordem de uma forma algébrica (GILLISPIE, 1981, v.1). Os *invariantes de Aronhold*, como ficaram conhecidos, passam a ser objeto de estudos de Sylvester a partir da publicação dos artigos sobre o cálculo das formas. O interesse pelas investigações com formas algébricas, foi manifestado por Eisenstein em publicações nos volumes 27 e 28 do *Jornal do Crelle* de 1844. Nesses textos, o autor tratou de transformações em polinômios homogêneos de graus 2 e 3 e apresentou expressões que passaram a ser considerados como *invariantes* ou *covariantes* na década seguinte (GILLISPIE, 1981, v.4).

Esses dois casos revelam que a distância entre matemáticos britânicos e do continente, que antes era motivo de preocupação, diminui quando o assunto são os *invariantes* algébricos. Essa percepção se reforça quando observamos a conexão de Sylvester com Hesse, que lidou com Teoria de Eliminação em 1842. Além disso, o matemático alemão também relacionou os polinômios homogêneos a problemas sobre pontos de contatos de curvas. De acordo com Gillispie (1981, v.6), o determinante hessiano (objeto matemático utilizado por Sylvester no seu desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*) permite extrapolar os resultados geométricos para superfícies e curvas de ordens superiores a 2 e 3.

Nesse contexto, podemos notar outro ponto de inspiração para os artigos sobre locus de curvas algébricas e sobre os problemas de contatos de curvas e superfícies publicados por Sylvester na década de 1850. O conhecimento sobre a geometria em coordenadas homogêneas de Julius Plücker, associado às interpretações de Hesse das transformações e às interações sobre os *invariantes* com Cayley, Boole e Salmon, propiciaram um terreno fértil para a obra do matemático inglês.

As interações internacionais de Sylvester sob uma perspectiva geométrica ainda se revelam em artigos de Carl Wilhelm Borchardt (1817 – 1880) e Ferdinand Joachimsthal (1818 – 1861). Apesar de uma interação de menor intensidade com estes dois, é possível identificar o interesse por problemas geométricos de contatos em formas algébricas nos trabalhos de Joachimsthal, bem como o interesse pelas transformações de polinômios homogêneos nos de Borchardt.

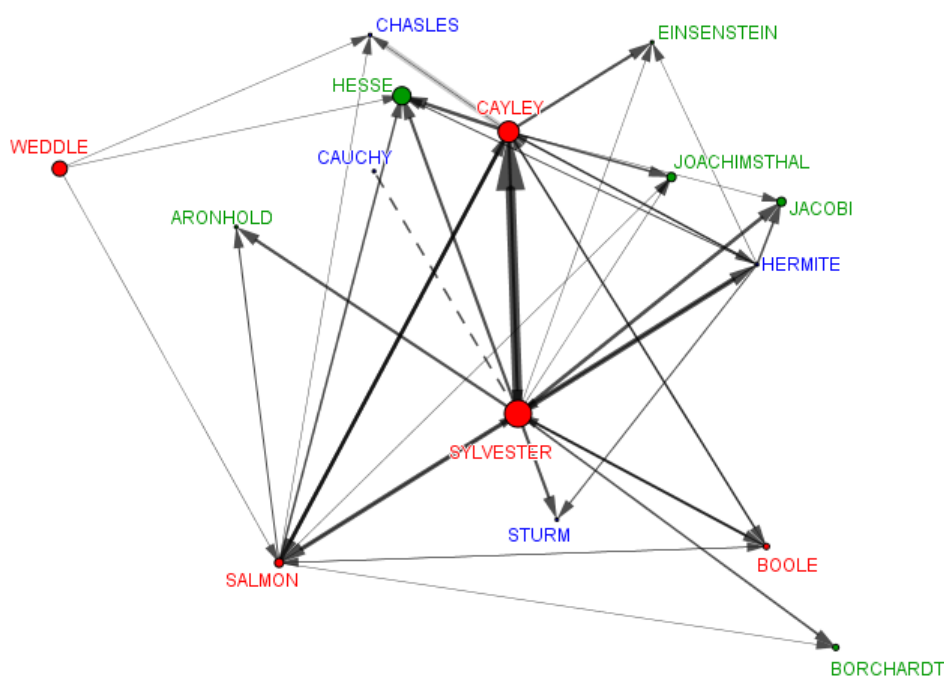
Com isso, podemos perceber que Sylvester foi um dos personagens que impulsionou

as conexões com matemáticos do continente. Essa observação se encaixa com um momento de inovação na pesquisa em matemática no Reino Unido, com o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. Nesse contexto, também se pode observar que a participação dos personagens principais dessa prática britânica se intensificou notoriamente em comparação com as interações que ocorreram na Fase 1 de nossas análises.

No período de 1845 a 1855, a participação de do *núcleo dos invariantes*, representado por Cayley, Boole e Salmon além de Sylvester, se caracteriza pelo desenvolvimento de técnicas para calcular *invariantes*, como é o caso dos *Hyperdeterminantes*, além de especificações sobre possíveis aplicações da Teoria. Estes aspectos são responsáveis por estreitar as relações com a matemática produzida nos outros países.

Diferentemente da Fase 1, a segunda fase apresenta um volume muito maior de autores não britânicos. Como forma de compreender as ideias que chegam do exterior para os britânicos e quem são os personagens da comunidade que mais lidam com práticas de outros países, optamos por apresentar, na imagem a seguir, uma versão reduzida da rede da figura 22:

Figura 23 – Principais Interações Internacionais



Fonte – Elaborada pelo Autor

Na rede acima, consideramos apenas os matemáticos britânicos que tiveram interações com pesquisadores do continente em três, ou mais edições de jornais. Como podemos perceber, ao compararmos as figuras 22 e 23, os personagens ingleses principais da história da *Teoria dos Invariantes* representam a maior parte das ligações entre as produções que

lidam com polinômios homogêneos e os interesses de matemáticos do continente. Nessa comunidade de práticas, o núcleo de pesquisadores apresentados na rede acima teve papel central na construção da credibilidade da comunidade de pesquisa em matemática da grande ilha.

É importante destacar a participação de Salmon nessa rede, que funciona como uma referência para os outros personagens. Como veremos mais adiante, esse fator se deve à natureza geométrica de seus trabalhos, característica que auxilia as perspectivas de Cayley e Sylvester ao longo do desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. Outro personagem importante dessa rede é Thomas Weddle. Podemos notar, de forma mais explícita, o caráter geométrico dos trabalhos com polinômios homogêneos, uma vez que o professor do Royal Military College, Sandhurst se dedicou a estudar problemas descritos por matemáticos franceses, como Chasles e Poncelet. A novidade desses artigos é a extensão dos teoremas de Pascal e Brianchon para três dimensões, uma abordagem que foi tratada por Sylvester no volume 27 da *Philosophical Magazine* de 1850.

A presença de Weddle na rede representa um grupo de matemáticos que se junta aos protagonistas da *Teoria dos Invariantes*, fato que traz mais consistência para a comunidade de práticas. Entre os nomes que merecem destaque, James Cockle surge como um personagem que propõe abordagens alternativas para o problema de reduzir um polinômio de grau n em soma de quadrados positivos e negativos. Uma característica importante desse matemático é o nível de interação que ele mantém com os personagens centrais da rede, o que demonstra sua importância para a consolidação da comunidade de práticas.

Com isso, podemos notar que os autores base dessa rede são os principais responsáveis pela internacionalização dela. Esse fato nos mostra que a presença de outros pesquisadores na rede precisa ser mais bem compreendida. Como na Fase 1, apresentamos um breve relato acerca dos outros participantes.

William Walton (1813 - 1901), foi editor do CMJ após a morte de Duncan Gregory. Seu trabalho em geral se concentra no que ele chamou de álgebra geométrica, que se trata de uma extensão da obra de Peacock. Suas contribuições para a comunidade se restringem a um artigo que trata sobre a curvatura de superfícies de 2ª ordem. Outro autor que trata dessa mesma temática é George Whitehead Hearn (1812 - 1851), professor do Royal Military College de Sandhurst. Entre suas produções de conhecimento ele apresenta uma abordagem analítica dos problemas de Chasles.

Retornando para a figura 22, percebemos a presença de Spottiswoode, um personagem relevante da comunidade que não consta na tabela 8 em função de este matemático não ter publicado nos jornais ingleses. Entretanto, o pesquisador publicou três artigos

no *Jornal do Crelle* em 1852 e 1854, que serviram de referência para autores do núcleo da *Teoria dos Invariantes*, como os próprios Sylvester e Cayley. Com isso, temos uma evidência de um movimento de expansão da produção de conhecimento para além do território britânico.

Além dos trabalhos com polinômios homogêneos, destacamos as participações de artigos que lidam com a mecânica das rotações. Nessa temática encontramos as publicações de Sylvester, que discutimos no Capítulo 3, textos de Cayley e Bronwim. Os três personagens nos mostram mais uma evidência dos desdobramentos dos conhecimentos produzidos pela comunidade.

Como novidade, há a participação do astrônomo William Fishburn Donkin (1814 – 1869), formado na University College, em 1836 conseguindo seu mestrado em 1839. Foi professor de matemática do St. Edmund Hall de Oxford, mesmo colégio onde estudou quando jovem. Após seis anos, se tornou professor de astronomia em Oxford, cargo que ocupou até o final da vida.

Sua contribuição para a comunidade ocorre por meio de três artigos sobre problemas de rotação e teoria dos determinantes. Destacamos suas relações com os matemáticos do núcleo central da rede, uma vez que se percebe o interesse pela transformação de polinômios com o objetivo de determinar os eixos principais de rotação. Além disso, os artigos de Donkin se articulam com os interesses de Sylvester sobre rotação de corpos rígidos, tendo como referência em comum a obra de Louis Poinot (1777 – 1859).

De acordo com Gillispie (1981, v. 11), Poinot foi o responsável por estabelecer uma forma puramente geométrica à existência dos eixos de rotação permanente e elaborou uma representação muito elegante do movimento rotativo pelo rolamento do elipsoide de inércia de um corpo em um plano fixo. Como já discutimos no capítulo anterior, essa abordagem faz parte dos interesses manifestados por Sylvester na década de 1860, o que reflete conexões com o trabalho de Donkin.

Outros nomes britânicos de menor nível de interação como personagens da rede também apresentam contribuições. É o caso de Benjamin Dickson, Coltman e Hearn. Apesar de não serem nomes conhecidos que contribuíram com peso para a comunidade, suas presenças na rede de interações nos mostram que os assuntos tratados pelos protagonistas despertaram interesses de potenciais pesquisadores.

A Fase 2 se caracteriza pela ampliação dos personagens que participam das pesquisas que lidam com polinômios homogêneos, fator que traz lastro à produção matemática britânica. Além disso, esse período marca o surgimento e o desenvolvimento dos conceitos básicos da *Teoria dos Invariantes*, o que atrai interesses dos matemáticos de outros centros.

Dessa forma, as práticas compartilhadas se revelam a partir das temáticas de redução de polinômios para soma de quadrados, problemas de contatos, locus de curvas algébricas e movimentos de rotação.

Além das evidências que apresentamos nesta seção, o reconhecimento da produção matemática britânica confirma a constituição de uma comunidade de práticas, ao longo do período de 1845 a 1855, o que se reflete nos participantes da nova versão dos jornais de Cambridge, o QJPAM. Além disso, esse reconhecimento se manifesta em jornais do continente como o *Nouvelles Annales des Mathématiques*, onde Terquem apresenta considerações sobre as noções de *invariantes* e *covariantes* (NAM, 1859) e no *Jornal do Crelle*, onde Cayley tem um papel importante na divulgação de seus resultados e dos produzidos por seu amigo Sylvester.

4.7 Fase 3: 1855-1865

No terceiro período, vemos o surgimento do *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, última versão dos jornais de Cambridge. Devido ao recorte desta tese, analisamos os artigos que figuraram até 1865, período que contou com 6 volumes. Sylvester foi o responsável pela edição, ao lado de Cayley, Hermite e Stokes, os quais trabalharam de 1855 a 1857 para o lançamento do primeiro volume.

Além de manter o espaço de discussões onde matemáticos britânicos podiam publicar seus resultados e ideias, o início do QJPAM inaugura o movimento final que proporciona o lastro necessário para a formação da comunidade de pesquisa que se materializou com a fundação da London Mathematical Society em 1865. Esse lastro se manifesta no aumento da presença de matemáticos do continente publicando no novo jornal, com contribuições dos franceses Hermite e Eugène Prouhet (1817 – 1867); os irlandeses Andrew Searle Hart (1811 – 1890), James Clerk Maxwell (1831 – 1879), Michael Roberts (1817 – 1882) e Salmon; os italianos Francesco Brioschi (1824 – 1897) e Francesco Faà di Bruno (1825 – 1888); os alemães Ernst Reinhold Eduard Hoppe (1816 – 1900) e Alfred Enneper (1830 – 1885); o suíço Ludwig Schläfli (1814 – 1895); e, finalmente, o escocês Peter Guthrie Tait (1831 – 1901). Essa diversidade de autores expressa que a matemática britânica se encontra, ao mesmo tempo, aberta para a produção dos matemáticos do continente e reconhecida por eles.

Esse período revela um processo de consolidação da pesquisa em matemática no Reino Unido, como podemos notar na seguinte citação:

Mais uma vez, quando convidamos matemáticos a nos enviar artigos elementares sobre ramos comparativamente novos da matemática, que dificilmente são incluídos no curso normal das universidades, não é sem

uma profunda convicção do valor dos estudos progressivos para o aluno. O artigo sobre Determinantes, que publicamos no presente número, é um exemplo de um assunto que foi apresentado pela primeira vez a estudantes de Cambridge em três lugares quase simultaneamente, e esperamos que possa ser seguido por artigos semelhantes sobre o progresso que essa análise fez recentemente na eliminação e transformação de equações. ¹⁵ (BLAKE; WHITWORTH, 1862, p. 3, Tradução Nossa)

Esse é um trecho do primeiro volume do *The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, jornal fundado em 1862 com o objetivo de situar os estudantes das três universidades que compõem seu título. Diferente do CMJ, que buscava atender aos estudos dos alunos para o Tripos Exam, o *Messenger of Mathematics* refletia uma demanda pela compreensão das pesquisas recentemente produzidas no Reino Unido. Esta citação também nos mostra, para além do interesse dos editores na pesquisa sobre transformações e eliminação, o reconhecimento da sua importância no cenário nacional.

Além da presença de autores estrangeiros, é possível observar o surgimento de novos matemáticos interessados na *Teoria dos Invariantes*, o que reforça a noção da centralidade do seu papel para a comunidade de pesquisas que se desenvolvia. O levantamento dos trabalhos que lidaram com polinômios homogêneos no QJPAM nesse terceiro período resultou na seguinte distribuição:

Tabela 9 – Distribuição dos autores no QJPAM

POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS							
AUTOR	V1	V2	V3	V4	V5	V6	TOTAL
Arthur Cayley	4	6	5	2	3	5	25
Norman Ferrers	2	2		2	3		9
Michael Roberts				4	3		7
George Salmon	3		2		1	1	7
James Cockle		1		2	1		4

¹⁵Again, when we invite mathematicians to send us elementary papers on comparatively new branches of mathematics, which are scarcely included in the ordinary course at the Universities, it is not without a profound conviction of the value of progressive studies to the student. The paper on Determinants which we publish in the present number, is an example of a subject which has been for the first time laid before Cambridge students in three places almost simultaneously, and we hope it may be followed by similar papers on the progress which analysis has made recently in elimination and transformation of equations.

AUTOR	V1	V2	V3	V4	V5	V6	TOTAL
James W. Warren				1		3	4
Samuel Roberts		2	1				3
Edward Routh						2	2
Howard Elphinstone		2					2
Henry R. Greer					1	1	2
Robert Harley			1		1		2
Ludwig Schläfli		2					2
Francesco Brioschi	1						1
E. J. Stone			1				1
Faà di Bruno	1						1
G. M. Slessor				1			1
Charles Hermite	1						1
J. J. Walker						1	1
Joseph Wolstenholme			1				1
John Griffins						1	1
Lawrence Smith		1					1
P. J. Hensley					1		1
William Rankine	1						1
V. von Zeipel			1				1
William Allen Whitworth					1		1
TOTAL	13	16	12	12	15	14	82

O perfil dos autores que publicaram no jornal se aproximava mais de pesquisadores. Além disso, a presença de autores estrangeiros, em maior volume, indica uma tendência de mudança do olhar do continente para a ilha. Apesar disso, a profissionalização ainda não era uma realidade. Quando olhamos para os demais periódicos, podemos perceber a intensidade de contribuições dos personagens da rede.

Tabela 10 – Fase 3 da Comunidade de práticas nos jornais britânicos

PERSONAGENS DA 3ª REDE												
AUTOR	1855	1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865	TOTAL
Arthur Cayley		2	7	13	2	4	4	3		5	1	41
George Salmon			3	1		3		1		1		9
Norman Ferrers			2	2			2	3				9
Michael Roberts							4	3				7
James Cockle				1			2	1				4
James Warren							1			3		4
Samuel Roberts				2		1						3
JJ Sylvester		1		1								2
Chales Hermite			2									2
Edward Routh										2		2
Howard Elphinstone				2								2
Robert Harley						1		1				2
William Spottiswoode								1			1	2
Henry R Greer								1		1		2
William Rankine			1									1
Faá Di Bruno			1									1
François Brioschi			1									1
Lawrence Smith				1								1
Edward Stone						1						1
Joseph Wolstenholme						1						1
George Slesser							1					1
William Whitworth								1				1
John Walker										1		1
John Griffiths										1		1
Julius Plücker											1	1
TOTAL	0	3	17	23	2	11	14	15	0	14	3	102

Fonte – Elaborada pelo autor

Alguns autores da tabela já são bem conhecidos em nosso trabalho. Este é o caso de Cayley, Salmon, Hermite, Ferrers e do próprio Sylvester, uma vez que se tratam dos autores base das redes que já apresentamos. Entretanto, é notória a presença de novos autores britânicos, interessados nas temáticas estudadas por esse grupo. Em sua maioria, os novos nomes são de pessoas que vieram a trabalhar com matemática em um momento próximo da fundação à LMS. Destacamos breves características de alguns desses autores a seguir:

Samuel Roberts (1837 - 1913): Formado no Universidade de Londres em 1849, ganhava a vida como advogado. Tornou-se membro da Sociedade Matemática de Londres no ano de fundação e dela foi tesoureiro entre 1871 e 1878, vice-presidente entre 1880 e 1882, voltando a ser tesoureiro entre 1882 e 1884 (GLAISHER, 1914).

Howard Warburton Elphinstone (1830 - 1917): Baronês britânico, se formou no Trinity College em Cambridge e ganhou a vida como advogado.

Robert Harley (1828 - 1910): professor de matemática do Ensino Fundamental que se interessou pelas práticas de Cockle e Cayley e se tornou secretário da seção A da BAAS (LEE, 1912a).

William John Macquorn Rankine (1820 – 1872): Físico Escocês, professor da Universidade de Glasgow, membro Royal Society of Edimburgh.

Edward James Stone (1831 – 1897): Astrônomo. Quinto Wrangler em 1859 e assistente-chefe do Observatório Real de Greenwich. Foi eleito presidente da Royal Astronomical Society em 1883 (CHISHOLM, 1911).

Joseph Wolstenholme (1829 – 1891): Se formou no St Johns College de Cambridge, tendo sido terceiro Wrangler em 1850. Foi examinador do Tripos em 1854, 1856, 1863 e 1870, moderador em 1862, 1869 e 1870. Se tornou professor do Royal Indian Engineering College (MATTHEW et al., 2004).

William Allen Whitworth (1840 – 1905): Formado no St. Johns College de Cambridge, onde se graduou em 1862 sendo o 16º wrangler no Tripos Exam. Foi professor de matemática do Queens' College entre 1862 e 1864. É um dos editores do Oxford Cambridge and Dublin Mathematical Mensseger of Mathematics (LEE, 1912b).

John James Walker (1825 – 1900): Membro da LMS. Formado no Trinity College Dublin e ganhava a vida como tutor particular. De 1865 em diante embarca na carreira clerical além de se tornar um dos treinadores famosos do exame Tripo, como foi o caso de Edward Routh (1831 - 1907), um dos fundadores da LMS, que contribuiu com 2 artigos sobre *Teoria dos Invariantes*.

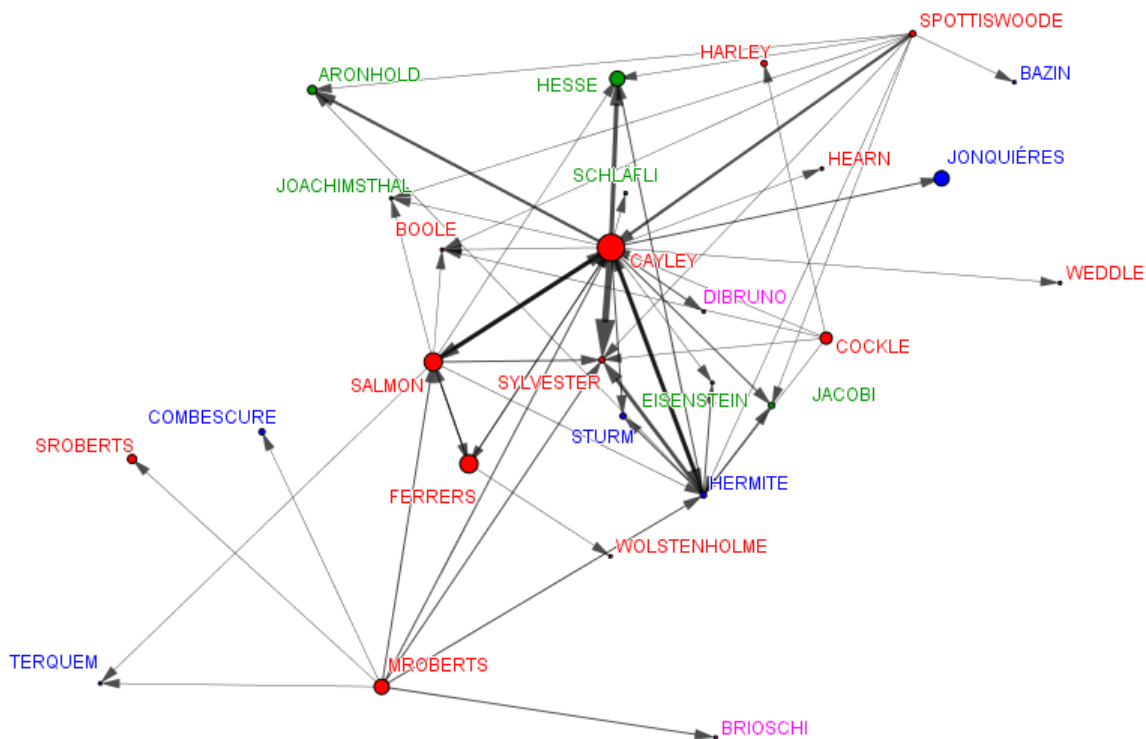
Além desses personagens, existem outros que se dedicavam apenas aos problemas de matemática que circulava nas instituições de ensino. É o caso de Henry R Greer, instrutor de matemática e aritmética na Royal Military Academy de Sandhurst.

George Middleton Slessor (1834 - 1862), formado no Queen’s College de Cambridge em 1858, sendo Sênior Wrangler no Tripos Exam. Apesar de seu talento, não se encontram registros de contribuições suas para a pesquisa.

Outros personagens menos conhecidos atendem pelos nomes de Lawrence Smith e John Griffiths (1837 - 1916), sendo este último professor do Jesus College de Oxford.

Esse surgimento de novos personagens nos mostra a ampliação do espaço para pesquisa e produção de conhecimento matemático no Reino Unido. Em comum, os autores base que destacamos anteriormente e os recém-chegados na tabela acima contam com a proximidade a instituições que se dedicavam a promover a disciplina, em especial a London Mathematical Society. É importante observar as práticas de alguns autores, mesmo que estes não sejam destacados em rede, uma vez que suas produções fazem parte do domínio em que ocorrem as investigações conduzidas pela comunidade.

Figura 24 – Rede de Interações - Fase 3



Fonte – Elaborada pelo Autor

Como podemos observar, os autores que desenvolveram as bases da *Teoria dos Invariantes* passam a ser percebidos como referências para os novos trabalhos que com-

põem a terceira nova fase da comunidade de práticas. Apesar da redução do número de publicações, o trabalho de Sylvester se mostra como inspiração para vários autores. Além Boole e Cayley, que o acompanham nas ideias da nova Teoria sobre polinômios homogêneos, Spottiswoode discute de maneira sistemática o trabalho sobre as matrizes e determinantes, análise que culminou no texto "Elementary Theorems relating to Determinants" (SPOTTISWOODE, 1856), publicado em duas partes no *Jornal do Crelle*. Outro personagem que merece destaque é Michael Roberts, que utiliza a ideia de *concomitantes* de Sylvester como meio para analisar os *covariantes* de equações quárticas.

Em nova evolução das redes de interações, podemos observar que o contato com os matemáticos não britânicos não esteve mais restrito apenas aos matemáticos pioneiros da *Teoria dos Invariantes*. Além disso, é perceptível na figura 24, que as relações com os autores estrangeiros também foram mais diversificadas, indo além dos contatos com personagens dos Estados Alemães e agregando novos nomes franceses. Esse aumento ocorre paralelamente aos contatos que Sylvester realiza com representantes da Academia de Ciências de Paris e à sua consequente nomeação de membro correspondente em 1863 (PARSHALL; SENETA, 1997). Dada essa contextualização, entendemos que, além de tornar-se referência nos artigos, a *Comunidade Britânica dos Invariantes* também ganhava credibilidade por conta de seus principais nomes: Cayley, Spottiswoode, Salmon e Sylvester.

A presença de novos personagens demonstra a influência das investigações conduzidas pelos autores que iniciaram as discussões no Reino Unido. Sendo assim, é necessário passarmos a olhar a participação dos novos integrantes da comunidade mais de perto. No caso de Spottiswoode, observamos que suas produções publicadas nos jornais britânicos tratam de problemas de contatos entre curvas de segunda ordem, utilizando referências de Cayley e de Hesse, através do hessiano. As outras conexões que encontramos (com Sylvester, Hermite, Aronhold, Joachimsthal e Jacobi) ocorrem no *Jornal do Crelle*, fato que revela o papel desse matemático como divulgador das práticas britânicas nos Estados Alemães, característica importante para o processo de consolidação da comunidade britânica matemática no Reino Unido e no continente.

Por outro lado, o caso de Michael Roberts, que apresenta conexões com personagens semelhantes aos de Spottiswoode, traz uma interação com os matemáticos franceses. As referências a autores como Combescure, Terquem e Hermite evidenciam a disseminação da *Teoria dos Invariantes* no continente, a qual como veremos no capítulo 6, começa a ter maior repercussão na Europa. Essa afirmação se respalda no fato de as publicações de Roberts datarem de 1861 e 1862, poucos anos após as publicações dos franceses divulgando a nova Teoria britânica.

Essa rede também mostra autores que reverberam em outros países as temáticas de interesse desta tese. Nomes como Faa Di Bruno, Combescure, Jonquières, Bazin e Brioschi

são exemplos de matemáticos que contribuem e, como consequência, validam o processo britânico de produção de conhecimentos matemáticos, no que diz respeito às investigações sobre os polinômios homogêneos. É importante destacar que estes são personagens que foram citados pelos autores que publicaram nos jornais do Reino Unido.

Com relação aos britânicos, Cayley também se mostra como uma referência importante, assim como Boole e Salmon. As características desses autores se mantêm semelhantes à Fase 2, o primeiro é uma referência para investigações sobre transformações lineares e o segundo para problemas de geometria com interpretação algébrica.

As redes de interações dos textos centradas na perspectiva de Sylvester nos mostram a evolução da população de pesquisadores interessados nas discussões que se associam aos polinômios homogêneos. No entanto, essa é uma visão superficial dos trabalhos, que se concentra na trajetória das ideias e técnicas compartilhadas pela comunidade. É importante verificar os detalhes dos artigos, de modo que se identifique como as ideias são trabalhadas por cada autor, uma vez que esse procedimento nos permitirá compreender seu papel na difusão dos conceitos.

É importante lembrar que as análises dos artigos dos personagens serão conduzidas à luz da apreciação que fizemos dos artigos produzidos por Sylvester nas diferentes temáticas. A próxima seção também tem a finalidade de situar o matemático inglês no processo de produção de conhecimento na área.

Conclusão

Como apresentado no início deste capítulo, as análises da participação dos autores, que lidam com investigações sobre polinômios homogêneos nos jornais britânicos permitem o estabelecimento de um panorama geográfico de seu perfil e do modo como eles participam da produção de conhecimento matemático na comunidade. Esse panorama vai se construindo ao longo do tempo, o que faz com que os autores pioneiros se situem numa posição central da comunidade, no sentido de nortear os interesses manifestados pelos participantes do grupo.

O número de artigos que lidam com polinômios homogêneos, publicados em cada fase de análise também explica as posições dos autores na comunidade. Quando olhamos para as tabelas 6, 8 e 10, percebemos um aumento considerável no volume de publicações que lidam com polinômios homogêneos, o que reafirma o crescimento do interesse britânico a respeito das temáticas propostas pela comunidade.

Após levantamento dos autores, podemos notar a formação de alguns subgrupos, cujo papel define uma característica importante da comunidade de práticas que estamos

estudando. Primeiramente, personagens como Boole, Cayley, Salmon e Sylvester podem ser compreendidos como pioneiros, formando o *núcleo dos invariantes*, como nomeamos, pois se fazem presentes nas três fases de evolução da comunidade com participação expressiva nas interações da rede. Destacamos que tais autores tornaram-se referências para os novos nomes que passaram a constituir a comunidade.

Autores como Cockle, Spottiswoode, Michael Roberts e Weddle podem ser entendidos como um subgrupo de matemáticos fomentadores, uma vez que sua participação se caracterizou por reflexões sobre as práticas desenvolvidas pelos matemáticos do *núcleo dos invariantes*, fator que fomenta novas discussões e proporciona novas negociações de significados. Além de aumentar o número de integrantes da comunidade, o surgimento de novos matemáticos com esse papel afirma a identidade do grupo como um todo, pois reafirma suas práticas. Essa perspectiva se confirma através do fechamento das redes 22 e 24, que indicam a circulação de ideias no interior de uma comunidade centrada nos pioneiros.

Por sua vez, autores como Ferrers, Gregory e Smith podem ser vistos como aplicadores, pois não propõem técnicas novas a respeito da Teoria central da comunidade, mas participam de forma ativa de sua constituição. No caso de Ferrers, encontramos um volume significativo de publicações. Os três ainda foram editores dos jornais de Cambridge em suas respectivas épocas. Encontramos, ainda, matemáticos que não aderiram completamente às práticas do grupo, como Dickson, Coltman, Cotterill, Walton e Frost, que figuraram na Fase 2 das análises; e Samuel Roberts, Wolstenholme, Hearn e Harley, que figuram na Fase 3.

Entendemos que análises dos textos via redes de interações permitem a construção de um panorama geográfico bem definido, com os papéis dos integrantes. Do ponto de vista de Wenger (1999) e Wenger-Trayner e Wenger-Trayner (2015), esse aspecto se adequa à noção de comunidade como um dos descritores das Comunidades de Práticas. Ao longo da evolução dos jornais Cambridge, a aglutinação dos personagens revela interesse por certas temáticas, como é caso da *Teoria dos Invariantes*. Observando a rede da figura 21, apesar do baixo número de publicações e de uma produção ainda difusa, relacionada ao tratamento dos polinômios homogêneos, percebemos que a participação de Boole desperta interesse para o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*.

O mesmo ocorre na rede da Fase 2 (figura: 22), na qual podemos perceber o surgimento de novos personagens importantes para a comunidade, além da consolidação dos autores centrais. Sendo assim o protagonismo de Cayley e Sylvester influencia as produções de outros autores como: Cockle, Spottiswoode e Salmon. Além disso, ambos os personagens estabelecem um contato importante com matemáticos do continente, como pode ser visto na figura 23, que representa as relações desses personagens com a matemática

produzida no exterior.

A rede construída para a Fase 3 (figura: 24) apresentou o panorama final da formação da comunidade de práticas até a fundação da LMS. Cayley e Sylvester seguem sendo personagens centrais da comunidade, acompanhados por Salmon. O primeiro manteve alta produção de artigos, o segundo trabalhou na edição do QJPAM, enquanto o terceiro se dedica à produção de livros-textos que contribuíram para a divulgação dos estudos sobre a *Teoria dos Invariantes*. Além disso, esses matemáticos passam a ser referências frequentes para os outros participantes da rede. O mesmo fenômeno ocorre com Boole que, embora não tenha publicado novos artigos no período da Fase 3, se consolida como uma referência para as investigações que lidam com transformações de formas algébricas.

Sobre a participação de outros autores relevantes, é importante destacar que o papel desempenhado por eles é caracterizado pela reflexão sobre os trabalhos que foram produzidos no período, o que revela mais um elo entre o Reino Unido e o continente para além do já estabelecido por Cayley e Sylvester em outros períodos. A esse respeito, destacamos o trabalho de Spottiswoode, que reflete sobre as propriedades dos determinantes utilizadas no desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*; Michael Roberts, que contribui com novas propriedades dos *invariantes* para formas quárticas; e Cockle, que se dedica a estudar as reduções de polinômios à soma de quadrados por meio de uma nova proposta.

A influência dos autores do continente também se destaca nas redes. Considerando a evolução ao longo dos três períodos, a participação dos "estrangeiros" tem crescimento significativo e consolida a presença dos seguintes nomes: Aronhold, Hesse, Joachimsthal, Hermite e Sturm, que se mostraram como referências importantes do núcleo da comunidade britânica. É importante ressaltar que as redes 22 e 24 revelam o surgimento de novos autores do continente, o que comprova a recepção da produção dos matemáticos do Reino Unido. Além disso, os franceses Combesure, Terquem, Jonquière e Bazin, além do alemão Einsesntein lidam diretamente com os problemas que surgem ao longo do desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*, o que nos mostra que o tema tem importância central na formação da comunidade.

O papel dos autores relevantes é mais um aspecto a ser observado. Da lista que destacamos neste capítulo, três personagens viriam a se tornar presidentes da LMS: Sylvester de 1866 a 1868, Cayley de 1868 a 1870 e Spottiswoode de 1870 a 1872. Esse fato também é uma evidência da influência dos três pesquisadores, tanto em solo britânico quanto no continente, os quais são seguidos por um segundo grupo, Boole, Salmon e Ferrers. Por fim, o conjunto dos autores relevantes se completa com a participação de Cockle, Weddle e Michael Roberts.

Apesar do papel de relevância do grupo formado pelos matemáticos que se tornaram presidentes da LMS, essa divisão em trios não hierarquiza sua importância. A ideia aqui é destacar que esses participantes têm funções diferentes, sendo o primeiro grupo caracterizado como condutores, o segundo grupo como divulgadores e o terceiro como investigadores de outros aspectos que não os fundamentais das práticas comunidade, como abordagens alternativas para a redução de polinômios à soma de quadrados, a extensão de problemas de geometria plana para casos espaciais e novos resultados da *Teoria dos Invariantes*.

Os detalhes estabelecidos pelas redes deste capítulo se reservam aos aspectos de interação entre os matemáticos envolvidos em investigações correlatas aos desdobramentos da *Teoria dos Invariantes*. Finalmente, obtemos um retrato da comunidade de práticas que ressalta suas características sociológicas, como destacamos anteriormente. Logicamente, a compreensão do processo de formação desse grupo de matemáticos exige a observação de outros aspectos para além do contexto das interações dos personagens.

No próximo capítulo, apresentaremos a análise dos artigos publicados que orbitam ao redor das temáticas comuns a essa comunidade. Como veremos, outros autores surgem no interior das discussões que povoaram os assuntos. Ao mesmo tempo, o elo com a produção de conhecimento do continente se torna mais evidente. Por fim, entenderemos que as análises definem o perfil e as tendências que caracterizaram a matemática britânica do século XIX.

5 A COMUNIDADE DE PRÁTICAS: TÉCNICAS, IDEIAS E CONCEITOS COMPARTILHADOS

Com o grupo de matemáticos que impulsiona as práticas comuns sobre polinômios homogêneos definido, nos voltamos para a produção de significados. Este é um aspecto importante para a caracterização da comunidade, uma vez que se trata de um processo coletivo de desenvolvimento das ideias que surgem nas discussões científicas. Como Wenger (1999) aponta, é através da participação e da ressignificação que as práticas são internalizadas pelo grupo, gerando uma caracterização particular perante outros pesquisadores, ou seja, os matemáticos do continente no nosso caso.

Como vimos no último capítulo, os personagens da *Comunidade britânica dos Invariantes* podem ser percebidos em subgrupos específicos que auxiliam na compreensão do modo como ocorreram os compartilhamentos de suas práticas. A centralidade de Sylvester e Cayley se mostra acompanhada de delimitações das práticas que emergem do interior da própria comunidade. As temáticas que levantamos no capítulo 3 representam bem as ideias dos matemáticos que integraram o grupo de pesquisadores que lidaram com polinômios homogêneos nos periódicos britânicos.

Neste capítulo, nos concentraremos nas temáticas que identificamos no capítulo 3. Estamos interessados em quais foram as técnicas que conectaram os autores dos artigos e de que modo essas conexões contribuíram para a caracterização da comunidade de práticas que estamos investigando. Além disso, também pudemos verificar como algumas ideias surgiram, de modo que compreendemos os contextos matemáticos, nos quais a influência do *núcleo dos invariantes* se impõe na sociedade britânica. Os questionamentos centrais deste capítulo são: quais práticas caracterizam a identidade da *Comunidade britânica dos Invariantes*? Como elas são transmitidas entre os personagens do grupo?

Na busca pelas respostas, categorizamos os artigos a partir das temáticas, de modo que as análises são feitas segundo cada uma delas, embora vários trabalhos apareçam em mais de uma. Optamos por apresentar os trabalhos em cada categoria a partir dos matemáticos que participam da comunidade, iniciando pelos autores relevantes, suas conexões com a obra de Sylvester, em seguida apresentando os demais e, por fim, apresentando a rede completa que trata da temática.

5.1 Sobre a construção das redes temáticas

Utilizamos um estilo diferente de rede: as redes temáticas. Diferente das interações, o foco passa para ser nas práticas que emergem dos artigos e não nos autores e seus interesses. No nosso caso, optamos por classificar os trabalhos através das categorias: Teoria de Eliminação, Problemas de Contatos, Locus de Curvas e Superfícies, Transformações, Formas Canônicas e Rotação.

A partir dessa classificação, construímos redes utilizando o software de análise estatística gephi, uma plataforma interativa que visa permitir a manipulação, exploração e compreensão de dados, através de suas representações por meio de grafos dinâmicos e/ou hierárquicos e da aplicação de métricas de análise de redes sociais. Destacamos que as análises do software são apenas numéricas e que ele não considera questões subjetivas como importância de um artigo em relação a outro. As redes construídas neste capítulo são organizadas com métricas e complementadas pelas reflexões que apresentaremos a respeito das temáticas listadas anteriormente.

Destacamos que nessas redes as ligações entre os nós não são direcionadas. As métricas utilizadas foram "Modularidade" e "PageRank". O primeiro termo se refere ao índice que representa a formação de conjuntos ou grupo com uma interação mais forte dentro dos grafos. O segundo termo é um algoritmo de análise de rede que atribui pesos numéricos a cada elemento de uma coleção de documentos interligados, com o propósito de determinar a sua importância no grupo por meio de um método de busca. Em outras palavras, trata-se de uma forma determinar a relevância dos nós, com base no número de caminhos que levam até eles. A distribuição dos nós foi estabelecida com a função "Force Atlas 2", que centraliza os nós mais relevantes da rede.

Com isso, desenvolvemos grafos que evidenciam os artigos mais relevantes, destacando relações entre grupos menores que se formam por conta da localização das concentrações de interações. Com esta descrição, afirmamos que as redes temáticas têm nas práticas compartilhadas pelos autores, seu principal objeto de investigação. A partir de sua construção, foi possível o aprofundamento nos desdobramentos das ideias que circularam por cada um dos assuntos que categorizamos. Além disso, este estilo de rede é complementado pela análise dos artigos de forma individual, de modo que foi possível estabelecer o papel de cada autor para além dos interesses que definem suas biografias. Em outras palavras, os trajetos encontrados nos grafos evidenciam as negociações de significados que definem algumas práticas.

Portanto, entendemos que essa nova "fotografia", juntamente com a perspectiva social que apresentamos no capítulo 2 e a descrição dos interesses e motivações dos matemáticos que, em algum nível, participaram da *Comunidade britânica dos Invariantes*,

revela novas facetas desse grupo. Do ponto de vista de Wenger (1999) e Wenger-Trayner e Wenger-Trayner (2015), as redes temáticas descrevem o componente das práticas de forma explícita. Com isso, passamos para as análises dos artigos.

5.2 Teoria de Eliminação

A temática da Teoria de eliminação contou com a participação de apenas três autores da comunidade: Sylvester, Cayley e Salmon. Existiu um único artigo publicado por um autor desconhecido no volume 2 do CMJ, que apresenta o método de eliminação para sistemas de duas equações de grau dois descrito no "Traité Elementaire de Calcul Differentiel", de Lacroix. Entretanto, esse trabalho não revela uma contribuição de pesquisa. No total, foram encontrados 19 artigos produzidos sobre o assunto.

Do ponto de vista das fases de evolução baseadas nas versões dos jornais de Cambridge, percebe-se que Sylvester é o responsável por colocar os questionamentos iniciais da comunidade, sobretudo por apresentar seu *Método Dialítico*, uma vez que ele se torna referência para os autores que se deparam com situações relacionadas ao tema, como é caso de Boole, ainda na Fase 1, Cayley e Salmon, nas fases seguintes.

Essa temática revela um interesse periférico da comunidade, uma vez que, como veremos, os matemáticos destacados nesta tese que lidam com eliminação, percebem o tema como um recurso que auxilia na solução de outros problemas. Esse é caso de Cayley, que publica o texto "On the Theory of Elimination" (CAYLEY, 1847a), em que o autor discute a solução de sistemas de equações lineares interligados. Essa ideia é diretamente ligada ao estudo sobre involuções que ele havia publicado um ano antes. Nesse contexto, a necessidade da descrição de um método de eliminação ocorre através de uma discussão sobre pontos de intersecção.

Quando três cônicas têm os mesmos pontos de intersecção, qualquer transversal intersecta o sistema em seis pontos, que se dizem estar em involução. Parece natural aplicar o termo às próprias cônicas; e então é fácil generalizar a noção de involução de modo a aplicá-la a funções de qualquer número de variáveis. ¹ (CAYLEY, 1846d, p. 52, Tradução Nossa)

É importante percebermos que a noção de involução está diretamente ligada à percepção geométrica. Uma vez que as tais três cônicas estão representadas por polinômios

¹ When three conics have the same points of intersection, any transversal intersects the system in six points, which are said to be in involution. It appears natural to apply the term to the conics themselves; and then it is easy to generalize the notion of involution so as to apply it to functions of any number of variables.

homogêneos de grau dois, Cayley se propõe a investigar involuções em formas de várias dimensões. Nas palavras dele, as formas $U, V \dots$ estão em involução se $\alpha U + \beta V + \dots = 0$. O problema passa a ser buscar os valores de α, β, \dots de modo que a equação seja satisfeita, o que pode ser feito através de um sistema de equações lineares.

O método descrito por Cayley no artigo é semelhante ao utilizado no *Método Dialítico* de Sylvester, uma vez que ambos acrescentam termos independentes com o intuito de igualar o grau das equações envolvidas no problema. A conexão entre os interesses dos dois matemáticos apresenta outra evidência na publicação do "On the Order of Certain Systems of Algebraical Equations" (CAYLEY, 1849b). Diferente do artigo anterior, esse texto se concentra nos resultantes dos sistemas de equações, ponto em que os estudos dos dois amigos se aproximam novamente. Em particular, Cayley deduz dois *invariantes fundamentais*, seguindo a agenda que ele propôs desde 1845, ao considerar um sistema particular (CAYLEY, 1849b, p. 135):

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 = 0$$

$$b\xi^2 + 2c\xi\eta + d\eta^2 = 0$$

$$c\xi^2 + 2d\xi\eta + e\eta^2 = 0$$

a partir deste sistema é possível retirar duas resultantes através da multiplicação de dois conjuntos de expressões $e\xi, -(4d\xi + 2e\eta), (3c\xi + 2d\eta)$ e $(ce - d^2), (cd - be), (bd - c^2)$. Estes dois casos geram como resultantes as seguintes expressões: $ae - 4bd + 3c^2 = 0$ e $ace - ad^2 - eb^2 - c^3 + 2bcd = 0$, as quais são as formas associadas (termo de Sylvester) a um quártico binário, que Parshall (1989) destaca como *invariantes fundamentais*. É importante observar que essa conexão com os *invariantes* ocorre por conta do trabalho de Sylvester com a Teoria de Eliminação, onde se estabelece que os resultantes não se alteram após transformações lineares das equações de coexistência.

Por sua vez, Cayley chega aos *invariantes* citados através de seus *Hyperdeterminantes*. Entretanto, é importante ressaltar que os artigos associados à temática analisada identificam, através de uma discussão geométrica, formas associadas que não se alteram a partir de transformações. Em outras palavras, os artigos publicados na década de 1840, com autoria desse matemático, se dividem entre o tratamento de técnicas sobre eliminação e propriedades algébricas de transformações. Além disso, encontramos conexão com o trabalho de Salmon, que também lida com problema de eliminação.

Em "Note on a Result of Elimination" (SALMON, 1848), o autor interpreta a ideia de coexistência para identificar pontos de tangência. De maneira mais específica, Salmon define a noção de classe de uma curva algébrica como o número de tangentes que podem ser traçadas em pontos da curva. Nesse contexto, inspirado em um artigo publicado por

Cayley no *Jornal do Crelle*, o autor passa a analisar o caso particular de um polinômio de quarto grau, no qual lida com a coexistência junto a sua diferencial, tendo como resultante uma combinação dos *invariantes* de Cayley:

$$(ae - 4bd + 3c^2)^3 = 27(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3)^2$$

As discussões da comunidade sobre a Teoria de Eliminação seguiram com a participação de Sylvester e a difusão de seu *Método Dialítico*, o que apresentou desdobramentos para as outras temáticas, como veremos a seguir. Em 1857, encontramos uma sequência de trabalhos publicados na *Transactions* da Royal Society, a qual apresenta uma relação entre o processo de eliminação, as raízes das equações do sistema e o teorema de Sturm. Esse fator nos mostra uma trajetória semelhante a realizada por Sylvester uma década antes, o que evidencia o protagonismo compartilhado dos dois matemáticos com a produção de conhecimentos no continente.

Inspirado em seu interesse sobre problemas de contatos em curvas de terceira ordem, Cayley representa o resultante de um sistema de equações, que não excedem o grau 4, através de um determinante simétrico, o qual permite reduzir os polinômios ao produto de expressões lineares envolvendo as raízes. Essa abordagem foi utilizada para analisar sistemas de equações que envolvem a coexistência de formas lineares com formas quadráticas e cúbicas, como é destacado no artigo "On the Symmetric Functions of the Roots of Certain Systems of two Equations" (CAYLEY, 1857c).

O objetivo da presente Memória é aplicar o processo a dois casos particulares, viz. Proponho obter assim as expressões para as funções simétricas mais simples (após as fundamentais) dos seguintes sistemas de duas equações ternárias; isto é, primeiro, uma equação linear e uma equação quádrica; e em segundo lugar, uma equação linear e uma equação cúbica.
² (CAYLEY, 1857c, p. 718, Tradução Nossa)

O destaque dado às formas quadráticas e cúbicas nos remete às investigações sobre problemas de contato de curvas e superfícies, em particular os problemas de tangência. Nesse trabalho, é possível encontrar a abordagem via coordenadas homogêneas, o que reforça o fundo geométrico das motivações de Cayley. Além disso, encontramos uma abordagem aritmética a partir do momento em que o autor utiliza cada uma das variáveis como o produto de valores fixados, como podemos ver nos seguintes exemplos:

$$(a,b,c,d,f,g,h)(x,y,z)^2 = 0$$

²The object of the present Memoir is to apply the process to two particular cases, viz. I propose to obtain thereby the expressions for the simplest symmetric functions (after the fundamental ones) of the following systems of two ternary equations ; that is, first, a linear equation and a quadric equation; and secondly, a linear equation and a cubic equation

$$(\alpha, \beta, \gamma)(x, y, z) = 0$$

que são as equações de uma curva e uma reta. Nessas condições a solução apresentada para o problema de coexistência passa pelo acréscimo de uma equação linear auxiliar (artifício já utilizado por Sylvester nos artigos de 1850) e uma mudança de variáveis:

$$x : y : z = \beta\zeta - \gamma\eta : \gamma\xi - \alpha\zeta : \alpha\eta - \beta\xi$$

tendo como resultante,

$$(x_1, y_1, z_1)(\xi, \eta, \zeta) \cdot (x_2, y_2, z_2)(\xi, \eta, \zeta)$$

que é o produto de dois polinômios formados pelas raízes do sistema inicial com as novas variáveis. A discussão sobre a existência das raízes se mostra importante para esta pesquisa. Esse fator justifica a publicação do "Tables of the Sturmian Functions for Equations of the Second, Third, Fourth and Fifth Degrees"(CAYLEY, 1857d), em que Cayley reconhece o pioneirismo de Sylvester a respeito das investigações que relacionam a Teoria de Eliminação e o teorema de Sturm. A ideia é apresentar as funções Sturmianas através dos determinantes associados às formas algébricas. Em particular, o autor destaca os discriminantes que coincidem com as funções auxiliares de Sturm.

Entendemos que Sylvester é o personagem central da produção de conhecimento da comunidade nesta temática. Essa afirmação se confirma a partir do momento em que Cayley e Salmon se mostram interessados em outras temáticas quando tratam do assunto. É possível perceber tais características na figura 25. Ressaltamos que os pontos maiores representam os artigos mais relevantes, ou nós com um PageRank maior, e o jogo de cores identifica os textos com maior volume de interações entre si.

entre os *invariantes* e as ideias de eliminação que encontramos em Sylvester (1851h).

É importante destacar que esse não foi um assunto exclusivamente britânico, pois matemáticos como Bézout e o próprio Sturm são referências para os trabalhos apresentados até aqui. No entanto, o personagem central desta tese é o principal responsável pela disseminação da Teoria de Eliminação entre os matemáticos britânicos, como podemos ver na figura 25, que o evidencia como autor mais relevante do grafo. Além disso, o *Método Dialético* é utilizado por outros autores da rede, tanto do mesmo país quanto do continente, o que faz desse matemático um fio condutor dos interesses manifestados neste recorte.

A rede nos mostra os trabalhos que se ligam à *Teoria dos Invariantes* e caracteriza o processo de mudança de perspectiva de Sylvester em relação a sua própria produção. As conexões entre os artigos Sylvester (1839), na região azul do grafo, Sylvester (1850b), região verde, e Sylvester (1851h) na região vermelha, nos mostram o processo de negociação de significados das práticas sobre eliminação. De outra forma, esse caminho representa as modificações das ideias que saíram de aplicação algébrica, passaram por uma interpretação geométrica e se consolidaram em um objeto de interesse própria da *Teoria dos Invariantes*.

O papel de Sylvester na comunidade é também bem definido. Além de precursor de um método prático para o processo de eliminação, o que se reflete em suas conexões com os outros autores, ele reforça uma perspectiva geométrica da temática. Nesse caso, a relação com o trabalho de Salmon precisa ser destacada, como podemos observar a seguir:

O leitor provavelmente achará mais fácil compreender a natureza da dificuldade que se propõe remover, se dermos às nossas equações uma interpretação geométrica. Se $U = 0$, $V = 0$, representam superfícies de m -ésimo e n -ésimo grau respectivamente, as duas equações juntas representam uma curva de m -ésimo grau, a intersecção, ou seja, dessas duas superfícies. O resultado da eliminação das variáveis entre essas duas equações e duas outras $U' = 0$, $V' = 0$, é a condição de que a curva representada pelo primeiro par de equações intercepte aquela representada pelo segundo. E as regras ordinárias nos permitem sem dificuldade escrever o grau da condição resultante. ³ (SALMON, 1857c, p. 246, Tradução Nossa)

Nessa citação podemos perceber o raciocínio geométrico que marca as investigações sobre eliminação. Além disso, é importante chamar a atenção para a generalidade dos sistemas em discussão. Salmon parte de uma visão de curvas e superfícies e substitui por

³The reader will probably find it easier to understand the nature of the difficulty which it is proposed to remove, if we give to our equations a geometrical interpretation. If $U = 0$, $V = 0$, represent surfaces of the m th and n th degrees respectively, the two equations together represent a curve of the m th degree, the intersection, namely, of these two surfaces. The result of eliminating the variables between these two equations and two others $U' = 0$, $V' = 0$, is the condition that the curve represented by the first pair of equations should intersect that represented by the second. And the ordinary rules enable us without difficulty to write down the degree of the resulting condition.

uma discussão sobre o grau dos polinômios que coexistem e o dos resultantes dos sistemas independentemente de seu valor. Esse movimento é muito parecido com o realizado em Sylvester (1850b), o que justifica as conexões apresentadas na rede de textos da temática.

O fato desses três nomes serem os únicos que surgem na rede não significa que não existem outros autores que utilizaram as técnicas de eliminação produzidas por essas interações. Como veremos nas próximas seções, autores como Spottiswoode também utilizam métodos como o dialítico de Sylvester. A diferença que faz com que eles não figurem como produtores na temática em questão é, justamente, o fato de não produzirem conteúdo especificamente sobre eliminação.

Podemos concluir que a principal prática que esses artigos revelam é o *Método Dialítico*. A relação com as temáticas de Locus e Contatos se mostra uma fonte motivadora das pesquisas sobre eliminação para os outros personagens presentes na figura 25, o que reforça o papel de suporte que dessa temática, em relação aos interesses da comunidade.

Por fim, cabe destacar que a análise isolada dos artigos britânicos que trataram de Teoria de Eliminação, no período de 1837 a 1865, não caracteriza completamente a comunidade de práticas que se formou no período. Temos evidências importantes sobre essa caracterização, porém é necessário observar outros artigos produzidos nesse recorte temporal, que tenham relação com os polinômios, objeto comum nos artigos estudados nesta tese. Com isso, passamos para as análises sobre os problemas que envolvem locus de formas algébricas.

5.3 Locus de Curvas e Superfícies Algébricas

A participação de matemáticos em artigos que abordam locus de curvas e superfícies algébricas é mais plural do que a apresentada na última seção. Dos autores relevantes na comunidade, Cayley, Salmon, Sylvester, Weddle, Boole e Ferrers são responsáveis por 42 publicações de um total de 56 artigos que tratam diretamente desta temática.

A divisão pelos períodos de evolução dos jornais de Cambridge nos mostra que o interesse por esse assunto, abordado através do emprego dos polinômios homogêneos, acompanha a expansão territorial do periódico na ilha e no continente. Essa percepção se confirma com o volume de produção em cada uma das fases que destacamos no capítulo anterior, tendo sido publicado apenas um artigo na Fase 1, 17 na Fase 2 e 38 na Fase 3. Esse é um movimento diferente do que ocorreu com a Teoria de Eliminação, cujo volume de produção tem um aumento importante nos anos do CDMJ, porém apresenta uma redução no QJPAM. Essa diferença indica a percepção da eliminação como técnica e, em contrapartida, as investigações sobre locus se mostram como objeto de estudo em si mesmos.

Com isso, podemos notar que a abordagem analítica para investigações projetivas se tornou uma tendência importante nas práticas da comunidade, o que vai ao encontro das ideias apresentadas no trabalho de Richards (1986). Como veremos, os polinômios homogêneos se tornam o objeto central nas pesquisas que são conduzidas nesta e nas outras temáticas. Para compreendermos quais foram as práticas comuns dos personagens associados à produção de conhecimento nesta temática, nos dedicamos às análises dos artigos, os quais são apresentados em ordem cronológica e com as contribuições de cada matemático separadas.

Começando por Cayley, destacamos que é responsável pela única publicação na Fase 1 dos jornais de Cambridge. O artigo "On the Theory of Algebraic Curves" (CAYLEY, 1845h) se dedica a identificar o número de direções assintóticas de uma curva representada por um polinômio de grau m . O ponto de partida desse texto é a análise dos termos de ordem m da curva em questão, desconsiderando o que ocorre nos demais. A ideia se baseia no fato de ser um problema sobre direções assintóticas e, nesse sentido, basta analisar as maiores potências. Dessa forma, o autor reduz a investigação aos polinômios homogêneos e passa a analisar a curva a partir de sua decomposição em fatores lineares, os quais determinam as direções assintóticas. Com isso, encontramos uma relação com os problemas de contato, pois o autor utiliza a construção das formas algébricas como produto de expressões lineares como uma maneira de compreender as consequências das assíntotas quando olhamos para o lugar geométrico da intersecção de duas curvas. Essa abordagem dos problemas de intersecção nos mostra como as temáticas se misturam, o que pode ser visto nas referências do autor no texto.

Em "De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis, simul cum enodatione paradoxo algebraici" (JACOBI, 1836), podemos notar o enfoque dado aos problemas de contato nas primeiras páginas do artigo, o que nos permite afirmar que se trata de um trabalho sobre os pontos intersecção. Por outro lado, o artigo "Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconues" (PLÜCKER, 1837b) se concentra em discutir as propriedades do polinômio de acordo com as posições da curva em questão.

Essa diluição entre as temáticas é uma constante nos trabalhos que analisaremos nesta tese. Um bom exemplo desse aspecto é a publicação "On the Diametral Planes of a Surface of the Second Order" (CAYLEY, 1846b), que nos mostra diretamente o modo como as temáticas de eliminação, locus e contatos são interligadas. Ao analisar superfícies de segunda ordem e estabelecer a equação do plano diametral, o autor utiliza um processo de diagonalização da matriz associada ao polinômio que representa a superfície para determinar os coeficientes fornecendo um sistema de equações, o que gera os pontos de

tangência de um cone circunscrito na superfície. Esse processo traz elementos que lidam também com eliminação, uma vez que a diagonalização de matrizes está associada ao teorema de Sturm através da Lei de Inércia para formas quadráticas.

Um interesse manifestado por Cayley nos artigos dessa temática foi a investigação das propriedades de polos e polares de curvas algébricas. A partir de 1850, período que coincide com o interesse de Sylvester sobre as propriedades de cônicas projetivas, o autor utiliza a mesma notação (coordenadas homogêneas) em artigos como: "Note on a Family of Curves of the Fourth Order"(CAYLEY, 1850a) e "On a Theorem Relating to Reciprocals Triangles"(CAYLEY, 1857b).

Um triângulo e seu recíproco estão em perspectiva; onde por recíproco de um triângulo se entende o triângulo cujos lados são os polos dos ângulos do primeiro triângulo mencionado em relação a uma cônica; e os triângulos estão em perspectiva quando as três linhas que formam os ângulos correspondentes se encontram em um ponto, ou o que é a mesma coisa, quando os três pontos de intersecção dos lados correspondentes estão em uma linha. ⁴ (CAYLEY, 1857b, p. 7, Tradução Nossa)

Ao identificar o interesse de Cayley em ideias projetivas, é possível detectar o alinhamento com os outros matemáticos que lidavam com objetos que compartilham de propriedades projetivas, como é caso de Sylvester e Salmon, dois companheiros que estão usualmente ligados a Cayley, além de Ferrers e Weddle, dois dos personagens relevantes da comunidade, e também Samuel Roberts e Slessor. Notamos que as práticas compartilhadas nos artigos publicados pelo autor a respeito desta temática se adequam a assuntos que são de interesses comuns aos outros personagens. Em outras palavras, as técnicas utilizadas, como as coordenadas homogêneas, conectam os assuntos abordados por cada um dos autores da comunidade.

Outro aspecto das contribuições de Cayley para as investigações sobre a formação de locus via polinômios homogêneos foi a divulgação de ideias. Em "On a New Analytical Representation of Curves in Space"(CAYLEY, 1860c), encontramos uma descrição de curvas no espaço através de intersecções de cones com superfícies. Mais uma vez, essa representação se aproxima da utilizada por Sylvester nos artigos do início da década de 1850. No entanto, enquanto o personagem central desta tese representa as cônicas através da projeção de cones, Cayley lida com um feixe de cones que passam pela curva, dado um vértice arbitrário. Se investigamos as duas obras, encontramos a mesma representação de cônicas degeneradas, com base numa relação *syzygética* que representa pares de retas,

⁴ A triangle and its reciprocal are in perspective;"where by the reciprocal of a triangle is meant the triangle the sides of which are the polars of the angles of the first-mentioned triangle with respect to a conic ; and triangles are in perspective when the three lines forming the corresponding angles meet in a point, or what is the same thing, when the three points of intersection of the corresponding sides lie in a line.

a saber: $Ap + Bq + Cr + Fs + Gt + Hu = 0$, com a condição $AF + BG + CH = 0$, onde p, q, r, s, t, u são coeficientes possíveis dos cones de projeção e A, B, C, F, G e H são determinantes menores da matriz associada ao sistema de equações envolvidas na intersecção.

A utilização de determinantes é muito comum nas práticas difundidas por Cayley. Ainda no mesmo QJPAM 3, encontramos uma breve nota que trata o objeto matemático como um meio de calcular distância entre pontos e áreas de formas no espaço (CAYLEY, 1860b, p. 275). Além disso, encontramos outra nota onde o autor trata da determinação de raios de curvatura de superfícies. Além desses problemas, os estudos sobre cônicas também são presentes em suas contribuições, fato que pode ser verificado a seguir:

OS focos de uma cônica são os pontos de intersecção das tangentes pelos pontos circulares no infinito; o par de tangentes através de cada um dos pontos circulares no infinito é uma cônica através dos quatro focos; e temos assim duas cônicas $P=O$, $Q=O$ passando pelos quatro focos; a equação de qualquer outra cônica através dos quatro focos é, obviamente, $P + \lambda Q = 0$; e, em particular, se λ for determinado adequadamente, esta equação fornece os eixos da cônica. ⁵ (CAYLEY, 1862, p. 275, Tradução Nossa)

Nesse trecho, observamos elementos importantes dos interesses geométricos da comunidade britânica, como é o caso dos pontos no infinito, tratados por Sylvester no início dos anos 1850 e nos livros de Salmon do mesmo período, inspirados na obra de Plücker. Além disso, o uso do *Pencil* (objeto descrito por Salmon) e das coordenadas homogêneas também representa a relação desse trabalho com a produção de conhecimento geométrico da época.

Como evidência da comunidade de práticas que vinha se formando no entorno dos personagens relevantes que destacamos, podemos citar o artigo "Determination of the Foci of the Conic Section Expressed by Trilinear Coordinates" (HENSLEY, 1862), onde encontramos a mesma menção às coordenadas homogêneas. O problema, proposto no artigo, é determinar as coordenadas dos focos de uma cônica projetiva, também representada por uma forma quadrática em três variáveis. Nesse texto, também encontramos o uso dos determinantes e menores determinantes descritos por Sylvester em 1850 e 1851.

⁵The foci of a conic are the points of intersection of the tangents through the circular points at infinity; the pair of tangents through each of the circular points at infinity is a conic through the four foci; and we have thus two conics $P=O$, $Q=O$ passing through the four foci; the equation of any other conic through the four foci is of course $P + \lambda Q = 0$; and in particular if λ be suitably determined this equation gives the axes of the conic.

$$\begin{vmatrix} l & n' & m' & \lambda \\ n' & m & l' & \mu \\ m' & l' & n & \nu \\ \lambda & \mu & \nu & 0 \end{vmatrix} = 0$$

onde l, m, n, l', m', n' são os coeficientes da forma quadrática representante da cônica e λ, μ, ν os coeficientes das tangentes que são utilizadas para determinar os focos, como podemos verificar no seguinte trecho: "Se de um foco de uma seção cônica forem traçadas retas perpendiculares a um par de tangentes paralelas, o retângulo contido por elas é constante."⁶ (HENSLEY, 1862, p. 177). Essa propriedade tem a função de construir o método para determinar os focos da cônica.

Podemos por esta aplicação desta propriedade a três pares de tangentes obter um número suficiente de equações para determinar os focos; será conveniente para este propósito considerar os três pares de tangentes paralelas aos lados do triângulo fundamental.⁷ (HENSLEY, 1862, p. 177, Tradução Nossa)

Como pode ser observado nessas afirmações, a perspectiva do autor sobre o tratamento dado a um problema com "imagem" algébrica traz um arcabouço geométrico. Mais uma vez, essa visão é compartilhada nos trabalhos dos personagens relevantes, onde encontramos menções a aspectos geométricos, como é o caso de Sylvester e Cayley. Ainda nesta seção poderemos apresentar outros autores que compartilharam essa visão.

Os artigos analisados até aqui nos mostram que o trabalho de Cayley nesta temática não apresenta uma posição central, a menos do volume de produção, que é superior ao dos outros autores. Entretanto, esses textos confirmam que seus interesses estavam alinhados com a comunidade. Essa característica difere do trabalho que foi desenvolvido por Salmon sobre este assunto.

De todas as adições que a investigação moderna fez à geometria antiga, nenhuma parece mais importante do que o método dos polares recíprocos, pelo qual nosso conhecimento de extensão é duplicado de uma vez, e somos habilitados a partir de qualquer propriedade conhecida de curvas ou superfícies de uma só vez. deduzir outro correlativo. Nem é apenas na

⁶ If from a focus of a conic section perpendiculars be drawn to a pair of parallel tangents, the rectangle contained by them is constant.

⁷ We may by thti application of this property to three pairs of tangents obtain a sufficient number of equations to determine the foci ; it will be convenient for this purpose to consider the three pairs of tangents parallel to the sides of the fundamental triangle.

multiplicação de teoremas isolados que este método tem sido útil; lançou nova luz sobre alguns pontos importantes na teoria geral das curvas.⁸ (SALMON, 1846, p. 65, Tradução Nossa)

Essa é a introdução do artigo "On the degree of a surface reciprocal to a given one" (SALMON, 1846). Quando olhamos para a escolha de palavras do autor, notamos que ele se refere a uma investigação moderna em relação à geometria. Essa indicação remete às mudanças na abordagem analítica que se desenvolvia em solo britânico. É fato que esse artigo não apresenta diretamente as expressões polinômios homogêneos ou coordenadas homogêneas, no entanto a discussão sobre recíprocos aliada à participação futura do autor no desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes* revelam o alinhamento dessa produção com práticas que são comuns nos trabalhos dos matemáticos que analisamos nesta tese.

Um fator relevante que liga essa publicação aos polinômios homogêneos é a referência de Sylvester à prática dos polares e recíprocos em seu artigo de 1851 (SYLVESTER, 1851a, p. 291), como veremos no gráfico de rede. O trabalho de Salmon se concentra no problema do número de tangentes possíveis nos pontos de uma curva de grau m . Nesse contexto, percebemos que existe uma diferença entre as contribuições de Cayley e de Salmon para a temática: enquanto o primeiro se concentrou em problemas pontuais, como mostramos, o segundo apresenta uma característica de uma reavaliação, ou ressignificação como Wenger aponta, das discussões, de modo a apresentar novas contribuições para o assunto.

Esse é o caso do artigo Salmon (1846) que, ao tratar analiticamente o problema das tangentes com o auxílio dos recíprocos, identifica a relação entre o grau do polinômio e a multiplicidade dos pontos da curva em questão. Como discutido na seção anterior, esse assunto se interliga com as ideias de eliminação da comunidade, fato destacado no artigo de 1848 de Salmon, que segue a investigação sobre o número de tangentes possíveis.

Em 1850, já com a ideia das coordenadas homogêneas circulando na comunidade britânica, Salmon utiliza as propriedades das tangentes para descrever o locus de curvas algébricas. Ele inicia o artigo "On the Classification of Curves of Double Curvature" (SALMON, 1850b) com uma discussão sobre as dificuldades da teoria de curvas de dupla curvatura. De acordo com o texto, até então essas curvas só eram descritas através da intersecção de duas superfícies. Esse texto de Salmon apresenta uma série propriedades dessas curvas através dos contatos das superfícies que as descrevem. O interesse na teoria das curvas planas permanece na primeira parte da década, de modo que encontramos a seguinte situação em um artigo de 1853:

⁸ OF all the additions which modern investigation has made to the ancient geometry, none seems more important than the method of reciprocal polars, by which our knowledge of extension is at once doubled, and we are enabled from any known property of curves or surfaces at once to deduce another correlative one. Nor is it only in the multiplication of isolated theorems that this method has been useful ; it has thrown new light on some important points in the general theory of curves.

Aproveito esta oportunidade para dizer, em resposta ao artigo do Sr. Walton no último Número, que não vejo razão para não encerrarmos nossa controvérsia sobre os termos de arbitragem propostos pelo Professor De Morgan, a saber, que as convenções do Sr. Gregory devem ser banidas das regiões da Geometria Algébrica para as da Álgebra Geométrica, onde de minha parte não tenho vontade de segui-las. Na verdade, o Sr. Walton não nega o único ponto pelo qual estou ansioso para defender, viz. que os lugares curvilíneos obtidos pelas regras do Sr. Gregory não têm conexão geométrica com as curvas planas representadas pelas mesmas equações. E se assim for, não se pode esperar que eles lancem alguma luz sobre quaisquer dificuldades, reais ou supostas, na teoria das curvas planas. Tenho apenas que acrescentar que acredito que o Sr. Walton foi apressado em afirmar (vol. vii. p. 239) que "se $f(x, y) = 0$ for transcendental, um ponto conjugado não duplo, mas único, pode facilmente se apresentar, "e que o caso de um ponto conjugado parecendo ter uma tangente real se explica observando que tal ponto resulta da união de dois ou mais pontos conjugados ordinários." ⁹ (SALMON, 1853, p. 47, Tradução Nossa)

Esta é a nota final do artigo que dá continuidade à discussão sobre a teoria das curvas. Aqui podemos perceber um tipo de conversa característico de uma comunidade de práticas. A discussão sobre as divergências a respeito dos critérios de decisão sobre trabalhos como geometria algébrica ou álgebra geométrica, revela o processo de negociação de significados das contribuições dos personagens interessados nas pesquisas que tratam da reação entre os dois campos da matemática.

Identificamos dois outros matemáticos que se conectam a esta temática, direta ou indiretamente. Ao citar os trabalhos de Gregory, os quais tratam de problemas de contatos entre curvas, Salmon evidencia a existência de uma abordagem distinta da interpretação das curvas, embora também adotasse uma perspectiva analítica. Walton, por sua vez, participava da edição do CDMJ, enquanto De Morgan contava com forte influência no jornal, como destacamos no capítulo 2.

Salmon também fez uso de objetos como o *discriminante* de uma forma algébrica ou, em casos mais específicos, o hessiano desta forma. No texto "On Curves of the Third Order" (SALMON, 1858a), apresenta um método para determinar pontos de tangência de uma forma cúbica de terceira ordem. A partir da substituição das variáveis da cúbica

⁹ take this opportunity of saying, in reply to Mr. Walton's article in the last Number, that I see no reason why we should not close our controversy on the terms of arbitration proposed by Professor De Morgan, namely that Mr. Gregory's conventions shall be banished from the regions of Algebraic Geometry to those of Geometrical Algebra, where for my part I have no desire to follow them. In fact Mr. Walton does not deny the onlr point for which I am anxious to contend, viz. that the curvilinear loci obtained by Mr. Gregory's rules have no geomefrical connexion with the plane curves represented by the same equations. And if this be so, they cannot be expected to throw any light on any difficulties, real or supposed, in the theory of plane curves. I have only to add that I believe Mr. Walton was hasty in asserting (vol. vii. p. 239) that "if $f(x, y) = 0$ be transcendental, a conjugate point not double but single may easily present itself,"and that the case of a conjugate point appearing to have a real tangent is explained by observing that such a point results from the union of two or more ordmary conjugate points.

por $x = x + \lambda x'$, $y = y + \lambda y'$, $z = z + \lambda z'$, o autor reescreve a cúbica da seguinte maneira: $U + 3\lambda S + 3\lambda^2 P + \lambda^3 U'$. Essa transformação apresenta S e P como a cônica e a reta polar de um ponto $x'y'z'$ em relação à cúbica.

Realizando o mesmo processo com o hessiano da cúbica, Salmon determina o segundo ponto da reta tangente a um ponto qualquer da curva, através da intersecção das retas polares. Esse trabalho apresenta uma influência importante de Cayley, que foi a fonte das ideias repercutidas nesse artigo: "O Sr. Cayley comunicou-me uma investigação da equação da cônica acima no caso em que a cúbica é dada pela equação $x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz$ "¹⁰ (SALMON, 1858a, p. 536). Salmon se propõe a generalizar o problema para uma cúbica qualquer.

O autor passa a associar as características dos coeficientes da cúbica com os pontos consecutivos de sua intersecção com uma cônica. Essa ideia mostra um método interessante para determinar a singularidade dos pontos críticos da curva descrita pelo polinômio de terceira ordem. Nesse ponto, é importante destacar o modo como esses trabalhos de Salmon se integram com as produções de Cayley e Sylvester, sendo que o primeiro se propôs a tratar de problemas pontuais, utilizando técnicas que são comuns no continente, enquanto o segundo se dedicou aos problemas de contato e os generalizou para além das dimensões sensíveis. Nesse contexto, Salmon se mostra como um matemático que trata do suporte dessas iniciativas, através das reflexões sobre as curvas e as formas geométricas.

Podemos dizer que Salmon se mostra o importante nó desta temática, como veremos no gráfico da rede, assim como Sylvester era o personagem central da Teoria de Eliminação. Outro fator característico dos trabalhos desse autor pode ser identificado no artigo "On the Relation which connects the Mutual Distances of Five Points in Space" (SALMON, 1860b). Nesse texto, o autor mais uma vez utiliza os discriminantes para discutir propriedades de curvas no espaço. É importante destacar a preocupação em generalizar os resultados, o que pode ser observado a seguir:

Deve ter ocorrido a qualquer pessoa que tenha observado a analogia entre os processos da geometria analítica de três e de duas dimensões que, no que diz respeito aos processos algébricos, não há nada que limite os métodos empregados ao caso de três dimensões. Se, por exemplo, houvesse seres que pudessem conceber o espaço de quatro dimensões, poderíamos com nossas faculdades atuais escrever um livro de geometria analítica tão bom para seu uso como se pudéssemos conceber o espaço de quatro dimensões. Devemos tomar quatro hiperplanos em ângulo reto entre si e definir a posição de qualquer ponto por quatro coordenadas expressando suas quatro distâncias a partir delas; e assim procedemos de todas as maneiras exatamente como procedemos na geometria analítica de três dimensões. Além disso, como qualquer propriedade do espaço de

¹⁰Mr. Cayley has communicated to me an investigation of the equation of the above conic in the case where the cubic is given by the equation $x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz$

duas dimensões pode ser provada pelo uso da geometria analítica de três dimensões, é fácil ver que a geometria analítica de quatro dimensões, por mais imaginária que seja com referência às nossas concepções, pode ser usado para provar propriedades do espaço de três dimensões, e nunca pode levar a resultados falsos. ¹¹ (SALMON, 1860b, p. 285, Tradução Nossa)

O autor tem o cuidado de mostrar que os resultados em duas e três dimensões podem ser reproduzidos em dimensões maiores. Outro aspecto, é o reconhecimento da produção de um conhecimento legítimo que é produzido em solo britânico, o que se materializa na afirmação sobre como seria bom publicar um livro que abordasse da geometria analítica em dimensões superiores às sensíveis. Dessa forma, o autor reafirma seu papel central no desenvolvimento dessa perspectiva geométrica da produção de conhecimento matemático do Reino Unido.

Outro personagem relevante que se dedicou aos problemas analisados a essa temática foi Norman Ferrers, que iniciou suas contribuições no QJPAM 1 em 1857 com uma nota sobre a relação entre triângulos e seus recíprocos polares construídos a partir de uma cônica representada por uma forma quadrática em três variáveis. A proposta da nota foi apresentar uma demonstração diferente para o teorema proposto por Cayley no mesmo jornal. A diferença entre as abordagens dos dois matemáticos ocorre na utilização das propriedades dos determinantes, no caso de Cayley, e a manipulação dos polinômios homogêneos de modo a transformar as retas dos triângulos e suas polares, caso de Ferrers. É interessante observar que a abordagem deste último se baseia no polinômio em si, ou seja, trata-se de uma perspectiva algébrica do problema. Outra contribuição nesses moldes surgiu no artigo "On the Area of the Conic Section, represented by the General Trilinear Equation of the Second Degree" (FERRERS, 1858), em que o autor apresenta o método para calcular a área de seções cônicas através dos determinantes dos pontos em coordenadas triangulares.

As abordagens de Ferrers são, em termos modernos, o que chamamos cálculo baricêntrico. Quando analisamos os oito artigos publicados pelo autor ligados a temática sobre locus, percebemos a influência da produção de Salmon e Cayley. Nesse sentido,

¹¹It must have occurred to any person who has observed the analogy between the processes of the analytic geometry of three and of two dimensions, that as far as algebraic processes are concerned there is nothing to limit the methods employed to the case of three dimensions. If, for example, there were any beings who could conceive space of four dimensions, we could with our present faculties write as good a book of analytic geometry for their use as if we could conceive space of four dimensions ourselves. We should take four hyper-planes at right angle to each other, and define the position of any point by four coordinates expressing its four distances from these ; and so proceed in every manner exactly as we proceed in the analytic geometry of three dimensions. Further, as any property of space of two dimensions may be proved by the use of analytic geometry of three dimensions, so it is easy to see that the analytic geometry of four dimensions, however imaginary it may be with reference to our conceptions, may be used to prove properties of space of three dimensions, and can never lead to false results.

podemos afirmar que seu papel reside na disseminação dos métodos através de trabalhos que tratam dos seguintes assuntos: áreas de curvas planas, determinação de eixos de superfícies simétricas, determinação de foco de cônicas e descrição de retas tangentes.

É importante destacar que os artigos de Ferrers são os primeiros textos que explicitam a repercussão das iniciativas dos matemáticos responsáveis pelo desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. Isso não significa que o autor participe das investigações sobre a Teoria, mas que o "trio de ferro" já exercia influência importante sobre outros personagens da pesquisa. Essa informação, aliada à formação editorial do QJPAM, nos mostra a tendência das publicações em matemática em meados do século XIX.

Outro personagem que merece destaque por trabalhos associados à temática em discussão é Thomas Weddle. Seus seis artigos publicados sobre ela tratam das propriedades de curvas no espaço. Em outras palavras, o trabalho desse autor se concentra na versão espacial de teoremas de geometria plana. Essa característica pode ser percebida na série de artigos no CDMJ que se iniciou em 1849.

Pode-se observar de passagem que as superfícies que tocam as bordas dos poliedros parecem até agora pouco mencionadas pelos matemáticos e, no entanto, muitas das propriedades mais elegantes pertencem a superfícies e sólidos assim relacionados. Eu recomendaria fortemente a qualquer um que esteja em busca de análogos no espaço para propriedades de curvas planas, não negligenciar superfícies que tocam as bordas de poliedros, pois parece altamente provável que inúmeras propriedades planas, especialmente de curvas de segundo grau, sejam encontradas para ter análogos em três dimensões em relação a tais superfícies e sólidos. ¹² (WEDDLE, 1849, p. 27, Tradução Nossa)

Nesse trecho, observamos a intenção do autor em apresentar analogias de teoremas conhecidos da geometria plana. É importante observar que essa contribuição é uma proposição específica de Weddle, que teve as produções de Hearn sobre superfícies como referência.

O trabalho se inicia com uma discussão sobre superfícies como elipsoides, hiperboloides de duas folhas e paraboloides elípticos, superfícies que, quando combinadas para formar um sólido geométrico, geram curvas que são o objeto de estudo do artigo. Em particular, o autor apresenta versões espaciais dos teoremas de Pascal, segundo o qual as faces opostas de um hexaedro se intersectam em três retas do mesmo plano, e de Brianchon,

¹²It may be observed in passing, that surfaces touching the edges of polyhedra seem hitherto scarcely to have been alluded to by mathematicians, and yet many most elegant properties belong to surfaces and solids so related. I would strongly recommend any one who may be in search of analogues in space to properties of plane curves, not to overlook surfaces touching the edges of polyhedra, for it seems highly probable that numerous plane properties especially of curves of the second degree, will be found to have analogues in three dimensions relative to such surfaces and solids.

segundo o qual as três linhas retas que unem os vértices opostos de um hexaedro se cruzam em um ponto, e o sólido tem três planos diagonais. Além disso, o autor também apresenta versões dos teoremas utilizando um octaedro como base.

Esses teoremas são investigados considerando-se as equações das arestas do sólido base. A partir disso, o autor analisa as propriedades das superfícies de segunda ordem que passam pelas intersecções das faces do poliedro. Essa abordagem permite ao autor generalizar o caso específico dos teoremas para propriedades das relações entre sólidos geométricos e polinômios homogêneos.

A segunda parte do trabalho de Weddle traz uma conexão importante com as práticas da comunidade. Nele, podemos encontrar abordagens que se falem de conceitos de eliminação e descrição de curvas algébricas. No entanto, o trabalho permanece circunscrito nos poliedros. O papel desse matemático apresenta uma característica interessante, porém distinta dos outros personagens associados a esta temática. Enquanto Salmon lida com aspectos gerais da nova geometria em dimensões quaisquer e Cayley utiliza a nova notação nos problemas de geometria conhecidos, como forma de validação da nova abordagem, Weddle se concentra na geometria espacial. Destacamos a influência exterior do trabalho com os poliedros associados à temática em discussão, como é o caso do *Aperçu Historique* de Michel Chasles.

Se as faces de um dos dois tetraedros interceptam as arestas contíguas correspondentes do outro em doze pontos na superfície do segundo grau, então as faces correspondentes dos dois tetraedros se interceptam em quatro linhas retas, pertencentes ao mesmo sistema de geradores, em um hiperboloide de uma folha.¹³ (WEDDLE, 1851, p. 116, Tradução Nossa)

De acordo com Weddle, esse é um teorema apresentado por Chasles no *Aperçu*, no qual há uma analogia com o teorema de Pascal. Nessa versão, o plano onde intersecções se encontram é o hiperboloide (o que seria a reta onde as intersecções residem na versão original do teorema). Essas contribuições ainda contaram com mais duas publicações no CDMJ em 1852 e 1853. Por fim, Weddle ainda publicou uma breve nota sobre a transformação de mudança de eixos de uma forma quadrática. Apesar de tratar de um assunto diretamente ligado aos estudos da *Teoria dos Invariantes*, essa contribuição se dedica apenas a uma simplificação da superfície que serve de base para a análise dos teoremas que foram discutidos em seus primeiros trabalhos. Cabe ainda ressaltar que Sylvester também contribuiu com novas abordagens para o teorema de Pascal, utilizando coordenadas homogêneas.

¹³If the faces of one of two tetrahedra intersect the corresponding contiguous edges of the other in twelve points in surface of the second degree, then shall the corresponding faces of the two tetrahedra intersect in four straight lines, belonging to the same system of generators, in a hyperboloid of one sheet.

É fato que Sylvester não apresentou uma produção significativa no que diz respeito aos locus de curvas. No entanto, dois artigos de sua autoria que encontramos nesse período representam seu engajamento na utilização de práticas que estão em seus interesses. Assim como Cayley, ele se dedica a teoremas pontuais, como é o caso do teorema de Pascal e do texto publicado na *Philosophical Magazine* de 1858 que relaciona a solução de equações cúbicas a pontos de tangência das curvas descritas por essas formas.

Além dos autores relevantes da comunidade, encontramos outros personagens que contribuem para a produção de conhecimentos matemáticos relacionados à temática sobre locus. Nos jornais analisados por esta tese, surgem 14 nomes com diversas contribuições, sendo a primeira em 1849. Em "Singular Application of Geometry of Three Dimensions to a Plane Problem" (HEARN, 1849), o autor lida com sólidos de rotação, mais especificamente com as propriedades dos eixos de rotação através de identidades algébricas. Para representar cônicas, ele utiliza polinômios homogêneos de graus 2 em três variáveis que, por sua vez, representam os lados do triângulo, no qual a própria cônica está inscrita.

Em 1852, encontramos um artigo que lida com vários assuntos que são correlatos ao que foi discutido pelos outros autores até aqui. William Walton investiga a teoria da curvatura com fórmulas aplicadas a casos que ele chama de anômalos. Nesse contexto, ele apresenta as equações para descrever planos tangentes em pontos singulares a curvas algébricas, normais, e pontos de máximo e mínimo. No mesmo ano, Coltman se propõe a investigar as propriedades de parábolas inscritas em triângulos base com inspiração no trabalho de Salmon. No mesmo jornal, também encontramos o artigo de Thomas Cotterill sobre áreas e volumes.

Suponha que tomemos qualquer número de pontos em um plano, e através deles desenhe todas as linhas retas possíveis, que novamente se cruzarão em um certo número de pontos, que em referência ao original podemos chamar de pontos derivados. A geometria dessa figura seria conhecida quando tivéssemos descoberto todas as relações entre as distâncias desses pontos, os ângulos entre as linhas e as áreas dos triângulos. A investigação das duas primeiras classes parece constituir o objeto da Trigonometria. Mas as relações das áreas, mesmo dos pontos originais, quando seu número é maior que quatro, não foi (que eu saiba) examinada; e ainda, além de seu próprio interesse intrínseco, quando consideramos a importância, tanto na Geometria da Posição quanto na Teoria das Curvas, de certos casos limites, o assunto é evidentemente de considerável interesse. ¹⁴

¹⁴Suppose we take any number of points in a plane, and through them draw all the possible right lines, which will again intersect in a certain number of points, which in reference to the original we may call derived points. The geometry of this figure would be known when we had discovered all the relations between the distances of these points, the angles between the lines, and the areas of the triangles. The investigation of the two first classes seems to form the object of Trigonometry. But the relations of the areas, even of the original points, when their number is greater than four, has not (that I am aware of) been examined; and yet, besides its own intrinsic interest, when we consider the importance, both in the Geometry of Position and the Theory of Curves, of certain limiting cases, the subject is evidently one of considerable interest.

(COTTERILL, 1852, p. 275, Tradução Nossa)

Nesse trecho, podemos perceber a mudança de perspectiva de alguns matemáticos em relação a problemas geométricos. Quando o autor aponta limitações das abordagens sintética e trigonométrica para interpretar o problema proposto e destacar as novas possibilidades com a geometria de posição e teoria das curvas, nos mostra que as práticas difundidas sobre os estudos do locus de curvas algébricas permitiram um novo modo de produzir matemática e esse fator era percebido pelos autores das revistas britânicas.

Em 1858, encontramos dois autores que utilizam aspectos da geometria da comunidade, Samuel Roberts e Lawrence Smith. O primeiro publica uma nota sobre o modo de formar coeficientes de curvas algébricas, enquanto o segundo investiga cônicas polares a curvas de terceiro grau. Apesar de não se tratarem de artigos de pesquisa, estes trabalhos contribuem com métodos e/ou ideias inovadoras, como é o caso de Roberts que utiliza operador semelhante aos *emanantes* de Sylvester para determinar cônicas inscritas em triângulo de referência.

Evidentemente, permite-nos tratar as equações gerais de curvas expressas em coordenadas trilineares de maneira análoga àquela em que são usualmente tratadas suas equações cartesianas, a saber, por transformação de coordenadas; e embora muitas das conclusões assim derivadas possam ser facilmente deduzidas de outras considerações, o método acima parece ser carregado de artifício. ¹⁵ (ROBERTS, 1858, p. 40, Tradução Nossa)

Esse trecho evidencia mais um matemático que percebia as mudanças que vinham ocorrendo na produção britânica de conhecimentos na área. É também o caso de Wolstenholme, que analisa as assíntotas de cônicas descritas em coordenadas homogêneas, além Slessor, que escreveu um texto que lida com as propriedades geométricas interpretadas com esse tipo de coordenada.

Outro personagem que utilizou coordenadas homogêneas foi Henry Greer, que lidou com o problema de determinar o eixo radical de dois círculos descritos por formas quadráticas em três variáveis, cujos coeficientes são relações trigonométricas dos ângulos de um triângulo base

¹⁵It evidently enables us to treat the general equations of curves expressed in trilinear coordinates in a manner analogous to that in which their Cartesian equations are usually dealt with, namely by transformation of coordinates; and although many of the conclusions thus derived can quite as easily be deduced from other considerations, the above method appears less chargeable with artifice.

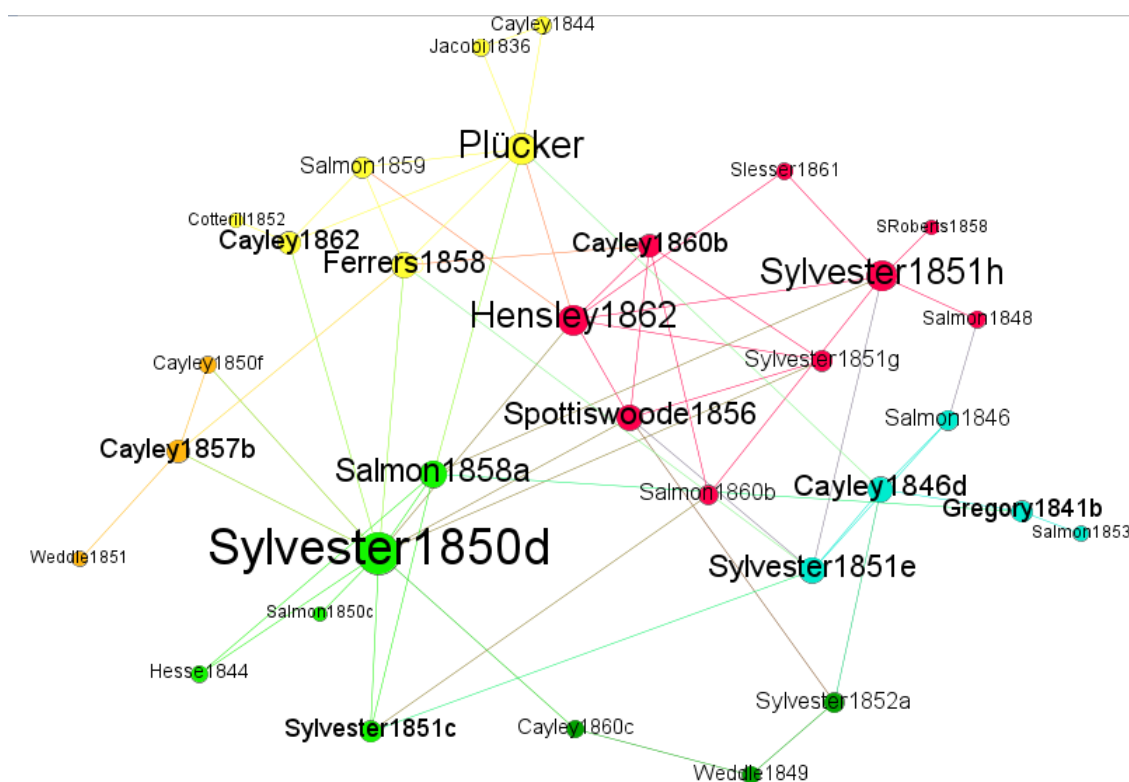
$$x^2 \text{sen}2A + y^2 \text{sen}2B + z^2 \text{sen}2C - 2(yz \text{sen}A + zx \text{sen}B + xy \text{sen}C) = 0$$

$$x^2 .a.\text{cos}2A + y^2 .b.\text{cos}2B + z^2 .c.\text{cos}2C - (ayz + bzx + cxy) = 0$$

Os métodos utilizados para determinar os eixos radicais são inspirados na obra de Salmon, onde o autor utiliza os determinantes como forma de simplificar as equações do sistema envolvido no problema. Essa abordagem é a mesma empregada por Hensley como apresentamos anteriormente. Outro autor que pode ser destacado nesse contexto é Whitworth, que publicou uma breve nota sobre os eixos de uma secção cônica. As curvas cujas coordenadas são descritas a partir de direções cossenos.

É fato que os autores apresentados nessa parte final da seção, representam um grupo de matemáticos que se engajou em investigações de interesses ou utilizou ideias que surgem na comunidade de práticas. A temática em discussão nos mostra parte do processo de consolidação das ideias do grupo de personagens relevantes da rede. Essas interações ficam mais evidentes quando olhamos para o gráfico de compartilhamento de práticas.

Figura 26 – Rede de Locus de Curvas e Superfícies



Fonte – Elaborada pelo Autor

Diferente da rede da figura 25, na qual a circulação de ideias se concentrava em um personagem específico, o grafo acima nos apresenta uma diversidade maior de nós

relevantes. É importante levar em conta o papel de cada autor, que descrevemos ao longo desta seção. Com isso, percebemos que a comunidade se caracterizou pela inspiração em resultados externos da ilha, sobretudo com relação à obra de Plücker. Esse fator se confirma quando observamos que os outros pontos importantes têm o matemático alemão como referência, como são os casos de Cayley (1846d), Sylvester (1850d) e Hensley (1862), que utilizam coordenadas homogêneas.

Os nós Spottiswoode (1856) e Sylvester (1851h) se destacam por se dedicarem a investigar propriedades de práticas que já circulavam no universo matemático: as propriedades dos determinantes, no caso do primeiro e as interpretações geométricas dos processos de eliminação de variáveis, fator que conecta a temática desta seção à da anterior. Por outro lado, o nó Salmon (1858a) se caracteriza por descrições de curvas a partir de pontos de uma forma cúbica, além da inspiração na obra de Plücker.

As práticas que surgem nas análises de textos associados a esta temática se mostram presentes em interesses difusos. A divisão de cores no grafo evidencia essa diversidade: a região amarela traz artigos voltados para questões de construção de curvas e superfícies, diretamente ligado às ideias do matemático alemão; a vermelha mostra interpretações geométricas sobre eliminação. Essas são as regiões de maior ocupação no grafo.

As regiões laranja, verde claro, verde escuro e azul claro, com um volume menor de publicações, revelam os respectivos interesses pelas curvas de 3ª ordem, a associação com os problemas de contato, as características dos eixos diretores e, apesar de sua incidência em poucos artigos, a *Teoria dos Invariantes*. Esses aspectos nos revelam que os subgrupos têm inspirações diferentes, exceto pela influência de Plücker.

Sobre os personagens da comunidade de práticas, podemos afirmar que Cayley e Salmon são os matemáticos com uma participação mais ativa nesta temática, uma vez que eles se dedicaram efetivamente à descrição de curvas, superfícies e suas propriedades. O papel de autores como Sylvester, Spottiswoode e Ferrers se caracteriza apenas por uma utilização das ideias ligadas às coordenadas homogêneas.

Por fim, quando comparamos as temáticas de eliminação e investigação do locus de curvas algébricas, observamos que a comunidade se conecta com o a matemática produzida no continente através do primeiro tema, porém tem demandas internas com relação ao segundo. Como veremos a seguir, essa percepção se modifica à medida que as investigações se aproximam dos assuntos relacionados à *Teoria dos Invariantes*, fator que evidencia o protagonismo de Sylvester na formação da comunidade britânica de pesquisa em matemática.

5.4 Problemas de Contato

Como foi apontado até aqui, a temática dos Problemas de Contatos apresenta aspectos semelhantes com à anterior. Por isso, encontraremos personagens que estiveram presentes nas últimas análises. Autores como Cayley, Sylvester e Salmon seguem sendo os protagonistas com relação ao número de publicações e práticas compartilhadas. Para além desse fato, observamos a participação de Spottiswoode, outro matemático relevante da comunidade que contribui com um estudo significativo sobre os determinantes. Nesta seção, esse autor não apresenta uma produção volumosa, porém os dois artigos tratados por ele são o início das ideias que o levaram a investigar as propriedades das operações com os determinantes.

Quando consideramos os períodos dos jornais de Cambridge, encontramos uma evolução significativa de publicações da Fase 1 para a Fase 2, de maneira semelhante à temática da última seção, com 3 artigos publicados entre 1837 e 1845, 19 publicados entre 1845 e 1855, além de 15 entre 1855 e 1865. Entendemos que a redução de publicações que ocorre da Fase 2 para a Fase 3 se deve à conexão entre as investigações sobre locus de curvas e superfícies algébricas e os problemas de contatos.

Outro ponto importante, diz respeito ao papel desta temática na produção da comunidade. Ao mesmo tempo que o assunto da última seção se mostra um interesse interno dos personagens, a temática agora em questão apresenta maior conexão com a matemática desenvolvida no continente.

Mais uma vez, iniciamos as análises apresentando a produção dos matemáticos individualmente, identificando quais ideias conectam os artigos, como estes autores conversam com matemáticos do continente e quais ideias circulam entre os interesses dos personagens. Nessa linha, os primeiros trabalhos que observamos são os de Cayley.

Além da conexão com os problemas de eliminação, já detalhados neste trabalho, o artigo "On the Theory of Involution in Geometry"(CAYLEY, 1846d) é sua primeira contribuição para as investigações sobre problemas de contatos. Nesse texto, o autor discute as características das expressões algébricas que são afetadas pelo número de pontos de interseção das curvas envolvidas no problema.

Se uma curva ou superfície da ordem r for determinada a passar pelos mn pontos de intersecção de duas curvas das ordens m e n , ou pelos mnp pontos de intersecção de três superfícies das ordens m , n , p ; então se $r > m + n - 3$, ou $r > m + n + p - 4$, a curva ou superfície contém precisamente o mesmo número de constantes arbitrárias como se os pontos mn ou mnp fossem perfeitamente arbitrários. ¹⁶ (CAYLEY, 1846d, p. 55, Tradução Nossa)

¹⁶If a curve or surface of the order r be determined to pass through the mn points of intersection of two

Nesse trecho, podemos perceber que o autor ressalta a relação que existe entre as constantes arbitrárias de uma expressão algébrica e os pontos de intersecção de duas curvas, ou superfícies, dadas. Em outras palavras, se uma superfície que passa por um determinado número de pontos de outra curva, que é intersecção de duas superfícies dadas, então essa superfície passa por toda a curva. Formas geométricas que estão em involução permitem determinar a natureza das intersecções (se são reais ou imaginárias) entre elas. Podemos notar que essa abordagem se assemelha à que será utilizada por Sylvester em 1850 no artigo sobre contatos de cônicas.

Outra característica do artigo de Cayley é a conexão com trabalhos do continente. Em nota, o autor apresenta as referências que o inspiraram nessa discussão, as quais vão desde os trabalhos de Plücker, sobre o número de intersecções entre curvas e superfícies, passam por artigos de Jacobi, sobre eliminação, e chegam até as contribuições de Hesse, sobre as propriedades de formas algébricas de 2º e 3º graus. Além de representar um contato entre a matemática britânica e do continente, essas referências revelam o elo entre as temáticas que foram discutidas até este momento, uma vez que os artigos transitam por cada um dos assuntos. Nesse sentido, o trabalho com propriedades duais das curvas algébricas tem papel importante.

Os pontos e linhas de um plano P podem ser considerados como correspondentes às linhas e pontos de um plano P' de tal maneira que a um conjunto de pontos de uma linha na primeira figura, corresponde um conjunto de linhas através de um ponto na segunda figura, (nomeadamente através do ponto correspondente à linha); e a um conjunto de retas que passam por um ponto da primeira figura, corresponde um conjunto de pontos de uma reta da segunda figura, ou seja, na reta correspondente ao ponto. ¹⁷ (CAYLEY, 1848a, p. 173, Tradução Nossa)

Essa descrição do teorema de reciprocidade abre um artigo que se concentra em apresentar as características de teoremas de geometria quando consideramos os polos e polares de pontos e retas. Apesar de não apresentar técnicas inovadoras, o texto traz uma ideia inovadora para a geração de teoremas da geometria. Essas ideias farão parte de trabalhos que lidam com locus de curvas e superfícies algébricas, como vimos na seção anterior. O próprio Cayley utiliza a noção de recíproco como forma de determinar a equação de retas tangentes a curvas na década de 1860.

curves of the orders m and n , or the mnp points of intersection of three surfaces of the orders m , n , p ; then if $r > m + n - 3$, or $r > m + n + p - 4$, the curve or surface contains precisely the same number of arbitrary constants as if the mn or mnp points were perfectly arbitrary.

¹⁷The points and lines of a plane P may be considered as corresponding to the lines and points of a plane P' in such a manner that to a set of points in a line in the first figure, there corresponds a set of lines through a point in the second figure, (namely through the point corresponding to the line); and to a set of lines through a point in the first figure, there corresponds a set of points in a line in the second figure, namely in the line corresponding to the point.

O interesse pelas propriedades dos pontos de tangência caracteriza o trabalho de Cayley a respeito dos problemas de contato. Esse fator se evidencia na publicação do "On the Triple Tangents Planes of Surfaces of the Third Order" (CAYLEY, 1849d), o qual traz luz ao conceito de ordem de uma forma algébrica, que se define através do número de linhas retas contidas na superfície em questão. Em termos algébricos, a ordem de uma curva se define através do menor número de funções lineares nas quais a forma original (polinômio homogêneo) pode ser decomposta. Essa concepção é a mesma compartilhada por Sylvester em 1853, através do vocabulário que ele estabeleceu. Nesse sentido, entendemos que o conceito de ordem se revela uma das práticas que circularam na comunidade de práticas.

Voltando ao texto de Cayley, ao buscar estabelecer as condições para determinar o plano tangente a uma superfície de terceira ordem, ele descreve características de pontos críticos da forma em si. Em outras palavras, o autor conduz uma investigação sobre a relação que existe entre o plano tangente e a natureza dos pontos singulares de uma superfície, como se pode observar a seguir:

Uma SUPERFÍCIE de terceira ordem contém em geral um certo número de linhas retas. Qualquer plano através de uma dessas linhas intercepta a superfície na linha e em uma cônica, i. e., em uma curva ou sistema de terceira ordem com dois pontos duplos. Tal plano é, portanto, um plano tangente duplo da superfície, sendo os pontos duplos ou pontos onde a linha e a cônica se cruzam os pontos de contato.¹⁸ (CAYLEY, 1849d, p. 118, Tradução Nossa)

Esse breve trecho associa os pontos duplos ao tipo de plano tangente que se descreve a partir da superfície. Nesse contexto, o autor segue o texto com uma lista extensa das equações dos planos tangentes possíveis. Este trabalho foi desenvolvido em correspondência com Salmon, como o próprio autor revela no final do artigo. Sobre essa contribuição, destacamos o papel de Cayley, que passa a apresentar contribuições generalistas sobre os problemas de contato. Essa característica se reflete na proximidade com a obra de Plücker. Em 1850, mesmo ano da publicação dos artigos de Sylvester sobre esta temática e o trabalho de Salmon sobre a classificação de curvas de dupla curvatura, encontramos o texto de Cayley (1850c), que se associa aos dois anteriores. Esse texto é tradução de um artigo, de mesmo título, publicado em 1845 no *Jornal de Liouville* e faz parte do grupo de artigos que serviram de conexão entre a produção britânica e continental de conhecimento matemático. A ideia de Cayley era aplicar as noções sobre singularidades de uma curva plana às investigações de curvas de dupla curvatura.

¹⁸A SURFACE of the third order contains in general a certain number of straight lines. Any plane through one these lines intersects the surface in the line and in a conic, i. e., in a curve or system of the third order having two double points. Such a plane is therefore a double tangent plane of the surface, the double points or points where the line and conic intersect being the points of contact.

Para tal, o autor utiliza as fórmulas de Plücker, que relacionam a pontos característicos de curvas para estabelecer novas relações entre ordem (μ), classe (ν), número de pontos duplos (δ), cúspides (κ), tangentes duplas (τ) e pontos de inflexão (ι), a saber:

$$\nu = \mu(\mu - 1) - (2\delta + 3\kappa),$$

$$\iota = 3\mu(\mu - 2) - (6\delta + 8\kappa),$$

$$\tau = \frac{1}{2}\mu(\mu - 2)(\mu^2 - 9) - (2\delta + 3\kappa)\mu(\mu - 1) - 6 + 2\delta(\delta - 1) + \frac{9}{2}\kappa(\kappa - 1) + 6\delta\kappa,$$

$$\mu = \nu(\nu - 1) - (2\tau + 3\iota),$$

$$\kappa = 3\nu(\nu - 2) - (6\tau + 8\iota),$$

$$\delta = \frac{1}{2}\nu(\nu - 2)(\nu^2 - 9) - (2\tau + 3\iota)\nu(\nu - 1) - 6 + 2\tau(\tau - 1) + \frac{9}{2}\iota(\iota - 1) + 6\tau\iota$$

Essas equações evidenciam a associação que se faz entre os aspectos geométricos e algébricos do problema. A ideia de ordem e classe é descrita no mesmo artigo, sendo o primeiro o número máximo de pontos que aparecem um dado plano do sistema e o segundo o número máximo de planos aos quais um ponto dado pertence. Como já discutido, a noção de ordem de uma curva está associada à decomposição do polinômio homogêneo em fatores lineares distintos, o que é diretamente ligado ao número de raízes, ou ainda, ao número de pontos no plano da curva em questão.

Após o estabelecimento dessas relações, Cayley segue com investigações sobre a natureza dos pontos de contatos entre superfícies. No artigo "On the Developable Surfaces which Arise from two Surfaces of the Second Order"(CAYLEY, 1850e), o autor se dedica ao problema de determinar o ponto de intersecção-desenvolvível de duas superfícies de segunda ordem.

O termo Desenvolvível é usado como substantivo, como o recíproco de Curva, que significa curva de dupla curvatura. A mesma observação se aplica ao uso do termo no composto Intersecção-desenvolvível. Para o significado do termo contato singular,' empregado mais abaixo, veja as memórias do Sr. Salmon On the Classification of Curves of Double Curvature,' p. 23. ¹⁹ (CAYLEY, 1850e, p. 46, Tradução Nossa)

Como pode ser visto neste trecho, Cayley e Salmon estavam em uma espécie de parceria que envolvia o estabelecimento das características das curvas de dupla curvatura.

¹⁹The term Developable is used as a substantive, as the reciprocal to Curve,' which means curve of double curvature. The same remark applies to the use of the term in the compound Intersect-Developable. For the signification of the term singular contact,' employed lower down, see Mr. Salmon's memoir On the Classification of Curves of Double Curvature,' p. 23.

Ao considerarmos as temáticas de locus e contatos separadamente, podemos notar que as contribuições dos dois autores ocorrem em níveis diferentes em cada uma delas. Esse fator reforça a natureza da comunidade e o protagonismo de ambos os personagens.

Finalizando os artigos de 1850, Cayley utiliza técnicas da *Teoria dos Invariantes*, como os *Hyperdeterminantes*, para investigar propriedades de curvas de dupla curvatura representadas por formas de quinta ordem. No artigo "On the Developable Derived from an Equation of the Fifth Order" (CAYLEY, 1850d), o autor discute as relações entre pontos cúspides ou estacionários da regressão de uma superfície e a ordem de uma dada superfície. Nesse contexto, os *Hyperdeterminantes* se mostram como um instrumento que gera um sistema de equações capaz de determinar os pontos singulares da curva de intersecção de duas superfícies.

Uma aplicação das investigações de Cayley sobre os problemas de contato é encontrada em trabalhos sobre o conhecido problema Malfatti ²⁰. Com uma primeira publicação sobre o assunto no volume 4 do CDMJ em 1849, o autor lida com o sistema de equações que estão conectadas ao problema apresentado nas *Transactions* da Academia de Ciências da Itália. Esse artigo investiga contatos de curvas de segunda ordem, como observável a seguir:

Mas o problema pode ser considerado como o problema de duas variáveis, análogo ao de determinar a cônica tendo um duplo contato com uma dada cônica, e tocando três cônicas tendo cada uma delas um duplo contato com a dada cônica; ²¹ (CAYLEY, 1849a, p. 274, Tradução Nossa)

Podemos observar que a abordagem proposta por Cayley trata o problema, por uma perspectiva diferente, para além da síntese e da análise. É interessante notar que os desdobramentos britânicos desse artigo foram retomados em 1852, após os trabalhos de Sylvester sobre os contatos de cônicas publicados em 1850 e 1851. Essa retomada se materializou na memória apresentada no volume 142 da *Philosophical Transactions* "Analytical Researches connected with Steiner's Extension of Malfatti's Problem". Nessa oportunidade, vemos uma extensão das investigações de curvas para superfícies. Do ponto de vista algébrico, trata-se de uma mudança de polinômio homogêneos em 3 para 4 variáveis.

²⁰Em 1803, Giovanni Francesco Giuseppe Malfatti (1731 - 1807) propôs o problema de esculpir três colunas circulares em um bloco triangular de mármore, usando tanto mármore quanto possível, e conjecturou que três círculos mutuamente tangentes inscritos dentro do triângulo forneceriam a solução ideal

²¹But the problem may be considered as the problem for two variables, analogous to that of determining the conic having a double contact with a given conic, and touching three conics each of them having a double contact with the given conic;

O artigo citado acrescenta a extensão sugerida por Steiner sobre o problema de Malfatti: "Determinar três seções de uma superfície de segunda ordem, cada uma delas tocando as outras duas, e também duas das três seções da superfície de segunda ordem". Esta extensão destaca a necessidade da abordagem analítica do problema, ou seja, a partir do momento em que o autor se descola da proposta original e se dedica à investigação de uma versão em mais dimensões, ele recai sobre o problema das impossibilidades do espaço intangível, como Sylvester havia anunciado. É importante ressaltar que o artigo de Cayley, por si só, não lida diretamente com geometria em n dimensões, no entanto as técnicas utilizadas pelo autor são as mesmas desenvolvidas na década anterior, o que remete as ideias de reciprocidade como já discutido nesta seção.

Ainda no CDMJ 7, encontramos uma nomenclatura específica para a extensão, não só do problema de Malfatti, mas das abordagens análogas em duas e três dimensões. O texto "On the Singularities of Surfaces" (CAYLEY, 1852b) nos mostra um bom exemplo do processo de ressignificação das ideias que permeavam as discussões sobre os problemas de contato. Ao apresentar novos termos equivalentes para pontos de inflexão, cúspides, duplos e osculadores, Cayley nos mostra a busca por interpretações mais gerais dos resultados geométricos que já eram conhecidos de outras formas. Em nota, o autor expõe as conexões deste trabalho com a matemática produzida no continente, que se materializa através das referências aos trabalhos de Dupin, Hesse e Salmon. Essas ligações ocorrem através dos tipos de contato entre planos e superfícies.

Outra conexão com a matemática produzida no continente, mais especificamente nos Estados Alemães, surge em 1858 quando Cayley publica a tradução da memória do suíço Ludwig Schläfli (1814 - 1895) sobre as linhas de uma superfície de terceira ordem, no volume 2 do QJPAM. O artigo "An Attempt to Determine the Twenty-seven Lines upon a Surface of the Third Order and to Divide such Surfaces into Species in Reference to the Reality of the Lines upon the Surface" foi publicado em duas partes no jornal inglês.

As investigações contidas na presente parte das Memórias do Prof. Schläfli, com respeito à teoria geral das superfícies algébricas, são semelhantes em caráter às do Sr. Salmon, e vários dos resultados do autor já foram dados nas Memórias do Sr. Salmon no Jornal, mas a teoria aqui é levada alguns passos mais longe do que nas memórias que acabamos de referir; e o conhecimento que tenho das memórias ainda não publicadas do Sr. Salmon sobre superfícies recíprocas, em que todo o assunto é considerado de maneira mais completa (e em particular fórmulas são dadas para a determinação dos dois números A e k) foi claramente não é motivo para adiar a publicação da interessante Memória do Prof. Schläfli, que foi gentilmente enviada por ele para inserção na Revista. ²² (SCHLÄFLI, 1858, p. 65, Tradução Nossa)

²²The investigations contained in the present portion of Prof. Schläfli's Memoir, with respect to the general theory of algebraical surfaces, are similar in character to those of Mr. Salmon, and several of the author's results have been already given in Mr. Salmon's Memoirs in the Journal, but the theory is here carried a

Nessa nota, presente no final da primeira parte do artigo, Cayley ressalta a influência da obra de Salmon no que diz respeito às características das superfícies algébricas. Essa referência confirma a percepção sobre o protagonismo de Salmon, descrito na seção anterior. Além disso, a iniciativa de traduzir o trabalho de Schläfli mostra, não apenas mais uma influência do continente no Reino Unido, mas uma ação que representa a consciência da necessidade de disseminação da produção de conhecimento de outros países em solo britânico. É importante lembrar que este era um dos objetivos da fundação do QJPAM: internacionalizar a matemática.

De maneira mais específica, esse trabalho lida com a interpretação da natureza dos pontos singulares de uma curva gerada pela intersecção de duas superfícies. Para tal, Cayley retoma a nomenclatura estabelecida em 1852. Sobre os pontos singulares, destacamos a definição apresentada pelo autor: "são aqueles onde o teorema de Taylor falha". Essa afirmação é um indicativo muito característico da relação entre álgebra e geometria nas discussões sobre problemas projetivos abordados em coordenadas homogêneas. Nesse sentido, as práticas que surgem na segunda parte do artigo se adequam àquelas que vinham sendo produzidas sobre o assunto.

As participações de Cayley nos assuntos relacionados a uma abordagem analítica da geometria em n dimensões é mais significativa nos artigos nos quais ele trata dos problemas de contato do que naqueles em que aborda a descrição dos locus de curvas e superfícies. Ao compararmos as publicações até 1852, não encontramos iniciativas como as dos dois últimos textos analisados por parte de autor, uma vez que o papel de estabelecimento de bases como nomenclatura, analogias e interpretações da geometria que era produzida em solo britânico, de modo a adequar as investigações aos aspectos da nova geometria, ficou nas mãos de Salmon, como vimos na última seção. Essa perspectiva se reforça quando, em 1858, Cayley retoma uma abordagem semelhante ao que foi realizado por Sylvester no início dos anos 1850.

CONSIDERO o sistema de cônicas que passam pelos mesmos quatro pontos; Esses pontos podem ser reais ou imaginários, mas supõe-se que existe um sistema real de cônicas, o que de fato acontecerá se duas cônicas do sistema forem reais. Os quatro pontos são, portanto, dados como os pontos de intersecção de duas cônicas reais, e será apropriado supor em primeira instância que as cônicas se interceptam em quatro pontos separados e distintos, nenhum deles no infinito. Os quatro pontos podem ser todos reais, ou dois reais e dois imaginários, ou todos imaginários.²³

few steps further than in the memoirs just referred to ; and the knowledge which I have of Mr. Salmon's still unpublished Memoir on Reciprocal Surfaces, in which the whole subject is considered in a more complete manner (and in particular formulae are given leading to the determination of the two numbers A and k) was clearly not a reason for delaying the publication of Prof. Schläfli's interesting Memoir, which was kindly sent by him for insertion in the Journal.

²³ CONSIDER the system of conics passing through the same four points; these points may be real or

(CAYLEY, 1858c, p. 206, Tradução Nossa)

Esse trecho se refere ao quadrângulo citado em Sylvester (1850d), que por sua vez havia sido descrito pelo próprio Cayley no mesmo ano. O artigo, ao qual a citação acima pertence, demonstra uma recapitulação das características do polígono completo, cujos vértices são as intersecções de duas cônicas, dado o fato dos pontos serem reais ou imaginários. A distinção, em relação ao trabalho de seu amigo, ocorre no discurso sobre as consequências dessa natureza dos pontos de intersecção.

Enquanto Sylvester se concentra nas relações entre os determinantes e o feixe de cônicas que passa pelos pontos de intersecção, Cayley se dedica a descrever os tipos de cônicas possíveis passando pelos pontos em questão. No caso de quatro pontos reais, temos duas possibilidades: ou os pontos de intersecção formam um quadrângulo convexo, ou formam um triângulo com um ponto interior. No caso de dois pontos imaginários e dois pontos reais, temos outras duas possibilidades: ou o centro real do quadrângulo está fora da reta que liga os dois pontos reais, ou entre estes dois pontos. Por fim, no caso de todos os pontos imaginários: os pontos estão em duas retas reais, pois existem (além do ponto de intersecção dessas retas) dois outros centros reais do quadrilátero que se encontram harmonicamente em relação às duas retas.

Os *invariantes* também aparecem nas discussões de Cayley sobre os problemas de contato, de maneira mais específica no caso das tangentes duplas a curvas de terceira ordem. Em Cayley (1861b), encontramos uma retomada as discussões sobre as tangentes duplas, dessa vez em curvas de quarta ordem. Nesse trabalho, o autor utiliza os *emanantes* de Sylvester como forma de determinar as equações das chamadas tangentes duplas.²⁴ De acordo com o próprio autor, essa ideia surge no texto "On the Double Tangents to Plane Curves", publicado na *Philosophical Magazine* de 1858 por Salmon.

Os artigos publicados sobre dupla tangente revelam sua centralidade a respeito das técnicas e ideias que são compartilhadas acerca da temática abordada nesta seção. A utilização dos *invariantes*, os determinantes como forma de construir expressões de recíprocos polares, hessianos e jacobianos como técnicas para o estabelecimento das tangentes são práticas que emergem nos textos de Cayley. Além disso, é importante destacar a predominância das formas ternárias e quartenárias, ou seja, existiu um interesse específico nos problemas de contatos em superfícies e dimensões superiores. Quando

imaginary, but it is assumed that there is a real system of conics, this will in fact be the case if two conics of the system are real. The four points are therefore given as the points of intersection of two real conics, and it will be proper to assume in the first instance that the conics intersect in four separate and distinct points, none of them at infinity. The four points may be all real, or two real and two imaginary, or all imaginary.

²⁴Linha que toca uma curva em dois pontos distintos

olhamos para a produção dos outros autores neste tema, encontramos trabalhos como os publicados por Sylvester e Salmon.

Para além das análises da obra de Sylvester, o trabalho de Salmon com os problemas de contato teve sua primeira publicação na *Philosophical Magazine* de 1844, onde ele se propõe a tratar dos teoremas de Pascal e Brianchon. O autor destaca a reciprocidade entre os dois teoremas, no que diz respeito aos polos e polares em relação a uma cônica dada. Como visto na seção anterior, esse assunto será retomado na década de 1850, através dos artigos publicados por Thomas Weddle. O artigo de Salmon é um bom exemplo de como as temáticas sobre locus e contatos se entrelaçam. Enquanto o texto de Weddle é uma releitura dos teoremas, que lida com a comparação dos casos planos e espacial, Salmon conduz a discussão através de um olhar para as intersecções.

Seja $S - L^2 = 0$ a equação de outro cone tendo também duplo contato com o dado. Subtraindo essas equações, temos para a interseção das duas últimas cônicas $L^2 - L'^2 = 0$. As equações, portanto, de duas cordas de interseção são $L - L_1 = 0$, $L + L_1 = 0$. Essas duas cordas devem passar pelas interseções das duas cordas de contato, uma vez que suas equações são satisfeitas pelas equações combinadas $L = 0$, $L_1 = 0$ ²⁵ (SALMON, 1844, p. 50, Tradução Nossa)

Apesar de não apresentar o teorema de Brianchon diretamente, essa citação mostra a preparação para a proposição: "Pegue quaisquer três seções planas de uma superfície de segundo grau; através de quaisquer dois deles um par de cones pode ser desenhado. Os seis vértices desses cones estão no mesmo plano, e cada conjunto de três na mesma linha direita"(SALMON, 1844, p. 51). Nota-se que a combinação do teorema da citação com a versão apresentada no artigo chama atenção para as intersecções das seções transversais, o que é diferente do analisamos nos textos de Weddle.

A partir de 1849, encontramos a entrada do autor nas investigações sobre pontos de tangência em superfícies de terceira ordem. Em colaboração com Cayley (1849d), Salmon publicou o texto "On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order"(SALMON, 1849). Esse trabalho se concentrou nas 27 linhas das superfícies de 3ª ordem. Nesse contexto, são apresentados alguns teoremas que relacionam o grau do polinômio que representa a superfície. Destacamos alguns deles para que se possa compreender o papel desse artigo:

- Todos os planos desenhados através de qualquer linha reta sobre uma superfície de

²⁵Let $S - L^2 = 0$ be the equation of another cone having also double contact with the given. Subtracting these equations, we have for the intersection of the last two conics $L^2 - L'^2 = 0$. The equations therefore of two chords of intersection are $L - L_1 = 0$, $L + L_1 = 0$. These two chords must pass through the intersections of the two chords of contact, since their equations are satisfied by the combined equations $L = 0$, $L_1 = 0$

terceiro grau tocam a superfície em pares de pontos que formam um sistema em involução, ou tal que a razão anarmônica de qualquer quatro é igual à dos quatro correspondentes.

- Se uma linha reta estiver totalmente contida em qualquer superfície, ela tocará a curva parabólica dessa superfície em $n - 2$ pontos.
- Cada superfície do terceiro grau (não sendo uma superfície regrada) contém 27 linhas retas e tem 45 planos tangentes agudos

Essas afirmações são corroboradas pelos companheiros de pesquisa Cayley e Sylvester. Com isso, é importante destacar a influência que Salmon tem com os outros dois, uma vez que as publicações destes surgem na década de 1850, apesar de termos encontrado textos de ambos no final dos anos 1840 (como é o caso de Cayley (1849d) e da correspondência de Sylvester para Lord Brougham de 1849 (PARSHALL, 1998, p. 20)).

Com essas considerações estabelecidas, Salmon apresenta novas contribuições ao caracterizar a quantidade de linhas e planos tangentes em uma superfície de 3ª ordem. Estes resultados levam em consideração casos de pontos cônicos,²⁶ pontos duplos e bi planares. A partir disso, o autor passa de problemas gerais que envolvem transformação dos polinômios homogêneos. Nesse contexto encontramos conexões importantes com outros autores. Como exemplo, citamos as fórmulas de Joachimsthal, que são utilizadas para determinar equações de cones tangentes a superfícies de terceira ordem. Essas são as mesmas fórmulas apresentadas em Sylvester (1851d), como já apresentado no capítulo 3.

Essa relação com o trabalho de Joachimsthal surgiu novamente em 1857 no artigo "On the Contact of Right Lines with Surfaces" (SALMON, 1857b). Nesses textos, encontramos conexões com a matemática produzida no continente, uma vez que o autor nos revela a divulgação de Cayley no *Jornal do Crelle*, no qual se relacionam os métodos de eliminação aos problemas de contatos. Esse artigo de Salmon se dedica à teoria das curvas, de modo a estabelecer resultados sobre as tangentes de acordo com os graus dos polinômios que representam as curvas e superfícies. Como técnicas, o uso dos *emanantes* e do hessiano são frequentes no texto.

Salmon também apresentou contribuições em problemas pontuais. Assim como seus antecessores, o QJPAM dedicou seções para resoluções explícitas de problemas, ou seja, um espaço para resolução de exercícios fazia parte do cotidiano dos interessados nos jornais produzidos em solo britânico. Nesse contexto, o volume 1 do QJPAM abriga em sua seção de notas geométricas os seguintes resultados atribuídos ao matemático e

²⁶Pontos nos quais é possível construir um cone, tangente a uma região da superfície, cujo vértice é o ponto em questão.

reverendo irlandês: 1) Equação de um círculo que corta três outros em ângulos retos, a qual é constituída por uma combinação das diferenciais do polinômio homogeneizado,²⁷ o que nos remete à obra de Plücker; 2) Estabelecimento da condição necessária para a distribuição harmônica de quatro pontos; 3) Utilizando a fórmula do item anterior, determinação do lugar geométrico de um ponto, de modo que as quatro tangentes dele a duas cônicas formem um feixe harmônico

Já notei essa cônica (Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. ix. p. 30.), como aquela que passa pelos oito pontos de contato das tangentes comuns às duas cônicas; mas eu não estava ciente da propriedade geométrica dessa cônica aqui anunciada. Possivelmente a consideração desta cônica pode sugerir algo sobre as propriedades geométricas das cônicas covariantes de uma curva de quarto grau, um assunto sobre o qual nada ainda é conhecido.²⁸ (SALMON, 1857a, p. 238, Tradução Nossa)

Nesse trecho encontramos uma relação próxima entre os conceitos geométricos e a *Teoria dos Invariantes*. O artigo citado do CDMJ é um trabalho do próprio Salmon que apresenta uma série de exemplo sobre a utilização dos *Hyperdeterminantes* de Cayley. A noção de covariância revela a conexão entre as temáticas, sobretudo no que diz respeito aos problemas de contatos, que se caracteriza pela presença das transformações.

A análise dos artigos publicados por Salmon a respeito da temática em questão reforça seu papel de divulgador das práticas. Os textos apresentam, de forma permanente, a influência de outros autores e se concentram em explicar o funcionamento das técnicas que são comuns à comunidade. O trio da *Teoria dos Invariantes* representa participação ativa na produção de conhecimento matemático, mas também outros personagens participam desse processo. Alguns já conhecidos, como é o caso de Spottiswoode, e outros que trazem contribuições específicas sobre o assunto. A seguir, apresentamos algumas análises dos artigos publicados por esses matemáticos nos jornais britânicos.

Em 1841, um dos fundadores do CMJ publica um texto que trata dos pontos singulares de uma curva algébrica. Em Gregory (1841b), o autor investiga as retas tangentes a superfícies algébricas em pontos singulares, que são pontos do objeto que tornam zero as derivadas parciais do polinômio que representa a superfície. De acordo com o autor, esse problema foi abordado de maneira superficial por matemáticos como

²⁷Esta é uma expressão dos dias atuais, a ideia é transformar um polinômio em homogêneo através da multiplicação de uma variável extra.

²⁸I have already noticed this conic (Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. ix. p. 30.), as one which passes through the eight points of contact of common tangents to the two conics; but I was not then aware of the geometrical property of this conic here announced. Possibly the consideration of this conic may suggest something as to the geometrical properties of the covariant conics of a curve of the fourth degree, a subject on which nothing is known as yet.

Monge, Leroy e Dupin, sem ter sido considerada uma abordagem de todos os pontos de contato de maneira geral.

O trabalho de Gregory se concentra no estudo sobre superfícies de segunda ordem, as derivadas parciais são utilizadas para determinar os coeficientes da equação que descreve o locus das retas tangentes à superfície nos pontos singulares. Essa teoria é aplicada na determinação de cone tangente a uma superfície dada, nas superfícies de ondas de Fresnel e na interpretação do locus dos planos tangentes a um parabolóide elíptico. É importante notar que o autor apresenta uma distinção de pontos singulares em curvas planas e pontos singulares em superfícies

Antes de prosseguir com algumas aplicações da fórmula que acabamos de investigar, farei uma ou duas observações sobre a diferença, com respeito a pontos singulares, entre curvas planas e superfícies. Em primeiro lugar, será facilmente visto que as três equações (2) podem ser satisfeitas por alguma relação entre as variáveis, sem atribuir qualquer valor particular a cada uma.²⁹ (GREGORY, 1841b, p. 254, Tradução Nossa)

Ao se referir às equações (2), o autor quer indicar as derivadas parciais da curva $F(x,y,z) = 0$ igualadas a zero. Essas equações descrevem a reta tangente em pontos específicos da curva. Em outras palavras, essa citação relaciona retas tangentes a pontos singulares. Além desta descrição, Gregory completa:

Se supusermos que a relação dada pela equação $\phi(x,y,z) = 0$ a intersecção da superfície (1), com a representada pela última equação, dará uma reta que é lugar geométrico dos pontos singulares: isto é, todo ponto da reta é um ponto singular.³⁰ (GREGORY, 1841b, p. 254, Tradução Nossa)

Essa citação conclui a ideia de pontos singulares do autor. Ao construir a equação ϕ , como uma intersecção entre F e uma transformação F' (resultado de uma variação ínfima em x , y e z), ele descreve o lugar geométrico dos pontos singulares à curva F . Além disso, nos casos em que o polinômio gera um locus degenerado, as curvas planas apresentam apenas pontos singulares isolados. Nessa prática é possível notar que, diferente do que viria a surgir a partir advento dos *invariantes*, Gregory se concentra numa abordagem que se baseia na ideia de continuidade das funções. Essa é uma característica importante da *Teoria dos Invariantes*, o foco nas propriedades dos polinômios.

²⁹Before proceeding to give some applications of the formula which has just been investigated, I shall make one or two remarks on the difference, with respect to singular points, between plane curves and surfaces. In the first place it will be readily seen that the three equations (2) may be satisfied by some relation between the variables, without assigning any particular value to each.

³⁰If we suppose the relation to be given by the equation $\phi(x,y,z) = 0$ the intersection of the surface (1), with that represented by the last equation, will give a line which is a locus of singular points: that is to say, every point in the line is a singular point.

Outra publicação desse autor lidou com a determinação da equação de retas tangentes. Mais uma vez com uma abordagem diferente do que viria a ser a dos matemáticos dos *invariantes*, em "Of Asymptotes to Algebraic Curves"(GREGORY, 1843), temos a seguinte equação

$$x' \frac{du}{dx} + y' \frac{du}{dy} + \phi_{n-1}(x,y) + 2\phi_{n-1}(x,y) + \dots = 0$$

onde u é um polinômio de segunda ordem e ϕ_i são o que resta, quando se destacam os termos com maiores valores resultantes da soma dos expoentes de x e y . Essa expressão da reta tangente é utilizada para determinar as direções assintóticas da curva. A ideia é utilizar os termos de maior potência da equação geral da tangente como forma de encontrar o ponto de contato com a curva e, assim, determinar as direções assintóticas.

É possível perceber que a noção de continuidade não encontrou aderência na comunidade, uma vez que a maior parte dos trabalhos se concentra nas relações entre os coeficientes dos polinômios e as formas que derivam sobre eles. Como exemplo, podemos citar o texto "On the Intersections of Tangentes Drawn through Two Points on a Curve of the Third Degree"(ROBERTS, 1860), em que o autor apresenta resultados sobre pontos de contatos de curvas de planas a partir do uso de técnicas inspiradas dos trabalhos de Salmon. Dessa forma, é possível inferir que houve uma mudança de perspectiva sobre o tratamento de problemas geométricos, não apenas sobre as ideias sintéticas e analíticas, mas também sobre uma abordagem isenta da noção de função, apesar do uso frequente do termo.

Spottiswoode foi um autor que produziu artigos mais alinhados com as ideias disseminadas pelo trio Sylvester, Cayley e Salmon. Em duas publicações na *Philosophical Transactions*, o autor discute as condições para que duas curvas planas tenham uma certa quantidade de pontos de contato. Essas condições são estabelecidas da investigação de dois polinômios homogêneos de grau n em três variáveis.

O número de pontos de contato é determinado pela expressão $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$. A partir daí, o autor considera as situações variando os tipos, e as quantidades, de contato. Se as curvas U e V apresentam n pontos de contato, então a seguinte relação é necessária

$$V = 0, \Delta V = 0, \dots, \Delta^n V = 0$$

$$V = (a, b, \dots, k)(x, y, z)^n = a \frac{\partial V}{\partial a} + b \frac{\partial V}{\partial b} + \dots + k \frac{\partial V}{\partial k}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial a} & \frac{\partial V}{\partial b} & \dots & \frac{\partial V}{\partial k} \\ \Delta \frac{\partial V}{\partial a} & \Delta \frac{\partial V}{\partial b} & \dots & \Delta \frac{\partial V}{\partial k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{n-1} \frac{\partial V}{\partial a} & \Delta^{n-1} \frac{\partial V}{\partial b} & \dots & \Delta^{n-1} \frac{\partial V}{\partial k} \end{vmatrix} = 0$$

onde Δ representa o *discriminante* da forma algébrica. Podemos notar que Spottiswoode apresenta uma expansão da ideia que Sylvester utiliza em seus trabalhos do início dos anos 1850; além disso, faz uso da notação de Cayley para os polinômios homogêneos. É importante destacar ainda que a equação gerada pelo determinante acima associa suas raízes aos pontos de contato, cuja natureza está relacionada com os tipos de raízes.

A participação de Spottiswoode na comunidade continua com a publicação do "On the sextactic points of a plane curve" (SPOTTISWOODE, 1865), onde encontramos mais uma referência ao trabalho de Cayley. Mais uma vez, o trabalho se concentra em descrever as condições dos polinômios, de modo a estabelecer os diferentes tipos de contatos.

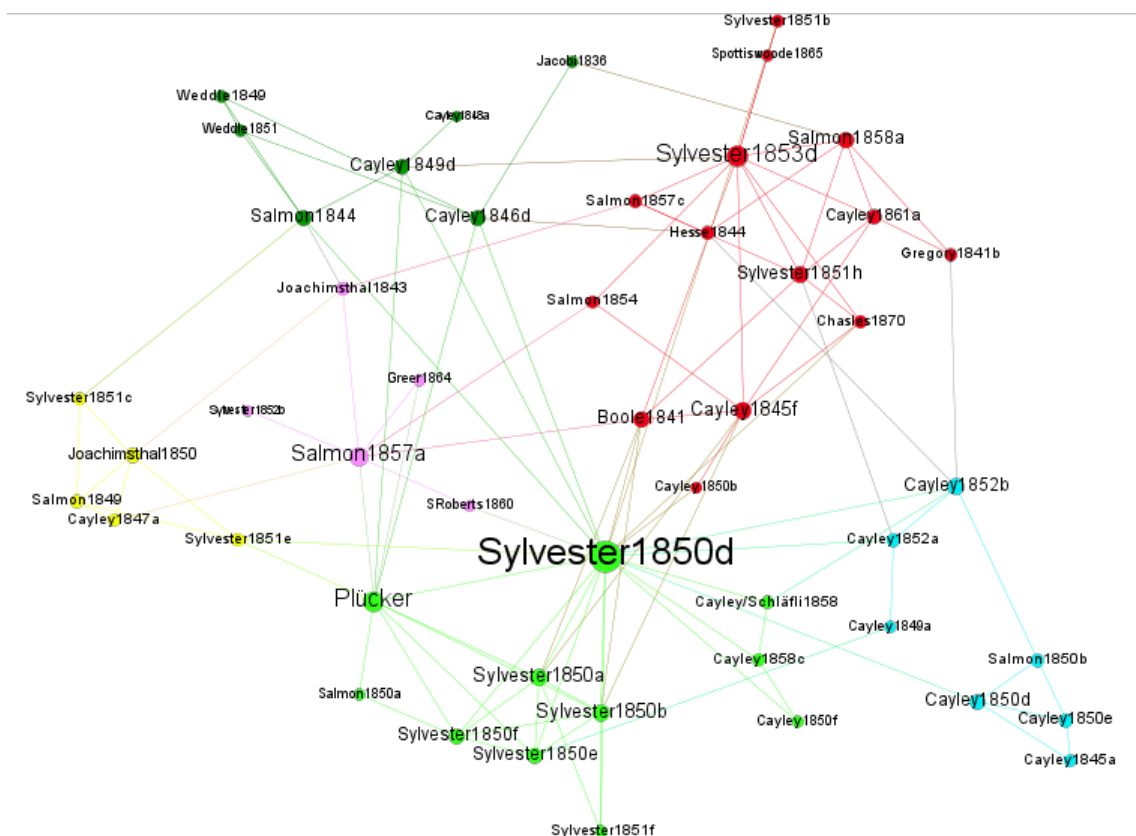
Por fim, destacamos o texto de Henry Greer, publicado no QJPAM 6 de 1864, o qual apresenta uma referência direta à abordagem de Plücker como forma de determinar as coordenadas dos pontos de contatos de duas superfícies algébricas. Esse trabalho também interage com os métodos e com as técnicas difundidas pela obra de Salmon.

Eu acho que este é um método mais simples de obter a equação da esfera inscrita do que aquele dado pelo Dr. Salmon. A equação que acabamos de encontrar é a equação geral de um conoide tocando as quatro faces, se p, q, etc. for arbitrário. Que essas seis razões são suficientes para a determinação das coordenadas de todos os pontos de contato, com a ajuda do "esquema" escrito anteriormente, aparece considerando que as coordenadas dos pontos de contato em qualquer face A, substituídas na equação de qualquer outra face B, dê o mesmo resultado que a substituição das coordenadas do ponto de contato em B na equação da face A. ³¹ (GREER, 1864, p. 241, Tradução Nossa)

³¹I think that this is a simpler method of obtaining the equation of the inscribed sphere than that given by Dr. Salmon. The equation just found is the general equation of a conicoid touching the four faces, if p, q, etc. be arbitrary. That these six ratios are sufficient for the determination of the coordinates of all the points of contact, by the help of the "scheme" written previously, appears by considering that the coordinates of the points of contact on any face A, substituted in the equation of any other face B, give the same result as does the substitution of the coordinates of the point of contact on B in the equation of the face A.

Essa citação revela o interesse do autor sobre os diferentes tipos de contato, tanto de linhas quanto de superfícies. Além disso, temos uma afirmação direta sobre vantagem do uso das coordenadas homogêneas em relação ao método utilizado por Salmon para determinar de uma esfera inscrita em um conoide. Após as análises desta temática encontramos o seguinte cenário.

Figura 27 – Rede de Contatos



Fonte – Elaborada pelo Autor

Nesse grafo, destacam-se seis regiões, dentre as quais a vermelha segue representando a *Teoria dos Invariantes*; a verde claro, os textos centrais da temática que estamos analisando; e a verde escuro, os artigos sobre descrição de locus de curvas e superfícies. Como na figura 26, as regiões rosa, amarela e azul claro, trazem trabalhos mais específicos, como o cálculo de tangentes presente nos textos de Joachimsthal (1843) e Sylvester (1851c), além das investigações de curvas de dupla curvatura encontradas nos textos de Cayley (1852a) e Salmon (1853).

Além da proliferação de trabalhos nesta temática, o modo como as produções sobre problemas de contatos permeia todos os outros assuntos se assemelha às investigações sobre as propriedades de locus de curvas e superfícies algébricas. Em outras palavras, os principais artigos desta temática são influenciados por pesquisas desenvolvidas em outros

temas. É fato que esta mistura ocorre por conta das semelhanças de cada das categorias que descrevem a comunidade.

A influência da produção de conhecimento do continente também se faz presente nesta rede. Além das publicações de Cayley, que já surgem como referência para as produções britânicas, as obras de matemáticos como Hesse, Jacobi, Joachimsthal e Plücker aparecem na rede como conexões importantes. Como um personagem ativo sobre as investigações com polinômios homogêneos, Hesse naturalmente trabalhou em textos que servem de inspiração para os personagens do núcleo da comunidade de práticas britânica, Sylvester, Cayley e Salmon.

Além de Hesse, a obra de Plücker ganha destaque mais uma vez. Como ocorreu na temática dos locus de curvas e superfícies algébricas, o autor alemão é um nó com um grande volume de interações. Isso significa que a abordagem das coordenadas homogêneas fez parte da realidade das práticas da comunidade, como no caso da maioria dos artigos analisados nesta seção. Além disso, os artigos que não citam diretamente a obra de Plücker apresentam conexões indiretas com ela, através dos textos de referências aos personagens principais da rede.

Observando os principais nós da rede, podemos destacar a participação de Sylvester (1850d), que ganha destaque por conta das conexões que o autor faz entre os problemas de contato, as coordenadas homogêneas, as eliminações e os *invariantes*. Esse fator revela a ligação importante com os textos que tratam dos problemas de transformações. Essas conexões nos mostram a correlação que existe entre a nova abordagem para problemas geométricos e os assuntos que circundaram a busca pelos *invariantes* algébricos. Além disso, essa proximidade também revela o papel de protagonismo de Sylvester, Cayley e Salmon, o que justifica sua legitimidade para conduzir o desenvolvimento da comunidade britânica de matemática. Na próxima seção, nos concentramos na produção de conhecimentos sobre as transformações dos polinômios.

5.5 Transformações Lineares

As transformações lineares são um assunto central da produção de conhecimentos dos matemáticos britânicos, o que deve tanto ao volume de artigos produzidos, quanto à qualidade do que é produzido no Reino Unido. Como é bem conhecido da historiografia tradicional, a história do interesse britânico pelos polinômios homogêneos se confunde com o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*.

Quando olhamos para a produção ao longo das três fases dos jornais de Cambridge, percebemos que a Fase 1 foi dominada pelas contribuições de Boole e, principalmente, de Cayley que publicou 6 dos 7 artigos que surgiram entre 1837 e 1845. Na Fase 2, já

encontramos a contribuição significativa de Sylvester, além de participações importantes de Michael Roberts e Cockle. Nessa fase, encontramos 25 artigos, o que demonstra o aumento do volume na produção da comunidade. Por fim, a Fase 3 conta com 41 artigos associados a essa temática. Diferente das outras fases, a quantidade de autores revela o modo como as discussões sobre o assunto geraram interesse de vários matemáticos, inclusive do continente. As práticas desenvolvidas aqui, representam bem a identidade da produção de conhecimento matemático da comunidade que estamos estudando.

Outro ponto importante é a internacionalização. Além de novos autores britânicos, as investigações sobre propriedades das transformações contaram com publicações de matemáticos do continente, como é caso de Hermite, Brioschi e Faa Di Bruno, que tiveram artigos publicados nos jornais britânicos. De maneira mais específica, essas publicações ocorreram no QJPAM, jornal de editoria de Sylvester, o que nos mostra como o núcleo da comunidade já representava forte influência sobre a divulgação de conhecimento nos periódicos relevantes do Reino Unido.

Mais uma vez, Cayley é o matemático que mais produziu sobre este assunto, tendo publicado 28 artigos. Assim como no caso de Sylvester, a análise destes trabalhos nos revela uma produção genuína de conhecimento matemático, a partir do momento em que as contribuições relevantes que surgem tratam de assuntos semelhantes que circundam a busca pelos *invariantes*.

O primeiro trabalho do autor, que trata deste assunto, foi "Chapters in the Analytical Geometry of (n) Dimensions"(CAYLEY, 1844). É interessante notar que esse trabalho se encontra na seção de álgebra, apesar do título. No entanto, a leitura mostra um trabalho generalista sobre propriedades de mudanças de variáveis de um polinômio homogêneo. O texto é apresentado em quatro partes: a primeira descreve a fórmula que o autor chamaria de *Hyperdeterminante* um ano depois; na segunda, se discute como uma substituição linear deve ser para atender às condições prévias de um problema; a terceira parte apresenta a primeira aplicação destas fórmulas através do conceito de recíproco; por fim, é apresentada a conexão com assuntos geométricos como intersecções de superfícies de 2ª ordem. Sobre a fórmula do *Hyperdeterminante*, Cayley se refere a uma representação compacta de uma coleção de determinantes que são gerados a partir da eliminação dos coeficientes de um número fixado de variáveis. Dessa forma, a expressão

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \dots \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' & \dots \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \delta'' & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

onde $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \dots, \alpha', \dots$ são os coeficientes da transformação aplicada a um polinômio homogêneo, ou ainda os coeficientes da manipulação apresentada por Boole no artigo fundador da *Teoria dos Invariantes*.

Como foi brevemente indicado no último capítulo anterior, o texto "Exposition of a General Theory of Linear Transformations"(BOOLE, 1841), se dedica a investigar as propriedades das transformações propostas nas obras de Lagrange, Lebesgue e outros. Nesse contexto, o autor lida com polinômios homogêneos de graus 2 e 3 e se propõe a determinar as condições que uma transformação linear necessita para converter um polinômio geral em soma de quadrados, positivos ou negativos. Essa característica conecta o trabalho com os *invariantes* aos interesses que surgiram a partir dos desdobramentos das investigações sobre a *Equação Secular*. Ainda no texto de Boole, sua principal contribuição foi a percepção de que a relação entre os coeficientes do polinômio homogêneo Q do transformado R se dá pela fórmula:

$$\theta(Q_n) = \frac{\theta(R_n)}{E^{\frac{\gamma n}{m}}}$$

onde n é o grau do polinômio, m o número de variáveis, $\theta(Q_n)$ e $\theta(R_n)$ os discriminantes da forma Q e da forma transformada R, γ o grau destes discriminantes e E o determinante da transformação linear, chamada na época de módulo da transformação. Essa prática traz um vislumbre sobre o modo como as técnicas eram compartilhadas na comunidade. O texto de Boole apresenta o seguinte exemplo de *discriminante*:

$$Q = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$$\frac{dQ}{dx} = 2Ax + 2By$$

$$\frac{dQ}{dy} = 2Bx + 2Cy$$

tomando o determinante,

$$\begin{vmatrix} 2A & 2B \\ 2B & 2C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

como a resultante da eliminação de variáveis do sistema de diferenciais parciais, vemos o *discriminante* descrito por Sylvester em seus artigos dos anos 1850. Apesar disso, a descrição não é idêntica à de Boole, uma vez que o futuro editor do QJPAM não se refere a um sistema de diferenciais parciais. As relações que existem entre o estudo das transformações de formas algébricas e as propriedades dos contatos entre curvas se encontram no centro do desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*.

É importante destacar que, tanto Boole quanto Cayley, identificavam aplicações das propriedades de invariância em problemas de geometria analítica. Com esta ideia, o autor apresenta nova contribuição para a teoria, ainda no CMJ 4. Em "On the Theory of Linear Transformations"(CAYLEY, 1845i), encontramos a descrição completa dos *Hyperdeterminantes*, além de uma extensão do resultado de Boole sobre a invariância do *discriminante*.

Uma característica muito particular desse trabalho é o modo como o autor trata os polinômios homogêneos, comparando os termos como um conjunto de variáveis distintas. Essa prática é a ideia principal para a compreensão do conceito de *Hyperdeterminante*, uma vez que cada determinante gerado a partir da estrutura descrita por Cayley representa uma forma transformada por um conjunto de variáveis distintas.

Ao continuar minhas pesquisas sobre o presente assunto, fui levado a uma nova maneira de considerar a questão, que, ao mesmo tempo em que é muito mais geral, tem a vantagem de se aplicar diretamente ao único caso que se pode esperar desenvolver com algum grau de completude, o de funções de duas variáveis. De fato, a pergunta pode ser proposta: "Encontrar todas as derivadas de qualquer número de funções, que tenham a propriedade de preservar sua forma inalterada após quaisquer transformações lineares das variáveis". Por Derivada entendo uma função deduzida de qualquer maneira das funções dadas, e dou o nome de Derivada Hyperdeterminante, ou simplesmente de Hyperdeterminante, àquelas derivadas que têm a propriedade que acabamos de enunciar. ³² (CAYLEY, 1845f, p. 104, Tradução Nossa)

Essa introdução do "On Linear Transformations"(CAYLEY, 1845f), retrata o momento em que o autor percebe a possibilidade de um novo campo de pesquisa. De forma semelhante ao que ocorre com Sylvester, ao perceber a necessidade de um estudo sobre o que ele chamou de "nova geometria" ou "nova álgebra", Cayley propõe a ideia central que

³²IN continuing my researches on the present subject, I have been led to a new manner of considering the question, which, at the same time that it is much more general, has the advantage of applying directly to the only case which one can possibly hope to develop with any degree of completeness, that of functions of two variables. In fact the question may be proposed, "To find all the derivatives of any number of functions, which have the property of preserving their form unaltered after any linear transformations of the variables." By Derivative I understand a function deduced in any manner whatever from the given functions, and I give the name of Hyperdeterminant Derivative, or simply of Hyperdeterminant, to those derivatives which have the property just enunciated.

viria a conduzir à *Teoria dos Invariantes*: a busca pelas expressões algébricas (derivadas, nas palavras dele) que permanecem inalteradas após substituições lineares nas variáveis. Além disso, destaca-se o papel dos *Hyperdeterminante* como um meio para calcular estas derivadas.

Em particular, esse artigo coloca a questão sobre quais são as derivadas independentes de outras. Em outras palavras, Cayley se perguntava quais seriam as formas derivadas que podem servir como base para constituir novos *invariantes*, ideia que viria a ser corroborada por Sylvester com a noção de *concomitantes* complexos. Os *invariantes*, como combinação de outros, ainda surgiram no mesmo ano destas investigações, porém é importante destacar alguns contextos.

A publicação do "On the Reduction of $\frac{du}{\sqrt{U}}$, when U is a Function of the Fourth Order" (CAYLEY, 1845g), nos mostra uma das primeiras aplicações das relações entre as formas que permanecem inalteradas. Ao se propor a investigar o processo de redução de um polinômio de quarta ordem, Cayley faz a seguinte afirmação:

E, portanto, os diferentes modos de efetuar isso foram examinados, mais ou menos, pela maioria dos que escreveram sobre o assunto. A suposição mais simples, adotada por Legendre, e discutida com algum detalhe por Guderman, é que (u) é uma fração, cujo numerador e denominador são funções lineares da nova variável. Mas a teoria dessa transformação admite ser desenvolvida mais além do que já foi feito, no que diz respeito à equação que determina o módulo da função elíptica. Isto pode ser efetuado mais facilmente como se segue.³³ (CAYLEY, 1845g, p. 70, Tradução Nossa)

Essa citação nos mostra o modo como os interesses do autor se adequam a discussões que já se encontravam em pauta na década de 1840. As menções a Legendre e Guderman revelam o início de uma relação com a produção do continente. Além disso, esse artigo apresenta novos *invariantes*

$$P = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

$$I = ae - 4bd + 3c^2$$

$$J = ace - ad^2 - eb^2 - c^3 + 2bdc$$

os quais são *invariantes*, gerados a partir das substituições que formam os *Hyperdeterminantes*, como é destacado em Parshall (1989) e Parshall (2006a). Cabe ressaltar que

³³And, accordingly, the different modes of effecting this have been examined, more or less, by most of those who have written on the subject. The simplest supposition, that adopted by Legendre, and likewise discussed in some detail by Guderman, is that (u) is a fraction, the numerator and denominator of which are linear functions of the new variable. But the theory of this transformation admits of being developed further than it has yet been done, as regards the equation which determines the modulus of the elliptic function. This may be effected most easily as follows.

estas expressões ainda não recebiam o nome de *invariantes*, muito menos existia uma discussão a respeito de uma teoria geral sobre as expressões que permanecem inalteradas após transformações, uma vez que o interesse era oriundo de outras áreas. Em particular, as formas I e J ficariam conhecidas como *invariantes fundamentais*, por conta da ideia de encontrar todas as formas *invariantes* que culmina com o teorema de Gordan nos anos 1860. Sobre essa perspectiva de interesses distintos em relação aos *invariantes*, destacamos o texto "Note on the Maxima and Minima of Functions of Three Variables"(CAYLEY, 1845b), que utiliza determinantes associados a formas quadráticas para determinar pontos críticos desses polinômios.

Os interesses geométricos também representam o modo como as ideias sobre os *invariantes* passaram a fazer parte das discussões presentes na obra de Cayley. No mesmo período em que publicava os artigos sobre curvas algébricas, o autor apresenta o artigo "On Homogeneous Functions of the Third Order with Three Variables"(CAYLEY, 1845b), com o objetivo de determinar as condições das transformações lineares aplicadas a uma curva plana de terceira ordem para determinar seu recíproco polar. Para tal, o autor utiliza uma adaptação da abordagem de Boole para determinar a transformação que reduz o polinômio à soma de quadrados. A diferença deste artigo para o que é considerado fundador é o acréscimo da equação $\Theta = \xi x + \eta y + \zeta z = 0$ ao sistema de derivadas parciais.

Essas contribuições dão início às investigações que originam a *Teoria dos Invariantes*. Nesse sentido, podemos afirmar que esta temática tem inspiração nas discussões da teoria. Além disso, Cayley acompanha o processo de mudança de perspectiva em relação à produção de conhecimento matemático no Reino Unido, o que pode ser verificado a seguir:

A teoria da transformação simultânea por substituições lineares de duas funções homogêneas de segunda ordem foi desenvolvida por Jacobi nas memórias "De binis quibuslibet functionibus", etc. Crelle, Tom. xii. pág. 1; mas o método mais simples de tratar o problema é aquele derivado da Teoria das Transformações Lineares do Sr. Boole, combinada com a observação em suas "Notas sobre Transformações Lineares", neste Journal, vol. 4. pág. 167, (Série Antiga).³⁴ (CAYLEY, 1849c, p. 47, Tradução Nossa)

Nesse trecho, Cayley indica a possibilidade de novas abordagens para investigações sobre transformações lineares. Esse artigo surge quatro anos após a declaração do autor sobre a necessidade da busca das expressões que permanecem inalteradas após substituições lineares. Nesse período, ocorrem as primeiras conversas com Sylvester e o conhecimento

³⁴THE theory of the simultaneous transformation by linear substitutions of two homogeneous functions of the second order has been developed by Jacobi in the memoir "De binis quibuslibet functionibus,"etc. Crelle, tom. xii. p. 1; but the simplest method of treating the problem is the one derived from Mr. Boole's Theory of Linear Transformations, combined with the remark in his "Notes on Linear Transformations,"in this Journal, vol. IV. p. 167, (Old Series).

da obra de Plücker. As contribuições deste autor, no período entre 1844 e 1850, plantam a semente do conjunto central de práticas da comunidade britânica.

Após Sylvester assumir o papel de protagonista no desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*, Cayley publica artigos que apresentam técnicas que fazem parte do conjunto de ideias da nova Teoria. Em 1852, ele publica dois artigos no CDMJ 7, nos quais encontramos a noção de permutantes como método para gerar *invariantes*. Ao estabelecer propriedades dos determinantes, a partir das permutações das linhas, o autor utiliza ideias que estavam em construção e que se materializaram no trabalho de Sylvester, como é caso dos comutantes que apresentamos no capítulo 3.

Nestas circunstâncias, o Sr. Sylvester me comunicou uma série de declarações formais, não apenas orais, mas por escrito, no sentido de que ele havia descoberto um método de permutação para obter tantos invariantes - viz. invariantes comutativos - por inspeção direta de uma função de qualquer grau de qualquer número de letras, pois o índice do grau contém fatores pares; uma dessas invariantes comutativas sendo de fato a função $ace + 2bcd - ae^2 - bd^2 - c^3$, exprimível, de acordo com a

notação do Sr. Sylvester, por $\begin{pmatrix} a^2, ab, b^2 \\ a^2, ab, b^2 \end{pmatrix}$; e, de acordo com a notação de minhas memórias no Camb. fil. trad., supondo $00 = a, 01 = 10 = b, 02$

$= 11 = 20 = c$, por $\begin{vmatrix} 00 \\ 11 \\ 22 \end{vmatrix}$.³⁵ (CAYLEY, 1852a, p. 98, Tradução Nossa)

Apesar das diferenças de notação, o cálculo de determinante é representado pelas somas, positivas ou negativas, dos produtos das colunas das "matrizes" representadas na citação acima. Nesse trecho, podemos identificar o movimento de parceria entre Cayley e Sylvester, sendo um exemplo importante da circulação de ideias na comunidade de práticas. Apesar de ser um exemplo muito específico, a comunicação mantida entre estes

³⁵Under these circumstances Mr. Sylvester communicated to me a series of formal statements, not only oral but in writing, to the effect that he had discovered a permutation method of obtaining as many invariants - viz. commutative invariants - by direct inspection from a function of any degree of any number of letters as the index of the degree contains even factors; one of these commutative invariants being in fact the function $ace + 2bcd - ae^2 - bd^2 - c^3$, expressible, according to Mr. Sylvester's notation,

by $\begin{pmatrix} a^2, ab, b^2 \\ a^2, ab, b^2 \end{pmatrix}$; and, according to the notation of my memoir in the Camb. phil. trans., supposing $00 =$

$a, 01 = 10 = b, 02 = 11 = 20 = c$, by $\begin{vmatrix} 00 \\ 11 \\ 22 \end{vmatrix}$.

matemáticos se replica nos outros personagens que se interessam pelos assuntos comuns do grupo.

É inegável que as ações de Sylvester trouxeram Cayley de volta à cena no desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*, como afirma a biografia de Karen Parshall. No contexto de nossas análises é possível compreender essa afirmação a partir do fato das publicações de Cayley sobre as transformações terem parado em 1849 e retornado em 1852, logo após o período no qual seu amigo matemático havia estabelecido as bases da nova Teoria. Para ser mais preciso, os artigos publicados em 1852 e 1853 não representam suas principais contribuições, uma vez que se tratam dos textos sobre os permutantes, que se associam ao trabalho do próprio Sylvester, e de problemas que tratam de questões geométricas relacionadas às outras temáticas.

Esse é o caso das duas publicações que surgiram na *Philosophical Magazine* em 1853 e 1854 com os títulos: "On the homographic transformation of a surface of the second order into itself"(CAYLEY, 1853) e "On the homographic transformation of a surface of the second order into itself"(CAYLEY, 1854c). Ambos os artigos tratam das relações entre polígonos e as cônicas nas quais eles são inscritos, a partir de uma restrição de um teorema mais geral estabelecido por William Rowan Hamilton (1805 - 1865), a saber: se houver um polígono de $2m$ de lados inscrito em uma superfície de segunda ordem, e $(2m-1)$ dos lados passar por pontos dados, então o $2m$ -ésimo lado tocará constantemente dois cones circunscritos sobre a superfície de segunda ordem.

Como prática, o autor destaca que esse problema depende de uma transformação de uma forma quadrática em si mesma, o que ele chamou de transformação homográfica, ideia que já havia tratada no volume 32 do *Jornal do Crelle* através do texto sobre as propriedades das matrizes antissimétricas. A esse respeito, encontramos uma relação com as transformações de Hermite que se caracterizam pelo tratamento aritmético, fator que se adequa aos problemas que lidam com polígonos.³⁶

O ano de 1854 é marcado pelo início da série de artigos que ficou conhecido como memórias sobre os *Quantics* (termo utilizado por Cayley para se referir aos polinômios homogêneos). Esse trabalho apresenta forte viés geométrico, uma vez que se concentra na descrição do método de coordenadas homogêneas desenvolvido por Plücker. É importante ressaltar que esse tipo de coordenada já era de conhecimento dos matemáticos ingleses, tendo sido objeto de conversas entre Cayley e Sylvester na década de 1840, como indica Parshall (2006b).

Digo, portanto, simplesmente que x, y, z são as coordenadas de um

³⁶As contribuições de Hermite serão mais bem analisadas no próximo capítulo.

ponto (estritamente falando, são as razões dessas quantidades que são as coordenadas, e as próprias quantidades x, y, z são indeterminadas, ou seja, são apenas determinadas a um fator comum *près*, de modo que, assumindo que as coordenadas de um ponto são α, β, γ , queremos dizer apenas que $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$, e como resultado nunca obtemos $x, y, z = \alpha, \beta, \gamma$, mas apenas $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$; mas uma vez entendido isso, não há objeção em falar de x, y, z como coordenadas).³⁷ (CAYLEY, 1854a, p. 246, Tradução Nossa)

Essa é a descrição que Cayley apresenta do método das coordenadas homogêneas. Podemos notar que existe uma preocupação descritiva das bases de sua investigação sobre os *quantics*. Isso vale para as propriedades de covariância dos polinômios homogêneos, o que mostra a parceria que o autor tinha com Sylvester, que havia publicado o artigo que contém o vocabulário dos *invariantes*. Além disso, Salmon também apresenta uma descrição deste tipo de coordenada com o nome de "coordenadas tri lineares". Outro fator interessante é que Cayley nos mostra um novo engajamento na *Teoria dos Invariantes*, desta vez em meio à comunidade de práticas.

Em nota no fim do texto de 1854, Cayley indica ter descoberto uma relação importante entre o número de *covariantes*, a ordem e o grau dos coeficientes do polinômio, o que se mostra como uma lei mais geral que contém a Lei da Reciprocidade enunciada por Hermite e destacada por Sylvester em seu trabalho sobre a teoria das relações *syzygéticas* e medidas comuns de um sistema de equações homogêneas. Nesse contexto, a segunda memória se concentra em apresentar tabelas de expressões que se caracterizam por relação de covariância, as quais são construídas a partir de técnicas como os *Hyperdeterminantes* e a composição de sistemas através de derivadas parciais. Trata-se de 26 tabelas apresentadas na 2ª memória, além das relações secundárias entre alguns grupos específicos, entre os quais se fazem presentes o *discriminante* de Boole, o hessiano e as fórmulas de resultante de Sylvester.

Na terceira memória sobre os *quantics*, Cayley se dedica às formas ternárias cúbicas e quádricas e são apresentadas novas tabelas de *covariantes* e as relações entre eles. Além disso, se estabelecem conexões com outros autores interessados na nova Teoria que se desenvolvia no período, como são os casos de Hermite e Faa di Bruno. O primeiro, que também apresenta interações com a obra de Sylvester, é destacado por conta de seu trabalho com formas adjuntas, que são caracterizadas como *contravariantes*. O segundo, por sua vez, se dedicou a calcular novos *invariantes*.

³⁷I say, therefore, simply that x, y, z are the coordinates of a point (strictly speaking, it is the ratios of these quantities which are the coordinates, and the quantities x, y, z themselves are indeterminate, i. e. they are only determinate to a common factor *près*, so that in assuming that the coordinates of a point are α, β, γ , we mean only that $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$, and we never as a result obtain $x, y, z = \alpha, \beta, \gamma$, but only $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$; but this being once understood, there is no objection to speaking of x, y, z as coordinates).

A terceira e a quarta memória se dedicaram à ação de busca dos *invariantes*, cuja importância o próprio Cayley havia destacado em 1845. Nesse trajeto, o autor demonstra a existência de uma rede de matemáticos que trabalham no tema, fator que evidencia tanto a formação quanto a validação da comunidade de práticas que já se encontrava em movimento em meados da década de 1850. A quarta memória segue a mesma linha e se concentra nas técnicas que geram *invariantes*, em particular os investigados por Sylvester anos antes, como é o caso de dos *bezoutianos*, *catalectantes*, *emanantes*, além de suas combinações.

Os modos de geração de uma covariante são infinitos em número, e deve-se antecipar que, à medida que surgem novas teorias, haverá ocasião frequente para considerar novos processos de derivação, e destacar, definir e dar nomes a novas covariantes. Mas agora, penso eu, estabeleci a maior parte das definições que são necessárias no momento. ³⁸ (CAYLEY, 1858a, p. 427, Tradução Nossa)

Essa citação nos revela o movimento que vinha sendo conduzido pela geração de *invariantes*. Essas primeiras memórias de Cayley trazem, para além das técnicas que eram utilizadas no tratamento dos problemas de interesse na época, as relações que existem entre os matemáticos da comunidade e os matemáticos do continente. Nesse sentido, a proximidade do autor com um jornal como o *Crelle* serve como um ponto de divulgação importante para a disseminação da Teoria.

Além das investigações de natureza algébrica sobre os *invariantes*, as memórias sobre os *quantics* também se dedicam a discutir temas que se utilizam dos objetos gerados na nova Teoria. Esse é o caso da quinta memória, onde o autor se concentra nas teorias de relação harmônica e involução (tema que já havia despertado o interesse do autor em 1846). Como exemplo, a forma $ac' - 2bb' + ca'$ é um *invariante* que relaciona duas quádricas (polinômios homogêneos em duas variáveis) e, caso esta forma se anule, representa uma relação harmônica. No caso das involuções, encontramos uma associação com os determinantes no parágrafo 109.

³⁸The modes of generation of a covariant are infinite in number, and it is to be anticipated that, as new theories arise, there will be frequent occasion to consider new processes of derivation, and to single out and to define and give names to new covariants. But I have now, I think, established the greater part by far of the definitions which are for the present necessary.

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha + \alpha', & \alpha\alpha' \\ 1, & \beta + \beta', & \beta\beta' \\ 1, & \gamma + \gamma', & \gamma\gamma' \\ 1, & \delta + \delta', & \delta\delta' \\ \text{etc...} \end{vmatrix}$$

esta matriz apresenta os coeficientes de duas formas quadráticas com um número específico de variáveis. De acordo com a quinta memória, formas em que todos os determinantes formados por três linhas se anulam, configuram uma involução. Essa relação caracteriza o que Sylvester chamou de *syzygética*. Esse trabalho sobre as propriedades invariantes dos *quantics* carregava, ao mesmo tempo, uma agenda de disseminação de práticas e de abordagens de problemas geométricos.

Essa percepção se reforça a partir da publicação da sexta memória, onde o autor apresenta seu ponto de vista sobre o papel da nova Teoria de maneira explícita. Nesse artigo, a divisão das seções nos mostra como as ideias discutidas até aquele momento vinham sendo organizadas, de modo que fosse possível adequar cada técnica aos problemas geométricos que povoavam a matemática produzida no Reino Unido.

O trabalho de Cayley com os *invariantes* contou com mais parcerias, além das britânicas. No primeiro volume do QJPAM, encontramos uma correspondência com Hermite, onde se discutem propriedades dos *invariantes* de formas cúbicas. Em particular, os dois matemáticos discutem a relação com o hessiano que gera um *covariante* da forma algébrica em questão. Ao longo dessas discussões, podemos notar que o uso dos determinantes é peça central das argumentações, fator que influenciou o interesse pelo estudo das matrizes.

O termo matriz pode ser usado em um sentido mais geral, mas no presente livro de memórias considero apenas matrizes quadradas e retangulares, e o termo matriz usado sem qualificação deve ser entendido como significando uma matriz quadrada; neste sentido restrito, um conjunto de quantidades dispostas na forma de um quadrado. ³⁹ (CAYLEY, 1858b, p. 17, Tradução Nossa)

Essa introdução apresenta um ensaio sobre as propriedades das matrizes e o papel que elas exercem nas transformações lineares. É importante destacar que Cayley reconhece

³⁹The term matrix might be used in a more general sense, but in the present memoir I consider only square and rectangular matrices, and the term matrix used without qualification is to be understood as meaning a square matrix; in this restricted sense, a set of quantities arranged in the form of a square

a existência do objeto matemáticos que, como já apontamos, foi descrito por Sylvester no início da década de 1850. Além disso, o artigo destaca várias técnicas que vinham se tornando comuns na comunidade, como o cálculo de equações recíprocas, a redução de polinômios a suas formas canônicas, a resolução de sistemas de equações e a determinação de pontos de contatos de curvas algébricas.

O teorema de Sturm, também foi objeto das investigações de Cayley nesta temática. Em "A Discussion of the Sturmian Constants for Cubic and Quartic Equations" (CAYLEY, 1861a), são utilizados os coeficientes das funções de Sturm como funções dos coeficientes do polinômio analisado. Essas expressões são os *invariantes* que o autor identificou em outras publicações e, a partir disso, apresentou seu método para localizar as raízes, observando as mudanças de sinal da função. Além disso, essa proposta também determina a natureza das raízes, reais ou imaginárias.

Da mesma forma, as resultantes dos processos de eliminação também são tratadas pela perspectiva dos *invariantes*. Em 1864, Cayley apresenta uma nota sobre a relação que existe entre uma forma cúbica ternária e seus *covariantes*, gerados a partir do determinante de Hesse. A combinação desses *covariantes* forma o resultante associado à forma algébrica. Por fim, percebe-se que as principais contribuições do autor para esta temática são práticas, como é caso dos *Hyperdeterminantes*, mas o pesquisador também se destaca pelas associações com as produções do continente.

Outro personagem central da produção de conhecimentos sobre a *Teoria dos Invariantes* é George Boole. A publicação "Notes on Linear Transformations" (BOOLE, 1844) apresenta reflexões sobre os resultados encontrados no artigo fundador da teoria de 1841. É importante ressaltar que as motivações de Boole nesta temática eram, inicialmente, a redução dos polinômios homogêneos para soma de quadrados (assunto da próxima seção). O interesse específico pelas transformações surge a partir de discussões com outras produções como as de Cayley. Essa mudança de motivação de Boole pode ser percebida na seguinte citação:

Na execução de qualquer ramo especial de análise, às vezes é desejável fazer uma pausa e tentar ter uma visão conectada dos métodos e dos resultados já alcançados. Tal retrospecto pode servir tanto para fornecer uma estimativa de seu estado real de progresso, quanto para indicar a direção na qual o esforço futuro pode ser mais útil. No presente trabalho desejo contribuir com algo para a realização deste objeto para a Teoria das Transformações Lineares. Ao mesmo tempo, desejo fazer alguns acréscimos a essa teoria, que, no decorrer do breve levantamento que é proposto, prontamente cairão em seu devido lugar e conexão. Tentarei mostrar que sempre que a transformação da equação algébrica de uma curva ou superfície é efetuada pela substituição de novos eixos de coordenadas dados em caráter mas desconhecidos em posição, a descoberta de ambas as relações entre as constantes das duas equações, e das relações lineares entre as variáveis como dependentes dessas

constantes, pode ser reduzida a uma aplicação da teoria das funções homogêneas de segundo grau. ⁴⁰ (BOOLE, 1851b, p. 87, Tradução Nossa)

Como pode ser visto, existe uma diferença significativa entre a perspectiva de Boole em 1844 para 1851. Inicialmente, o autor se volta para um olhar reflexivo sobre as práticas que foram desenvolvidas no que já era conhecido como a *Teoria dos Invariantes*. Por outro lado, ao compararmos os objetivos descritos nessa citação com os pontos discutidos no artigo de 1844, percebemos que o foco do autor passa a ser nos *invariantes* após os movimentos de Cayley e Sylvester no início dos anos 1850. Afirmamos que esta mudança de foco é resultado do processo de construção da identidade da comunidade de práticas, que se caracterizava pela busca das expressões que não se alteram após transformações lineares, como vimos até este momento.

Outro personagem central da rede que contribuiu com esta temática é Salmon. Diferente de Boole, este autor participa com aplicações dos resultados da Teoria e não com uma reflexão sobre eles. No artigo "Exercises in the Hyperdeterminant Calculus" (SALMON, 1854), encontramos uma série de exemplos de problemas que envolvem a prática desenvolvida por Cayley na década anterior. Neles, identificamos outros objetos desenvolvidos no cerne da *Teoria dos Invariantes*, com o caso dos Evecantes de Sylvester. Além disso, os outros exemplos se concentram nos cálculos em si.

Nas memórias que se seguem proponho fazer uma tentativa de enumerar os invariantes, covariantes e contravariantes de uma cúbica quaternária, isto é, de uma função homogênea de terceira ordem em quatro variáveis, que representa geometricamente uma Superfície da terceira ordem. ⁴¹ (SALMON, 1860a, p. 229, Tradução Nossa)

Nessa citação, percebemos o engajamento de Salmon na construção dos *invariantes* de modo que seja possível identificar as formas associadas que não se alteram após

⁴⁰In the prosecution of any special branch of analysis, it is desirable sometimes to pause and endeavour to take a connected view of the methods and the results already attained. Such a retrospect may serve both to afford an estimate of its actual state of progress, and to indicate the direction in which future effort may most usefully be engaged. In the present paper I desire to contribute something towards the accomplishment of this object for the Theory of Linear Transformations. At the same time I wish to make some additions to that theory, which, in the course of the brief survey which is proposed, will readily fall into their proper place and connexion. I shall endeavour to shew, that whenever the transformation of the algebraic equation of a curve or surface is effected by the substitution of new axes of coordinates given in character but unknown in position, the discovery both of the relations among the constants of the two equations, and of the linear relations among the variables as dependent upon those constants, may be reduced to an application of the theory of homogeneous functions of the second degree.

⁴¹In the following memoir I propose to make an attempt at an enumeration of the invariants, covariants, and contravariants of a quaternary cubic, that is to say, of a homogeneous function of the third order in four variables, which geometrically represents a Surface of the third order.

transformações. Essa iniciativa segue o trabalho que foi desenvolvido por Cayley e Sylvester na década 1850 e se concentra numa perspectiva algébrica do problema, fator que coloca o autor como um dos protagonistas da nova Teoria, uma vez que participa diretamente da principal agenda das práticas desta temática.

Além dos autores centrais da comunidade, esta temática traz contribuições de outro personagem relevante da comunidade, Michael Roberts. Seus artigos sobre transformações são publicados nos volumes 4 e 5 do QJPAM. Os primeiros artigos do autor trataram especificamente da geração de *invariantes*.

Em "On some Symmetric Functions of the Roots of Algebraic Equations" (ROBERTS, 1861a), o autor apresenta um método para gerar *invariantes* a partir de raízes de equações de grau n . Essas equações são representadas com a notação descrita por Cayley:

$$f(x) = (a_0, a_1, a_2 \dots a_n)(x, 1)^n = 0$$

ou seja, um polinômio homogêneo de grau n em duas variáveis, onde uma delas é considerada constante. Como vimos anteriormente, essa abordagem adequa a *Teoria dos Invariantes* ao teorema de Sturm. No caso que estamos analisando, Roberts propõe a construção de um polinômio derivado a partir da seguinte relação

$$\sum \frac{\phi(x_1)f'(x_2)f'(x_3)\dots f'(x_n)}{f'(x_1)}$$

onde $\phi(x_1)$ é um polinômio homogêneo racional e integral dos coeficientes de $f(x)$. É importante ressaltar que esta função, como Roberts se refere ao objeto matemático, é construída a partir das raízes do polinômio original. Além disso, o autor mostra que esta forma associada tem, como fatores, os *invariantes fundamentais* de Cayley. A partir desta ideia, ele apresenta seu *invariante*

Seja F uma função homogênea das quantidades $\phi_0, \phi_1, \phi_2 \dots$ se for tal que $\delta F = 0$, é uma função das diferenças das raízes da equação dada. Suponha também que $\phi_0, \phi_1, \phi_2 \dots$ sejam expressos em termos dos coeficientes a_0, a_1, a_2, \dots da equação; se, substituindo cada sufixo pelo seu complementar, a soma total dos sufixos não se altera, então F é um invariante da equação dada. ⁴² (ROBERTS, 1861a, p. 62, Tradução Nossa)

Essa citação incorpora várias técnicas que já haviam sido difundidas em solo britânico, como o *discriminante* e o *emanante*. Essa abordagem inicial de Roberts

⁴²Let F denote an homogeneous function of the quantities $\phi_0, \phi_1, \phi_2 \dots$ if it be such that $\delta F = 0$, it is a function of the differences of the roots of the given equation. Suppose also that $\phi_0, \phi_1, \phi_2 \dots$ are expressed in terms of the coefficients a_0, a_1, a_2, \dots of the equation; if, on replacing each suffix by its complementary one, the total sum of the suffixes is unaltered, then F is an invariant of the given equation.

nos mostra um movimento inspirado na geração dos pioneiros nas investigações sobre transformações, em particular os protagonistas da *Teoria dos Invariantes*: Cayley, Sylvester e Salmon. Essa percepção é confirmada na leitura do artigo "On the Covariants of a Binary Quantic of the nth Degree"(ROBERTS, 1861b). No texto, o autor continua suas investigações sobre os *covariantes* formados a partir de operações com as raízes dos polinômios. Em particular, o artigo apresenta novas relações entre os *invariantes fundamentais*.

$$H = a_1^2 - a_0a_2;$$

$$G = a_0^2a_3 + 2a_1^3 - 3a_0a_1a_2;$$

$$I = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2;$$

$$J = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3;$$

$$K = 4(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)(a_1a_5 - 4a_2a_4 + 3a_3^2) - (a_0a_5 - 3a_1a_4 + 2a_2a_3)^2$$

$$L = \begin{cases} a_0^2(a_4^2 - a_3a_5) + 3a_0a_1(a_2a_5 - a_3a_4) + 4a_0a_2(a_3^2 - a_2a_4) \\ + 2a_1^2(a_3^2 - a_1a_5) + 5a_1^2a_2a_4 + 3a_2^4 - 8a_1a_2^2a_3; \end{cases}$$

$$M = a_1^2a_6 - 2a_2a_3^2 + a_1a_3a_4 - 3a_1a_2a_5 - a_0a_2a_6 + 3a_0a_3a_5 - 2a_0a_4^2 + 3a_2^2a_4;$$

$$N = a_0a_6 - 6a_1a_5 + 15a_2a_4 - 10a_3^2;$$

$$P = a_0a_8 - 8a_1a_7 + 28a_2a_6 - 56a_3a_5 + 35a_4^2$$

Esta é a lista de *invariantes* que Roberts (1861b, p. 172) apresenta, onde os termos a_1, a_2, \dots, a_8 são os coeficientes de polinômios homogêneos de graus 2 e 3 e de 2 a 5 nas expressões formadas pelas raízes dele. Nota-se que a lista conta com os *invariantes* descritos por Cayley (IeJ) e, além desses, o autor também inclui o *discriminante* de uma forma quadrática binária (H), o *invariante* de uma forma quártica (K) e novas fórmulas.

Com isso, Roberts volta a discutir resultados já estabelecidos por Sylvester e Cayley, o que evidencia as práticas compartilhadas no interior da comunidade britânica. Por outro lado, o trabalho de Hermite também serve como referência para o autor, uma vez que a *covariante* sextica $Mx^2 + 2Mxy + My^2$ foi descoberta pelo matemático francês. Esse trabalho continua no ano seguinte com três publicações no volume 5 do QJPAM, dentre as quais a primeira tem como título "On Some Applications of Algebra to the Theory of Covariants"(ROBERTS, 1862a). Nesse artigo, o autor apresenta o seguinte teorema: "O eliminante (resultante do sistema) de dois *covariantes* de um *quantic* é um *invariante* do

próprio *quantic*.

Uma equação notável de M. Brioschi, que já tive ocasião de citar, serve para conectar a teoria das funções das diferenças das raízes das equações algébricas com a teoria das covariantes da quântica binária: de fato, do meu ponto de vista após essa reaproximação ter sido feita, as duas teorias tornam-se idênticas. Como este artigo deve ser lido em conexão com minhas Memórias (Quarrierly Journal, Vol. iv., pp. 168-178), a notação é a mesma em ambos.⁴³ (ROBERTS, 1862b, p. 144, Tradução Nossa)

Na introdução de seu artigo de 1862, Roberts segue os trabalhos de matemáticos do continente, uma vez que além de Hermite, que já foi citado em artigos de um ano antes, o italiano Brioschi também é mais uma referência que auxilia no desenvolvimento dos novos *invariantes*. É interessante observar que essas referências são as mesmas dos outros autores britânicos que lidam com o assunto. Esta coincidência se revela uma nova evidência do modo como as ideias circulam na comunidade de práticas. Além disso, a citação nos indica a proximidade das expressões construídas sobre as raízes de polinômios e *Teoria dos Invariantes* que o autor se propõe a mostrar.

Além de ampliar o escopo da *Teoria dos Invariantes*, essas contribuições de Roberts também se adequam às discussões geométricas que fazem partes dos estudos sobre polinômios homogêneos. Ainda no QJPAM 5, encontramos uma nota sobre as propriedades de curvas ou sistemas de curvas de terceiro grau com bases na obra de Salmon. Como característica, as coordenadas homogêneas, chamadas de "coordenadas tri lineares", são um elemento central para a análise de pontos singulares das curvas em questão. Assim, percebe-se que o matemático teve o papel de disseminação das práticas da comunidade, para além dos personagens principais da rede. Como professor do Trinity College Dublin, ele conferiu palestras sobre o assunto como forma de divulgação.

Outro personagem relevante da comunidade que contribui para esta temática foi James Cockle, que se mostra um personagem com propostas diferentes do núcleo da comunidade. Além de métodos alternativos para a redução de um polinômio em soma de quadrados positivos e negativos (como veremos na próxima seção), o autor se dedicou a apresentar alternativas para a notação da *Teoria dos Invariantes*.

MEU objetivo é dar conta de certas funções interessantes também por outras razões, como em relação à sua conexão com a teoria das covariantes. Não preciso negar a intenção de introduzir uma terminologia. Essa

⁴³A remarkable equation of M. Brioschi, which I have already had occasion to quote, serves to connect the theory of functions of the differences of the roots of algebraic equations with the theory of the covariants of binary quantics: indeed, from my point of view after this rapprochement has been made, the two theories become identical. As this paper is to be read in connexion with my Memoir (Quarrierly Journal, Vol. 1v., pp. 168-178), the notation is the same in both.

questão, acredito, está ou esteve sob a consideração de juízes competentes. Usei os nomes que me pareceram mais convenientes para falar de pesquisas pertencentes a períodos agora um tanto distantes.⁴⁴ (COCKLE, 1861, p. 97, Tradução Nossa)

Aparentemente, esse autor se propunha a apresentar uma crítica às expressões que vinham sendo desenvolvidas no interior da rede sobre a *Teoria dos Invariantes*. Cockle utiliza o termo *Funções Críticas* para se referir às fórmulas que permanecem inalteradas após certas transformações lineares. Ainda de acordo com autor, estas transformações são quadráticas ($\phi(hx + x^2)$) e recíprocas lineares ($\phi\left(\frac{1}{x+h}\right)$), onde ϕ é uma função dos coeficientes do polinômio, ou seja, uma forma associada.

Sobre as contribuições de Cockle para esta temática, é interessante apresentar algumas considerações a respeito das características de seu trabalho. Primeiramente, trata-se de uma resignificação de algumas ideias da *Teoria dos Invariantes*. Em segundo lugar, o autor lida com polinômios homogêneos em duas variáveis, no entanto os cálculos são conduzidos com expressões de uma única variável, como podemos verificar abaixo:

$$fx = x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

onde p_1, \dots, p_n são funções das raízes do próprio polinômio. De maneira mais específica, o autor lida com expressões de graus 2 até 4 e, além disso, cada variável de fx representa o quociente $\frac{x}{y}$, substituição que retoma a característica de homogenização. Com isso, Cockle constrói a analogia de sua teoria das *funções críticas* com a teoria dos *quantics* de Cayley. Como exemplo ele utiliza a forma associada de um polinômio de terceiro grau

$$fx = x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3$$

$$\phi x = p_1^2 - 3p_2$$

$$\phi\left(\frac{1}{h+x}\right) = \frac{h^2(p_1^2 - 3p_2) + h(p_1p_2 - 9p_3) + p_2^2 - 3p_1p_3}{h^3 + p_1h^2 + p_2h + p_3}$$

a partir disso, ele realiza a substituição de h por $\frac{x}{y}$, donde

$$\frac{(ac - b^2, ad - bc, bd - c^2)(x, y)^2}{(a, -b, c, -d)(x, y)^3}$$

que é um *covariante* do polinômio do terceiro grau, na notação utilizada por Cayley. Percebe-se que o trabalho de Cockle não perde o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes* de vista. Portanto, a contribuição do autor para a produção de conhecimento

⁴⁴MY object is to give an account of certain functions interesting as well for other reasons as in respect of their connection with the theory of covariants. I need scarcely disclaim the intention of introducing a terminology. That question I believe either is or has been under the consideration of competent judges. I have used such names as seemed to me the most convenient in speaking of researches appertaining to periods now somewhat distant.

da comunidade tem o papel estender a noção de *invariante*, uma vez que atribui uma percepção aritmética ao processo.

Essas ideias do autor foram desenvolvidas desde a década de 1840, com publicações no periódico *The Mathematician*. No primeiro volume do jornal encontramos os quatro artigos, intitulados "On the Transformation of Algebraic Equations" (COCKLE, 1856) ⁴⁵ que deram início à noção de *função crítica*. Nestes textos, encontramos as fórmulas dos coeficientes de 2º a 4º graus, além das relações entre elas. A expressão *Funções Críticas* apareceu pela primeira vez no volume 28 da *Philosophical Magazine* de 1846.

Assim, para todas as funções críticas (y.) degenera em (v.); e, depois de resolver as equações críticas, teremos quantidades K restantes para satisfazer (outras) condições cujos graus não são afetados por nossas operações anteriores. ⁴⁶ (COCKLE, 1846, p. 191, Tradução Nossa)

Nessa citação, (y.) e (v.) são, respectivamente, a formas associada e sua transformada após a mudança de variáveis. Observa-se que a contribuição de Cockle trata de aspectos numéricos das equações, fator que o diferencia da abordagem de Cayley e Sylvester.

Apesar de não se tratar de um autor britânico, Hermite figura na rede da comunidade com três artigos publicados nos jornais do Reino Unido. Em "Sur la Théorie des Functions Homogènes à deux Indeterminées" (HERMITE, 1854b), encontramos referências diretas ao desenvolvimento dos *invariantes*, o que mostra que existiu um processo de internacionalização e legitimação das práticas da comunidade britânica. Como o caso de Cockle, Hermite se dedica a demonstrar proposições aritméticas.

Recém-conduzido a essas questões, fui levado a considerá-las sob um novo ponto de vista, e finalmente pude abordar as formas do quinto grau, que não podiam ser tratadas pelo meu primeiro método. As circunstâncias singulares que encontrei nesta pesquisa parecem-me aumentar ainda mais o interesse da grande teoria que MM. Cayley e Sylvester já enriqueceram com tantas descobertas. Mas eu tinha em vista sobretudo a teoria aritmética, da qual assim encontrei os verdadeiros elementos, como veremos mais adiante em minha pesquisa: a partir de agora, porém, será possível reconhecer que a teoria das formas binárias, em toda a sua generalidade está intimamente ligada à composição de classes quadráticas, resultado

⁴⁵Apesar do primeiro volume do periódico datar de 1856, estes textos de Cockle foram escritos em 1844, como a assinatura dos mesmos evidencia.

⁴⁶Hence, for all critical functions (y.) degenerates into (v.) ; and, after solving critical equations, we shall have quantities K left for satisfying (other) conditions whose degrees are unaffected by our previous operations.

singular que abrirá novas perspectivas no estudo das propriedades mais ocultas dos números. ⁴⁷ (HERMITE, 1854b, p. 173, Tradução Nossa)

A citação acima nos mostra o modo como Sylvester e Cayley já eram reconhecidos como produtores de conhecimento relevantes, tanto na ilha quanto no continente. Por outro lado, esse reconhecimento revela uma possibilidade de disseminação das práticas britânicas na Europa, para além das iniciativas de divulgação de personagens como Cayley e Spottiswoode. Do ponto de vista dos objetos algébricos, Hermite lida com formas binárias e seu primeiro artigo sobre transformações nos jornais britânicos lida com a lei de reciprocidade anunciada por Sylvester um ano antes.

Como descrição do teorema de reciprocidade, o autor afirma que os *covariantes* de grau m em relação a uma forma algébrica e de grau p em relação aos coeficientes desta mesma forma, têm um outro *covariante* correspondente de grau m , em relação aos coeficientes e de grau p , em relação a forma em si. Essa descrição é equivalente à apresentada por Sylvester acerca dos *concomitantes* de *concomitantes*. Além disso, os matemáticos aparentemente construíram o conceito da lei em parceria, uma vez que um aponta a contribuição do outro como o ponto de partida da ideia.

Além desse teorema, Hermite se dedica a refazer os passos que levaram à descoberta dos *invariantes* da dupla que inspira essa produção do matemático francês. Ele também lida com o problema de redução das formas algébricas a suas formas canônicas e, como novidade, se propõe a calcular *covariantes* de polinômio homogêneos de grau 5, a saber:

$$\phi = (ab' - 4bc' + 3c^2)x^2 + (aa' - 3bb' + 2cc')xy + (a'b - 4b'c + 3c'^2)y^2$$

e, a partir desse *covariante*, o autor estabelece as condições para a geração de um novo *invariante*, uma expressão dos coeficientes do polinômio homogêneo original que permanece inalterada às transformações $x = \omega\eta$; $y = -\frac{\xi}{\eta}$ quando $ab' - 4bc' + 3c^2 = 0$, $aa' - 3bb' + 2cc' = \sqrt{\Delta}$ e $a'b - 4b'c + 3c'^2 = 0$, onde Δ é o *discriminante* do *covariante* de segundo grau destacado nesta forma.

Para além dos aspectos algébricos, o artigo tem foco em propriedades aritméticas. Como principal contribuição, Hermite determina as relações de equivalência entre o grau

⁴⁷Ramené dernièrement à ces questions, j'ai été conduit à les envisager sous un point de vue nouveau, et j'ai pu enfin aborder les formes du cinquième degré, qui n'avaient pu être traitées par ma première méthode. Les circonstances singulières, que j'ai rencontrées dans cette recherche, me semblent ajouter encore à l'intérêt de la grande théorie que MM. Cayley et Sylvester ont déjà enrichie de tant de découvertes. Mais j'ai eu surtout en vue la théorie arithmétique, dont j'ai ainsi trouvé les véritables éléments, comme l'on verra par la suite de mes recherches : dès à présent néanmoins on pourra reconnaître que la théorie des formes binaires, dans toute sa généralité, est étroitement liée à la composition des classes quadratiques, résultat singulier et qui ouvrera des nouvelles perspectives dans l'étude des propriétés les plus cachées des nombres.

dos *invariantes* e as fórmulas associadas aos polinômios. Como exemplo, podemos citar o seguinte trecho (HERMITE, 1854b, p. 184), onde o autor apresenta o polinômio e seus *covariantes*

$$F = (A, B, C, C', B', A')(X, Y)^5$$

$$F_1 = (A, \frac{3}{5}B, \frac{1}{5}C, -\frac{1}{5}C', -\frac{3}{5}B', -A')(X, Y)^5\sqrt{\Delta}$$

$$F_3 = (A, -\frac{1}{5}B, -\frac{1}{5}C, \frac{1}{5}C', \frac{1}{5}B', -A')(X, Y)^5\sqrt{\Delta^3}$$

$$F_5 = (A, -B, C, -C', B', -A')(X, Y)^5\sqrt{\Delta^5}$$

onde F_n são transformações realizadas sobre os coeficientes do polinômio F . A partir desses *covariantes*, o autor apresenta relações entre o grau dos *invariantes* de acordo com transformações numéricas dessas formas. Trata-se de duas relações em destaque: 1) A expressão mais geral cujo grau é divisível por 4 é $I = F\left(\sqrt{\Delta}, \frac{I_1}{\Delta\sqrt{\Delta}}, \frac{I_2}{\Delta^2\sqrt{\Delta}}\right)$, onde I_1 e I_2 são formas associadas ao polinômio original, 2) A expressão mais geral cujo grau deixa resto 2 na divisão por 4 é $I' = \frac{I_3}{\Delta^3\sqrt{\delta}}F_1\left(\sqrt{\Delta}, \frac{I_1}{\Delta\sqrt{\Delta}}, \frac{I_2}{\Delta^2\sqrt{\Delta}}\right)$.

O último exemplo nos leva a uma reflexão sobre o estilo das abordagens em relação aos *invariantes* e seus derivados. Sylvester e Cayley lidam com esses objetos de maneira essencialmente algébrica, uma vez que se concentram nos polinômios em si para a busca das formas que lhes despertam interesse. O caso de James Cockle traz um olhar funcional para a Teoria, já que o foco dado aos valores numéricos das expressões como forma de determinar sua invariância ou não se diferencia dos protagonistas da Teoria justamente por causa de uma observação não estrutural dos polinômios. Por fim, o caso de Hermite é essencialmente baseado na teoria dos números, fato que pode ser percebido no processo de geração das fórmulas que expusemos no parágrafo anterior. Tais nuances revelam um aspecto importante da comunidade de práticas, a ideia dos *invariantes* é abrangente o suficiente para atrair pesquisadores mesmo que não estejam interessados exatamente nos assuntos aos quais ela se propõe inicialmente.

Em Hermite (1854a), encontramos algumas observações a respeito de determinantes de matrizes antissimétricas, que são determinantes de matrizes antissimétricas de n^2 elementos. Nesse texto, o autor francês investiga transformações específicas e suas relações com os determinantes descritos pelo inglês.

Três anos depois dessas publicações, encontramos um breve artigo no primeiro volume do QJPAM, periódico do qual Hermite era correspondente internacional. No texto, o autor se dedica à investigação de formas cúbicas em duas variáveis.

Em outras palavras, também podemos dizer que uma dada forma cúbica

e sua covariante cúbica são sempre simultaneamente formas reduzidas ou não reduzidas; propriedade notável, e que não é encontrada na teoria das formas quadráticas ternárias, onde os adjuntos das formas reduzidas não são eles próprios em geral. ⁴⁸ (HERMITE, 1857, p. 22, Tradução Nossa)

A relação entre o grau das formas algébricas e a possibilidade conjunta, de redução ou não, com seu *covariante* nos revela um estágio de evolução da teoria no qual as formas *invariantes* se mostram bem estabelecidas e a busca pelas formas que permanecem inalteradas após transformações passa a conviver com outros interesses, como a relação entre os objetos descobertos ou construídos.

O núcleo dos matemáticos que lidam com as transformações lineares se mostra um importante agregador de interesses e pesquisadores, e a *Teoria dos Invariantes* é o assunto que melhor conecta esses personagens. Essa afirmação se confirma pela presença de vários nomes inéditos na rede que se dedicaram a investigar particularidades da nova Teoria. Vejamos algumas dessas contribuições.

Edward Routh publica dois artigos no volume 6 do QJPAM, onde ele se concentra em apresentar resultados geométricos úteis que são ligados ao determinante da matriz associada a uma forma quadrática, conhecido *invariante* já destacado por Sylvester. Nesse contexto, o autor apresenta uma aplicação desse *invariante* no cálculo de distância de uma reta dada; também é possível verificar que a transformação de um sistema de equações, através das diferenciais parciais, é um *covariante* do sistema inicial; além de outros resultados geométricos. Como pode ser visto, esse autor se dedicou a apresentar uma releitura de resultados já conhecidos com foco nas propriedades que se relacionavam com um *invariante* específico.

Também com duas publicações no terceiro e quinto volumes do QJPAM, Robert Harley, traz uma revisão das investigações sobre formas quínticas conduzidas por personagens importantes da rede sobre transformações lineares, caso de Sylvester, Cayley e Cockle.

A fórmula de Euler e Bézout indica a conexão entre os coeficientes de uma equação e os constituintes de suas raízes. O processo de Lagrange e Vandermonde nos permite expressar esses constituintes como funções racionais das raízes. Combinando a teoria de Euler com a de Lagrange e introduzindo as funções peculiares que entram no método de produtos

⁴⁸En d'autres termes, on peut également dire, qu'une forme cubique donnée et son covariant cubique sont toujours simultanément des formes réduites, ou non réduites; propriété remarquable, et qui ne se retrouve pas dans la théorie des formes quadratiques ternaires, où les adjointes des formes réduites ne le sont pas elles-mêmes en général.

simétricos do Sr. Cockle, somos conduzidos a resultados que parecem merecer registro.⁴⁹ (HARLEY, 1860, p. 343, Tradução Nossa)

Nessa citação, encontramos uma referência aos métodos de eliminação e ao modo como este se associa às raízes de polinômios. As referências a Bézout e Lagrange se assemelham às conexões descritas por Sylvester através do problema da *Equação Secular*. Apesar de não lidar diretamente com polinômios homogêneos, a contribuição de Harley investiga os *invariantes* formados a partir das raízes, reais ou não, como o caso do bézoutiano. Além disso, observamos que o autor tem o trabalho de Cockle como principal referência no tratamento das propriedades das raízes.

Ainda falando sobre formas quínticas, encontramos o artigo de Bruno (1857), onde o autor apresenta os cálculos para um *invariante* de 20º grau. No mesmo jornal encontramos o artigo "On the Invariants Sum of the Products of the Coefficients of a Pair of Homogeneous Functions"(RANKINE, 1857), onde os *invariantes* são utilizados como bases para conversões entre os tipos de coordenadas no espaço.

Quando olhamos para as produções desses outros matemáticos, podemos entender que a agenda de Sylvester e Cayley gerou uma série de ações que atribuíram identificação para a comunidade. É fato que essa identidade se replicou em publicações de matemáticos estrangeiros, como já vimos os casos de Hermite e Faa di Bruno. Outro personagem do continente que contribuiu com essas práticas foi François Brioschi, que publicou uma breve nota sobre teoremas geométricos indicados por Cayley. Nesse artigo, encontramos a ferramenta dos *Hyperdeterminantes* como forma de determinar o lugar geométrico onde se encontram as retas de intersecção das faces de dois tetraedros dados.

Outros autores britânicos apresentam contribuição mais pontuais para rede nesta temática. No segundo volume do QJPAM de 1858, Samuel Roberts publica o artigo "On the Transformation of Coordinates", onde trata de problemas relacionados a transformações lineares. Mais especificamente, a ideia do autor é discutir como as mudanças de eixo influenciam na possibilidade de resolução de vários problemas geométricos. Nesse sentido, retoma as práticas que são comuns nas investigações dos outros matemáticos. Utilizando a notação de Cayley para o cálculo de retas polares, Roberts mostra a relação entre a tangente e a intersecção das polares de dois pontos distintos de uma curva dada.

Em seguida, podemos citar três artigos publicados por James Warren. Apesar de não se tratarem de contribuições diretas para a prática dos *invariantes*, esse autor apresenta

⁴⁹THE formulae of Euler and Bézout indicate the connexion between the coefficients of an equation and the constituents of its roots. The process of Lagrange and Vandermonde enables us to express those constituents as rational functions of the roots. By combining the theory of Euler with that of Lagrange, and introducing the peculiar functions that enter into Mr. Cockle's method of symmetric products, we are conducted to results which seem to deserve recording.

algumas reflexões sobre alguns dos resultados utilizados pelos personagens centrais da comunidade. Como exemplo, há o texto "On the Orthometric Relations between the Strains of a Disturbed System" (WARREN, 1864b), que se propõe a lidar com problemas de mecânica e utiliza as notações descritas por Sylvester em seu cálculo das formas. Além disso, em nota do editor, podemos ver o modo como este autor se apoia nas ideias dos *invariantes*.

Desde que redigiu as observações, sob a assinatura de J. J. S., o autor delas encontrou sem dificuldade as duas construções geométricas para o centro de gravidade de um tronco piramidal, precisamente análogas às aludidas para o centro de gravidade de um quadrilátero: que provavelmente aparecem no Número de Agosto (ou, se não, no Número de Setembro) da *Philosophical Magazine*.⁵⁰ (WARREN, 1864b, p. 192, Tradução Nossa)

Nessa citação, observamos que Warren estava atento às produções de Sylvester a respeito das transformações que reduzem um polinômio à soma de quadrados, fator que é diretamente ligado à ideia de eixo de gravidade. Além disso, o autor apresenta suas inspirações nos trabalhos de Cayley e Cockle, através das *funções críticas* descritas pelo último. A ideia no artigo publicado no mesmo jornal era apresentar algumas analogias que fossem capazes de demonstrar a relação entre as abordagens dos dois matemáticos para os *invariantes*. Nesse contexto, Warren inicia o segundo dos três artigos publicados no QJPAM 6 apresentando dois *invariantes* utilizados por Cayley

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + 3a_2 \frac{d}{da_3} + \dots$$

$$na_1 \frac{d}{da_0} + (n-1)a_2 \frac{d}{da_1} + (n-2)a_3 \frac{d}{da_2} + \dots$$

os quais são, respectivamente, a função das diferenças das raízes e seu recíproco e, a partir disso, utiliza uma notação geral para as duas expressões. O fato de o autor utilizar a comparação com as diferenças entre as raízes do *quantic* nos mostra a conexão que Warren pretende destacar.

TENDO mostrado em meu último artigo como a eliminante de duas cúbicas binárias pode ser expressa em termos das derivadas dessas cúbicas, é natural tentar estender esse método de redução a quânticas superiores e outras concomitantes; é evidente que a vantagem do método consiste em expandir as derivadas sucessivas em potências de V, de modo que, com um

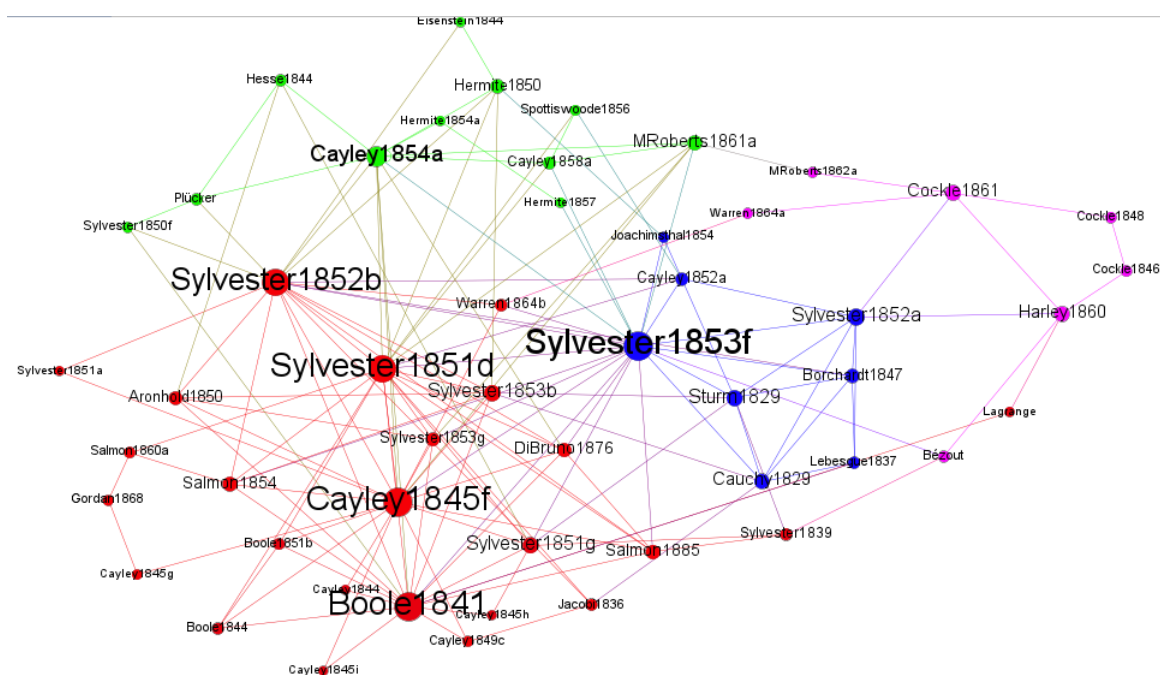
⁵⁰Since penning the observations, under the signature , J. J. S., the author of them has found without difficulty the two geometrical constructions for the centre of gravity of a pyramidal frustum, precisely analogous to those alluded to for the centre of gravity of a quadrilateral: which will probably appear in the August Number (or, if not, in the September Number) of the *Philosophical Magazine*.

pouco de atenção, sua conexão mútua seja imediatamente determinada.
⁵¹ (WARREN, 1864a, p.372, Tradução Nossa)

Nesse trecho inicial do terceiro dos artigos, podemos ver o modo como o autor percebe as conexões entre os trabalhos que foram desenvolvidos no entorno dos *invariantes*. É importante observar que nesse trabalho, diferentemente do que fizeram autores como Michael Roberts e Salmon, que também apresentaram trabalhos que revisaram práticas, Warren se dedicou a relacionar as práticas dos personagens que desenvolveram técnicas específicas da Teoria. Essa característica reforça o processo de ressignificação das práticas compartilhadas em uma comunidade, uma vez que ele apresenta uma ideia de unificação das práticas, de maneira semelhante ao que Sylvester fez em meados dos 1850; no entanto, é fato que não se trata de um trabalho sistemático como o realizado pelo matemático protagonista da Teoria britânica.

Foi possível notar que a temática desta seção é a principal responsável pela formação da identidade da comunidade britânica de produção do conhecimento matemático. Fator que pode ser percebido na seguinte rede:

Figura 28 – Rede de transformações



Fonte – Elaborada pelo Autor

⁵¹HAVING in my last paper shown how the eliminant of two binary cubics may be expressed in terms of the derivatives of these cubics, it is natural to endeavour to extend this method of reduction to higher quantics and other concomitants; it is evident that the advantage of the method consists in expanding the successive derivatives in powers of V, so that, by a little attention, their mutual connection is at once determined.

Apesar de encontrarmos quatro regiões de interação distintas, os artigos representados nesta rede tratam, direta ou indiretamente da *Teoria dos Invariantes*. A região vermelha revela a maior concentração de trabalhos com destaque para os textos centrais da teoria, como Boole (1841), Cayley (1845f) e Sylvester (1851d), os quais são caracterizados pela elaboração das bases da geração de *invariantes*. A região azul escuro tem o texto Sylvester (1853f) como seu principal nó, o que mostra a associação com o teorema e Sturm e, indiretamente, com a *Equação Secular*. A região verde-clara apresenta desdobramentos das práticas desenvolvidas no início dos anos 1850, com destaque para a participação de Michael Roberts como um herdeiro dos pesquisadores iniciais. Por último, a região rosa mostra os trabalhos de James Cockle com abordagens alternativas para a nova Teoria.

Quando olhamos para as contribuições de Cayley, notamos o modo como a ideia da busca pelos *invariantes fundamentais* influenciou o surgimento de vários trabalhos que acompanharam a mesma agenda. Além da obra de Sylvester, que a historiografia tradicional aponta como o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*, o trabalho de Cockle com as *Funções Críticas* revela uma influência paralela nas práticas da comunidade. Entretanto, a leitura dos artigos não nos mostrou uma teoria concorrente, mas uma disputa por práticas que colaborou para a definição dos interesses britânicos de pesquisa. Essa noção se revela a partir das conexões com os autores Warren e Roberts.

Como discutimos nos capítulos anteriores, as contribuições de Sylvester são o ponto chave do desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. As conexões que surgem na rede nos mostram como seu papel nesta temática é central. Além disso, os artigos publicados entre 1851 e 1853 revelam a centralidade de seu trabalho na comunidade. Dessa forma, podemos concluir que esses trabalhos deram o suporte para as principais ideias da nova Teoria.

Por fim, destacamos a participação dos autores estrangeiros. Esta temática traz novos personagens, caso de Hermite, que entra nas discussões comuns da comunidade, através da geração de *invariantes* de formas cúbicas, além de, como veremos no próximo capítulo, personagens que proporcionam uma recepção direta das práticas da comunidade, como Terquem, Aronhold e Brioschi. O primeiro destes autores faz, literalmente, uma revisão das técnicas desenvolvidas por Sylvester e companhia; o segundo apresenta uma expressão invariante em suas pesquisas; e ainda, Brioschi utiliza as propriedades dos *invariantes* como forma de interpretar resultados geométricos.

5.6 Redução de Polinômios Homogêneos à Soma de Quadrados Positivos e Negativos

Nesta seção, tratamos do tema que trouxe a discussão sobre os *invariantes*. Como a historiografia nos mostra, do texto publicado por George Boole em 1841 é o precursor

dos interesses britânicos sobre os problemas de transformação. Do ponto de vista dos períodos que representam os jornais de Cambridge, os britânicos lidam com o problema de redução de polinômios homogêneos apenas nas Fases 1, onde encontramos quatro artigos e 2, onde encontramos oito artigos. Esse fator se justifica quando entendemos que se trata de um problema pontual que se encaixa no desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*.

Como pudemos perceber no capítulo 3, as contribuições de Sylvester a respeito desta temática levaram a desdobramentos da própria *Teoria dos Invariantes*, como a adequação das práticas difundidas por ele à problemas relativos à mecânica, mais especificamente os movimentos de rotação.

Essa característica pode ser percebida no artigo "On the Transformation of Homogeneous Functions of the Second Degree"(SMITH, 1839). Neste texto, o autor apresenta uma investigação sobre a transformação de polinômios homogêneos em somas de quadrados positivos ou negativos e a relaciona com o problema de determinar os eixos principais de rotação de um sólido através da mudança de variáveis. Em particular, encontramos a seguinte fórmula:

$$\int (x^2 + y^2 + z^2)dM = l^2 \int x^2 dM + m^2 \int y^2 dM + n^2 \int z^2 dM$$

que indica as direções cossenos dos eixos que caracterizam os momentos de inércia de um sólido. Essa expressão pode ser comparada com um polinômio homogêneo de grau dois em três variáveis. A partir daí, a pergunta sobre qual transformação linear necessária para reescrever o polinômio como uma soma de quadrados positivos e negativos se mostra equivalente à busca pelos momentos de inércia que são descritos pela fórmula anterior.

Como referência, o trabalho traz o texto publicado no *Jornal de Liouville* de 1837, "Thèses de Mécanique et d'Astronomie", de Victor Lebesgue. Como já vimos, esse artigo está associado às discussões que corriam o continente sobre a *Equação Secular*, fator que mostra como esta temática se revela como um desdobramento do surgimento de uma nova Teoria no interior das investigações sobre transformações lineares.

É neste contexto que surgem os trabalhos de Boole que deram origem à *Teoria dos Invariantes*. Em 1840, encontramos a publicação "Researches on the Theory of Analytical Transformations, with a Special Application to the Reduction of the General Equation of the Second Order"(BOOLE, 1840) que, apesar de não lidar com polinômios homogêneos e tratar das transformações lineares, já se propõe a investigar o problema da redução dos polinômios.

A partir dessa iniciativa, o matemático irlandês chega à discussão sobre os polinômios homogêneos no artigo considerado fundador da *Teoria dos Invariantes* (BOOLE,

1841), onde ele discute as relações que existem entre os coeficientes de polinômios homogêneos de graus 2 e 3, em n variáveis. Como principal contribuição, podemos destacar a seguinte fórmula:

$$\Theta(Q_n) = \frac{\theta(R_n)}{E^{\frac{\gamma n}{m}}}$$

onde Q é um polinômio homogêneo, de grau n , dado e R o que resulta após a transformação linear das variáveis, Θ os discriminantes associados às formas Q e R , em função dos coeficientes delas, γ o grau destas formas associadas e E o determinante da matriz da transformação linear.

Quando afirmamos que a expressão acima é a principal contribuição das duas partes do artigo de Boole, estamos nos referindo ao resultado chave da *Teoria dos Invariantes*. É importante compreender o cenário que foi construído ao longo das cinco temáticas que foram analisadas até aqui. A partir do trabalho Boole, a agenda do *invariantes* foi estabelecida por Cayley, enriquecida por Sylvester (a ponto de desenvolver vocabulário próprio), divulgada por Salmon em livros e por Spottiswoode e pelo próprio Cayley através de artigos publicados nos jornais internacionais, além de Terquem. A partir desse fio, ramificações são desenvolvidas: os trabalhos de Hermite, Michael Roberts, Cockle, Faa di Bruno, Warren e Combescure são exemplos do modo como a Teoria ganhou motivações particulares.

Dado esse breve caminho, é possível afirmar que o trabalho de Boole sobre esta temática definiu as características da grande maioria das práticas que circularam na comunidade. Além das técnicas já apresentadas nas outras seções, encontramos o trabalho de Cockle sobre a redução de um polinômio homogêneo à soma de quadrados. No texto "On Certain Algebraic Functions" (COCKLE, 1846), o matemático se dedica ao problema através de um processo sucessivo de completamento de quadrados.

Essa prática se mostra abrangente, a partir do momento em que se adequa a polinômios homogêneos de graus superiores. De maneira geral, o autor apresenta a técnica de expansão do processo de eliminação dos termos que não são quadrados perfeitos nas equações investigadas.

Na geometria analítica de duas dimensões, quando desejamos verificar se uma dada equação do segundo grau entre duas grandezas variáveis x e y representa um sistema de (em geral) duas linhas retas, nosso objetivo pode ser alcançado assim: multiplique o dada equação por quatro vezes o coeficiente de x^2 ; some e subtraia da equação, como ela ficará agora, o quadrado do coeficiente de x na equação como ela estava originalmente; sendo o lado direito da equação suposto zero, o esquerdo consistirá então no quadrado de uma função linear de x e y , junto com uma função quadrática de y somente; agora se quatro vezes o coeficiente de y^2 nesta função quadrática for multiplicado na parte livre de y , e este produto for igual ao quadrado do coeficiente de y na função quadrática, essa

função é um quadrado, e a equação dada representa duas linhas retas, se o último quadrado for negativo (ou apenas uma se a função quadrática desaparecer em primeira instância, ou um ponto se ambos os quadrados forem positivos).⁵² (COCKLE, 1848, p. 115, Tradução Nossa)

Nessa citação, identificamos que Cockle também percebe conexão com aspectos geométricos. Nota-se que essa é uma discussão semelhante à conduzida por Sylvester nos artigos do início da década de 1850 sobre os contatos das cônicas; assim, a autor confirma sua integração a comunidade de práticas. Apesar da distinção em termos de abordagem (o completamento de quadrados, o uso dos discriminantes e as funções características), observamos o interesse comum nos problemas de contato. Além disso, tanto Cockle como Sylvester, se propuseram a expandir suas técnicas para polinômios de graus superior.

Um ano antes da publicação do artigo da Lei de Inércia de Sylvester, encontramos mais uma contribuição de Boole a esta temática. No artigo "On the reduction of the General Equation of the nth Degree (Sequel to a Memoir on the Theory of Linear Equations)" (BOOLE, 1851a), o matemático deixa claras suas motivações a respeito do engajamento no estudo das transformações.

Nas memórias anteriores sobre a Teoria das Transformações Lineares, esforcei-me por dar um breve esboço da história deste ramo peculiar e bastante isolado da análise, e expor em sua devida ordem e conexão os principais princípios sobre os quais se baseia, como tanto quanto eles são atualmente conhecidos por mim.⁵³ (BOOLE, 1851a, p. 106, Tradução Nossa)

Nota-se que o autor percebe a temática das transformações como isolada em solo britânico. O protagonismo da produção de conhecimento matemático dessa comunidade de práticas se revela na atuação de seus personagens principais. Por outro lado, o trabalho sobre a redução de polinômios é o fio condutor que liga os interesses deste novo meio de pesquisa. Neste contexto, o artigo de Sylvester traz uma contribuição inédita para a teoria das transformações. Como já analisado no capítulo 3, a novidade no artigo que enuncia a

⁵²In analytical geometry of two dimensions, when we desire to ascertain whether or not a given equation of the second degree between two variable quantities x and y represents a system of (in general) two straight lines, our object may be attained thus : multiply the given equation by four times the coefficient of x^2 ; add to and subtract from the equation, as it will now stand, the square of the coefficient of x in the equation as it originally stood ; the right-hand side of the equation being supposed zero, the left will then consist of the square of a linear function of x and y , together with a quadratic function of y only ; now if four times the coefficient of y^2 in this quadratic function be multiplied into the part free from y , and this product be found to equal the square of the coefficient of y in the quadratic function, that function is a square, and the given equation represents two straight lines, if the latter square be negative (or one only if the quadratic function disappears in the first instance, or a point if both the squares be positive).

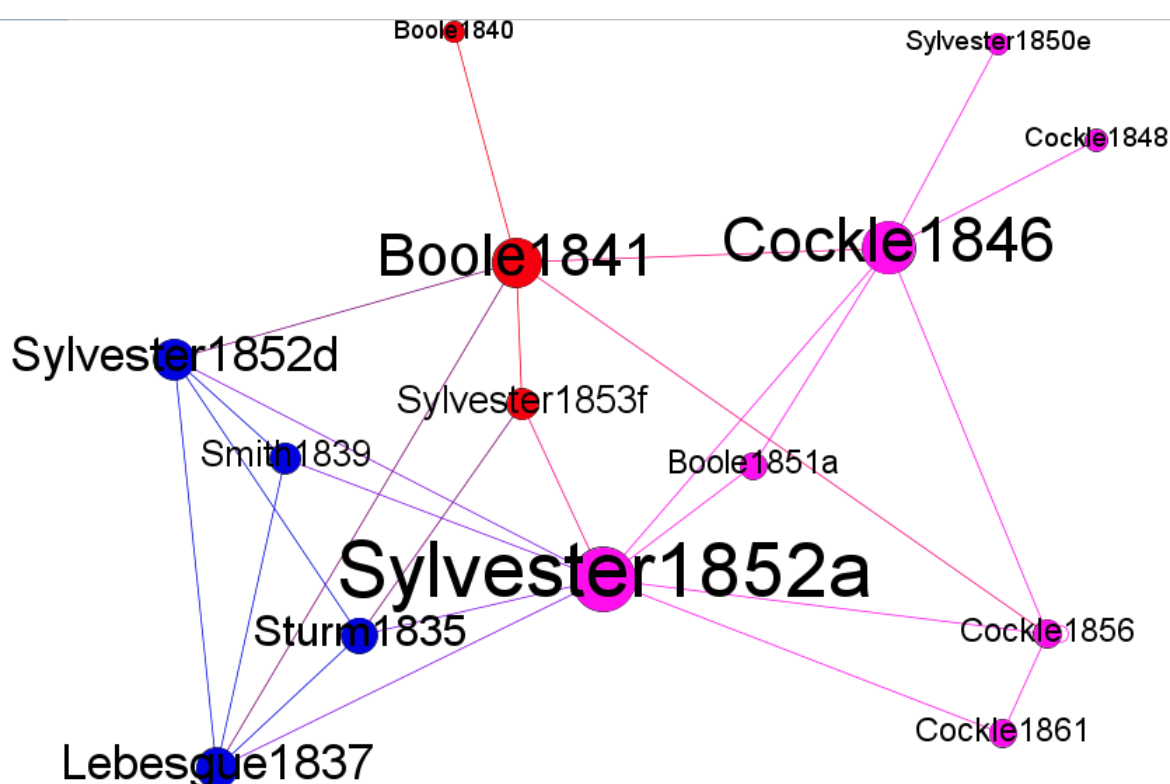
⁵³IN the preceding memoir on the Theory of Linear Transformations, I have endeavoured to give a brief sketch of the history of this peculiar and rather isolated branch of analysis, and to exhibit in their due order and connexion the main principles upon which it rests, as far as they are at present known to me.

Lei de Inércia para formas quadráticas se dá, justamente, pela relação entre os coeficientes da forma reduzida e a curva descrita pelo polinômio analisado. A declaração de Boole ganha um desdobramento importante, uma vez que ela traz o contexto que inspira a busca por formas que não se alteram após transformações.

Ainda sobre esta discussão, encontramos mais três publicações de James Cockle, que dão sequência às investigações iniciadas por ele na década de 1840. Nesses trabalhos, o matemático apresenta seu conhecimento sobre o trabalho de Sylvester, adotando sua nomenclatura, e expressa sua relação com o método de desaparecimento de grupos, técnica desenvolvida pelo autor para redução dos polinômios.

Nesse sentido, podemos compreender que, apesar de contar com apenas dois personagens que contribuem para seu desenvolvimento (Boole e Cockle), esta temática representa um desdobramento importante da temática de transformações lineares, uma vez que a discussão sobre os *invariantes* permeia o interesse manifestado nos artigos analisados nesta seção. Essa percepção pode ser mais bem explicada nas conexões que surgem na rede a seguir:

Figura 29 – Rede de Redução



Fonte – Elaborada pelo Autor

Mais uma vez, as regiões azul, vermelha e rosa, representam os trabalhos que se ligam ao teorema de Sturm, à *Teoria dos Invariantes* e a abordagens para redução de

polinômios, respectivamente. Os principais nós revelam o trabalho de Boole como ponto de partida para esta temática. A esse respeito, é importante destacar a relação com os artigos que tratam sobre transformações, uma vez que a obra do mesmo autor também é um nó significativo, como pode ser visto na figura 28. Essa mesma perspectiva surge quando olhamos para o nó Sylvester (1852a) que, como já analisamos, representa a porta de conexão entre as transformações, os movimentos de rotação (através do cálculo dos momentos de inércia) e a *Equação Secular*.

A participação de Cockle é outro fator que merece destaque nesta rede. Dadas suas contribuições na temática anterior, observamos que seu trabalho se caracteriza por uma abordagem funcional dos problemas relacionados a transformações. A presença desse autor na rede de textos sobre redução de polinômios também carrega a mesma característica, o que nos mostra que a discussão sobre as formas canônicas dos polinômios se aproxima das características analíticas dos matemáticos do continente.

Entendemos que esta seção representa uma aproximação com a produção de conhecimento matemático dos países não britânicos. Uma dessas conexões ocorre através das investigações sobre as possibilidades do uso dos polinômios homogêneos com os movimentos de rotação, prática que contou com o interesse de vários matemáticos britânicos, como poderemos ver na próxima seção.

5.7 Movimentos de Rotação

Diferentemente das outras, esta seção se concentra em um assunto que, apesar de ter relação com as abordagens dos personagens principais que apresentamos nesta tese, não lida diretamente com ideias centrais da comunidade. Nos limitaremos a compreender os questionamentos que são apresentados em alguns artigos, uma vez que estes podem não estar diretamente ligados aos que já foram analisados até este momento.

Esta seção tem o objetivo de buscar os textos que surgem nos jornais britânicos que utilizamos como base para a construção da rede. Nesse sentido, alguns autores novos aparecem, como é o caso de Booth, Andrew Bell e Dokins, nomes não muito conhecidos, mas que dão o tom do modo como as investigações sobre o tema foram conduzidas em paralelo aos desenvolvimentos da *Teoria dos Invariantes*.

A distribuição dos artigos nas fases de evolução dos jornais de Cambridge revela que a agenda dos *invariantes* tem influência na produção sobre o assunto. De maneira mais específica, podemos destacar o trabalho desenvolvido por Sylvester na década de 1850, o qual gerou uma nova perspectiva para os autores sobre o assunto. Após 13 publicações sobre o tema na Fase 1, podemos notar maior presença de autores relevantes da comunidade, como Cayley e Weddle, que contribuem com 10 publicações na Fase 2. Ao olharmos para

a Fase 3, encontramos apenas 2 artigos, o que pode representar a mudança de perspectiva e a incorporação das discussões sobre rotação nas outras temáticas já analisadas até aqui.

Com esse contexto, optamos por analisar os artigos em ordem cronológica, de modo que seja possível compreender essa mudança de perspectiva. Iniciando por 1837, já no primeiro volume do CMJ, encontramos o texto "On the Principal Axes of Rotation" (PINE, 1837), que propõe uma reflexão sobre resultados presentes na obra de William Whewell.⁵⁴ Nesse pequeno artigo de duas páginas, o foco é direcionado aos momentos de inércia de um movimento de rotação em torno de um eixo que forma ângulos α , β , γ , o que gera a fórmula

$$f \sin^2 \alpha + g \sin^2 \beta + h \sin^2 \gamma - 2F \cos \beta \cdot \cos \gamma - 2G \cos \gamma \cdot \cos \alpha - 2H \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

onde, $f = \int x^2 dm$, $g = \int y^2 dm$, $h = \int z^2 dm$, $F = \int yz dm$, $G = \int xz dm$ e $H = \int xy dm$. A ideia do autor é reduzir o polinômio acima através de uma transformação que faça $F = 0$, $G = 0$ e $H = 0$. Como pode ser visto, esse artigo está inserido na mesma discussão do artigo de Sylvester sobre a Lei de Inércia.

No mesmo volume do CMJ, Smith também apresenta um breve artigo com reflexões sobre o livro-texto de Whewell, que aborda a estabilidade do eixo de rotação de um pião. De acordo com o autor, o equilíbrio do objeto é resultado da combinação das velocidades de rotação no entorno dos eixos dos momentos de inércia do objeto. É importante observar que o texto não apresenta uma abordagem algébrica como os artigos buscados nesta tese. Entretanto, o interesse do autor pela redução de polinômios homogêneos, destacada na seção anterior, nos mostra o contexto no qual a publicação está incluída.

Um autor com uma contribuição mais significativa nesta temática é James Booth (1806 - 1878). Com duas publicações na *Philosophical Magazine* em 1841 e 1842, período contemporâneo dos artigos fundadores da *Teoria dos Invariantes* de Boole, o autor apresenta uma crítica sobre a abordagem analítica de Lagrange na concepção do movimento de rotação.

Há alguns anos, porém, esse defeito da teoria foi removido em um livro de memórias apresentado ao Instituto Francês, por um autor notável tanto pela originalidade quanto pela perspicuidade de seus pontos de vista, em que reduz o movimento do corpo ao de um elipsoide cujo centro é fixo, rolando sobre um plano fixo.⁵⁵ (BOOTH, 1841, p. 433, Tradução Nossa)

⁵⁴É importante lembrar ao leitor o papel de Whewell na disseminação das práticas analíticas em solo britânico. Essa característica ajuda na compreensão da relação que existe entre esta temática e as representações analíticas de curvas algébricas.

⁵⁵Some years ago, however, this defect of the theory was removed in a memoir presented to the French Institute, by an author remarkable as well for the originality as the perspicuity of his views, in which he reduces the motion of the body to that of an ellipsoid whose centre is fixed, rolling on a fixed plane.

Essa citação revela uma conexão importante entre os interesses de Booth e o artigo de 1852 de Sylvester. Ao se referir à representação do movimento de rotação com o elipsoide, o autor cita o trabalho de Poinsot "Théorie Nouvelle de la Rotation des Corps"(POINSOT, 1851), que, por sua vez, é o texto que inspira Sylvester ao chamar o teorema sobre a relação entre os quadrados positivos e os negativos de um polinômio homogêneo de grau 2 reduzido a sua forma canônica de Lei de Inércia. Além disso, este artigo de Booth nos revela uma perspectiva da mecânica desta lei:

Torna-se apropriado mencionar que, como os dois elipsoides de momentos, aquele assumido por Poinsot e o aqui adotado, são superfícies recíprocas, todas as propriedades de tal movimento podem ser deduzidas indiferentemente em qualquer sistema, e então imediatamente transferidas para o outros, pelas propriedades conhecidas das superfícies recíprocas; ⁵⁶ (BOOTH, 1841, p. 433, Tradução Nossa)

Ao falar de dois elipsoides, o autor se refere à diferença de sua proposta de interpretação dos objetos dos momentos de inércia, comparando, portanto os dois tipos de abordagem no artigo. Dessa forma, os momentos de inércia podem ser determinados a partir dos coeficientes do polinômio reduzido. O teorema de Sylvester nos mostra que essa relação independe da transformação escolhida, ou seja, o elipsoide escolhido trata das mesmas propriedades de inércia.

Em 1843, encontramos dois artigos no volume 3 do CMJ publicados por Andrew Bell e Cayley. O primeiro traz uma breve reflexão sobre problemas de rotação em coordenadas retangulares, enquanto o segundo segue a ideia do elipsoide como analogia para o movimento de rotação, considerando as direções cossenos do eixo de rotação do elipsoide em questão. Este texto (do futuro amigo de Sylvester e herdeiro dos interesses sobre as propriedades das transformações lineares manifestos por Boole) nos revela mais uma conexão com os personagens centrais da comunidade práticas.

Quando um sistema rígido é subitamente posto em movimento pela ação de forças impulsivas, haverá sob certas circunstâncias uma linha reta, em torno da qual o sistema começará a girar como um eixo instantâneo; esta linha é chamada de eixo de rotação espontânea. Em nenhum lugar vi qualquer investigação da condição a ser satisfeita, para que tal eixo possa existir; e é isso que agora proponho fornecer. ⁵⁷ (GREGORY; SMITH, 1843–1845, p. 158, Tradução Nossa)

⁵⁶It becomes proper to mention, that as the two ellipsoids of moments, that assumed by Poinsot, and the one here adopted, are reciprocal surfaces, all the properties of such motion may be indifferently deduced on either system, and then at once transferred to the other, by the known properties of reciprocal surfaces;

⁵⁷WHEN a rigid system is suddenly put in motion by the action of impulsive forces, there will under certain circumstances be a straight line, about which the system will begin to revolve as an instantaneous axis ; this line is called the axis of Spontaneous Rotation. I have nowhere seen any investigation of the condition to be satisfied, in order that such an axis may exist; and this is what I now propose to supply.

Nessa citação, cujo autor é desconhecido, vemos um interesse na investigação dos movimentos de rotação estimulados por uma força externa. Com isso, o artigo representa novas contribuições com as discussões sobre rotação. No entanto, ao falar que não conhece outras investigações sobre a condição descrita, o autor demonstra um certo distanciamento dos outros matemáticos que lidavam com o tema, fator que indica a dispersão da comunidade de práticas na época. Mesmo assim, o texto despertou uma reação em uma breve nota no mesmo volume do CMJ.

Dois anos depois, Cayley retoma a discussão sobre o movimento de rotação de um sólido em torno de um ponto fixo. No artigo, o autor apresenta sua inspiração no texto "Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire" (RODRIGUES, 1840), do matemático francês Olinde Rodrigues (1795 - 1851). Essa conexão se revela mais uma evidência do papel de divulgador que Cayley tem na comunidade britânica. No texto publicado no volume 1 do CDMJ, o autor faz um tratamento geométrico do problema e aponta uma dificuldade recorrente do tema.

A dificuldade de completar elegantemente a solução deste problema, no caso em que nenhuma força atua sobre o corpo, surge da complexidade e falta de simetria da fórmula ordinária para determinar a posição de um conjunto de eixos retangulares em relação a outro conjunto; em consequência do que até agora foi considerado necessário fazer uma suposição particular em relação à posição dos eixos fixos no espaço, viz. que um deles seja perpendicular ao "plano invariável" do corpo giratório.⁵⁸ (CAYLEY, 1846c, p. 167, Tradução Nossa)

Observe que o problema apontado pelo autor é semelhante àquele apresentado pelos outros autores, que se resume à determinação dos eixos de rotação ligados aos momentos de inércia do sólido investigado. Apesar de não apresentar, explicitamente, associação às ideias de movimento de Poincaré, Cayley lida com expressões que se adequam ao polinômio homogêneo reduzido apresentado no artigo de Smith e que fundamentam os questionamentos de Sylvester que o levam a escrever o artigo da Lei de Inércia de 1852. Além disso, o próprio Olinde Rodrigues faz menção ao método de Poincaré como uma forma de analisar um movimento de rotação.

A presença de Cayley entre os personagens que lidaram com o assunto desta temática, no mesmo período em que ele começa a propor a agenda dos *invariantes*, nos

⁵⁸THE difficulty of completing elegantly the solution of this problem, in the case where no forces act upon the body, arises from the complexity and want of symmetry of the ordinary formulre for determining the position of one set of rectangular axes with respect to another set; in consequence of which it has hitherto been considered necessary to make a particular supposition relative to the position of the fixed axes in space, viz. that one of them shall be perpendicular to the "invariable plane" of the rotating body.

confirma o vínculo da teoria que caracteriza a produção de conhecimento matemático do Reino Unido, principalmente na década 1850 com a participação de Sylvester. Nesse sentido, podemos afirmar que existiu uma tradição que associava os polinômios homogêneos aos movimentos de rotação, de modo que essas discussões servem de pano fundo para as investigações sobre as transformações lineares, assim como para as questões geométricas que já foram destacadas nesta tese. Além disso, destaca-se a ideia do uso de um elipsoide como estrutura do movimento de rotação e representação dos eixos de inércia.

Nesse contexto, Cayley também observa uma conexão importante dos estudos sobre rotação de corpos sólidos e a teoria dos quatérnios de Hamilton. No artigo "On the application of quaternions to the theory of rotation" (CAYLEY, 1848b), o autor segue as contribuições de Olinde Rodrigues e acrescenta o uso dos quatérnios como representantes do movimento em si. É importante destacar que, além do problema de determinação dos eixos de inércia, é feita a descrição do movimento de rotação de maneira que seja possível determinar as posições dos pontos nos instantes. A obra de Hamilton permite interpretar as transformações através das operações numéricas descritas por ele.

As grandezas a, b, c, θ sendo imediatamente conhecidas quando λ, μ, ν são conhecidas, essas últimas grandezas determinam completamente a direção e a magnitude da rotação, e podem, portanto, ser denominadas coordenadas da rotação - Λ será o quatérnio da rotação. Proponho aqui desenvolver algumas das consequências que podem ser deduzidas da fórmula anterior.⁵⁹ (CAYLEY, 1848b, p. 196, Tradução Nossa)

Nessa citação, o autor apresenta sua perspectiva sobre a representação de um movimento de rotação. Segundo essa abordagem, o quatérnio funciona como, em termos modernos, um vetor que indica a posição de um ponto do sólido em rotação. Um giro de θ graus em volta de um eixo, que mantém a, b e c como distâncias angulares para os eixos coordenados, é representado pela expressão

$$\Lambda = 1 + i\lambda + j\mu + k\nu$$

onde,

$$\lambda = \tan\frac{1}{2}\theta.\text{cosa}, \mu = \tan\frac{1}{2}\theta.\text{cosb}, \nu = \tan\frac{1}{2}\theta.\text{cosc}$$

com isso é possível determinar a posição de um ponto genérico após a realização do movimento através da seguinte operação: $\Pi_1 = \Lambda\Pi\Lambda^{-1}$, a qual se mostra a matriz das mudanças de variáveis da rotação, quando desenvolvida.

⁵⁹The quantities a, b, c, θ being immediately known when λ, μ, ν are known, these last quantities completely determine the direction and magnitude of the rotation, and may therefore be termed the co-ordinates of the rotation - Λ will be the quaternion of the rotation. I propose here to develop a few of the consequences which may be deduced from the preceding formulae.

Ao olhar para este gráfico podemos notar que as produções desta temática são, de fato, um desdobramento particular das práticas compartilhadas na comunidade, fator revelado pelo número limitado de conexões entre os campos temáticos. Sobre as regiões de interação, é possível identificar a influência dos *invariantes*, de trabalhos sobre rotação e sobre a *Equação Secular*. Nesse sentido, as ligações com os temas de redução de polinômios à soma de quadrados e transformações lineares se mostram como janelas que permitem um ponto de vista a respeito das investigações sobre os movimentos de rotação.

O papel dos nós Boole (1841), Sylvester (1852a) e Sylvester (1853a) se mostra como uma sustentação para as iniciativas dos matemáticos da rede. Dadas as características dos artigos publicados por Boole e da obra de Sylvester, podemos afirmar que a descrição dos eixos de inércia, geométrica ou algebricamente, é o que conecta os nós dessa rede. A Lei de Inércia para formas quadráticas apresenta uma resposta satisfatória para os questionamentos apresentados pelos integrantes do grupo.

O nó Poincot (1851) conecta vários trabalhos que tratam da rotação de corpos rígidos. Como vimos no capítulo 3, o modelo do matemático francês serviu de base para uma adequação que Sylvester realizou de suas ideias sobre a diagonalização da matriz associada a uma forma binária de grau 2. Essa região específica nos revela mais um desdobramento das práticas dos *invariantes*.

Conclusão

Após as diversas análises dos artigos que selecionamos para este capítulo, a pergunta persiste: qual a identidade da comunidade de práticas que se formou no entorno da *Teoria dos Invariantes*? Porém, diferentemente do primeiro momento em que o questionamento surgiu, as reflexões que realizamos aqui trazem caminhos para a resposta. Essas considerações estão organizadas a seguir, no formato de perguntas e respostas.

- Quais foram as práticas mais comuns da comunidade?

A resposta para essa pergunta tem origem em cada uma das temáticas analisadas até aqui. Além disso, veremos o modo como o protagonismo de alguns personagens se configura no interior da comunidade. Quando tratamos da Teoria de Eliminação, percebemos que o *Método Dialítico* caracteriza a centralidade de Sylvester. Além do protagonista desta tese, vemos que Cayley também contribuiu para o desenvolvimento dessa temática, embora não apresente uma prática original.

O mesmo ocorre com Salmon, que se utiliza da ideia para estabelecer pontos de contatos em curvas algébricas. Esse pano de fundo é uma marca da matemática produzida

no Reino Unido, que dá significado ao método desenvolvido por Sylvester para equações de coexistência. Nesse contexto, percebemos que as formas associadas *invariantes* também ganham importância, como é o caso dos resultantes do processo de eliminação de variáveis e o que recebeu o nome de *invariantes fundamentais* a partir do momento em que se propõe encontrar todos os *invariantes*.

A busca pelas expressões algébricas que não se alteram após transformações gerou algumas das principais práticas da *Comunidade britânica dos Invariantes*. A utilização dos determinantes se mostrou uma ferramenta que adquiriu significado de geradora dos *invariantes* procurados. Nas mãos de Cayley, a prática dos *Hyperdeterminantes*, que trata de sequências de menores, se mostrou uma das principais ressignificações do objeto e responsável pela descoberta de vários *invariantes*. Nesse sentido, a classificação das formas associadas a partir do grau dos polinômios investigados se mostrou uma prática comum. O mesmo ocorreu com os *emanantes*, prática descrita por Sylvester também para gerar *invariantes*.

Além de técnicas explícitas, como as citadas no último parágrafo, percebemos uma tradição que faz parte das práticas compartilhadas pelo grupo de matemáticos que estudamos. A natureza algébrica das abordagens, já identificada quando analisamos a obra de Sylvester, se mostra uma particularidade que delimita a imagem da comunidade de práticas. Com isso, o vocabulário dos *invariantes* acaba se tornando uma manifestação típica das iniciativas dos matemáticos que lidaram com as transformações de polinômios homogêneos. Os termos do que ficou conhecido como teoria dos *Szygyies*, os quais ganharam maior notoriedade foram os *covariantes*, *contravariantes*, *concomitantes*, além dos próprios *invariantes*.

As matrizes e as propriedades dos determinantes também fazem parte das práticas que circularam no interior da comunidade. Com uma tradição de investigação sobre problemas de contatos, os matemáticos britânicos passaram a produzir resultados a respeito de sistemas de cônicas na segunda metade do século XIX. Nesse contexto, expressões como *discriminante* e coordenadas homogêneas, disseminadas por Plücker, passaram a fazer parte das discussões da comunidade, como pudemos ver nos textos de Salmon, que trata das novas coordenadas de tri lineares. Mais uma vez, a abordagem algébrica desses problemas surge como característica particular. Como exemplo, podemos citar a utilização de fórmulas sobre contatos, baseadas nas propriedades dos polinômios como ordem e classe. A determinação de pontos de contatos de superfícies e curvas algébricas através do que ficou conhecido como *Pencil*, pelas mãos de Salmon, também foi uma técnica que circulou entre os trabalhos da comunidade. Esta técnica também apareceu nos textos de Sylvester e Hensley.

A relação com a mecânica, também gerou práticas importante do grupo, como foi

o caso da Lei de Inércia para formas quadráticas. Além disso, os momentos de inércia inspiraram as próprias técnicas dos *invariantes*, uma vez que o trabalho de Boole em 1841 parte da busca pelos eixos principais dos movimentos de rotação. Essa prática também teve a participação de Cockle. Podemos notar que a atuação dos personagens do trio de ferro dos *invariantes* tem grande destaque no desenvolvimento dessas práticas. Esse fator reforça a ideia de pioneirismos destes autores, ao lado de Boole. Entretanto, eles não são os únicos integrantes da *Comunidade britânica dos Invariantes*, como vimos nos outros capítulos. Desta forma, se faz necessário compreender os papéis de cada personagem.

- O que dizer do papel dos personagens da comunidade de práticas?

Retomando a divisão em subgrupos, que apresentamos no último capítulo, foi possível notar que o grupo de pioneiros faz jus ao nome, por conta das práticas que surgem de forma original no interior da comunidade. Com destaque para as práticas da *Teoria dos Invariantes*, Boole, Cayley, Salmon e Sylvester são os principais desenvolvedores de práticas da comunidade. A compreensão do papel dos personagens, passa pelo papel do grupo de fomentadores: Cockle, Spottiswoode, Michael Roberts e Weddle.

O caso de Spottiswoode é importante para o ganho de credibilidade da comunidade. Como veremos no próximo capítulo, suas publicações sobre as propriedades dos determinantes no *Jornal do Crelle* descrevem técnicas utilizadas pelos britânicos. Além disso, esse autor apresentou contribuições sobre os problemas de contatos, inspirado nos discriminantes. Nesse sentido, as reflexões do artigo publicado no jornal alemão, colaboraram para uma expansão do problema, considerando n dimensões de modo semelhante ao proposto por Sylvester anos antes.

O trabalho de Roberts se caracteriza por revisar as técnicas para gerar *invariantes*, a partir dos *invariantes fundamentais* de Cayley. Um destaque importante de suas contribuições é a ligação que o autor apresenta de suas formas associadas com o teorema de Sturm, retomando a perspectiva de Sylvester sobre formas algébricas constituídas por combinações das raízes de polinômios. Com isso, entendemos que esse matemático dá continuidade às discussões iniciadas pelo trio de ferro e contribui para a busca por novos *invariantes*.

Por sua vez, James Cockle tem participação que julgamos determinante na constituição da *Teoria dos Invariantes*. Sua discussão *Funções Críticas* não ganhou espaço frente ao vocabulário, já bem desenvolvido, de Cayley, Sylvester e Salmon. Entretanto, sua iniciativa ajuda a consolidar a nova Teoria como um assunto específico dos interesses dos matemáticos britânicos. Do ponto de vista de Wenger (1999), esse é um exemplo

ilustrativo do que ele chama de negociação de significados, uma vez que as práticas que o autor mobiliza mesclam a abordagem analítica e algébrica.

Diferente dos três autores dos últimos parágrafos, Weddle não foi um personagem que se dedicou às práticas dos *invariantes*. Seu trabalho se caracterizou por expandir problemas de duas dimensões para três. Nesse sentido, entendemos sua participação como um fomentador de discussões geométricas, as quais consideraram ideias projetivas que foram inspiração da nova Teoria no início da década de 1850.

Os autores que chamamos de fomentadores se caracterizam por apresentar releituras, expansões ou reflexões das ideias que surgiram no *núcleo dos invariantes*. Além deles, outros autores se limitaram a utilizar as práticas em aplicações variadas. São os casos de Smith e Gregory, que lidam respectivamente com momentos de inércia e assíntotas de curvas algébricas, e também Ferrers, que observa propriedades dos polinômios homogêneos de modo a determinar polos e polares de curvas algébricas. Este último assunto também é característico da *Comunidade britânica dos Invariantes*, pois foi tema de interesse de Cayley e Salmon, além de outros matemáticos com publicações com menos destaque.

- Quais são os artigos com maior influência nas produções do grupo? Como eles contribuem para a formação da identidade da comunidade?

Esta pergunta é respondida diretamente pelas redes temáticas. Os nós com o maior número de interações indicam a influência dos artigos. Encontramos relevância nos textos sobre Teoria de Eliminação de Sylvester, publicados em 1841 e 1847; sobre locus de curvas e superfícies algébricas, publicados por Salmon em 1848 e Sylvester em 1851, os quais trabalham com características projetivas das curvas algébricas em n dimensões, no caso de nosso personagem de pesquisa; sobre problemas de contatos, publicados por Cayley em 1849, Sylvester em 1850, Weddle em 1853 e Salmon em 1857; sobre as transformações, cujos destaques são as publicações dos *invariantes* e a aproximação com os matemáticos do exterior, fator que mostra a posição central da nova Teoria quando o domínio é o uso dos polinômios homogêneos; o texto da Lei de Inércia para formas quadráticas, que se revela muito influente no que diz respeito à redução dos polinômios; por fim, os trabalhos de Sylvester, publicados na década de 1860.

Esses trabalhos se conectam com a produção de conhecimento matemático do continente europeu. O teorema de Sturm, as coordenadas homogêneas de Plücker e os movimentos de rotação descritos pelo elipsoide de Poincaré são exemplos destas conexões. A exceção fica por conta do trabalho com as transformações lineares, que guardam uma originalidade que define a identidade da comunidade práticas que estamos estudando.

Com isso, respondemos ao questionamento inicial desta conclusão: quais são as características da *comunidade britânica dos invariantes*? Trata-se de um grupo de matemáticos que percebeu as possibilidades de ampliação da interpretação de problemas geométricos através dos polinômios homogêneos e, nesse contexto, desenvolveu uma teoria que descreve as propriedades através das transformações, que representam mudanças de eixos e movimentos em planos projetivos. Entendemos que essa comunidade lida com práticas sobre transformações lineares e seus desdobramentos.

Por fim, essa caracterização chega ao continente. É natural se perguntar como essas ideias foram recebidas pelos matemáticos de outras escolas. Logicamente, os contatos que foram sendo estabelecidos pelos personagens relevantes da comunidade, foram as portas de entrada dos britânicos. Entretanto, segue o questionamento: como as ideias publicadas nas páginas dos jornais do Reino Unido repercutiram nos jornais europeus? O próximo capítulo busca respostas para esta nova pergunta.

6 A RECEPÇÃO NO CONTINENTE E UM DESDOBRAMENTO EMBLEMÁTICO

A produção de conhecimento matemático no Reino Unido tem uma participação central da comunidade de práticas dos polinômios homogêneos. Essa é a conclusão que os capítulos anteriores nos fizeram perceber, uma vez que as temáticas que emergem dos artigos analisados caracterizam as práticas da comunidade e fazem referência aos interesses de seus personagens centrais. Em outras palavras, os conceitos, as práticas e as técnicas mobilizadas através da participação dos matemáticos que estiveram ligados à obra de Sylvester em alguma das temáticas apresentadas até aqui geraram significados que se mostraram característicos da matemática britânica, constituindo uma comunidade.

Neste capítulo buscamos compreender a repercussão continental dessa produção de significados dos matemáticos britânicos. Através da análise dos textos publicados em periódicos alemães e franceses, mais especificamente os jornais do *Crelle*, de *Liouville* e *Nouvelles Annales*. A escolha dessas fontes se justifica pelo fato de os dois países serem centros de referência em produção de matemática no século XIX e por se tratarem de meios de divulgação científica relevantes.

Nos concentramos no seguinte questionamento: como as ideias publicadas nas páginas dos jornais do Reino Unido repercutiram nos jornais europeus? Uma maneira de responder a essa pergunta é delimitar o alcance das práticas que circularam nos jornais do continente. Para isso, utilizamos um terceiro estilo de rede de textos: as redes de divulgação/recepção, que evidenciam as práticas e conceitos relevantes. Nesse sentido, esse tipo de rede viabiliza a compreensão sobre o modo como foi recebida a produção de conhecimento a respeito dos polinômios homogêneos do Reino Unido foi transmitida para o continente.

Diferentemente das redes de interação e das temáticas, que se concentram em características internas da comunidade estudada, as redes de divulgação/recepção tratam da perspectiva de outras comunidades sobre a matemática produzida por um grupo externo. Para esta tese, realizaremos as análises em duas etapas: a primeira busca evidenciar as contribuições britânicas nos jornais do continente e a segunda busca compreender como essas ideias repercutiram nos textos publicados por autores não britânicos.

Um aspecto que nos interessa é identificar os matemáticos que colaboraram na

divulgação das ideias da *comunidade britânica dos invariantes* nos jornais do continente. A organização dos artigos internacionais segue as temáticas que nortearam os outros capítulos desta tese. Também buscamos evidenciar as práticas comuns, de maneira que possamos identificar a repercussão de ideias britânicas na Europa.

6.1 Sobre a construção das redes de divulgação/recepção

Para o desenho das redes de divulgação/recepção foi necessário, mais uma vez, utilizar o software estatístico Gephi, que nos permitiu visualizar os caminhos trilhados pelos conceitos. Ao considerar os artigos selecionados para as análises e as palavras-chave como nós das redes, foi possível perceber quais assuntos aglutinam determinadas ações, sob o ponto de vista das práticas da *comunidade britânica dos invariantes*. Sobre esse aspecto, destacamos que cada artigo utilizado nas duas etapas citadas anteriormente gerou arestas que compõem grafos que se concentram nas práticas.

As palavras-chave utilizadas para a construção dos grafos são diretamente ligadas às práticas que encontramos na leitura dos artigos publicados nos jornais britânicos. Procuramos a presença dos seguintes termos e seus correlatos: Cônicas, Coordenadas Homogêneas, Determinantes, Eixos Principais, *Invariantes*, Polinômios, Polos e Polares, Raízes e Resultantes.

Além dos termos, também buscamos identificar os nomes que são inspirações para as práticas que emergem dos textos que analisamos neste capítulo. De maneira mais específica, quando olhamos para a produção britânica nos jornais europeus, nos concentramos também nos matemáticos do continente citados e quando olhamos para a produção de matemáticos do continente nos jornais europeus, nos concentramos nos matemáticos britânicos citados. Nomes de personagens já abordados também surgem nas redes de divulgação/recepção, o que indica o tipo de interação entre os diferentes países.

É necessário destacar alguns aspectos importantes dos grafos em si. As ligações entre os nós são direcionadas, tendo como ponto de partida os artigos publicados e, como ponto de chegada, objetos ou práticas matemáticas relacionadas com as palavras-chave que apresentamos nos parágrafos anteriores. O tamanho dos nós é definido pelo volume de citações ou links que são destinados ao termo, o que revela os nós que representam maior importância na rede. Para determinar essa importância de cada nó, utilizamos a ferramenta "PageRank". Trata-se de um cálculo de probabilidade, que determina qual dos nós tem maior chance de ser acessado partindo de qualquer ponta da rede. Dessa forma, é possível quantificar a importância de cada ponto da rede. Com isso, a construção dos grafos através das conexões estabelecidas dos artigos para as práticas, exprime as mais relevantes, tanto aos olhos dos britânicos quanto dos não britânicos.

Outra ferramenta do software que utilizamos para a construção das redes de divulgação/recepção foi a "Modularidade". Trata-se de uma medida de interação entre os nós, que destaca subgrupos do grafo de acordo com o volume de interações. No nosso caso, esta ferramenta foi aplicada para identificar relações que existiram entre práticas e objetos matemáticos que emergiram dos artigos que analisamos nos capítulos anteriores. Em particular, investigamos com quais objetos as ideias desenvolvidas pela *comunidade britânica dos invariantes* se conectaram de maneira mais frequente. Diferenciamos por cores os subgrupos que aparecem com o uso dessa ferramenta, sendo o vermelho para identificar as práticas exclusivas de nossa comunidade de interesse e diferentes cores, que serão descritas a cada seção, para cada outro caso.

Como forma de evidenciar as práticas, os nós que representam os artigos foram colocados manualmente fora do centro. Entendemos que a ação permite destacar a relevância dos objetos, uma vez que estamos interessados em como estes são transmitidos e recebidos no continente.

Enfatizamos que o número de subgrupos depende das interações que são apresentadas pelo conjunto de artigos que selecionamos, definida pela "modularidade". Da mesma forma, o tamanho dos nós depende da importância definida pelo "PageRank". Entendemos que os grafos apresentados desta maneira revelam os interesses e o modo como as ideias circularam nos jornais do continente.

Diferente do que fizemos no capítulo anterior, em que focamos nas contribuições de cada autor dentro das temáticas que emergem a partir da obra de Sylvester, optamos por apresentar as descrições dos artigos com foco nas práticas que se correlacionam com as contribuições publicadas pela *comunidade britânica dos invariantes* nos jornais do Reino Unido. Esta opção nos permitiu revelar a circulação de conhecimento entre o Reino Unido e os outros dois centros de produção matemática.

6.2 Os matemáticos do continente, relevantes para a *Comunidade britânica dos Invariantes*

Outro ponto importante é a incidência de matemáticos não britânicos com número relevante de publicações sobre as temáticas relacionadas aos polinômios homogêneos. O critério para determinar quais autores são relevantes leva em consideração o volume de artigos publicados no período, sendo 5 o número mínimo de corte. Desta forma, encontramos os seguintes personagens:



Ludwig Otto Hesse (1811-1874, 22 textos publicados em jornais do continente) - Formado na Universidade de Königsberg, onde foi aluno de Jacobi. Sua atuação na produção de conhecimento matemático ocorreu em concomitância com os trabalhos de outros personagens que despertam o interesse desta tese, como Aronhold e Clebsch. Apesar de ser um pesquisador ativo, só se tornou professor ordinário da Universidade Halle, onde conduziu uma série de pesquisa em geometria analítica. De acordo com Gillispie (1981), suas principais contribuições fazem parte das discussões sobre funções algébricas e *Teoria dos Invariantes*. Como veremos ao analisar seus artigos, seu trabalho tem forte influência sobre as investigações a respeito das propriedades dos determinantes.

O Hessiano, como Sylvester costumava chamar, foi um determinante com diversas aplicações. Entretanto, Hesse se dedicou a apresentar interpretações geométricas às transformações algébricas, estimulado pelas obras de Plücker, Steiner e Poncelet. Essas características revelam o nível de sua participação em consonância com os matemáticos britânicos, uma vez que estes utilizam muito os resultados do Alemão.

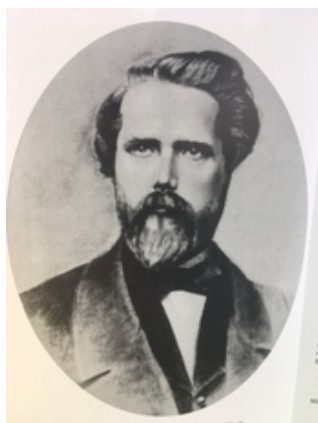


Charles Hermite (1822-1901, 4 textos publicados no Reino Unido e 15 nos jornais do continente) - Se formou na École Polytechnique em 1847 e, já no ano seguinte, seria nomeado repetidor e examinador daquela instituição. Trata-se de um personagem que já foi apresentado nesta tese, por conta de sua relação com os protagonistas da comunidade britânica. Entretanto, Gillispie (1981) caracteriza este matemático como um analista, por conta de sua produção de livros didáticos no final dos anos 1860. Além da análise, suas áreas de atuação foram Funções Abelianas, Teoria aritmética das formas quadráticas e *Teoria dos Invariantes*.



Joseph Liouville (1809-1882, 15 textos publicados nos jornais do continente) - Este é um personagem importante para a divulgação de conhecimento matemático, uma vez que é o fundador do *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, que ficou conhecido como *Jornal de Liouville*. Sua carreira acadêmica se inicia em 1828, quando é transferido da *École Polytechnique* para a *École de Ponts et Chaussées* para estudar engenharia, tendo se formado em 1830. Foi professor de várias instituições, como a própria *École Polytechnique*, *Collège de France* e *École Centrale des Arts et Manufactures*. Além disso, lecionou em nível superior na *Faculdade de Ciências de Paris*.

Também foi membro da *Academia de Ciências de Paris* e do *Bureau des Longitudes*. No entanto, seu principal empreendimento foi o famoso periódico matemático que ficou conhecido por seu nome. Assim como *Hermite*, as principais contribuições de *Liouville* ocorreram no campo da análise. Apesar disso, *Gillispie* (1981) afirma que ele nunca se caracterizou por publicações em uma única área, mas sim pela diversidade nos temas. Em particular, ele publicou reflexões sobre a *Teoria dos Invariantes* no final da década de 1850.



Louis Félix Painvin (1826-1875, 13 textos publicados nos jornais do continente) - Formado em 1854, quando conquistou dois doutorados, sendo um deles em equações diferenciais do problema dos três corpos. Foi professor do *Lycée* em *Douai* até 1872, quando foi nomeado para a vaga de *Darboux* no *Lycée de Louis le Grand* em *Paris*. Suas principais contribuições em matemática tratam de superfícies algébricas, com a maioria das publicações no *Nouvelles Annales des Mathématiques*. Foi editor do *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*.



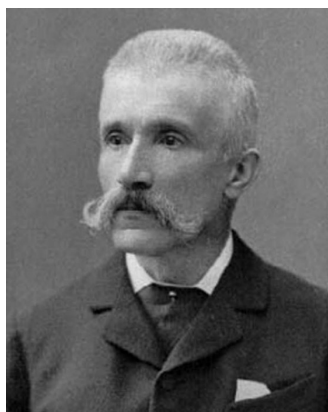
Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851, 10 textos publicados nos jornais do continente) - Formado na Universidade de Berlim, tendo conseguido autorização para ensinar matemática em 1824, ano em que começou a lecionar na mesma universidade onde se formou. De acordo com Gillispie (1981), sua primeira palestra tratou de uma abordagem analítica de curvas e superfícies em 3 dimensões. O matemática permaneceu dois anos na universidade. Em seguida, se transferiu para Königsberg, onde trabalhou por 18 anos e conduziu palestras que aproximaram alunos a outros pesquisadores.

O *Jornal do Crelle* concentra a maioria de suas publicações e ele é um dos responsáveis pela reputação do periódico. Além disso, foi professor de alguns dos personagens de interesse desta tese, como Borchardt e Hesse. Além disso, Jacobi também buscava estabelecer relações com a pesquisa em outros países. Em 1842 participou da reunião da BAAS em Manchester, quando apresentou suas reflexões sobre mecânica analítica. Sobre os interesses manifestados pela comunidade britânica, sua principal relação ocorre através da teoria dos determinantes.



Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833-1872, 9 textos publicados nos jornais do continente) - Ingressou na Universidade de Königsberg em 1850, onde foi aluno de Hesse e Richelot, dois alunos de Jacobi. Formou-se em 1854 e iniciou sua carreira como professor associado na Universidade de Berlim em 1858. Colaborou com a edição do *Gesammelte Werke*, periódico idealizado por Jacobi, e foi fundador da revista *Mathematische Annalen* em 1868.

De acordo com Gillispie (1981), sua participação nas investigações sobre *Teoria das Invariantes* projetivas e geometria algébrica garantiram sua fama como pesquisador em matemática. Clebsch tinha conhecimento do trabalho desenvolvido por Sylvester e contribuiu com as investigações do britânico sobre os problemas de contato de superfícies de ordem n . Em 1872, publicou o livro *Theorie Der Binären Algebraischen Formen* (CLEBSCH, 1872), um compêndio dos resultados da nova Teoria apresentados na Alemanha e no Reino Unido.



Francesco Brioschi (1824-1897, 1 texto publicado no Reino Unido e 6 nos jornais do continente) - Se formou em 1845 na Universidade de Pavia, mesma instituição onde foi professor de matemática teórica de 1852 até 1861. Também foi ministro da educação em 1861 e 1862. Foi engajado na divulgação do conhecimento matemático, participou como editor do *Annali di matematica pura ed applicata* de 1867 até sua morte e ajudou a organizar o jornal politécnico.

Sua conexão com a *Teoria dos Invariantes* se estabelece a partir de seu trabalho com a teoria dos determinantes. Nesse sentido, Brioschi se dedica a compreender a obra dos matemáticos britânicos, além das investigações de Hermite, que ele chamou de "as maiores realizações matemáticas de nosso tempo" (GILLISPIE, 1981). Também trabalhou com transformações de funções elípticas e abelianas.



Olry Terquem (1782-1862, 7 textos publicados nos jornais do continente) - Formado na École Polytechnique, onde foi assistente de tutor de análise e mecânica até 1804, quando passou a trabalhar como professor de matemática transcendente na escola secundária de Mainz. Em 1814, deixou o cargo de professor para trabalhar como bibliotecário no depósito de artilharia em Paris, onde teve acesso a um grande acervo sobre matemática (PROUHET, 1862).

Em 1841, fundou *Nouvelles Annales des Mathématiques* em parceria com o professor Camille-Christophe Gerono. Nesse mesmo jornal, iniciou uma série de relatos bibliográficos de matemáticos da época, num esforço para difundir o gosto pela pesquisa histórica. Nesse contexto, Terquem se caracteriza como um divulgador de conhecimento matemático, por conta de seu trabalho no periódico matemático. Como veremos, ele dedicou parte de seu trabalho, a explicar as particularidades da *Teoria dos Invariantes* britânica.



Ernest Jean Philippe Fauque de Jonquières (1820-1901, 6 textos publicados nos jornais do continente) - Oficial da marinha francesa, tendo sido formado na École Navale de Brest, chegou a ser vice-almirante em 1879. Gillispie (1981) o aponta como um matemático que dedicou suas investigações à geometria sintética, inspirado pela obra de Poncelet e Chasles. Em 1862, foi premiado na Academia de Paris por seu trabalho na teoria das curvas planas de quarta ordem.

Seu interesse por curvas planas acabou por aproximá-lo do trabalho desenvolvido por Salmon e Cayley sobre o assunto, além dos estudos sobre transformações. Além de geometria, também se dedicou ao estudo da álgebra e teoria dos números. Nos artigos selecionados para esta tese, encontramos críticas à própria *Teoria dos Invariantes* e reflexões sobre suas contribuições para problemas de geometria descritiva.



Carl Wilhelm Borchardt (1817-1880, 5 textos publicados nos jornais do continente) - Formado na Universidade de Königsberg em 1843, onde foi aluno de Jacobi e investigou sistemas de equações diferenciais. Entre 1846 e 1847 esteve em Paris, onde manteve contato com Hermite e Liouville (GILLISPIE, 1981). No ano seguinte, já de volta à Alemanha, iniciou sua carreira como professor associado da Universidade de Berlim. Tornou-se membro da Academia de Ciências de Berlim em 1855 e, no ano seguinte, passou a editar o *Jornal do Crelle*.

Borchardt passou a ser conhecido no mundo das matemáticas a partir de uma publicação no *Jornal do Crelle* de 1846, onde generalizou o resultado de Kummer sobre a *Equação Secular*, fator que o aproxima dos interesses de Sylvester. Sua atuação interliga a Teoria de Eliminação com a teoria dos determinantes, além contribuir em investigações sobre integrais elípticas.

Além desses personagens, também destacamos 14 artigos publicados no jornal *Nouvelles Annales des Mathématiques*, os quais não apresentam assinatura e, portanto, atribuímos ao editor do periódico: Olry Terquem. Ao observar os perfis dos personagens com contribuição relevante para as investigações que tratam dos polinômios homogêneos, percebemos que eles apresentam um vínculo em comum com os protagonistas da comunidade britânica de práticas matemáticas: a *Teoria dos Invariantes*.

Visto isso, entendemos que os artigos analisados neste capítulo têm o papel de descrever o processo de legitimação do que é produzido pela comunidade britânica, para além de revelar as práticas que ela desenvolve. É importante destacar que, como já visto no parágrafo anterior, os autores do continente que compartilham o interesse pelos polinômios homogêneos, acabam por validar a utilidade de práticas que seriam exclusivas dos britânicos, como a busca pelos *invariantes*. Iniciamos nossas reflexões pelos de matemáticos do Reino Unido que foram publicados nos jornais do continente, mais especificamente, nos jornais de *Liouville*, do *Crelle* e *Nouvelles Annales*.

6.3 Os Trabalhos da *Comunidade britânica dos Invariantes* nos Jornais do Continente

Entre os personagens revelados nos capítulos anteriores, os matemáticos que divulgaram sua produção no continente por meio dos periódicos foram Cayley, Spottiswoode, Salmon, Michael Roberts e Sylvester. O objetivo desta seção é identificar características do movimento das práticas, elaboradas pela *Comunidade britânica dos Invariantes*, ao longo de sua disseminação em periódicos não britânicos. Iniciamos as análises olhando para os artigos que selecionamos dos autores citados neste parágrafo nos volumes do *Jornal do Crelle* no período de 1837 a 1865. Ao longo desse período, foram publicados no jornal alemão 38 artigos dos autores citados.

6.3.1 A *Comunidade britânica dos Invariantes* no *Jornal do Crelle*

O primeiro artigo que encontramos neste recorte foi publicado por Cayley em 1845. O texto "Note sur deux Formules données par MM Eisenstein et Hesse"(CAYLEY, 1845c) faz reflexões sobre resultados dos dois matemáticos alemães, a respeito de propriedades que emergem de transformações lineares. Inicialmente, o autor discute a seguinte fórmula:

$$(a^2d^2 - 3b^2c^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 6abcd)^3 = A^2D^2 - 3B^2C^2 + 4AC^3 + 4DB^3 - 6ABCD$$

a qual foi apresentada um ano antes por Eisenstein, como uma maneira de dividir e classificar todas as formas cúbicas, além explicitar a propriedade de invariância deste determinante (EISENSTEIN, 1844, p. 92). Cayley inicia seu texto com o destaque para esta propriedade dos polinômios de grau 3. Apesar do termo *invariante* ainda não ser utilizado em 1845, é importante lembrar que o matemático inglês já havia despertado seu interesse sobre o trabalho de Boole e percebeu características similares no artigo do matemático alemão.

A propriedade da função u que acabo de declarar relaciona-se a uma teoria bastante geral de uma nova espécie de funções algébricas com a qual estou lidando atualmente e que, por causa de sua analogia com os determinantes, poderíamos chamar, como penso, "Hyperdeterminantes". Proponho lançar os primeiros fundamentos desta teoria em um livro de memórias que aparecerá no próximo nº do "Cambridge Mathematical Journal"(No. XXIII).¹ (CAYLEY, 1845c, p. 55, Tradução Nossa)

A propriedade à qual Cayley se refere é, justamente, a invariância do determinante investigado em Eisenstein (1844). Destaca-se a menção aos *Hyperdeterminantes*, o que

¹ La propriété de la fonction u que je viens d'énoncer, se rapporte à une théorie assez générale, d'une nouvelle espèce de fonctions algébriques dont je m'occupe actuellement, et lesquelles à cause de leur analogie avec les déterminantes, on pourrait comme je crois nommer "Hyperdeterminantes". Je me propose de poser les premiers fondemens de cette théorie dans un mémoire qui va paraître dans le prochain No. du "Cambridge Mathematical Journal"(No. XXIII)

indica um início de divulgação da Teoria que começava a ser desenvolvida em solo britânico. Outra conexão com a Teoria de interesse desta tese é encontrada no determinante de Hesse. Ao considerar polinômios homogêneos em duas variáveis, o autor inglês identifica duas formas *invariantes* que resultam do hessiano (CAYLEY, 1845c, p. 56).

Cayley apresenta seu interesse por formas que permanecem inalteradas após uma transformação linear das variáveis de um polinômio a elas associado. Esse fator revela o início do movimento que apresenta ideias britânicas para os leitores do *Jornal do Crelle*. Essa percepção se justifica pelo fato de o autor ter iniciado sua agenda de encontrar todos os *invariantes* no mesmo ano de publicação de Cayley (1845c), o que nos remete às ideias iniciadas por Boole em 1841. Em particular, esse artigo apresenta os *invariantes fundamentais*, que foram estudados pelo autor no contexto de redução de polinômios de quarta ordem, como mostramos no capítulo anterior.

Em 1846, o texto "Mémoire sur les Hyperdéterminants" (CAYLEY, 1846a) levou à tradução do texto "On the Theory of Linear Transformations" (CAYLEY, 1845i), publicado um ano antes. Essa iniciativa indica a necessidade de divulgação da prática desenvolvida, a julgar pelo título da tradução. Ainda no mesmo ano, encontramos um artigo de natureza bastante diferente da tradução que acabamos de citar. Em "Problème de Géométrie Analytique" (CAYLEY, 1846e), o autor se propõe a resolver o seguinte problema: encontrar explicitamente as coordenadas dos centros de similaridade de duas superfícies de segunda ordem, cada uma das quais circunscrita pela mesma superfície desta ordem.

Ao longo da solução, o autor utiliza algumas práticas que merecem destaque: as coordenadas homogêneas de Plücker e os determinantes associados aos polinômios que descrevem as superfícies. A diferença de natureza entre este e o artigo sobre os *Hyperdeterminantes* se encontra no fato de que, neste, Cayley lida com um problema que já era conhecido do público do jornal. Por outro lado, o artigo anterior propõe uma abordagem genuinamente nova para os polinômios homogêneos, que é útil para resolução de problemas como o do último artigo.

Quando olhamos para a relação entre os dois primeiros artigos publicados pelo autor no *Jornal do Crelle*, é possível perceber que Cayley fazia um movimento de busca de posicionamento enquanto produtor de um conhecimento matemático original frente aos leitores do jornal alemão. Essa ideia vai ao encontro da situação da pesquisa britânica na área que, como discutido no capítulo 2, apresentava poucos espaços para os matemáticos que estavam surgindo no período.

Nessa linha de se valorizar como pesquisador aos olhos dos matemáticos do continente, Cayley apresenta dois artigos no volume 34 do *Crelle* em 1847, os quais tratam da relação entre as teorias das curvas e eliminação. No primeiro desses textos, o autor

apresenta propriedades dos resultantes no contexto dos problemas de contatos de curvas projetivas. Como exemplos, destacamos dois problemas (CAYLEY, 1847b):

- Encontrar as equações do sistema de retas tiradas de um ponto de intersecção de duas curvas dadas.
- Encontrar as equações do sistema de tangentes tiradas de um ponto fixo de uma curva dada.

O autor trata o segundo problema como desdobramento do primeiro, uma vez que o ponto de tangência é o ponto de contato de uma curva de ordem n e sua forma associada de ordem $(n - 1)$ resultando da combinação linear de suas derivadas parciais. Nestas condições, a ideia de resolução passa por decompor a resultante do sistema de equações formado pelos polinômios que representam as curvas dadas, as combinações das derivadas parciais destas equações e retas cujos coeficientes são combinações dos coeficientes das curvas dadas. Estes resultados surgem no radar de Cayley após os contatos com Joachimsthal: "Este belo teorema deve-se a M. Joachimsthal, que o comunicou a mim no verão passado durante minha estada em Berlim, com uma demonstração"² (CAYLEY, 1847b, p. 34). Além disso, as ideias de eliminação são inspiradas nos trabalhos desenvolvidos por Sylvester.

Nesse contexto, Cayley destaca as aplicações para pontos notáveis das curvas investigadas, como pontos de inflexão e tangentes duplas. Além disso, o artigo também serve como forma de o autor mostrar, para os leitores do *Jornal do Crelle*, seu nível de conhecimento sobre a matemática do continente, como podemos ver na seguinte citação:

Encontramos os pontos de contato das tangentes duplas, combinando com a equação da curva uma equação $IIIU = 0$ da ordem $(n - 2)(n^2 - 9)$ em relação às variáveis, e da ordem $n^2 + n - 12$ em relação aos coeficientes; isto é: como dois pontos de contato correspondem a uma tangente dupla, o número dessas tangentes é igual a $\frac{1}{2}n(n - 2)(n^2 - 9)$: teorema demonstrado indiretamente por M. Plücker.³ (CAYLEY, 1847b, p. 37, Tradução Nossa)

Nessa citação, o autor destaca um dos resultados apresentados por Plücker, fator que evidencia sua influência através das coordenadas homogêneas. Ressaltamos que, ao mesmo tempo em que busca inspiração na obra do matemático alemão, Cayley acrescenta

²Ce beau théorème est dû à M. Joachimsthal, qui me l'a communiqué l'été passé pendant mes séjours à Berlin, avec démonstration

³On trouve les points de contact des tangentes doubles, en combinant avec l'équation de la courbe une équation $IIIU = 0$ de l'ordre $(n - 2)(n^2 - 9)$ par rapport aux variables, et de l'ordre $n^2 + n - 12$ par rapport aux coefficients; c'est-à-dire: puisqu'il correspond deux points de contact a une tangente double, le nombre de ces tangentes est égal à $\frac{1}{2}n(n - 2)(n^2 - 9)$: théorème démontré indirectement par M. Plücker.

contribuições próprias, como é caso do uso dos *Hyperdeterminantes* que são utilizados para o cálculo dos recíprocos polares, que auxiliam na determinação das tangentes. Essa ferramenta também surge no segundo artigo publicado em 1847, onde se retomam os determinantes de Eisenstein e Hesse como critérios para descrição dos pontos de contatos de curvas de ordem m .

Como podemos perceber, o comportamento de Cayley nessas publicações passa pela necessidade de divulgação de suas práticas e demonstração de seu talento matemático. Esse é um fator que dá início a um processo de credibilização do que era produzido em solo britânico, do ponto de vista matemático sobre os polinômios homogêneos. Esse movimento se repete em 1849, quando o inglês publica uma breve nota sobre funções de segunda ordem. Mais uma vez a influência de Plücker é destacada pelo autor.

O ano de 1850 traz uma contribuição interessante de Salmon, a respeito das relações da matemática produzida no Reino Unido e no *Jornal do Crelle*. Trata-se de uma carta ao editor do jornal, na qual autor destaca ideias de matemáticos britânicos que apresentam interseções com os resultados que surgiram no jornal.

Uma vez que as memórias muito interessantes do Sr. Aronhold, publicadas no caderno 2 volume 39 de seu Jornal, voltaram a chamar a atenção de seus leitores para as belas pesquisas do Sr. Hesse sobre os pontos de inflexão das curvas do terceiro grau; você pode achar digna de inserção a observação, devida ao Sr. Hart, de que um teorema fundamental do Sr. Hesse é uma simples consequência geométrica de um teorema conhecido do Sr. Chasles.⁴ (SALMON, 1850a, p. 365, Tradução Nossa)

Nesse trecho da carta, Salmon chama atenção para a produção matemática do Reino Unido e suas relações com a produzida no continente. Dessa forma, o autor participa do processo de divulgação das práticas que começam a emergir na comunidade britânica. Nesse texto, além da relação entre Hart e Hesse, o autor também associa o trabalho de Joachimsthal com seções cônicas com teoremas de MacCullagh, personagem conhecido dos estudos de matemática em Cambridge. Sua participação se torna mais evidente através de seus livros-textos que são traduzidos na Europa. Ainda em 1850, Cayley publica dois artigos, "Sur le problème des contacts"(CAYLEY, 1850f) e "Note sur quelques formules relatives aux coniques"(CAYLEY, 1850b), os quais investigam propriedades das cônicas. Sobre esses dois trabalhos, é importante destacar que, como vimos no capítulo 3, o primeiro serviu de inspiração para Sylvester no início de suas contribuições para problemas de

⁴ Puisque le mémoire très intéressant de Mr. Aronhold, publié dans le cahier 2 tome 39 de votre Journal, a dirigé de nouveau l'attention de vos lecteurs sur les belles recherches de Mr. Hesse sur les points d'inflexion des courbes du troisième degré; vous trouverez peut-être digne d'insertion la remarque, due à Mr. Hart, qu'un théorème fondamental de Mr. Hesse est une simple conséquence géométrique d'un théorème connu de Mr. Chasles.

contatos nos anos 1850. No segundo artigo, encontramos uma reflexão sobre fórmulas comuns sobre o assunto: "As fórmulas obtidas serão úteis para a solução do problema da tese seguinte. Reuni-os aqui para não interromper esta solução"⁵ (CAYLEY, 1850b, p. 3). Nesse trecho, o autor se refere às investigações sobre cônicas inscritas em superfícies de segunda ordem, conduzidas por ele em "Mémoire sur les coniques inscrites dans une même surface du second ordre"(CAYLEY, 1851a).

Nesse artigo, Cayley apresenta algumas técnicas que seriam muito comuns na comunidade britânica: os menores determinantes como forma de determinar coeficientes das retas polares as seções cônicas; os *invariantes* associados a formas cúbicas e quádricas; e os determinantes para calcular as coordenadas do centro de homologia de três cônicas inscritas em uma quarta. Essas práticas auxiliam na divulgação dos problemas que mobilizaram os matemáticos do Reino Unido, fator que contribui para a repercussão dos textos de Sylvester de 1850.

Uma das principais divulgações feitas por Cayley tratou das abordagens dos britânicos para problemas de geometria em coordenadas homogêneas, a partir da obra de Plücker. Em (CAYLEY, 1851a), encontramos conceitos de homologia, assunto que vinha sendo tratado nos artigos publicados no jornal alemão um ano antes, quando começou a investigar os sistemas de cônicas. Ainda nesse trabalho, identificamos a utilização dos *Hyperdeterminantes* como forma de determinar os eixos de homologia.

No mesmo ano de 1851, Cayley retoma a divulgação da *Teoria dos Invariantes*. Dessa vez, ele já contava com as contribuições de Sylvester publicadas no mesmo ano, texto em que é apresentado o termo *invariante* pela primeira vez no volume 6 do CDMJ. Esse é o primeiro momento em que os termos, descritos pelo personagem central desta tese, surgem no continente.

Considero aqui apenas o caso de uma função homogênea com duas variáveis, e usando os novos termos de M. Sylvester, denomino "Covariante" de uma dada função, qualquer função que não mude sua forma submetendo-a às variáveis de quaisquer transformações lineares, e "Invariante" qualquer função dos únicos coeficientes que possui a propriedade mencionada. ⁶ (CAYLEY, 1851b, p. 368, Tradução Nossa)

Como podemos ver, esse trecho se dedica à divulgação de termos que foram descritos por Sylvester (1851e). É importante lembrar que nesse artigo são destacados

⁵ Les formules obtenues seront utiles pour la solution du problème du mémoire suivant. Je les ai rapprochées ici pour ne pas interrompre cette solution.

⁶ Je ne considère ici que le cas d'une fonction homogène à deux variables, et en me servant des nouveaux termes de M. Sylvester, je nomme "Covariant" d'une fonction donnée, toute fonction qui ne change pas de forme en faisant subir aux variables des transformations linéaires quelconques, et "Invariant" toute fonction des seuls coefficients qui a la propriété mentionnée.

os *Hyperdeterminantes* como *covariantes*, assim como as formas adjuntivas de Hermite são descritas como *contravariantes*. Ou seja, Cayley assume um papel de divulgador do vocabulário que ele ajudou a desenvolver ao longo de uma correspondência com seu amigo inglês (PARSHALL, 1998). Entretanto, esse é um momento importante para a consolidação da comunidade britânica de produção matemática. No mesmo artigo, o autor indica o trabalho de Salmon sobre a classificação de curvas de dupla curvatura, já analisado no capítulo 5.

Os *invariantes* também são tratados por Salmon nesse volume do *Jornal do Crelle*. Em dois artigos, que investigam propriedades de curvas de terceira ordem e curvas recíprocas, o reverendo cita os resultados de Aronhold com propriedade de se manter inalterados após transformações. Primeiramente, Salmon investiga o feixe de quatro tangentes a uma curva de ordem 3 dada e, como característica, afirma que a função anarmônica é sempre constante. A demonstração desse teorema passa pela relação $S^3 : T^2$, sendo que S e T são os *invariantes* investigados por Sylvester e Cayley.

Salmon faz uma associação entre estes *invariantes* e a equação biquadrática que gera as quatro tangentes de uma curva de terceira ordem dada. Nesta prática, a posição central dos *invariantes de Aronhold* indica a influência que a agenda dos *invariantes* começa a ter sobre as investigações a respeito de problemas geométricos. Entendemos que esse é um dos fatores que garante o reconhecimento de Chasles em seu relatório sobre o progresso da geometria (CHASLES, 1870). É importante destacar que, além de Aronhold, Hesse também é uma referência importante para Salmon, como pode ser visto no "Sur la Formation de l'équation de la Courbe Reciproque à une Courbe Donnée" (SALMON, 1851).

Outro personagem importante para a divulgação das práticas britânicas foi Spottiswoode, que também apresentou suas contribuições no *Jornal do Crelle*. Seguindo a linha de Salmon, no texto "Mémoire sur les Points Singuliers d'une Courbe à Double Courbure" (SPOTTISWOODE, 1851), o autor expõe reflexões sobre pontos de contato de superfícies dadas e equações de retas tangentes. Nesse texto identificamos a referência ao trabalho de Sylvester com os menores determinantes, o que nos mostra como as contribuições do protagonista da *Teoria dos Invariantes* foram se tornando base das abordagens em investigações que envolviam os polinômios homogêneos.

A disseminação das práticas britânicas no *Jornal do Crelle*, ganha continuidade no ano de 1854. A publicação de uma correspondência entre Donkin e Spottiswoode demonstra o reconhecimento da importância das pesquisas conduzidas no Reino Unido. Além disso, o conteúdo das cartas revela a perspectiva geométrica das investigações em que os dois matemáticos se encontravam envolvidos.

Com esse tipo de aproximação entre Reino Unido e Alemanha, Cayley segue com a divulgação das descobertas sobre os *invariantes*. Um ano após sua retomada das investigações, por conta das contribuições de Sylvester entre 1850 e 1853, ele publica um artigo no volume 47 do *Crelle*, onde comunica as novidades sobre os desenvolvimentos da teoria.

cada invariante será uma função de um número $n - 2$ de invariantes, que podem ser tomados como primitivos; e qualquer covariante será uma função dessas invariantes primitivas da função dada (que é obviamente uma de suas próprias covariantes), e de outra covariante que pode ser considerada primitiva. Isso de forma alguma prova (o que é verdade para invariantes, como acredito) que qualquer invariante é uma função racional e integral de $n - 2$ invariantes adequadamente escolhidas, e que qualquer covariante é uma função racional e integral (o que de fato não é verdade) dessas invariantes, da função dada e de uma covariante adequadamente escolhida. ⁷ (CAYLEY, 1854b, p. 118, Tradução Nossa)

Essa propriedade faz parte da agenda que buscava determinar a existência de um conjunto específico de *invariantes fundamentais*. Cabe ressaltar que os teoremas, descritos por Sylvester, sobre os *concomitantes* e como suas combinações podem gerar novos *concomitantes* também lidam com *invariantes* primitivos. No caso do artigo de Cayley, o autor utiliza diferenciais da *covariante*, ou *invariante* a depender do caso, em relação aos coeficientes do polinômio homogêneo para construir as novas formas associadas imutáveis. Além deste resultado bastante geral, o autor indica que as formas construídas a partir das raízes dos polinômios também são *invariantes fundamentais* que possibilitam a geração de novos *invariantes* que dependem das demais raízes.

Um ano depois, com a publicação de "Sept différents mémoires d'analyse" (CAYLEY, 1855), o autor se propõe a investigar um problema geométrico levantado por Steiner no volume 31 do *Crelle* e um teorema sobre resultantes proposto no livro de memórias *Über die Resultante eines Systemes mehrerer algebraischer Gleichungen: ein Beitrag zur Theorie der Elimination*, publicado em 1852, Cayley passa a descrever vários conceitos e técnicas que são utilizadas no Reino Unido.

Essa publicação foi dividida em 7 artigos, com os dois primeiros tratando expressamente dos teoremas citados no último parágrafo. A partir do terceiro, o matemático descreve sua notação de matrizes, de forma semelhante ao que é apresentado em Sylvester

⁷ tout invariant sera une fonction d'un nombre $n - 2$ d'invariants, que l'on pourra prendre pour primitifs; et tout covariant sera une fonction de ces invariants primitifs de la fonction donnée (laquelle est évidemment un de ses propres covariants), et d'un autre covariant que l'on peut prendre pour primitif. Cela ne prouve nullement (ce qui est néanmoins vrai pour les invariants, à ce que je crois) que tout invariant est une fonction rationnelle et intégrale de $n - 2$ invariants convenablement choisis, et que tout covariant est une fonction rationnelle et intégrale (ce qui en effet n'est pas vrai) de ces invariants, de la fonction donnée et d'un covariant convenablement choisi.

(1850a). Sobre isso, destacamos que, no segundo dos sete artigos sobre análise, a resolução de um sistema de equações utiliza o *Método Dialítico*, desenvolvido por Sylvester em seus trabalhos da década de 1840, como mostramos no capítulo 3.

A notação utilizada nesse texto é a mesma que o autor apresentará em Cayley (1860a), o que nos mostra que ele apresenta um processo de reflexão, de pelo menos 5 anos, sobre a nomenclatura que se associava aos *invariantes*. Essa iniciativa se associa às reflexões já propostas em Sylvester (1853f). Nesse processo, encontramos a definição de matriz inversa como uma lista de coeficientes necessária para transformar o sistema:

$$(\xi, \eta, \zeta, \dots) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \dots \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \dots \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} (x, y, z, \dots)$$

onde as variáveis ξ , η , ζ e etc, são funções de x , y , z etc, que são combinadas pelos coeficientes listados na matriz. A descrição de matriz inversa se refere à lista de novos coeficientes que possibilitam a inversão dessas funções. Cayley também aponta o modo como estes novos coeficientes são determinados.

Os termos desta matriz são frações, tendo como denominador comum o determinante formado com os termos da matriz original; os numeradores são os determinantes menores formados com os termos desta mesma matriz excluindo qualquer uma das linhas e qualquer uma das colunas.
⁸ (CAYLEY, 1855, p. 283, Tradução Nossa)

Percebe-se assim, uma aplicação dos menores determinantes apresentada no continente. Nessa mesma linha de apresentação de ideais ao continente, o quarto artigo sobre análise trata de relações algébricas entre os *invariantes*, e *covariantes*, descobertos para formas de graus 2, 3 e 4. Destacamos que essa proposta ocorre de forma semelhante nas memórias sobre os *quantics*. O autor apresenta os sistemas de *covariantes* que caracterizam os polinômios:

Para o caso de formas quadráticas, o sistema se resume ao próprio polinômio e seu

⁸ Les termes de cette matrice sont des fractions, ayant pour dénominateur commun le déterminant formé avec les termes de la matrice originale; les numérateurs sont les déterminants mineurs formés avec les termes de cette même matrice en supprimant l'une quelconque des lignes et l'une quelconque des colonnes.

discriminante. No caso das formas cúbicas, temos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} U &= (a,b,c,d)(x,y)^3, \\ H &= (ab - b^2, ad - bc, bd - c^2)(x,y)^2, \\ \Phi &= (-a^2d + 3abc - 2b^3, -abd + 2ac^2 - b^2c, acd - 2b^2d + bc^2, ad^2 - 3bcd + 2c^3)(x,y)^3, \\ \square &= -a^2d^2 + 6abcd - 4ac^3 - 4b^3d + 3b^2c^2 \end{aligned}$$

além disso, este sistema se conecta através da relação,

$$\Phi^2 + \square U^2 = -4H^3$$

onde, U é um dado polinômio homogêneo de grau 3, H seu *covariante* quadrático, Φ o *covariante* cúbico e \square o *discriminante* de U. No caso de formas bi quadráticas o sistema é

$$\begin{aligned} U &= (a,b,c,d,e)(x,y)^4, \\ I &= ae - 4bd + 3c^2 \\ H &= (ab - b^2, 2ad - 2bc, ae + 2bd - 3c^2, 2be - 2cd, ce - d^2)(x,y)^4, \\ J &= ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3, \end{aligned}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} -a^2d + 3abc - 2b^3, \\ -a^2e - 2abd + 9ac^2 - 6b^2c, \\ -5abe + 15acd - 10b^2d, \\ 10a^2d - 10b^2e, \\ 5ade + 10bd^2 - 15bce, \\ ae^2 + 2bde - 9c^2e + 6cd^2, \\ be^2 - 3cde + 2d^3 \end{pmatrix} (x,y)^6$$

com a relação que a conecta sendo,

$$JU^3 - IU^2H + 4H^3 = -\Phi^2$$

onde, U é um dado polinômio homogêneo bi quadrático, I e J dois *invariantes* associados a esta forma, H um *covariante* de quarto grau e Φ um *covariante* de grau 6. Com estas fórmulas, entendemos que Cayley apresenta sua agenda de determinar os *invariantes fundamentais* para formas algébricas, de modo que seja possível gerar todos os *invariantes*.

Além das discussões algébricas, esses artigos sobre análise também apresentam uma discussão sobre questões geométricas. No sétimo artigo, o autor divulga contribuições de Sylvester sobre os problemas de contatos de curvas e superfícies, nos quais os determinantes são utilizados como forma de calcular pontos de intersecção e tangência.

Como pode ser visto, as produções dos britânicos publicadas no *Crelle* ao longo das décadas de 1840 e 1850, colocam a *Teoria dos Invariantes* como uma pauta importante, não só no Reino Unido, mas também nos estados alemães. Nesse sentido, os artigos sobre as propriedades elementares dos determinantes de Spottiswoode, publicados no volume 51 do famoso periódico, tem um papel importante para a divulgação das práticas desenvolvidas por Sylvester e companhia.

No artigo "Elementary Theorems relating to Determinants" (SPOTTISWOODE, 1856), publicado em duas partes, o autor faz um levantamento que revela a sequência de contribuições dos britânicos. O autor inicia o texto destacando que o trabalho é consequência de uma revisão de resultados que foram apresentados por ele no volume 42 do *Crelle*, a pedido editor. Ao reler os dois artigos de 1851, percebeu-se que era necessário reescrever toda a obra.

O prefácio mostra que parte dessa necessidade foi, provavelmente, a divulgação da trajetória dos conceitos através das obras que inspiraram o autor. O matemático indica que o interesse pelos determinantes se inicia com a obra de Cramer em 1750 e destaca o papel do teorema de Bézout, o mesmo discutido por Sylvester na década de 1840. Em seguida cita os artigos de Laplace e Vandermonde sobre eliminação. Finalmente, o autor apresenta a obra de Lagrange como última contribuição sobre o assunto no século XVIII. Sobre o século XIX, Spottiswoode ainda discute os teoremas de Binet e Jacobi, além das contribuições de Cauchy e do *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss.

Em 1812 Binet publicou uma memória sobre este assunto, e estabeleceu todos os principais teoremas para os determinantes da segunda, terceira e quarta ordens; e aplicou ainda mais suas fórmulas à discussão de rombóides, superfícies de segunda ordem e propriedades de corpos sólidos. Veja *Journal de l'École Polytechnique* tome IX. cahier 16. O próximo volume desta série contém um artigo de Cauchy, escrito na mesma época, sobre funções que só mudam de sinal quando as variáveis que contêm são transpostas. A segunda parte deste artigo refere-se imediatamente aos determinantes e contém um grande número de teoremas muito gerais.⁹ (SPOTTISWOODE, 1856, p. 211, Tradução Nossa)

⁹In 1812 Binet published a memoir upon this subject, and established all the principal theorems for determinants of the second, third and fourth Orders; and has further applied his formulae to the discussion of rhomboïds, surfaces of the second order, and properties of solid bodies. See *Journal de l'École Polytechnique* tome IX. cahier 16. The next volume of this series contains a paper by Cauchy, written at the same time, on functions which only change sign when the variables which they contain are transposed. The second part of this paper refers immediately to determinants, and contains a large number of very general theorems.

Como pode ser visto, Spottiswoode se propõe a apresentar um levantamento exaustivo das propriedades de determinantes relevantes nas práticas da comunidade. Até o momento, o autor havia apresentado referências que eram utilizadas com frequência por qualquer autor que se dedicava a assuntos com eliminação e, de uma forma mais particular, determinantes. A partir daí, ele tomou a decisão de apresentar trabalhos dos matemáticos contemporâneos e, nesse contexto, divulgou resultados de Cayley e Sylvester como fontes relevantes para a produção da memória.

Entendemos que essa informação é mais uma evidência do processo de consolidação da *Comunidade Britânica dos Invariantes* frente aos matemáticos dos Estados Alemães. Ao afirmar que Sylvester foi responsável pelas principais contribuições subsequentes aos assuntos expostos em seu texto, Spottiswoode traz os trabalhos de seu compatriota para o centro das discussões que envolvem os determinantes. Além da relação com o teorema de Bézout, que representa a influência mútua entre os determinantes e a Teoria de Eliminação, os artigos Sylvester (1850b), Sylvester (1852b) e Sylvester (1852c), citados como inspiração para o autor, caracterizam a relação entre *Teoria dos Invariantes* e os determinantes, aos olhos dos leitores do *Jornal do Crelle*.

Esta Teoria foi desde então estendida pelo Sr. Sylvester em vários artigos na London and Edinburgh Philosophical Magazine para 1851, e todo o assunto foi redefinido e desenvolvido de várias maneiras pelo cavalheiro Sr. Cayley, em uma série de artigos intitulada The Calculus of Forms, e The Theory of Permutants, Commutants etc. no Cambridge and Dublin Mathematical Journal para 1852-1853. ¹⁰ (SPOTTISWOODE, 1856, p. 212, Tradução Nossa)

Nesse parágrafo, percebemos que o autor também destaca a participação de Cayley. É importante observar que os artigos relatados na citação acima são investigações sobre técnicas de geração de *invariantes*. Nesse sentido, podemos afirmar que o autor apresentou o caráter unificador da teoria britânica em relação às temáticas já apresentadas nesta tese, fator que destaca a relevância da matemática que vinha sendo produzida no Reino Unido.

Em 1857, encontramos três trabalhos de Cayley publicados no *Crelle*. O primeiro é uma breve nota sobre o método de eliminação de Bézout, onde ele expõe resultantes de sistemas com equações quadráticas e cúbicas. Os outros dois textos tratam da redução de polinômios homogêneos à sua forma canônica. O texto "Mémoire sur la Forme Canonique des Fonctions Binaires" (CAYLEY, 1857a) se propõe a completar o trabalho de Sylvester, que discute o problema em seus artigos do início dos anos 1850, através da análise de

¹⁰This Theory has been since extended by Mr. Sylvester in several papers in the London and Edinburgh Philosophical Magazine for 1851, and the whole subject remodelled and developed in several ways by that gentleman Mr. Cayley, in a series of articles entitled, The Calculus of Forms, and The Theory of Permutants, Commutants etc. in the Cambridge and Dublin Mathematical Journal for 1852 — 1853.

formas binárias de grau par. Do ponto de vista das práticas, esse artigo não traz grandes novidades, no entanto chama atenção para a série de publicações da *Teoria dos Invariantes* e sua relação com o problema em questão.

Ao longo da pesquisa pelos artigos de matemáticos britânicos, que lidam com polinômios homogêneos e publicados no *Crelle*, percebemos que as iniciativas de divulgação das práticas desenvolvidas no Reino Unido se concentram nas mãos de Cayley e Spottiswoode. Esses dois autores têm em comum a divulgação das técnicas desenvolvidas na obra de Sylvester, que se mostra um importante produtor de conceitos básicos para a *Teoria dos Invariantes*. Esta percepção se torna mais clara através do seguinte gráfico:

Este grafo representa o modo como as ideias circularam entre os textos publicados pelos matemáticos britânicos pertencentes à comunidade investigada nesta tese. Podemos perceber quais foram as ideias mais frequentes nos artigos dos britânicos que selecionamos nesta seção. As cores do grafo representam subgrupos identificados pelas conexões mais próximas, o que facilita a compreensão do modo como os assuntos estão relacionados na rede. No caso da figura 31, o vermelho indica os assuntos que mais se aproximam da produção britânica de conhecimento matemático, o verde indica temas que envolvem interesses comuns entre o Reino Unido e os Estados Alemães e, por fim, o amarelo representa interpretações geométricas de problemas que, como podemos ver, receberam menor atenção dos ingleses nos artigos que analisamos nesta seção.

Dada a organização que apresentamos na rede, podemos observar que a *Teoria dos Invariantes* é assunto predominante dos autores britânicos que surgiram no recorte que adotamos nesta tese. Quando olhamos para a região vermelha do grafo, compreendemos que Cayley e Spottiswoode são os responsáveis pela divulgação de conceitos como *Hyperdeterminantes*, *invariantes fundamentais*, discriminantes, e *covariantes*. Nesse contexto, os polinômios de graus 2, 3 e 4 são os mais utilizados, tanto como exemplos quanto como objeto de estudo. É importante destacar que, apesar de estarem diferenciadas por conta das conexões, as regiões vermelha e verde tratam de alguns assuntos que são correlatos, ou seja, as propriedades dos determinantes de maneira mais específica.

Essa correlação também se torna evidente quando olhamos para os autores que são referências dos textos analisados. Como destaque, apontamos os nomes de Sylvester e Hesse, que são reconhecidos por suas contribuições através de resultados que servem de bases para as discussões que emergem nas publicações que compõem a rede. Como vimos nas reflexões sobre os artigos, o hessiano é objeto chave para o desenvolvimento das propriedades dos *invariantes* e, de modo mais significativo, os artigos de Sylvester, que são citados nesta seleção do *Jornal do Crelle*, são justamente as obras que deram continuidade ao desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes* no Reino Unido.

Por fim, a região amarela apresenta termos que são destinados a propriedades geométricas. Entretanto, podemos notar que os objetos que surgem nas outras duas regiões, mantêm interação com aqueles presentes nesta região. Esse fator evidencia o interesse dos britânicos em problemas geométricos e na divulgação das relações que a Teoria, desenvolvida por eles tem com estes temas. A ligação com as coordenadas homogêneas e com problemas de contato se mostra através das arestas que se conectam a pontos das regiões vermelha e verde. Percebe-se que os problemas geométricos são a porta de entrada para os assuntos que tratam da *Teoria dos Invariantes* no *Jornal do Crelle*, como se pode notar na análise dos trabalhos e na rede de divulgação que construímos. Consequentemente, podemos afirmar que os leitores do jornal alemão terminam o período entre 1837 e 1865

percebendo a teoria britânica como central na matemática produzida no Reino Unido e, como consequência, Sylvester e Cayley se tornaram símbolos da comunidade de pesquisa na área que se formaria na década de 1860.

6.3.2 A Comunidade britânica dos Invariantes nos jornais franceses

No caso dos periódicos franceses, o primeiro trabalho britânico também foi publicado por Cayley em 1845, ano no qual ele publicou a nota sobre um *invariante* associado a uma forma cúbica no *Crelle* e no qual lança sua agenda de busca pelas formas inalteradas após transformações lineares. O artigo "Nouvelles Remarques sur les Courbes du Troisième Ordre" (CAYLEY, 1845d) trouxe uma discussão geométrica para a abordagem do tema. Essa percepção se confirma logo no início do texto, quando o autor informa que trata de consequências de outro artigo, publicado no volume anterior do Jornal, no qual ele discute problemas ligados à geometria descritiva.

No artigo do volume 10, o autor se dedica a uma abordagem analítica dos teoremas, através das coordenadas homogêneas. Esse é o primeiro momento em que encontramos a utilização desse tipo de coordenada nos jornais franceses. A relação com a geometria descritiva indica a proximidade do tema como a *Teoria dos Invariantes* que estava surgindo no horizonte de Cayley no mesmo ano.

Encontramos, na Teoria das curvas algébricas de M. Plücker, pesquisas muito finas sobre o número de diferentes singularidades (pontos de inflexão, tangentes duplas, etc.) de curvas planas. Os mesmos princípios podem ser aplicados ao caso de curvas tridimensionais.¹¹ (CAYLEY, 1845a, p. 245, Tradução Nossa)

Nesse trecho observamos que Cayley começava suas pesquisas sobre a obra de Plücker, fator que é um dos motivos por seu interesse no trabalho produzido por Boole em 1841, uma vez que a abordagem do matemático alemão trata os problemas apresentados na citação conceitos geométricos através de polinômios homogêneos e suas transformações. No ano seguinte, essa conexão é compartilhada com Sylvester, que se engaja na pesquisa sobre os contatos a partir de 1850.

Destacamos ainda que essa abordagem é retomada pelo matemático britânico em 1849 em um artigo que utiliza mudança de variáveis para determinar retas tangentes. Tal trabalho, que tem continuação no volume de 1850, se concentra mais na resolução de problemas que são conhecidos dos leitores do jornal, por meio das novas coordenadas. É

¹¹On trouve, dans la Théorie des courbes algébriques de M. Plücker, de très-belles recherches sur le nombre des différentes singularités (points d'inflexion, tangentes doubles, etc.) des courbes planes. Les mêmes principes peuvent s'appliquer au cas des courbes à trois dimensions.

interessante observar que, um ano antes, Orly Terquem também publica textos em seu jornal, Terquem (1848) e Terquem (1849), onde discute as características das coordenadas homogêneas, como poderemos observar na próxima seção. Nesse contexto, percebemos que Cayley busca se estabelecer como um pesquisador que trata de assuntos recentes na pauta dos periódicos franceses, diferentemente do trabalho de divulgação que ele realiza no *Crelle*.

Em 1858, após o desenvolvimento das práticas dos *invariantes*, Salmon publica um artigo com problemas geométricos a respeito de cônicas projetivas. Em "Sur la Théorie de Deux Coniques" (SALMON, 1858b), o autor faz referência à abordagem de coordenadas homogêneas e, inicialmente, se propõe a lidar com o seguinte problema: encontrar a equação das retas que passam pelas intersecções de duas cônicas dadas. Como solução, se constrói o feixe de cônicas $U + \lambda U_1$, onde U e U_1 são polinômios homogêneos de grau 2 e $\lambda \in \mathbb{R}$, como forma de determinar as retas. Destacamos que esta técnica é idêntica à utilizada por Sylvester em seu artigo de 1850.

Ainda nesse trabalho, Salmon destaca o papel dos *invariantes* na solução do problema das cônicas. Ao identificar os coeficientes da equação cúbica gerada a partir do determinante do feixe de cônicas, o autor percebe que eles não se alteram após transformações lineares dos polinômios dados. Dessa forma, é sempre possível mudar os eixos de referência sem perder as características das retas. Esse artigo trata de outros problemas nos quais a aplicabilidade da *Teoria dos Invariantes* também se revela.

Agora devemos observar que \mathcal{F} é uma covariante ... das cônicas U_1, U_2 Mas como \mathcal{F} (a cônica que passa pelos oito pontos de contato das tangentes comuns de U_1 e U_2) é única, é necessário (quaisquer que sejam os eixos) que encontremos uma equação que represente sempre a mesma curva.¹² (SALMON, 1858b, p. 94, Tradução Nossa)

Esse trecho trata do problema de determinar a equação de uma cônica que passa por pontos específicos relacionados a duas cônicas. O interessante desse exemplo é o modo como Salmon conecta a *Teoria dos Invariantes* ao problema, o que nos mostra a percepção de aplicabilidade das práticas que foram desenvolvidas em solo britânico. Podemos afirmar que esse artigo teve a função de consolidar uma divulgação que já vinha ocorrendo na França.

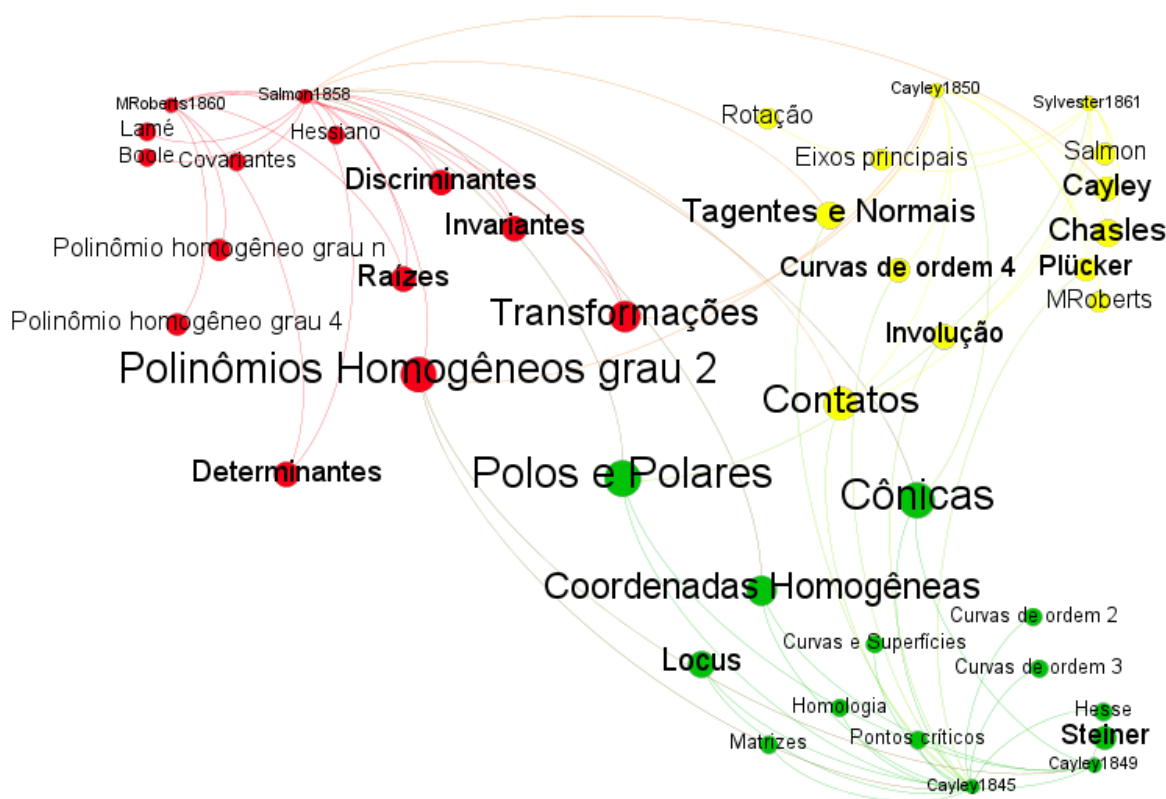
Como já foi apresentado nesta tese, a divulgação dos *invariantes* na França ocorreu através da obra de Hermite, além dos contatos que Sylvester estabeleceu com a comunidade

¹²Maintenant il faut observer que \mathcal{F} est un covariant ... des coniques U_1, U_2 Mais parce que \mathcal{F} (la conique qui passe par les huit points de contact des tangentes communes de U_1 et U_2) est unique, il faut (quels que soient les axes) que nous trouvions une équation qui représente toujours la même courbe.

matemática daquele país. Entretanto, outras fontes confirmam a disseminação da Teoria britânica. Esse é o caso do artigo "Sur quelques Questions d'Algèbre"(ROBERTS, 1860). De maneira semelhante ao que ele fez no QJPAM, o autor expõe uma lista de *invariantes* de 2º, 3º e 4º graus.

A participação da *Comunidade britânica dos Invariantes* contribui para o desenvolvimento, junto ao continente, da credibilidade da *Comunidade Britânica dos Invariantes*. Tanto a divulgação nos Estados Alemães quanto e na França trazem as discussões sobre transformações como parte importante das investigações conduzidas pelos britânicos nas páginas dos jornais. Além disso, a utilização dos polinômios homogêneos de grau 2 também faz parte das práticas que os matemáticos do Reino Unido apresentam no continente. Esse fato se torna mais evidente quando olhamos para a distribuição dos conceitos, e suas conexões, organizados em rede.

Figura 32 – A *Comunidade Britânica dos Invariantes* nos jornais franceses



Fonte – Elaborada pelo Autor

A primeira impressão dessa rede, revela um volume menor de conexões em relação à rede das contribuições britânicas no *Jornal do Crelle*. Esse fator é um indício de que a divulgação das práticas sobre os *invariantes* pode ter ocorrido por outros meios que não só os periódicos especializados do país. De fato, quando olhamos para a trajetória de Sylvester como exemplo, percebemos que sua conduta se concentrou mais nas correspondências para

levar suas ideias aos matemáticos franceses. Como podemos ver na figura acima, este autor surge em publicações que se relacionam com problemas geométricos, porém suas contribuições para os *invariantes* não aparecem no recorte analisado.

Quando olhamos para as regiões destacadas pelo volume de interações, podemos perceber o modo como as ideias britânicas foram disseminadas nas páginas dos jornais franceses. Na figura 32, a região vermelha destaca as práticas e os interesses que surgem originalmente no Reino Unido, a região verde evidencia práticas relacionadas à descrição de curvas e superfícies e a amarela mostra conceitos relacionados aos problemas de contatos.

Como dissemos, os polinômios homogêneos de grau 2 se destacam na rede. Também encontramos menções às práticas sobre os *invariantes*, cônicas, geometria em coordenadas homogêneas e tangentes e normais. Além destes termos, o trabalho de Plücker e o de Cayley ganham destaque nas citações. Essas características do grafo nos mostram que a *Teoria dos Invariantes* foi apresentada como uma abordagem para problemas de geometria, tanto no *Jornal de Liouville* quanto nos *Nouvelles Annales*. Diferente do que foi apresentado no *Jornal do Crelle*, onde a relação com a Teoria britânica se deu através de propriedades algébricas dos polinômios em geral, a maior ênfase nas formas quadráticas revela que as cônicas projetivas serviram, nos periódicos franceses, como porta de entrada para as ideias que surgiram no Reino Unido. Esse aspecto está diretamente ligado ao trabalho desenvolvido por Sylvester no início dos anos 1850 e, como veremos nas próximas seções, à luz que Terquem jogou sobre a obra de Plücker no final da década de 1840.

Outras práticas que se destacam na rede, como as involuções e as rotações, exibem pouca aderência dentro dos subgrupos de interação, o que indica um interesse secundário dos autores. O mesmo acontece com as matrizes e os polinômios de graus diferentes de 2. Esses temas de menor interesse indicam uma tendência de expansão das ideias centrais da rede. Uma maneira de compreender os caminhos que foram seguidos por estas expressões é observar as práticas que circularam nos textos de repercussão dos matemáticos não britânicos.

6.4 A repercussão nos jornais franceses: Os casos do *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* e do *Nouvelles Annales des Mathématiques*

Além de uma análise semelhante àquelas que foram apresentadas anteriormente nesta tese, o objetivo desta seção é identificar as conexões que surgem entre os artigos publicados nos jornais do continente e os publicados no Reino Unido. As reflexões sobre os próximos artigos se concentram nas influências mútuas com os textos dos jornais de

Cambridge e seus contemporâneos britânicos. Organizamos as análises por jornais e temáticas indicadas no capítulo anterior.

6.4.1 O *Jornal de Liouville*

O *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* teve seu primeiro volume publicado em 1836. No entanto, sua necessidade foi manifestada no final de 1831, quando os tradicionais *Annales des Mathématiques Pures et Appliquées* e *Bulletin des Sciences Mathématiques, Astronomiques, Physiques et Chimiques*, mais conhecidos como "Annales de Gergonne" e "Bulletin du Baron de Ferussac" começaram a perder alcance. Durante o período de interesse desta tese, o jornal contou com 30 volumes, cada um com 12 fascículos com aproximadamente 36 páginas.

Encontramos 64 artigos que lidam com os temas que surgem ao longo da evolução da *Comunidade Britânica dos Invariantes*. O editor do jornal, Liouville é o personagem com o maior número de publicações no jornal, sendo 13 no total. Após a organização destes textos nas temáticas estudadas, observamos que os trabalhos sobre rotação são maioria no jornal (27 publicações), seguido dos artigos que lidam com transformações e locus de curvas algébricas (17 e 14 publicações, respectivamente), restando apenas seis itens para os outros temas.

Ao tratar da Teoria de Eliminação, encontramos dois artigos publicados no *Jornal*. O primeiro é publicado em 1841 pelo próprio Liouville e o segundo é uma resposta de Sturm ao trabalho que Sylvester desenvolvia na época. O texto do editor do jornal é uma extensa memória sobre diferentes técnicas de eliminação. Sobre as práticas que circularam no Reino Unido, encontramos o uso do hessiano como método para determinar o resultante de um sistema de equações. Entretanto, não identificamos mais conexões com o que foi produzido pelos britânicos acerca da temática.

Diferentemente, o texto de Sturm trata diretamente da obra de Sylvester. Como apresentamos no capítulo 3, o matemático inglês é responsável por uma mudança de perspectiva, quando propõe uma abordagem essencialmente algébrica (SYLVESTER, 1839). A partir disso, o artigo "Démonstration d'un Théorème d'algèbre de M. Sylvester" (STURM, 1842) constrói uma demonstração para os resultados enunciados no texto do britânico. É interessante observar que o interesse despertado pelo *Método Dialítico* diz respeito à busca pelas raízes de um polinômio de grau n . O tratamento de natureza algébrica desta temática, utilizado no Reino Unido, tem entrada na matemática francesa através de outros temas.

O tratamento analítico de problemas geométricos era muito comum nas páginas do *Jornal de Liouville*. Em 1847, o editor do periódico apresenta uma abordagem analítica

da memória de Gauss "Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas"(GAUSS, 1828). Neste texto, o autor utiliza coordenadas retangulares e diferenciais como forma de lidar com os pontos singulares das superfícies (intersecção, tangentes e inflexão). A perspectiva só se modifica no jornal a partir de 1851.

Aluno da École Nationale de Ingénieur des Ponts et Chaussées, Henri-Émile Bazin (1829-1917) publicou no jornal o artigo "Sur la Théorie de la Composition des Formes Quadratiques"(BAZIN, 1851). Do *corpus* que selecionamos para esta tese, este é o primeiro que lida com formas algébricas de maneira semelhante à abordagem britânica. Como veremos ao longo da análise dos textos que surgiram no *Nouvelles Annales*, Terquem traz a abordagem das coordenadas homogêneas para a França em 1849. Além disso, Cayley é outro personagem que apresenta contribuições sobre esta temática na década de 1840, como vimos na seção sobre os matemáticos do Reino Unido no continente.

Em seu texto, Bazin busca apresentar uma forma mais simples de interpretar a composição de formas quadráticas descrita no *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss. O ponto central desta prática trata dos determinantes criados a partir dos coeficientes das transformações aplicadas às formas quadráticas, o que o leva à relação que Boole encontra em seu texto de 1841. Esse é o primeiro trabalho que apresenta uma abordagem algébrica dos problemas geométricos, na mesma linha que Sylvester defendeu em 1849 e disseminou a partir da década de 1850.

Entretanto, essa característica não apresentou grande disseminação nas investigações sobre locus de curvas e superfícies no *Journal de Liouville*. É fato que existiram autores com problemas que se assemelham aos problemas de interesse dos britânicos. Este é o caso do artigo "Mémoire sur les Courbes et les Surfaces Algébriques"(STEINER, 1855), uma tradução de Steiner, que investiga a relação entre o número de normais que podem ser traçadas por um ponto de uma superfície dada a sua classe. Os trabalhos de Jonquières sobre curvas de quarta ordem, polos e polares, também são exemplos de abordagens analíticas dos temas que são de interesse dos matemáticos da comunidade do Reino Unido.

Apesar da Teoria de Eliminação ter representado uma porta de entrada para as práticas da comunidade, as temáticas os locus de curvas algébricas e problemas de contatos não causaram a mesma repercussão, mesmo tendo tratado de assuntos semelhantes aos interesses franceses. Esse cenário foi diferente quando o assunto foram as transformações lineares. Em 1851, Bazin publica um artigo sobre determinantes com uma notação próxima à que foi descrita por Sylvester um ano antes nos jornais britânicos.

O trabalho do matemático britânico com os determinantes começou a ganhar repercussão explícita no *Journal de Liouville* por intermédio de Faa di Bruno que, um ano

após o texto de Bazin, apresenta o teorema de Sylvester sobre decomposição do produto de determinantes em soma de dois produtos compostos de colunas de dois determinantes dados. Além disso, o autor segue sua repercussão das práticas do Reino Unido ao tratar da redução de polinômios homogêneos a sua forma canônica.

Este assunto foi abordado recentemente pelo Sr. Sylvester, um geômetra inglês muito profundo, que gentilmente me comunicou o resultado obtido por ele nas funções do quinto grau, mas sem me dar a prova...

Ao chamar, de acordo com a denominação do Sr. Hermite e do Sr. Sylvester, forma canônica uma das duas formas que acabei de escrever, o enunciado do teorema é este: ¹³ (BRUNO, 1852, p. 193, Tradução Nossa)

Nesses trechos, percebemos que o próprio Sylvester apresentou seus resultados ao matemático italiano. É importante lembrar que este é o mesmo período no qual o inglês estava divulgando os artigos sobre o cálculo das formas e trabalhando no vocabulário que ele publicaria em 1853. Além disso, a relação com Hermite nos mostra efeitos da aproximação que se construía através do interesse pelas propriedades e consequências das transformações lineares em polinômios homogêneos.

Di Bruno apresenta uma demonstração sobre a transformação que reduz um polinômio homogêneo de grau ímpar à sua forma canônica. A solução utiliza determinantes constituídos por combinações lineares dos coeficientes da forma algébrica e sua transformação. Essa discussão sobre as formas canônicas volta a ser assunto no jornal através da publicação da correspondência entre Eisenstein e Hermite.

Em 1854, Bazin retoma a investigação sobre a composição de formas quadráticas quaternárias. A ideia do artigo é analisar uma transformação construída a partir do produto de dois polinômios. O autor afirma que uma forma algébrica de grau 2 em quatro variáveis é decomponível caso ela seja produto de duas outras, com os coeficientes sendo funções lineares dos produtos dos coeficientes dos fatores do produto.

No mesmo jornal, Brioschi apresenta uma contribuição para o problema das transformações para reduzir um polinômio a sua forma canônica. Nesse texto, que contou com uma breve nota de Faa de Bruno no mesmo periódico, encontramos referência aos determinantes simétricos que Cayley havia descrito no *Jornal do Crelle*. Em particular, o autor lida com o problema da diagonalização da matriz:

¹³Ce sujet a été abordé dernièrement par M. Sylvester, géomètre anglais très-profond, qui a bien voulu me communiquer le résultat obtenu par lui sur les fonctions du cinquième degré, mais sans m'en donner la démonstration.

En appelant, suivant la dénomination de M. Hermite et de M Sylvester, forme canonique l'une des deux formes que je viens d'écrire, l'énoncé du théorème est celui-ci :

A equação

$$\begin{vmatrix} C_{1,1} - \lambda & C_{1,2} & \dots & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} - \lambda & \dots & C_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n,1} & C_{n,2} & \dots & C_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

tem, quando n é ímpar, uma raiz igual à unidade e a outra n - 1 imaginária e recíproca aos pares; quando n é par, as raízes são todas imaginárias e recíprocas dois a dois. ¹⁴ (BRIOSCHI, 1854, p. 253, Tradução Nossa)

O resultado acima discute a natureza das raízes da equação característica de um polinômio homogêneo. Nesse contexto, percebemos que existe uma ligação com o texto de 1852 de Sylvester, com o acréscimo de que a redução vale para outros graus. Outra semelhança importante é o fato de que os dois artigos, tanto do inglês quanto no italiano, tratam de um problema que não se inclui, inicialmente, em uma discussão científica. Outra conexão se encontra através do elo com artigos de Hermite, uma vez que Brioschi utiliza resultados sobre redução de polinômios, publicados pelo francês após os contatos com Cayley e Sylvester em 1854.

Uma menção direta à *Teoria dos Invariantes* surge no volume 20 do *Jornal de Liouville*. No artigo "Sur divers points de la theorie des invariants"(COMBESURE, 1855), Edouard Combescure (1824-1889) inicia com a proposta de determinar *invariantes* através de um processo mais simples. A diferença se encontra no tratamento dos coeficientes do polinômio homogêneo e de suas diferenciais, analisadas individualmente, em contraponto ao tratamento de equações de coexistências e determinantes proposto pelos britânicos. Olhando para o texto de Combescure, encontramos a seguinte notação para o polinômio:

$$\sum \frac{\prod(n)}{\prod(\lambda) \prod(\mu) \dots \prod(\rho)} a_{\lambda,\mu,\dots,\rho} x^\lambda y^\mu \dots u^\rho$$

onde $\prod(\lambda)$ é o produto $1.2.\dots.\lambda$, $a_{\lambda,\mu,\dots,\rho}$ representa os coeficientes do polinômio e o somatório se refere a todas as parcelas. Esta expressão representa uma forma algébrica de grau $\lambda + \mu + \dots + \rho = n$. Com esta notação, o autor analisa a forma geral da diferencial do

¹⁴L'équation

$$\begin{vmatrix} C_{1,1} - \lambda & C_{1,2} & \dots & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} - \lambda & \dots & C_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n,1} & C_{n,2} & \dots & C_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

a, lorsque n est impair, une racine égale à l'unité et les n - 1 autres imaginaires et deux à deux réciproques; lorsque n est pair les racines sont toutes imaginaires et deux à deux réciproques.

coeficiente após a substituição das variáveis por $y + \varepsilon x$

$$\frac{da'_{\lambda\dots\rho}}{d\varepsilon} = \lambda a'_{\lambda-1,\mu+1,\dots,\rho}$$

a partir disso, o autor estabelece a condição para que este coeficiente não se altere, o que se equivale com a eliminação de ε desta expressão. As formas associadas que não se alteram após uma transformação linear se revelam com a seguinte fórmula:

$$\sum \lambda a_{\lambda-1,\mu+1,\dots,\rho} \frac{d\varphi}{da_{\lambda\dots\rho}} = 0$$

onde φ é função dos coeficientes do polinômio original, ou seja, o invariante descrito pelos britânicos. A abordagem de Combescure se diferencia por construir as diferenciais em relação à constante acrescida na substituição das variáveis, em contraponto às diferenciais em relação às variáveis do polinômio, como é o caso dos britânicos.

O Sr. Sylvester, cujo método erra, parece-me, o tipo geral de equações diferenciais em questão, adverte que basta tomar um número p dessas equações igual ao número de variáveis x, y, \dots, u , e a escolha não é arbitrária.¹⁵ (COMBESCURE, 1855, p. 339, Tradução Nossa)

Como pode ser visto, o autor entendia que a geração de *invariantes* era feita através de um método aleatório por parte dos britânicos. Assim, a principal crítica de Combescure à *Teoria dos Invariantes* está relacionada ao que ficou conhecido como teoria dos *syzygies* (PARSHALL, 2006b). Com isso, ele passa a analisar os *invariantes* relacionados às formas quadráticas com base em resultados enunciados por Sylvester e Cayley.

Em particular, utilizou o teorema que afirma que as funções simétricas são formadas pela diferença das raízes da função $f(x,1) = 0$. Daí, o autor apresenta um resultado importante dando as condições necessárias e suficientes para que uma função simétrica seja um *invariantes*: "Ser redutível a uma função homogênea da diferença das raízes"(COMBESCURE, 1855, p. 351). Entendemos que esse artigo marca um ponto importante na disseminação da produção de conhecimentos matemáticos da comunidade britânica de práticas que se formou no entorno dos interesses dos personagens que já mostramos no capítulo anterior.

Os anos de 1856 e 1857 não trouxeram novas contribuições como no caso de Combescure. Mesmo assim, encontramos três publicações de Dirichlet que tratam de analisar formas quadráticas com determinante positivo. Nesses artigos encontramos referências ao trabalho de Gauss e uma discussão sobre um polinômio de grau dois como

¹⁵M Sylvester, dont la méthode laisse échapper, ce me semle, le type général des équations différentielles dont il s'agit, avertit qu'il suffit de prendre un nombre p de ces équations égal au nombre des variables x, y, \dots, u , et que le choix n'est pas arbitraire.

forma de analisar a natureza das raízes de acordo com a invariabilidade do *discriminante*. Os artigos que lidaram diretamente com a *Teoria dos Invariantes* voltaram à cena no volume 23 do jornal.

Um ano após suas publicações no primeiro volume do QJPAM, Hermite apresenta reflexões sobre os polinômios homogêneos de ordem três da forma: $U = x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz$. Nesse contexto, apresenta os *invariantes*, *contravariantes* e as relações entre estas formas associadas. Nesse texto, também encontramos conexões com outros personagens que trataram do assunto.

É de fato o que esse sábio geômetra destacou ao fornecer nas Tabelas que encerram seu terceiro livro de memórias sobre os *quantics* as expressões completamente desenvolvidas desses quatro *quantics*. Ao procurar investigar a natureza dessas expressões, cheguei a um resultado interessante, não só porque mostra seu verdadeiro caráter, mas porque dá um novo exemplo dessa estreita conexão entre as formas cúbicas. , que M. Hesse e M. Aronhold foram os primeiros a apontar em suas belas pesquisas. ¹⁶ (HERMITE, 1858, p. 38, Tradução Nossa)

Cayley é o geômetra a quem Hermite se refere neste trecho. Ao evocar a terceira memória sobre os *quantics*, o autor apresenta as bases de suas reflexões sobre os *invariantes*. É nesse contexto que ele divulga, nesse jornal, os *invariantes fundamentais* de Hesse e Aronhold e suas combinações. Além disso, o vocabulário disseminado por Sylvester em 1853 teve uma aparição importante nesse periódico. Outra conexão com a obra do matemático inglês, surge no mesmo ano através do texto "Sur un Certain Système d'Équations linéaires"(PAINVIN, 1858c). Apesar de não apresentar uma relação direta com os métodos das equações de coexistência, é possível identificar o mesmo estilo de organização nos determinantes.

O interesse pelo tratamento que Sylvester deu à Teoria de Eliminação volta à pauta do *Jornal de Liouville* em 1860 quando o artigo "Note sur un Théorème de M Sylvester Relatif a la Transformation du Produit de Déterminants du Même Ordre"(SPERLING, 1860) retoma a discussão iniciada em Bruno (1852) sobre o teorema publicado em (SYLVESTER, 1851b).

A análise dos artigos que trataram de transformações nesse jornal nos revela a influência que a matemática britânica exerceu sobre a matemática francesa através desse

¹⁶C'est effectivement ce que ce savant géomètre a mis en évidence en donnant dans les Tables qui terminent son troisième Mémoire sur les *quantics* les expressions complètement développées de ces quatre *quantics*. En cherchant à approfondir la nature de ces expressions, j'ai été conduit à un résultat intéressant, non-seulement parce qu'il en montre le véritable caractère, mais parce qu'il donne un nouvel exemple de cette étroite connexion entre les formes cubiques à trois indéterminées et les formes biquadratiques binaires, que M. Hesse et M. Aronhold ont les premiers signalés dans leurs belles recherches.

meio de comunicação. O trabalho de base que Sylvester realizou com os determinantes no início dos anos 1850 ganha repercussão entre os autores, como é o caso de Bazin e Faa di Bruno. Ao mesmo tempo, o inglês divulgava seu trabalho com os *invariantes* e Cayley ganhava espaço por conta das memórias sobre os *quantics*. É nesse contexto que as ideias sobre transformações que vêm do Reino Unido ocupam as páginas do *Jornal de Liouville*.

Outro aspecto interessante dos artigos sobre transformações é a busca pela redução dos polinômios. Quando olhamos especificamente para este problema, encontramos trabalhos como o de Lebesgue (1837), que afirma que o problema era bastante conhecido por vários matemáticos. Em particular, o trabalho de Cauchy revela a associação com a teoria dos determinantes, fator que influenciaria os textos de Sylvester que são reverberados por outros autores do *Jornal de Liouville*. Nesse sentido, Lebesgue se dedica a investigar propriedades de determinantes, de maneira geral e, em particular, o caso da equação gerada pelo processo de diagonalização da matriz associada (em termos modernos) ao polinômio inicial.

A segunda parte do artigo se dedica a aplicações da equação. Como primeiro caso, o autor apresenta o problema de determinação dos eixos de rotação de um corpo sólido. Nesse contexto, ele mostra que a equação em questão representa uma combinação dos momentos de inércia e identifica os eixos ao ser reduzida à soma de quadrados positivos e negativos.

Já o segundo problema lida com a seguinte questão: "Encontre a atração que um planeta exerceria sobre um ponto material, se a massa desse planeta fosse distribuída pelas partes de sua órbita, na proporção do tempo que leva para percorrê-las?"¹⁷ (LEBESGUE, 1837, p. 360), o que conecta o texto de Lebesgue às discussões sobre os movimentos dos planetas que corria o continente nesse período.

Em 1856, Lebesgue apresenta uma nova contribuição sobre a temática. Desta vez, ele trata o problema através de um processo de completar quadrados, o que revela os discriminantes ligados às formas algébricas e o modo como os determinantes participam destas reduções. Como referências desse trabalho, os textos de Hermite sobre formas ternárias são a principal inspiração. Esse fator nos permite conectar este artigo com a produção de Sylvester sobre esta temática.

Ainda é importante ressaltar que o *Jornal de Liouville* contou com 26 artigos que tratam de movimentos de rotação e dos movimentos dos planetas. Como veremos na seção 6.4, a maior parte desses textos lida diretamente com o problema das desigualdades seculares e da equação ligada ao problema. Destacamos o trabalho de Poincaré, uma referência

¹⁷Trouver l'attraction qu'exercerait une planète sur un point matériel, si la masse de cette planète était distribuée sur les parties de son orbite, en raison du temps qu'elle met à les parcourir?

importante dos artigos sobre rotação publicados por Sylvester. Em suas publicações no jornal, o autor francês apresenta uma descrição geométrica dos movimentos de rotação através de composições em volta dos eixos principais.

Como vimos no capítulo 3, Poinot apresenta um modelo que substitui o objeto em movimento de rotação por um elipsoide. Como pode ser visto, o polinômio H indica os momentos principais de inércia e, como consequência, os eixos de direção do objeto que representa o movimento de rotação. Essa prática é retomada por Sylvester no final dos anos 1850 em conexão com sua Lei de Inércia para formas quadráticas, que garante a invariância dos coeficientes de um polinômio reduzido à soma de quadrados positivos ou negativos.

Entendemos que as relações estabelecidas entre os britânicos e os autores do *Jornal de Liouville* no período de 1837 a 1865 ocorreu através da busca pela determinação dos eixos principais de inércia, como exposto por Poinot. Com isso, notamos que a principal influência da matemática produzida no Reino Unido vem da temática de transformações, uma vez que traz o maior volume de referências dos autores daquela comunidade. Esse cenário se repete no outro periódico de grande circulação, como veremos na próxima seção.

6.4.2 O Jornal de Terquem

Fundado em 1842 por Orly Terquem e Camille-Christophe gerono, o *Nouvelles Annales de mathématiques: Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale* é um periódico com enfoque em artigos direcionados ao ensino de forma semelhante ao CMJ. Assim, é possível afirmar que o campo matemático francês se dividia em produções que se destinavam exclusivamente ao progresso da ciência, como é o caso do *Jornal de Liouville*, e produções que eram orientadas para a educação “elementar”, como é o caso do jornal de Terquem (VERDIER, 2009).

Dado esse contexto, as análises dos artigos publicados no periódico contam com o componente de divulgação das práticas, em contraponto aos textos do *Jornal de Liouville* que apresentam mais uma característica de recepção de ideias. Mais uma vez conduziremos as reflexões através das temáticas que emergiram da comunidade britânica de práticas matemáticas. Encontramos apenas um artigo que se adequa à Teoria de Eliminação, o "Note sur l'Élimination"(RICHELOT, 1850), o qual trata do método desenvolvido por Sylvester na década anterior.

Outra aproximação com a matemática que era produzida no Reino Unido ocorre em um artigo publicado pelo próprio Terquem em 1848, que se encaixa na temática dos Locus de curvas e superfícies algébricas. O texto "Méthode des Homogènes"(TERQUEM, 1848) se dedica a apresentar as coordenadas homogêneas de Plücker aos leitores do jornal.

Juntamente à descrição do método, o autor lista alguns problemas geométricos que se resolvem nas circunstâncias expostas no texto.

Os problemas em questão são referentes à determinação de equações de retas nas seguintes condições: dados dois pontos no plano, determinar a equação do plano que passa por três pontos dados; lembrando que o plano representa uma reta projetiva; dados uma curva e um ponto, determinar a tangente. Além disso, o autor também apresenta um problema de contato de duas curvas dadas.

Em 1844, M. Finck chamou a atenção dos professores franceses para esta maneira de representar curvas por funções de fatores lineares, da qual M. Plücker extraiu especialmente conclusões tão frutíferas (ver *Nouv. Annales*, t. III, p. 147). As obras do famoso professor de Bonn merecem em todos os aspectos as honras de tradução; útil para a ciência, mas não útil para os exames, quem compraria esta tradução? ¹⁸ (TERQUEM, 1848, p. 9, Tradução Nossa)

Como pode ser visto nesse trecho, Terquem reconhece a prioridade do artigo publicado por Fink, que traz a obra de Plücker para os franceses. Apesar disso, o artigo de 1844 não apresenta o método das coordenadas homogêneas, fator que despertou o interesse dos britânicos na mesma época. Em particular, Cayley e Sylvester iniciam seus estudos sobre a obra do matemático alemão.

Terquem ainda apresenta três outros artigos no mesmo volume do *Nouvelles Annales*. Dois deles tratam do problema de determinar os recíprocos polares a curvas dadas. Como no texto que descreve as coordenadas homogêneas, o autor se concentra em problemas específicos sobre o assunto. As demonstrações são apresentadas sob uma perspectiva e sintética e outra analítica, de modo que é possível compreender as equivalências entre as duas abordagens. Nesse contexto, descreve-se a curva através de uma equação homogênea em três variáveis.

Entre os problemas expostos nos dois primeiros artigos de 1848, encontramos investigações sobre curvas de terceira ordem. A opção por destacar este tipo de curva ocorre por conta da conexão direta com as ideias publicadas em Cayley (1845e) que, como apresentamos no capítulo anterior, apresentam condições para determinar o recíproco de curvas dessa natureza.

¹⁸En 1844, M. Finck a attiré l'attention des professeurs français sur cette manière de représenter les courbes par des fonctions de facteurs linéaires, dont M. Plücker surtout a tiré de si fécondes conséquences (voir *Nouv. Annales*, t. III, p. 147). Les ouvrages du célèbre professeur de Bonn méritent à tous égards les honneurs de la traduction; utile à la science, mais ne servant pas aux examens, qui achèterait cette traduction?

Entendemos que Terquem publica os artigos de 1848 com a intenção divulgar práticas úteis para problemas que já se encontravam em solo francês. Nesse contexto, a matemática que emergia no Reino Unido é apresentada aos leitores dos *Nouvelles Annales*. É importante ressaltar uma diferença em relação ao *Jornal de Liouville*, devido a sua característica ligada à produção de pesquisa original. É fato que as práticas britânicas chegam à França em 1845 pelas mãos do próprio Cayley, no entanto, os textos de Terquem se dedicam a uma exposição do modo como os métodos funcionam, fator que se adequa melhor ao periódico de sua editoria. Com isso, entendemos que esse é o momento em que as discussões da comunidade britânica passam a ser reconhecidas pelos franceses. Um ano após estas publicações, Lebesgue classifica o método das coordenadas homogêneas como teoria analítica dos polares recíprocos, o que evidencia uma percepção geométrica do tema.

A divulgação de métodos segue através das Terquem no artigo "Propriétés générales des courbes algébriques planes" (TERQUEM, 1850a). Entre os diversos resultados, os trabalhos sobre tangentes conduzidos por Cayley e Joachimsthal merecem um breve destaque no texto. Além disso, o fato de o *Nouvelles Annales* tratar de problemas ligados ao ensino de matemática revela, ao longo do tempo, cada vez mais problemas com abordagem das coordenadas homogêneas, ou na descrição ou na demonstração. Nesse sentido, alguns artigos são aceitos no jornal, com a finalidade de descrever práticas e suas aplicações. Esse é caso do texto "Courbes Planes; Génération" (NAM, 1853)¹⁹, publicado por autor anônimo, que trata de pontos de singulares de curvas algébricas. Outro exemplo é a breve nota sobre o recíproco polar de uma cônica e superfícies de segundo grau. Nesse texto, publicado já em 1857, o autor apresenta a equação de um recíproco polar de uma cônica da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{d\phi}{dx_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \frac{d\phi}{dx_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \frac{d\phi}{dx_3} \\ \frac{d\phi}{dx_1} & \frac{d\phi}{dx_2} & \frac{d\phi}{dx_3} & 0 \end{vmatrix}$$

As propriedades sobre determinantes que servem de referência para esse texto vêm da obra de Brioschi, outro autor que se dedica a apresentar a relação que existe entre os determinantes, em particular o hessiano, e os pontos notáveis das curvas algébricas e seus recíprocos. Em seu artigo, publicado em 1854, encontramos afirmações sobre a nulidade dos determinantes associados aos polinômios homogêneos que identificam pontos de intersecção e inflexão, com referências ao livro-texto de Salmon *A Treatise on the Higher*

¹⁹Optamos por identificar os artigos sem assinatura de desse periódico por NAM, sigla que representa o *Nouvelles Annales des Mathématiques*.

Plane Curves (SALMON, 1852).

O próprio Hesse divulgou suas práticas no *Nouvelles Annales* de 1855. Trata-se de uma versão do artigo publicado no *Crelle* três anos antes. No texto, o autor investiga propriedades de cônicas através de seus determinantes. Destacamos o problema sobre as intersecções de duas cônicas, uma vez que a técnica utilizada é semelhante ao que é realizado em Sylvester (1850d), o que mostra a circulação do conceito entre os três países.

Em 1856, encontramos uma primeira utilização dos *invariantes* no jornal. Um ano após a publicação do artigo de Combescure no *Journal de Liouville*, o texto "Notes sur quelques Questions du Programme Officiel"²⁰ (GERONO, 1856) apresenta o *discriminante* de formas quadráticas em 3 variáveis: $AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$, o qual é formado pelos coeficientes de um polinômio homogêneo geral. Além disso, é evidenciado o problema de redução para somas de quadrados positivos ou negativos

A transformação em questão aqui oferece apenas uma aplicação particular de uma teoria muito notável que se deve a M. Hermite. As proposições elementares desta teoria foram expostas na última edição do Programa que publiquei com M. Roguet.²¹ (GERONO, 1856, p. 326, Tradução Nossa)

Como pode ser visto, o autor reconhece o trabalho de Hermite a respeito das transformações e de suas propriedades invariantes, porém não apresenta menções ao trabalho dos britânicos. Apesar disso, é possível afirmar que esta é mais uma evidência da circulação da matemática produzida no Reino Unido, uma vez que o livro-texto de Salmon havia sido traduzido um ano antes desta publicação, quando Sylvester já se encontrava em contato com matemáticos franceses para divulgação de seus resultados e o próprio Hermite já era membro correspondente do QJPAM. Em outras palavras, é perceptível que as abordagens da *Teoria dos Invariantes* faziam parte das discussões sobre matemática no país.

Além dos *invariantes*, a abordagem das coordenadas homogêneas também conecta britânicos e franceses. Esse fato pode ser percebido no artigo de Jonquières, publicado no *Nouvelles Annales* de 1857. Esse trabalho se inspira na obra de Salmon para uma discussão a respeito das retas tangentes. Nesse contexto, o autor apresenta propriedades

²⁰A expressão programa oficial se refere ao programa que norteava o exame de aptidão do ensino primário, instituído pela Lei Falloux, que estava em vigor desde 1850.

²¹La transformation dont il s'agit ici n'offre qu'une application particulière d'une théorie très-remarquable qui est due à M. Hermite. Les propositions élémentaires de cette théorie ont été exposées dans la dernière édition du Programme que j'ai publié avec M Roguet.

importantes que, segundo o texto, são necessárias para resolver o problema 388.²²

Demonstramos ainda (Salmon, p. 61) esta outra propriedade que será útil para resolver a questão 388, a saber, que a tangente à primeira polar em um dos pontos duplos da curva U é o conjugado harmônico da linha reta que une este ponto duplo ao polo, em relação às duas tangentes que a curva U tem neste ponto duplo.²³ (JONQUIÈRES, 1857, p. 349, Tradução Nossa)

Destacamos esse resultado que evidencia a relação que a matemática francesa tem com o livro-texto de Salmon. É importante compreender que a circulação das práticas britânicas já se mostrava naturalizada para os leitores do jornal, assim como para os leitores do *Jornal de Liouville*.

No estado atual da ciência, tal é o método a seguir quando se tem a ciência como objetivo. Se, pelo contrário, o objetivo for exames, o método ainda pode ser adequado. Basta substituir a quarta coordenada pela unidade e os coeficientes por índices pelos coeficientes vulgarmente empregados.²⁴ (NAM, 1857, p. 296, Tradução Nossa)

Quando o autor sugere a substituição da quarta coordenada pela unidade, ele se refere a uma forma de lidar com as coordenadas homogêneas através de dos métodos já conhecidos pelos leitores. A separação entre leitura para a ciência e leitura para exames, revela a percepção que o editor do NAM (Terquem nesta época) tinha sobre a utilização da nova abordagem para geometria no período. Ao mesmo tempo, a presença de alguns resultados dos britânicos nas páginas do jornal demonstra o reconhecimento do que vinha sendo desenvolvido no Reino Unido.

Outro dos matemáticos relevantes que publicaram trabalhos que lidam com polinômios homogêneos foi Painvin. A partir de 1858, esse autor inicia uma sequência de artigos que tratam de estabelecer a classificação de curvas e superfícies, a partir da análise do *discriminante* das formas quadráticas. No primeiro texto, "Discussion des Lignes et Surfaces du Second Ordre" (PAINVIN, 1858b), encontra-se uma referência importante à *Teoria dos Invariantes*:

²²Este é um dos problemas propostos no mesmo volume do jornal nas páginas 178 a 184. Trata-se de uma seção frequente no NAM.

²³On démontre encore (Salmon, p. 61) cette autre propriété qui va être utile pour résoudre la question 388, savoir, que la tangente à la première polaire en l'un des points doubles de la courbe U est conjuguée harmonique de la droite qui joint ce point double au pôle, par rapport aux deux tangentes que la courbe U possède en ce point double.

²⁴Dans l'état actuel de la science, telle est la méthode à suivre quand on a pour but la science. Si, au contraire, on a pour but les examens, la méthode peut encore convenir. Il suffit de remplacer la quatrième coordonnée par l'unité et les coefficients à indices par les coefficients vulgairement employés.

A discussão das curvas de segunda ordem, ou seja, o conhecimento do gênero e da espécie da curva representada por uma equação de segundo grau, é deduzida muito facilmente da consideração dos sinais do invariante e do determinante.²⁵ (PAINVIN, 1858b, p. 130, Tradução Nossa)

A referência aos discriminantes dessa citação não se limita ao determinante da matriz associada ao polinômio, mas o autor também observa as características geométricas da forma, em relação aos menores, no sentido do que foi descrito por Sylvester. O vocabulário dos *invariantes* começa a transitar em solo francês nesse período. O próprio Painvin se dedica a publicar, no segundo artigo desta série (PAINVIN, 1858a), para discutir o papel de objetos matemáticos frequentes na Teoria que surgiu no Reino Unido, tais como o hessiano, as relações de identidade dos determinantes simétricos, assim como de seus menores.

Em 1859, o autor trata da representação de superfícies quadráticas e como elas podem ser descritas a partir dos determinantes.

Notamos, na discussão das superfícies de segunda ordem, que a equação quadrática representava um cone quando o discriminante ou hessiano desta função era zero, e um cilindro, quando o hessiano e a derivada do hessiano em relação ao parâmetro a_{44} ambos eram nulos. Vou generalizar este teorema, procurando as condições análogas para uma equação de qualquer grau.²⁶ (PAINVIN, 1859, p. 407, Tradução Nossa)

Esse trecho revela que o autor entende a relação entre o cálculo do *discriminante*, que utiliza os coeficientes de maneira direta, e do hessiano, que constrói o determinante com derivadas parciais do polinômio. A ideia de generalizar esses critérios de classificação das superfícies é uma contribuição que o autor acrescenta à discussão. O autor também apresenta suas ideias sobre polos e polares em dois artigos publicados em 1865.

Textos como Painvin (1865b) e Painvin (1865a), trazem reflexões sobre as retas tangentes através do conceito de polaridade. De fato, esse interesse aproxima o autor da matemática produzida por Cayley e Salmon, uma vez que ele reproduz a noção de ambos sobre a polar em relação a uma curva. Nesse sentido, podemos identificar uma nova proximidade com os britânicos ao olhar para mais um artigo de Jonquières, publicado no

²⁵La discussion des courbes du second ordre, c'est-à-dire la connaissance du genre et de l'espèce de la courbe représentée par une équation du second degré, se déduit très-facilement de la considération des signes de l'invariant et du déterminant.

²⁶Nous avons remarqué, dans la discussion des surfaces du second ordre, que l'équation du second degré représentait un cône lorsque le discriminant ou le Hessien de cette fonction était nul, et un cylindre, lorsque le Hessien et la dérivée du Hessien par rapport au paramètre a_{44} étaient nuls tous deux. Je vais généraliser ce théorème, en cherchant les conditions analogues pour une équation de degré quelconque.

volume 18 do jornal. Como exemplo dessa conexão citamos o teorema sobre a existência de 27 retas em uma superfície de 3º grau.

Com isso, podemos afirmar que os trabalhos que lidam com descrições de curvas e superfícies, através dos polinômios homogêneos, se concentram em aspectos semelhantes aos que chamaram atenção dos britânicos. Nesse contexto, as referências aos matemáticos do Reino Unido lidam com a obra de Cayley, Salmon e Sylvester. O mesmo ocorre quando enfocamos os problemas de contatos. Em 1850, Terquem publica uma reedição do artigo de Joachimsthal sobre a equação formada pelas diferenças entre as raízes e sua aplicação na construção de feixes de tangentes. Nesse contexto, o autor utiliza um teorema sobre resolução de sistema de equações lineares proposto por Cayley no *Jornal do Crelle* de 1846 (TERQUEM, 1850b, p. 103)

Em 1853, Jacobi apresenta um método interessante para determinar o número de tangentes duplas a uma curva de ordem n : "Seja $f(x,y) = 0$ a equação de uma curva dada, de grau n . Tornamos esta equação homogênea multiplicando os termos de grau menor que n por potências de uma variável z "²⁷ (JACOBI, 1853, p. 149). A ideia aqui é transformar o polinômio em homogêneo de modo que se possa utilizar resultados descritos por Terquem em 1849. Um ano após os textos que descrevem a notação de Plücker, encontramos a seguinte afirmação do editor:

O Sr. Otto Hesse, professor de Koenigsberg, teve a engenhosa ideia de representar as coordenadas de um ponto em um plano, não por x e y , mas por $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$; igualmente um ponto no espaço por $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$; z e u são denominadores arbitrários. Para expressar que um ponto tem coordenadas $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$, escrevemos (x',y',z') ; essas convenções estabelecem nas fórmulas uma simetria que não existe nas convenções utilizadas, e tornando homogêneas as equações descritivas das retas, permitem aplicar-lhes as propriedades das funções homogêneas.²⁸ (TERQUEM, 1849, p. 113, Tradução Nossa)

É interessante perceber que, nessa ocasião, o autor atribui a ideia da representação de pontos no plano através da mudança das coordenadas por frações, com a inclusão de uma nova constante que é capaz de tornar um polinômio em homogêneo. Dessa forma, surge um questionamento pontual: de que forma Terquem percebe as diferenças entre o

²⁷Soit $f(x,y) = 0$ l'équation d'une courbe donnée, de degré n . On rend cette équation homogène en multipliant les termes de degré inférieur à n par des puissances d'une variable z

²⁸M. Otto Hesse, professeur à Koenigsberg, a eu l'ingénieuse idée de représenter les coordonnées d'un point sur un plan, non pas par x et y , mais par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$; de même un point dans l'espace par $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$; z et u sont des dénominateurs quelconques. Pour exprimer qu'un point a pour coordonnées $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$, on écrit (x',y',z') ; ces conventions établissent dans les formules une symétrie qui n'existe pas dans les conventions usitées, et rendant homogènes les équations descriptives des lignes, permettent de leur appliquer les propriétés des fonctions homogènes.

trabalho de Hesse, citado no artigo de 1849, e de Plücker, citado no de 1848? Do ponto de vista historiográfico, o surgimento das coordenadas homogêneas surge no final dos anos 1820 na obra do segundo, fator que define a autoria da prática.

Por outro lado, a dúvida sobre a perspectiva do autor da citação acima se responde no próprio artigo de 1849. Ao apresentar exemplos que aplicam o que ele chama de "ideia de Hesse", Terquem dá destaque específico para o papel dos determinantes na resolução de problemas de contato. Entendemos que a abordagem algébrica dos problemas geométricos foi o principal interesse do autor, apesar do enfoque na notação das coordenadas.

Mais uma vez, observamos uma aproximação dos interesses do editor do *Nouvelles Annales* com a *Comunidade britânica dos Invariantes*. Esse fator se torna mais evidente em 1851, com a publicação do artigo "Note sur les déterminants"(NAM, 1851), onde encontramos uma demonstração da propriedade de invariância do *discriminante* de um polinômio binário, de maneira semelhante ao apresentado no texto de Boole em 1841, que já vinha sendo tratado de maneira genérica em Sylvester (1851e). Não se sabe se Terquem tomou conhecimento do trabalho dos britânicos, porém a publicação de uma série de artigos em 1859 nos mostra o reconhecimento do autor sobre a *Teoria dos Invariantes*.

No artigo "Notions élémentaires sur les invariants, covariants, discriminants et hyperdéterminants"(NAM, 1859), encontramos descrições dos termos que já eram comuns no Reino Unido e estiveram presentes no vocabulário proposto por Sylvester em 1853. Ao tratar de polinômios homogêneos, o texto retoma a ideia de Hesse descrita por Terquem no texto de 1851, o que evidencia a conexão entre esses textos, os alemães e os britânicos. Além disso, o texto utiliza notação de Cayley para formas algébricas e apresenta o conceito de *invariante* através de exemplos com formas binárias quadráticas e quaternárias, ternárias de graus dois e *invariantes* de sistemas de equações.

Na geometria de curvas e superfícies, realiza-se principalmente transformações lineares, as invariantes são então funções dos coeficientes que expressam propriedades independentes da escolha dos eixos. Por exemplo, se no 3º exemplo do § 6 fazemos $I = 0$, isso expressa que a cônica se reduz a um ponto ou a duas retas; propriedade independente da escolha dos eixos. A transformação linear é a transformação homológica de M. Poncelet.²⁹ (NAM, 1859, p. 255, Tradução Nossa)

Nesta citação podemos ver claramente a percepção geométrica da teoria britânica, a qual é a mesma que encontramos nos textos de Sylvester, Cayley e até mesmo de Boole.

²⁹Dans la géométrie des courbes et des surfaces, on effectue principalement des transformations linéaires j les invariants sont alors des fonctions des coefficients qui expriment des propriétés indépendantes du choix des axes. Par exemple, si dans le 3 e exemple du § 6 on fait $I = 0$, cela exprime que la conique se réduit à un point ou à deux droites; propriété indépendante du choix des axes. La transformation linéaire est la transformation homologique de M. Poncelet.

É possível afirmar que a recepção da *Teoria dos Invariantes* ocorreu com base em suas contribuições para problemas geométricos. Além disso, a associação que o autor faz com o trabalho de Poncelet, revela o interesse no trabalho com geometria de projeções, a qual se adequa as ideias de Plücker, descritas por Terquem no final dos anos 1840 e adotada pelos matemáticos do Reino Unido na mesma época.

A sequência desse trabalho aparece no mesmo jornal e trata dos discriminantes. No texto, são apresentados os resultados para formas quadráticas de três e duas variáveis, além das formas cúbicas em três variáveis. Com base na noção de *discriminante*, o texto mostra a relação entre os *invariantes* e as equações polinomiais. Nesse contexto, as funções dos quadrados das diferenças das raízes se mostram como elementos da Teoria britânica, fator que se aproxima do que Sylvester apresentou em seus artigos de 1839 e 40.

Ainda no volume 18 do NAM, a revisão sobre os *invariantes* segue com o conceito de *covariante*. Apesar de não citar o nome de Sylvester diretamente, o texto utiliza a mesma nomenclatura do matemático inglês, como é o caso da própria palavra *covariante*, além dos derivativos e hessianos. A forma de representar os polinômios também replica a notação de Cayley.

É importante destacar que a influência britânica sobre os trabalhos, publicados nos *Nouvelles Annales*, que lidam com transformações, já se fazia presente alguns anos antes dos textos sobre os *invariantes*. Em 1853, o texto "Théorèmes sur les fonctions homogènes" (GENOCCHI, 1853) apresenta a análise de um teorema proposto por Sylvester, a saber: toda função homogênea binária de grau ímpar pode ser reduzida à sua forma canônica. Na demonstração, o autor chama atenção para contribuição de Faa di Bruno no *Jornal de Liouville* (BRUNO, 1852), além de destacar o papel dos *Hyperdeterminantes*. Esse fator nos revela o nível de interação dos matemáticos no período, uma vez que o interesse por este problema específico faz parte das produções do matemático inglês em 1852 com o surgimento da Lei de Inércia e do italiano, no mesmo ano com uma reflexão sobre os *invariantes*.

A trajetória das investigações conduzidas pelos matemáticos da comunidade de práticas dos *invariantes* encontram aderência em um centro importante como a comunidade francesa, tendo como principal elo as ideias sobre os determinantes. Um bom exemplo desse fator é o artigo de Faure, publicado em 1854 no volume 13 do NAM, onde se discute o papel dos determinantes na interpretação de feixes de curvas algébricas de maneira semelhante à de Sylvester em 1852.

$u = 0$ é a equação homogeneizada de uma curva plana de grau m entre três variáveis x_1, x_2, x_3 . Quando o determinante desta função é identicamente

zero, a equação representa um feixe de m linhas.³⁰ (FAURE, 1854, p. 398, Tradução Nossa)

Nesse trecho, o autor se refere a um teorema proposto por Hesse, que se faz presente em Sylvester (1850d). Da mesma forma, podemos citar dois artigos, publicados por um autor de nome Blerzy nos volumes 17 e 18 do *Nouvelles Annales*, nos quais encontramos diversas considerações sobre os *invariantes*. No primeiro, o autor apresenta duas relações sobre os *invariantes* de uma forma binária de grau n :

$$\sum_{i=0}^{i=n} i a_{i-1} \frac{d\varphi}{da_i} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{i=n} i a_{n-i+1} \frac{d\varphi}{da_{n-i}} = 0$$

onde φ é um *invariante* da forma binária. Dessa forma, tem-se uma generalização dos *invariantes* conhecidos até aquele momento. Entre vários exemplos, destacamos o caso de um polinômio quadrado em $2m$ variáveis:

$$I_{2m} = a_0 a_{2m} - 2m a_1 a_{2m-1} + \frac{2m(2m-1)}{1.2} a_2 a_{2m-2} - \dots \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{2m \dots (m+1)}{1.2 \dots m} a_m^2$$

quando se considera uma forma binária, temos: $I_2 = a_0 a_2 - a_1^2$, o que é equivalente ao

determinante $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$. Sendo assim, o autor afirma que o *invariante* geral associado a

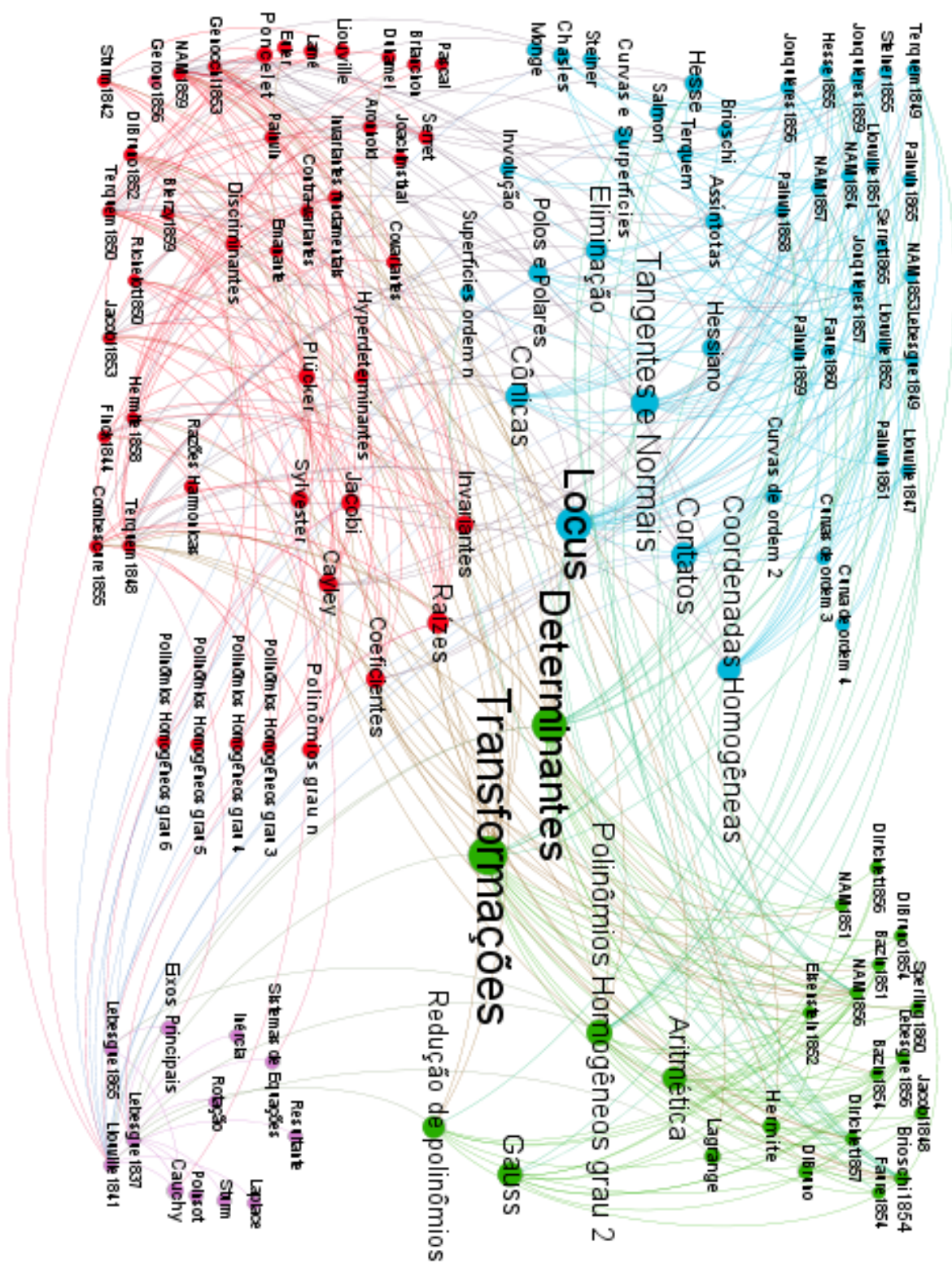
um polinômio homogêneo é o determinante gerado pelo resultante da eliminação de um sistema de diferenciais parciais, de maneira compatível com o trabalho iniciado em 1841 com Boole. Na mesma linha, o segundo dos artigos de Blerzy segue apresentando relações entre os *invariantes* que são gerados pelas fórmulas acima.

Quando observamos as contribuições dos franceses nos *Nouvelles Annales*, percebemos duas preocupações pontuais. A divulgação das práticas britânicas e a apresentação de fórmulas gerais para os *invariantes* conhecidos se mostraram parte da perspectiva dos autores sobre a aplicação das ideias a problemas geométricos. O olhar em associação com o que foi produzido no *Jornal de Liouville* reforça essa impressão sobre a disseminação desses assuntos no país.

Essa disseminação pode ser melhor compreendida através das redes de recepção. Considerando o que apresentamos no início deste capítulo, a comparação entre os assuntos que emergem na divulgação feita pelos britânicos e a repercussão dos franceses nos dois periódicos que tratamos evidencia o modo como os assuntos de interesse desta tese circularam. Desta forma, passamos a analisar o seguinte grafo:

³⁰ $u = 0$ est l'équation rendue homogène d'une courbe plane de degré m entre trois variables x_1, x_2, x_3 . Lorsque le déterminant de cette fonction est identiquement nul, l'équation représente un faisceau de m droites.

Figura 33 – As ideias que circularam nos artigos selecionados dos jornais franceses



Fonte: Elaborada pelo Autor

Como pode ser visto, a função de modularidade divide o grafo em quatro regiões, as quais revelam práticas e relações que descrevem os caminhos dos interesses dos matemáticos que participam da rede. Na região azul, encontramos diversos trabalhos que lidaram com as temáticas de locus de curvas e superfícies algébricas, problemas de contatos e Teoria de Eliminação. Nesse contexto, podemos perceber que o uso de coordenadas homogêneas e o interesse pelas cônicas são as práticas mais comuns neste recorte dos artigos. Essas técnicas foram difundidas nos textos de Terquem em 1849, tanto de sua autoria quanto na edição do NAM. Em particular, encontramos o uso frequente dos polinômios homogêneos de grau 2, objeto que surge na região verde da rede.

A região verde destaca artigos que lidaram com a temática de transformações lineares. Neste recorte, percebemos os interesses por abordagens aritméticas inspiradas pela obra de Gauss. Esses trabalhos tiveram uma relação próxima com as práticas britânicas apresentadas nesta tese, representadas nessa região pela presença de Hermite como referência. Como vimos nas análises desta seção, o uso dos determinantes também é associado à nova Teoria britânica. As práticas dos matemáticos do Reino Unido se apresentam como contribuição para as discussões das regiões azul e verde da rede.

É importante destacar que a rede da figura 32 revela que as práticas relacionadas com aritmética não foram estimuladas pelo contato com a produção de conhecimento matemático britânica. Podemos afirmar que as práticas sobre os *invariantes* chegam aos periódicos franceses através das discussões sobre geometria, aspecto que se torna mais evidente quando olhamos para outra região do grafo.

A região vermelha destaca as práticas britânicas que são utilizadas pelos autores não oriundos do Reino Unido que publicaram nos jornais franceses. Neste recorte, podemos identificar os termos *invariantes*, coeficientes e raízes como os mais frequentes, o que nos mostra a influência da *Comunidade britânica dos Invariantes* nos textos relacionados. A atuação de autores como Terquem, Di Bruno, Hermite e Combescure garante a divulgação dos personagens centrais, em particular Cayley e Sylvester, de modo a reproduzir as práticas dos ingleses, como pudemos perceber nas análises.

Além disso, é importante observar a participação de nomes como Jonquières e Painvin, os quais também lidam com os conceitos da *Teoria dos Invariantes*, porém surgem na região azul do grafo, o que evidencia a forma como a produção da comunidade britânica é recebida pelos pesquisadores que investigamos nesta seção. A associação entre as práticas geométricas e as desenvolvidas pelos matemáticos do Reino Unido mostra o papel das ideias disseminadas por Sylvester e companhia nas páginas do *Jornal de Liouville e Nouvelles Annales*. A presença de Plücker na região vermelha é mais uma evidência do modo como a nova Teoria do Reino Unido é recebida na França, uma vez que sua relação com a geometria em coordenadas homogêneas se mostra como um elo entre as duas regiões.

Com isso, é importante observar o posicionamento da utilização dos polinômios homogêneos de graus maiores que 2. O posicionamento das formas quadráticas na região verde e as associações com problemas sobre as cônicas nos mostram a conexão com a região azul. Nesse contexto, os polinômios de graus maiores revelam a contribuição dos *invariantes* para a interpretação de ideias geométricas através de outras formas algébricas.

Ainda encontramos uma pequena região no grafo que posiciona as investigações sobre momentos de inércia e movimentos de rotação. De maneira geral, é possível afirmar que os determinantes e suas propriedades são as práticas mais comuns que surgem das leituras dos artigos selecionados para esta seção. As discussões sobre transformações foram alvo de maior interesse dos autores, fator que auxiliou a disseminação da *Teoria dos Invariantes*, uma vez que a temática representa as ideias dos personagens centrais da comunidade de práticas que é objeto de estudo desta tese.

6.5 A repercussão nos jornais alemães: O caso do *Journal für die reine und angewandte Mathematik*

Da mesma forma que os jornais franceses, os alemães também apresentaram uma boa recepção dos artigos ingleses. Nesta seção, nos dedicamos a compreender quais dos assuntos que circularam na *Comunidade britânica dos Invariantes* são mais investigados pelos autores que figuram nos periódicos na Alemanha. Como recorte, nos concentramos nas publicações do *Jornal do Crelle*, no período de 1837 a 1865. Os autores com maior contribuição são Hesse e Hermite, como veremos nesta análise.

A investigação dos artigos, já classificados nas temáticas que compõem esta tese, nos mostra que a matemática produzida nos Estados Alemães se caracteriza por uma abordagem analítica, de maneira semelhante à francesa. No entanto, encontramos um volume maior de artigos que lidam com uma abordagem algébrica dos problemas em comparação àqueles analisados na última seção.

Iniciando com os textos que lidam com Teoria de Eliminação, encontramos o trabalho "Nota ad theoriam eliminationis pertinens" (RICHELOT, 1840), que apresenta uma conexão importante com Sylvester, uma vez que Richelot descreve o *Método Dialítico* e coloca as práticas sobre a Teoria em perspectivas.

Os diferentes métodos de encontrar uma equação são usados pelos geometras, e eu gostaria de aproveitar esta oportunidade para mencionar alguns deles, que foram recentemente publicados pelo famoso Sylvester em "The London and Edinburgh revista filosófica e Journal of Science". Lá, o problema dessa eliminação é reduzido ao problema de eliminar

($m+n-1$) quantidades de um sistema de ($m + n$) equações lineares. ³¹
(RICHELOT, 1840, p. 226, Tradução Nossa)

Seria natural apontar a influência da produção da *Comunidade britânica dos Invariantes* nesse texto, porém não se trata disso. Apesar da citação do matemático britânico, este era um momento no qual Sylvester buscava se adequar ao cenário da pesquisa em matemática. Dessa forma, vemos mais a influência dos matemáticos do continente nos britânicos do que o contrário.

Nesse contexto, entendemos que as produções alemãs na década de 1840 traziam uma cultura particular, à qual a produção britânica buscava se adequar. Como veremos nas próximas análises, o protagonismo dos matemáticos do Reino Unido passou a ganhar espaço com o surgimento da agenda dos *invariantes*. Em 1841, mesmo ano da publicação do artigo de Boole, Jacobi escreve um artigo que apresenta propriedades dos determinantes funcionais e como estas podem ser tomadas pelos determinantes numéricos (JACOBI, 1841, p. 319). Outro artigo que lida com a ideia de eliminação é apresentado por Joachimsthal, que associa as técnicas de Jacobi à resolução de problemas de contato (JOACHIMSTHAL, 1843).

O primeiro texto que encontramos sobre eliminação, que lida com polinômios homogêneos, foi "Über die Elimination der Variablen aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variablen"(HESSE, 1844a). Nesse trabalho de duas partes, o autor apresenta reflexões sobre os resultantes dos sistemas de equações, inspirado no trabalho de Sylvester do início da década. Um fator importante presente nesse artigo é o surgimento do que viria a ser conhecido como hessiano, o determinante da matriz formada pelas derivadas parciais em relação às variáveis.

Teorema 3. Se três funções homogêneas do segundo grau de três variáveis desaparecem para um sistema de valores dessas variáveis, então os quocientes diferenciais parciais do determinante dessas funções, tomados após as variáveis, também desaparecem para o mesmo sistema de valores. ³² (HESSE, 1844a, p. 80, Tradução Nossa)

Como pode ser visto, esse teorema utiliza a ideia do que Sylvester chamou de hessiano. De acordo com Molk (1916), o determinante descrito pelo autor é diretamente

³¹Quam aequationem inveniendi methodi diversae a geometris adhibentur, ex quarum numero eius, quae a clarissimo Sylvester in diario "The London and Edinburgh philosophical magazine and Journal of science" nuper exposita est, mentionem faciendi hanc occasionem haud praetermittere velim. Ibi illius eliminationis problema reducitur ad problema eliminationis ($m+n-1$) quantitatum ex systemate ($m + n$) aequalionum linearium.

³²Lehrsatz 3. Wenn drei homogene Functionen zweiten Grades von drei Variablen für ein System von Werthen dieser Variablen verschwinden, so verschwinden auch die partiellen Differentialquotienten der Determinante dieser Functionen, nach den Variablen genommen, für dasselbe System von Werthen.

ligado ao descrito por Jacobi em 1841. Além disso, o hessiano se torna ferramenta comum nas investigações sobre propriedades geométricas. Nesse sentido, Hesse também reconhece a abordagem de Plücker sobre coordenadas homogêneas como forma de identificar o que ele chama de pontos de virada (pontos críticos de uma função em termos modernos), com o auxílio do determinante formado pelas diferenciais parciais da função que representa a curva (HESSE, 1844b, p. 104).

É importante ressaltar que a proximidade do trabalho de Hesse com o trabalho dos britânicos que fazem parte da *Comunidade britânica dos Invariantes* apresenta mais um vínculo através das ideias de Plücker, o que indica a correlação com a geometria que identificamos nas análises dos artigos do Reino Unido. Retornando as práticas de eliminação, após a contribuição de Cayley sobre o teorema de Bézout, encontramos o artigo "Remarque relative a la note précédente" (BORCHARDT, 1857). Nessa breve nota, o autor propõe uma tradução, nas palavras dele, da notação utilizada pelo matemático inglês. Destacamos o reconhecimento que ele faz sobre o trabalho Sylvester com o vocabulário das práticas britânicas em 1853. Podemos afirmar que essa nomenclatura teve recepção entre os matemáticos alemães, para além das divulgações que apresentamos na seção 6.1.

Outro personagem que contribuiu com investigações sobre eliminação, além de sua relação com a *Teoria dos Invariantes*, foi Brioschi. No mesmo volume da nota de Borchardt, o artigo "Sur une nouvelle propriété du résultant de deux équations algébriques" (BRIOSCHI, 1857) apresenta uma construção do resultante de um processo de eliminação, a partir dos *invariantes* associados à forma algébrica investigada. Como exemplo, o autor cita um polinômio homogêneo de grau 4 e duas variáveis. O resultante do sistema formado pelas equações de polinômios desta natureza é uma composição dos *invariantes* de 2º e 3º graus da soma das duas.

Além disso, Brioschi também discute a relação que existe entre os resultantes e o teorema de Sturm, associando suas investigações ao que foi produzido por Sylvester nos anos 1840 (BRIOSCHI, 1857, p. 376). No mesmo artigo, também podemos encontrar referências a Joachimsthal, a respeito do famoso teorema do matemático francês, e a Jacobi. Este fator revela a integração dos alemães com o britânico quando o assunto era a Teoria de Eliminação.

Hermite também apresentou contribuições sobre esta temática no jornal alemão. Através da publicação de parte da sua correspondência com Borchardt, o autor trata do resultado que ficou conhecido no artigo "Sur l'Invariant le plus simple d'une fonction quadratique bi-ternaire, et sur le Resultant de trois fonctions quadratiques ternaires" (CAYLEY, 1860d), publicado no mesmo ano da carta de Hermite. Nesse texto, o matemático inglês traz uma discussão sobre a resultante de um sistema de equações quadráticas em três variáveis, que é um *invariante* caracterizado como combinante do sistema. A saber:

$R = \frac{12C_{12}-C_6^2}{12}$, onde R é resultante em questão e C_{12} , C_6 são os *invariantes* como descrito na obra de Sylvester.

Retornando ao texto de Hermite, para além da demonstração do resultado de Cayley, o autor se dedica a analisar os determinantes que envolvem o processo de eliminação e como eles estão relacionados aos *invariantes de Aronhold*. Ressaltamos que esse é um ponto de convergência importante entre a *comunidade britânica dos invariantes* e o grupo de matemáticos envolvidos com o *Jornal do Crelle*.

Mas há outro ponto de vista sob o qual se pode considerar a determinação da resultante buscando, como fez o primeiro Sr. Sylvester, uma expressão análoga à do discriminante de uma forma cúbica. Esta notável expressão, cuja descoberta se deve ao sr. Aronhold, sendo $64S^3 - T^2$, a analogia que desejamos seguir, leva naturalmente a tentar obter, em relação ao Sistema das três formas propostas, duas invariantes combinatórias que coincidem com T^2 e S^3 no caso particular onde φ , φ' , φ'' são as derivadas parciais de uma forma cúbica. ³³ (HERMITE, 1860, p. 372, Tradução Nossa)

Nessa citação, Hermite apresenta uma comparação entre o *covariante* formado pelos *invariantes de Aronhold* e a resultante composta por Sylvester a partir dos combinantes. Nesse contexto, é possível perceber a conexão do trabalho de divulgação realizado por Cayley e a recepção dos matemáticos alemães a respeito da Teoria britânica. É interessante notar que, nessa época, os leitores do jornal já tinham conhecimento de algumas das práticas do Reino Unido. Na breve nota intitulada "Ueber die Elimination aus zwei Gleichungen dritten Grades" (CLEBSCH, 1865), por exemplo, o autor também se utiliza dos cálculos *invariantes* como forma de descrever os resultantes de um sistema de equações cúbicas em duas variáveis.

Os matemáticos dos Estados Alemães apresentam conexão com os britânicos através dos artigos que identificamos no *Jornal do Crelle* sobre a temática de eliminação. É importante destacar o papel da *Teoria dos Invariantes* nessa ligação, uma vez que as práticas difundidas por Sylvester, Cayley e companhia passam a fazer parte das agendas na década de 1850. Sylvester é reconhecido pela elaboração de seu vocabulário, já Cayley se destaca por publicações que determinam a identidade matemática produzida em terras vitorianas. Nesse sentido, entendemos que a Teoria britânica tem relação importante com a produção de alguns artigos no jornal alemão.

³³Mais il est un autre point de vue sous lequel on peut envisager la détermination du résultant en recherchant comme l'a fait le premier M. Sylvester une expression analogue à celle du discriminant d'une forme cubique. Cette expression remarquable dont la découverte est due à M. Aronhold étant $64S^3 - T^2$, l'analogie que nous voulons suivre, conduit naturellement à essayer d'obtenir, par rapport au Système des trois formes proposées, deux invariants combinants qui coïncident avec T^2 et S^3 dans le cas particulier où φ , φ' , φ'' sont les dérivées partielles d'une forme cubique.

6.5.1 Desenvolvimento e convergência da *Teoria dos Invariantes*

O papel dos alemães no desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes* tem uma trajetória distinta dos matemáticos do Reino Unido. Além de uma natureza aritmética dos problemas, encontramos uma notação mais compacta, que permitiu a compreensão da finitude dos *invariantes fundamentais* através do teorema de Gordan, que surge em 1868. De acordo com Parshall (1989), diferentemente do início britânico através do texto de Boole, os autores do *Jornal do Crelle* têm base no trabalho de Gauss de 1801. Apesar de não contar com grande repercussão nos anos seguintes à publicação, as investigações ganham fôlego a partir de 1844 com o trabalho “Théoremes sur les formes cubiques et solution d’une équation du quatrième degré à quatre indéterminées”. Neste artigo, publicado no volume 27 do *Crelle* sob a autoria de Eisenstein, encontramos uma investigação da relação entre formas cúbicas $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ e quadráticas $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, onde $A = b^2 - ac$, $2B = bc - ad$ e $C = c^2 - bd$.

É importante destacar que a relação descrita pelo autor entre as formas algébricas é diretamente ligada ao hessiano, que viria a ser parte da obra de Sylvester em 1851, embora sob um aspecto diferente. Enquanto o texto do inglês se concentra na ideia de eliminação, o que demonstra a amplitude de aplicação do objeto apresentado por Otto Hesse, o texto do alemão tem um interesse sobre o que viria a receber o nome de *covariante* pelo próprio Sylvester.

Apesar da ínfima interação entre os dois matemáticos, no período de surgimento da agenda dos *invariantes*, podemos observar semelhanças no que diz respeito à busca pelas formas associadas que não se alteram após transformações lineares. Ainda no ano de 1844, Eisenstein publica o artigo “Untersuchungen über die cubischen Formen mit zwei Variablen”, no mesmo volume 27 do *Crelle*, no qual ele concluiu que os determinantes associados a uma forma cúbica e sua equivalente via transformação são inalterados a menos de uma potência ligada à substituição das variáveis.

Se uma forma cúbica f contém um segundo f' , e passa pela transformação $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ em f' , então a forma determinante F da forma cúbica f também contém a forma determinante F' da forma f' , e de fato F passa através da transformação $\begin{pmatrix} \alpha\varepsilon & \beta\varepsilon \\ \gamma\varepsilon & \delta\varepsilon \end{pmatrix}$ em F' ; e se as duas formas cúbicas são equivalentes, também o são as formas determinantes; e as últimas se interpenetram pela mesma transformação que a primeira. ³⁴

³⁴Enthält eine cubische Form f eine zweite f' , und geht sie durch die Transformation $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ in f' über, so

(EISENSTEIN, 1844, p. 92, Tradução Nossa)

Nesse trecho, encontramos a descrição de uma propriedade que Sylvester viria a tratar como covariância. É importante destacar que, assim como no caso do artigo de Boole em 1841, o texto não estava interessado nos *invariantes* em si, mas sim nas propriedades analíticas e aritméticas das formas cúbicas e de duas formas associadas através dos determinantes funcionais. Sendo assim, evidenciamos uma conexão importante entre as duas comunidades: os trabalhos de Jacobi e Hesse.

Como continuidade da história dos *invariantes* na Alemanha, precisamos retornar aos artigos de Hesse, ambos publicados no mesmo volume do *Crelle*, onde os textos de Eisenstein foram publicados. Em particular, o objeto que ficou conhecido como hessiano foi apresentado no artigo Hesse (1844b). Conforme Parshall (1989) aponta, o autor define o seguinte determinante funcional para polinômios homogêneos de grau m em n incógnitas: $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|$, $1 \leq i, j \leq n$ ou seja, o hessiano. A partir dessa definição, o autor chega a um resultado semelhante ao apresentado por Eisenstein: $\varphi = r^2 \varphi'$, que é uma relação entre os hessianos da forma algébrica φ e da forma transformada φ' . É importante observar que este objeto é semelhante aos *Hyperdeterminantes* de Cayley (PARSHALL, 1989). A natureza geométrica dos textos de Hesse é outra característica importante. No décimo segundo teorema tratado em Hesse (1844), encontramos a seguinte afirmação:

O professor Plücker foi o primeiro a chamar a atenção para esse belo princípio na obra citada acima, p. 284. Os pontos de interseção de qualquer um desses sistemas com qualquer um dos outros três serão então os pontos de inflexão da curva de terceira ordem.³⁵ (HESSE, 1844b, p. 106, Tradução Nossa)

A referência a Plücker revela o interesse pelo modelo de coordenadas homogêneas. Além disso, o exemplo nos mostra o caráter geométrico no qual o futuro da *Teoria dos Invariantes* foi desenvolvido. Essa característica também chamou a atenção de Cayley, que publica uma nota no volume 29 do *Jornal do Crelle* em 1845, mesmo ano do surgimento dos textos que descrevem o método dos *Hyperdeterminantes*, tanto no Reino Unido quanto nos Estados Alemães.

enthält auch die determinirende Form F der cubischen Form f, die determinirende Form F' der Form f', und zwar geht F durch die Transformation $\begin{pmatrix} \alpha\varepsilon & \beta\varepsilon \\ \gamma\varepsilon & \delta\varepsilon \end{pmatrix}$ in F' über; und sind die beiden cubischen Formen äquivalent, so sind es auch die determinirenden Formen; und zwar gehen die letzteren durch dieselbe Transformation in einander über; wie die ersteren.

³⁵Auf diesen schönen Lehrsatz hat zuerst Herr Professor Plücker in der oben citirten Schrift S. 284 aufmerksam gemacht. Die Schnittpuncte eines beliebigen dieser Systeme mit einem der drei andern werden demnach die Wendepuncte der Curve dritter Ordnung sein.

Com isso, é possível afirmar que a produção britânica sobre os *invariantes* contava com espaço no *Jornal do Crelle*, seja pela proximidade de seus métodos com os de Hesse ou pelo potencial de aplicação em problemas geométricos, uma vez que a Teoria de Eliminação faz parte das discussões sobre os problemas de contatos entre curvas e superfícies. Entretanto, a estrutura algébrica da agenda britânica não era presente nos textos do *Jornal do Crelle*, fator que começa a se modificar com a publicação dos textos de Aronhold.

No oitavo e vigésimo volume desta revista, Hesse apresentou uma série de problemas que são importantes para a teoria das funções homogêneas de terceiro grau de três variáveis e interessantes para a álgebra, pois fornecem o primeiro exemplo de um novo gênero de equações, que pertencem ao grupo de resolvíveis algebricamente. ³⁶ (ARONHOLD, 1850, p. 140, Tradução Nossa)

Como pode ser visto na introdução deste artigo, o autor reconhecia o trabalho produzido anteriormente e apontou um novo rumo para as pesquisas sobre as formas associadas, como Sylvester viria a se referir um ano depois. No texto, Aronhold se propõe a analisar o problema de determinar os pontos de inflexão de curva de terceiro grau. Como solução, o autor se concentra nas raízes de uma equação bi quadrática associada à forma cúbica em questão. É importante destacar que, tanto Hesse quanto Aronhold utilizam esta equação em suas investigações e a diferença ente os dois autores está no modo como se aborda sua construção.

Hesse trata o problema de maneira analítica, uma vez que elabora equações baseadas em novas incógnitas que permitem o cálculo dos valores que serão as raízes da função bi quadrática que auxilia a decompor o polinômio de 3º grau em três expressões lineares, de modo que se possa determinar os pontos de inflexão da curva que ela representa (HESSE, 1844a, p. 92). Por sua vez, Aronhold busca uma solução baseada apenas nos coeficientes, propondo uma abordagem algébrica, que se aproxima muito do modo como os britânicos utilizavam o hessiano, para a construção da mesma equação (ARONHOLD, 1850, p. 147).

Esse episódio nos revela uma aproximação das práticas desenvolvidas nos dois países. Como já foi dito, os autores e leitores do *Jornal do Crelle* já tinham conhecimento da *Teoria dos Invariantes* britânica, através das publicações de Cayley. Além disso, a relação com a matemática do Reino Unido se reflete através da obra de Sylvester que

³⁶Im acht und zwanzigsten Bande dieses Journals hat Hesse eine Reihe von Problemen aufgestellt, die sowohl für die Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln wichtig, als für die Algebra dadurch interessant sind, dafs sie das erste Beispiel einer neuen Gattung höherer Gleichungen liefern, die zu den algebraisch auflösbaren gehören.

inclui o que chamamos de *invariantes de Aronhold*, como vimos no capítulo 3.

$$S = (a_1 a_1)^{1,1} (a_1 a_1)^{1,1} + (a_1 a_1)^{2,2} (a_2 a_2)^{1,1} + (a_1 a_1)^{3,3} (a_3 a_3)^{1,1} +$$

$$2(a_1 a_1)^{2,3} (a_2 a_3)^{1,1} + 2(a_1 a_1)^{1,3} (a_1 a_3)^{1,1} + 2(a_1 a_1)^{1,2} (a_1 a_2)^{1,1}$$

$$2T = \tau_{1,1} + \tau_{1,2} + \tau_{1,3}, \tau_{i,j} = \sum (a_i a_j)^{\chi,\lambda} (a_\chi a_\lambda)^{i,j}$$

onde as parcelas que aparecem em S são menores determinantes de matrizes associadas a polinômios homogêneos de grau dois em três variáveis. Aronhold apresenta a propriedade de invariância das expressões S e T , a saber: $S_1 = r^4 S$ e $T_1 = r^6 T$, com r sendo o determinante da transformação das formas algébricas que convertem S e T em S_1 e T_1 , respectivamente.

As ideias de Aronhold são aperfeiçoadas ao longo da década de 1850 e têm nova divulgação no artigo "Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen" (ARONHOLD, 1858). De acordo com Parshall (1989), o autor já se encontrava familiarizado com os resultados britânicos sobre a *Teoria dos Invariantes*. Nesse sentido, o autor apresenta sua interpretação de alguns termos desenvolvidos no Reino Unido. Em Aronhold (1858, p. 98), encontramos as seguintes descrições:

- *Invariante*: pode-se nomear aquela conexão Δ dos coeficientes de f que está na relação $\Delta' = r^\lambda \Delta$ com o Δ' correspondente formado pelos coeficientes de f' .
- *Covariante*: aquela função φ dos coeficientes de f e das variáveis x_1, x_2, x_3 , que, usando a substituição original (1.), leva à função correspondente formada pelos coeficientes de f' e suas variáveis X_1, X_2, X_3 , φ' está relacionado com $\varphi'(X_1, X_2, X_3) = r^\lambda \cdot \varphi(x_1, x_2, x_3)$.
- *Forma associada*: aquela função Γ dos coeficientes de f e das variáveis u_1, u_2, u_3 , que, usando a substituição transposta (2.), leva à função correspondente formada pelos coeficientes de f' e as variáveis U_1, U_2, U_3 . Γ' está relacionado com $\Gamma'(U_1, U_2, U_3) = r^\lambda \cdot \Gamma(u_1, u_2, u_3)$.
- *Forma intermediária*: aquela função Θ dos coeficientes de f , que é ao mesmo tempo uma função das variáveis x_1, x_2, x_3 e u_1, u_2, u_3 e usando tanto a substituição original quanto a transposta, para a correspondente dos coeficientes de f' e a função Θ' formada pelas variáveis mútuas X_1, X_2, X_3 e U_1, U_2, U_3 na relação $\Theta'(U_1, U_2, U_3; X_1, X_2, X_3) = r^\lambda \Theta(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3)$.

Nas descrições acima, os objetos Δ e φ são, respectivamente, o determinante e o determinante funcional dos polinômios homogêneos. As formas associadas e intermediárias são equivalentes ao que Sylvester chamou de transformações concorrentes e complementares.

Além disso, a interseção com a matemática britânica se torna mais evidente em notas como:

Em meu ensaio, volume 39, página 152 desta revista, onde é dada a representação de S acima, não tive a última resolução (9^a) dos parênteses impressa. Com isso, o Sr. Cayley parece ter corrigido a observação errônea em Phil. Transactions vol. 146, página 641, segundo a qual Herr Salmon teria dado as expressões desenvolvidas primeiro. O Sr. Salmon de fato o deu em um último volume deste jornal (Vol. 42, p. 274), mas com referência ao meu tratado.³⁷ (ARONHOLD, 1858, p. 116, Tradução Nossa)

Da forma semelhante a outros trechos deste trabalho, essa citação revela as inspirações na matemática do Reino Unido. Esse fator justifica o termo convergência do título desta seção. A partir desse ano, encontramos em Clebsch a sequência do desenvolvimento das ideias alemãs. De 1858 a 1863, é possível perceber diferenças entre a notação dos grupos dos dois países. De acordo com Parshall (1989), a notação e o método desenvolvidos pela escola alemã eram de natureza simbólica e não explícita. Por outro lado, os teóricos *invariantes* britânicos buscavam expressões explícitas em termos de coeficientes.

Em 1861, no artigo "Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen" (CLEBSCH, 1861c), encontramos exemplos das notações simbólicas apontadas por Parshall. É o caso do que Elliott (1964, p. 69) chamou de "Identidade Jacobiana", a saber: $(bc)a_x + (ca)b_x + (ab)c_x = 0$, expressão que pode ser interpretada em notação britânica, $(bc' - b'c)(ax + a'y) + (ca' - c'a)(bx + b'y) + (ab' - a'b)(cx + c'y) = 0$. Essas duas representações indicam uma mudança de variáveis e sua relação com uma forma associada que se constrói a partir dos *Hyperdeterminantes* de Cayley.

Assim como no caso de Aronhold, Clebsch reconhece a produção dos matemáticos centrais da *comunidade britânica dos invariantes*. É o que ocorre com Sylvester, referência de eliminação em Clebsch (1861c); com Cayley, que além dos *Hyperdeterminantes* e, é referência sobre *invariantes fundamentais*, é relacionado com os resultados de Aronhold quando o assunto são os polos e polares de curvas de segunda ordem (CLEBSCH, 1861c); e com Salmon, que é referência nas investigações sobre o papel dos *invariantes* para a determinação de polos e polares de curvas de terceira ordem (CLEBSCH, 1861a).

Entendemos que o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*, tanto no Reino Unido quanto nos Estados Alemães, traça um caminho com origens semelhantes, porém

³⁷In meiner Abhandlung, Bd. 39, S. 152 dieses Journals, wo die obige Darstellung von S gegeben ist, habe ich die letzte Auflösung (9.) der Parenthesen nicht abdrucken lassen. Hierdurch scheint Herr Cayley zu der irrthümlichen Bemerkung in Phil. Transactions vol. 146, pag. 641 veranlafst worden zu sein, nach welcher zuerst Herr Salmon die entwickelten Ausdrücke gegeben haben soll. Herr Salmon hat sie in der That in einem spätem Bande dieses Journals (Bd. 42, S. 274) gegeben, aber mit Bezug auf meine Abhandlung.

com diferenças pontuais, sobretudo no que diz respeito à notação. A partir de 1850, Aronhold tem contribuição importante com a introdução da agenda britânica para os leitores do *Jornal do Crelle*. Além disso, com o trabalho de Clebsch, os alemães passam a se concentrar em problemas geométricos e entendem os *invariantes* como fator central dessas discussões.

Uma covariante deste tipo é e. B. o quadrado do determinante formado pelas coordenadas de quatro pontos; outro surge da função hessiana diferenciando-a três vezes e introduzindo as coordenadas de um ponto diferente a cada vez em vez dos incrementos. ³⁸ (CLEBSCH, 1861a, p. 227, Tradução Nossa)

Nessa citação, vemos um exemplo do modo como os *invariantes* e os problemas geométricos estão relacionados na perspectiva alemã. Nesse caso, Clebsch lida com o teorema sobre o número de pontos nodais de uma curva algébrica. Tratam-se de intersecções de curvas e superfícies projetivas.

É fato que a busca por *invariantes*, que foi iniciada por Cayley em 1845, tem final com o surgimento do teorema da finitude de Gordan em 1868. Entendemos que esses episódios expressam a relevância da matemática que vinha sendo produzida no Reino Unido. A influência mútua, que se estabelece entre as duas escolas, nos mostra mais uma evidência de que a comunidade de práticas, que é objeto de estudo desta tese, foi um pilar importante do processo de credibilização que culminou com a fundação da LMS em 1865. Resta nos agora, considerar as outras temáticas que foram analisadas nos capítulos anteriores, buscando identificar novas evidências destas influências mútuas.

Sobre a temática de locus de curvas e superfícies algébrica, o primeiro artigo do *Jornal do Crelle* que encontramos dentro do recorte desta tese foi publicado em 1838 por Hesse. Apesar de não utilizar os polinômios homogêneos, como os trabalhos sobre eliminação no mesmo período, o texto "Ueber Oberflächen zweiter Ordnung" (HESSE, 1838) analisa as relações geométricas que fazem parte dos interesses britânicos. A transição para as abordagens no estilo de Plücker ocorreu na década de 1840, o que nos mostra uma semelhança com o Reino Unido. Um bom exemplo desta movimentação é o segundo texto publicado em 1848 por Hesse a respeito desta temática. Em "Über Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Punkten berühren" (HESSE, 1848), o autor retoma as discussões sobre o determinante hessiano, apresentada quatro anos antes, desta vez como forma de analisar características de polos de um feixe de cônicas:

³⁸Eine Covariante dieser Art ist z. B. das Quadrat der aus den Coordinaten von vier Punkten gebildeten Determinante; eine andere entsteht aus der Hesseschen Function, indem man sie dreimal differentiirt und statt der Incremente jedesmal die Coordinaten eines anderen Punktes einführt.

A curva de terceira ordem $\varphi = 0$ é o lugar geométrico desses polos. (Como é bem sabido, todo par de pontos é chamado de pólos harmônicos de uma seção cônica, pela propriedade de que a linha reta traçada através deles cruza a seção cônica em um segundo par de pontos, que é harmônico com o primeiro.) Então, se você constrói um par de pontos que são pólos harmônicos, ao mesmo tempo para todas as três seções cônicas, ou para todo o sistema de seções cônicas: os mesmos dois pontos P e p correspondem um ao outro sob a mediação das equações (1.) e ambos estão na considerada curva de terceira ordem $\varphi = 0$.³⁹ (HESSE, 1848, p. 146, Tradução Nossa)

As equações (1.), às quais o trecho se refere, são um sistema de equações lineares formado por coeficientes que eram diferenciais parciais de segunda ordem de uma curva algébrica de grau 3 e φ é o hessiano. O autor descreve o lugar geométrico dos polos a curvas algébricas. Nesse sentido, podemos afirmar que essa prática se assemelha ao que Cayley vinha desenvolvendo no mesmo período com a noção de recíprocos e polares. Além disso, Sylvester mostra ter conhecimento dessa aplicação do hessiano e a utiliza nos artigos do início dos anos 1850. Destacamos, ainda, que o artigo de Hesse se dedica a outras propriedades geométricas, que se caracterizam pelos determinantes como critério de investigação.

Outro trabalho que se aproxima dos britânicos é o texto de Joachimsthal "Sur quelques applications des déterminants à la Géometrie" (JOACHIMSTHAL, 1850). Nele, encontramos soluções de problemas de cálculo de áreas e volumes, através das propriedades que viriam a ser tratadas por Sylvester:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_{0,0} & l_{0,1} & l_{0,2} \\ l_{1,0} & l_{1,1} & l_{1,2} \\ l_{2,0} & l_{2,1} & l_{2,2} \end{vmatrix}$$

onde $l_{i,j} = x_i\xi_j + y_i\eta_j + z_i\zeta_j$. Esta propriedade é útil no desenvolvimento das fórmulas para o cálculo de áreas e volumes de triângulos e pirâmides. O interesse por estas propriedades dos determinantes, além de sua aplicação em problemas de geometria, se tornou um assunto comum entre os matemáticos da *comunidade britânica dos invariantes*, fator que tem como síntese o trabalho de Spottiswoode de 1856.

³⁹Die Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$ ist der geometrische Ort dieser Pole. (Harmonische Pole eines Kegelschnitts nennt man bekanntlich jedes Punktenpaar, von der Eigenschaft, dafs die durch sie gelegte gerade Linie den Kegelschnitt in einem zweiten Punktenpaar schneidet, welches zu dem ersten harmonisch ist.) Construiert man also ein Paar Punkte, welche harmonische Pole sind, zugleich für alle drei Kegelschnitte, oder für das ganze System von Kegelschnitten: so sind dieselben zwei unter der Vermittelung der Gleichungen (1.) einander entsprechende Punkte P und p und liegen beide in der betrachteten Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$.

Como podemos notar nos artigos apresentados até este momento, os determinantes são ponto central das investigações conduzidas nesta temática. É comum encontrar inspirações nas discussões sobre técnicas de eliminação que utilizam o hessiano. Percebe-se que a abordagem que os britânicos trazem para os problemas geométricos, no sentido de uma perspectiva essencialmente algébrica dos polinômios homogêneos, não apresenta grande aderência na produção alemã, que se concentra em questões analíticas dos problemas envolvidos. Como exemplo, podemos citar Hesse (1851b) e Hesse (1853), que são trabalhos que utilizam as coordenadas homogêneas de Plücker, porém focam suas análises nas propriedades das diferenciais parciais. Esse fator coloca Hesse com um papel bem definido em relação a suas contribuições para os interesses dos matemáticos do Reino Unido: os estudos sobre os determinantes.

Uma temática que representa a identidade britânica no *Jornal do Crelle* diz respeito às transformações lineares e a *Teoria dos Invariantes*. Sobre esses assuntos, destacamos a participação de Clebsch que, a partir da década de 1861, passa a apresentar trabalhos que evidenciam a influência da agenda da comunidade que vinha se formando no entorno dos ingleses Sylvester e Cayley.

Indicarei primeiro o caminho analítico que pode levar aos teoremas de Steiner e, em seguida, indicarei a formação da equação do quinto grau, que ao mesmo tempo dá algumas indicações notáveis sobre os *invariantes* das funções em consideração. ⁴⁰ (CLEBSCH, 1861b, p. 109, Tradução Nossa)

Como podemos ver no final da introdução desse primeiro texto de Clebsch no qual se discute a ideia de invariância, há uma diferenciação entre a abordagem analítica e a ideia dos *invariantes*, que já vinha sendo divulgada por Cayley no final dos anos 1850. No artigo da citação, o autor se propõe a investigar uma transformação de formas cúbicas proposta por Steiner.

Os problemas de contato também apresentam algumas conexões com os interesses britânicos. É o caso do artigo "Eine Bemerkung zum Pascalschen Theorem" (HESSE, 1851a), no qual podemos encontrar semelhanças com o trabalho publicado por Sylvester na *Philosophical Magazine*, um ano antes. Em comum, encontramos a referência às coordenadas homogêneas de Plücker. Além disso, o autor se concentra em cálculos que determinam retas tangentes, como é o caso de seu segundo texto publicado no mesmo jornal (HESSE, 1844b). Além disso, Clebsch também se dedica a um problema correlato, as normais a curvas de grau 2:

⁴⁰Ich werde zunächst den analytischen Weg angeben, der zu den Steinerschen Sätzen führen kann, und sodann die Bildung der Gleichung fünften Grades angeben, welche zugleich über die Invarianten der betrachteten Functionen einige merkwürdige Andeutungen giebt.

O problema de desenhar normais para uma cônica a partir de um determinado ponto é do Sr. Cayley (neste Journal Vol.56, p.182) e do Sr. Fiedler em sua excelente edição de Salmon's Conic sections (p. 565) e são de interesse da daqueles problemas que são de interesse para o tratamento algébrico de forma geral. Permitam-me conectar uma discussão do problema a um tratamento analítico, o que também leva a alguns novos resultados para o problema dos normais.⁴¹ (CLEBSCH, 1863, p. 64, Tradução Nossa)

Esse é primeiro parágrafo do artigo "Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen der zweiten Ordnung"(CLEBSCH, 1863). Mais uma vez, encontramos ligações com os interesses britânicos de autores como Cayley e Salmon. Nesse sentido, é possível apontar um alinhamento dos problemas, embora as práticas não sejam todas iguais. Particularmente, destacamos o papel dos determinantes e menores determinantes, que são bastante utilizados nos textos de Clebsch, Aronhold e, principalmente, Hesse.

Além dos trabalhos que tratam diretamente de questões geométricas, os artigos selecionados para estas análises também apresentam contribuições que tratam de propriedades de transformações lineares. Sobre esta temática, Hermite surge como um personagem central, devido ao volume de artigos de sua autoria publicados no *Jornal do Crelle*. As primeiras publicações sobre o assunto do matemático francês ocorrem entre 1854 e 1856, período que precede as participações de Aronhold e Clebsch, que apresentamos anteriormente.

É importante lembrar que Hermite era um contato importante de Sylvester neste período, que culminaria em sua participação como um dos editores do QJPAM. Neste contexto, o artigo "Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies"(HERMITE, 1854d) inicia a divulgação das investigações que o francês desenvolvia sobre os *invariantes*. O autor inicia seu texto com referência a *invariantes* utilizados pelo seu contato inglês, o determinante da matriz formada pelos coeficientes de uma forma quadrática ternária. Outro aspecto relevante deste artigo é a referência ao problema de diagonalização de matrizes, através de seus, em termos modernos, autovalores (HERMITE, 1854d, p. 312).

Como o próprio autor indica em seu segundo artigo, sua teoria das formas quadráticas tem origem em questões aritméticas, embora utilize argumentos algébricos para investigar seus resultados (HERMITE, 1854c, p. 313). No trabalho citado, encontramos uma investigação que lida com formas adjuntas, que Sylvester chamou de

⁴¹Die Aufgabe, von einem gegebenen Punkte aus Normalen an einen Kegelschnitt zu ziehen, ist von Herrn Cayley (dieses Journal Band56, pag.182) und von Herrn Fiedler in dessen ausgezeichnete Bearbeitung von Salmon's Conic sections (p. 565) verallgemeinert und dadurch in den Bereich derjenigen Aufgaben gezogen worden, welche für die algebraische Behandlung in allgemeiner Form von Interesse sind. Es sei mir erlaubt an eine analytische Behandlung eine Discussion des Problems zu knüpfen, welche auch für das Normalenproblem einige neue Resultate mit sich führt.

contravariantes, a saber: $f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix}$,

$\Delta = ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - 2bb'b'' - 2aa'a''$ e a forma adjunta,

$$g = \begin{pmatrix} b^2 - a'a'', & b'^2 - aa'', & b''^2 - aa' \\ ab - b'b'', & a'b' - bb'', & a''b'' - bb' \end{pmatrix}$$

A construção da forma g ocorre através das transformações complementares, descritas em Sylvester (1851e). Encontramos, assim, na comunidade alemã, uma referência importante a uma conexão entre dois matemáticos não alemães. Esse fator revela o reconhecimento que o continente tinha sobre a produção da comunidade britânica. Apesar da natureza distinta dos trabalhos dos dois personagens (aritmética, no caso do francês; e algébrica, no caso do inglês), esse vínculo mostra como Sylvester passa a ser percebido como uma referência para as práticas, no que diz respeito aos objetos associados às transformações lineares e à *Teoria do Invariantes*.

Hermite retoma seu trabalho com as formas binárias em 1856. Mais uma vez, a obra é escrita em dois artigos e se dedica a problemas que são respondidos pelos conceitos produzidos pelos matemáticos britânicos.

Além disso, eles são de fato invariantes fundamentais; pois o Sr. Sylvester mostrou que qualquer função racional e integral de a, b, c, b', a' , que é reproduzida, multiplicada por uma potência do determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$, quando substituimos a, b, c, b', a' , por A, B, C, B', A' , é necessariamente uma função inteira de i e j . Acho que posso recorrer para as provas dessas importantes proposições aos trabalhos dos sábios geômetras que acabei de citar, e chegar imediatamente à noção das covariantes da forma bi quadrática.⁴² (HERMITE, 1856, p. 3, Tradução Nossa)

Quando Hermite fala sobre *invariantes fundamentais*, se refere à obra de Cayley e às expressões $i = aa' - 4bb' + 3c^2$ e $j = aca' + 2bcb' - ab'^2 - a'b^2 - c^3$. Sobre este aspecto, o autor apresenta um resultado importante de Sylvester sobre os *covariantes*. A partir disso, o Hermite apresenta suas investigações sobre resolução de equações de grau 4, redução de polinômios homogêneos para soma de quadrados (sob um ponto de vista aritmético). Na segunda memória, o autor apresenta uma discussão sobre decomposição dos *invariantes* e

⁴²De plus, elles sont bien des invariants fondamentaux; car Mr. Sylvester a démontré que toute fonction rationnelle et entière de a, b, c, b', a' , qui se reproduit, multipliée par une puissance du déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$, lorsqu'on y remplace a, b, c, b', a' , par A, B, C, B', A' , est nécessairement une fonction entière de i et j . Je pense pouvoir renvoyer pour les démonstrations de ces proposition importantes aux travaux des savants géomètres que je viens de citer, et arriver immédiatement a la notion des covariants de la forme biquadratique.

covariantes, sendo comum o apelo para propriedades da teoria dos números como máximo divisor comum.

Por fim, podemos perceber que a relação entre os matemáticos alemães e britânicos se intensifica através das discussões sobre os *invariantes*. Analisando os artigos do *Jornal do Crelle* publicados no recorte temporal desta tese, tanto no caso das divulgações dos ingleses quanto na recepção dos autores locais, é possível verificar que as investigações sobre transformações e determinantes se mostram muito frequentes, como podemos ver no grafo a seguir:

Esse grafo nos revela a distribuição dos assuntos que circularam nos artigos analisados do jornal alemão. Como pode ser visto, os determinantes são o assunto mais comentado entre os autores, além dos temas transformações, eliminação e *invariantes*. Os dois primeiros termos repetem os interesses que foram manifestados nos jornais franceses. Entretanto, percebe-se um interesse maior dos alemães sobre a *Teoria dos Invariantes*. É possível afirmar que a agenda britânica passou a ocupar boa parte dos interesses dos autores do *Crelle*, uma vez que a comparação entre as figuras 31 e 34 mostra que as práticas divulgadas no periódico têm sua repercussão com frequência significativa nos textos dos matemáticos que publicaram no recorte que escolhemos para esta tese.

As regiões coloridas do grafo indicam zonas de interesses que se correlacionam. Nesse contexto, a cor azul representa problemas geométricos de descrição de curvas algébricas, tangentes e normais, com base nas coordenadas homogêneas. A presença dos polinômios homogêneos de grau 2 revela o maior volume de problemas que envolvem cônicas. Esse fator estabelece uma conexão com a região de cor rosa, onde se encontram outros assuntos de natureza geométrica, como os problemas de contatos, as involuções, áreas e volumes e rotações. A diferença entre as duas regiões se evidencia a partir das análises dos artigos que apresentamos nesta seção. Além disso, a pequena participação desta região nos mostra que os principais interesses dos autores se concentram mais numa perspectiva analítica das práticas, uma vez que a região rosa não apresenta uma conexão mais forte com objetos algébricos, como os polinômios e o uso de fórmulas com base nos coeficientes.

O surgimento de Gauss como uma referência nos mostra que a região verde tem influência de discussões aritméticas a respeito das propriedades das transformações. É importante ressaltar que esta região contém o tópico dos determinantes, nó que apresenta o maior volume de conexões da rede. Esses aspectos evidenciam os interesses centrais do grupo que analisamos neste recorte, uma vez que autores como Hesse e Jacobi são os que apresentam o maior volume de publicações e contribuem com propriedades que se adequam aos assuntos das quatro regiões da rede. Esse fator indica que a temática das transformações foi a principal articuladora da conexão da matemática produzida pela *comunidade britânica dos invariantes* e a matemática produzida nos Estados Alemães.

A região vermelha representa assuntos que melhor se aproximam dos interesses dos britânicos, o que pode ser percebido por conta das particularidades da função de "modularidade" do Gephi, que destaca os nós que apresentam maior conectividade entre si. O fato de práticas como *invariantes*, discriminantes, eliminação e resultantes estarem na mesma região do grafo, nos mostra que os matemáticos não britânicos que publicaram no *Jornal do Crelle* absorveram as ideias da *Comunidade britânica dos Invariantes*. Nesse contexto, percebemos que autores como Hesse, Hermite, Brioschi, Aronhold e Jacobi

passam a fazer parte de um coletivo maior, o qual traz credibilidade para a matemática produzida no Reino Unido.

Com isso, podemos afirmar que as Teorias de Eliminação e dos *Invariantes* se caracterizam por inspirações em práticas que fizeram parte da produção dos personagens centrais da comunidade, como Sylvester e Cayley. Os casos que chamam maior atenção na região vermelha são o uso da noção de *invariantes fundamentais*, o que engloba os *invariantes* descritos por Cayley e por Aronhold, e dos discriminantes, que são entendidos como uma interpretação dos hessianos nos textos que analisamos nesta seção.

Por fim, entendemos que a matemática produzida pela *Comunidade Britânica dos Invariantes* contou com recepção ativa dos matemáticos que destacamos como relevantes na seção 6.2. Logicamente, cada um desses personagens exerce papéis diferentes no processo, como é o caso de Hesse, Hermite, Clebsch, Brioschi e Terquem, que se dedicam explicitamente à *Teoria dos Invariantes*; Painvin e Jonquières, que aplicam essas práticas a questões geométricas; e Liouville, Jacobi e Borchardt, que proporcionaram espaços e técnicas de base que permitiram a divulgação/recepção das ideias dos britânicos da comunidade no *Crelle*.

6.6 Um desdobramento relevante: A Lei de Inércia e a *Equação Secular*

Além da recepção dos trabalhos que lidam com polinômios homogêneos, é necessário compreender como as práticas que circularam na *Comunidade Britânica dos Invariantes* contribuíram para problemas relevantes. Nesta seção, nos dedicamos a apresentar um desdobramento importante da *Teoria dos Invariantes* e o modo como ela se adequa a um problema que esteve na pauta das discussões científicas durante o período de desenvolvimento da nova Teoria no Reino Unido.

Quando utilizamos a expressão desdobramento, nos referimos ao surgimento de técnicas que serviram como aplicação para assuntos que, inicialmente, eram paralelos ao tema central da teoria em si. No caso da *Teoria dos Invariantes*, podemos identificar desdobramentos em temas de geometria, como fica claro na obra de Sylvester e nos outros trabalhos que analisamos até aqui; nos movimentos de rotação, que também se fizeram presentes nas produções do personagem central desta tese; e, finalmente, nos estudos sobre a *Equação Secular*, que fizeram parte dos interesses do continente ao longo do século (BRECHENMACHER, 2014).

Com isso, entendemos que olhar para a trajetória dos avanços conquistados sobre as discussões dos movimentos de rotação e *Equação Secular* e compreender como a

Comunidade Britânica dos Invariantes se encaixa neste tema, permitem a produção de um retrato do processo de ganho de credibilidade dos matemáticos do Reino Unido, elemento importante para a consolidação da LMS na década de 1860.

É importante destacar o fato de que, tanto os momentos de inércia quanto a *Equação Secular* lidam com objetos algébricos semelhantes (em particular os polinômios homogêneos de grau 2), o que faz com que esses assuntos apresentem interseções. Iniciamos estas reflexões olhando para as contribuições que os britânicos deram para as discussões sobre problemas de rotação, dentro do recorte que utilizamos nesta tese. Além disso, nos concentramos no modo como essas contribuições se relacionam com a produção encontrada da *Comunidade britânica dos Invariantes* no mesmo período.

6.6.1 A relação entre movimentos de rotação e a *Comunidade britânica dos Invariantes* nos jornais britânicos

No período entre 1837 e 1865, encontramos algumas publicações que tangenciam as discussões sobre os polinômios homogêneos e tratam de aspectos geométricos dos movimentos de rotação. Esses trabalhos não se caracterizam por propor novos rumos para investigações sobre mecânica, mas representam o modo como os matemáticos britânicos se posicionavam a respeito do que era discutido sobre o assunto.

Um dos assuntos que são tratados nesses artigos são os momentos de inércia. Em artigo publicado no primeiro volume do CMJ em 1837, cujo autor é desconhecido, encontramos o problema de representar os eixos de rotação de um sólido através dos coeficientes de um polinômio homogêneo de grau 2, reduzido a sua forma canônica. Lembramos que este artifício é o mesmo que surge em textos como Smith (1839) e Boole (1841), os quais lidam tanto com a perspectiva mecânica quanto com a algébrica do problema de redução de polinômios. Além disso, a Lei de Inércia para formas quadráticas de Sylvester trata essencialmente do mesmo problema.

O problema da rotação de um corpo rígido em torno de um ponto fixo, sobre o qual nenhuma força atua, ou em torno de seu centro de gravidade influenciado apenas pela força da gravidade, foi resolvido analiticamente por Lagrange, pelo menos até o ponto de indicar o propriedades de tal movimento, e reduzir sua determinação ao cálculo de duas funções elípticas, uma de primeira e outra de terceira ordem; mas essas formas analíticas, como foi justamente observado, não nos dão nenhuma ideia clara do movimento durante o período de rotação; eles nos permitem determinar a posição do corpo no final de um determinado tempo, mas de modo algum auxiliam nossas concepções a seguir o movimento do corpo durante sua rotação. ⁴³ (BOOTH, 1841, p. 432, Tradução Nossa)

⁴³THE problem of the rotation of a rigid body round a fixed point, acted on by no forces, or round its centre of gravity influenced by the force of gravity alone, has been analytically solved by Lagrange, at

Esse é o primeiro parágrafo do texto de James Booth, o qual já foi analisado no capítulo 5. Como se pode perceber, a ideia desse autor sobre rotação está associada à abordagem analítica de Lagrange. Além disso, ele aponta as dificuldades de descrição completa do movimento em si. Essa dificuldade se deve ao problema de determinar a natureza das raízes da equação que auxilia no cálculo das desigualdades do movimento dos planetas (BRECHENMACHER, 2014).

O interesse pelos movimentos de rotação chega aos personagens da *Comunidade Britânica dos Invariantes* através de Cayley, que publicou o artigo "On the Rotation of a Solid Body Round a Fixed Point", no CDMJ 1 em 1846. Apesar de não tratar dos momentos de inércia de maneira direta, podemos encontrar no texto uma forma quadrática reduzida como representação do movimento de rotação (CAYLEY, 1846c, p. 225). Dois anos depois, o mesmo autor publicava uma aplicação dos quatérnios de Hamilton ao movimento de rotação. Entretanto, não encontramos grande repercussão sobre o assunto nos artigos publicados pelos membros da comunidade. A exceção é texto de Donkin, que apresentamos no capítulo 5, o qual faz referência aos trabalhos de Cayley e Boole com formas quadráticas. Em comum, os autores apresentados nesta seção trazem o interesse pelas formas canônicas, seja pela representação dos momentos de inércia ou das direções cossenos dos eixos de rotação.

É nesse contexto que o trabalho de Sylvester chega à discussão sobre os movimentos de rotação. Os cinco artigos sobre o assunto publicados por ele nas décadas de 1850 e 1860 se utilizam da ideia de redução de formas quadráticas a sua forma canônica, como maneira de estabelecer a descrição do movimento através do elipsoide de Poincot, como mostramos no capítulo 3.

Nesse sentido, podemos afirmar que existiu uma conexão entre os interesses ligados ao movimento de rotação de corpos rígidos e a Teoria desenvolvida por Sylvester e companhia na década de 1850. Essa conexão surge através das investigações que se desenrolaram sobre a *Equação Secular* e interesses particulares do matemático inglês, a saber: a Lei de Inércia para formas quadráticas e o teorema de Sturm.

6.6.2 A relação entre a *Equação Secular* e a *Teoria dos Invariantes*

De acordo com Brechenmacher (2014), a *Equação Secular* se tornou conhecida na Europa do século XIX por causa de seu papel no estudo da estabilidade do sistema solar.

least so far as to indicate the leading properties of such motion, and to reduce its determination to the calculation of two elliptic functions, one of the first, the other of the third order; but these analytical forms, as has been justly remarked, do not give us any clear idea of the motion during the period of rotation; they enable us to determine the position of the body at the end of a given time, but do not at all assist our conceptions in following the motion of the body during its rotation.

Em termos modernos, trata-se da equação característica de um sistema linear simétrico. Um olhar para a evolução histórica dessa equação nos auxilia a compreender o papel de Sylvester, e conseqüentemente da *Comunidade britânica dos Invariantes*, na busca por uma solução para o problema da natureza das raízes da *Equação Secular*.

As discussões que envolveram as abordagens do problema das desigualdades seculares apresentaram contextos diferentes. Lagrange, em 1766, trabalhou com a integração de sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes; Cauchy, em 1829, focou na classificação das superfícies do segundo grau; Weierstrass, em 1858 investigou a caracterização das transformações de pares de funções quadráticas homogêneas por substituições nas variáveis; e Jordan e Kronecker, em 1874, discutiram os fundamentos e métodos da teoria das formas bi lineares (BRECHENMACHER, 2008).

Essa diversidade dos contextos nos quais a *Equação Secular* se encontra, revela a forma como as ideias dos matemáticos pode caracterizar a pesquisa em suas diferentes épocas. No caso desta tese, estamos interessados no contexto que envolve a obra de Sylvester, mais especificamente no ano de 1852, quando ele publica o artigo "A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares"(SYLVESTER, 1852a). Essa publicação traz a Lei de Inércia para formas quadráticas e apresenta uma solução definitiva para o problema da natureza das raízes da *Equação Secular*.

Como maneira de compreender o papel do inglês nesse contexto, seguimos o fio dos trabalhos que foram publicados sobre o assunto das desigualdades seculares e nos concentramos nas contribuições que se aproximam da apresentada em Sylvester (1852a), como é caso dos textos de Cauchy e Lebesgue, apresentados no capítulo 3.

Brechenmacher (2014) apresenta o início das discussões que geraram o problema da *Equação Secular*, destacando o texto "Solution de Différents Problèmes de Calcul Intégral"(LAGRANGE, 1766). Nele, o autor se inspirou na ideia de D'Alembert sobre a descrição das pequenas oscilações de uma corda carregada com dois pesos. O sistema que matematiza este é o seguinte:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 \\ \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} = A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 \end{cases}$$

onde $\xi_i(t)$ $i \in 1,2$ são as funções que descrevem essas pequenas oscilações. Como solução, é necessário reduzir o sistema a duas equações independentes, o que exige a eliminação de uma das variáveis $\xi_i(t)$ em cada equação diferencial. Destacamos que essa prática se revela um processo de resolução de um sistema de equações lineares, o qual depende da

equação característica:

$$\begin{vmatrix} A_{11} - S & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - S \end{vmatrix} = 0$$

cujas raízes auxiliam na solução do problema. Em termos modernos, é o cálculo dos autovalores que permitem a diagonalização da matriz associada ao sistema proposto. É importante lembrar que Sylvester também estava de frente para um problema semelhante em 1852, quando apresentou sua Lei de Inércia para formas quadráticas. Embora ele estivesse interessado apenas na possibilidade de transformação de um polinômio homogêneo, de grau 2, em sua forma canônica, suas publicações no período mostram que este interesse tinha associação com a *Equação Secular*, como discutimos no capítulo 3.

Essa abordagem é generalizada por Lagrange, que admite um sistema de n equações diferenciais. Nesse sentido, a resolução da equação característica se resume a sua decomposição em fatores lineares e a caracterização das pequenas oscilações depende da natureza de suas raízes. De acordo com Sinaceur (1991), é nesse ponto que o trabalho de Sylvester teve contribuição importante sobre o assunto, através de sua relação com o teorema de Sturm.

A equação característica estudada por Lagrange passa a ser entendida como a *Equação Secular* na década 1770, através do texto "Théorie des variations séculaires des éléments des planètes"(LAGRANGE, 1782), artigo publicado em duas partes na Academia de Berlim. Nele, o autor discute perturbações seculares na órbita dos planetas. Brechenmacher (2008) indica que o matemático francês trata o problema do ponto de vista mecânico, o que cria uma identidade para a abordagem do problema. Entretanto, outra identidade também se mostrou possível, a de natureza algébrica.

Quando nos referimos à natureza algébrica da *Equação Secular*, estamos falando dos trabalhos que se concentraram na transformação do polinômio. É o caso do texto de Cauchy "Sur L'Équation à l'aide de Laquelle on Détermine les Inégalités Séculaires des Mouvements des Planètes"(CAUCHY, 1829). Nessa obra, o autor baseou-se em analogias entre a *Equação Secular* e as equações características das cônicas para interpretar essas técnicas em termos de mudanças nos pontos de referência na geometria analítica. Nesse sentido, sua abordagem se concentra nas formas quadráticas e já não traz a referência sobre o problema das desigualdades seculares, porém deixa explícito seu conhecimento sobre as origens da equação abordada.

Além disso, esta equação será semelhante àquela que se encontra na teoria das desigualdades seculares dos movimentos dos planetas, e cujas raízes, todas reais, gozam de propriedades dignas de nota. Algumas dessas

propriedades já eram conhecidas: vamos lembrá-las aqui e indicar novas.⁴⁴ (CAUCHY, 1829, p. 175, Tradução Nossa)

Nesse trecho, Cauchy se refere à equação resultante da eliminação das variáveis do sistema de equações lineares, geradas a partir das diferenciais parciais da forma quadrática investigada. O problema ao qual o autor se dedicava neste artigo era a determinação dos máximos e mínimos do polinômio, com o auxílio do seguinte sistema:

$$\begin{cases} A_{xx}x + A_{xy}y + A_{xz}z + \dots = sx \\ A_{xy}x + A_{yy}y + A_{yz}z + \dots = sy \\ A_{xz}x + A_{yz}y + A_{zz}z + \dots = sz \\ \dots \end{cases}$$

o qual é traduzido como,

$$\begin{aligned} (A_{xx} - s)x + A_{xy}y + A_{xz}z + \dots &= 0 \\ A_{xy}x + (A_{yy} - s)y + A_{yz}z + \dots &= 0 \\ A_{xz}x + A_{yz}y + (A_{zz} - s)z + \dots &= 0 \\ \dots & \end{aligned}$$

de onde surge a equação, a qual depende da natureza das raízes da resultante. Mais uma vez, encontramos a exigência da realidade das raízes. Como veremos mais adiante nesta seção, a Lei de Inércia de Sylvester serve como meio para a determinação das raízes do polinômio, através do teorema de Sturm (SINACEUR, 1991).

Um fator importante da discussão sobre a natureza das raízes da *Equação Secular* é a dificuldade de lidar com raízes múltiplas, como é destacado em Brechenmacher (2014). De acordo com o autor, as abordagens de D'Alembert e Lagrange transferem a interpretação mecânica dos problemas aos quais se referem para uma interpretação algébrica das raízes dos polinômios característicos. Nesse contexto, a multiplicidade implica na existência de oscilações infinitas no sistema investigado. Esse problema começou a ser superado a partir de 1852, quando Sylvester publicou seu artigo com a Lei de Inércia.

Se a lei da inércia fosse familiar aos matemáticos, esse método construtivo e instantâneo de encontrar fórmulas para determinar o número de raízes

⁴⁴D'ailleurs cette équation sera semblable à celle que l'on rencontre dans la théorie des inégalités séculaires des mouvements des planètes, et dont les racines, toutes réelles, jouissent de propriétés dignes de remarques. Quelques-unes de ces propriétés étaient déjà connues : nous allons les rappeler ici, et en indiquer de nouvelles.

reais dentro de limites prescritos teria, com toda probabilidade, sido descoberto há muito tempo, como uma consequência óbvia dessa lei.⁴⁵ (SYLVESTER, 1853f, p. 413, Tradução Nossa)

Nessa citação, encontramos uma evidência da relação entre a *Teoria dos Invariantes* e as raízes da *Equação Secular*. O método anunciado por Sylvester utiliza o teorema de Sturm como meio de determinar as raízes de polinômio em um intervalo pré-definido (SYLVESTER, 1853f, art. 47). Como Sinaceur (1991) aponta, essa é uma ação definitiva para determinar a natureza das raízes de equações que se assemelham àquela que surgiu das ideias de Lagrange e Cauchy.

Entendemos que essa relação revela uma das conexões que colocam a matemática produzida pelo Reino Unido no cenário das pesquisas da Europa. Quando olhamos para o período do recorte desta tese, tanto temporal quanto nos jornais, encontramos alguns artigos britânicos que mostram a existência do interesse no assunto e as particularidades em comparação ao continente.

No resumo "On the theory of the Perturbations of the Planets" (IVORY, 1837), o autor aponta as dificuldades para descrever os movimentos dos planetas. Apesar de não citar diretamente a *Equação Secular* e a obra de Lagrange, o autor reconhece a existência de métodos que buscavam identificar as desigualdades. Nesse mesmo ano Liouville publica uma nota sobre a troca de correspondências entre D'Alembert e Lagrange, com foco em Lagrange (1766). Além disso, o autor continua suas contribuições para o assunto com o artigo "Sur les variations séculaires des angles que forment entre elles les droites résultant des intersections des orbites de Jupiter, Saturne et Uranus" (LIOUVILLE, 1839), em que realiza uma análise empírica do movimento de planetas específicos.

No *Jornal do Crelle*, encontramos dois artigos correlatos em 1843. O primeiro deles tem o título "Sur L'élimination des noeuds dans le probleme des trois corps" (JACOBI, 1843) e trata das relações entre os planos descritos pelas órbitas de dois corpos que circulam no entorno de um ponto fixo. O segundo, por sua vez, lida mais diretamente com o problema da redução dos polinômios homogêneos para soma de quadrados, o que o aproxima da *Equação Secular*.

Sabe-se que o problema de transformar uma função inteira homogênea de segundo grau de três variáveis em uma em que os três produtos das variáveis estão faltando por meio de substituições lineares ocorre com frequência na análise e em suas aplicações à geometria e à mecânica, e que é por isso que já está sendo tratado de várias maneiras. Que a

⁴⁵Had the law of inertia been familiar to mathematicians, this constructive and instantaneous method of finding formulae for determining the number of real roots within prescribed limits would, in all probability, have been discovered long ago, as an obvious consequence of such law.

equação cúbica, da qual depende a solução, sempre tem três raízes reais já foi provado de várias maneiras; mas a forma mais direta de prova, a saber, representar a expressão algébrica, de cujo sinal depende se a equação cúbica tem três ou uma raiz real, como uma soma de quadrados, pela qual o sinal é completamente determinado, ainda não foi tentado.⁴⁶ (KUMMER, 1843, p. 268, Tradução Nossa)

Como pode ser visto, o autor tem conhecimento das conexões que envolvem o problema da redução de um polinômio homogêneo à soma de quadrados. Entretanto, esse texto deixa claro que lida especificamente com formas quadráticas, o que conecta esse trabalho à *Equação Secular*. Destacamos o fato de ainda não existir uma solução definitiva para o problema, porém é possível perceber uma abordagem algébrica do problema, fator que só figura na matemática britânica.

É nesse contexto que encontramos outros trabalhos que foram publicados no Reino Unido. Entre 1844 e 1846, Brice Bronwin e Hugh Blackburn apresentam três trabalhos que lidam com as investigações sobre órbita de planetas, dois na *Philosophical Magazine* e um no CDMJ. Apesar das referências feitas a Lagrange, esses artigos não lidam com a transformação de polinômios em somas de quadrados, o que reflete o afastamento dos britânicos em relação ao continente nessa época e evidencia a importância da *Comunidade britânica dos Invariantes*, que faz a associação do teorema de Sturm com a natureza das raízes da *Equação Secular* a partir da obra de Sylvester.

Ainda em 1846, a discussão sobre as propriedades da equação que auxilia na descrição das desigualdades dos movimentos dos planetas ganha novas contribuições. Em artigo publicado no volume 30 do *Jornal do Crelle*, Borchardt retomou o trabalho de Kummer e propôs uma extensão do resultado que relaciona a natureza das raízes de uma forma quadrática e a redução do polinômio à soma de quadrados (BORCHARDT, 1846, p. 38). Destacamos que esse artigo se aproxima da abordagem que Sylvester adotará em 1852 e que é base da Lei de Inércia. Ao associar as resultantes dos sistemas que descrevem o problema dos planetas, o autor nos revela também uma conexão com o teorema de Sturm, uma vez que depende da determinação das raízes da equação.

Outra característica importante é a abordagem algébrica do problema. Borchardt utiliza as estruturas matriciais, bem como o artifício do cálculo de autovalores para a

⁴⁶Die Aufgabe, eine homogene ganze Function zweiten Grades von drei Variabeln durch lineäre Substitutionen in eine solche zu verwandeln, in welcher die drei Producte der Variabeln fehlen, kommt bekanntlich in der Analysis und in ihren Anwendungen auf Geometrie und Mechanik häufig vor, und ist darum auch schon vielfältig behandelt worden. Dafs die cubische Gleichung, von welcher die Lösung abhängt, immer drei reale Wurzeln hat, ist auch schon auf mehrere Arten bewiesen worden; die directeste Beweis-Art aber, nämlich den algebraischen Ausdruck, von dessen Vorzeichen es abhängt, ob die cubische Gleichung drei oder eine reale Wurzel hat, als eine Summe von Quadraten darzustellen, wodurch das Vorzeichen vollständig bestimmt wird, hat man bisher noch nicht versucht.

determinação dos coeficientes da forma canônica reduzida do polinômio inicial, fator que conecta esse trabalho às ideias de Lagrange, Cauchy e Lebesgue.

Na teoria das perturbações seculares e pequenas oscilações, leva-se a um sistema de equações lineares em que os coeficientes das várias incógnitas são simétricos em relação à diagonal, faltam os termos completamente constantes e todos os coeficientes localizados na diagonal ainda têm a mesma magnitude — x é adicionado. Eliminando as incógnitas de tais equações lineares, obtém-se uma equação condicional que x deve satisfazer. ⁴⁷ (JACOBI, 1846, p. 51, Tradução Nossa)

Esse parágrafo inicial descreve os rumos que as investigações sobre as desigualdades seculares tomaram. Ele mostra, de forma direta, o processo de diagonalização da matriz associada a um sistema de equações lineares (lembrando que o termo matriz não existia na época), como forma de reduzir as formas algébricas. Para isso, ele constrói o que chama de "equação condicional", da qual surgem as raízes que são exigidas reais para a descrição das perturbações seculares.

Os dois últimos trabalhos demonstram como a questão da *Equação Secular* passou por uma mudança de cultura, no sentido do que mostra Brechenmacher (2008). A consolidação dos interesses, especificamente para a natureza algébrica do problema, mostra um processo de ressignificação das técnicas desde a obra de Lagrange. Além disso, o vínculo com o teorema de Sturm também se torna mais evidente nesse período, como pode ser visto no artigo "Développements sur l'équation a l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes" (BORCHARDT, 1847), que é uma extensão do trabalho publicado um ano antes no *Jornal do Crelle*.

Antes de entrar na questão especial a que se refere a proposição enunciada no n.º 1, é ainda necessário recordar as expressões de cujo signo depende a realidade das raízes das equações algébricas. A determinação dessas expressões é uma simples aplicação do famoso teorema do Sr. Sturm sobre equações algébricas. ⁴⁸ (BORCHARDT, 1847, p. 54, Tradução Nossa)

A proposição a qual o autor se refere trata da realidade das raízes da equação característica associada a sistemas de ordem maior ou igual a 2. Como pode ser visto,

⁴⁷In der Theorie der Säcularstörungen und der kleinen Oscillationen wird man auf ein System linearer Gleichungen geführt, in welchem die Coëfficienten der verschiedenen Unbekannten in Bezug auf die Diagonale symmetrisch sind, die ganz constanten Glieder fehlen und zu allen in der Diagonale befindlichen Coëfficienten noch dieselbe Größe — x addirt ist. Durch Elimination der Unbekannten aus solchen linearen Gleichungen erhält man eine Bedingungsgleichung, welcher x genügen mufs.

⁴⁸Avant d'entrer dans la question spéciale à laquelle se rapporte la proposition énoncée dans le n° 1, il faut encore rappeler les expressions du signe desquelles dépend la réalité des racines des équations algébriques. La détermination de ces expressions est une simple application du célèbre théorème de M. Sturm sur les équations algébriques.

Borchardt reconhece a utilidade do teorema de Sturm. Além disso, ele também identifica a importância de Sylvester na discussão sobre as raízes, ao se referir às fórmulas apresentada em Sturm (1842). Nesse ponto, podemos observar o que Sinaceur (1991) chama de ciclo de ideias sturmianas. Essas ideias, apontadas pela autora, se relacionam com o que chamamos nesta tese de resignificação, uma vez que se tratam de conceitos e técnicas que foram sendo negociados nos artigos publicados pelos matemáticos que se aproximam por conta do interesse comum. Ressaltamos que esse fator representa um momento importante no processo de credibilização da matemática que vinha sendo produzida em solo britânico.

No mesmo período desses últimos trabalhos, encontramos dois artigos britânicos que investigaram o assunto das perturbações dos movimentos dos planetas, mas ainda não se conectavam com as discussões algébricas que passaram a caracterizar alguns trabalhos do continente, como vimos até este momento. O texto "On the perturbations of planets moving in eccentric and inclined orbits"(LUBBOCK, 1847) mantém uma abordagem empírica do problema quando utiliza fórmulas para determinar a trajetória do cometa Halley. Além disso, há o texto "On a particular transformation of the differential equations of motion in the theory of planetary perturbation"(BRONWIN, 1848), que tem abordagem analítica por conta do foco nas propriedades das equações diferenciais dos movimentos.

Após este período, a convergência entre as abordagens do continente e do Reino Unido se evidencia nos artigos publicados por Sylvester em 1852 e 1853. Nesses dois anos, observamos a consolidação da *Teoria dos Invariantes*, o que envolve a enunciação da Lei de Inércia e sua aplicação como forma de determinar os eixos de inércia de um corpo sólido, além de sua contribuição para resolver o problema da *Equação Secular*. Essa convergência também se revela através da participação Hermite, um correspondente importante do matemático inglês.

Em reflexão adicional, retiro minha opinião expressa [?] ontem à noite e recomendo a continuação ([illeg.]) da palavra "Catalecticante". Esse tipo de invariante é tão importante e está em tão estreita relação com o Canonizante que não podemos deixá-lo sem nome e, como esse nome foi usado por Cayley, assim como por mim, também pode permanecer.⁴⁹[SYLVESTER para HIRST, dez/1862](PARSHALL, 1998, p. 111, Tradução Nossa)

Nesse trecho da carta que Sylvester escreveu para Thomas Hirst, um dos idealizadores da London Mathematical Society, vemos a negociação de significados para termos específicos para a nova Teoria dos britânicos. O termo canonizante se refere ao *invariante*

⁴⁹On further reflexion I retract my opinion expressed [?] yesterday evening and recommend the continuance ([illeg.]) of the word "Catalecticant." This sort of invariant is so important and stands in such close relation to the Canonizant that we cannot afford to let it go unnamed and as this name has been used by Cayley as well as myself it may as well remain.

associado ao processo de redução de polinômios homogêneos à soma de quadrados, a saber: a diferença entre o número de quadrados positivos e quadrados negativos.

Podemos afirmar que a *Teoria dos Invariantes* tem participação importante na evolução dos desdobramentos que surgiram a partir do problema da *Equação Secular*. Como pode ser visto nos artigos que apresentamos aqui, essa participação ocorre, de maneira específica, através da obra de Sylvester com o tratamento dado por ele ao teorema de Sturm e sua contribuição para a determinação da natureza das raízes da equação característica. Esse fator e outros desdobramentos da nova Teoria britânica, como os problemas de contatos em dimensão n , os problemas de rotação de corpos rígidos, entre outros, constituem um processo de credibilização da produção matemática do Reino Unido.

6.7 A Teoria dos Invariantes após 1865

Além dos desdobramentos apresentados até aqui, faz-se necessário realizar alguns apontamentos sobre a evolução da *Teoria dos Invariantes* após 1865, último ano do recorte temporal desta tese. Esta seção busca compreender o modo como as ideias já consolidadas foram apresentadas em alguns livros-texto que se dedicaram a sistematizar os conceitos que surgiram nos artigos que analisamos ao longo deste trabalho.

Diferente dos artigos publicados em periódicos especializados, que possibilitam uma descrição das ideias no momento de suas publicações, os livros-texto possibilitam a apresentação sobre o modo como as mesmas noções foram internalizadas e passaram a ser comentadas por um público mais amplo, o que envolve não apenas os pesquisadores, mas também os alunos de instituições de ensino como academias e universidades.

A obra que melhor representou as ideias britânicas sobre os *invariantes* foi o livro *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra* (SALMON, 1859). O livro está organizado em 17 capítulos, dos quais os seis primeiros preparam o leitor para as definições sobre os *invariantes*. Nessas páginas iniciais, encontramos propriedades de determinantes, suas aplicações sobre eliminação, além de objetos importantes para os capítulos seguintes como os *eliminantes* (nome dado aos resultantes do processo de eliminação de variáveis) e discriminantes.

Sobre os *invariantes*, o autor se dedica a apresentar as práticas que geram as formas associadas com tais características. Dessa forma, ele apresenta técnicas que geram *concomitantes*, de acordo com os interesses britânicos da época. Essa é uma característica importante que nos permite diferenciar a perspectiva do continente para o Reino Unido.

Na geometria de curvas e superfícies, todas as transformações de coordenadas são efetuadas por transformações lineares; invariantes, então, são

funções dos coeficientes que expressam certas propriedades fixas da curva ou superfície que são independentes de nossa escolha de eixos; como a condição de que uma curva ou superfície deve ter um ponto duplo etc. As covariantes representam certas outras curvas ou superfícies tendo uma relação fixa com a dada, independente de nossa escolha de eixos. O leitor verá então que a teoria da descoberta dos invariantes ou covariantes de uma quántica deve levar à solução de muitos problemas geométricos importantes.⁵⁰ (SALMON, 1859, p. 52, Tradução Nossa)

Essa nota evidencia que os *concomitantes* eram vistos como conseqüências das investigações sobre transformações geométricas. Esse aspecto caracteriza a natureza da agenda britânica iniciada por Cayley nos anos 1840. Nesse contexto, os exemplos de *invariantes* e *covariantes* surgem de discussões sobre problemas como discriminantes e resultante de sistemas de *quantics* binários, funções simétricas das raízes dos polinômios, substituições de diferenciais parciais das formas quadráticas e quárticas, além de um sistema de duas equações quadráticas.

Esses exemplos, que fazem parte da lição oito do livro-texto, são responsáveis pela construção da imagem britânica da *Teoria dos Invariantes*. Em outras palavras, a busca iniciada por Cayley em 1845 pode ser compreendida como uma procura por formas com a propriedade de invariância que surgem nos temas que orbitam a Teoria. Esse é o caso das investigações sobre a *Equação Secular*, que revelam a assinatura de formas quadráticas como *invariantes*.

Essa é uma diferença fundamental em comparação à percepção germânica da *Teoria dos Invariantes*. Em 1872, Clebsch publica o livro *Theorie der Binären Algebraischen Formen*, onde ele apresenta definições sobre os *invariantes*. Logo no início de suas reflexões encontramos a seguinte descrição:

Seja Π uma tal função racional inteira das variáveis x_1, x_2 e dos coeficientes a_0, a_1, a_2, \dots , que tem a propriedade estabelecida acima, uma propriedade que deve ser brevemente chamada de propriedade invariante. Se então, como acima, ξ_1, ξ_2 são as novas variáveis a'_0, a'_1, a'_2, \dots os coeficientes da função transformada f' , então deve-se ter a equação:

$$(1)\Pi(a'_0, a'_1, a'_2, \dots; \xi_1, \xi_2) = r^\lambda (a_0, a_1, a_2, \dots; x_1, x_2),$$

através do qual a propriedade invariante é afirmada.⁵¹ (CLEBSCH, 1872, p. 3, Tradução Nossa)

⁵⁰In the geometry of curves and surfaces, all transformations of co-ordinates are effected by linear transformations ; invariants, then, are functions of the coefficients expressing certain fixed properties of the curve or surface which are independent of our choice of axes ; such as the condition that a curve or surface should have a double point, etc. Covariants represent certain other curves or surfaces having a fixed relation to the given one, independent of our choice of axes. The reader will see then that the theory of the discovery of the invariants or covariants of a quantic must lead to the solution of many important geometrical problems.

⁵¹Sei Π eine solche ganze rationale Function der Veränderlichen x_1, x_2 und der Coefficienten a_0, a_1, a_2, \dots , welche die oben festgestellte Eigenschaft besitzt, eine Eigenschaft, welche kurz als Invarianteneigenschaft

Existe uma sutileza importante nessa citação. Quando se refere à função racional com propriedade estabelecida, o autor trata dos *invariantes*. Diferente do texto de Salmon, que buscava listar as formas associadas que surgem nos problemas propostos, Clebsch estava mais interessado nas propriedades delas. Este aspecto se reflete nas propriedades apresentadas no primeiro capítulo do livro-texto, que se concentra na análise dos *invariantes* já existentes:

Então, vamos assumir um sistema arbitrariamente grande de formas lineares como dado:

$$A = a_1x_1 + a_2x_2$$

$$B = b_1x_1 + b_2x_2$$

.....

e procure todos os *invariantes* a serem formados a partir disso. Primeiro, pode-se fornecer facilmente um número de formações que possuem a propriedade invariante. Estes são os determinantes formados a partir dos coeficientes de pares das formas dadas.⁵² (CLEBSCH, 1872, p. 9, Tradução Nossa)

Essa citação é um dos exemplos de que o discurso adotado por Clebsch considera o conhecimento sobre a existência finita dos *invariantes*. Esse fator é resultado da mudança de perspectivas causada pelo teorema de finitude de Gordan.⁵³ Entendemos que o olhar para obras, sejam artigos ou livros-textos, que lidaram com a *Teoria dos Invariantes*, se divide em dois períodos: antes e depois de 1868. As próximas publicações foram analisadas à luz dessa mudança de perspectiva, de modo que fosse possível entender o papel de britânicos e germânicos na visão de autores de uma época posterior à consolidação da comunidade estudada nesta tese.

bezeichnet werden soll. Sind dann, wie oben, ξ_1, ξ_2 die neuen Veränderlichen und a'_0, a'_1, a'_2, \dots die Coefficienten der transformirten Function f' , so muss man die Gleichung haben:

$$(1) \Pi(a'_0, a'_1, a'_2, \dots; \xi_1, \xi_2) = r^\lambda (a_0, a_1, a_2, \dots; x_1, x_2),$$

durch welche die Invarianteneigenschaft ausgesagt wird.

⁵²Nehmen wir also ein beliebig grosses System von linearen Formen als gegeben an:

$$A = a_1x_1 + a_2x_2$$

$$B = b_1x_1 + b_2x_2$$

.....

und suchen alle aus diesem zu bildenden Invarianten. Zunächst kann man leicht eine Zahl von Bildungen angeben, welche die Invarianteneigenschaft besitzen. Es sind dieses die aus den Coefficienten je zweier der gegebenen Formen gebildeten Determinanten.

⁵³Este teorema foi apresentado no volume 69 do *Jornal do Crelle* com o título "Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Function mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist" (GORDAN, 1868). Autores como Parshall (1989) e Crilly (1988) apontam este episódio como uma mudança nos rumos das pesquisas sobre os *invariantes*

Em 1875, o próprio Gordan publicou um livro de 62 páginas, onde ele trata dos *invariantes* a partir da possibilidade de uma representação finita. Essa obra se preocupou apenas com propriedades da representação simbólica dos *invariantes*. Um ano depois, encontramos as primeiras versões, britânicas que levavam em conta o teorema da finitude.

A terceira edição do livro de Salmon, já publicada após o teorema de Gordan, reservou dois capítulos para o método simbólico alemão. Inicialmente, o autor discute a notação abreviada que Cayley utilizou no início de sua agenda sobre os *invariantes*. Essa explanação tem o objetivo de apresentar as contribuições de Clebsch e Aronhold sobre o assunto.

As notações explicadas nesta Lição fornecem um cálculo completo, por meio do qual invariantes e covariantes podem ser transformados e a identidade de diferentes expressões verificada. Em uma lição subsequente, daremos ilustrações das aplicações deste método, referindo aqueles desejosos de mais informações à valiosa Theorie der binären algebraischen Formen de Clebsch, em cujo trabalho este método simbólico é a base de todo o tratamento do assunto.⁵⁴ (SALMON, 1876, p. 142, Tradução Nossa)

Este é trecho final da 14^a lição do livro de Salmon. Como podemos ver, o autor se preocupa em identificar a relação que existe entre as práticas *invariantes* britânicas e germânicas. Além disso, nota-se o reconhecimento da influência que o livro-texto de Clebsch vinha exercendo entre os matemáticos envolvidos com a Teoria. A última lição do livro de Salmon traz o teorema de Gordan. Os *transvectants* são apresentados pelo autor como um método para gerar *covariantes* a partir da combinação de outros já conhecidos. Trata-se de uma prática que utiliza a notação simbólica dos alemães, o que possibilita a demonstração de que o número de *covariantes* de qualquer forma é sempre finito.

É importante destacar que o livro de Faa di Bruno sobre formas binárias, já apresentado nesta tese, também foi publicado no mesmo ano da terceira edição do livro de Salmon. Diferente do matemático irlandês, o texto do italiano apresenta um olhar retrospectivo da *Teoria dos Invariantes*, de modo que ele se propõe a apresentar seu desenvolvimento histórico para o leitor. Nesse contexto, são apresentadas propriedades de *invariantes*, como o grau das formas associadas em relação ao polinômio original, as características dos novos coeficientes após transformação e o teorema inicial enunciado por Boole em 1841.

⁵⁴The notations explained in this Lesson afford a complete calculus, by means of which Invariants and covariants can be transformed and the identity of different expressions ascertained. We shall in a subsequent Lesson give illustrations of the applications of this method, referring those desirous of further information to Clebsch's valuable Theorie der binären algebraischen Formen, in which work this symbolical method is the basis of the whole treatment of the subject.

O papel de Sylvester fica destinado às propriedades dos *covariantes*, em razão de seu trabalho com o cálculo das formas. Destacamos o uso dos termos cunhados pelo inglês como *emanantes* e *sygygies*. O problema dos *sygygies* é descrito de modo que evidencia a diferença fundamental entre as perspectivas britânica e germânica da *Teoria dos Invariantes*.

Seguindo o mesmo caminho de cálculo para as formas de ordem 5, 6, etc., o Sr. Cayley nas memórias citadas acreditou por um momento que a partir da forma quártupla o número de covariantes fundamentais era ilimitado, enquanto ele é limitado para cúbica e formas biquadráticas, como acabamos de ver dele. Mas M. Gordan e Clebsch descobriram recentemente por outros métodos que esse número é, ao contrário, finito. Apresentar aqui suas pesquisas seria ultrapassar os limites do quadro restrito do trabalho; é por isso que nos contentaremos em dar aqui a nota das covariantes para as formas quárticas e sêxticas, que M. Clebsch fixa em 23 para a forma quártica, e em 26 para a forma sêxtica... ⁵⁵ (BRUNO, 1876, p. 238, Tradução Nossa)

Na citação, o autor aponta, de maneira explícita, a diferença fundamental entre as ideias britânicas e germânicas. Apesar de se dedicar às demonstrações das práticas e ideias dos matemáticos alemães, fica evidente a percepção do papel da *Comunidade Britânica dos Invariantes* como fundadora dos estudos. A participação de autores como Clebsch e Gordan de fato muda os rumos da Teoria, mas Bruno a entende como um produto essencialmente do Reino Unido.

Em 1881, o professor do Trinity College of Dublin, William Snow Burnside (1839-1920) publica o conhecido livro *The Theory of Equations: with an introduction to the theory of binary algebraic forms*, que mantém a tradição dos estudos sobre as formas binárias, com a qual a *Teoria dos Invariantes* se consolidou historicamente, afirmação que se justifica na análise dos outros livros-texto já analisados nesta seção.

Em seu prefácio, o autor aponta sua decisão de tratar dos *covariantes* e *invariantes* por meio das funções das diferenças das raízes das equações (PANTON; BURNSIDE, 1881, p 311). Essa nova abordagem permite ao autor apresentar todos os *concomitantes* conhecidos pelos britânicos através de equações polinomiais com um processo que ficou conhecido como homogeneização. É importante destacar que o autor se limita a analisar formas quárticas, cúbicas e quárticas. No entanto, se preocupa em apresentar o número de *invariantes* de cada uma destas alternativas.

⁵⁵En poursuivant la même voie de calcul pour les formes d'ordre 5, 6, etc., M. Cayley dans le Mémoire cité avait cru un instant que à partir de la forme quintique le nombre des covariants fondamentaux était illimité, tandis qu'il est limité pour les formes cubique et biquadratique, comme nous venons de voir d'après lui. Mais M. Gordan et Clebsch ont trouvé dernièrement par d'autres méthodes que ce nombre est au contraire fini. Exposer leurs recherches ici ce serait dépasser les limites du cadre restreint de l'ouvrage; c'est pourquoi nous nous contenterons de donner ici la note des covariants pour les formes quintique et sextique, que M. Clebsch fixe à 23 pour la forme quintique, et à 26 pour la forme sextique...

Como podemos ver até este momento, o teorema de Gordan a respeito da finitude do sistema de *covariantes* é o principal fator das produções que analisamos nesta seção. Esse fator pode ser percebido nas palestras do próprio Gordan, que foram publicadas em 1885 e 1887 sob o título *Dr. Paul Gordan's Vorlesungen Über Invariantentheorie*. Esse trabalho contou com dois volumes, sendo o primeiro destinado às propriedades dos determinantes e o segundo às formas binárias como as outras obras já citadas.

Os textos de Gordan reconhecem o papel de Salmon na divulgação das práticas sobre os *invariantes*, uma vez que aponta a obra do inglês como referência, ao lado de Clebsch e Faa di Bruno (GORDAN, 1885/1887)⁵⁶. Além disso, Cayley e Sylvester são destacados como idealizadores das práticas dos *invariantes* que fazem parte do processo de construção de ideias úteis para a compreensão do teorema da finitude. No primeiro volume, Cayley é apontado por conta dos *invariantes* utilizados em sua abordagem do método de eliminação Bézout (GORDAN, 1885/1887, p. 158), ao mesmo tempo em que Sylvester ganha destaque por conta de sua abordagem com os determinantes funcionais (GORDAN, 1885/1887, p. 148). Além disso, o simbolismo utilizado nos *Hyperdeterminantes* é representado como comparável ao trabalho de Aronhold que serviu como inspiração para o texto de Clebsch em 1872, e as práticas de redução de determinantes desenvolvidas pelo personagem central desta tese são colocadas como base das ideias de Gordan. Com isso, podemos afirmar que os britânicos contavam com o reconhecimento dos matemáticos alemães, sobre seu pioneirismo. Entretanto, a diferença entre as abordagens dos dois países carrega uma marca histórica.

Mas na medida em que as conferências se movem dentro dos limites assim marcados, elas não serão apenas uma introdução à Teoria dos Invariantes, mas conduzirão o leitor até o presente ponto de vista, ao qual esta disciplina foi alcançada pelos excelentes trabalhos de Hermite e Brioschi, Cayley, Sylvester e Salmon, Aronhold, Clebsch e Gordan.⁵⁷ (GORDAN, 1885/1887, p. VI, Tradução Nossa)

O autor indica que as palestras são o norte de suas reflexões e que os matemáticos do Reino Unido servem de base para elas. Nesse sentido, este trecho revela que o reconhecimento alemão sobre as práticas oriundas do Reino Unido carrega uma ideia de ingenuidade dos britânicos. Parshall (2006a), afirma que o estilo do Reino Unido não se mostrou tão rigoroso quanto à abordagem germânica da *Teoria dos Invariantes*. Isso

⁵⁶Os dois volumes desta obra foram publicados em 1885 e 1887. Optamos por citar as duas datas.

⁵⁷Insoweit aber die Vorlesungen sich in den so markirten Grenzen bewegen, werden sie nicht nur eine Einführung in die Theorie der Invarianten sein, sondern den Leser bis zu dem heutigen Standpunkte geleiten, zu welchem diese Disciplin durch die hervorragenden Arbeiten von Hermite und Brioschi, Cayley, Sylvester und Salmon, Aronhold, Clebsch und Gordan gefördert wurde.

é observado na leitura de Crilly (1988), que aponta uma reação tardia ao teorema da finitude de Gordan.

Por fim, é importante destacar a ideia de determinar todos os *invariantes* associados ao sistema de formas, para além das binárias. Existiram algumas tentativas, mas essa generalização surge no início da década de 1890 na obra de Hilbert. Em Hilbert (1993), encontramos as seguintes afirmações:

A prova de Gordan também não pode ser generalizada para formas em muitas variáveis arbitrariamente; ele conseguiu apenas para formas ternárias de ordem dois, três e quatro (Math. Ann. 1, p. 90, e o aviso em Clebsch e Lindemann, Geometrie, vol. I, p. 274). Mais tarde, Mertens provou a finitude de uma forma não simbólica, mas também apenas para formas binárias (cf. Journal für Reine und Angewandte Mathematik 100 de Crelle, p. 223). Esta prova também é muito incômoda. Mas então, Hilbert (Math. Ann. 33) deu uma prova muito simples e relativamente curta do mesmo fato. Baseia-se na representação de um invariante em função das diferenças das raízes; mas por esta mesma razão também vale apenas para formas binárias e não pode ser generalizado para formas com mais variáveis.⁵⁸ (HILBERT, 1993, p. 115, Tradução Nossa)

Como pode ser visto, o autor demonstrava preocupação em destacar outras iniciativas para a generalização do teorema da finitude. Além disso, a abordagem de Hilbert nos revela a importância de alguns aspectos da obra de Sylvester, tais como a utilização das diferenças das raízes como forma de representação dos *invariantes*. No final do século XIX, a imagem do processo de evolução da *Teoria dos Invariantes* se dividia em três fases: o início com Sylvester e Cayley, que Hilbert chamou de ingênua por conta das abordagens pouco rigorosas; a consolidação com Clebsch e Gordan, que se caracteriza pela formalização das ideias com uma abordagem analítica; e fase crítica, marcada pela demonstração da finitude dos *concomitantes* associados a formas, e sistemas de formas, independentemente do número de variáveis.

Conclusão

As análises que apresentamos neste capítulo servem como complemento para a descrição da comunidade de práticas que nos propomos a estudar nesta tese. Como dissemos

⁵⁸Gordan's proof can also not be generalized to forms in arbitrarily many variables; he only succeeded for ternary forms of order two, three, and four (Math. Ann. 1, p. 90, and the notice in Clebsch and Lindemann, Geometrie, vol. I, p. 274). Later, Mertens proved finiteness in a nonsymbolic way, but also only for binary forms (cf. Crelle's Journal für Reine und Angewandte Mathematik 100, p. 223.) This proof too is very cumbersome. But then, Hilbert (Math. Ann. 33) gave a very simple and relatively short proof of the same fact. It is based on the representation of an invariant as a function of the differences of the roots; but for this very reason it also holds only for binary forms and cannot be generalized to forms with more variables.

anteriormente, estas análises passariam por algumas camadas que revelam aspectos dos matemáticos britânicos que compartilharam práticas relacionadas aos *invariantes*. Após a camada social, apresentada no capítulo 2; as práticas de Sylvester, apresentadas no capítulo 3; e a perspectiva coletivista, apresentada nos capítulos 4 e 5, uma visão sobre o modo como as contribuições deste grupo de matemáticos britânicos repercutiu no continente, se mostrou um aspecto essencial para compreendermos as características da *Comunidade Britânica dos Invariantes*.

A análise das comunicações dos britânicos nos jornais franceses e alemães, nos mostrou um grupo reduzido, porém ativo, de divulgadores: Cayley, Spottiswoode, Salmon, Michael Roberts e Sylvester. Desses nomes, o primeiro teve participação significativa no *Jornal do Crelle*, onde se dedicou a discutir práticas relacionadas à *Teoria dos Invariantes*, o que incluiu as ideias de Sylvester. Além de seu amigo inglês, ele também se debruçou sobre contribuições de matemáticos como Joachimsthal, Eisenstein, Hesse e Plücker, o que mostra que suas contribuições neste recorte tiveram um fundo geométrico e se associaram ao início do desenvolvimento de práticas que também geraram textos sobre os *invariantes* no *Jornal do Crelle*, como descrito por Parshall (1989).

O papel dos outros personagens passa por apresentar reflexões de técnicas importantes para as práticas dos *invariantes*. É o caso de Spottiswoode que se destacou com seus artigos sobre as propriedades dos determinantes. Por outro lado, Salmon e Roberts também contribuem para a divulgação das técnicas dos *invariantes*, sendo que o primeiro reforça a conexão da Teoria com problemas relacionados à geometria e o segundo, avança nas investigações propostas por seus antecessores.

Além de ser apresentado como uma referência para as ideias da nova Teoria britânica, destacamos que a atuação de Sylvester vai além das publicações nos periódicos, o que o levou a tornar-se membro correspondente da academia de ciências de Paris. Com isso, podemos afirmar que as ideias dos *invariantes* foram as principais práticas britânicas que chegaram ao continente, através dos artigos que lidaram com polinômios homogêneos, tanto no *Jornal do Crelle*, quando nos franceses *Liouville* e *Terquem*.

Ao considerar a recepção nos jornais do continente, foi possível notar algumas diferenças entre eles. Na França, o *Jornal de Liouville* repercute as práticas britânicas a partir das mãos de matemáticos como Bazin, Jonquières, Brioschi, Faa di Bruno e Combescure. Os três primeiros se destacam com interpretações de problemas geométricos, através de práticas que foram compartilhadas com os britânicos. Por outro lado, os dois últimos matemáticos se mostram como verdadeiros divulgadores das ideias dos *invariantes*, fator que demonstra o ganho de credibilidade da nova Teoria produzida no Reino Unido.

Além desses personagens, Hermite é o nome mais significativo no processo de

disseminação da *Teoria dos Invariantes* em solo francês. Sua participação direta nas investigações sobre as transformações aplicada aos polinômios homogêneos e a relação com as formas associadas se revela com suas publicações em todos os jornais que escolhemos analisar em nossa investigação. No *Jornal de Liouville*, ele se dedica a apresentar as ideias de Cayley em relação as outras contribuições de matemáticos alemães.

No caso do *Nouvelles Annales*, encontramos uma conexão maior com as práticas britânicas. Além das iniciativas que apresentaram a abordagem das coordenadas homogêneas, as quais ocorreram no mesmo período em que aconteceram no Reino Unido, esse periódico se dedicou a explicar as características da agenda iniciada por Cayley nos anos 1840 e continuada por Sylvester na década seguinte. Essas publicações marcam uma diferença significativa entre as duas revistas francesas, no que diz respeito à divulgação de conhecimento matemático. Enquanto o *Jornal de Liouville* se caracterizou por divulgar obras originais de pesquisa, o NAM se dedicou a um caráter didático, que visava a esclarecer práticas que já circulavam em outros meios. Entendemos que é natural que a recepção da nova Teoria britânica tenha sido mais significativa neste jornal.

Além do próprio editor do NAM, a *Teoria dos Invariantes* foi comentada nas páginas do jornal através das mãos de matemáticos como Painvin, Genocchi, Faure e Blerzy. Todos esses personagens se dedicaram a apresentar propriedades de *invariantes*, numa relação clara com as práticas desenvolvida pelos integrantes da comunidade britânica. Como pudemos mostrar, essas contribuições se caracterizaram por apresentar práticas de Sylvester, como os conceitos de *covariantes* e *discriminante*, além da Lei de Inércia para formas quadráticas.

Em aspectos globais, a comparação entre as redes 32 e 33, nos mostrou que a recepção das práticas da comunidade que estamos estudando ocorreu com um foco maior nos problemas que envolveram polinômios homogêneos de grau 2. Formas algébricas com grau superior a 2 foram abordadas em artigos que estavam ligados à repercussão da *Teoria dos Invariantes*. Essa característica evidencia a percepção dos franceses do modo como as ideias surgiram no Reino Unido.

No caso dos matemáticos dos Estados Alemães, encontramos uma recepção das práticas britânicas nos textos de Joachimsthal, Hesse, Eisenstein e Aronhold. Os dois primeiros apresentaram um contato mais voltado para problemáticas geométricas, embora objetos como o hessiano tenham se mostrado úteis para a geração de *invariantes*. Por outro lado, os dois últimos participaram ativamente da história do desenvolvimento do germânico da *Teoria dos Invariantes*, uma vez que as formas algébricas que eles apresentaram passaram a fazer parte da lista de *invariantes fundamentais*, proposta por Cayley no final da década de 1840. Além disso, matemáticos como Hermite, Brioschi e Clebsch contribuíram com reflexões sobre as aplicações da nova Teoria. Destacamos o

trabalho de Clebsch, que se dedicou especificamente a caracterizar a produção britânica.

Como acontece na repercussão francesa, as formas quadráticas foram o principal objeto matemático utilizado nos textos que selecionamos para este *corpus*. Cayley e Sylvester são referências importantes para os germânicos, exatamente por conta de suas contribuições com os *invariantes*. Um aspecto que merece destaque é a abordagem algébrica dos britânicos que contrasta com as práticas dos alemães. Essa oposição reforça a recepção das ideias da *Comunidade britânica dos Invariantes*, uma vez que esta ganha credibilidade devido à proximidade das práticas, mesmo que por abordagens diferentes. Como exemplo, podemos citar os determinantes funcionais de Hesse, que surgem como geradores de *covariantes* e auxiliam na busca pelos *invariantes* conforme enunciado por Cayley no próprio *Jornal do Crelle*.

Após as leituras dos textos do *Jornal do Crelle* selecionados para esta tese, foi possível perceber o modo como as práticas britânicas foram se misturando às práticas germânicas. Quando olhamos para a figura 31, notamos que o enfoque principal se deu nos *invariantes fundamentais*, o que reflete as ações de Cayley, o principal divulgador das práticas do Reino Unido na Alemanha. Nesse contexto, a figura 34 mostra que a *Teoria dos Invariantes* tem aderência significativa nas publicações dos autores que surgiram no recorte que apresentamos neste capítulo.

Por fim, existiu um coletivo de matemáticos no continente, que atribui uma noção de credibilidade à matemática produzida na Inglaterra. Essa perspectiva reforça a centralidade dos personagens do núcleo da comunidade de práticas dos *invariantes*, que foi um dos pilares importantes para a formação da LMS, como foi mostrado no capítulo 2. Finalmente, entendemos que esse último aspecto da comunidade representa uma faceta externa que legitima sua própria existência.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo geral desta tese foi compreender o papel exercido pela *Teoria dos Invariantes* no desenvolvimento da matemática britânica no segundo terço do século XIX, ao mesmo tempo em que observamos a evolução da carreira de Sylvester. Essas duas frentes nos exigiram uma organização capaz de revelar diferentes aspectos dessa dinâmica. O fio condutor de nossas investigações partiu das demandas pela recolocação da matemática do Reino Unido como influente para os autores do continente e seguiu até a formalização da London Mathematical Society, um marco para as pesquisas britânicas na área.

Além da compilação dos resultados que alcançamos, estas considerações finais destacam as principais ideias que surgiram ao longo de nosso trabalho. As decisões que tomamos, a respeito da organização dos artigos selecionados para análise, do modo como foram relacionadas as ideias dos personagens, da identificação dos autores que se mostraram parte da comunidade sobre a qual nos debruçamos, além do enfrentamento às limitações e da descoberta de possíveis desdobramentos das investigações que conduzimos, têm a função de apresentar uma perspectiva coletivista da matemática britânica.

Olhar para o *corpus* de textos selecionado sob a perspectiva da comunidade, e não através de histórias individuais ou evoluções de um conceito particular, nos permitiu identificar novos aspectos ainda não contemplados, como mostramos ao longo dos capítulos anteriores.

Como forma de expor esses aspectos, dividimos estas considerações finais em cinco seções nas quais tratamos de cada uma das ideias que nos auxiliaram na redação, a fim de explicitar como elas contribuem e contrastam com as discussões que vêm sendo trabalhadas pelos historiadores que nos serviram como referência.

7.1 Sobre a estrutura da tese

Um questionamento fundamental que surge na leitura desta tese é o porquê da escolha do personagem central. Uma vez que nos propomos a analisar práticas que circularam no interior de uma comunidade, é natural ter curiosidade sobre as motivações que levaram à escolha de Sylvester. Em outros termos, é importante explicar os motivos pelos quais não estamos contando esta história através do olhar de outros autores, como por exemplo, Cayley ou Salmon, dois nomes retratados com a mesma importância na história dos *invariantes*.

A resposta para este questionamento se encontra em nossa proposta de uma análise coletiva dos artigos. Portanto, as interações entre os personagens podem ser identificadas nas histórias de cada um deles. Logicamente, os detalhes e os contextos apresentam distinções, porém os assuntos tratados nas publicações que compartilham ideias e desdobramentos sobre os *invariantes* nos levariam ao mesmo *corpus*.

O contexto comum destes compartilhamento de ideias, técnicas e conceitos é o que chamamos de formação de uma comunidade de práticas matemáticas, no sentido adaptado da descrição de Wenger (1999). Um primeiro olhar para a produção de conhecimento matemático nos periódicos britânicos, nos mostra que os interesses mobilizados no entorno da *Teoria dos Invariantes* moldaram o processo de caracterização da matemática produzida pelos personagens que sustentaram a credibilidade da LMS em seus primeiros anos de existência.

Assim, a escolha por Sylvester se justifica por seu papel mobilizador das ideias da comunidade. Diferente de Cayley, que construiu sua reputação com um volume elevado de publicações, ou de Salmon que se notabilizou pela edição de diversos livros-textos com repercussão no continente, Sylvester se mostrou como um articulador das discussões, priorizando a identidade da produção britânica.

Considerando a literatura disponível, percebemos que as contribuições do personagem central desta tese são vistas à luz de seus avanços individuais. Nas biografias de Parshall, os contextos social e cultural são apresentados como balizadores do caminho trilhado por ele. Por outro lado, os trabalhos sobre a história dos *invariantes* apontam as contribuições centrais do personagem para o desenvolvimento da Teoria. Entretanto, essas pesquisas não se concentram nas relações que podem ser evidenciadas pelas práticas produzidas pelos matemáticos envolvidos em temáticas de interesse comum. É sobre esse ponto que foca esta tese, uma vez que entendemos que a participação de outros autores, que lidaram com assuntos correlatos aos *invariantes*, do século XIX ainda não havia sido tratada através de uma perspectiva coletiva.

Nesse sentido, nos concentramos no modo como a comunidade sobre a qual nos debruçamos foi constituída a partir das práticas compartilhadas nos artigos publicados nos periódicos que lidaram com matemática em meados do século XIX. Como um primeiro aspecto, o meio social onde os personagens que fizeram parte deste grupo conviveram nos revela as condições que permitiram o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*. O distanciamento da matemática produzida no Reino Unido, evidenciada por movimentos como a Analytical Society, se reflete na carreira de Sylvester, fator que justifica o olhar da tese partindo das contribuições do inglês.

Como pode ser observado no capítulo 2, o início da carreira de nosso personagem

de pesquisa coincide com o surgimento do CMJ, jornal que se mostrou um espaço de concentração dos matemáticos envolvidos em pesquisa a partir de sua segunda versão, o CDMJ. Apesar da sua primeira publicação no jornal ter ocorrido logo no volume 2 em 1841, a necessidade de dedicação a outra profissão dificultava seu engajamento em um caminho que o levasse a viver da matemática. Esses fatores fizeram com que ele buscasse estabelecer contatos que o mantiveram conectado com a pesquisa até o início da década de 1850.

Do ponto de vista de uma comunidade de práticas que estava por surgir nas páginas dos periódicos britânicos, esse movimento de Sylvester garantiu que ele tivesse conhecimento sobre os interesses de estudo mais recentes. Por conta disso, entendemos que o matemático se colocou numa posição que o permitiu se tornar um influenciador de ideias. Em outras palavras, o desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*, que ocorreu após o período de restrições que nosso personagem havia vivenciado durante sua formação, foi motivado pela perspectiva de uma produção inédita capaz não apenas de recolocar o Reino Unido no mesmo universo de pesquisa em matemática que os outros países do continente, mas também aproximar áreas de interesse comuns no início dos anos 1850.

Dados esses aspectos, afirmamos que as correspondências com os amigos Cayley e Salmon e os contatos com matemáticos de outras nacionalidades deram a Sylvester uma posição central na pesquisa britânica em matemática. Em particular, destacamos o estabelecimento das bases da *Teoria dos Invariantes*, trabalho que se conecta com interesses de matemáticos alemães como Eisenstein e Aronhold. O caminho trilhado pelo inglês se inicia pela adequação dos problemas de contatos de curvas ao método de coordenadas homogêneas de Plücker. As motivações para essa abordagem se tornam explícitas na carta escrita ao Lord Brougham em dezembro de 1849.

Outra decisão que precisamos tomar na elaboração da tese, foi sobre seu formato. Inicialmente, pensamos numa releitura da biografia do personagem de pesquisa considerando o período de 1814 a 1897, porém esse caminho implicava diversos recortes, como um estudo profundo sobre as iniciativas de modernização da matemática britânica (das quais nos limitamos a apresentar a existência) ou investigações sobre o desenvolvimento da pesquisa em matemática nos Estados Unidos. Além disso, a leitura de trabalhos como Despeaux (2002) e Durand-Richard e Paris (1999), nos revelou a possibilidade de interpretar o contexto das práticas em comunidade.

Portanto, a escolha pela delimitação da pesquisa no intervalo de 1837 a 1865, foi inspirada por investigações já existentes sobre periódicos especializados. Trata-se de um período que demandava o surgimento de pesquisadores que, mais do que talentosos em suas áreas, estivessem dispostos a negociar significados e prioridades de conceitos e práticas, de modo que as restrições que descrevemos ao longo da tese se dissipassem. Essa demanda

foi atendida pela atuação dos teóricos *invariantes*.

A escolha dos capítulos também está relacionada a esse contexto. Assim, o capítulo 2 se destinou a descrever as mudanças sociais que possibilitaram a aglutinação de matemáticos em periódicos especializados. Os capítulos 3, 4 e 5 são dedicados à apresentação da *Comunidade britânica dos Invariantes* em diferentes aspectos. É importante destacar que, no começo de nosso trabalho, buscávamos apenas apresentar as práticas comuns nas publicações que lidavam com polinômios homogêneos. No entanto, ao longo da pesquisa surgiu a necessidade de explicar como ideias aparentemente diversas circularam de modo a evidenciar ligações entre os autores

Optamos, no capítulo 3, por apresentar as práticas de Sylvester, evidenciando o papel central que o autor exerceu através dos contatos com matemáticos britânicos e do continente. Em seguida, no capítulo 4, relatamos os personagens que ampliaram o alcance da comunidade. Por fim, no capítulo 5, focamos nas práticas compartilhadas e no modo como seus significados se transformaram com as publicações dos vários artigos que analisamos. Essa divisão nos permitiu determinar um senso de origem às ideias, podendo assim, compreender o papel de cada autor na comunidade.

O capítulo 6 tratou da recepção das produções analisadas nos capítulos anteriores. A divisão das seções buscou estabelecer uma comparação entre as práticas britânicas, alemãs e francesas, o que possibilitou evidenciar como as práticas foram transmitidas entre os países. Esse fator é importante por conta do ganho de credibilidade da matemática produzida pela *Comunidade britânica dos Invariantes*. Como forma de compreender os caminhos percorridos pelas ideias que perpetuaram significados e caracterizaram a produção matemática dos teóricos *invariantes* do Reino Unido, organizamos os artigos através das redes de textos.

7.2 Sobre as Redes de Textos

Além do desenvolvimento da *Teoria dos Invariantes*, esta tese se propôs a discutir as características do conjunto de ideias que circularam no entorno da teoria. Como forma de estabelecer parâmetros para esta discussão, utilizamos a ideia de comunidade de práticas. Apesar do trabalho de Wenger (1999) ter sido elaborado em um contexto que não trata de questões relacionadas à matemática, foi possível identificar ligações entre os autores com auxílio do conceito de negociação de significados.

Com isso, as redes de textos serviram como uma ferramenta de organização destas conexões. A partir da elaboração de Brechenmacher (2006), construímos três tipos de rede que representaram diferentes aspectos da *Comunidade britânica dos Invariantes*. As redes de interações nos garantiram uma forma de interpretar a construção dos vínculos

entre os autores ao longo da evolução do volume das publicações nos periódicos britânicos. Os 22 artigos selecionados no intervalo de 1837 a 1845 (que chamamos de Fase 1, em referência ao período do CMJ) trazem as participações de Boole, Cayley e Sylvester como personagens centrais da produção matemática que lidava com polinômios homogêneos no período.

Outra característica que merece destaque é o modo como a perspectiva das redes de interações representa o processo de aglutinação dos novos personagens relacionados aos interesses dos principais. O acréscimo dos artigos selecionados no período de 1845 a 1855 (a Fase 2 que trata do CDMJ) amplia o número de autores relevantes, uma vez que surgem nomes que trazem contribuições importantes para a caracterização da comunidade (fig: 22). São os casos de Weddle, que assume as interpretações geométricas que se tornam possíveis por conta da expansão que os trabalhos de Sylvester e Cayley fizeram ao utilizar as ideias de Plücker; Spottiswoode, que apresenta uma retrospectiva das práticas britânicas relacionadas às propriedades dos determinantes; Cockle, que fortalece a identidade britânica através de uma crítica à nomenclatura que ganhava força no continente; além de Salmon, que inicia sua produção de livros-textos, os quais contribuem para a divulgação das ideias dos *invariantes*.

Também foi possível identificar as interações mais significativas. Nesse contexto, as relações entre Cayley, Sylvester e Salmon representaram uma concentração significativa das discussões. É importante destacar que a posição desses três autores ao centro ocorre em função de nossa decisão de construir a rede a partir da obra do personagem de pesquisa desta tese. Afirmamos que, apesar de modificar a posição dos autores, uma construção que eventualmente partisse de outro nome ainda revelaria as mesmas intensidades nas interações. Esse fator garante coerência nas redes, no sentido do que é descrito por Brechenmacher (2006).

Concluimos a apresentação dos personagens da comunidade com os artigos selecionados entre 1855 e 1865, que chamamos de Fase 3. A figura 24 mostra a participação de Ferrers, editor do QJPAM ao lado de Sylvester, e Michael Roberts, que pode ser encarado como um legítimo herdeiro das práticas dos personagens centrais da *Comunidade britânica dos Invariantes*.

As redes de interações demonstram um senso de organização dos autores que se envolveram com os polinômios homogêneos, sendo necessário, ainda, destrinchar algumas camadas: os personagens centrais, os autores relevantes e os com menos publicações. Destacamos que os oito matemáticos evidenciados no capítulo 4 que, junto com Sylvester, são responsáveis por mobilizar e caracterizar as práticas da comunidade, porém outros menos relevantes também fazem parte do coletivo. Portanto, entendemos que este tipo de rede tem o papel de localizar os trabalhos através da importância dos autores.

Uma vez conhecendo os autores e em que direções eles se influenciam, torna-se necessário entender como as práticas circularam entre eles. Além de mais uma fotografia sobre nosso objeto de estudo, o foco na produção dos personagens se justifica pela construção dos pilares descritos por Wenger (1999). Nesse sentido, o conceito das redes temáticas nos permite identificar os caminhos que são trilhados pelas ideias.

O olhar focalizado na perspectiva de Sylvester nos levou à decisão de utilizar os mesmos temas que identificamos durante a análise de sua obra. As redes temáticas nos permitem evidenciar a formação de grupos menores, que destacam os artigos com maior influência sobre a circulação de ideias. Esse fator joga luz sobre as práticas que formam a identidade da comunidade de práticas.

Na rede da Teoria de Eliminação (fig: 25), foi possível observar a centralidade da produção de conhecimento de Sylvester, uma vez que seus artigos se destacam pelo maior volume de conexões no grafo. De maneira mais específica, as publicações que selecionamos relacionadas a este tema foram divididas em quatro grupos menores, a saber: o *Método Dialítico*, da qual os textos Sylvester (1839) e Sylvester (1840) são as principais referências; identificação de raízes de polinômios, onde encontramos associações com o teorema de Sturm; *Teoria dos Invariantes*, em que se insere o artigo de Sylvester (1851h) que faz a interpretação dos problemas de eliminação para as práticas da *Comunidade britânica dos Invariantes*; além de um grupo menor, que se caracteriza por representar uma perspectiva geométrica que marca a transição para as práticas sobre os *invariantes*.

A rede sobre locus de curvas e superfícies (fig: 26) nos mostrou como os trabalhos da comunidade tiveram inspiração na obra de Plücker. Apesar de ser um grafo bastante difuso, percebe-se que a temática foi capaz de conectar as outras cinco sobre as quais refletimos nos capítulos 3 e 5. Essa característica se confirma por conta da presença de artigos que surgem nos outros temas e que utilizam a abordagem do matemático alemão. Esses foram os casos de Sylvester (1850d), que se concentra nos problemas de contato; de Spottiswoode (1856), que apresenta um levantamento sobre as propriedades dos determinantes; de Cayley (1857c), com investigações de recíprocos e polares de pontos e curvas; além de textos que tratam da busca pelos *invariantes*.

Ressaltamos que os trabalhos da temática de locus são complementados pelos problemas de contatos. A teoria das curvas, investigada sobretudo por Cayley e Salmon, as representações de cônicas e feixe de cônicas, muito presentes nos trabalhos publicados por Sylvester em 1850, e as direções assintóticas, introduzidas pelos artigos de Gregory na década 1840, serviram como formas para abordar o interesse que se mostrou importante para a *Teoria dos Invariantes*. A figura 27 também nos mostra uma diversidade de grupos menores, nos quais encontramos práticas características da comunidade britânica, mesmo que não sejam originais.

A presença dos artigos que tratam da *Teoria dos Invariantes* se intensifica nos estudos sobre os problemas de contatos. Esse fator nos mostra que esta temática foi uma porta de entrada importante para o interesse dos britânicos. A associação entre Teoria de Eliminação, contatos e representação de curvas com polinômios homogêneos construiu o discurso conduzido por Sylvester, adotado por Cayley e difundido pelos outros matemáticos que se envolveram com o tema.

Quando olhamos para a rede sobre transformações (fig: 28), vemos o modo como esse envolvimento com a *Teoria dos Invariantes* ocorreu. Primeiramente encontramos a participação de sete dos nove personagens relevantes da *Comunidade Britânica dos Invariantes*, o que caracteriza a atividade do coletivo que investigamos nesta tese. Além disso, os artigos com relevância na rede são os que tratam das bases da Teoria, a elaboração do vocabulário, a discussão sobre sua nomenclatura e a repercussão das práticas produzidas pelo grupo surgem em todas as regiões do grafo. Afirmamos que esta temática tem papel central na comunidade, pois as investigações sobre os *concomitantes* ocuparam seus matemáticos centrais.

A rede de redução de polinômios apresenta um aspecto específico das discussões sobre transformações lineares. A figura 29 nos mostrou que os artigos Boole (1841) e Sylvester (1852a) têm influência sobre os textos desta temática. Além da produção desses matemáticos, encontramos contribuições de James Cockle que apresentaram uma ideia alternativa de redução com base no processo de completar quadrados. Além disso, as discussões sobre as formas canônicas dos polinômios homogêneos estão relacionadas à *Equação Secular*, o que nos mostrou que os interesses sobre os *invariantes* contaram com desdobramentos que deram repercussão às práticas da comunidade e foram capazes de aglutinar novos pesquisadores, como Cockle, que se envolve com a nova Teoria através do problema de reduzir polinômios à soma de quadrados positivo e negativos.

A última rede temática que apresentamos nesta tese aborda os movimentos de rotação (fig: 30). Identificamos os desdobramentos da *Teoria dos Invariantes* na mecânica no problema da *Equação Secular* e na rotação de corpos rígidos. Foi possível compreender a relação que existe entre a Lei de Inércia para formas quadráticas de Sylvester e os modelos de movimentos de rotação como o elipsoide descrito por Poincaré em 1851.

Todas as redes temáticas evidenciam a influência marcada das práticas da *Teoria dos Invariantes* nos diferentes recortes que apresentamos no capítulo 5. Isso reforça a importância dos personagens centrais da comunidade, além de caracterizar os papéis de cada um deles: Cayley e Sylvester são os principais fomentadores das práticas, tanto pelo volume de publicações quanto pela iniciativa de estabelecer bases e nomenclatura; Salmon e Spottiswoode são divulgadores das práticas, com livros didáticos e artigos de revisão; Cockle e Michael Roberts são herdeiros, seja pela crítica aos modelos que vinham

sendo estabelecidos ou pela continuidade da agenda projetada pelos personagens mais antigos; Weddle e Ferrers são membros que se caracterizaram pela utilização dos resultados, sobre os *invariantes*, para problemas que não são internos à *Teoria dos Invariantes*; e, por fim, Boole é responsável pelo texto fundador. Lembrando que os outros autores com menor relevância também se fizeram presentes em momentos específicos, como as redes nos mostraram.

As redes de divulgação/recepção nos revelaram outro aspecto relevante das análises sobre a comunidade: a forma como as práticas desenvolvidas em solo britânico ganharam espaço entre os matemáticos do continente. A participação dos teóricos *invariantes* britânicos no *Jornal do Crelle* (fig: 31) nos mostrou que as práticas dos *invariantes*, os problemas de contato e a Teoria de Eliminação foram os temas difundidos na Alemanha. Este fator se relaciona com o interesse, já existente, sobre a *Teoria dos Invariantes* entre os germânicos. Cayley, Spottiswoode, Sylvester e Salmon são colocados como as principais referências das ideias da Teoria, o que se reproduz nos artigos publicados pelos autores alemães. A figura 34 revela a forma como as práticas do Reino Unido se disseminaram nos Estados Alemães, como foi possível observar por meio da comparação com a figura 31, além das análises que realizamos no capítulo 6.

Nos periódicos franceses, encontramos a divulgação de práticas relacionadas aos locus de curvas, acrescentando trabalhos de Michael Roberts, além dos outros autores já citados anteriormente. A comparação das figuras 32 e 33 nos mostrou que, diferente da divulgação/recepção alemã, as temáticas geométricas como locus de curvas e superfícies e problemas de contatos geraram maior interesse entre os franceses.

Ao final das análises, as diferentes variações das redes possibilitaram traçar o perfil de uma comunidade cuja produção interna foi capaz de gerar credibilidade para o fazer matemático do Reino Unido. Nesse sentido, a presença da *Teoria dos Invariantes* nas temáticas sobre as quais nos debruçamos garantem, ao mesmo tempo, uma caracterização particular e um potencial de contribuição que se manifesta na imagem dos principais matemáticos da comunidade de práticas, como é o caso dos amigos Sylvester e Cayley. Além disso, a mobilização das práticas representada nos grafos que apresentamos no texto revelam o caráter coletivista dessa produção de conhecimentos matemáticos. Em outras palavras, o destaque das práticas evidencia a produção do grupo, pondo mais luz sobre a dimensão coletiva do que sobre a individual.

7.3 Sobre as práticas e os objetos comuns

As redes investigadas nesta tese também trazem luz para práticas que se tornaram características da *Comunidade britânica dos Invariantes*. Essa perspectiva revela os

processos de negociação de significados que ocorreram nas páginas dos jornais britânicos e que moldaram a identidade da matemática produzida por Sylvester, Cayley, Salmon e outros autores relacionados a eles.

Sobre Teoria de Eliminação, destaca-se, na comunidade, o *Método Dialético* descrito por Sylvester no início da década de 1840. Como vimos, inicialmente trata-se apenas de uma forma de resolver sistemas de equações, porém sua associação ao teorema de Sturm leva a discussão para a determinação das raízes de polinômios. Cayley também apresentou suas abordagens para a temática, através do conceito de involução para formas de segunda e terceira ordens. Esse é um dos fatores que evidenciam a presença das ideias de Plücker no desenvolvimento das práticas sobre os *invariantes*, uma vez que os dois amigos desenvolvem formas associadas que não se alteram após transformações lineares, as resultantes de um sistema de equações e os *invariantes fundamentais* I e J, que se fazem presentes nos trabalhos de Cayley sobre o assunto. O ciclo de ideias sturmianas, como diria Sinaceur (1991), teve continuidade pelas mãos de Salmon que focaliza os problemas de tangentes.

As práticas apresentadas nos artigos destes autores se resumem a substituições de variáveis e ao cálculo de determinantes, de modo a produzir as resultantes dos sistemas em investigação. Entretanto, ressaltamos que as três situações (raízes de polinômios, pontos de contatos de curvas e formas *invariantes*) representam o processo de negociação de significados como descrito em Wenger (1999), uma vez que os três matemáticos modificam suas percepções para o discurso da nova Teoria.

As interpretações geométricas também trouxeram práticas que identificaram o grupo que estudamos nesta tese. A utilização das coordenadas polares, o uso dos discriminantes como forma de determinar a natureza dos pontos de contatos de curvas e superfícies, as descrições de polos e polares, a relação entre os pontos críticos de curvas e superfícies, a determinação de retas tangentes, os determinantes funcionais e as transformações no plano projetivo, mostram o pano de fundo de todas as abordagens dos teóricos *invariantes*. É importante ressaltar que os assuntos e objetos destacados neste parágrafo sofreram influências de trabalhos que não lidavam diretamente com a *Teoria dos Invariantes*. Esse fator pode ser observado nos artigos publicados por Weddle que, ao mesmo tempo em que mantiveram uma tradição sintética da matemática britânica, se utilizaram dos resultados produzidos no interior da comunidade de práticas que estudamos para expandir teoremas em duas dimensões para três e, portanto, indicar a possibilidade de compreensão para dimensões maiores.

O contexto dos problemas geométricos associados a interesses sobre mecânica, mobilizados na década 1840 por Boole e Cayley, nos levou à principal temática das investigações da *Comunidade britânica dos Invariantes*, as transformações lineares. É nesse

recorte que encontramos as contribuições mais significativas que trouxeram credibilidade para a matemática que vinha sendo produzida no Reino Unido.

A busca pelas formas associadas que não se alteram após transformações das variáveis de um polinômio homogêneo se iniciou com o desenvolvimento dos *Hyperdeterminantes*, técnica que identificou os *invariantes* associados aos polinômios homogêneos de grau 4 em duas variáveis. As técnicas *aposicional* e *derivacional*, nomes que surgem em Sylvester (1851h), também são consideradas geradoras de *invariantes* e traduzidas pela apresentação dos *emanantes* em Sylvester (1853f).

O vocabulário apresentado em 1853 definiu as características das práticas britânicas sobre os *invariantes*. Esse fator foi verificado através da comparação entre o texto Sylvester (1853f) e livros-textos publicados no Reino Unido nas décadas seguintes. Como exemplos, citamos as produções que se iniciaram com Salmon (1859), publicadas em 4 edições, Panton e Burnside (1881), além de publicações que circularam no continente como Clebsch (1872) e Bruno (1876).

Em comum, essas obras compartilham noções como *covariante* e *contravariante*, que são formas associadas que não se alteram após transformações diretas e inversas das variáveis de polinômios homogêneos. O *bezoutiano*, que liga as resultantes de sistemas de equações de coexistência à ideia de *invariante*. Os determinantes funcionais, desenvolvidos por Hesse e Jacobi, e as propriedades gerais desse objeto matemático também permitiram o cálculo de diversas formas *invariantes*. O conceito de matriz também ganhou forma como uma representação das transformações lineares.

As propriedades *invariantes* também foram utilizadas para a determinação de relações entre as raízes de polinômios, como pode ser visto nos artigos de Michael Roberts da década 1860. Nesse contexto, a identidade britânica já se encontrava estabelecida no continente. Esse fator nos permite afirmar que as práticas compartilhadas nos trabalhos que lidaram com polinômios homogêneos serviram como um produto de divulgação da matemática britânica, uma vez que os resultados apresentados se relacionam com interesses que circulavam no continente europeu, como é o caso dos movimentos de rotação e das investigações sobre a *Equação Secular*, temas que eram tratados de maneira dispersa nas publicações nos periódicos britânicos e passam a ser aglutinados a partir da ideia da Lei de Inércia para formas quadráticas.

Apesar dos desdobramentos que apresentamos tratarem de problemáticas que lidam com polinômios de grau 2 em duas ou três variáveis, é importante destacar que as principais produções na *Teoria dos Invariantes* consideram objetos mais gerais. Em Sylvester (1851e), Sylvester (1852b) e Sylvester (1853f), percebemos o caráter generalista que o autor adota. Além disso, as memórias sobre os *quantics* de Cayley apresentam listas de *invariantes*

relacionados com polinômios de graus maiores. Mesmo a crítica a apresentada por Cockle à notação utilizada traz preocupação com casos gerais. Outro exemplo de situações com polinômios de graus superiores foram encontradas nos livros-texto que discutimos no final do capítulo 6.

7.4 Sobre a *Comunidade britânica dos Invariantes*

Inicialmente, esta tese tinha o objetivo de se aprofundar na obra de Sylvester, de modo a lançar luz em detalhes que permanecem submersos quando se opta por uma abordagem geral dos artigos. Entretanto, as preocupações do pesquisador com os espaços de produção matemática para os britânicos e a relação de sua carreira com a evolução dos periódicos especializados no Reino Unido nos despertaram o interesse sobre suas interações com um grupo de pesquisadores que compartilhou ideias sobre temáticas comuns ao processo de elaboração das práticas sobre os *invariantes*. Entendemos que é importante uma descrição cronológica da formação da comunidade que investigamos.

Essa descrição retoma as contribuições que apresentamos ao longo dos capítulos, de modo que se pode visualizar como o grupo aumentou e se modificou ao longo dos anos, além do modo como os significados foram modificados por interesses, cada vez mais específicos da *comunidade britânica dos invariantes*, o que fez com que Sylvester conquistasse notoriedade no cenário internacional.

Ao estabelecer o recorte temporal no intervalo de 1837 a 1865, percebemos que o interesse pelo movimento dos planetas e pelas rotações se faziam presentes no Reino Unido logo em 1837, mesmo ano da publicação do texto de Lebesgue (1837) sobre a redução de polinômios homogêneos e o problema da *Equação Secular*. Apesar de não se tratar de uma publicação britânica, vimos que esse trabalho se conecta com as produções da comunidade, como foi o caso de Smith (1839), que lidou com o mesmo problema sobre redução. Apesar de não se tratar de um autor relevante da comunidade, esse trabalho mostra que existia um interesse particular na temática, a qual estabelece uma conexão importante com o famoso texto de Boole (1841).

Paralelamente, encontramos publicações que lidaram com o problema das desigualdades seculares no continente. Entretanto, ressaltamos que o texto de Lebesgue é o único que apresenta uma discussão genérica sobre a redução de polinômios de grau 2, de forma semelhante à publicação Cauchy (1829). Nesse contexto, os textos de Sylvester sobre eliminação serviriam como um meio de resolver o impasse sobre a natureza das raízes da *Equação Secular*, o que seria confirmado em 1852 com a enunciação da Lei de Inércia para formas quadráticas. A relação desses trabalhos com o teorema de Sturm nos mostrou um elo com a matemática produzida no continente, o que reforça a influência de movimentos

como o da Analytical Society.

Os trabalhos sobre assíntotas de Duncan Gregory indicam o início do uso dos polinômios homogêneos com o objetivo de investigar propriedades geométricas. Porém a associação do tema com esse objeto ganharia força na década de 1850. Ainda nos anos 1840, Cayley inicia suas contribuições para a *Teoria dos Invariantes*, com a proposição da agenda de encontrar todas formas associadas que não se alteram após transformações lineares das variáveis das formas algébricas.

Com os eventos apresentados nos últimos parágrafos, concluímos que o período de funcionamento do CMJ trouxe dois assuntos que se tornariam relevantes na obra de Sylvester e fariam parte dos desdobramentos da teoria que caracterizam a *Comunidade Britânica dos Invariantes*. Além disso, distinguem o papel de alguns dos personagens que surgiram na mesma época: Cayley e Boole despontaram como pesquisadores que trouxeram um assunto original para a matemática do Reino Unido, e Smith e Gregory foram os responsáveis por abrir o espaço para essas investigações. A influência de Plücker começava a se disseminar, tanto na ilha quanto no continente, uma vez que já encontramos artigos sobre o assunto tratado pelo autor em periódicos como *Nouvelles Annales*. Outra relação com os matemáticos do continente se iniciava com os textos Hesse (1844a) e Eisenstein (1844), que também revelaram formas *invariantes* que foram objeto de reflexão pelo próprio Cayley no *Jornal do Crelle* e se tornaram pontos de partida importantes para futuras pesquisas.

O período de existência do CDMJ agrega novos personagens à comunidade, como foi o caso de James Cockle, que iniciou uma série de artigos sobre a redução de polinômios homogêneos através de uma abordagem que não lidava diretamente com as substituições lineares. No mesmo ano, vemos a divulgação dos *Hyperdeterminantes* de Cayley na Alemanha e o surgimento de outros matemáticos interessados na abordagem dos polinômios homogêneos sobre formas geométricas, como são os casos de Percival Frost e Salmon. Como pudemos observar, Salmon se tornou o principal compilador das ideias da comunidade com a publicação os livros sobre álgebra moderna.

O período de 1846 a 1849 foi marcado por práticas que, inicialmente, não se conectavam entre si. Além da evolução das investigações a respeito do problema da *Equação Secular*, o que foi destacado em nossas análises dos artigos Borchardt (1846) e Jacobi (1846), mantiveram as discussões sobre a possibilidade de diagonalização das matrizes associadas aos polinômios homogêneos. No Reino Unido, Sylvester conhece Cayley, tem acesso à obra de Plücker e passa a defender uma nova abordagem para problemas de geometria, como observamos ao ler sua carta escrita para Lord Brougham. Também percebemos a aproximação entre os dois amigos e Salmon através de seus interesses sobre Teoria de Eliminação, que se evidenciou nas publicações dos artigos de Cayley (1847b) e

Salmon (1848).

Até 1850, a *comunidade britânica dos invariantes* contava com a participação ativa de Cayley e Boole, Salmon se aproximava através de interações com o primeiro, Cockle também começava a apresentar ideias alternativas para um problema que em alguns anos seria incorporado à lista das formas *concomitantes* com a Lei de Inércia de Sylvester. Este último passa a fazer parte da comunidade no momento, em que começa a publicar suas contribuições sobre geometria em coordenadas homogêneas. Como afirmamos ao longo desta tese, esse é o período histórico em que a imagem da produção matemática britânica começa a mudar para os pesquisadores do continente.

É nesse contexto que a busca pelas formas *invariantes* ganha um novo capítulo em sua história. Sylvester consegue fazer associações importantes. A compreensão das equações de coexistência como uma forma de investigar intersecções e contatos de cônicas projetivas e a enunciação de sua Lei de Inércia que apresenta uma solução para o problema da equação que auxilia na compreensão do movimento dos planetas, foram contribuições que trouxeram reconhecimento ao trabalho do inglês. No entanto, é notório que a construção das bases da *Teoria dos Invariantes* britânica, entre 1851 e 1853, foi o fator que mais chamou atenção dos matemáticos do continente, uma vez que as proposições apresentadas se tornaram assunto recorrente em publicações como Combescure (1855), Painvin (1858a), NAM (1859), Brioschi (1857), Aronhold (1858), Hermite (1860) e Clebsch (1861a).

Entendemos que Sylvester foi o principal responsável pela aglutinação da comunidade, devido a três aspectos: sua ligação com as temáticas, a iniciativa para estabelecer um vocabulário e as bases da nova Teoria e seus esforços para a divulgação de sua própria obra. Diferente de Cayley, que divulgou seus resultados com uma vasta publicação de artigos, em sua maioria, sobre geometria e transformações lineares, Sylvester se concentra em estabelecer vínculos com matemáticos específicos no continente, com quem manteve correspondência membros influentes da academia de ciências de Paris.

O contato com os Alemães ocorre através da obra de Cayley, que divulga o trabalho basilar de Sylvester no *Jornal do Crelle*. Além disso, as memórias sobre os *quantics* ganham repercussão justamente por conta desses trabalhos conectarem os *invariantes* aos problemas geométricos de interesse dos germânicos, como a determinação de retas tangentes. Não encontramos motivos claros para que Sylvester não publicasse em periódicos alemães, no entanto fica evidente que Cayley se encarregou de levar as ideias do amigo aos leitores do jornal em artigos como Cayley (1855).

Um ano depois, encontramos o trabalho de Spottiswoode (1856), que apresenta o papel dos determinantes na produção de conhecimento matemático dos britânicos. Em 1858, Michael Roberts surge como um herdeiro das práticas de Sylvester e Cayley. O

núcleo da *comunidade britânica dos invariantes* tinha seus personagens definidos. Os outros personagens menores, em um total de 22 nomes, lidam com as problemáticas, porém não apresentam nenhuma contribuição significativa para elas. Por fim, afirmamos que a evolução da pesquisa em matemática no Reino Unido é indissociável da atuação dos matemáticos que compartilharam ideias entre as temáticas que analisamos nesta tese.

7.5 Respostas e o Futuro deste Trabalho

Esta tese foi construída a partir questionamentos que direcionaram as análises realizadas ao longo dos capítulos. A primeira pergunta que levantamos aborda as contribuições de Sylvester que o levaram a uma posição influente na comunidade. Sobre esse aspecto, podemos afirmar que seu ganho de credibilidade ocorreu devido às publicações entre 1851 e 1853, as quais estabeleceram as bases da *Teoria dos Invariantes* e sua divulgação em periódicos internacionais. Além disso, investigamos o papel dos profissionais de matemática, destacando as oportunidades que eram oferecidas aos interessados em trabalhos diretos com a disciplina. Como vimos, o surgimento de revistas especializadas na área incentivou uma produção mais constante de investigações sobre problemas internos à matemática.

Esse é o caso da *Teoria dos Invariantes*, cujos resultados apresentados em Boole (1841) tiveram base nas discussões sobre mecânica iniciadas por Lagrange no século XVIII, sendo, entretanto, a sequência das investigações sobre o tema caracterizada pela busca das formas que não se alteram com as transformações lineares. Em outras palavras, um problema com origem externa aos interesses do Reino Unido, ganha novo significado e se internaliza a ponto de aglutinar matemáticos à sua volta.

Outro questionamento que fizemos diz respeito à forma de interação que ocorreu entre os autores que se manifestaram sobre os polinômios homogêneos nos periódicos britânicos. Como resposta, observamos que a evolução dos jornais de Cambridge apresentou um espaço onde os matemáticos se concentraram em compartilhar suas ideias. O caráter acadêmico do CMJ atraiu trabalhos voltados para os exames de larga escala, como o Tripos Exam. Esse fator fez com que os primeiros artigos publicados tivessem relação com assuntos da universidade, entretanto isto mudou com a fundação do CDMJ e se consolidou com o processo de internacionalização do QJPAM. Podemos afirmar que a *comunidade britânica dos invariantes* teve seu maior fôlego no interior dos jornais especializados em matemática com participação central do trio de ferro (Sylvester, Cayley e Salmon) e com inspiração nas obras de Plücker e Lagrange, além de uma produção original que recolocou o Reino Unido no cenário da pesquisa em matemática na Europa.

A relação da comunidade que investigamos com a matemática do continente se tornou evidente por meio da leitura que realizamos nos artigos, que lidaram com

polinômios homogêneos, publicados nos jornais do *Crelle*, de *Liouville* e *Nouvelles Annales*. Nesses periódicos, foi possível identificar características da recepção na Alemanha, onde o caminho trilhado pelos *invariantes* se encontra com as ideias britânicas na década de 1850, e na França, que compartilha das ideias sobre coordenadas homogêneas e apresenta os *invariantes* de maneira sistemática direcionada a futuros pesquisadores.

As reflexões apresentadas até aqui, nos geram a convicção de que a trajetória profissional de Sylvester se confunde com o processo de desenvolvimento da pesquisa em matemática do Reino Unido. As práticas discutidas nos capítulos anteriores nos mostraram como a transformação da imagem dos matemáticos britânicos é indissociável da obra do pesquisador, o que havia sido observado por conta de sua presença como presidente da LMS, editor do QJPAM e correspondente da Academia de Ciências de Paris.

Oportunamente, destacamos alguns desdobramentos possíveis de nosso trabalho. As mudanças nas estruturas de ensino das Universidades de Cambridge e Oxford que ocorreram no século XIX também fazem parte do processo de desenvolvimento da identidade da matemática britânica. Uma análise dos currículos que circularam nas instituições de ensino pode revelar uma nova faceta da formação do profissional em matemática no Reino Unido.

Sobre as relações entre as duas universidades, a ascensão do QJPAM como meio de divulgação de matemática gerou uma nova demanda por um periódico de caráter acadêmico e, ao longo de nossas leituras dos periódicos, nos deparamos com títulos que ocuparam o espaço deixado pelo CMJ, o *Messengers of Mathematics* e o *Educational Times*. Uma investigação sobre as produções que figuraram nas páginas desses jornais também se mostra uma sequência para os resultados apresentados nesta tese. Além disso, também é interessante compreender como seguiram os estudos sobre o ensino de geometria em iniciativas como Associação para o Desenvolvimento do Ensino de Geometria (AIGT), que surge no cenário britânico em 1871.

A atuação de Sylvester como professor de matemática na pós-graduação nos Estados Unidos precisa de uma avaliação profunda, com uma abordagem semelhante à que realizamos aqui, uma vez que ele foi fundador do *American Journal of Mathematics Pure and Applied*.

Este trabalho faz parte dos esforços de um grupo de pesquisas que trabalha com geometria do século XIX. Além deste trabalho, as obras de Cayley, Salmon e do francês Poncelet também têm sido analisadas com profundidade pelo grupo, gerando investigações que apresentam outros aspectos da comunidade de interesse desta tese. Entretanto, as obras dos outros personagens que fizeram parte desta história, ainda reservam detalhes que enriquecerão a perspectiva coletivista que propusemos ao longo da pesquisa.

Do ponto de vista do aprendizado, a investigação sobre a *Teoria dos Invariantes* mostrou o processo de construção de uma ideia matemática. Essa compreensão complementa a formação de professores da disciplina, uma vez que parte das atribuições da profissão passa por estabelecer uma cultura sobre a elaboração coletiva dos conceitos relevantes. Por fim, acreditamos que o trabalho de levantamento e identificação das práticas comuns, no contexto da obra de Sylvester, tenha contribuído com um novo aspecto sobre a problemática que referenciamos ao longo do texto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALFONSI, L. Étienne bézout: Analyse algébrique au siècle des lumières. **Revue d'histoire des mathématiques**, v. 14, n. 2, p. 211–287, 2008.

_____. Bézout et les intersections de courbes algébriques. **Bibnum. Textes fondateurs de la science**, FMSH-Fondation Maison des sciences de l'homme, 2013.

ANALYTICAL SOCIETY. **Memoirs of the Analytical Society**. [S.l.]: Cambridge, 1813. v. 1.

ARCHIBALD, R. C. Unpublished letters of james joseph sylvester and other new information concerning his life and work. **Osiris**, The Saint Catherine Press Ltd., v. 1, p. 85–154, 1936.

ARONHOLD, S. Zur theorie der homogenen functionen dritten grades von drei variabeln. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 39, p. 140–159, 1850.

_____. Theorie der homogenen functionen dritten grades von drei veränderlichen. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 55, p. 97–191, 1858.

BABBAGE, C. **Reflections on the Decline of Science in England: And on Some of Its Causes, by Charles Babbage (1830). To which is Added On the Alleged Decline of Science in England, by a Foreigner (Gerard Moll) with a Foreword by Michael Faraday (1831)**. [S.l.]: B. Fellowes, 1830. v. 1.

BAKER, H. F. Biographical notice. **The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester**, v. 4, p. xv–xxxvii, 1912.

BALL, W. W. R. **A History of the Study of Mathematics at Cambridge**. [S.l.]: University Press, 1889.

BAZIN, M. Sur la théorie de la composition des formes quadratiques. **Journal de mathématiques pures et appliquées**, Bachelier, v. 16, p. 161–170, 1851.

BECHER, H. W. William whewell and cambridge mathematics. **Historical studies in the physical sciences**, JSTOR, v. 11, n. 1, p. 1–48, 1980.

_____. Woodhouse, babbage, peacock, and modern algebra. **Historia Mathematica**, Elsevier, v. 7, n. 4, p. 389–400, 1980.

BIGGS, N. L. Tp kirkman, mathematician. **Bulletin of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 13, n. 2, p. 97–120, 1981.

BLAKE, C.; WHITWORTH. **The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics**. [S.l.]: MACMILLAN, 1862. v. 1.

BOOLE, G. Researches on the theory of analytical transformations with a special application to the reduction of the general equation of the second order. **Cambridge Mathematical Journal**, E. Johnson, Trinity Street and Whittanker., v. 2, p. 67–73, 1840.

_____. Exposition of a general theory of linear transformations. **Cambridge Mathematical Journal**, E. Johnson, Trinity Street and Whittanker., v. 3, p. 106–119, 1841.

_____. Notes on linear transformations. **Cambridge Mathematical Journal**, E. Johnson, Trinity Street and Whittanker., v. 4, n. 22, p. 167–171, 1844.

_____. On the reduction of the general equation of the n th degree (sequel to a memoir on the theory of linear equations). **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 6, p. 106–113, 1851.

_____. On the theory of linear transformations. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 6, p. 87–106, 1851.

BOOTH, J. On the rotation of a rigid body round a fixed point. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 19, n. 126, p. 432–441, 1841.

BORCHARDT, C. W. Neue eigenschaft der gleichung, mit deren hülfe man die secularen störungen der planeten bestimmt. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 30, p. 38–45, 1846.

_____. Développemens sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes. **Journal de mathématiques pures et appliquées**, Bachelier, v. 12, p. 50–67, 1847.

_____. Remarque relative á la note précédente. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 53, p. 367–368, 1857.

BOSTAN, A. Algorithmes rapides pour les polynômes, séries formelles et matrices. **Les cours du CIRM**, v. 1, n. 2, p. 75–262, 2010.

BOTTAZZINI, U. Algebraische untersuchungen in italien, 1850–1863. **Historia Mathematica**, Elsevier, v. 7, n. 1, p. 24–37, 1980.

BOURDIEU, P.; CURTO, D. R.; DOMINGOS, N.; JERÓNIMO, M. B. **O poder simbólico**. [S.l.]: Difel Lisboa, 1989.

BRECHENMACHER, F. **Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930). Formes de représentation et méthodes de décomposition**. Tese (Doutorado), 2006.

BRECHENMACHER, F. L'identité algébrique d'une pratique portée par la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes (1766-1874). **Sciences et techniques en perspective**, p. p–5, 2008.

_____. La fonte algébrique des méthodes nouvelles de la mécanique c'eleste d'henri poincaré. **arXiv preprint arXiv:1210.2673**, 2012.

_____. Lagrange and the secular equation. **Lettera Matematica**, Springer, v. 2, n. 1, p. 79–91, 2014.

BRIOSCHI, F. Note sur un théorème relatif aux déterminants gauches. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Mallet-Bachelier, v. 19, p. 253–256, 1854.

_____. Sur une nouvelle propriété du résultant de deux équations algébriques. Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 53, p. 372–376, 1857.

BRISTED, C. A. **Five Years in an English University**. [S.l.]: GP Putnam, 1852. v. 2.

BRONWIN, B. On a particular transformation of the differential equations of motion in the theory of planetary perturbation. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 33, n. 220, p. 95–97, 1848.

BRUNO, F. F. di. Démonstration d'un théorème relatif à la réduction des fonctions homogènes à deux lettres à leur forme canonique. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Mallet-Bachelier, v. 17, p. 193–201, 1852.

_____. Invariant of the twentieth degree of the quintic $(a,b,c,d,e)(x,y)^5$. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 1, p. 361–364, 1857.

_____. **Théorie des formes binaires par le chev. F. Faà de Bruno**. [S.l.]: Brero, 1876.

CANNON, W. F. Scientists and broad churchmen: an early victorian intellectual network. **Journal of British studies**, Cambridge University Press, v. 4, n. 1, p. 65–88, 1964.

CARMICHAEL, R. **A Treatise on the Calculus of Operations: Designed to Facilitate the Processes of the Differential and Integral Calculus and to Calculus of Finite Differences**. [S.l.]: Longman, Brown, Green and Longmans, 1855.

CAUCHY, A.-L. Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planetes. **Oeuvres Completes (Iieme Série)**, v. 9, 1829.

_____. Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques. **Exercices d'analyse et de physique mathématique**, v. 1, p. 91–104, 1840.

CAYLEY, A. Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions. **Cambridge Mathematical Journal**, E. Johnson, Trinity Street and Whittanker., v. 4, p. 119–127, 1844.

_____. Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Bachelier, v. 10, p. 245–250, 1845.

_____. Note on the maxima and minima of functions of three variables. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 1, p. 74–75, 1845.

_____. Note sur deux formules données par mm Eisenstein et Hesse. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 28, p. 54–57, 1845.

_____. Nouvelles remarques sur les courbes du troisième ordre. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Bachelier, v. 10, p. 102–108, 1845.

_____. On homogeneous functions of the third order with three variables. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 1, p. 97–104, 1845.

_____. On linear transformations. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 1, p. 104–122, 1845.

_____. On the reduction of $\frac{du}{\sqrt{u}}$, when u is a function of the fourth order. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 1, p. 70–73, 1845.

_____. On the theory of algebraic curves. **Cambridge Mathematical Journal**, E. Johnson, Trinity Street and Whittanker., v. 4, p. 102–112, 1845.

_____. On the theory of linear transformations. **Cambridge Mathematical Journal**, E. Johnson, Trinity Street and Whittanker., v. 4, p. 193–209, 1845.

_____. Mémoire sur les hyperdéterminants. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 30, p. 1–37, 1846.

_____. On the diametral planes of a surface of the second order. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 1, p. 274–278, 1846.

_____. On the rotation of a solid body round a fixed point. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 1, p. 167–173, 1846.

_____. On the theory of involution in geometry. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 2, p. 52–61, 1846.

_____. Problème de géométrie analytique. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 31, p. 227–230, 1846.

_____. On the theory of elimination. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 3, p. 116–120, 1847.

_____. Recherches sur l'élimination, et sur la théorie des courbes. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 34, p. 30–45, 1847.

_____. On geometrical reciprocity. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 3, p. 173–179, 1848.

_____. On the application of quaternions to the theory of rotation. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 33, n. 221, p. 196–200, 1848.

_____. On a system of equations connected with malfatti's problem and on another algebraic system. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 4, p. 270–275, 1849.

_____. On the order of certain systems of algebraical equations. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 4, p. 132–137, 1849.

_____. On the simultaneous transformation of two homogeneous functions of the second order. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 4, p. 47–50, 1849.

_____. On the triple tangent planes of surfaces of the third order. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 4, p. 118–132, 1849.

_____. Note on a family of curves of the fourth order. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 5, p. 148–152, 1850.

_____. Note sur quelques formules relatives aux coniques. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 39, p. 1–3, 1850.

_____. On curves of double curvature and developable surfaces. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 5, p. 18–22, 1850.

_____. On the developable derived from an equation of the fifth order. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 5, p. 152–159, 1850.

_____. On the developable surfaces which arise from two surfaces of the second order. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 5, p. 46–57, 1850.

_____. Sur le problème des contacts. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 39, p. 4–13, 1850.

_____. Mémoire sur les coniques inscrites dans une même surface du second ordre. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 41, p. 73–80, 1851.

_____. Note sur la théorie des hyperdéterminants. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 42, p. 368–371, 1851.

_____. Correction of the postscript to the paper on permutants. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 7, p. 97–98, 1852.

_____. On the singularities of surfaces. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 7, p. 166–171, 1852.

_____. On the homographic transformation of a surface of the second order into itself. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 6, n. 40, p. 326–333, 1853.

_____. An introductory memoir upon quantics. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 144, p. 245–258, 1854.

_____. Nouvelles recherches sur les covariants. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 47, p. 109–124, 1854.

_____. On the homographic transformation of a surface of the second order into itself. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 7, n. 44, p. 208–212, 1854.

_____. Sept différents mémoires d'analyse. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 50, p. 277–317, 1855.

_____. Mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 54, p. 48–58, 1857.

_____. On a theorem relating to reciprocal triangles cayley. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 1, p. 7–10, 1857.

_____. On the symmetric functions of the roots of certain systems of two equations. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 147, p. 717–726, 1857.

_____. Tables of the sturmian functions for equations of the second, third, fourth, and fifth degrees. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 147, p. 733–736, 1857.

_____. A fourth memoir upon quantics. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, v. 148, p. 415–427, 1858.

_____. A memoir on the theory of matrices. **Philosophical transactions of the Royal society of London**, The Royal Society London, n. 148, p. 17–37, 1858.

_____. On the system of conics which pass through the same four points. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 2, p. 206–208, 1858.

_____. Mathematics, recent terminology in. **English Cyclopaedia**, p. 534–542, 1860.

_____. Note on the value of certain determinants, the terms of which are the squared distances of points in a plane or in space. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 3, p. 275–278, 1860.

_____. On a new analytical representation of curves in space. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 3, p. 225–236, 1860.

_____. Sur l'invariant le plus simple d'une fonction quadratique bi-ternaire, et sur le résultant de trois fonctions quadratiques ternaires. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 57, p. 139–148, 1860.

_____. A discussion of the sturmian constants for cubic and quartic equations. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker, Son and Bourin, v. 4, p. 7–12, 1861.

_____. On the double tangents of a curve of the fourth order. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 151, p. 357–362, 1861.

_____. On the conics which pass through the four foci of a given conic. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker, Son and Bourin, v. 5, p. 275–280, 1862.

CHASLES, M. **Rapport sur les progrès de la géométrie**. [S.l.]: Imprimerie nationale, 1870.

CHISHOLM, H. **The Encyclopaedia Britannica : a dictionary of arts, sciences, literature and general information**. [S.l.]: New York : Encyclopaedia Britannica, 1911. v. 25.

CLAIRAUT, A. C. **Recherches sur les courbes à double courbure**. [S.l.: s.n.], 1731.

CLEBSCH, A. Ueber die knotenpunkte der hesseschen fläche, insbesondere bei oberflächen dritter ordnung. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 59, p. 193–228, 1861.

_____. Ueber eine transformation der homogenen functionen dritter ordnung mit vier veränderlichen. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 58, p. 109–126, 1861.

_____. Ueber symbolische darstellung algebraischer formen. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 59, p. 1–62, 1861.

_____. Ueber das problem der normalen bei curven und oberflächen der zweiten ordnung. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 62, p. 62–109, 1863.

_____. Ueber die elimination aus zwei gleichungen dritten grades. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 65, p. 95–97, 1865.

_____. **Theorie der binären algebraischen Formen**. [S.l.]: BG Teubner, 1872.

COCKLE, J. On the existence of finite algebraic solutions of the general equations of the fifth, sixth, and higher degrees. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 28, n. 186, p. 190–191, 1846.

_____. An account of the method of vanishing groups. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 32, n. 213, p. 114–119, 1848.

_____. On the transformation of algebraic equations. **The Mathematician**, E. & F. N. Spon, v. 1, p. 82–84; 113–116; 194–197; 297–301, 1856.

_____. On critical and spencian fuctions, with remarks upon spence's theory. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker, Son and Bourin, v. 4, p. 97–111, 1861.

COMBESCURE, É. Sur divers points de la théorie des invariants. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Mallet-Bachelier, v. 20, p. 337–358, 1855.

COOLIDGE, J. L. **A history of geometrical methods**. [S.l.]: Courier Corporation, 1940.

COTTERILL, T. On the calculus of distances, areas, and volumes, and its relations to the other forms of space. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 7, p. 275–279, 1852.

CPS. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**. [S.l.]: Cambridge Press, 1822. v. 1.

CRAMER, G. **Introduction a l'analyse des lignes courbes algebriques par Gabriel Cramer...** [S.l.]: chez les freres Cramer et Cl. Philibert, 1750.

CRILLY, T. The rise of cayley's invariant theory (1841–1862). **História matemática**, Elsevier, v. 13, n. 3, p. 241–254, 1986.

_____. The decline of cayley's invariant theory (1863–1895). **História matemática**, Academic Press, v. 15, n. 4, p. 332–347, 1988.

_____. The cambridge mathematical journal and its descendants: the linchpin of a research community in the early and mid-victorian age. **História matemática**, Elsevier, v. 31, n. 4, p. 455–497, 2004.

DESPEAUX, S. E. **The development of a publication community: Nineteenth-century mathematics in British scientific journals**. Tese (Doutorado), 2002.

DESPEAUX, S. E. Launching mathematical research without a formal mandate: The role of university-affiliated journals in britain, 1837–1870. **História matemática**, Elsevier, v. 34, n. 1, p. 89–106, 2007.

DESPEAUX, S. E.; RICE, A. C. Augustus de morgan's anonymous reviews for the athenæum: A mirror of a victorian mathematician. **Historia Mathematica**, Elsevier, v. 43, n. 2, p. 148–171, 2016.

DONKIN, W. F. On the geometrical laws of the motion of a rigid system about a fixed point. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 36, n. 245, p. 427–433, 1850.

DUBBEY, J. M. Babbage, peacock and modern algebra. **Historia mathematica**, Elsevier, v. 4, n. 3, p. 295–302, 1977.

DURAND-RICHARD, M.-J. L'école algébrique anglaise et les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance. In: EDI-TIONS DE LA MAISON DES SCIENCES DE L'HOMME. **L'Europe mathématique: histoires, mythes, identités**. [S.l.], 1996. p. 447–480.

DURAND-RICHARD, M.-J.; MOKTEFI, A. Algèbre et logique symboliques: arbitraire du signe et langage formel. **La peinture du symbole**, Pétra Paris, p. 295–328, 2014.

DURAND-RICHARD, M.-J.; PARIS, M. Le réseau des algébristes anglais et la symbolisation de l'opérateur (1812-54). 1999.

EISENSTEIN, G. Untersuchungen über die cubischen formen mit zwei variabeln. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 27, p. 89–104, 1844.

ELLIOTT, E. B. **Algebra of quantics**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1964. v. 184.

ENROS, P. C. The analytical society (1812–1813): Precursor of the renewal of cambridge mathematics. **Historia Mathematica**, Elsevier, v. 10, n. 1, p. 24–47, 1983.

FAURE. Solution des questions 285-286. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Mallet-Bachelier, v. 13, p. 398–402, 1854.

FERRERS, N. M. On the area of the conic section, represented by the general trilinear equation of the second degree. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, West Strand, v. 2, p. 247–248, 1858.

FEUER, L. S. **America's First Jewish Professor: James Joseph Sylvester at the University of Virginia**. [S.l.]: American Jewish Archives, 1984.

_____. Sylvester in virginia. **The Mathematical Intelligencer**, Springer, v. 9, n. 2, p. 13–19, 1987.

FISHER, C. S. The death of a mathematical theory: A study in the sociology of knowledge. **Archive for history of exact sciences**, JSTOR, v. 3, n. 2, p. 137–159, 1966.

_____. The last invariant theorists a sociological study of the collective biographies of mathematical specialists. **European Journal of Sociology/Archives Européennes de Sociologie**, Cambridge University Press, v. 8, n. 2, p. 216–244, 1967.

FLOOD, R.; RICE, A.; WILSON, R. et al. **Mathematics in Victorian Britain**. [S.l.]: Oxford University Press, 2011.

GARDNER, J. H.; WILSON, R. J. Thomas archer hirst—mathematician xtravagant v. london in the 1860s. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 100, n. 9, p. 827–834, 1993.

GAUSS, C. F. **Disquisitiones generales circa superficies curvas**. [S.l.]: Typis Dieterichianis, 1828. v. 1.

GENOCCHI, A. Théorèmes sur les fonctions homogènes. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 12, p. 393–397, 1853.

GERONO. Notes sur quelques questions du programme officiel. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Mallet-Bachelier, v. 15, p. 322–336, 1856.

GILBERT, D. On the nature of negative and of imaginary quantities. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 121, p. 91–97, 1831.

GILLISPIE, C. C. Dictionary of scientific biography vols. 1 - 18. **New York: Scribners Sons**, 1981.

GLAISHER, J. W. L. American journal of mathematics, pure and applied. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 22, n. 552, p. 73–75, 1880.

_____. Obituary notice of samuel roberts. **Proceedings of the London Mathematical Society, 2nd series**, v. 13, 1914.

GORDAN, P. Beweis, dass jede covariante und invariante einer binären form eine ganze function mit numerischen coefficienten einer endlichen anzahl solcher formen ist. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 69, p. 323–354, 1868.

_____. **Dr. Paul Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie**. [S.l.]: BG Teubner, 1885/1887. v. 1.

GOW, R. Some galway professors of mathematics and of natural philosophy. **Irish Mathematical Society Bulletin**, v. 35, p. 42–48, 1995.

GRAY, J. **Worlds out of nothing: a course in the history of geometry in the 19th century**. [S.l.]: Springer Science ; Business Media, 2011.

GREER, H. Note on trilinear and quadrilinear coordinates. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, Longman, Brown, Green, Longman, and Roberts, v. 6, p. 237–241, 1864.

GREGORY, D.; SMITH, A. **The Cambridge Mathematical Journal**. [S.l.]: MACMILLAN, BARCLAY, AND MACMILLAN, GEORGE BELL, LONDON, 1837–1839. v. 1.

_____. **The Cambridge Mathematical Journal**. [S.l.]: E. Johnson, Trinity Street and Whittaker., 1843–1845. v. 4.

GREGORY, D. F. On the real nature of symbolical algebra. **Earth and Environmental Science Transactions of The Royal Society of Edinburgh**, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 14, n. 1, p. 208–216, 1839.

_____. **Examples of the Processes of the Differential and Integral Calculus**. [S.l.]: Deighton, 1841.

_____. Singular points in surfaces. **Cambridge Mathematical Journal**, E. JOHNSON, TRINITY STREET; AND WHITTAKER CO., LONDON., v. 2, p. 252–258, 1841.

_____. Of asymptotes to algebraic curves. **Cambridge Mathematical Journal**, E. JOHNSON, TRINITY STREET; AND WHITTAKER CO., LONDON., v. 4, p. 42–47, 1843.

_____. **A treatise on the application of analysis to solid geometry, commenced by DF Gregory, concluded by W. Walton.** [S.l.]: Whittaker and Co.; Simpkin and Co., 1845.

HAMILTON, S. W. R. **On a general method in dynamics.** [S.l.]: Richard Taylor United Kindom, 1834.

HAMILTON, W. R. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 25, n. 169, p. 489–495, 1844.

_____. **Lectures on Quaternions: Containing a Systematic Statement of a New Mathematical Method; of which the Principles Were Communicated in 1843 to the Royal Irish Academy; and which Has Since Formed the Subject of Successive Courses of Lectures, Delivered in 1848 and Subsequent Years, in the Halls of Trinity College, Dublin: with Numerous Illustrative Diagrams, and with Some Geometrical and Physical Applications.** [S.l.]: Hodges and Smith, 1853.

HARLEY, R. On the theory of quintics. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 3, p. 343–360, 1860.

HEARN, G. W. Singular application of geometry of three dimensions to a plane problem. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 4, p. 265–267, 1849.

HENSLEY, P. J. Determination of the foci of the conic section expressed by trilinear coordinates. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker, Son and Bourin, v. 5, p. 177–183, 1862.

HERMITE, C. Extraits de lettres de m. ch. hermite à m. jacobi sur différents objects de la théorie des nombres. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 40, p. 261–315, 1850.

_____. Remarques sur un mémoire de m. cayley relatif aux déterminants gauches. **Cambr. and Dublin Math. Journal**, v. 9, p. 63–67, 1854.

_____. Sur la théorie des fonctions homogenes à deux indeterminates. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 9, p. 172–217, 1854.

_____. Sur la théorie des formes quadratiques. premier mémoire. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 47, p. 313–342, 1854.

_____. Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 47, p. 307–312, 1854.

_____. Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. premier mémoire. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 52, p. 1–17, 1856.

_____. Sur les formes cubiques à deux indéterminées. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 1, p. 20–22, 1857.

_____. Sur la théorie des formes cubiques a trois indéterminées. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Mallet-Bachelier, v. 28, p. 37–41, 1858.

_____. Sur le résultant de trois formes quadratiques ternaires, extrait d'une lettre à m. borchardt. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 57, p. 371–375, 1860.

HESSE, O. Ueber oberflächen zweiter ordnung. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 18, p. 101–118, 1838.

_____. Über die elimination der variablen aus drei algebraischen gleichungen vom zweiten grade mit zwei variablen. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 28, p. 68–96, 1844.

_____. Über die wendepuncte der curven dritter ordnung.(fortsetzung zu voriger abhandlung). **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 28, p. 97–107, 1844.

_____. Über curven dritter ordnung und die kegelschnitte, welche diese curven in drei verschiedenen puncten berühren. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 36, p. 143–176, 1848.

_____. Eine bemerkung zum pascalschen theorem. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 41, p. 269–271, 1851.

_____. Über die ganzen homogenen functionen von der dritten und vierten ordnung zwischen drei variablen. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 41, p. 285–292, 1851.

_____. Über die geometrische bedeutung der lineären bedingungsgleichung zwischen den coëfficienten einer gleichung zweiten grades. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 45, p. 82–90, 1853.

HILBERT, D. **Theory of algebraic invariants**. [S.l.]: Cambridge university press, 1993.

HOCHMAN, G. A ciência entre a comunidade e o mercado: leituras de kuhn, bourdieu, latour e knorr-cetina. **Filosofia, história e sociologia das ciências: abordagens contemporâneas**. Rio de Janeiro: Fiocruz, p. 199–231, 1994.

IVORY, J. On the theory of the perturbations of the planets. In: THE ROYAL SOCIETY LONDON. **Abstracts of the Papers Printed in the Philosophical Transactions of the Royal Society of London**. [S.l.], 1837. p. 98–98.

JACOBI, C. G. J. De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis, simul cum enodatione paradoxo algebraici. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 15, p. 285–308, 1836.

_____. De determinantibus functionalibus. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 22, p. 319–359, 1841.

_____. Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 26, p. 115–131, 1843.

_____. Über ein leichtes verfahren die in der theorie der säcularstörungen vorkommenden gleichungen numerisch aufzulösen. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 30, p. 51–94, 1846.

_____. Démonstration de la proposition qu'une courbe du nième degré a, en général, $\frac{1}{2}n(n-2)(n-9)$ tangentes doubles. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 12, p. 141–161, 1853.

JAMES, I. M. James joseph sylvester, frs (1814–1897). **Notes and Records of the Royal Society of London**, The Royal Society, v. 51, n. 2, p. 247–261, 1997.

JOACHIMSTHAL, F. Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiibus secundi gradus. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 26, p. 155–171, 1843.

_____. Sur quelques applications de déterminants à la géométrie. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 40, p. 21–47, 1850.

_____. Bemerkungen über den sturm'schen satz. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 48, p. 386–416, 1854.

JONQUIÈRES, E. J. P. F. Solution de la question 388 (faure). **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Mallet-Bachelier, v. 16, p. 347–354, 1857.

KIRKMAN, W. Thomas penyngton kirkman. **Mem. and Proc, Manchester Lit. Phil. Soc**, v. 9, p. 238–243, 1895.

KLEIN, F. **Vorlesungen über die Entwicklungen der Mathematik, in 19. Jahrhundert**. [S.l.]: J. Springer, 1926. v. 24.

KOPPELMAN, E. The calculus of operations and the rise of abstract algebra. **Archive for history of exact sciences**, Springer, v. 8, n. 3, p. 155–242, 1971.

KUMMER, E. Bemerkungen über die cubische gleichung, durch welche die haupt-axen der flächen zweiten grades bestimmt werden. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 26, p. 268–272, 1843.

LAGRANGE, J. L. Solution de différens problèmes de calcul intégral. **Miscellanea Taurinensia**, v. 3, p. 471–668, 1766.

_____. Théorie des variations séculaires des élémens des planètes, première partie. contenant les principes & les formules générales pour déterminer ces variations. **Mémoires de l'académie des sciences de Berlin**, p. 125–207, 1782.

LEBESGUE, V.-A. Thèses de mécanique et d'astronomie... 1837.

LEE, S. **Dictionary of National Biography: Second Supplement**. [S.l.]: Smith Elder & Company, 1912. v. 1.

_____. Dictionary of national biography, vol: 1 - 48. **London: Elder Simth**, v. 2, 1912.

LIOUVILLE, J. Sur les variations séculaires des angles que forment entre elles les droites résultant de l'intersection des plans des orbites de jupiter, saturne et uranus. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Bachelier, v. 4, p. 483–492, 1839.

LONDON, T. R. S. of. Obituary notices of fellows deceased. **Proceedings of the Royal Society of London**, The Royal Society of London, v. 63, p. 9–25, 1898.

LUBBOCK, J. I. on the perturbations of planets moving in eccentric and inclined orbits. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 31, n. 205, p. 1–6, 1847.

MANSION, P. Notice sur les travaux de jules plücker. **Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques**, v. 5, p. 313–319, 1873.

MATTHEW, H. C. G.; HARRISON, B.; LONG, R. J. **The Oxford dictionary of national biography**. [S.l.]: R. James Long (2004)., 2004.

MEETING, B. A. for the Advancement of S. **Report of the... Meeting of the British Association for the Advancement of Science**. [S.l.]: J. Murray, 1831.

MEYER, W. F. **Sur les progrès de la théorie des invariants projectifs**. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1897.

MOLK, J. **Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pure et Appiquées**. [S.l.]: Jacques Gabay, 1916. v. 1.

MORGAN, A. D. **Trigonometry and Double Algebra...** [S.l.]: Taylor, Walton, & Maberly, 1849.

MUIR, T. X.—the theory of compound determinants in the historical order of its development up to 1860. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh**, Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, v. 28, p. 197–209, 1908.

MÜLLER, F.; OHRTMANN, C. Jahrbuch über die fortschritte der mathematik. **Georg Reimer**, 1868.

NAM. Note sur les déterminants. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 10, p. 124–131, 1851.

_____. Courbes planes ; génération. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 12, p. 220–222, 1853.

_____. Principes de discussion des surfaces et des lignes du second degré. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Mallet-Bachelier, v. 16, p. 294–296, 1857.

_____. Notions élémentaires sur les invariants, covariants, discriminants et hyperdéterminants. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Mallet-Bachelier, v. 18, p. 249–255, 1859.

ORANGE, A. The origins of the british association for the advancement of science. **The British journal for the history of science**, Cambridge University Press, v. 6, n. 2, p. 152–176, 1972.

PAINVIN, L. F. Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre (partie 1). **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Mallet-Bachelier, v. 17, p. 370–380, 1858.

_____. Discussion des lignes et surfaces du second ordre. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Mallet-Bachelier, v. 17, p. 130–136, 1858.

_____. Sur un certain système d'équations linéaires. **Journal de mathématiques pures et appliquées**, Mallet-Bachelier, v. 23, p. 41–46, 1858.

_____. Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre (partie 2). **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Mallet-Bachelier, v. 18, p. 407–420, 1859.

_____. Théorie des surfaces polaires d'un plan. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Gauthier-Villars, v. 4, p. 413–420, 1865.

_____. Théorie des surfaces polaires d'un point. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Gauthier-Villars, v. 4, p. 337–346, 1865.

PANTON, A. W.; BURNSIDE, W. S. **The theory of equations: with an introduction to the theory of binary algebraic forms**. [S.l.]: Hodges, Figgis & Company, 1881.

PARSHALL, K. H. Toward a history of nineteenth-century invariant theory. In: **Ideas and their Reception**. [S.l.]: Elsevier, 1989. p. 155–206.

_____. **James Joseph Sylvester: Life and work in letters**. [S.l.]: Oxford University Press, 1998.

_____. The british development of the theory of invariants (1841–1895). **BSHM Bulletin**, Taylor and Francis, v. 21, n. 3, p. 186–199, 2006.

_____. **James Joseph Sylvester: Jewish Mathematician in a Victorian World**. [S.l.]: JHU Press, 2006.

PARSHALL, K. H.; SENETA, E. Building an international reputation: the case of jj sylvester (1814–1897). **The American mathematical monthly**, Taylor & Francis, v. 104, n. 3, p. 210–222, 1997.

- PEACOCK, G. **A treatise on algebra**. [S.l.]: J. & J. Deighton, 1830. v. 1.
- PINE. On the principal axes of rotation. **Cambridge Mathematical Journal**, MACMILLAN, BARCLAY, AND MACMILLAN, GEORGE BELL, LONDON, v. 1, p. 39–40, 1837.
- PLÜCKER, J. Über die allgemeinen gesetze, nach welchen irgend zwei flächen einen contact der verschiedenen ordnungen haben. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 4, p. 349–370, 1829.
- _____. **Analytisch-geometrische Entwicklungen**. [S.l.]: GD Baedeker, 1831. v. 2.
- _____. Sur les points singuliers des courbes. **Journal de mathématiques pures et appliquées**, Bachelier, v. 2, p. 11–15, 1837.
- _____. Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 16, p. 47–57, 1837.
- POGGENDORFF, J. C. Biographisch-literarisches handwörterbuch der exakten naturwissenschaften. Verlag Chemie, 1863.
- POINSOT, L. Théorie nouvelle de la rotation des corps. **Journal de mathématiques pures et appliquées**, Bachelier, v. 16, p. 289–336, 1851.
- PROUHET, E. Notice sur la vie et les travaux d'olry terquem... **Nouvelles Annales des Mathématiques: Additional pages**, Mallet-Bachelier, v. 1, p. 81–89, 1862.
- RADAU, R. Sur la rotation des corps solides. In: **Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure**. [S.l.: s.n.], 1869. v. 6, p. 233–250.
- RANKINE, W. J. M. On the invariants sum of the products of the coefficients of a pair of homogeneous functions. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 1, p. 357–359, 1857.
- RICE, A. Mathematics in the metropolis: A survey of victorian london. **História matemática**, Elsevier, v. 23, n. 4, p. 376–417, 1996.
- _____. British mathematics 1837–1901. **BSHM Bulletin**, Taylor & Francis, v. 21, n. 3, p. 164–177, 2006.
- RICE, A. C.; WILSON, R. J. From national to international society: the london mathematical society, 1867–1900. **Historia Mathematica**, Academic Press, v. 25, n. 2, p. 185–217, 1998.
- RICE, A. C.; WILSON, R. J.; GARNER, J. H. From student club to national society: The founding of the london mathematical society in 1865. **Historia Mathematica**, Academic Press, v. 22, n. 4, p. 402–421, 1995.
- RICHARDS, J. L. Projective geometry and mathematical progress in mid-victorian britain. **Studies in History and Philosophy of Science Part A**, Elsevier, v. 17, n. 3, p. 297–325, 1986.

RICHELOT, F. J. Nota ad theoriam eliminationis pertinens. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 20, p. 226–234, 1840.

_____. Note sur l'Élimination. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 9, p. 228–232, 1850.

ROBERTS, M. Sur quelques questions d'algèbre. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Mallet-Bachelier, v. 19, p. 23–26, 1860.

_____. On some symmetric functions of the roots of algebraic equations. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 4, p. 57–65, 1861.

_____. On the covariants of a binary quantic of the n th degree, parte 1. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 4, p. 168–178, 1861.

_____. On some applications of algebra to the theory of covariants. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 5, p. 18–20, 1862.

_____. On the covariants of a binary quantic of the n th degree parte 2. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 5, p. 144–151, 1862.

ROBERTS, S. Note on the symmetrical expression of the constant in the equations of algebraic curves. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, West Strand, v. 2, p. 39–44, 1858.

_____. On the intersections of tangents drawn through two points on a curve of the third degree. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, West Strand, v. 3, p. 118–127, 1860.

RODRIGUES, O. Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. **Journal de mathématiques pures et appliquées**, v. 5, p. 380–440, 1840.

RSL. **Philosophical Transactions of Royal Society of London**. [S.l.]: Richard Taylor, 1851. v. 141.

SALMON, G. On the properties of surfaces of the second degree which correspond to the theorems of pascal and brianchon on conic sections: To the editors of the philosophical magazine and journal. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 24, n. 156, p. 49–51, 1844.

_____. On the degree of a surface reciprocal to a given one. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 2, p. 65–73, 1846.

_____. Note on a result of elimination. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, MACMILLAN, BARCLAY, AND MACMILLAN, GEORGE BELL, LONDON, v. 3, p. 169–173, 1848.

_____. On the triple tangent planes of surfaces of the third order. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, MACMILLAN, BARCLAY, AND MACMILLAN, GEORGE BELL, LONDON, v. 4, p. 252–260, 1849.

_____. Lettre de mr. g. salmon de dublin à l'éditeur de ce journal. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 39, p. 365–366, 1850.

_____. On the classification of curves of double curvature. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, MACMILLAN AND GEORGE BELL, LONDON, v. 5, p. 23–45, 1850.

_____. **Treatise on Conic Sections**. [S.l.]: Hodges and Smith, 1850.

_____. Sur la formation de l'équation de la courbe reciproque à une courbe donnée. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 42, p. 277–278, 1851.

_____. **A treatise on the higher plane curves: intended as a sequel to A treatise on conic sections**. [S.l.]: Hodges, Foster and Figgis, 1852.

_____. On a class of ruled surfaces. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, MACMILLAN AND GEORGE BELL, LONDON, v. 8, p. 45–47, 1853.

_____. Exercises in the hyperdeterminant calculus. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 9, p. 19–33, 1854.

_____. Geometrical notes. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 1, p. 237–241, 1857.

_____. On the contact of right lines with surfaces. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 1, p. 329–344, 1857.

_____. On the order of certain systems of equations. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 1, p. 246–257, 1857.

_____. On curves of the third order. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 148, p. 535–541, 1858.

_____. Sur la théorie de deux coniques. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Mallet-Bachelier, v. 17, p. 83–98, 1858.

_____. **Lessons introductory to the modern higher algebra**. 1. ed. [S.l.]: Hodges, Smith, and Company, 1859.

_____. On quaternary cubics. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 150, p. 229–259, 1860.

_____. On the relation which connects the mutual distances of five points in space. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 3, p. 282–289, 1860.

_____. **Lessons introductory to the modern higher algebra**. 3. ed. [S.l.]: Hodges, Foster, and Company, 1876.

_____. **Lessons introductory to the modern higher algebra**. 4. ed. [S.l.]: Hodges, Figgis, and Company, 1885.

SANTOS, C. Haubrichs dos. **Étienne Bobillier (1798-1840): percursos matemático, docente e profissional**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015.

SCHLÄFLI, L. An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order, and to divide such surfaces into species in reference to the reality of the lines upon the surface. **Quart. J. Math**, v. 2, n. 55, p. 55–65, 1858.

SENETA, E. Ij bienaymé [1796–1878]: Criticality, inequality, and internationalization. **International statistical review**, Wiley Online Library, v. 66, n. 3, p. 291–301, 1998.

SERLE, P. **Dictionary of Australian Biography**. [S.l.]: Angus and Robertson, 1949. v. 2.

SINACEUR, H. **Corps et modèles: essai sur l’histoire de l’algèbre réelle**. [S.l.]: Vrin, 1991.

SMITH, A. On the transformation of homogeneous functions of the second degree. **Cambridge Mathematical Journal**, MACMILLAN, BARCLAY, AND MACMILLAN, GEORGE BELL, LONDON, v. 1, p. 299–304, 1839.

SPERLING, J.-F. de. Note sur un théorème de m. sylvestre relatif à la transformation du produit de déterminants du même ordre. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Mallet-Bachelier, v. 5, p. 121–126, 1860.

SPOTTISWOODE, W. Mémoire sur les points singuliers d’une courbe à double courbure. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 42, p. 372–378, 1851.

_____. Elementary theorems relating to determinants. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, v. 51, p. 209–271, 1856.

_____. On the sextactic points of a plane curve. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 155, p. 653–669, 1865.

STEINER, J. Mémoire sur les courbes et les surfaces algébriques. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Mallet-Bachelier, v. 20, p. 36–53, 1855.

STURM, J. C. F. Mémoire sur la résolution des équations numériques. **Mémoires divers présentés par des savants étrangers**, Bachelier, v. 6, p. 273–318, 1835.

_____. Démonstration d’un théorème d’algèbre de m. sylvestre. **Journal de mathématiques pures et appliquées**, Bachelier, v. 7, p. 356–369, 1842.

SYLVESTER, J. J. On rational derivation from equations of coexistence, that is to say, a new and extended theory of elimination. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 15, n. 98, p. 428–435, 1839.

_____. A method of determining by mere inspection the derivatives from two equations of any degree. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 16, n. 101, p. 132–135, 1840.

_____. Examples of the dialytic method of elimination as applied to ternary systems of equations. **Cambridge Mathematical Journal**, E. JOHNSON, TRINITY STREET; AND WHITTAKER CO., LONDON., v. 2, p. 232–236, 1841.

_____. A new and more general theory of multiple roots. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 18, n. 117, p. 249–254, 1841.

_____. An account of a discovery in the theory of numbers relative to the equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = dxyz$. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 31, n. 207, p. 189–191, 1847.

_____. Additions to the articles, "on a new class of theorems," and "on pascal's theorem". **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 37, n. 251, p. 363–370, 1850.

_____. On a new class of theorems in elimination between quadratic functions. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 37, n. 249, p. 213–218, 1850.

_____. On a porismatic property of two conics having with one another a contact of the third order. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 37, n. 252, p. 438–439, 1850.

_____. On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 5, n. 262–282, p. 162, 1850.

_____. On the rotation of a rigid body about a fixed point. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 37, n. 252, p. 440–444, 1850.

_____. On the solution of a system of equations in which three homogeneous quadratic functions of three unknown quantities are respectively equaled to numerical multiples of a fourth non-homogeneous function of the same. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 37, n. 251, p. 370–373, 1850.

_____. An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 1, n. 2, p. 119–140, 1851.

_____. On a certain fundamental theorem of determinants. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 2, n. 9, p. 142–145, 1851.

_____. On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 2, n. 12, p. 391–410, 1851.

_____. On certain general properties of homogeneous functions. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 6, p. 1–31, 1851.

_____. On the general theory of associated algebraical forms. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 6, p. 289–293, 1851.

_____. On the intersections of two conics. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 6, p. 162–164, 1851.

_____. On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 1, n. 4, p. 295–305, 1851.

_____. Sketch of a memoir on elimination, transformation, and canonical forms. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 6, p. 186–200, 1851.

_____. A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 4, n. 23, p. 138–142, 1852.

_____. On the principles of the calculus of forms (parte 1). **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 7, p. 52–97, 1852.

_____. On the principles of the calculus of forms (parte 2). **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 7, p. 179–217, 1852.

_____. Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert à déterminer les inégalités séculaires des planètes. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 11, p. 434–440, 1852.

_____. The algebraical theory of the secular-inequality determinative equation generalized. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 6, n. 38, p. 214–216, 1853.

_____. Note on the calculus of forms. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 8, p. 62–64, 1853.

_____. Note on the new rule of limits. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 6, n. 38, p. 210–213, 1853.

_____. Nouvelle méthode pour trouver une limite supérieure et une limite inférieure des racines réelles d'une équation algébrique quelconque. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 12, p. 329–336, 1853.

_____. On a remarkable modification of sturm's theorem. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 5, n. 34, p. 446–456, 1853.

_____. On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure. **Philosophical transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 143, p. 407–548, 1853.

_____. On the calculus of forms, otherwise the theory of invariants. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan and George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, v. 8, p. 256–269, 1853.

_____. Théorème sur les limites des racines réelles des équations algébriques. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 12, p. 286–287, 1853.

_____. Sur l'involution des lignes droites dans l'espace considérées comme des axes de rotation. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences**, n. 52, p. 741–745, 1861.

_____. Algebraical researches, containing a disquisition on newton's rule for the discovery of imaginary roots, and an allied rule applicable to a particular class of equations, together with a complete invariative determination of the character of the roots of the general equation of the fifth degree, etc. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 154, p. 579–666, 1864.

_____. On the motion of a rigid body acted on by no external forces. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 156, p. 757–779, 1866.

SYLVESTER, J. J.; FERRERS, N. M. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**. [S.l.]: John W. Parker and Son, West Strand., 1857. v. 1.

TERQUEM, O. Méthode des homogènes. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 7, p. 5–11, 1848.

_____. Théorèmes d'homogénéité. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 8, p. 113–120, 1849.

_____. Propriétés générales des courbes algébriques planes. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 9, p. 283–296, 1850.

_____. Théorèmes sur l'équation aux carrés des différences des racines, et application géométrique aux faisceaux tangentiels. **Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale**, Bachelier, v. 9, p. 98–105, 1850.

URBAN, G. S. Literary and scientific intelligence. **The Gentleman's Magazine**, William Pickering; John Bowyer Nichols and Son, v. 10, p. 647, 1838.

VERDIER, N. Les journaux de mathématiques dans la première moitié du xixe siècle en europe. **Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences**, Université Nancy 2, n. 13-2, p. 97–126, 2009.

WARREN, J. **A treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities**. [S.l.]: J. Smith, 1828.

_____. Illustrations of the theory of seminvariants or critical functions - parte 2. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 6, p. 372–380, 1864.

_____. On the orthometric relations between the strains of a disturbed system. **The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, John W. Parker and Son, v. 6, p. 189–198, 1864.

WEDDLE, T. On the theorems in space analogous to those of pascal and briançon in a plane, parte i. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, n. 4, p. 26–44, 1849.

_____. On the theorems in space analogous to those of pascal and briançon in a plane, parte iii. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, Macmillan, Barclay and Macmillan, George Bell, London; Hodges and Smith, Dublin, n. 6, p. 114–135, 1851.

WENGER, E. **Communities of practice: Learning, meaning, and identity**. [S.l.]: Cambridge university press, 1999.

WENGER-TRAYNER, E.; WENGER-TRAYNER, B. **Communities of practice: A brief introduction**. Sacramento, CA, 2015.

WOODHOUSE, R. On the independence of the analytical and geometrical methods of investigation; and on the advantages to be derived from their separation. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 92, p. 85–125, 1802.

_____. **The principles of analytical calculation**. [S.l.: s.n.], 1803.

Apêndices

APÊNDICE A – PRODUÇÕES DOS AUTORES BRITÂNICOS E SUAS TEMÁTICAS

ANDREW BELL			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Researches in Rotatory Motion	Cambridge Mathematical Journal v. 3 (1843)	213-216	Rotação

ARCHIBALD SIMTH			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Note of theory about de spinning top	Cambridge Mathematical Journal v. 1 (1837)	047-048	Rotação
On the transformation of homogeneous functions of the second degree	Cambridge Mathematical Journal v. 1 (1839)	299-304	Redução

ARTHUR CAYLEY			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the Motion of Rotation of a Solid Body	Cambridge Mathematical Journal v. 3 (1843)	224-232	Rotação
On the Theory of Algebraic Curves	Cambridge Mathematical Journal v. 4 (1844)	102-112	Locus
Chapters in the Analytical Geometry of (n) Dimensions	Cambridge Mathematical Journal v. 4 (1844)	119-127	Transformações
On the Theory of Linear Transformations	Cambridge Mathematical Journal v. 4 (1845)	193-209	Transformações
On the Reduction of $\frac{dU}{\sqrt{U}}$, when U is a Function of the Fourth Order	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 1 (1845)	070-073	Transformações

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On Homogeneous Functions of the Third Order with Three Variables	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 1 (1845)	097-104	Transformações
On Linear Transformations	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 1 (1845)	104-122	Transformações
Note sur deux formnies donnees par M. M. Eisensenstein et Hesse	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 29 (1845)	054-057	Transformações
On the Rotation of a Solid Body Round a Fixed Point	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 1 (1846)	167-173	Rotação
On the Diametral Planes of a Surface of the Second Order	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 1 (1846)	274-278	Locus
On the Theory of Involution in Geometry	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 1 (1846)	052-061	Contatos
Mémoire sur les Hyperdéterminants	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 30 (1846)	001-037	Transformações
Sur quelques propriétés des déterminants gauches	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 32 (1846)	119-123	Transformações
On the Theory of Elimination	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 3 (1847)	116-120	Eliminação
Recherches sur l'élimination, et sur la théorie des courbes	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 34 (1847)	030-045	Contatos
Note sur les Hyperdéterminants	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 34 (1847)	148-152	Locus

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the application of quaternions to the theory of rotation	Philosophical Magazine 221 (1848)	196-200	Rotação
On Geometrical Reciprocity	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 3 (1848)	173-179	Contatos
Nouvelles recherches sur les fonctions de M. Sturm	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1848)	269-275	Eliminação
On the Simultaneous Transformation of two homogeneous Functions of the Second Order	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 4 (1849)	046-050	Transformações
On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 4 (1849)	118-132	Contatos
On the Order of Certain Systems of Algebraical Equations	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 4 (1849)	132-137	Eliminação
Sur les déterminants gauches	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 38 (1849)	093-096	Transformações
Note sur les fonctions du second ordre	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 38 (1849)	105-106	Locus
Sur quelques Transmutations des Lignes Courbes	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1849)	040-047	Locus
On Curves of Double Curvature and Developable Surfaces	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850)	018-022	Contatos
On the Developable Surfaces which Arise from two Surfaces of the Second Order	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850)	046-057	Contatos
Note on a Family of Curves of the Fourth Order	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850)	148-152	Locus

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the Developable Derived from an Equation of the Fifth Order	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850)	152-159	Contatos
Note sur quelques formules relatives aux coniques	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 39 (1850)	001-003	Locus
Sur le probleme des contacts	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 39 (1850)	004-013	Contatos
Note sur un système de certaines formules	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 39 (1850)	014-015	Transformações
Addition au Mémoire sur quelques Transmutations des Lignes Courbes, Inséré dans le Volume Précédent	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1850)	351-356	Locus
Mémoire sur les coniques inscrites dans une même surface du second ordre	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 41 (1851)	073-080	Contatos
Note sur la théorie des Hyperdéterminants	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 42 (1851)	368-371	Transformações
Analytical Researches connected with Steiner's Extension of Malfatti's Problem	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 142 (1852)	253-278	Contatos
On the Theory of Permutants	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852)	040-051	Transformações
Correction of the Postscript to the Paper on Permutants	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852)	097-098	Transformações
On the Singularities of Surfaces	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852)	166-171	Contatos
On the homographic transformation of a surface of the second order into itself	Philosophical Magazine v. 40 (1853)	326-333	Transformações

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
An introductory memoir upon quantic	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 144 (1854)	245-258	Transformações
On the homographic transformation of a surface of the second order into itself	Philosophical Magazine v. 44 (1854)	208-212	Transformações
Nouvelles recherches sur les Covariants	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 47 (1854)	109-124	Transformações
Reponse à une question proposée par M. Steiner	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 50 (1855)	277-278	Locus
Sur und théorème de M. Schläfli	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 50 (1855)	278-282	Locus
Remarques sur la notation des fonctions algébriques	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 50 (1855)	282-285	Locus
Note sur les covariants d'une fonction quadratique, cubique, ou biquadratique à deux indéterminées	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 50 (1855)	285-287	Transformações
Sur la transformation d'une fonction quadratique en elle même par des substitutions linéaires	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 50 (1855)	288-299	Transformações
Recherches ultérieurs sur les déterminants gauches	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 50 (1855)	299-313	Transformações
Recherches sur les matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule indéterminée	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 50 (1855)	313-317	Transformações
A second memoir upon quantics	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 146 (1856)	101-126	Transformações
A third memoir upon quantics	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 146 (1856)	627-647	Transformações

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
A memoir on curves of the third order	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 147 (1857)	415-446	Transformações
Memoir on the resultant of a system of two equations	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 147 (1857)	703-715	Eliminação
On the symmetric functions of the roots of certain systems of two equations	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 147 (1857)	717-726	Eliminação
A Memoir on the Conditions for the Existence of given Systems of Equalities among the Roots of an Equation	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 147 (1857)	727-731	Rotação
Tables of the sturmian functions for equations of the second, third, fourth, and fifth degrees	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 147 (1857)	733-736	Eliminação
On a Theorem Relating to Reciprocal Triangles	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857)	007-010	Locus
Cubic Forms	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857)	085-090	Transformações
Note on Mr. Salmon's Equation of the Orthotomic Circle	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857)	242-244	Locus
Note on the Logic of Characteristics	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857)	257-259	Transformações
Note sur la méthode d'élimination de Bézout	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 53 (1857)	366-367	Eliminação
Mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 54 (1857)	048-058	Redução

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Addition au mémoire sur la forme canonique des fonctions binaires	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 54 (1857)	292	Redução
A memoir on the theory of matrices	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858)	017-037	Transformações
A memoir on the automorphic linear transformation of a bipartite quadric function	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858)	039-046	Transformações
A fourth memoir upon quantics	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858)	415-427	Transformações
A fifth memoir upon quantics	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858)	429-460	Transformações
On the Tangential of a Cubic	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858)	461-463	Locus
On Certain Forms of the Equation of a Conic	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 2 (1858)	044-049	Contatos
A Theorem relating to Surfaces of the Second Order	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 2 (1858)	140-143	Locus
On the Determination of the Value of a certain Determinant	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 2 (1858)	163-167	Transformações
On the Simultaneous Transformation of Two Homogeneous Functiona of the Second Order	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 2 (1858)	192-195	Transformações
On the System of Conics which pass through the same Four Points	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 2 (1858)	206-208	Contatos

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Direct Investigation of the Question discussed in the foregoing Paper	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 2 (1858)	248-254	Locus
Theoreme sur les determinants gauches	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 55 (1858)	277-278	Rotação
A sixth memoir upon quantics	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 149 (1859)	061-090	Transformações
On the double tangents of a plane curve	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 149 (1859)	193-212	Contatos
On the Wave Surface	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 3 (1860)	016-022	Locus
On a New Analytical Representation of Curves in Space	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 3 (1860)	225-236	Locus
Note on the Value of Certain Determinants, the Terms of which are the Squared Distances of Points in a Plane or in Space	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 3 (1860)	275-278	Locus
Note on the Curvature of a Plane Curve at a Double Point, and on the Curvature of Surfaces	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 3 (1860)	322-327	Locus
Sur l'Invariant le plus simple d'une fonction quadratique bi-ternaire, et sur le Résultant de trois fonctions quadratiques ternaires	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 57 (1860)	139-148	Transformações
A seventh memoir on quantics	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 151 (1861)	277-292	Transformações

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the double tangents of a curve of the fourth order	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 151 (1861)	357-362	Contatos
A Discussion of the Sturmian Constants for Cubic and Quartic Equations	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	007-012	Eliminação
A Theorem in Conics	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	131-133	Transformações
Note sur la transformation de Tschirnhausen	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 58 (1861)	259-262	Transformações
Deuxième nota sobre a transformação de Tschirnhausen	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 58 (1861)	263-269	Transformações
On a New Analytical Representation of Curves in Space	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	081-086	Locus
On the Construction of the Ninth Point of Intersection of the Cubics which pass through Eight given Points	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	222-233	Contatos
On the Conics which pass through the Four Foci of a given Conic	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	275-280	Locus
Note sur l'élimination	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 60 (1862)	373-374	Eliminação
Note sur la réalité des racines d'une equation quadratique	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 61 (1863)	367-368	Rotação
On the Conics which pass through three given Points and Touch a given Line	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 6 (1864)	024-030	Locus

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the Cusp of the Second Kind or Nodecusp	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 6 (1864)	074-075	Locus
On Certain Developable Surfaces	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 6 (1864)	108-127	Locus
On the Inflexions of the Cubical Divergent Parabolas	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 6 (1864)	199-203	Locus
Note on an Expression for the Resultant of two Binary Cubics	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 6 (1864)	380-382	Transformações
Nouvelles recherches sur l'élimination et la théorie des courbes	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 63 (1864)	034-039	Eliminação
On the sextactic points of a plane curve	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 155 (1865)	545-578	Locus

DONKIN			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the geometrical laws of the motion of a rigid system about a fixed point	Philosophical Magazine v. 245 (1850)	427-433	Rotação
On the geometrical theory of rotation	Philosophical Magazine v. 3 (1851)	187-192	Rotação

DUNCAN GREGORY			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Singular points in surfaces	Cambridge Mathematical Journal v. 2 (1841)	252-258	Contato
Of Asymptotes to Algebraic Curves	Cambridge Mathematical Journal v. 4 (1843)	042-047	Contato

E. J. ROUTH			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Note on the Invariants of the Equation of the Second Degree	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 6 (1864)	269-278	Transformações
Note on the Invariants of the Equation of the Second Degree	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 6 (1864)	308-318	Transformações

GEORGE BOOLE			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Researches on the Theory of Analytical Transformations, with a Special Application to the Reduction of the General Equation of the Second Order	Cambridge Mathematical Journal v. 2 (1840)	064-073	Redução
Exposition of a General Theory of Linear Transformations Part 1	Cambridge Mathematical Journal v. 3 (1841)	001-020	Transformações
Exposition of a General Theory of Linear Transformations Part 2	Cambridge Mathematical Journal v. 3 (1842)	106-119	Transformações
Notes on Linear Transformations	Cambridge Mathematical Journal v. 4 (1844)	167-171	Transformações
On the Theory of Linear Transformations	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851)	087-106	Transformações

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the reduction of the General Equation of the n th Degree (Sequel to a Memoir on the Theory of Linear Equations)	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851)	106-113	Redução
On Reciprocal Methods in the Differential Calculus	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)	001-024	Locus

GEORGE SALMON			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the Properties of Surfaces of the Second Degree which correspond to the Theorems of Pascal and Brianchon on Conic Sections	Philosophical Magazine v. 24 (1844)	049-051	Contatos
On the Degree of a Surface Reciprocal to a Given One	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 2 (1846)	065-073	Locus
Note on a Result of Elimination	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 3 (1848)	169-173	Eliminação
On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 4 (1849)	252-260	Contatos
On the Classification of Curves of Double Curvature	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850)	023-046	Locus
Lettre de Mr. G. Salmon de Dublin à l'éditeur de ce journal	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 39 (1850)	365-366	Locus
Théorèmes sur les courbes de troisième degré	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 42 (1851)	274-276	Locus

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Sur la formation de l'équation de la courbe reciproque à une courbe donnée	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 42 (1851)	277-278	Locus
On a Class of Ruled Surfaces	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)	045-047	Locus
Exercises in the Hyperdeterminant Calculus	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 9 (1854)	019-033	Transformações
Geometrical Notes	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857)	237-241	Contatos
On the Order of Certain Systems of Equations	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857)	246-257	Eliminação
On the Contact of Right Lines, with Surfaces	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857)	329-344	Contatos
On curves of the third order	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858)	535-541	Locus
Sur la théorie de deux coniques	Nouvelles Annales des Mathématiques (1858)	083-098	Contatos
On Quaternary Cubics	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 150 (1860)	229-239	Transformações
On the Relation which connects the Mutual Distances of Five Points in Space	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 3 (1860)	282-289	Locus
On the Determination of the Points of Contact of Double Tangents to an Algebraic Curve	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 3 (1860)	317-322	Contatos

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the Determination of the Foci of a Conic	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	307-311	Locus
On the Circle Which Touches the Four Circles which Touch the Sides of a Given Spherical Triangle	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 6 (1864)	067-073	Locus

G. M. SLESSER			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Notes on Trilinear Coordinates	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	134-139	Locus

GW HEARN			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Singular Application of Geometry of Three Dimensions to a Plane Problem	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 4 (1849)	265-267	Locus

HENRY R. GREER			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the Equation of the Six-Points Circle	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	313-316	Locus
Notes on Trilinear and Quadriplanar Coordinates	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 6 (1864)	237-241	Contatos

JAMES BOOTH			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the rotation of a rigid body round a fixed point	Philosophical Magazine v. 19 (1841)	432-441	Rotação
On the rotation of a rigid body round a fixed point	Philosophical Magazine v. 20 (1842)	010-018	Rotação

JAMES COCKLE			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On Certain Algebraic Funcions	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 2 (1846)	267-273	Redução
An account of the method of vanishing groups	Philosophical Magazine v. 213 (1848)	114-119	Redução
On Certain Algebraic Functions	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 3 (1848)	179-181	Redução
On the solution of certain systems of equations	Philosophical Magazine v. 11 (1851)	289-293	Transformações
On the Method of Vanishing Groups	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852)	114-118	Redução
On the Method of Vanish Groups	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)	050-060	Redução
On the method of symmetric products	Philosophical Magazine v. 43 (1854)	130-138	Redução
On a New Solvible Form of Equations of the Fifth Degree	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 2 (1858)	144-145	Eliminação

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On Critical and Spencian Functions, with remarks upon Spence's Theory	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	097-111	Transformações
On the General Forms of Critical Functions	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	265-270	Transformações
Notes on the Higher Algebra	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	018-020	Transformações

JAMES W. WARREN

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On Invariant Points, Lines, and Surf Aces in Space, and their Physical Significance	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	306-310	Rotação
On the Orthometric Relations Between the Strains of a Disturbed System	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 6 (1862)	189-198	Transformações
Illustrations of the Theory of Critical Functions	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 6 (1862)	231-237	Transformações
Illustrations of the Theory of Seminvariants or Critical Functions	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 6 (1862)	372-380	Transformações

J. J. WALKER

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the Resolution of Composite Quantics Into Linear Factors	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 6 (1864)	328-356	Transformações

LAWRENCE SMITH			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Theorem, respecting the Polar Conics of Curves of the Third Degree	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 2 (1858)	208-217	Locus

MICHAEL ROBERTS			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Sur quelques questions d'algèbre	Nouvelles Annales des Mathématiques (1860)	023-026	Transformações
On some Symmetric Functions of the Roots of Algebraic Equations	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	057-065	Transformações
On the Covariants of a Binary Quantic of the n^{th} Degree	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	168-178	Transformações
Note on the Equation of the Squares of the Differences of the Roots of a Quintic	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	234-235	Transformações
On the Covariants of a Binary Quantic of the n^{th} Degree	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	324-327	Transformações
On the Covariants of a Binary Quantic of the n^{th} Degree	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	144-151	Transformações
Note on Certain Curves of the Third Degree	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	365-366	Transformações

NORMAN FERRERS			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Note on Reciprocal Triangles and Tetrahedra	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857)	191-195	Locus
Note on the Fundamental Property of Geodesic Lines	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857)	245	Locus
On the Area of the Conic Section, represented by the General Trilinear Equation of the Second Degree	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 2 (1858)	247-248	Locus
Note on the Conditions that the Equation of the Second Degree should represent a Circle or Sphere	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 2 (1858)	267-269	Locus
Determination of the Magnitudes of the Axes of a Surface of the Second Degree, Represented by Tetrahedral Coordinates	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	140-143	Locus
Investigation of the Trilinear Coordinates of the Foci of a Conic Section	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	235-236	Locus
On the Equations of the Planes of Circular Section of a Conoid Represented by Tetrahedral Coordinates	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	078-081	Locus
Notes on Tetrahedral and Quadriplanar Coordinates	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	172-176	Locus
On the Radical Axis of two Similar and Similarly Situated Conics	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	312-313	Locus

PERCIVAL FROST			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On Circular Sections of the Locus of the general Equation of the Second Order	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 1 (1846)	133-137	Contatos

P. J. HENSLEY			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Determination of the Foci of the Conic Section Expressed by Trilinear Coordinates	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	177-183	Locus

RANKINE			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the Invariant sum of the Products of the Coefficients of a Pair of Homogeneous Functions	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857)	357-359	Transformações

ROBERT HARLEY			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the Theory of Quintics	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 3 (1860)	343-360	Transformações
On the Theory of Quintics	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	248-260	Transformações

SAMUEL ROBERTS			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Note on the Symmetrical Expression of the Constante in the Equations of Algebraical Curves	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 2 (1858)	039-044	Locus
On the Transformation of Coordinates	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 2 (1858)	172-192	Transformações
On the Intersections of Tangents drawn through Two Points on a Curve of the Third Degree	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 3 (1860)	118-127	Contatos

THOMAS COTTERILL			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the Calculus of Distances, Areas, and Volumes, and its Relations to the Other Forms of Space	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852)	275-279	Locus

THOMAS WEDDLE			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Investigation of Certain Properties of the Ellipsoid	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 2 (1846)	013-019	Locus
On asymptotic straight lines, planes, cones and cylinders to algebraical surfaces	Philosophical Magazine v. 210 (1847)	425-434	Contatos
On the Theorems in Space Analogous to those of Pascal and Brianchon in a Plane	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850)	057-069	Contatos
On the Theorems in Space Analogous to those of Pascal and Brianchon in a Plane	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851)	114-135	Contatos

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Demonstration of Brianchon's Theorem, and of an Analogous Property in Space	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852)	010-013	Contatos
On Certain Systems in Space Analogous to the Complete Tetragon and Complete Quadrilateral	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852)	251-275	Locus
On the Conditions of Similarity of two Surfaces of the Second Degree not Similarly Placed	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)	035-037	Locus
On Certain Geometrical Relations Between a Surface of the Second Degree and a Tetrahedron whose Edges Touch the Surfaces	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)	105-148	Locus

V. VON ZEIPEL			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Demonstration of a Theorem of Mr. Cayley's in Relation to Sturm's Functions	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 3 (1860)	108-118	Transformações

WILLIAM ALLIEN WHITWORTH			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Determination of the Trilinear Equation to the Axes of a Conic Section	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	335-336	Locus

WILLIAM B COLTMAN			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On some Properties of a Parabola Touching the Three Side of a Triangle	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852)	137-147	Locus

WILLIAM SPOTTISWOODE			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Mémoire sur quelques formules relative aux surface du second ordre	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 42 (1851)	169-178	Locus
Mémoire sur les points singuliers d'une courbe à double courbure	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 42 (1851)	372-378	Locus
Two lettres of the Geometrical correspondance between M. Donkin and M. Spottiswoode	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 47 (1854)	225-232	Rotação
Elementary Theorems relating to Determinants parte 1	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 51 (1856)	209-271	Transformações
Elementary Theorems relating to Determinants parte 2	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 51 (1856)	328-381	Transformações
On the contact of curves	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 152 (1862)	041-052	Contatos
Note sur la transformation de la cubique ternaire en sa forme canonique	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 63 (1864)	244-246	Redução
On the sextactic points of a plane curve	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 155 (1865)	653-669	Contatos

WILLIAM WALTON			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
On the Indeterminate Curvature of Surfaces	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852)	001-007	Locus

TOTAL DE PUBLICAÇÕES							
NOME	ARTIGOS	NOME	ARTIGOS	NOME	ARTIGOS	NOME	ARTIGOS
ARTHUR CAYLEY	102	MICHAEL ROBERTS	7	JAMES BOOTH	2	P. J. HENSLEY	1
JAMES JOSEPH SYLVESTER	48	JAMES W. WARREN	4	ROBERT HARLEY	2	RANKINE	1
GEORGE SALMON	20	SAMUEL ROBERTS	3	ANDREW BELL	1	THOMAS COTTERILL	1
JAMES COCKLE	11	ARCHIBALD SIMTH	2	G. M. SLESSER	1	V. VON ZEIPEL	1
NORMAN FERRERS	9	DONKIN	2	GW HEARN	1	WILLIAM ALLIEN WHITWORTH	1
THOMAS WEDDLE	8	DUNCAN GREGORY	2	J. J. WALKER	1	WILLIAM B COLTMAN	1
WILLIAM SPOTTISWOODE	8	E. J. ROUTH	2	LAWRENCE SMITH	1	WILLIAM WALTON	1
GEORGE BOOLE	7	HENRY R. GREER	2	PERCIVAL FROST	1		

APÊNDICE B – CITAÇÕES DOS AUTORES BASE

JAMES JOSEPH SYLVESTER		
CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Étienne Bezout	Philosophical Magazine v. 15 (1839) Philosophical Magazine v. 16 (1840) Philosophical Magazine v. 10 (1851) Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 143 (1853)	Eliminação Transformações
Jacques Charles François Sturm	Philosophical Magazine v. 15 (1839) Philosophical Magazine v. 207 (1847) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851) Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 143 (1853)	Eliminação Contatos Transformações
Gabriel Cramer	Philosophical Magazine v. 16 (1840)	Eliminação
Pierre-Simon Laplace	Philosophical Magazine v. 16 (1840)	Eliminação
Jean-Guillaume Garnier	Philosophical Magazine v. 16 (1840)	Eliminação

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Augustus De Morgan	Philosophical Magazine v. 16 (1840)	Eliminação
John T. Graves	Philosophical Magazine v. 16 (1840)	Eliminação
Friedrich Julius Richelot	Cambridge Mathematical Journal v. 2 (1841) Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 143 (1853)	Eliminação Transformações
Augustin-Louis Cauchy	Philosophical Magazine v. 18 (1841) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850) Philosophical Magazine v. 23 (1852) Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 143 (1853)	Eliminação Contatos Transformações Redução
George Boole	Philosophical Magazine v. 251 (1850) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852)	Eliminação Contatos Transformações
Julius Plücker	Philosophical Magazine v. 251 (1850) Philosophical Magazine v. 2 (1851)	Eliminação Contatos
Jakob Steiner	Philosophical Magazine v. 251 (1850)	Eliminação Contatos

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Arthur Cayley	Philosophical Magazine v. 251 (1850) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851) Philosophical Magazine v. 2 (1851) Philosophical Magazine v. 5 (1851) Philosophical Magazine v. 9 (1851) Philosophical Magazine v. 12 (1851) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851) Philosophical Magazine v. 19 (1852) Philosophical Magazine v. 20 (1852) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852) Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 143 (1853)	Contatos Transformações Eliminação
George Gabriel Stokes	Philosophical Magazine v. 252 (1850)	Rotação
George Biddell Airy	Philosophical Magazine v. 252 (1850)	Rotação
William Thomson	Philosophical Magazine v. 252 (1850)	Rotação

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Joseph-Louis Lagrange	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850) Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 143 (1853)	Contatos Transformações Eliminação
George Salmon	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851) Philosophical Magazine v. 19 (1852) Philosophical Magazine v. 20 (1852) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852) Philosophical Magazine v. 32 (1853) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)	Transformações Eliminação
George Birch Jerrard	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851)	Transformações
Ferdinand Joachimsthal	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851)	Transformações
William Rowan Hamilton	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851)	Transformações
Charles Hermite	Philosophical Magazine v. 4 (1851) Philosophical Magazine v. 9 (1851) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852) Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 143 (1853)	Eliminação Transformações

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
William Spottiswoode	Philosophical Magazine v. 4 (1851) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851)	Transformações
Ludwig Otto Hesse	Philosophical Magazine v. 4 (1851) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)	Transformações
Orly Terquem	Philosophical Magazine v. 10 (1851) Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 143 (1853)	Eliminação Transformações
Siegfried Heinrich Aronhold	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852) Philosophical Magazine v. 32 (1853) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)	Eliminação Transformações
Carl Gustav Jakob Jacobi	Philosophical Magazine v. 23 (1852) Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 143 (1853)	Redução Transformações Eliminação

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Carl Wilhelm Borchardt	Philosophical Magazine v. 23 (1852) Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 143 (1853) Philosophical Magazine v. 38 (1853)	Redução Transformações Eliminação
Ferdinand Gotthold Max Eisenstein	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852)	Transformações
Ehrenfried Walther von Tschirnhaus	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 143 (1853)	Eliminação Transformações
Norman Macleod Ferrers	Philosophical Magazine v. 31 (1853)	Transformações

ARTHUR CAYLEY		
CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Benjamin Olinde Rodrigues	Cambridge Mathematical Journal v. 3 (1843) Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 31 (1846) Philosophical Magazine v. 221 (1848)	Rotação Locus

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Julius Plücker	Cambridge Mathematical Journal v. 4 (1844)	
	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 2 (1846)	
	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 34 (1847)	
	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 3 (1848)	
	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 4 (1849)	Locus
	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 38 (1849)	Contatos
	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850)	Eliminação
	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 149 (1859)	
	The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 5 (1862)	
	The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 6 (1864)	

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Carl Gustav Jakob Jacobi	Cambridge Mathematical Journal v. 4 (1844) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 4 (1849) The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 2 (1858) Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 149 (1859)	Locus Contatos
George Boole	Cambridge Mathematical Journal v. 4 (1845) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 1 (1845) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 4 (1849) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852) The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 2 (1858)	Transformações
Christoph Gudermann	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 1 (1845)	Transformações
Gabriel Cramer	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 2 (1846)	Contatos

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Ludwig Otto Hesse	<p>Cambridge Mathematical Journal v. 4 (1845)</p> <p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 1 (1845)</p> <p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 29 (1845)</p> <p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 34 (1847)</p> <p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 147 (1857)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 1 (1857)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 149 (1859)</p> <p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 57 (1860)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 151 (1861)</p> <p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 61 (1863)</p>	<p>Transformações</p> <p>Contatos</p> <p>Eliminação</p> <p>Locus</p> <p>Rotação</p>
Ferdinand Joachimsthal	<p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 34 (1847)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 144 (1854)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858)</p>	<p>Eliminação</p> <p>Contatos</p> <p>Transformações</p>

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Joseph-Louis Lagrange	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 31 (1846)	Rotação
Ferdinand Gotthold Max Eisenstein	Cambridge Mathematical Journal v. 4 (1845) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 1 (1845) Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 29 (1845) Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 34 (1847) The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 1 (1857)	Transformações
Michel Chasles	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 34 (1847) Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858) The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 5 (1862)	Locus Transformações Contatos
William Rowan Hamilton	Philosophical Magazine v. 221 (1848) Philosophical Magazine v. 40 (1853)	Rotação Transformações
Jakob Steiner	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 41 (1851) Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 50 (1855) Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 147 (1857) The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 2 (1858)	Locus Transformações Contatos

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
George Salmon	<p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 4 (1849)</p> <p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850)</p> <p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 39 (1850)</p> <p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 42 (1851)</p> <p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 146 (1856)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 147 (1857)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 1 (1857)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 2 (1858)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 149 (1859)</p>	<p>Contatos</p> <p>Transformações</p> <p>Locus</p>
George Whitehead Hearn	<p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 6 (1864)</p>	<p>Locus</p>

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
James Joseph Sylvester	<p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 42 (1851)</p> <p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 144 (1854)</p> <p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 50 (1855)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 146 (1856)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 147 (1856)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 1 (1857)</p> <p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 54 (1857)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 2 (1858)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 3 (1860)</p> <p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 57 (1860)</p>	<p>Transformações</p> <p>Redução</p> <p>Locus</p>

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Gian Francesco Malfatti	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 142 (1852)	Contatos
Charles Hermite	<p>Philosophical Magazine v. 40 (1853)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 144 (1854)</p> <p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 50 (1855)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 146 (1856)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 1 (1857)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 151 (1861)</p> <p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 58 (1861)</p>	Transformações
Ludwig Schläfli	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 50 (1855)	Eliminação
Leonhard Paul Euler	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858)	Transformações
Charles Creedy	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858)	Transformações

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Francesco Faà Di Bruno	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 146 (1856) Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 54 (1857)	Transformações Redução
Siegfried Heinrich Aronhold	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 146 (1856) The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 1 (1857) Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 57 (1860) Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 151 (1861)	Transformações Locus
Jacques Charles François Sturm	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 151 (1861) The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 4 (1861)	Eliminação Transformações
Norman Macleod Ferrers	The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 2 (1858)	Locus
August Ferdinand Möbius	The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 3 (1860)	Locus
Thomas Weddle	The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 5 (1862)	Contatos
Isaac Todhunter	The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 4 (1861)	Transformações

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Ernest Jean Philippe Fauque de Jonquières	The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 3 (1860) The Quarterly Journal of Pure and Applied of Mathematics v. 5 (1862)	Locus Contatos Transformações
Ehrenfried Walther von Tschirnhaus	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 57 (1861)	Transformações Locus

GEORGE SALMON		
CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Jean-Victor Poncelet	Philosophical Magazine v. 24 (1844)	Locus
Michel Chasles	Philosophical Magazine v. 24 (1844) Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 39 (1850)	Locus
James MacCullagh	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 2 (1846)	Locus
Richard Townsend	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 2 (1846)	Locus
Carl Wilhelm Borchardt	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 9 (1854)	Transformações
Siegfried Heinrich Aronhold	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 39 (1850) Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 42 (1851)	Locus

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Ferdinand Joachimsthal	<p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 39 (1850)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857)</p>	<p>Locus</p> <p>Contatos</p>
Arthur Cayley	<p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 3 (1848)</p> <p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 4 (1849)</p> <p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850)</p> <p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)</p> <p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 9 (1854)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 3 (1860)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 150 (1860)</p>	<p>Locus</p> <p>Contatos</p> <p>Transformações</p>

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Ludwig Otto Hesse	<p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 39 (1850)</p> <p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 42 (1851)</p> <p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 9 (1854)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 3 (1860)</p>	<p>Locus</p> <p>Transformações</p> <p>Contatos</p>
Julius Plücker	<p>Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 42 (1851)</p>	<p>Locus</p>
James Joseph Sylvester	<p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 9 (1854)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 148 (1858)</p> <p>Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 150 (1860)</p>	<p>Transformações</p> <p>Locus</p>
George Boole	<p>Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 9 (1854)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857)</p>	<p>Transformações</p> <p>Contatos</p>
Norman Macleod Ferrers	<p>The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857)</p> <p>The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)</p>	<p>Locus</p> <p>Contatos</p>

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Charles Hermite	Philosophical Transactions of Royal Society of London v. 150 (1860)	Transformações
Orly Terquem	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 6 (1864)	Locus

NORMAN MACLEOD FERRERS		
CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Arthur Cayley	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857) The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	Locus
George Salmon	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 1 (1857) The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	Locus

MICHAEL ROBERTS		
CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Arthur Cayley	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861) The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	Transformações
George Salmon	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861) The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	Transformações
Edouard Combesure	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	Transformações
Orly Terquem	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	Transformações
Francesco Brioschi	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861) The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	Transformações
Charles Hermite	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861) The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	Transformações
James Joseph Sylvester	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861) The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1862)	Transformações

JAMES COCKLE		
CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
George Birch Jerrard	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 2 (1846) Philosophical Magazine v. 213 (1848) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853) The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	Redução Eliminação
James Joseph Sylvester	Philosophical Magazine v. 11 (1851) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 7 (1852) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853) The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	Transformações Redução
Arthur Cayley	Philosophical Magazine v. 11 (1851) Philosophical Magazine v. 43 (1854) The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	Transformações Redução
Joseph-Louis Lagrange	The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	Redução
William Rowan Hamilton	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)	Redução
Jean-Guillaume Garnier	Philosophical Magazine v. 43 (1854)	Redução

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Étienne Bézout	Philosophical Magazine v. 43 (1854)	Redução
Charles Hermite	Philosophical Magazine v. 43 (1854) The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 5 (1861)	Transformações Redução
Ferdinand Gotthold Max Eisenstein	Philosophical Magazine v. 43 (1854)	Redução
George Boole	Philosophical Magazine v. 43 (1854) The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics v. 4 (1861)	Transformações Redução
Ehrenfried Walther von Tschirnhaus	Philosophical Magazine v. 43 (1854)	Redução
Louis Poincot	Philosophical Magazine v. 43 (1854)	Rotação

WILLIAM SPOTTISWOODE		
CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
James Joseph Sylvester	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 42 (1851) Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 51 (1856)	Transformações Locus
Ludwig Otto Hesse	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 42 (1851) Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 51 (1856)	Transformações Locus

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
William Fishburn Donkin	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 47 (1854)	Rotação
Augustin-Louis Cauchy	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 47 (1854)	Transformações
Gabriel Cramer	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 51 (1856)	Eliminação
Étienne Bézout	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 51 (1856)	Eliminação
Joseph-Louis Lagrange	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 51 (1856)	Eliminação
Arthur Cayley	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 47 (1854) Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 51 (1856) Philosophical Transaction of Royal Society of London v.152 (1862) Philosophical Transaction of Royal Society of London v.155 (1865)	Transformações Contatos
Charles Hermite	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 51 (1856)	Transformações
George Boole	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 51 (1856)	Transformações
Carl Gustav Jakob Jacobi	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 51 (1856)	Eliminação

CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Henri-Émile Bazin	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 51 (1856)	Transformações
Ferdinand Joachimsthal	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 51 (1856)	Locus
Siegfried Heinrich Aronhold	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 51 (1856)	Transformações

THOMAS WEDDLE		
CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Duncan Farquharson Gregory	Philosophical Magazine v. 210 (1847) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)	Contatos Locus
Michel Chasles	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850)	Contatos
Ludwig Otto Hesse	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 5 (1850)	Locus
George Whitehead Hearn	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)	Locus Contatos
Jean-Victor Poncelet	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851)	Locus
George Salmon	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)	Contatos

GEORGE BOOLE		
CITADO	ONDE	TEMÁTICAS
Joseph-Louis Lagrange	Cambridge Mathematical Journal v. 3 (1841)	Redução
Pierre-Simon Laplace	Cambridge Mathematical Journal v. 3 (1841)	Redução
Victor-Amédée Lebesgue	Cambridge Mathematical Journal v. 3 (1841)	Redução
Carl Gustav Jakob Jacobi	Cambridge Mathematical Journal v. 3 (1841)	Eliminação
Augustus De Morgan	Cambridge Mathematical Journal v. 3 (1841)	Transformações
James Joseph Sylvester	Cambridge Mathematical Journal v. 4 (1844) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851) Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)	Eliminação Redução Locus Transformações
Arthur Cayley	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851)	Transformações
George Salmon	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 6 (1851)	Transformações
James MacCullagh	Cambridge and Dublin Mathematical Journal v. 8 (1853)	Transformações

APÊNDICE C – AUTORES INTERNACIONAIS

ANGELO GENOCCHI			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Théorèmes sur les fonctions homogènes	Nouvelles Annales des Mathématiques (1853)	393-397	Locus

CARL GUSTAV JAKOB JACOBI			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
De Determinantibus functionalibus	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 22 (1841)	319-359	Eliminação
Sulla condizione di uguaglianza di due radici dell'equazione cubica, dalla quale dipendo gli assi principali di una superficie del second'ordine	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 30 (1846)	046-050	Redução
Sur la Rotation d'un Corps, Extrait d'une Lettre Adressée a l'Académie des Sciences	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1849)	337-345	Rotação
Sur la Rotation d'un Corps, Extrait d'une Lettre Adressée a l'Académie des Sciences	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 39 (1850)	293-350	Rotação
Démonstration de la proposition qu'une courbe du nième degré a, en général, $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ tangentes doubles	Nouvelles Annales des Mathématiques (1853)	141-161	Contatos

CARL WILHELM BORCHARDT			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Über eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 53 (1857)	265-270	Transformações
Bemerkungen über die beiden vorstehenden Aufsätze	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 53 (1857)	281-283	Transformações
Remarque relative á la note précédente	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 53 (1857)	367-368	Transformações

CHARLES HERMITE			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Note sur la réduction des fonctions homogènes à coefficients entiers et à deux indéterminées	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1851)	145-160	Transformações
Sur la théorie de la composition des formes quadratiques	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1851)	161-170	Transformações
Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 47 (1854)	307-312	Transformações
Sur la théorie des formes quadratiques. Premier mémoire	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 47 (1854)	313-342	Transformações
Sur la théorie des formes quadratiques. Second mémoire	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 47 (1854)	343-368	Transformações
Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. Mémoire Premier	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 52 (1856)	001-017	Transformações
Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. Mémoire Second	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 52 (1856)	018-038	Transformações
Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprise entre des limites données	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 52 (1856)	039-051	Transformações
Sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transform des polynomes homogènes du second degen	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 53 (1857)	271-274	Transformações
La Théorie des Formes Cubiques a Trois Indéterminées	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1858)	037-041	Transformações
Sur le résultant de trois formes quadratiques ternaires	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 57 (1860)	371-375	Transformações

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Sur l'invariant du 18 e ordre des formes du cinquième degré et sur le role qu'il joue dans la résolution de l'équation du cinquième degré	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 59 (1861)	304-305	Transformações
Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Brioschi	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 63 (1864)	030-033	Transformações

EDOUARD COMBESURE			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Sur divers points de la theorie des invariants	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1855)	337-358	Transformações
Sur le déplacement d'une courbe, invariable de forme, qui reste tangente à une courbe fixe	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 63 (1864)	332-359	Contatos

ERNEST JEAN PHILIPPE FAUQUE JONQUIÈRES			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Note sur la géométrie organique de Maclaurin, contenant diverses applications des théories de la géométrie moderne	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1857)	153-165	Locus
Mémoire sur la théorie des pôles et polaires dans les courbes d'ordre quelconque, particulièrement dans les courbes du troisième et du quatrième ordre, comprenant diverses	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1857)	249-266	Locus
Note relative aux § XX du Mémoire qui précède. Deuxième mode de description de la courbe du quatrième ordre déterminée par quatorze points	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1857)	267-272	Locus

FERDINAND GOTTHOLD MAX EISENSTEIN			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Untersuchungen über die cubischen Formen mit zwei Variabeln	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 27 (1844)	089-104	Transformações
Théoremes sur les formes cubiques et solution d'une équation du quatrième degré à quatre indéterminées	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 27 (1844)	075-079	Transformações
Extrait d'une lettre adressé à hermite	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1852)	473-477	Transformações

FERDINAND JOACHIMSTHAL			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Observationes de lineis brevissimis et curvis eurvaturae in superficiebus secundi gradus	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 26 (1843)	155-171	Eliminação
Remarques sur la condition de l'égalité de deux racines d'une équation algébrique; et sur quelques théorèmes de Géométrie, qui en suivent	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 33 (1846)	371-376	Locus
Sur quelques applications de déterminants à la Géométrie	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 40 (1850)	021-047	Transformações
Théorèmes sur l'équation aux carrés des différences des racines, et application géométrique aux faisceaux tangentiels	Nouvelles Annales des Mathématiques (1850)	098-105	Contatos
Bemerkungen über den Sturm'schen Satz	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 48 (1854)	386-416	Eliminação

FRANCESCO FÁA DI BRUNO			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Démonstration d'un théoreme de Sylvester, relatif à la decomposition d'un produit de deux déterminants	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1852)	155-171	Transformações
Demonstration d'un théoreme relatif à la reduction des fonctions homogènes à deux lettres à leur forme canonique	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1852)	193-201	Redução
Note sur un théoreme de Brioschi	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1854)	304	Redução

FRANCESCO BRIOSCHI			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Note sur un théoreme relatif aux determinants gauches	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1854)	253-256	Transformações
Sur l'analogie entre uma classe de déterminants d'ordre pair; et sur les déterminants binaires	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 52 (1856)	133-141	Transformações
Sur une nouvelle propriété du résultant de deux equations algébriques	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 53 (1857)	372-376	Eliminação
Sur une formule de M. Cayley	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 53 (1857)	377-378	Eliminação

FRIEDRICH JULIUS RICHELOT			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Nota ad theoriam eliminationis pertinens	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 21 (1840)	226-234	Eliminação
Note sur l'élimination	Nouvelles Annales des Mathématiques (1850)	228-232	Eliminação

HENRI-ÉMILE BAZIN			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Sur une question relative aux determinants	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 36 (1848)	357-364	Redução
Sur la théorie des formes quadratiques ternaires	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 40 (1850)	173-177	Transformações
Démonstration d'un théorème sur les determinants	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1854)	209-214	Transformações
Sur la composition des formes quadratiques à quatre variables	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1854)	215-252	Transformações

JACQUES CHARLES FRANÇOIS STURM			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Démonstration d'un Théorème d'algèbre de M Sylvester	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1842)	356-369	Eliminação
Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe	Nouvelles Annales des Mathématiques (1851)	419-432	Rotação

JOSEPH LIOUVILLE			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Mémoire sur quelques propositions générales de géométrie et sur la théorie de l'élimination dans les équations algébriques	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1841)	226-234	Eliminação
Sur la Théorie générale des surfaces	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1851)	130-132	Locus

MERRY BLERZY			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Invariants et solution des questions 387 et 412	Nouvelles Annales des Mathématiques (1859)	420-432	Transformações

LOUIS FÉLIX PAINVIN			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Discussion des lignes et surfaces du second ordre	Nouvelles Annales des Mathématiques (1858)	130-136	Locus
Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre	Nouvelles Annales des Mathématiques (1858)	370-380	Locus
Sur un certain système d'équations linéaires	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1858)	041-047	Transformações
Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre	Nouvelles Annales des Mathématiques (1859)	407-420	Locus
Théoremes sur la Décomposition en Facteurs Lineaires des Fonctions Homogènes Entieres	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1861)	209-219	Transformações
Propriétés du système des surface du second ordre conjuguées par rapport à un tétraèdre fixe	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 63 (1864)	058-093	Locus

LOUIS POINSOT			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Théorie nouvelle de la rotation des corps	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1851)	009-129	Rotação
Théorie nouvelle de la rotation des corps	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1851)	289-336	Rotação
Théorie des cones circulaires roulants	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1853)	041-070	Rotação
Questions dynamiques. Sur la percussion des corps	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1857)	281-350	Rotação

LUDWIG OTTO HESSE			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Ueber Oberflächen zweiter Ordnung	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 18 (1838)	101-118	Locus
De curvis e surfacebus secundi ordinis	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 20 (1840)	101-118	Redução
Über die Elimination der Variablen aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variablen	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 28 (1844)	068-096	Eliminação
Über die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung. (Fortsetzung zu voriger Abhandlung)	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 28 (1844)	097-107	Eliminação
Über Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Punkten berühren	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 36 (1848)	143-176	Locus
Ueber Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 38 (1849)	241-256	Locus
Transformation einer beliebigen homogenen Function dritten Grades von zwei Variablen durch lineäre Substitutionen neuer Variablen, in eine Form, welche nur die dritten Potenzen der neuen Variablen enthält	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 38 (1849)	262-265	Redução
Transformation einer beliebigen gegebenen homogenen Function 4ten Grades von zwei Variablen durch lineäre Substitutionen neuer Variablen in die Form, welche nur die geraden Potenzen der neuen Variablen enthält	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 41 (1851)	243-263	Redução

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Eine Bemerkung zum Pascalschen Theorem	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 41 (1851)	269-271	Locus
Über die Wendepuncte der algebraischen ebenen Curven und die Schmiegungs-Ebenen der Curven doppelter Krümmung, welche durch den Schnitt zweier algebraischen Oberflächen entstehen	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 41 (1851)	272-284	Locus
Über die ganzen homogenen Functionen von der dritten und vierten Ordnung zwischen drei Variabeln	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 41 (1851)	285-292	Transformações
Über die geometrische Bedeutung der lineären Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten einer Gleichung zweiten Grades	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 45 (1853)	082-090	Transformações
Über die Eigenschaften der lineären Substitutionen, durch welche eine homogene ganze Function zweiten Grades, welche nur die Quadrate von vier Variabeln enthält, in eine Function von derselben transformirt wird	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 45 (1853)	093-101	Transformações
Über Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven vierter Ordnung	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 49 (1855)	243-264	Locus
Über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 49 (1855)	279-332	Contatos
Interprétation géométrique d'une relation linéaire entre les coefficients de l'équation du second degré	Nouvelles Annales des Mathématiques (1855)	122-129	Locus
Théorèmes sur la disparition des rectangles dans les fonctions homogènes entières quadratiques à n variables, applications géométriques aux lignes et surfaces du second degré	Nouvelles Annales des Mathématiques (1855)	178-194	Locus

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Transformation der Gleichung der Curven 14ten Grades, welche eine gegebene Curve 4ten Grades in den Berührungspuncten ihrer Doppeltangenten schneiden	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 52 (1852)	097-102	Transformações
Zur Theorie der ganzen homogenen Functionen	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 56 (1859)	263-269	Transformações
Neue Eigenschaften der linearen Substitutionen, welche gegebene homogene Functionen des zweiten Grades in andere transformiren, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 57 (1860)	175-182	Redução

ORLY TERQUEM			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Méthode des homogènes	Nouvelles Annales des Mathématiques (1848)	005-011	Locus
Relations d'identité et équations fondamentales relatives aux lignes du second degré; théorie des polaires réciproques	Nouvelles Annales des Mathématiques (1848)	308-315	Locus
Relations d'identités et questions fondamentales relatives aux lignes du second degré: polaires réciproques	Nouvelles Annales des Mathématiques (1848)	409-420	Locus
Théorèmes d'homogénéité	Nouvelles Annales des Mathématiques (1849)	113-120	Locus
Propriétés générales des courbes algébriques planes	Nouvelles Annales des Mathématiques (1850)	283-296	Locus
Note sur les déterminants	Nouvelles Annales des Mathématiques (1851)	124-131	Transformações
Géométrie de l'espace. Considérations sur les courbes à double courbure	Nouvelles Annales des Mathématiques (1856)	357-365	Locus
Note sur la polaire réciproque d'une conique et d'une surface du second degré	Nouvelles Annales des Mathématiques (1857)	264-266	Locus
Propriétés générales des surfaces et des lignes, plans polaires et droites polaires	Nouvelles Annales des Mathématiques (1857)	266-269	Locus

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Principes de discussion des surfaces et des lignes du second degré	Nouvelles Annales des Mathématiques (1857)	294-296	Locus
Notions élémentaires sur les invariants, covariants, discriminants et hyperdéterminants	Nouvelles Annales des Mathématiques (1859)	249-255	Transformações
Discriminants	Nouvelles Annales des Mathématiques (1859)	299-304	Transformações
Covariants	Nouvelles Annales des Mathématiques (1859)	446-451	Transformações

PIERRE JOSEPH ÉTIENNE FINCK

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Note sur une nouvelle méthode de géométrie analytique	Nouvelles Annales des Mathématiques (1844)	147-154	Locus

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Zur Theorie der Trägheitsmomente und der Drehung um einen Punkt	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 57 (1860)	073-077	Rotação
Ueber eine Transformation der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 58 (1861)	109-126	Transformações
Ueber die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 58 (1861)	229-239	Locus
Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 59 (1861)	001-062	Transformações

TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Ueber Curven vierter Ordnung	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 59 (1861)	125-145	Locus
Ueber die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 59 (1861)	193-228	Transformações
Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen der zweiten Ordnung	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 62 (1863)	062-109	Transformações
Zur Theorie der algebraischen Flächen	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 63 (1864)	014-026	Transformações
Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 65 (1865)	043-065	Locus
Ueber die Elimination aus zwei Gleichungen dritten Grades	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 65 (1865)	095-097	Eliminação

SIEGFRIED HEINRICH ARONHOLD			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Zur Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 39 (1850)	140-159	Transformações
Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 55 (1858)	097-191	Transformações
Ueber ein fundamentale Begründung der Invariantentheorie	Journal für die reine und angewandte Mathematik v. 62 (1863)	281-345	Transformações

SPERLING			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Note sur un Théoreme de M. Sylvester	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1860)	121-127	Transformações

VICTOR-AMÉDÉE LEBESGUE			
TÍTULO	PERIÓDICO	PÁGINAS	TEMÁTICA
Thèses de Mécanique et d'Astronomie	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1837)	337-365	Redução
Théorème sur les surfaces courbes algébriques	Nouvelles Annales des Mathématiques (1849)	022-027	Locus
Sur la reduction des formes quadratiques definies positives à coeficients réels quelconques. Démonstration du théoreme de Seeber sur les réduites des formes ternaires	Journal des Mathématiques Pures et Appliquées (1856)	401-410	Redução