Universidade Federal do Rio de Janeiro

Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Instituto De Matemática - IM UFRJ

O desenvolvimento das conceitualizações dos domínios de números como base para o novo rigor da matemática no século XIX

Michel Santos Salazar

Orientador: Gert Schubring

Rio de Janeiro

2023

O desenvolvimento das conceitualizações dos domínios de números como base para o novo rigor da matemática no século XIX

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

Orientador: Gert Schubring

Rio de Janeiro

2023

O desenvolvimento das conceitualizações dos domínios de números como base para o novo rigor da matemática no século XIX

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

Aprovada em 22 de junho de 2023:

_____

Prof. Dr. Gert Schubring (Orientador)
UFRJ

_____

Prof. Dr. Gérard Emile Grimberg
UFRJ

_____

Prof.ª Dr.ª Janete Bolite Frant
UFRJ

_____

Prof. Dr. Rogerio Monteiro de Siqueira
USP

_____

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho
UERJ

CIP - Catalogação na Publicação

S161d

Salazar, Michel
O desenvolvimento das conceitualizações dos domínios de números como base para o novo rigor da matemática no século XIX / Michel Salazar. -- Rio de Janeiro, 2023.
180 f.

Orientador: Gert Schubring.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática, 2023.

1. História da Matemática. 2. Conceito de número. I. Schubring, Gert, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Resumo

O objetivo da presente tese é analisar como se deram as conceitualizações dos diferentes tipos de números ao longo do século XIX em diferentes comunidades matemáticas na Europa. Em meio à epistemologia dominante da época, a concepção da aritmética dos números naturais era tratada sem controvérsias, enquanto a fundamentação dos demais objetos numéricos era mais problemática, uma vez eles entravam em conflito com a concepção basilar de quantidade. Em um primeiro momento, abordaremos a metodologia de extensão do conceito de número que se desenvolve no século XIX em consonância com mudanças epistemológicas que começaram a surgir na disciplina, abrindo espaço para novas maneiras de compreender e fundamentar a aritmética que vai além dos números naturais. Notavelmente, a análise baseada em diferentes comunidades matemáticas revela que o processo se dá, a princípio, de maneira isolada em regiões da Alemanha, enquanto, na França, até então epicentro da matemática, as novas ideias foram por muito tempo barradas, tendo em vista a dominância da concepção físico-matemática na região. Além disso, nossa análise revela em particular as posições diferentes sobre o papel ontológico dos “números naturais" - mostrando como convicções mais individuais de cada matemático afetavam a maneira como se justificava o surgimento do número. Separadamente, analisamos o desenvolvimento de novas abordagens dos números irracionais que, até o momento, permaneciam fundados sobre a concepção tradicional de quantidades. Pudemos verificar que o surgimento de novas concepções que surgem na segunda metade do século XIX, muitas vezes nomeadas “modernas” pela historiografia para separá-las das anteriores, surgem em meio a um movimento mais amplo de busca pela fundamentação da análise em um conceito novo de número. Como pretendemos demonstrar, esse movimento ocorre, em grande medida, no contexto de ensino de análise, sobretudo na Alemanha. Ao analisarmos diferentes tentativas, inclusive por figuras muitas vezes ignoradas na historiografia, pudemos verificar que muitas dessas não foram bem-sucedidas, sob o ponto de vista de seus próprios autores, demonstrando, assim, o desafio de tal empreendimento. Notavelmente, em meio a nossas pesquisas acerca do assunto, identificamos uma concepção despercebida de “número complexo”, desenvolvida por Weierstraß, que se torna chave para a compreensão das peculiaridades de seu processo de extensão de conceito de número que são obscurecidas por abordagens tradicionais da historiografia. Por último, analisamos as novas abordagens dos fundamentos do conceito de número natural que, até o momento, consistia na base da aritmética, sem que houvesse elaborações novas sobre seu fundamento diante de sua “superioridade” ontológica, mesmo com a popularização do processo de extensão do conceito e a divulgação da nova epistemologia. Nesse sentido, a abordagem isolada de Hermann Graßmann em 1861 bem como a axiomatização feita por Peano, no final do século, fortemente influenciada pela abordagem de Graßmann, estarão no foco de nossa análise.

Palavras-chave: Número. Quantidade. Aritmética. Análise.

Abstract

The aim of this thesis is to analyze how different types of numbers were conceptualized throughout the 19th century in different mathematical communities in Europe. In the midst of the dominant epistemology of the time, the conception of the arithmetic of natural numbers was treated without controversy, while the foundation of other objects was more problematic, since they came into conflict with the basic conception of quantity. At first, we will address the methodology for extending the concept of number that was developed in the 19th century in line with epistemological changes that began to emerge in the discipline, opening space for new ways of understanding and substantiating arithmetic that go beyond the natural numbers. Notably, the analysis based on different mathematical communities reveals that, at first, the process takes place only in regions of Germany while, in France, until then the epicenter of mathematics, new ideas were barred for a long time, in view of the dominance of the physical-mathematical conception in the region. Furthermore, our analysis reveals in particular the different positions on the ontological role of "natural numbers" - showing how each mathematician's more individual convictions affected the way in which the emergence of number was justified. Separately, we analyze the development of new approaches to conceiving the irrational numbers that, until then, remained based on the traditional conception of continuous magnitudes. We were able to verify that the emergence of new conceptions that arise in the second half of the 19th century, often named "modern" by historiography to separate them from the previous ones, arise in in the midst of a broader movement towards the search for the foundation of analysis on a new concept of number. As we intend to demonstrate, this movement occurs, to a large extent, in the context of teaching analysis, especially in Germany. When analyzing different attempts, including by figures often ignored in historiography, we could see that many of these were not successful, from the point of view of their own authors, thus demonstrating the challenge of such an enterprise. Notably, in the midst of our research on the subject, we identified an unnoticed conception of “complex number”, developed by Weierstraß, which becomes key to understanding the peculiarities of his process of extending the concept of number that are obscured by traditional approaches to the history of mathematics. Finally, we analyze the new approaches to the fundamentals of the concept of natural number that, until now, consisted of the basis of arithmetic, without there being new elaborations on its foundation in view of its ontological “superiority”, even with the popularization of the extension process of the concept and the dissemination of the new epistemology. In this sense, the isolated approach of Hermann Graßmann in 1861 as well as the axiomatization made by Peano, at the end of the century, strongly influenced by Graßmann's approach, will be the focus of our analysis.

Keywords: Number. Quantity. Arithmetic. Analysis.

Sumário

Resumo **5**

Abstract **6**

Sumário **7**

1. Introdução **11**

1.1. Motivação e Questão de Pesquisa: 11

1.2. Metodologia 16

1.3. O surgimento dos sistemas nacionais de ensino público e as "comunidades matemáticas" 18

2. A *Zahlbereichserweiterung* como nova metodologia para generalização do conceito de número **21**

2.1. Introdução 21

2.2. Estado da arte, a matemática como "ciência das quantidades", os desafios para a aritmética dos números e o surgimento da matemática pura na Alemanha 21

2.2.1. A concepção tradicional de quantidade e novas abordagens do século XVIII 21

2.2.2. O contexto francês na transição para o século XIX: Lazare Carnot e o estabelecimento do método sintético 23

2.3. Caminhos para uma mudança epistemológica 26

2.3.1. Jakob Fries e a crítica a Carnot e a proposta de uma separação entre matemática pura e aplicada 26

2.3.2. A abordagem de Förstemann: uma realização antecipada da extensão do conceito de número. 26

2.3.3. A concepção de Gauß: mudança epistemológica, concepção de oposição e extensão do conceito de número 34

2.4. O "Princípio da Permanência" segundo Hermann Hankel (1867) e a nova epistemologia 39

2.4.1. Hermann Hankel: Números como relações formais 39

2.4.2. A justificação do princípio da permanência e a *Zahlbereichserweiterung* 41

2.5. A concepção de Kronecker 45

2.5.1. Leopold Kronecker 45

2.5.2. Matemática: uma ciência natural fundada em fenômenos 45

2.5.3. O "construtivismo" de Kronecker e a aritmetização da análise 46

2.5.4. O Conceito de número de Kronecker 48

2.5.5. Observações finais 50

3. A Introdução do conceito de número nos cursos de análise no século XIX. 51

3.1. O contexto do ensino de análise na Alemanha e na França: as mudanças na *École Polytechnique* 51

3.2. Novas noções de rigor e a necessidade de uma reformulação do conceito de número irracional para os fundamentos da análise 52

3.3. A abordagem dos números por Cauchy 56

3.3.1. Estado da arte sobre o conceito de número de Cauchy e os fundamentos da análise: aritmetização da análise, a teoria dos limites e a fundamentação em quantidades reais 56

3.3.2. O Curso de Análise de Cauchy: números, quantidades e expressões 58

3.3.3. Nota I: a explicação das operações entre números separadamente das operações das quantidades 62

3.3.4. O conceito de número na Análise de Cauchy 66

3.4. Outra concepção na França: Ampère 68

3.4.1. A abordagem do conceito de número em seu curso de análise de 1824 71

3.5. Recepção de Cauchy na Alemanha: Dirksen 72

3.5.1. O conceito de número de Dirksen 72

3.5.2. O conceito de número na Análise 73

3.6. A Tentativa de Martin Ohm de estender o conceito de número 74

3.6.1. Vida e obra de Martin Ohm 74

3.6.2. Estado da arte 77

3.6.3. A concepção de Ohm: uma separação clara entre quantidade e número e o papel central assumido pelas operações no processo de extensão 77

3.6.4. Somas e subtrações indicadas e o surgimento das formas numéricas negativas positivas e nulas 81

3.6.5. Multiplicação, divisão e operações mistas: números fracionários “positivos”82

3.6.6. Operações mistas: introdução dos “números reais” e os irracionais compreendidos como frações 83

3.6.7. Potências, Logaritmos e Raízes e a combinação entre todas as operações: números irracionais como frações 85

3.6.8. A Análise como parte da *Zahlenlehre* de Ohm 88

3.6.9. Recepção de ideias de Martin Ohm 91

3.7. Dedekind 93

3.7.1. Julius Wilhelm Richard Dedekind. 93

3.7.2. Concepções de Dedekind sobre a aritmética em sua Habilitação 94

3.7.3. *Integral und Differentialrechnung*: manuscrito do curso de 1861/62 na Politechnique de Zurique e o manuscrito de 62/63 (Dugac) 95

3.7.4. Os cortes de Dedekind: a fundamentação dos números irracionais e, consequentemente, de todo cálculo 97

3.8. A concepção de Número de Weierstraß: Os "números complexos" como base 99

3. 8.1. Karl Weierstraß 100

3.8.2. Os cursos de Weierstraß em Berlim 101

3.8.3. Estado da arte 102

3.8.4. O conceito de número nos cursos de Weierstraß: uma diferente maneira de estender o conceito de número com base na concepção despercebida de "número complexo". 103

3.8.4. O conceito de número na análise de Weierstraß: o "princípio do supremo" e o tratamento analítico dos conceitos da disciplina 108

3.8.5. Divulgação da concepção de número de Weierstraß: Ernst Kossak, Dantscher, Otto Biermann E Mittag-Leffler 109

3.9. A abordagem de Charles Méray 120

3.9.1. Charles Méray 120

3.9.2. Estado da arte sobre a concepção de Méray 122

3.9.3. A fundamentação dos números irracionais: limites fictícios 123

3.9.4. As frações como operações fictícias 125

3.9.5. O conceito de número assume a dianteira em 1894: apresentação completa dos diferentes tipos de quantidades 128

3.9.6. Análise de Charles Méray 131

3.9.7. A relação com a fundamentação dos irracionais por Georg Cantor em 1872 132

3.10. Conclusão 134

4. A fundamentação dos números (naturais) 137

4.1. A axiomatização da aritmética antes do século XIX 138

4.2. Hermann Günther Graßmann (1809-1877) 140

4.2.1. Recepção da concepção de Graßmann 142

4.2.2.A Aritmética de Graßmann (1861) 143

4.3. Giuseppe Peano 153

4.3.1. Historiografia sobre os axiomas de Peano e o seu conceito de Número 155

4.3.2. A busca por clareza e o método axiomático de Peano: ideias e proposições primitivas 157

4.3.3. Aritmética de Peano: 161

4.3.4. Sobre o conceito de número (1891): definição dos números inteiros 165

4.3.5. Abordagens posteriores de Peano: crítica ao princípio da permanência "tradicional" e reforço a uma ontologia restrita do número 167

5. Síntese 172

6. Bibliografia 173

Fontes 173

Publicações 173

1. Introdução

1.1. Motivação e Questão de Pesquisa:

A motivação da presente tese começou nas últimas etapas da escrita de minha dissertação de Mestrado, intitulada "Rupturas no estatuto dos Números Negativos: O caso da Inglaterra (1630 - 1830). Nela, analisamos uma vasta quantidade de obras e autores britânicos, atentos principalmente ao desenvolvimento conceitual do número negativo. Um dos pontos-chave do período analisado consiste na virada epistemológica identificada em Cambridge no século XVIII, tendo como principais representantes do movimento, Francis Maseres e William Frend. Ambos associaram o acolhimento de entes numéricos negativos na matemática da época ao ímpeto pela generalização de alguns algebristas na resolução de problemas, o que entrava em conflito com o *método sintético* que era comum na geometria clássica (Salazar, 2019, p. 181).

Uma outra característica pertinente de suas críticas estava no fato de que, ao nos atentarmos para o conteúdo dos símbolos, torna-se evidente o erro cometido por aqueles que se perdem em operações simbólicas onde os significados originais foram esquecidos. Uma quantidade negativa isolada -*a*, pode ter sua cidadania questionada com base no fato de que "-" indica uma subtração entre duas quantidades, a primeira sendo maior do que a outra, ao passo que a expressão -*a* sequer abarca duas quantidades. A primazia do método sintético em Cambridge havia estabelecido o padrão filosófico-metodológico dos *Elementos* de Euclides como exegese em detrimento da análise continental.

No contexto de movimentos que visavam contornar essa ordem, George Peacock publicou em 1830 sua importante obra onde se encontra uma nova abordagem epistemológica da álgebra. Antigo membro da *Cambridge Analytical Society* e influenciado pela Álgebra Continental que ainda não havia conseguido penetrar a universidade inglesa, Peacock havia concordado que ainda faltava uma maneira de propriamente refutar Maseres. Nesse sentido, atesta que a álgebra deve ser considerada

> [...] em sua forma mais geral, como a ciência que trata das combinações de sinais arbitrários e símbolos por meio de leis definidas, porém arbitrárias: pois nós podemos assumir quaisquer regras para a combinação e incorporação de tais símbolos, contanto que nossas suposições não sejam inconsistentes umas com as outras (Peacock, 1830, p. 71)[1]

Tal nova concepção, que encontra antecedentes ingleses em obras como as de Charles Babbage (1791-1871) e Robert Woodhouse (1773 - 1827), seria capaz de justificar as práticas continentais além das quantidades negativas que haviam sido atacadas por Maseres.[2] Isso se dá uma vez que,

[1] Todas as citações presentes nesta tese são traduções nossas, exceto em casos em que uma tradução já tenha sido publicada.

[2] A presente seção foi baseada principalmente em minha dissertação de mestrado, *Ruptura no Estatuto dos Números Negativos - O caso da Inglaterra (1630-1830) (2019).*

como Peacock enfatiza, símbolo e significado são explicitamente separados, de modo que a álgebra aritmética, na qual os símbolos possuem significado numérico e suas regras são, portanto, necessárias, passa a ser separada da teoria puramente simbólica, cujas regras são arbitrárias. O processo de interpretação só se daria em uma etapa posterior, podendo servir como "inspiração" para o estabelecimento das regras de combinação simbólica, mas jamais como fundamentação para elas: a interpretação e a sintaxe do simbolismo algébrico são questões que devem ser tratadas separadamente (Salazar, 2019, p. 182-183). Nesse sentido, Peacock expõe o seu "princípio da permanência de formas equivalentes" como um princípio metodológico para estabelecer regras na álgebra tendo como fonte as regras estabelecidas na aritmética, a sua "ciência de sugestão":

> Qualquer forma é algebricamente equivalente a outra quando expressa em símbolos gerais, deve ser verdadeira, qualquer que seja aquilo que os símbolos denotam.
> Por outro lado, se descobrirmos uma forma equivalente na Álgebra Aritmética ou qualquer outra ciência subordinada, quando os símbolos são gerais em forma mas específicos em sua natureza, ela deve ser uma forma equivalente, quando os símbolos são gerais tanto em sua natureza como em sua forma (Peacock, 1830, p. 104).

Aqui, por "forma equivalente", Peacock refere-se, grosso modo, a uma igualdade expressa em termos de signos algébricos. No primeiro capítulo da obra, Peacock explicita seus princípios básicos, isto é, os símbolos que serão utilizados e como eles devem ser manipulados matematicamente. Para introduzir elementos "positivos" e "negativos", Peacock simplesmente enuncia o que ele chama de "independência dos sinais + e -", isto é, o fato de que esses símbolos, além de representarem adição e subtração também servirão para "afetar" símbolos literais isolados:

> [...] para que os símbolos possam ser capazes de representar tais relações [entre quantidades opostas], eles devem ser *afetados em todos os casos* por um dos sinais + ou -, que são da mesma forma utilizados para denotar as operações de adição e subtração (Peacock, 1830, p. 3).

Este pressuposto em si introduz os negativos em sua teoria. Com isso, ele apresenta como eles se comportam em meio às operações básicas da álgebra; em particular, ele explicita a regra dos sinais da multiplicação que dita como símbolos positivos e negativos se relacionam nessa operação.

> Sempre pela incorporação ou combinação de dois símbolos, dois signos similares se reúnem, sejam eles + e + ou - e -, eles são substituídos por um único signo +: mas se os dois signos são dissimilares, sejam eles + - ou - e +, eles são substituídos por um único signo - (Peacock, 1830, p. 3).

Da mesma forma, Peacock ainda assume a comutatividade da multiplicação e a existência de símbolos fracionários com os quais se pode operar segundo certos critérios. Ele chega a explicitar que todos esses princípios são estabelecidos tendo em vista o princípio da permanência e não devem ser tidos como verdades necessárias.

A grande surpresa surgiu quando comparamos a maneira como Peacock organiza seus fundamentos com aquela que vemos na obra do matemático Hermann Hankel de 1867, *Theorie der Complexen Zahlensysteme* (Teoria dos sistemas complexos). Na obra de Hankel, os "sistemas

de números" surgem como estruturas algébricas independentes que são estendidos em sucessivas etapas tendo em vista a generalização das operações: dada a aritmética dos números naturais, expandimos o conceito de número ao admitirmos a solubilidade geral da operação de soma, garantindo assim uma solução para a equação $a + x = b$. Esse processo cria os números negativos e, após isso, Hankel deve estabelecer como se operam com esses novos elementos. Para tanto, ele se utiliza do princípio da permanência para estabelecer a aritmética do conceito expandido a partir da permanência de propriedades gerais aritméticas válidas na etapa anterior, permitindo-lhe uma espécie de processo de descoberta das novas propriedades operacionais, tal como a "regra dos sinais da multiplicação". Após essa etapa, Hankel se direciona à outra operação antes limitada, a divisão, procedendo de maneira similar de modo estender o conceito de número mais uma vez, incluindo agora não somente os negativos como as frações.

Dessa forma, diferentemente de Peacock, Hankel não simplesmente estabelece a existência de termos negativos e frações no início da obra, listando uma série de regras operacionais que permitam como combinar esses símbolos pelas operações estendidas. O processo segue uma série de etapas claras decorrentes do fato de ele centralizar o conceito de número e sua progressiva extensão, algo que Peacock não fez. A extensão da álgebra aritmética para a álgebra simbólica é distinta do processo metodológico mais amplo que compreende o princípio da permanência na obra de Hankel.

O princípio e sua nomenclatura tornaram-se populares após a publicação de Hankel e o seu entendimento se tornou aceito e divulgado pela comunidade matemática com o verbete escrito por Hermann Schubert na *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*[3] (Enciclopédia das ciências matemáticas). No texto, Schubert cita tanto Hankel como Peacock ainda que, como argumentamos, a descrição se encaixe mais apropriadamente apenas na formulação de Hankel.

> O princípio da permanência [...] consiste em quatro coisas: primeiro, dar a cada combinação de caracteres que não representa nenhum dos números definidos até aquele ponto um significado tal que a combinação possa ser tratada de acordo com as mesmas regras como se representasse um dos os números definidos até aquele ponto representam; em segundo lugar, ao definir tal combinação como um número no sentido mais amplo da palavra e, assim, expandir o conceito de número; em terceiro lugar, provar que os mesmos teoremas se aplicam aos números no sentido estendido e aos números no sentido ainda não estendido; Quarto, definir o que igual, maior e menor significa no domínio estendido dos números (Schubert, 1898, p. 11).

Schubert não demonstra ciência, portanto, do fato de que George Peacock não se utiliza do princípio de tal maneira e o associa a ambos os autores de maneira indiscriminada. De fato, Hankel tampouco expôs as diferenças marcantes entre sua abordagem e aquela de Peacock, chegando a citar o matemático inglês como criador do princípio.

A falta de demarcação das diferenças entre a metodologia de Peacock e Hankel não é algo exclusivo dos cientistas envolvidos na época, mas também se mostra como uma questão persistente

[3] A Enciclopédia das ciências matemáticas consiste na grande obra organizada pelo matemático alemão Felix Klein (1849-1925) e foi referência geral por muitas décadas. Com isso, a concepção do princípio descrita por Schubert pode ser compreendida como um modelo da época.

na historiografia. Ao analisar a metodologia de Dedekind de estender sucessivamente o conceito de número em 1854 em "Sobre a introdução de novas funções na matemática", Ferreirós a compara tanto com os métodos de Peacock como os de Hankel por meio de uma descrição que se aplicaria melhor apenas àquilo que é realizado por Hankel

> Uma vez que o domínio numérico foi estendido, é necessário redefinir as operações até então restritas aos números naturais, de modo a permitir a aplicação delas nos números recém-criados. E essa extensão das definições não é arbitrária assim a partir do momento em que se segue o princípio geral de declarar válidas as leis que as operações obedecem a sua concepção restrita e deduzir a partir delas, inversamente, o significado das operações para os novos domínios numéricos. Esse princípio é análogo às ideias de Ohm sobre a generalização das operações aritméticas e ao famoso 'princípio da permanência formulado por Peacock por volta de 1830 (ainda encontrado em Hankel [1867]) (Ferreirós, 1999, 219).

Para fornecermos outro exemplo, Toader, que busca compreender as diferentes motivações metodológicas para a adesão ao princípio da permanência, coloca Peacock e Hankel como detentores de uma versão semelhante.

> O argumento de Peano reforça um entendimento um tanto diferente do princípio da permanência daquele articulado na primeira parte do século XIX por George Peacock e então ajustado e advogado por Hermann Hankel, e subsequentemente adotado por muitos outros matemáticos e filósofos da matemática (Toader, 2021, p. 77).

Tendo em mente as complicações historiográficas apresentadas, fomos motivados a compreender o desenvolvimento de diferentes práticas de extensão de número que foram apresentadas no século, de modo a evidenciar diferenças que julgamos serem ainda pouco explicitadas na historiografia. Tendo isso em mente, formulamos a seguinte pergunta principal que a pesquisa busca responder:

- Como se desenvolveram as diferentes práticas de extensão do conceito de número no século XIX em diferentes comunidades europeias?

Com nossa busca por respostas, acabamos por dividir nossa apresentação em três partes principais que constituirão os diferentes capítulos da presente tese. O segundo capítulo apresenta um breve estudo do surgimento e desenvolvimento da prática da "extensão do conceito de número" com base no princípio da permanência, à qual nos referiremos pelo termo alemão *Zahlbereichserweiterung*[4], de modo a trazer antecedentes importantes que acontecem na Alemanha, como a abordagem original apresentada pelo alemão Förstemann, um autor pouco conhecido pela historiografia tradicional que teve sua obra mais estudada por Schubring a partir

[4] A expressão "extensão dos campos numéricos" foi desenvolvida pela primeira vez pelo matemático alemão Peter Johann Hecker (1747–1835) que desenvolveu em 1799 uma crítica bastante elaborada às tentativas de se legitimar as operações sobre quantidades opostas. É importante ressaltar que, para resolver a questão, ele não se utilizou do método do princípio da permanência e a sua justificação da operação "problemática" da multiplicação envolvendo quantidades negativas acabou recaindo na geometria (Schubring, 2005, p. 146-149).

da década de 1980. Com isso, buscamos apontar práticas anteriores que de alguma forma trazem elementos do "modelo" que julgamos ser a apresentação de Hankel, tendo em vista tanto traçar influências entre os autores como mudanças. Conforme pudemos verificar, a *Zahlbereichserweiterung* em conjunto com a nova epistemologia do conceito de número que se desenvolve na Alemanha se torna crucial para uma nova tentativa de resolução do problema de conceber números negativos.

Apesar de termos razões para considerar a abordagem de Hankel como um ponto de culminância, ela nos revela ainda um aspecto interessante acerca dos empecilhos que persistem na metodologia, sobre as quais pretendemos desenvolver no capítulo 3. Estender o conceito de número de modo a incluir os números irracionais se mostra um desafio que força com que Hankel se desvirtue dos números para introduzi-los de uma maneira tradicional como parte da sua teoria de quantidades. Por volta da mesma época em que a obra de Hankel foi lançada, novas abordagens para os números irracionais estavam sendo desenvolvidas em meio a diferentes concepções de uma *Zahlbereichserweiterung* e iremos analisar algumas delas, bem como tentativas precedentes. O recorte se iniciará a partir da obra de Cauchy uma vez que observamos que ela não somente causou grande impressão em matemáticos alemães como consiste em uma das primeiras obras completas de introdução de análise onde os conceitos de número e quantidade são apresentados nos fundamentos e uma separação epistemológica relevante é feita entre eles.

No capítulo 4, finalmente, falaremos sobre as novas abordagens dos fundamentos da "primeira forma de número", isto é, o que atualmente chamamos de números naturais. Dentro das práticas que apresentamos no dos dois primeiros capítulos, percebe-se que os números naturais e sua aritmética eram dotados de uma ontologia superior à dos demais, de modo que as leis que os governavam eram assumidas sem maiores questionamentos, servindo, assim, como a base sólida para os demais tipos de números. Esse acordo comum começa a ser abalado na segunda metade do século XIX.

Após termos resumido o conteúdo dos capítulos da presente tese, julgamos pertinente destacar que, apesar de nossa motivação ter surgido com a análise da produção do inglês George Peacock, não entramos a fundo na análise de manifestações locais da extensão do conceito de número que ocorrem no território britânico dentro do recorte temporal da presente tese. Consideramos a princípio incluir análises nessa direção, mas fomos levados a outro caminho devido ao volume inesperado de conteúdo que julgamos pertinentes no âmbito dos assuntos apresentados nos parágrafos acima. É de se apontar, no entanto, que uma análise das abordagens que ocorrem no território britânico seria de grande valor no sentido de enriquecer nossos resultados e revelar aspectos que não fomos capazes de perceber.

Diante da abrangência sugerida pela nossa pergunta principal, tentaremos destrinchá-la agora em perguntas menores que nos ajudarão a delinear o recorte escolhido bem como o que entendemos por compreender o fenômeno histórico em questão.

- Quais foram os possíveis obstáculos conceituais que teriam motivado ou impedido o desenvolvimento conceitual do número? Mais especificamente, que problemas decorrentes da análise teriam motivado o desenvolvimento do conceito de número e como isso teria alterado o mapa conceitual da disciplina?

- Quais filosofias da matemática eram defendidas pelas instituições e atores sob estudo?
- Como os valores fomentados em diferentes instituições ou comunidades teriam interferido na propagação de certas ideias respectivas à matemática bem como ao conceito de número?
- Como se deu a interação entre os diferentes personagens e instituições ou comunidades envolvidas com o conceito de número? Como se deu e qual foi o papel do ensino da análise como catalisador do desenvolvimento de princípios da aritmética no século XIX?
- Quais demais variáveis sociais interferiram no desenvolvimento conceitual e de que forma essa interferência se deu?

1.2. Metodologia

A presente tese busca apresentar o desenvolvimento de uma abordagem centrada no conceito de número ao longo de um longo período e ao redor de um vasto território geográfico. Para que possamos realizar isso, foi necessário primeiramente definir preceitos sobre a metodologia subjacente à nossa análise historiográfica. A seleção e interpretação de textos em história da matemática utilizado para a presente pesquisa baseia-se na chamada hermenêutica conforme exposta por Schubring (2005).

Originalmente desenvolvida para a interpretação de textos bíblicos na teologia, a hermenêutica ramificou-se em um método científico de crítica histórica aos textos bíblicos com o filósofo Spinoza (1632-1677). Posteriormente, o alemão Schleiermacher, que foi teólogo, filósofo e filólogo, desenvolveu uma hermenêutica geral que objetiva reiterar o que a mente do Outro teria produzido. Schleiermacher tratou ainda de tornar a hermenêutica uma disciplina filosófica propriamente e o filólogo Friedrich August Wolf (1759-1824) da Universidade de Berlin atribui um propósito similar à disciplina: explicar e entender o significado do Outro por meio de seus sinais. Nesse sentido a hermenêutica "clássica" difundida por Wolf e Schleiermacher carrega consigo a ideia básica da hermenêutica material ou objetiva, isto é, de tentar chegar tão próximo quanto possível do sentido original pretendido pelo autor.

A visão de hermenêutica proposta por Schubring se aproxima desta vertente material cujas bases já se encontram nos clássicos e a proposta geral para a realização de tal abordagem foi apresentada em seu artigo de 1983:

> [...] De fato, uma metodologia estabelecida como a hermenêutica é indispensável para a interpretação de um texto: mesmo um texto matemático histórico não irá falar por si só, ele não pode ser decifrado em si apenas em um nível microscópico, mas deve ser simultaneamente analisado macroscopicamente, com referência explícita ao conhecimento disponível aos contemporâneos, a como eles enxergavam problemas e às metodologias científicas à disposição deles (Schubring, 2005, p. 3).

Portanto, para a interpretação de textos da história da matemática segundo os métodos da hermenêutica de vertente "material", Schubring propõe uma abordagem holística e abrangente envolvendo uma investigação interdisciplinar ampla trazendo contribuições em particular da pesquisa científica, e da ciência da história (Schubring, 1986, p. 85). A ideia básica da necessidade de uma abordagem que vai além do texto particular que se pretende interpretar se encontra ainda enraizada já na hermenêutica clássica conforme proposta por Wolf. O autor muito destacou, por exemplo, a necessidade do conhecimento profundo da língua original do autor para a correta interpretação da obra além de considerar muitas outras dimensões:

> Contudo, apenas o conhecimento da linguagem não há de ser suficiente. Devemos ter conhecimento sobre os costumes do período sobre o qual estamos lendo; devemos ter conhecimentos de sua história e de sua literatura e estarmos familiarizados com o espírito dos tempos (Wolf apud Schubring, 2018, p. 199).

Destacamos, no entanto, que a hermenêutica material não consiste na única leitura da metodologia. A sua vertente mais propagada atualmente tomou forma inicialmente com o filósofo alemão Willhelm Dilthey (1833-1911) que, confrontado pelo predomínio das ciências exatas na segunda metade do século XIX, propõe uma abordagem subjetiva da hermenêutica para as ciências humanas, às quais ele se referia pelo termo *Geisteswissenschaften*[5]. Segundo o novo entendimento de hermenêutica, busca-se uma reconstrução própria, isto é, subjetiva, e não mais uma aproximação do pensamento do Outro. "Compreender" é agora entendido no sentido de ter "empatia" (*Einfühlen*) e uma multiplicidade de interpretações torna-se possível. A hermenêutica subjetiva foi posteriormente desenvolvida e popularizada por Heidegger e Gadamer.

A proposta de Schubring (2005) ainda inclui ideias de autores posteriores que ajudaram a clarificar o que se entenderia por "social" e como seria possível utilizar essa dimensão de maneira operacional. O destaque vai primeiramente para Randall Collins que, em seu volume de 1998, desenvolveu o conceito de "produção social das ideias" e evidenciou a ideia frutífera da comunicação contextualizada no processo. Em segundo, considera-se o modelo interativo sistema-ambiente desenvolvido por Wolfgang Krohn e Günter Küppers. Estes autores compreendem a atividade científica como

> [...] uma interação entre um sistema e seu ambiente, concede igual legitimidade a ambientes intra e extracientíficos e, portanto, chegam a modelos complexos de processos de inovação científica (Krohn / Küppers apud Schubring, 2005, p. 6)

Tendo em vista a proposta abrangente da hermenêutica segundo Schubring, apresentamos a seguir alguns pontos de análise que julgamos relevantes para a nossa interpretação dos textos históricos utilizados.

1. Em primeiro lugar, destacamos que nossa análise não se restringe a definições individuais dos conceitos, mas busca também observar sua interação em meio a um

[5] O termo poderia ser traduzido literalmente como "ciências da mente". Separadas delas, se encontram as *Naturwissenschaften*, as "ciências naturais".

campo conceitual mais abrangente, bem como a maneira como esses conceitos são justificados e aplicados em diferentes níveis.

2. A produção matemática não deve ser individualizada. O matemático encontra-se inserido em uma comunidade e atua em cooperação com outros autores e isso deve ser colocado sob consideração.

3. Como a presente tese exige, desenvolvimentos analisados em contextos distintos devem ser comparados para a identificação de interações e recepções. A busca por influências, similaridades e diferenças será preponderante.

4. A coleção textual a ser analisada deve ser também tão abrangente quanto possível. As obras não serão analisadas de maneira isolada, mas compreendidas em meio a outras produções e documentos relevantes para os atores em questão (Schubring, 2005, p. 6-7)

A aplicação da hermenêutica se torna particularmente importante em meio à análise das contribuições conceituais no contexto da comunidade nacional de cada autor.

1.3. O surgimento dos sistemas nacionais de ensino público e as "comunidades matemáticas"

Ao nos referirmos ao desenvolvimento do conceito de número na Europa, não assumimos a existência de um processo unificado em que toda a região compartilha de uma visão comum do que constitui número ou a disciplina matemática como um todo. Pelo contrário, o processo em foco na presente tese provou-se constituir um exemplar da existência de diferentes "comunidades matemáticas" que se encontram separadas regionalmente no continente e a consideração dessas diferenças foi um importante pressuposto metodológico para a obtenção de nossos resultados.

A existência de diferentes comunidades científicas ou matemáticas não foi sempre claramente percebida na historiografia, como se pode perceber, por exemplo, na obra do físico, historiador e filósofo da ciência, Thomas Kuhn, "A Estrutura das Revoluções Científicas". Lá, Kuhn se refere a uma "comunidade científica" e demonstra assumir a existência de uma unidade comunitária em cada disciplina. Pesquisas mais recentes, no entanto, já falam sobre a existência de diferentes comunidades matemáticas, como podemos verificar, por exemplo, na obra *Mathematics Unbound*, que foi editada em 2002 por Karen Parshall e Adrian Rice. Na obra, fala-se de "comunidades matemáticas nacionais" surgindo a partir do século XIX em linha com o processo de profissionalização da matemática e da formação posterior de uma comunidade internacional que amadurece na década de 1950. Conforme aponta Schubring (2021), no entanto, é perceptível que o texto não elucida o que constituiria uma comunidade matemática, especialmente diante do fato de que os autores afirmam reiteradamente que existiria uma matemática universal: a linguagem matemática seria compartilhada por todos os matemáticos (Schubring, 2021, p. 3).

Visando a esclarecer as características de uma comunidade matemática, Schubring aponta exemplos que mostram a existência de diferentes "linguagens matemáticas", mostrando, ainda, que a formação de diferentes comunidades nacionais matemáticas não se deu no século XIX, mas por volta dos séculos XVI e XVII, com o surgimento de primeiras formas de sistemas nacionais de ensino, desde a Reforma e a Contrarreforma, que, a princípio, distinguiam-se principalmente pela divisão entre países protestantes e católicos.

Uma primeira mudança estrutural relevante ocorreu de maneira conjunta no Oeste Europeu: como parte do humanismo que floresceu no Renascimento, os governantes começaram a aumentar o controle sobre as universidades e, como parte das novas ordens estatais, novas carreiras de ensino de matemática foram instituídos nas instituições, dando fim à prática anterior de leituras de textos por pessoas que não eram especializadas. Essa primeira mudança estrutural foi o que permitiu a especialização e a formação de comunidades matemáticas em universidades de uma região em que o sistema de ensino fosse homogêneo.

As mudanças entre os territórios católicos e Protestantes se deram pelo fato de que, nas regiões em que Jesuítas conseguiram dominar as universidades, as faculdades de artes tradicionais foram desmanteladas, cátedras de matemática foram encerradas e a disciplina foi relegada a um assunto da física. Por conta disso, as condições eram desfavoráveis para a formação de comunidades matemática em regiões em que a dominava a religião católica, tais como a Itália, Portugal e nos estados ao sul da Alemanha. A França constituiu a uma exceção devido à *Académie des Sciences*, um centro para matemáticos profissionais. De qualquer forma, em tais regiões, a matemática servia às aplicações na engenharia e a formação de comunidades matemáticas se deu com orientações práticas (Schubring, 2002, p. 367 ff.).

Já nas regiões protestantes, a orientação do Estado foi diferente, favorável à profissionalização: houve aprimoramento das carreiras matemáticas que haviam sido criadas no Humanismo. Apesar da produção de pesquisa não ter ainda se tornado uma diretriz dentro das universidades, muitos professores passaram a publicar dissertações de pesquisa além de livros-texto. Como exemplar dessa orientação, temos os estados do norte da Alemanha, onde a comunidade matemática começou a se preocupar cada vez mais com os fundamentos da disciplina além das aplicações.

As diferenças entre as comunidades matemáticas nos Estados do Europa Ocidental se tornaram mais marcadas e significativas com o estabelecimento definitivo de sistemas de Ensino público desde a Revolução Francesa. Esses sistemas foram estabelecidos com concepções diferentes de valores sociais de educação e de formação. Em consequência, houve formas diferentes de profissionalização de cientistas e de valorização de disciplinas científicas. Vamos destacar aqui tais características para os países com a maior atividade cientificas na Europa ocidental no século XIX: na França, onde o ensino superior ficou organizado em faculdades separadas, providenciando formações profissionalizantes, a *École polytechnique* constituiu a instituição dominante. Visto a tarefa dela de formar engenheiros, foram mais valorizadas as aplicações, e a *physico-mathématique*, até o último terço do século XIX. Na Alemanha, mais particularmente na Prússia, devido a reformas neo-humanistas, estabeleceu-se o novo tipo de profissionalização de ciência pura desde os anos 1810 - e entre outras a matemática pura. Na Itália, surgiu, desde a unificação nacional do país, em 1861, um espírito de ciência pura, voltado para os

fundamentos – e norteado pela cultura clássica estabelecida nas escolas secundárias. Na Inglaterra, porém, as duas universidades eram organizadas pela Igreja Anglicana e era necessário se tornar um clérigo e ficar celibatário para se tornar *Fellow* de um *College* de Cambridge ou de Oxford e, assim, poder lecionar nas instituições. Esse sistema vigorou até as últimas décadas do século XIX.

Diante desses exemplos, fica patente que as formas diferentes de profissionalização e de valorização de disciplinas na respetiva sociedade e nação implicavam também visões diferentes de epistemologia[6] dominante para a matemática. A presente tese toma a existência dessas diferentes comunidades como um pressuposto metodológico importante na compreensão do processo amplo de conceitualização dos diferentes tipos de números. Como veremos já no segundo capítulo, as diferenças entre as comunidades regionais foram preponderantes na orientação que elas tomaram no sentido de realizar tais conceitualizações - em particular, na tentativa de fundamentar os números negativos. Mais aspectos sobre as características e peculiaridades dessas diferentes comunidades serão explorados ao longo de nossa análise.

[6] Nos utilizamos do termo "epistemologia" na presente tese para nos referirmos à "concepção sobre a natureza do conhecimento", em linha com o que o matemático francês d'Alembert associou ao termo francês "*metaphysique"*.

2. A *Zahlbereichserweiterung* como nova metodologia para generalização do conceito de número

2.1. Introdução

No presente capítulo, buscamos discutir o desenvolvimento do método da *Zahlbereichserweiterung* como uma nova metodologia para abordar os fundamentos do conceito de número, visando a permitir a legitimação dos demais tipos de número a partir de um processo de extensão ou generalização do conceito. Como veremos, a abordagem do método se encontra envolvido no desenvolvimento de uma nova epistemologia de número e podemos observar que, em particular, a nova abordagem dos números negativos que surge em meio à nova proposta pode ser vista como um separador de águas entre as novas abordagens generalizantes e as demais por partir de uma separação epistemológica entre quantidades e números. E o mesmo processo acaba também permitindo um novo entendimento para os números complexos. um novo entendimento – também epistemológico – dos números complexos.

É de se destacar ainda que o processo de desenvolvimento conceitual aqui apresentado acabou se concentrando no século XIX na região da Alemanha, onde os fundamentos da aritmética acabaram ganhando mais importância, reforçando, assim, a diferença entre as matemáticas nas diferentes comunidades, sobre o que comentamos anteriormente na seção 1.3.

Antes de entrarmos no assunto, apresentaremos o estado da arte sobre as diferentes abordagens do conceito de número até a chegada do século XIX.

2.2. Estado da arte, a matemática como "ciência das quantidades", os desafios para a aritmética dos números e o surgimento da matemática pura na Alemanha

2.2.1. A concepção tradicional de quantidade e novas abordagens do século XVIII

De acordo com os eventos que discutimos em nossa motivação, fica claro que havia controvérsias ao redor de conceitos fundamentais da matemática na virada do século XIX. Diante da epistemologia dominante na ciência, o conceito fundamental era a quantidade e o conceito de número era proveniente dele: por um lado, a quantidade discreta, correspondia aos números naturais, enquanto as quantidades contínuas atribuíam um significado à concepção do que seriam as quantidades "incomensuráveis". Isto é, o conceito se encontrava preso a uma concepção tradicional geométrica que, dificultava a legitimação plena de ideias como números negativos ou

imaginários, que naturalmente surgiam na prática matemática de resolver equações algébricas. O surgimento desses objetos, segundo alguns matemáticos, se dava pelo caráter enganador da álgebra que, ainda que útil como ferramenta heurística, escondia os referenciais reais dos símbolos, abrindo espaço para absurdos, algo que a imediação da geometria não permitia. As dificuldades se tornam mais claras quando pensamos na definição de operações aritméticas com esses objetos: segundo a concepção em termos de quantidades, era difícil atribuir um significado real à regra de sinais envolvendo números negativos, por exemplo.

É de se destacar ainda que, na época, em meio às comunidades matemáticas nas grandes instituições ensino, houve pouca preocupação em discutir o conceito de número e, por consequência, não surgem abordagens para explicar a aritmética dos números negativos, apesar de eles serem utilizados na prática matemática. Para mostrar esse fato, trazemos três exemplos representativos de obras aritméticas de três matemáticos de regiões distintas que foram publicadas entre o final do século XVIII e o início do século XIX: *Élements d'àlgebre* (Elements de Álgebra), publicada em 1774 pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707 -1783), *Essai sur la theorie des nombres* , publicada em 1798 pelo matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada em 1801 pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauß (1777-1855), uma importante obra que é tida como um divisor de águas na história dos fundamentos da aritmética na obra de 2007, *The Shaping of Arithmetic* (A formação da aritmética), das historiadoras Catherine Goldstein e Norbert Schappacher : por um lado, nas obras de Gauß e Legendre, a aritmética dos números negativos é implicitamente assumida uma vez que não encontramos qualquer tipo de discussão acerca do assunto. Na primeira página da primeira seção, encontramos o único comentário sobre os fundamentos em que Gauß menciona os diferentes tipos de números: "os números podem ser positivos ou negativos, porém inteiros." (Gauß, 1807, p. 1). Por outro lado, na obra de álgebra de Euler, encontramos uma tentativa tanto de legitimar os números negativos como a aritmética deles, mas isso é feito tendo como base a interpretação concreta desses objetos como dívidas em contraposição aos números positivos, que são compreendidos como bens. Dessa forma, Euler segue uma abordagem que havia se tornado tradicional na França desde o início do século XVIII (Schubring, 2021, p. 9)

Enquanto a aritmética dos números negativos era um assunto quase ignorado em obras compostas por matemáticos em suas pesquisas, os chamados *practitioners*, pessoas que se utilizavam na prática da matemática mas que não atuavam necessariamente em pesquisa, buscaram de diferentes maneiras elaborar explicações para as operações com números negativos, em particular, autores de livros-texto. Ainda no século XVIII, houve tentativas relativamente elaboradas em compreender a aritmética dos números negativos que, mesmo assim, não se emanciparam da epistemologia subjacente de quantidade. Na França, Bernard de Fontenelle explica em sua obra *Éléments de la géométrie de l'infini* de 1727, que as quantidades devem ser separadas em dois componentes disjuntos:

> [...] Logo, toda quantidade positiva ou negativa, não apenas possui seu ser numérico, a partir do qual ele é um certo número, uma certa quantidade, mas possui além disso, seu ser específico, a partir do qual ele é uma certa coisa oposta a outra. Eu digo oposto a outra, porque é apenas por essa oposição que ele obtém um ser específico (Fontenelle, 1727, p. 170)

A ideia básica de Fontenelle permitiu com que novas concepções sobre a aritmética de quantidades positivas e negativas fosse desenvolvida. Na versão mais esclarecida do padre francês Buée (1745-1825), as quantidades possuem, por um lado, um *valor numérico*, representado simbolicamente pela sua parte numérica, e uma *qualidade*, representada pelo seu sinal, + ou -. O matemático britânico Nicholas Saunderson, por exemplo, associa esse aspecto qualitativo aos adjetivos da linguagem comum.

> Esses sinais [+ e -] portanto na álgebra carregam a mesma distinção junto a elas que as *particles*[7] e adjetivos na língua comum, como as palavras conveniente e inconveniente, feliz e infeliz, boa saúde e má saúde (Saunderson, 1740, p. 51)

A ideia inovadora permitiria então que concebessem operações aritméticas como consistindo em duas operações distintas ocorrendo simultaneamente: uma sobre os valores numéricos, os quais resumem-se às operações usuais com os números "positivos", e outra realizada sobre as qualidades, isto é, pelos sinais. A operação sobre o valor, evidentemente, se explicaria pelas operações já conhecidas entre quantidades, enquanto as operações sobre sinais eram compreendidas de diferentes maneiras, como por alusões a aspectos linguísticos: subtrair poderia ser entendido como negar, de modo que subtrair um número negativo por outro consistiria em uma "dupla negação", isto é, uma afirmação.

Apesar das tentativas sofisticadas, as controvérsias persistiram, mostrando como a epistemologia subjacente ainda tornava difícil a aceitação de objetos como números negativos em si. As argumentações de Maseres e Frend na Inglaterra mostram o tom mais radical contra os movimentos analíticos que teriam dado espaço para esses novos objetos matemáticos. Na França, por sua vez, Lazare Carnot disseminou ideias igualmente radicais que marcaram uma virada epistemológica local de grande relevância, além de terem sido notavelmente percebidas no território da Prússia. Lá, no entanto, a absorção de suas ideias não foi tão forte uma vez que o cenário era mais favorável à matemática pura.

2.2.2. O contexto francês na transição para o século XIX: Lazare Carnot e o estabelecimento do método sintético

Os anos que sucedem a Revolução Francesa marcam uma importante virada epistemológica na matemática local. Os primeiros anos sinalizam um domínio ainda persistente do método analítico, intimamente relacionado com a propagação de abordagens algébricas generalizantes na matemática. Uma das maiores figuras representantes desse programa de algebrização e do método analítico na França foi o filósofo Condillac (1715-1780), expoente de uma teoria empirista da mente humana que concebia a álgebra como uma língua das ciências. Condillac desenvolveu uma concepção genética do processo de abstração matemática, o qual se iniciaria a partir de noções empíricas de quantidades e culminaria na "aritmética universal" ou

[7] Termos que não fazem parte de nenhuma das principais classes gramaticais da língua inglesa. Como exemplo, temos os termos "off", "up" ou "down", que podem dar novos significados a verbos aos quais estão associados. Por exemplo. "look" significa olhar enquanto "look up", tomado como um verbo, significa "pesquisar".

álgebra. Nessa última etapa, o tratamento de algarismos específicos dá lugar ao manuseio de quantidades literais, abrindo, assim, espaço para a consideração de números abstratos. A manipulação dos símbolos e as operações ou, como ele coloca, a gramática dessa nova língua precisa ser redefinida a partir do momento que ela lida com o novo conceito e não mais se restringe aos significados aritméticos. As regras algébricas emancipam-se das substâncias que fundamentam as noções básicas da aritmética. Nesse sentido, os números negativos são legitimados a partir de seu entendimento como extensão do conceito mais primitivo de subtração aritmética (Schubring, 2012, p. 53-55).

A importância de Condillac é atestada pelo fato de que sua filosofia influenciou fortemente os conceitos dos ideólogos, filósofos que dominavam os sistemas de educação e de ensino com a queda dos Jacobinos (Schubring, 2005, p. 327). Antes deles perderem sua influência com a chegada de Napoleão ao poder, no entanto, é possível perceber pela década de 1790 uma mudança fundamental na filosofia do grupo, que passa a criticar a concepção contida na *Langue des Calculs* de Condillac.

Dois representantes dos ideólogos, Destutt de Tracy e Maine de Biran (1766-1824) exemplificam bem a mudança epistemológica dos ideólogos e sua posição agora reservada perante a álgebra.

Na segunda edição da grande obra de Destutt de Tracy, *Éléments d'Idéologie*, quantidades numéricas que antes eram independentes do conceito de "quantidades" ou figuras, são agora colocadas sob bases geométricas: elas surgem do processo de medição. Sua crítica à álgebra, por outro lado, indica uma perda no significado dos símbolos no processo de cálculo, reforçando sua visão substancialista favorecendo a geometria e tornando o conceito de número dependente desta.

A primazia da geometria também se encontra em um texto de 1802 de Maine de Biran. A sua orientação à geometria é movida pela sua oposição à prática "cega e mecânica" da álgebra e suas regras, e o único conceito na matemática que ele indica ser inconsistente é a quantidade negativa. O princípio das regras dos sinais é particularmente indicado como um paradoxo, e apesar de Maine de Biran não explicar as bases da sua contestação, ele afirma que os sinais + e - não são objetos de operação mas sim indicações de operações (Schubring, 2005, p. 329).

A epítome do movimento em direção à geometria e à síntese e contra as práticas modernas associadas ao método analítico se encontra na figura de Lazare Carnot (1753-1823). Personagem de grande relevância política durante a Revolução, Carnot é também importante no cenário científico e era bastante interessado na busca pelo rigor e pela generalização. Na matemática, seu interesse por elucidar conceitos básicos se manifesta principalmente perante dois conceitos controversos: os números negativos e as quantidades infinitamente pequenas, que ainda se encontravam em meio a debates de ordem filosófica, teológica, física, etc.

Tal como ocorreu com os Ideólogos, Carnot também passou por uma mudança em sua visão epistemológica na matemática, apresentando primeiramente uma concepção que remete a Condillac e, posteriormente, abandonando a generalidade promovida pela álgebra a favor da Geometria. Sua concepção fica mais desenvolvida na sua obra de 1803, *Géométrie de Position*, fortemente influenciada por D'Alembert, o importante editor da *Encyclopédie* e uma outra figura importante na nova recusa aos números negativos. Na obra de Carnot, como o nome sugere, a geometria é essencial para a legitimidade de objetos matemáticos, e apenas os chamados números

absolutos são admitidos, isto é, aqueles que possuem relação com alguma substância. Números negativos são, portanto, terminantemente proibidos. A teoria que ele propõe visa a suprimir a antiga doutrina algébrica das quantidades opostas a favor de uma nova concepção geométrica:

> A Geometria de posição é, portanto, a doutrina propriamente dita das quantidades positivas e negativas, ou antes o meio de suplementá-la, pois esta doutrina deve ser inteiramente rejeitada (Schubring, 2012, p. 58).

Carnot destaca em sua obra que os sinais à frente das quantidades jamais indicam tipos específicos de quantidade, mas exclusivamente operações. Apenas quantidades subtrativas são admitidas, isto é, aquelas que subtraem uma quantidade positiva maior do que ela. As formas negativas isoladas que eram comumente encontradas na álgebra não possuíam um significado certo: obtê-las significaria tirar algo de nada, o que seria uma operação impossível.

> A partir daí, eu concluo que toda quantidade negativa isolada é um ser criado pela razão, e que aquelas que ocorrem no cálculo, não passam de simples formas algébricas, incapazes de representar qualquer quantidade real e efetiva (Carnot apud Schubring, 2012, p. 58).

Diante disso, apenas as operações com um significado real podem ser consideradas executáveis e demonstráveis. Por exemplo, a regra da distributividade que diz que $a(b-c) = ab - ac$ só é válida para $a > b$ e nunca poderia ser demonstrada no caso $a < b$. Em sua tentativa de contornar essas restrições, Carnot concebe um cálculo de linhas orientadas, onde as quantidades positivas e negativas são substituídas por linhas diretas e inversas. Um fundamento para o desenvolvimento da sua reinterpretação é a alegação de que não há casos gerais, ou equações gerais. A equação $cos(a+b) = cosa\,.\,cosb\ -\ sena\,.\,senb$, por exemplo, se torna incorreta quando a, b e $a + b$ não se encontram no primeiro quadrante. Nos demais quadrantes, algumas transformações são necessárias para tornar a equação válida, isto é, de modo que se obtenha valores positivos sempre. Esse caso ainda serve para ilustrar a mudança na sua concepção de generalidade, algo que ele sempre advogou: tratava-se agora da busca por casos relacionados, mas claramente distinguíveis (Schubring, 2005, p. 323-324).

A mudança proposta por Carnot exerceu um impacto tão profundo na comunidade matemática francesa que ela deteve publicações que opinassem contrariamente ao retorno do método sintético e à recusa aos números negativos (Schubring, 2005, p. 420). Um forte propagador das ideias de Carnot pela França foi Lacroix, que reeditou seu livro didático de álgebra a partir de 1797 de modo a alinhar-se com a concepção de Carnot. Este era o único livro didático utilizado nas escolas secundárias da França (Schubring, 2012, p. 58).

Se, por um lado, na França e na Inglaterra, conseguimos encontrar respostas tão radicais às concepções que escapavam à epistemologia dominante, na Alemanha, germinaram ideias igualmente "radicais", porém, em direção oposta. Novas concepções caracteristicamente "algebrizantes" surgiam desde 1799 e as respostas às contestações como as de Carnot se tornavam mais elaboradas. No fim, a "resolução" do problema da aritmética se daria com a realização de uma separação conceitual efetiva entre quantidade e de número, de modo que aquilo que se dizia a respeito de quantidades não necessariamente valeria mais para o domínio dos números.

2.3. Caminhos para uma mudança epistemológica

2.3.1. Jakob Fries e a crítica a Carnot e a proposta de uma separação entre matemática pura e aplicada

O matemático e filósofo alemão Jakob Friedrich Fries (1773-1843) é responsável por uma das mais elaboradas filosofias da matemática e de seus fundamentos nas décadas que se seguiram após Kant. Uma das suas ideias preponderantes consistia na separação entre a "filosofia da matemática pura" e a sua "teoria aplicada", com cada uma das duas seguindo o seu próprio método. Juntamente com essa diferenciação, encontra-se também a distinção entre os conceitos de número e quantidade que, segundo ele, seria imprescindível para a admissão de números negativos. Essas elucidações permitiram que Fries lançasse um novo olhar crítico em 1810 sob a abordagem de Lazare Carnot (1753-1823). Em relação a ele, Fries diz que:

> O autor mistura duas coisas entre si, a saber, a teoria geral das quantidades opostas e a sua aplicação na geometria analítica (Fries apud Schubring, 2005, p. 494).

Uma das primeiras elaborações que confrontam diretamente a abordagem de Carnot se encontra na memória de 1804 de Busse na qual encontramos tanto quantidades como números negativos com base em uma abordagem algebrizante. Fries alega, no entanto, que o argumento oferecido por Busse não foi suficiente:

> Nós acreditamos que a primeira falha, por conta da qual há tantos enganos na teoria das quantidades opostas, se encontra no fato de que quantidade e número não são propriamente distinguidas aqui mas em vez disso os números designados (*bezeichnete*), $\pm 7a, \pm a$ são prontamente chamados de quantidades. Caso se considere, porém, números positivos e negativos *per se* e, então, se estabeleça as quantidades opostas como casos de aplicações do cálculo com números negativos, as argumentações da teoria se torna mais fácil e clara (Schubring, 2005, p. 494-495).

Portanto, Fries propõe um conceito de número completamente independente das aplicações.

2.3.2. A abordagem de Förstemann: uma realização antecipada da extensão do conceito de número.

A proposta de Fries de separação entre quantidade e número como forma de solucionar a questão da aritmética dos números negativos, ainda que inovadora, não foi extensamente elaborada por ele. Alguns anos depois, em 1817, uma nova publicação segue a mesma sugestão de separação conceitual, mas a elabora ao ponto de oferecer explicitamente uma teoria desenvolvida da aritmética dos números negativos, entendida como uma forma estendida da aritmética anterior dos

"números absolutos"[8]. Segundo a epistemologia proposta pelo matemático prussiano Wilhelm August Förstemann (1791-1836), a álgebra deveria ser emancipada da geometria, a qual seria apenas uma ciência aplicada, e o número constitui o seu objeto principal, que independe da quantidade.

Apesar da proposta inovadora de Förstemann, é notória a maneira como ele foi ignorado pela historiografia, possivelmente por conta de sua posição relativamente isolada e as escassas menções à sua obra. As primeiras análises representativas da produção de Förstemann encontram-se em publicações de Schubring a partir de 1986 e, em particular, na sua obra de 2005 (p. 495-505), na qual sua abordagem é colocada sob destaque por suas inovações em direção às abordagens algébricas na Alemanha.

2.3.2.1 Biografia de Förstemann

Förstemann nasceu na cidade de Nordhausen em 29 de outubro de 1791. Na época, a cidade era uma cidade imperial livre e, a partir de 1806, passou a pertencer ao reinado Napoleônico de Vestfália até 1816, quando se tornou território da Prússia. Lá, ele frequentou o *Gymnasium* dos nove aos dezenove anos e, nessa idade, se matriculou na Universidade de Göttingen, onde estudou principalmente matemática, ciências naturais (física e química) e filosofia. Segundo ele, seu professor principal foi Bernhard Friedrich Thibaut (1775-1832), que lecionava matemática na instituição. Verificamos ainda que, no período de 1811 a 1815, o notável matemático Gauß lecionou astronomia teórica na universidade em todos os semestres.[9]

É de se notar que Förstemann não se formou propriamente em matemática em Göttingen. Na época, a formação em matemática ainda não era comum na universidade e a mudança somente veio em 1831, após a introdução do exame para professores. Em 1815, Förstemann se tornou professor em *Hunderkersche Schule* na cidade de Vechelde, que se encontrava na mesma região.

A fim de conquistar uma carreira no novo *Gymnasium* que havia acabado de ser reformado em Danzig, uma cidade no Leste da Prússia, Förstemann realizou o exame de professores em 1817 na cidade de Halle (Prússia), obtendo excelentes resultados. Logo em seguida, na universidade local, Förstemann recebeu ainda o título de doutor por sua dissertação sobre geometria, *Theoriae punctorum centralium primae lineae* (Primeiros elementos da teoria dos pontos centrais). A petição escrita pelo conselho municipal de Danzig ao ministério mostra o reconhecimento do currículo de Förstemann e destaca o seu livro de 1817, *Ueber der Gegensatz positive und negativer Zahlen*, que será central para a nossa análise a seguir.. No *Gymnasium*, Förstemann lecionou matemática e física.[10]

Como sugere sua dissertação, Förstemann não teve interesse apenas nos assuntos referentes à álgebra. De fato, sua obra seguinte à publicação de 1817 veio em 1827 e foi um tratado de

[8] Número absoluto é o termo que Förstemann utiliza para designar o que atualmente se chama número natural.

[9] Devemos agradecimento ao Professor Schubring por essa informação, que é proveniente dos catálogos da universidade de Göttingen sobre as lições de todas as faculdades. Como se sabe que Förstemann assistiu a uma disciplina de Gauß (E. W. Förstemann, 1891, p. 7), pode-se ter certeza de que ele assistiu à lição de astronomia teórica em um dos seus semestres em Göttingen.

[10] Adicionamos ainda o fato de que, nas novas ocupações, os professores deveriam lecionar mais de uma matéria, o que ia de acordo com o espírito neo-humanista emergente na Alemanha.

geometria em dois volumes onde a aplicação de números negativos a quantidades geométricas é um aspecto recorrente. Em 1835, ele publica outro livro onde apresenta suas concepções de aritmética e álgebra. Uma série de artigos foram também publicados por ele no Periódico de Crelle[11] tratando tanto de assuntos da geometria como da álgebra. Além do escopo da matemática, Förstemann publicou ainda sobre tópicos de física e fez parte da Sociedade de Naturalistas de Danzig. Seu falecimento ocorreu no ano de 1836, aos 46 anos. e seu filho Ernst Förstemann, doutor em linguística e historiador, dedicou-lhe uma biografia no ano de 1891.

A álgebra de Förstemann foi elaborada na sua notável obra de 1817 e, apesar de ela nunca ter se tornado popular, fomos capazes de identificar uma importante conexão: em nossas buscas pela *Gauß-Bibliothek*, a biblioteca privada de Gauß que se encontra disponível na Universidade de Göttingen, nos deparamos uma cópia do livro de 1817 contendo uma anotação pessoal que confirma que ele foi adicionado à biblioteca no mesmo ano da publicação. Este fato confirma que Gauß teve ciência imediata das concepções inovadoras de Förstemann que apresentaremos na seção seguinte.

Outra potencial conexão entre os personagens se dá por meio de Friedrich Ludwig Wachter, que estudou em Göttingen na mesma época que Förstemann e que teria trocado correspondências detalhadas em 1815 com Förstemann, como afirma seu filho em sua biografia (Ernst Förstemann, 1891, p.8). Wachter também trabalhou no *Gymnasium* de Danzig e foi sucedido por Förstemann após sua recomendação escrita em 1817. Nela, ele menciona que Förstemann deveria ser contratado como professor de matemática no *Oberpfarrschule* de Danzig no começo de 1817 (Schubring, 2005, p. 496). Wachter se ocupou bastante em questões fundamentais da matemática e possuía uma relação próxima com Gauß. Geometrias não-euclidianas foram alguns dos assuntos sobre os quais os dois discutiram em conjunto e Wachter, que se tornou bastante interessado no assunto, chegou a enviar a Gauß uma demonstração de oito páginas do axioma das paralelas, apesar de ele mesmo ter reconhecido um erro logo em seguida. Diante disso, a potencial relação deles com Förstemann se torna mais provável tendo em vista a sua dissertação de doutorado sobre assuntos geométricos que citamos anteriormente. Diante disso, a potencial relação deles com Förstemann se torna mais provável tendo em vista a sua dissertação de doutorado sobre assuntos geométricos que citamos anteriormente.

O destaque que damos à relação entre Förstemann e Gauß tem uma razão. Como apresentaremos na seção 1.3.4., há uma potencial recepção da epistemologia de Förstemann por Gauß que já havia sido sugerida anteriormente por Schubring (2011, p. 62).

2.3.2.2. A álgebra de Förstemann em sua obra de 1817

O livro de 1817 de Förstemann se encontra também no contexto de recepção e crítica às ideias de Carnot na Prússia. Conforme cita o filho de Förstemann em sua biografia, Förstemann escreveu em uma carta onde menciona que seu livro foi publicada com a intenção de refutar

[11] *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* A ideia do periódico partiu de August Leopold Crelle em Berlim, em 1826. Foi um dos primeiros grandes periódicos matemáticos que não foi publicado por uma academia. Nele, encontramos artigos importantes de autores como Gauß, Abel, Cantor e Eisenstein.

Carnot, tal como tentou Fries (Förstemann, 1891, p. 16-17) De fato, a obra de Förstemann inclui um pequeno anexo onde ele apresenta e critica diretamente a teoria de Carnot.

Sugerindo uma abordagem alternativa, Förstemann segue primeiramente o mesmo caminho de Fries ao destacar a diferença ontológica entre número e quantidade, apesar de isso ser feito por ele de maneira diferente: números são apenas "relações entre quantidades de mesma espécie".

> Números não são quantidades de maneira nenhuma se não quisermos estender o conceito de quantidade de maneira imprópria além de seu limite apropriado. Retas, ângulos, áreas de superfícies, sólidos, pesos, períodos, quantidades de pessoas, de livros, etc. são quantidades; números, todavia, são apenas expressões das relações de quantidades de mesma espécie (Förstemann, 1817, p.1).

Na citação acima, podemos ver que, apesar de o número não ser mais associado a um tipo específico de quantidade, ambos os conceitos seguem relacionados, sendo a quantidade antecedente ao número. No entanto, a novidade trazida por Förstemann não se encontra somente na execução de uma separação conceitual, mas no fato de que ela antecipa um tratamento separado das operações aritméticas para números e quantidades que o permitirá desenvolver uma concepção geral de multiplicação, isto é, livre das restrições e polêmicas impostas pelo paradigma das quantidades.

Isto se dá pelo fato de que a teoria dos números com a qual ele inicia a obra não inclui considerações sobre interpretações concretas, permitindo-lhe apresentar as operações de uma maneira quase axiomática. Já as quantidades, que podem ser consideradas em termos de sua "medida" numérica, associam-se às aplicações do conceito abstrato anterior e necessitam ser consideradas de maneira particularizada. A generalidade não é portanto completamente absorvida nessa aplicação.

Essa abordagem algébrica generalizante dos números já se apresenta no começo de sua obra. Förstemann indica a existência de duas oposições na aritmética dos números.

> Existe na aritmética outra oposição além daquela entre números positivos e negativos, cuja teoria não está sujeita a dificuldades. Trata-se da oposição entre um número e o quociente de 1 por esse número, portanto de um modo geral entre m e $\frac{1}{m}$. Essa relação de oposição é para a multiplicação e divisão o que a oposição entre números positivos e negativos é para a adição e subtração (Förstemann, 1817, p. 5).

Aqui, Förstemann não fala sobre quantidades negativas e sua suposta natureza, mas se atém a uma relação puramente algébrica dos números, permitindo que ele considere duas "oposições" distintas de uma vez: todo número admite um oposto aditivo e um oposto multiplicativo. Apesar de tais oposições não serem descritas de maneira operacional precisa aqui, Förstemann logo transmite essas relações em termos de equações simbólicas.

Förstemann representa o oposto aditivo de b por $\bar{b}$. Esse simbolismo havia sido empregado anteriormente na Alemanha por H. D. Wilckens (1763-1832) um polímata nascido em Braunschweig que estudou matemática na Universidade de Göttingen. Suas ideias fundamentais algebrizantes foram elaboradas enquanto ele lecionava álgebra no Instituto de Waltershausen de

Guarda Florestal e foram publicadas através de quatro cartas datadas de 1797 que ele enviou a seu antigo professor em Braunschweig, Joh. Chr. L. Hellwig (1743-1831), que também foi professor de Gauß. A grande vantagem da notação introduzida por Wilckens e continuada por Förstemann consiste no fato de que ela permite a separação entre a operação de subtração e a ideia de oposição algébrica (Schubring, 2005, p. 487, 488). Dada uma quantidade, a, o seu oposto $\bar{a}$ é definido por meio da equação $a + \bar{a} = 0$. Essa ideia é introduzida por Wilckens por meio de uma transferência da noção lógica de oposição para quantidades e noções lógico-filosóficas também o ajudam a justificar as quatro operações básicas envolvendo quantidades opostas. Além de seguir esse caminho alternativo de justificação, Wilckens também se diferencia da abordagem de Förstemann por não introduzir o conceito de oposição para números, mas apenas para quantidades, além de tampouco enunciar a relação entre números e quantidades (Schubring, 2005, p. 488).

Na obra de Förstemann, a definição de oposição aditiva, da qual se depreende as regras dos sinais de soma e subtração, assume uma forma simbólica por meio das igualdades que são apenas postuladas*:*

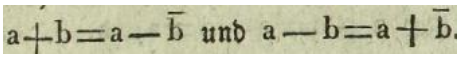

Figura 1: Operações de soma e subtração (Förstemann, 1817, p. 9).

O oposto multiplicativo $\frac{1}{m}$ não chega a ser transmitido em termos de propriedades de igualdades como $a.\frac{1}{m} = a{:}\,m$e $a{:}\frac{1}{m} = a.m$, mas é isso que o autor transmite em sua definição:

> A multiplicação por um número *m* tem o mesmo efeito que a divisão pelo oposto multiplicativo 1 / m. Isso pode ser visto como a definição do oposto da multiplicação. Apenas os números podem ser multiplicativamente opostos uns aos outros, não quantidades (Förstemann, 1817, p. 6-7).

A passagem ainda revela que Förstemann não permite multiplicação entre quantidades, mas apenas entre números. De fato, a separação conceitual entre número e quantidade se torna inescapável precisamente quando consideramos a multiplicação pois a ambição de se ter uma concepção totalmente generalizada de multiplicação fica problemática por conta da natureza concreta das quantidades.

> Não se pode multiplicar uma quantidade por si mesma, mas sim todo número. Portanto, não há potências de quantidades, apenas de números; raízes de quantidades são portanto absurdos. Quando se fala de, por exemplo, potências de linhas na geometria, há de se falar apenas das potências de números que apresentam essas retas em relação a uma unidade (Förstemann, 1817, p. 2).

Como aponta Schubring (2005), Förstemann indicou em muitas ocasiões a importância da multiplicação para a sua abordagem algébrica. Em seu *Schulprogramm*[12] 1825, as operações

[12] Um *Schulprogramm* (programa escolar) é um documento no qual são destacados assuntos pertinentes a uma comunidade escolar. Em geral, em um *Schulprogramm* encontram-se relatos acerca de atividades acadêmicas já desenvolvidas e alguma dissertação sobre aspectos teóricos pertinentes a um tópico escolhido por um professor da escola.

básicas são colocadas em diferentes "níveis", sendo a adição e subtração pertencentes ao primeiro nível. Nele, a aritmética das quantidades e a dos números confundem-se, de modo que a consideração de números não se torna necessária. É apenas no segundo nível, onde a multiplicação e a divisão entram em cena, que o conceito de número se torna imprescindível para uma abordagem desimpedida: "Apenas na multiplicação os números mostraram-se necessários; eles não eram necessários para a obtenção da ideia das operações de primeiro nível" (Förstemann apud Schubring, 2005, p. 499).

Förstemann considera ainda o "elemento neutro" da soma, o zero, e o relaciona ao elemento neutro da multiplicação, o 1, cujas propriedades são dadas por meio de equações. Da mesma maneira que $a + \bar{a} = 0$, temos que $a.\frac{1}{a} = 1$ e, da mesma maneira que $a + 0 = a - 0 = a$, temos que $a.1 = 1.a = a$. O nível de abstração conseguido por Förstemann se percebe pelo fato de que nenhuma consideração da essência do 1 como "unidade de medida" precede sua apresentação quase axiomática em termos de suas propriedades operacionais, assim como ocorreu no caso do zero

Apesar de já iniciar o texto de seu livro com opostos aditivos e multiplicativos, o aspecto surpreendente da concepção de Förstemann se encontra no fato de que ele sugere a existência de uma aritmética "anterior" a essa que engloba opostos por adição e multiplicação, isto é, uma aritmética em que as letras indicam necessariamente "números absolutos" e, portanto, a subtração se encontra limitada (Förstemann, 1817, p. 8). Visando a uma generalização da operação, a sua álgebra envolve uma extensão do conceito de número, de modo que os números absolutos se tornam positivos e novos objetos, os opostos por adição, são postulados, e as propriedades operacionais são preservadas a princípio. Tudo isso mostra que Förstemann já possui uma concepção de uma *Zahlbereichserweiterung*, a qual fica ainda mais elaborada em sua obra de 1825, onde números negativos surgem como "novos tipos de números" após a consideração da aritmética dos números absolutos (Schubring, 2005, p. 500-501).

Em linha com sua proposta de generalizar as operações opostas para os números, Förstemann reconhece que até mesmo o zero admite um oposto multiplicativo, que seria ∞, ou o "limite dos números maiores do que 1" (Förstemann, 1817, p. 7). Da mesma maneira, o reconhecimento de que o 0 pode ser tanto positivo como negativo sugere que ele também possa ser entendido como seu próprio oposto aditivo, de modo que todo número admite os dois tipos de opostos.

Para desenvolver uma concepção geral de multiplicação, segundo a qual números negativos e positivos podem ser multiplicados entre si livremente, Förstemann parte da propriedade da distributividade. A igualdade $(a+b)c = ac+bc$, que já é considerada como sendo verdadeira para números positivos, será simplesmente assumida como sendo válida também quando b for substituído por $\underline{b}$. Primeiramente, ele observa que, como $a - b = a + \bar{b}$, segue que $(a + \bar{b})c = ac - bc$.

> No entanto, a desejada aplicabilidade de números negativos em tal agregado requer que seja possível aplicar a uma multiplicação como $(a + \bar{b})c = ac + \bar{b}c$ também para as regras para a multiplicação de agregados, uma vez que são dadas para números absolutos (Förstemann, 1817, p. 16).

Como antes ele observou que $(a + \bar{b})c = ac - bc$, segue que $ac - bc = ac + \bar{b}c$. Portanto, $\bar{b}c$ "adiciona tanto quanto bc subtrai.": $\bar{b}c = \overline{bc}$. Portanto, se bc for um número positivo, $\bar{b}c$ será negativo. Daí segue a regra "da multiplicação "+ com - dá -". Por um processo similar, Förstemann também demonstra que "- com - dá +" e sugere que também se possa alcançar a regra "- com + dá -" (Förstemann, 1817, p. 16-17).

Aqui, Förstemann se utiliza de uma ideia similar ao "princípio da permanência". Förstemann assume um processo de extensão do domínio dos números condicionado à preservação de certas propriedades do domínio anterior. No domínio dos números absolutos, a propriedade da distributividade é simplesmente tomada como válida. E no domínio estendido dos números positivos e negativos, a propriedade é assumidamente preservada. Förstemann não elabora aqui uma justificação desse método de preservar as propriedades no processo de extensão, mas é através dele que ele obtém as "regras dos sinais da multiplicação". E a mesma regra é em seguida considerada válida também no caso da divisão.

Operações com quantidades

Tendo realizado a separação epistemológica entre números e quantidades e estabelecido a aritmética do primeiro conceito, Förstemann estende as suas concepções ao apresentar a aritmética das quantidades. Para tanto, o autor busca mostrar como a aritmética das quantidades pode se reduzir ao tratamento dos números que ele apresentou anteriormente. Antes de fazer isso, no entanto, Förstemann apresenta uma breve motivação. Segundo ele, o seu tratamento dos números negativos até então permanece imperfeito, uma vez que ele apenas apresentou como um número negativo isolado possui um significado quando envolvido em operações. O propósito da matemática não é apenas esse.

> Porém, o mais alto e mais extremo propósito dos cálculos matemáticos é a determinação das relações de quantidades. Meros números possuem valor apenas pois são utilizados para representar relações de quantidades por si ou pois eles necessitam ser envolvidos em cálculos através dos quais no final os números expressando essas relações são encontrados (Förstemann, 1817, p. 17-18).

A passagem transmite que Förstemann ainda concorda que as quantidades sejam o principal objeto de estudo da matemática enquanto os números são úteis apenas uma vez que eles servem para expressar relações de quantidades. Tendo isso em vista, a sua apresentação abstrata no início ainda clama por uma consideração em contextos aplicados. Seu propósito agora é mostrar que números negativos podem servir para representar certas relações entre quantidades. Isso constitui um problema tradicional uma vez que as quantidades negativas e positivas associadas podiam ser consideradas homogêneas, isto é, caracterizadas por qualidades distintas (Schubring, 2005, p. 503).

Para atacar esse problema das aplicações dos números, Förstemann considera alguns casos concretos de quantidades opostas como capital e dívida. Apesar da designação diferente dessas quantidades, Förstemann identifica uma clara relação entre elas em termos da operação de adição, o que permite que uma dívida seja tomada como quantidade negativa enquanto o capital é

considerado positivo. De modo geral, considerando-se uma certa unidade, uma das duas quantidades será designada por números positivos enquanto a outra, oposta à anterior pela adição, será designada por números negativos. Feitas essas designações, a aritmética das quantidades retorna à aritmética dos números. É de se notar, no entanto, que Förstemann chega a oferecer uma demonstração para a regra dos sinais de multiplicação entre quantidades independente da regra para os números e, após isso, ele diz que "agora também pode ser mostrado de maneira especial que o mesmo deve ocorrer também para meros números." (Förstemann, 1817, p. 35). Isso mostra que, apesar da apresentação isolada e quase axiomática na aritmética dos números, as quantidades poderiam oferecer uma maneira de corroborar as leis de operação com números.

Após o tratamento teórico das quantidades, Förstemann aplica seus resultados na álgebra, na geometria e na trigonometria, apresentando de maneira notável como operar extensivamente com grandezas angulares vistas como quantidades opostas (Schubring, 2005, p. 504) Sua abordagem de aceitar quantidades negativas com novas bases o coloca diretamente contrário às ideias predominantes na França. Em um apêndice da obra, Förstemann critica os argumentos oferecidos por Carnot, que

> [..] quis mostrar a incorreção da regra segundo a qual soluções negativas deveriam ser tomadas em uma direção que é oposta à direção na qual as positivas estão sendo tomadas. O fato de que essa regra pode ser aplicada algumas vezes, o exemplo I em §22 mostra. Aqueles que pretendiam afirmar que essa regra poderia sempre ser aplicada afirmam incorreção de fato. Isto não é, porém, a razão para chamar o conceito comum de quantidades negativas de falso ou obscuro, do que Carnot as acusa (Schubring, 2005, p. 504-505).

Essa crítica põe em evidência a visão particular de Förstemann de que é necessário tomar cuidado ao considerar uma teoria geral de quantidades para refutar a existência de quantidades negativas. Quando lidamos com aplicações deve-se considerar caso por caso para julgar se, em um dado contexto, é possível a consideração de quantidades opostas. Seria errado argumentar que quantidades negativas não são um conceito válido apenas porque ela não é aplicável em alguns casos particulares. Em se tratando de números, essa análise específica não entra em cena, de modo que, para Förstemann, as aplicações constituem um problema em si que deve ser separado da consideração abstrata dos números.

2.3.2.4. Síntese

A separação ontológica entre números e quantidades assume um papel preponderante na metodologia da matemática para Förstemann: números são relações entre quantidades e sua teoria é descrita apenas em termos de suas relações algébricas. Förstemann toma como princípio a generalização das operações aritméticas que, a princípio, encontravam-se limitadas pela concepção de número absoluto, isto é, uma espécie de princípios a permanência implícita que o leva a considerar os opostos operacionais, legitimando, assim, de maneira inovadora, os números negativos e as suas operações. Assim, foi um *practitioner*, um professor de *Gymnasium*, que foi

instigado, em particular pela obra de Carnot, de resolver os problemas de operar com números inteiros.

Apesar de sua elaboração da aritmética, é de se notar que Förstemann não entra em detalhes a respeito dos números irracionais, complexos, etc. Além disso, o nível de abstração na consideração dos números não é tão clara, uma vez que Förstemann se vê na necessidade de justificar resultados negativos.

Outro aspecto da apresentação de Förstemann é a relação lógica entre a teoria abstrata dos números e a consideração de quantidades. É difícil precisar se a última não constitui por si uma garantia do que foi apresentado de maneira quase axiomática para os números. Esse é um aspecto que não será visto em elaborações posteriores da *Zahlbereichserweiterung*. É certo, no entanto, que Förstemann ainda mantém a consideração de quantidades como sendo crucial para um tratamento completo do assunto dos números por um matemático.

2.3.3. A concepção de Gauß: mudança epistemológica, concepção de oposição e extensão do conceito de número

Conforme aponta Schubring (2005, p. 529), a concepção inovadora de Förstemann de oposição não foi capaz de suplantar a abordagem tradicional do assunto na Alemanha, mesmo por conta da fraca recepção que a sua obra obteve. Porém, foi o famoso matemático de Göttingen, Carl Friedrich Gauß, que divulgou uma conceitualização dos números para os matemáticos que extende as concepções de Förstemann.

Foi com a já mencionada obra, *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), que Gauß estabeleceu a teoria dos números como padrão desta nova área da matemática, junto com a obra *Essai sur la théorie des nombres*, também já mencionada na seção 1.2.1., publicada por Adrien-Marie Legendre, em 1798. O livro foi traduzido em 1807 para o francês (Gauß, 1807).[13] O assunto principal da obra de Gauß foi a elaboração do conceito de congruência e o autor coloca os "números inteiros" como base do conceito de número, entendendo-os como constituídos pelos números positivos e negativos, além dos racionais, nomeados "frações":

> Os números podem ser positivos ou negativos, mas inteiros. Quanto ao módulo, evidentemente, ele deve ser tomado absolutamente, isto é, sem qualquer sinal (Gauß 1807, p. 1).

Gauß nomeou a aritmética que lida com estes domínios de números "aritmética elementar", enquanto a "aritmética transcendente" lida com os números irracionais que ele excluiu do seu estudo (Gauß 1807, p. xi). Gauß pressupõe que estes números sejam conhecidos, sequer introduzindo-os ou abordando a sua aritmética.

Gauß retomou às suas pesquisas na teoria dos números investigando o conceito dos resíduos biquadráticos. Ele publicou em 1825 um anúncio de uma primeira publicação sobre o assunto, a *Commentatio Prima*, que só viria a ser publicado em 1828. Lá, ele já ainda anunciou

[13] Uma tradução alemã foi publicada em 1889.

uma continuação, a *Commentatio Segunda*, que foi publicada no mesmo ano que o anúncio de sua memória, em 1831. O anúncio da memória, chamada por Gauß de *Selbst-Anzeige* (autorresenha), contém também, além de um resumo da memória sobre os resíduos biquádraticos, a exposição de um conceito estendido de números da 'aritmética elementar'. O propósito principal desta parte foi legitimar os números complexos.

Gérard Grimberg publicou uma tradução da autorresenha, em português, junto a um comentário (Grimberg, 2014). O foco do comentário foi o novo conceito de números complexos que atribui a eles o "direito de cidadania na matemática". Gauß destacou que ele já havia sugerido uma tal extensão do conceito de número no seu primeiro comentário, mas de forma bem implícita:

> A partir daí entende-se facilmente de que se pode ingressar neste domínio rico da aritmética superior apenas por caminhos completamente novos. O autor tem na primeira memória dado uma indicação, que se exige para isso essencialmente uma extensão específica de todo o campo da aritmética, sem aliás ter esclarecido precisamente em que reside esta: a presente memória tem como alvo de pôr em luz este objeto (Gauß apud Grimberg 2014, p. 161).

E esta extensão consistiu em integrar os números complexos na matemática, sem mais nenhuma ressalva, seja epistemológica:

> Isso não é nada a não ser estender o campo da matemática superior até também os números imaginários, enquanto verdadeiro fundamento da teoria dos resíduos biquadráticos, o qual era aliás apenas consagrado aos números inteiros reais, e se deve conferir a esses a mesma e plena cidadania. Desde que se concebe isto, aparece esta teoria numa luz totalmente nova, e os seus resultados ganham a mais alta e surpreendente simplicidade (Gauß apud Grimberg, p. 161).

Gauß destacou aqui que esse novo papel legítimo dos números complexos foi devido a sua importância na pesquisa sobre os resíduos biquadráticos (Grimberg. 2014, p. 145).[14]

Grimberg comentou ambas as partes da auto-resenha, e quanto a segunda parte comentou em particular sobre a conceitualização dos números complexos. Ele destacou de Gauß ter tirado o caráter um pouco suspeito dos números tradicionalmente chamados imaginários. Ele comentou em particular sobre o papel da visualização na conceitualização pelo Gauß; de fato, a base da legitimação dos números complexos foi a construção geométrica deles no plano, de maneira análoga ao método de construir os complexos geometricamente, publicados por matemáticos menores e amadores, como Argand (ver Schubring 2018a). Assim, Gauß apontou a „significação intuitiva de $\sqrt{-1}$", para esclarecer "uma escuridão cheia de segredos "ainda permeando os entendimentos comuns:

> Se não se houvesse considerado +1, -1, $\sqrt{-1}$ como unidades positiva, negativa, imaginária (ou ainda impossíveis) unidades, mas como direta, inversa, lateral, não ficaria o discurso tão escuro (Gauß apud Grimberg 2014, p. 165).

De fato, as quatro umidades básicas que Gauß definiu para conceber os números nesta nova extensão, +1, -1, +*i* e -*i*, são justamente os eixos do plano em coordenadas retangulares. Fica muito revelador que Gauß explica esta construção geométrica no plano à partir de ter concebido antes os números negativos, por construir os números inteiros pelas duas unidades +1 e -1:

[14] Weierstraß há de colocar mais tarde uma outra razão para o caráter imprescindível destes números: a teoria das funções elípticas.

> O matemático faz completamente abstração da natureza dos objetos e do conteúdo de suas relações; preocupa-se apenas com a contagem e a comparação das relações entre si: sobre este ponto autoriza-se, seguindo a identidade das propriedades conferida as relações +1 e -1, a analogia estabelecida, a estender esta aos todos os quatro elementos +1, -1,+*i* e -*i*.[15]
>
> Estas relações são entregue à visão ("Anschauung") apenas através de uma representação ("Darstellung") no espaço; e o caso o mais simples, onde não subsista nenhuma razão, para ordenar os símbolos dos objetos de maneira outro do que em quadrados, partilhando efetivamente um plano ilimitado dividido em quadrados por dois sistemas de linhas paralelas, umas interceptando as outras a ângulo reto, e associando os pontos de interseção aos símbolos (Gauß apud Grimberg, 2014, p. 165).

Jaqueline Boniface, no capítulo dela sobre o conceito de número desde Gauß até Kronecker, no volume organizado por Catherine Goldstein e Norbert Schappacher sobre a obra *Disquisitiones*, nem coloca ou comenta a construção geométrica e nem a conceitualização dos números negativos pelo Gauß (Boniface, 2007). No entanto, Gauß destacou muito a sua abordagem.

Tal como Förstemann, Gauß também concebia um processo da extensão do conceito de número na "aritmética geral", conforme ele explicita em sua autorresenha, apesar de não entrar a fundo nos mecanismos do processo. Destacamos, em especial, o fato de Gauß sinalizar que os números negativos seriam introduzidos apenas após a introdução dos irracionais, isto é, após a formação dos "números reais positivos".

> Nossa aritmética geral, pela qual a geometria dos Antigos é de longe ultrapassada, é todo a obra do tempo novo. Na origem vindo do conceito dos números inteiros absolutos ela ampliou gradualmente o seu domínio; aos números inteiros são acrescentados os números quebrados (fracionários), aos racionais os irracionais, aos positivos os negativos, aos reais os números imaginários. Este avanço veio no início acontecendo a passos tímidos e circunspetos. Os primeiros algebristas já consideravam as raízes negativas das equações como falsas raízes, e essas eram também consideradas tais onde o problema no qual se referiam assim expresso indica que a natureza das quantidades procuradas não permitia nenhum oposto. Mas tão pouco se hesita admitir na Aritmética *universal* os números fracionários (quebrados), embora existissem muitas coisas enumeráveis pelas quais um número fracionário não tem sentido, tão pouco podem ser então recusados os mesmos direitos aos números negativos os dos positivos, sob o pretexto de que inumeráveis coisas não permitem nenhum oposto: a realidade dos números negativos é suficientemente justificada, já que eles encontram em inumeráveis outros casos um substrato adequado (ibid., p. 163-164).

Gauß chega a relatar que ele não ainda publicou sobre as suas concepções de extensão, embora as utilize na prática – o que um "leitor atento" poderia ter percebido:

> O autor tem abordado há muitos anos esta parte importante da matemática com um ponto de vista diferente, segundo o qual um objeto poderia ser atribuído às quantidades imaginárias tão bem quanto às negativas: mas faltou até agora uma ocasião de expressar este publicamente de maneira precisa, mesmo se o leitor atento reencontrasse facilmente os traços no escrito de 1799 sobre as equações (Gauß apud Grimberg 2014, p. 152).

[15] Uma mesma ordenação do processo descrita por Gauß será seguida por Weierstraß que, como veremos no capítulo seguinte, deve ter sido fortemente influenciado pela concepção de Gauß de considerar os números complexos tendo como base as quatro unidades, +1, -1, +*i* e -*i*.

É importante apontar ainda que ele sinaliza que o processo se encerra nos números complexos, isto é, a aritmética geral termina com o tratamento de objetos de duas dimensões que são compostos pelas quatro unidades +1, -1, +i e -i. Apesar de prometer, Gauß nunca chegou a responder a razão pela qual estes seriam os limites da aritmética geral, mas o assunto deve ter inspirado Weierstraß, que buscou reenquadrar o teorema, deixando mais claro o que se entenderia por "aritmética geral", além de oferecer uma demonstração para ele, como veremos também no capítulo seguinte. E o mesmo é feito também por Hankel, como veremos na seção seguinte.

> O autor tem se reservado de trabalhar mais completamente no futuro este assunto, o qual tem a dizer a verdade tratado na ocasião nesta presente memória, onde então se poderá encontrar também a resposta a questão de saber por que as relações entre as coisas, que exigem uma variedade de mais de duas dimensões, não podem ser ainda tratada na aritmética universal segundo outras espécies admissíveis de quantidades (Gauß apud Grimberg 2014, p. 165-166).

O que tornou a autorresenha um documento importante na história da matemática consiste no fato de que, nela, Gauß apresenta pela primeira vez a nova epistemologia da matemática, similar àquela proposta anteriormente por Förstemann: a disciplina deixa de ser entendida como a ciência das quantidades e passa a ser entendida como a ciência das relações entre quantidades. E foi justamente no estabelecimento dos números negativos que Gauß destacou esta nova epistemologia:

> Os números positivos e negativos podem apenas se aplicar lá onde o que está calculado tem um oposto, oposto que unido com ele deve ser pensado igual a uma aniquilação. A olhar de maneira precisa esta condição encontra-se só onde o que está calculado não são substâncias (objetos pensáveis para si), mas sim relações entre dois objetos considerados dois a dois (ibid., p. 150).

Uma tal concepção relacional dos números já havia sido sinalizada em um manuscrito anterior, "Da metafísica da matemática", datado pelos editores de sua coletânea do "início do século 19", onde ele diz que a matemática lida com as "verdades gerais sobre as relações entre quantidades" (Gauß apud Ewald, 1996, p. 294). Apesar de parecer que a passagem supracitada diz respeito à aplicabilidade dos números opostos, Gauß é bem claro ao separar teoria e prática, afirmando que a matemática lida com essas relações de maneira abstrata, sem a consideração da "natureza dos objetos ou o conteúdo de suas relações".

Foi essa transição do entendimento clássico da matemática para a epistemologia de matemática relacional que foi enfatizada pelo Ernst Cassirer, na sua obra pertinente, *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (1910), como ponto de partida da modernidade da matemática (Cassirer 1910).

Apesar de ser tão fundamental no entendimento de Gauß, e apesar de ele ter comentado bastante a respeito dos aspectos epistemológicos acerca do termo "metafísica", Boniface não menciona esta contribuição notável de Gauß (ver Boniface, 2007, p. 317 e mais). Outra crítica pode ser feita sobre o fato de Boniface destacar reiteradamente que teria sido Gauß quem iniciou a tendência de utilizar a *Zahlbereichserweiterung* nos princípios da aritmética em meio ao processo da "aritmetização da análise" e que tal movimento teria sido continuado por outros matemáticos

como Weierstraß e Dedekind. De fato, demonstrar tal fato consistia em um dos objetivos de seu artigo:

> O primeiro objetivo deste artigo será destacar que a aritmetização da matemática no sentido parecido com aquele sugerido por Weierstraß procede a partir da extensão do conceito de número e, por consequência, do domínio de objetos aritméticos. Será demonstrado, ademais, que esse procedimento é geralmente considerado por matemáticos e filósofos como paradigmático do desenvolvimento da matemática moderna. Irá surgir, ainda, por meio de seu conceito de número e sua posição acerca dos imaginários, Gauß pode ser considerado aquele que iniciou essa tendência (Boniface, 2007, p. 315).

Como já apresentamos, Gauß jamais explicitou as etapas do processo de *Zahlbereichserweiterung*, apesar de ter descrito suas sucessivas etapas e, mais importante, houve antecedentes a Gauß, comumente ignorados pela historiografia, que já traziam consigo uma tal concepção, como Hecker e Förstemann.

Bernhard Riemann, um discípulo de Gauß, confirma em uma nota para suas lições a importância da nova epistemologia para a construção dos números negativos:

> Não é possível conceber em matemática o conceito de quantidade sempre de maneira idêntica. As quantidades de que trata a matemática originalmente são os números inteiros [positivos]. O problema de subtrair um número de um outro leva a atribuir ao conceito de quantidade sempre um tal significado de modo que se pode também subtrair um número maior de um número menor. Uma tal extensão do conceito fica possível quando se considera o enumerado não como substância mas como relações entre substâncias (Gauß apud Schubring 2018b, p. 18).

Vale mencionar um desdobramento da *Commentatio Segunda*, não mencionado por Boniface mas analisado pelo matemático suíço Urs Stammbach. Já na *Commentation Prima*, publicado três anos depois do anúncio, em 1828, Gauß indicou um resultado importante das pesquisas sobre resíduos biquadráticos de um número primo dado. Ele colocou a demonstração desse resultado como sendo *tiefer versteckt* (escondido mais profundamente) e anunciou que a publicaria na *Commentatio Segunda* (Stammbach 2013, p. 183). No entanto, o jovem Dirichlet publicou o resultado poucos meses depois, em um artigo na revista de Crelle de 1828, mencionando que foi capaz de demonstrar os dois critérios de Gauß, além de comentar que as suas provas seriam

> fondées sur des considérations extrêmement simples et probablement tout-à-fait différentes de celle de M. Gauss qui paraît exiger des recherches préliminaires très délicates et assez étendues (Gauß apud Stammbach 2013, p. 185).

No entanto, na sua *Commentatio Segunda*, publicado em 1832, depois da autorresenha em 1831, Gauß formulou uma nova lei de reciprocidade. Mas, também aqui, Gauß não publicou a demonstração, apontando que seria muito complicado, e que se revelaria como um caso especial da lei geral da reciprocidade biquadrática – que ele formulou também nesta memória. Dessa vez, imediatamente depois da publicação de Gauß, Dirichlet publicou uma demonstração da lei, em 1832, também na revista de Crelle, destacando que conseguiu fazê-la de maneira bem simples:

> Quant à la démonstration de ce nouveau théorème, que l'illustre auteur juge sujette à de grandes difficultés, il la renvoie à un autre mémoire où elle sera exposée avec celle d'une autre proposition plus générale. Je me propose de dé- montrer dans ce mémoire le théorème dont il s'agit par des considérations fort simples (ibid., p. 186).

Gauß nunca publicou a terceira *Commentatio*. O material dela foi encontrado no seu *Nachlass* (ibid., p. 18).

2.4. O "Princípio da Permanência" segundo Hermann Hankel (1867) e a nova epistemologia

2.4.1. Hermann Hankel: Números como relações formais

A epistemologia de Förstemann e Gauß será mais difundida em 1867 com a obra de Hermann Hankel, *Theorie der complexen Zahlsysteme* (Teoria dos sistemas numéricos complexos) (Schubring, 2012, p. 62). Nessa obra de duas partes, Hankel não somente discute sobre uma nova concepção de número como elabora de maneira extensa uma construção dos diferentes "sistemas numéricos" Já falamos brevemente sobre ele na primeira seção desta obra como fator motivador da nossa tese e, aqui, tentaremos contextualizar a sua obra em meio às contribuições supracitadas, além de esmiuçar ainda mais a sua metodologia centrada no princípio da permanência. É importante destacarmos, no entanto, que o período entre a publicação de Förstemnan e a de Hankel viu uma série de desenvolvimentos importantes para a concepção da *Zahlbereichserweiterung* além da publicação de Gauß. Como mostraremos na seção 3.7.2., por exemplo, em 1854, Dedekind já descreve de maneira bastante elaborada o método, destacando de maneira notável o papel do princípio da permanência (que tampouco foi assim nomeado por ele).

A problematização do conceito de número se desenvolve no primeiro capítulo da obra. A princípio, Hankel expõe uma concepção comum de número, equivalente aos números naturais, considerados tanto como números cardinais como ordinais. Ao considerar as operações de subtração e divisão com esses objetos, isto é, as operações "analíticas", definidas através da solução das equações $x + b = c$ e $x.a = c$ ele é levado aos símbolos negativos e fracionários**,** isto é, ele os define como números opostos aditivo e multiplicativo no mesmo sentido de Förstemann. Diferentemente do seu antecessor, no entanto, ele não somente percebe que o processo envolve uma aritmética estendida, como requer que a concepção anterior de número seja estendida para que se possa atribuir significado a esses novos objetos. atribuindo-lhe uma nova concepção "relacional" que seria ainda capaz de atribuir significado aos números complexos

> O número é a expressão da relação oposta entre dois objetos, na medida em que as mesmas medições quantitativas são acessíveis (Hankel, 1867, p. 6).

A concepção subjacente remete àquela exposta por Gauß, segundo a qual números representariam "relações entre objetos." e, de fato, a apresentação de Hankel se assemelha bastante à que foi exposta por Gauß em seu resumo de 1831. Sobre a questão da realidade dos números, Gauß reconhecia que o fato de inúmeras coisas não admitirem um oposto não deveria servir de

argumento contra números negativos e positivos, uma vez que esses números encontram um "substrato em inúmeros outros casos", e um argumento similar foi utilizado para defender a legitimidade de frações como objetos reais (Gauß, 1831, p. 6). Hankel concorda com isso, mas aponta que a arbitrariedade na presença ou não das relações em objetos reais sugere que uma concepção de número não tem sido corretamente considerada até então.

> Precisamente essa circunstância, que ameaça o conceito dos negativos exatamente da mesma maneira, na medida em que a contrapartida reversível não está presente em todas as regiões físicas de quantidade, aponta suficientemente que o ponto de vista pelo qual temos considerados os números negativos e fracionários não é de uma teoria pura que é independente do conteúdo dos objetos a serem conectados [*verknüpf*enden]. Aquelas relações capazes de oposição real, aquelas partes reais de um objeto divisível, são imagens concretas correspondendo apenas a certas relações cuja existência depende de condições acidentais que surgem da natureza específica do concreto definido (Hankel, 1867, p. 9).

Uma concepção de número que necessita fazer referências a objetos reais e suas relações vai contra o seu entendimento de que o conceito de número sofreu uma certa transformação a ser preservada:

> Se alguém quiser responder à pergunta mais frequente, se um certo número é possível ou impossível, deve-se primeiro ter clareza sobre o real significado dessa pergunta. O número hoje não é mais uma coisa, uma substância, que existe independentemente fora do sujeito pensante e dos objetos que a causaram, um princípio independente, como, por exemplo, como os pitagóricos pensavam mais ou menos (Hankel, 1867, p.7).

Números constituem, segundo ele, *objetos ou relações formais* e são, portanto, independentes de qualquer objeto externo à mente humana ou de nossa intuição. Com isso, a questão da existência se transforma e Hankel é explícito quanto a isso: um número existe a partir do momento em que pode ser pensado, o que para Hankel, se traduz na condição de que ele *não deve envolver contradições lógica*s. A capacidade dessas relações serem percebidas em relações envolvendo objetos reais (*relações entre quantidades*) ou de nossa intuição passa a ser um "acidente" e não se torna mais relevante para a questão da existência de um objeto matemático ou de sua definição. Caso não exista uma forma reconhecida de fazer com que relações entre objetos reais correspondam a certos números, diz-se que os números são *transcendentais* ou *potenciais*, o que em nada impede sua existência como representantes de relações puramente intelectuais e portanto legítimos. Essa concepção formal é o que permite resolver o problema epistemológico apontado por ele.

> Essas relações gerais formais, cuja possibilidade é independente de nossas ideias empíricas, e que, à medida em que incluem a condição de possibilidade de relações reais, podem ser chamadas de potenciais ou transcendentais, não devem ser consideradas em objetos reais mas em objetos intelectuais ou relações destes se quisermos nos livrar da aleatoriedade do real (Hankel, 1867, p. 10).

Vale apontar que tal concepção do número já havia sido delineada pelo próprio Gauß, que disse que o número é "um produto de nossa própria mente", apesar de uma tal concepção ser mais

fortemente associada a Dedekind. No entanto, veremos que Hankel não somente apresenta a nova concepção como a utiliza para justificar sua metodologia na extensão do domínio dos números. Uma consequência do novo conceito de número será uma separação metodológica entre números e a teoria das quantidades, nos mesmos moldes do que vimos anteriormente em Förstemann. No entanto, essa separação é baseada numa concepção que explicitamente remove quantidades da própria definição de número e os métodos a serem perseguidos em ambos os âmbitos são muito mais explícitos.

2.4.2. A justificação do princípio da permanência e a *Zahlbereichserweiterung*

Até então, percebe-se que Hankel estudou os diferentes tipos de números de uma maneira mais flexível, isto é, baseando-se em noções intuitivas que ele possui de suas operações e propriedades fundamentais e apenas explicitando-as. Essa concepção inicial de número consiste no que ele entende por "números verdadeiros" [*aktuellen Zahlen*], que se difere explicitamente da noção de número entendido como relação de objetos que será agora abordado. Antes de tudo, Hankel explicita pela primeira vez uma nova definição de número, tendo em vista o aspecto formal que ele pretende que esse conceito possua:

> Um número é a expressão de relações formais conhecidas entre objetos; um sistema de números constrói uma sequência ordenada sistemática de tais relações ou conexões [Verknüpfungen], cuja essência constitui o caráter do sistema de números (Hankel, 1867, p. 36).

Em se tratando de números formais, as propriedades e operações não são pré-existentes e apenas observadas. A nova concepção de número garante uma liberdade em assumir operações e propriedades que não necessitam serem justificadas por qualquer tipo de relação real ou intuição: Elas não são observadas, mas são construídas ou *assumidas* e a única restrição para essas relações intelectuais, conforme apontamos, será a condição de que não entrem em contradições lógicas.

Nesse sentido, Hankel explicita primeiramente a chamada *"Formenlehre*", ou teoria pura das formas, uma teoria que Hankel admite ter sido primeiramente desenvolvida de maneira madura por Hermann Graßmann (1809 - 1877), sobre quem falaremos com mais detalhes no capítulo 3. Essa teoria consiste em um estudo abstrato das operações sintéticas e analíticas e suas respectivas propriedades, sem considerar a natureza dos objetos com os quais se está operando. Nesse âmbito, por exemplo, ele considera comutatividade e associatividade como possíveis propriedades que essas operações podem assumidamente possuir. Essas operações consideradas de maneira abstrata servirão como protótipo para que se aponte que tipos de operações e propriedades serão obedecidas nos diferentes campos numéricos.

O projeto de Hankel é construir os diferentes *sistemas numéricos, um após* o outro, a começar pelos números naturais e seguindo a níveis mais abrangentes de modo que o nível posterior seja capaz de abranger o nível anterior. O método a ser utilizado por ele para *selecionar*

as propriedades respeitadas por esses diferentes sistemas de números será a sua versão do princípio da permanência:

> É claro que um sistema de tais operações mentais pode ser estabelecido no qual os objetos e as operações aos quais eles são submetidos são suficientemente e não mais do que suficientemente definidas, mas ele se torna vazio se for estabelecido sem consideração por qualquer interpretação de seus resultados e sem aplicações. Para que não caiamos no confuso, devemos sujeitar as operações que envolvem objetos mentais a tais regras formais que podem conter, dentro de si, aquelas envolvendo objetos intuitivos e os números que expressam suas relações como subordinados (Hankel, 1867, p. 11).

Trata-se do mesmo princípio que foi utilizado por Förstemann para depreender a multiplicação envolvendo números negativos. No entanto, há maior grau de sofisticação na obra de Hankel uma vez que não somente o princípio é explicitamente enunciado como é também justificado pela sua própria concepção formalista de número. Conforme ele diz ao estabelecer a regra dos sinais:

> Não se pode destacar demasiadamente contra uma ideia largamente propagada de que essas equações [as regras dos sinais] jamais poderão ser demonstradas na matemática formal; elas são convenções arbitrárias a favor da preservação do formalismo no cálculo. [.. .] Uma vez que essas convenções tenham sido estabelecidas, no entanto, todas as outras leis da multiplicação seguirão por necessidade (Hankel, 1867, p. 41).

Sua concepção formal de número permite que suas regras operacionais sejam "arbitrariamente" selecionadas, sob a condição de que elas não levem a contradições lógicas, o que por si justifica a aplicabilidade do princípio da permanência como princípio norteador para tais escolhas. Tal arbitrariedade deve ser associada à liberdade que Hankel permite em assumir propriedades operacionais, significando, portanto, que estas não serão pensadas segundo um certo critério: o princípio demarca que essa liberdade será explorada visando a uma preservação estratégica de certas propriedades que são respeitadas quando consideramos relações reais ou intuições. A relação entre as propriedades intuitivamente percebidas e a sua absorção pela teoria dos números não é lógica, mas apenas convencional. Outros sistemas numéricos seriam completamente possíveis: "Toda mudança nas regras de operação origina uma mudança nos números" (Hankel, 1867, p. 36).

Por lidar com números formais, Hankel não mais assume a existência e a aritmética dos números naturais[16] mas precisa construi-la e isso ele faz segundo um processo que se assemelha com a nova fundamentação desses números que foi realizada pela primeira vez na obra de Hermann Graßmann de 1861, *Lehrbuch der Arithmetik*, e Hankel admite a originalidade e influência desse importante matemático prussiano (Hankel, 1867, p. 16-17). Diante do fato de que os novos desenvolvimentos dos números naturais constitui o assunto principal do capítulo 3, nos reservaremos a falar sobre o assunto em mais detalhes nessa ocasião.

[16] Conforme já mencionamos, a terminologia "número natural " não era utilizado na época, e Hankel se refere a eles como *positiven ganzen Zahlen.*

Tendo construído uma aritmética para os números naturais simplesmente assumir a existência dos números negativos após lidar com números naturais, que são da mesma forma construídos em vez de serem assumidos. Isto ele faz por meio da seguinte igualdade generalizada:

$$(B - A) + A = B$$

A igualdade, que antes era impossível quando B era menor do que A na etapa anterior, agora pode ser assumida como sendo possível da mesma forma, dando origem aos entes negativos. O significado desses objetos não se torna relevante quando nos restringimos à teoria formal dos números. Pensando em termos de equações algébricas, a equação linear

$$x + A = B$$

agora possui solução em todas as ocasiões em que A e B consistem em números naturais. Com o auxílio do princípio da permanência, Hankel então depreende como se deve operar com esses números tanto nas somas e subtrações como na multiplicação e divisão, em um processo bastante similar com aquele seguido por Förstemann. Da mesma forma, Hankel constrói os números fracionários com a divisão e depois ainda tenta desenvolver os números irracionais e complexos.

Dentro da perspectiva de uma extensão do conceito de número baseada em um princípio da permanência claramente exposto, a questão Gauß havia "perguntado mas nunca respondido" (Hankel 1867, p. 108) a respeito dos limites da "aritmética geral" ganha um significado mais concreto. No contexto de sua *Zahlbereichserweiterung*, o "número geral" consiste no mais alto conceito de número que se pode alcançar pode chegar na condição de que certas propriedades sejam preservadas, as quais ficam claramente expostas por Hankel. Uma dessas propriedades consiste na determinabilidade da divisão[17] que, consoante Hankel, é perdida a partir do momento em que lidamos com "números hipercomplexos"[18] compostos de mais de duas dimensões.

> O sistema de números complexos superiores, cujas operações formais de cálculo são fixadas pelas condições dadas em §28, e cujos produtos da unidade são funções lineares particulares das unidades originais e em que nenhum produto pode desaparecer sem que um de seus fatores seja zero, contém em si uma contradição e não pode existir (Hankel 1867, p. 107).

Apesar da relevante demarcação do que consiste em um "número geral", é válido apontar que o teorema não determina o fim do processo de extensão: no mesmo volume, Hankel ainda aborda os quatérnios de Hamilton.

Conforme já mencionamos, simultaneamente, Weierstraß tentará responder a mesma questão legada por Gauß e veremos mais detalhes no capítulo seguinte.

Uma notável consequência da sofisticada epistemologia de número de Hankel é que não há mais uma separação ontológica entre os números naturais e os demais. Todos eles são construídos em sua teoria formal segundo uma mesma concepção básica de número e princípio metodológico. Conforme veremos mais ao longo da presente tese, essa separação ontológica persistiu e trouxe consequências de longo alcance. Em particular, veremos que autores anteriores

---

[17] "[...] Em um tal sistema, portanto, um produto nem sempre tem o seu valor alterado se um de seus fatores for mudado enquanto os demais permanecerem constantes, e a divisão será indefinida de algum modo" (Hankel, 1867, p. 108).

[18] Hankel se refere aos números complexos de mais de duas dimensões como *höheren complexen Zahlen.*

que se moveram em direção a uma formalização do conceito de número, como é o caso do alemão Martin Ohm, não conseguiram se desviar dessa separação de maneira tão desenvolvida como Hankel.

A separação ontológica entre "naturais e não naturais" será vista apenas na teoria das quantidades, no sentido de que as quantidades medidas por números naturais podem representar substâncias enquanto números negativos e fracionários representam certas "relações" entre essas quantidades. Nesse sentido, a noção de Gauß é absorvida, mas não para justificar números não naturais e sim as quantidades não naturais. Afinal, a teoria das quantidades refere-se tanto às quantidades em si como às relações entre elas.

No tratamento das quantidades que sucedem o tratamento dos números, a metodologia é evidentemente diferente. As operações com quantidades de um modo geral é condicionada pelas relações entre quantidades reais e não são portanto assumidas ou postuladas. Mas Hankel aponta a evidente conciliação entre as operações na teoria dos números tal como ela foi construída e as mesmas na teoria das quantidades. Aqui opera-se sempre referindo-se a uma unidade *e* que demarca que não estamos simplesmente operando com números. Dessa forma, somar quantidades *Ae* e *Be* equivale a *(A+B)e* e a operação confunde-se com a operação de soma entre números, *(A+B).*

É de suma importância apontarmos também que a teoria de quantidades serve para preencher uma lacuna que Hankel encontra em sua teoria formal dos números. No capítulo 12, Hankel apresenta os números irracionais como resultados de operações "superiores" como a radiciação: assumindo a solubilidade de $x^2 = 2$, podemos definir o número $x = \sqrt{2}$ como sendo esta solução, que não é um número racional. Ao estabelecer esses elementos, ele argumenta então que definir as operações fundamentais levaria a um processo labiríntico se tentássemos nos ater ao ponto de vista puramente formal anterior (Hankel, 1867, p. 46). Uma resposta definitiva para a questão da definição dos números irracionais somente é dada em uma nota final.

> Qualquer tentativa de lidar com números irracionais formalmente e sem o conceito de quantidade deve levar a pequenos truques altamente abstrusos e incômodos, que mesmo que pudessem ser executados com perfeito rigor, como temos apenas motivos para duvidar, não têm um valor de conhecimento científico superior (Hankel, 1867, p. 47)

Esta lacuna relevante no desenvolvimento formal do seu sistema numérico mostra a dificuldade em estabelecer os números irracionais em meio a um processo de *Zahlbereichserweiterung* sem que se recorra à concepção tradicional de quantidade. Hankel tenta introduzir esses números da mesma forma que os anteriores, isto é, algebricamente, por meio do que ele chama de "operações superiores", o que o leva a um processo exaustivo aparentemente incapaz de garantir cidadania a todos os números irracionais que se possa considerar. Essa postura representativa de Hankel nos servirá como uma das motivações do capítulo seguinte, onde mostraremos as novas abordagens do conceito de número no contexto do ensino de análise no século XIX e a busca por uma nova definição dos números irracionais.

2.5. A concepção de Kronecker

Nesta seção, falaremos sobre a concepção de número desenvolvida pelo também alemão Leopold Kronecker (1823 - 1891) e que se distingue marcadamente daquela apresentada por Hankel. A epistemologia defendida por Kronecker é famosamente resumida por meio da citação “Deus criou os números naturais; todo o resto é obra do homem ", ainda que ela não se encontre diretamente em uma obra do matemático em questão, estando apenas em uma transcrição de uma lição de Hilbert em Göttingen (Ewald, 1996, p. 944). De qualquer forma, buscaremos aqui apresentar de que maneira a concepção pode ser capturada pela frase e evidenciar que a nova epistemologia difundida por Hankel não se estabeleceu de maneira imediata e unânime.

2.5.1. Leopold Kronecker

Kronecker estudou filosofia e matemática na universidade de Berlim e lá ele obteve seu doutorado em 1845 com uma dissertação sobre teoria dos números supervisionada por Dirichlet (Ewald, 1996, p. 941). De família abastada, Kronecker passou muitos anos gerindo uma propriedade em Liegnitz até retornar a Berlim em 1855 para atuar como matemático. Kronecker foi eleito à Academia de Berlim no ano de 1861, uma posição que lhe garantiu o direito de lecionar na universidade da cidade. Juntamente com Weierstraß e Kummer, ele então protagonizou o cenário da matemática de Berlim (Ewald, 1996, p. 941-942). Suas lições eram associadas aos temas que ele mais pesquisava: teoria dos números, teoria de equações, teoria de determinantes e teoria de integrais (Biermann, 1970-1990, p.1-2).

Kronecker demonstra ter noções bastante próprias a respeito da ontologia dos objetos matemáticos bem como de sua metodologia de um modo geral. Poucas são as publicações em que encontramos uma apresentação de sua filosofia, mas duas fontes nos ajudam a apreender as principais ideias acerca do seu conceito de número: o artigo ”Sobre o conceito de número”, publicado no *Journal de Crelle* em 1887 e o seu último curso em Berlim no verão de 1891.

2.5.2. Matemática: uma ciência natural fundada em fenômenos

Kronecker era contrário à noção comum de que a estrutura da ciência matemática tem como base as definições de conceitos básicos. Influenciado pelo físico Kirchhoff, Kronecker acreditava que, assim como nas ciências naturais, na base da matemática encontramos *fenômenos*, isto é, conceitos e princípios *dados a nós* pela *experiência*. Nesse sentido, Kronecker era contrário à noção de Gauß ou mesmo de Hankel de que os números seriam construções da nossa mente regidos apenas pela sua consistência lógica. Os objetos matemáticos são independentes de nosso intelecto e não são portanto construções humanas, ainda que tampouco se encontrem dispersos no mundo externo como os objetos das ciências naturais (Boniface, 2005, p. 144-146)

Apesar da diferença apontada, a relação entre a matemática e as ciências naturais se encontra no fato de que ela deve ser tratada tal como uma ciência natural: é encarregada de simplesmente *descrever* os fenômenos de nossa experiência de maneira simples e completa

(Boniface, 2005, p. 145) Por experiência matemática, Kronecker entende a prática comum de realizar contagens e escrever expressões algébricas. Os objetos basilares da matemática e que são dados a nós seriam o “números naturais" juntamente com expressões algébricas e todo objeto matemático legítimo além destes seriam “construídos” a partir desses em um número finito de etapas. Podemos interpretar a frase que citamos no início da sessão como representante desse aspecto da noção de Kronecker: Os números naturais, e apenas eles, foram dados a nós (“por Deus”) enquanto todos os demais seriam construções feitas por nós (humanos) a partir destes. Mas precisamos também compreender o que Kronecker entende por “construção” aqui, uma vez que ele certamente não era favorável à epistemologia de Hankel e Dedekind e suas construções não diziam respeito a uma livre “criação de conceitos”. A liberdade do matemático, para Kronecker, reside na criação de “métodos de descoberta” de objetos matemáticos, e não na criação dos conceitos em si, o que novamente sugere a sua visão platonista dos objetos matemáticos (Boniface, 2005, p. 147)

2.5.3. O “construtivismo” de Kronecker e a aritmetização da análise

Kronecker desenvolve uma noção peculiar de definição e demonstração de existência matemática que nos ajuda a compreender sua metodologia. Para ele, toda definição deve vir acompanhada de um dispositivo capaz de nos fazer perceber se uma “instância particular” é capaz de satisfazer tal definição. Da mesma forma, a existência de um objeto matemático não se dá pela sua consistência lógica, mas deve ser demonstrada através de uma construção efetiva em um número finito de etapas. Uma prova por contradição, nesse sentido, não é uma prova matemática satisfatória, uma vez que ela não envolve a construção do objeto em um procedimento finito. O princípio lógico do terceiro excluído é insatisfatório para resolver uma questão existencial.

> O ponto de vista no qual eu discordo da maioria dos matemáticos reside na afirmação básica de que a matemática e as ciências naturais - que recentemente foram separadas por esse nome das ciências restantes, as assim chamadas ciências da mente - não apenas deve ser livre de contradição, mas deve também resultar da experiência e, o que é mais essencial, deve dispor um critério por meio do qual se possa decidir, para cada caso particular, se o conceito apresentado deve ser abarcado ou não pela definição. Uma definição que não consegue isso pode ser defendida por filósofos ou logicistas, mas para nós matemáticos, é uma definição nominal ruim. Ela é inútil (Kronecker apud. Boniface-Schappacher, 2002, p. 240).

Em linha com tais preferências, podemos citar a preferência de Kronecker por evitar a alusão a séries, sequências ou funções “arbitrárias”. Séries devem ser dadas pela sua construção explícita, isto é, pela caracterização das operações que levam à formação de cada termo. Além disso, em linha com sua condição de que construções possíveis devem ser realizadas em etapas finitas, Kronecker não lida com algo como uma série infinita “completa”. Uma série é infinita apenas em potencialidade e não consiste em conjunto infinito completo de operações.

> O conceito geral de uma série infinita em si, por exemplo, uma série de potências é em meu julgamento permissível apenas com a condição de que em cada caso particular a regra aritmética pela qual os termos são dados satisfaz, como acima, condições que possibilitem

> lidar com a série como se ela fosse finita e, portanto, tornar desnecessário, estritamente falando, ir além da noção de uma série finita (Edwards, 1989, p. 71).

As noções de definição e de existência defendidas por Kronecker sugerem uma preferência pelo "específico" em detrimento de conceitualizações generalizantes. As visões que Kronecker cultivava o teriam envolvido em polêmicas contra os métodos infinitos de Weierstraß e a teoria dos conjuntos associada a Georg Cantor. Kronecker combatia "as várias formulações de conceitos com a ajuda das quais as pessoas (a começar por Heine) recentemente estavam buscando compreender de uma maneira completamente geral e oferecer fundamentos para o conceito de irracional" (Edwards, 1989, p. 75) Em sua metodologia, encontramos um foco em fórmulas computacionais que contrastam com os métodos gerais e abstratos que explicariam, por exemplo, a *totalidade* dos irracionais, como é o caso dos cortes de Dedekind. Dedekind já havia criticado, em seu livro *Was Sind und Was Sollen die Zahlen*, as limitações que Kronecker teria imposto à "livre formação de conceitos na matemática" (Dedekind, 1888, p. 2). A passagem a seguir é reveladora por reforçar tanto os métodos aritméticos preferidos por Kronecker como as suas dúvidas com relação à formação de conceitos gerais que tomava a matemática.

> Desde há mais de 20 anos atrás você ainda ouvia minhas aulas e desde então, tendo relações quase ininterruptas comigo, muitas vezes escutou minhas noções, você sabe agora explicar melhor do que eu que - bem cedo e pela sugestão de Kummer, aprofundado em estudos filosóficos, reconheci posteriormente, assim como ele, a incerteza de todas aquelas especulações e me refugiei no porto seguro da matemática real. O que é mais natural do que eu mesmo tentei reconhecer nessa matemática os seus fenômenos ou as suas verdades como sendo tão independentes quanto possível de quaisquer desenvolvimentos conceituais filosóficos. Eu portanto segue traçando a origem de tudo da matemática pura na doutrina dos inteiros, e eu acredito que isso obterá sucesso consistentemente. No entanto, isto é apenas a minha crença. Mas onde ela obteve sucesso, eu vejo progresso verdadeiro, ainda que - ou porque - ela seja um passo de volta ao simples, mas ainda mais porque ela prova que os novos desenvolvimentos conceituais são ao menos desnecessários (Edwards, 1892, p. 138).

A passagem sinaliza que a sua retomada aos números naturais (chamados por ele de inteiros) se dá pela sua falta de convicção em doutrinas filosóficas mais complexas que podem introduzir ideias alheias à matemática. Kronecker não alega que elas sejam falsas, mas apenas suspeita que elas sejam desnecessárias, uma vez que a matemática poderia ser escrita na linguagem simples dos fenômenos matemáticos que se traduzem nos números naturais. Em linha com isso, podemos citar mais uma crítica presente na transcrição da lição de Hilbert em Göttingen. Segundo o autor, Kronecker defendia a visão limitante segundo a qual "na teoria dos números, todas as verdades são indubitáveis, as provas incontestáveis e imediatamente compreensíveis ao senso comum."

Ainda de acordo com a citação acima, podemos mencionar mais um princípio filosófico basilar para Kronecker: a independência dos princípios das disciplinas. Diferentemente de autores como Frege, que tentou fundar a aritmética na lógica, Kronecker defendia a independência dos fenômenos que caracterizam a experiência aritmética. Da mesma maneira, Kronecker defendia a

emancipação da matemática de noções de tempo e espaço, o que explica sua preferência pelo termo *Bereich* (domínio) em vez do termo *Körper* (corpo) utilizado por Dedekind, por este último evocar noções espaciais (Boniface, 2005, p. 150-151). A separação fundamental entre as disciplinas da aritmética e da geometria servirão ainda para Kronecker defender em seu curso de 1891 a tese de que os números irracionais constituem um conceito geométrico e que portanto deve ser removido da aritmética. De fato, no artigo de 1887, Kronecker já sugere acreditar que o conceito de número havia sido impropriamente estendido com o auxílio de noções alheias à aritmética. Na mesma passagem, Kronecker ainda demonstra sua pretensão em "aritmetizar a análise e a álgebra", baseando assim disciplinas que eram comumente separadas no conceito de número "em seu sentido mais estreito".

> A palavra 'aritmética' não deve ser aqui entendida no sentido comum restrito, mas incluindo todas as disciplinas matemáticas com a exceção da geometria e da mecânica - especialmente, portanto, a álgebra e a análise. E eu também creio que um dia conseguiremos "aritmetizar" todo o conteúdo de todas essas disciplinas matemáticas - isto é, fundamentá-las exclusivamente no conceito de número tomado em seu sentido mais estreito, e assim eliminar as modificações e extensões desse conceito que foram em sua maioria ocasionadas pela aplicação à geometria e à mecânica (Kronecker, 1887, p. 338-339).

A primazia da aritmética e seu conceito basilar de número é também evidenciada na mesma obra quando Kronecker cita Gauß ao afirmar que "a matemática é a rainha das ciências, e a aritmética é a rainha da matemática" (Kronecker, 1887, p. 338).

2.5.4. O Conceito de número de Kronecker

Em sua obra de 1887, encontramos a exposição mais completa dos fundamentos do conceito de número. Segundo ele, o conceito do número cardinal parte dos números *ordinais*:

> Os números ordinais são o ponto de partida natural para o desenvolvimento do conceito de número. Neles nós possuímos um estoque de sinais, ordenados e uma sucessão fixa, os quais podemos unir a uma coleção de objetos distintos que somos capazes de distinguir. Nós combinamos a totalidade dos sinais assim aplicados ao conceito do número [Anzahl] de objetos dos quais a coleção é composta; e associamos a expressão para esse conceito sem ambiguidade ao último dos sinais aplicados, já que sua sucessão é rigidamente determinada (Kronecker, 1997, p. 339).

Conforme ele explica em seguida, considerando a coleção de objetos, representados pelas letras (a, b, c, d, e), o símbolo 'primeiro' é associado à letra *a*, segundo à letra *b* e assim por diante. Já o número das letras pode ser designado pelo número 'cinco', derivado do último símbolo da coleção.

> Portanto a condição necessária e suficiente para a equivalência de dois sistemas é a igualdade do número de seus elementos, e o número dos elementos de um sistema (a, b, c,

> d,...) é, de acordo com isso, caracterizado como o único invariante de todos os sistemas equivalentes entre si (Kronecker, 1887, p. 342).

O autor começa com uma coleção de objetos (coisas) quaisquer representados por símbolos arbitrários e tenta a partir daí extrair o conceito de número.

A característica especial do conceito de número, no entanto, é associado precisamente à sua independência da ordem como os objetos são "contados". Se mantivermos a ordem dos objetos mas alterarmos a ordem dos números ordinais que associamos a cada objeto, ainda assim, a contagem terminará no mesmo número, o que significa que a "totalidade" de objetos permanece a mesma. Essa totalidade inalterada é o que Kronecker chama de *Anzahl* (número) de objetos, que consiste na cardinalidade do sistema, ainda que Kronecker não faça menção a esse termo. Kronecker se utiliza aqui das noções de Gauß de equivalência e invariante.

Para explicar melhor a propriedade da invariância da cardinalidade dos sistemas, Kronecker considera primeiramente sistemas onde a ordenação dos elementos implica sistemas diferentes. É esse o caso de sistemas que representam pontos no espaço, uma vez que, sendo *a, b,* e *c* números distintos, (*c, a, b*) e (*a, b, c*) designam pontos distintos. Em seguida, ele considera o conceito de sistemas equivalentes, isto é, sistemas onde a ordem dos objetos não importa e que podem ser "transformados" uns nos outros. Nesses casos, e apenas nesses casos, o *Anzahl* de seus elementos é invariante.

> Mas agora vamos chamar quaisquer dois sistemas (*a, b, c, d,...*) e (*a', b', c', d',...*) de equivalentes quando é possível transformar um no outro substituindo em sequência todo elemento do primeiro sistema por qualquer elemento do segundo. Então a condição necessária e suficiente para a equivalência de dois sistemas é a igualdade do número [Anzahl] dos seus elementos, e o número dos elementos de um sistema (*a, b, c, d, ...*) é assim caracterizado como o único invariante de todos os sistemas equivalentes entre si (Kronecker, 1887, p. 341-342).

Em seguida, Kronecker define as operações de soma e multiplicação com números, deixando de lado as operações "sintéticas" de subtração e divisão. Na seção seguinte Kronecker considera o outro objeto fundamental da sua aritmética, as expressões algébricas. Segundo ele, é essa introdução que nos permite desconsiderar conceitos como os irracionais e os números negativos, os quais seriam "alheios à aritmética":

> Mas com a introdução em princípio de 'indeterminados', a qual é devido a Gauß, a teoria especial dos números inteiros se expandiu e se tornou a teoria aritmética geral das totais funções de indeterminações com números inteiros. Essa teoria geral nos permite descartar todos os conceitos que, propriamente falando, são alheios à aritmética - por exemplo, os números algébricos irracionais. Até mesmo o conceito de números negativos pode ser evitado se substituirmos o fator -1 nas fórmulas por um *x* indeterminado e se substituirmos o sinal de igualdade pelo símbolo Gaußiano de congruência *modulo* (*x+1*) (Kronecker, 1887, p. 345).

Segundo esse método, por exemplo, a equação *7-9 = 3 - 5*, a qual implica a consideração do número negativo *-2*, pode ser substituída pela congruência:

$$7 + 9x \equiv 3 + 5x \ (mod. x + 1)$$

a qual é válida para *todo valor natural* que possa ser atribuído a *x*. Desta maneira, a equação ganha em conteúdo através da transformação e ainda permanecemos no domínio dos números naturais. Em seguida, Kronecker diz que a congruência produz a equação a partir do momento em que *x* deixa de ser uma incógnita e se torna "quantidade' determinada pela equação $x+1 = 0$. Concordando com o livro de Hermann Schubert, Kronecker diz que isso implica a necessidade de uma explicação mais exata para a equação (Kronecker, 1887, p. 345) Aqui, portanto, ele não deixa claro se é totalmente contrário à consideração de números negativos, mas certamente reconhece que eles precisam ser melhor definidos, uma vez que os símbolos perdem o seu sentido aritmético. Ainda assim, conforme vimos na passagem anterior, Kronecker acredita na possibilidade de evitar as quantidades negativas completamente e permanecer fiel aos conceitos aritméticos básicos. Com uma abordagem similar, Kronecker considera também que a noção de números fracionários deva ser "evitada", e deve ser substituída por agrupamentos mais complicados de congruências (Kronecker, 1887, p. 44-45) No final do artigo, Kronecker introduz ainda uma substituição para o conceito de número irracional. O artigo de 1887 não oferece construções simples de irracionais, mas na transcrição da lição de Hilbert, menciona-se um caso particular onde uma congruência substitui o número irracional $\sqrt{2}$:

> Com base na sua maneira de enxergar as coisas, Kronecker proíbe o mais simples dos números irracionais, $\sqrt{2}$; ele introduz o conceito do módulo $x^2 - 2$ em vez desse conceito 'inadmissível' (Ewald, 1996, p. 944).

Como citamos, na obra de 1891, os números irracionais não são tratados separadamente e são explicitamente considerados um conceito geométrico e devem, portanto, permanecer nesta disciplina.

2.5.5. Observações finais

A famosa citação atribuída a Kronecker poderia erroneamente nos levar a associar sua participação nos processos da axiomatização da aritmética, isto é, em uma tentativa de fundar sistematicamente a matemática em alguns princípios relativos aos números naturais. No entanto, é visível que sua visão fenomenológica da matemática não é favorável a uma estruturação da disciplina nesses moldes. Além disso, é importante apontar que a sua concepção fundacionista de número e da matemática como um todo encontra-se isolada das noções abstratas que se difundiam na Alemanha.

3. A Introdução do conceito de número nos cursos de análise no século XIX.

3.1. O contexto do ensino de análise na Alemanha e na França: as mudanças na *École Polytechnique*

Para falarmos sobre a maneira como o conceito de número adentrou os fundamentos da análise no século XIX, iniciaremos com uma breve contextualização das comunidades francesa e alemã acerca do ensino da análise.

De acordo com o que foi apresentado na seção 2.3.2., as concepções que vimos prevalecerem na França no fim do século XVIII e que são atestadas pela mudança na filosofia dos Ideólogos pode ser melhor compreendida ao apontarmos uma virada mais geral na França a partir da Revolução e que se tornou ainda mais forte com o fim do Diretório e a tomada do poder por Napoleão: uma apreciação maior por conceitos empiristas e menos abstratos como aqueles que podem ser concebidos através do método analítico. Com o tempo, o ensino superior militarizado na França foi dominado pelas escolas especiais aplicadas e a engenharia assumiu um papel preponderante com as escolas secundárias. Este contexto favorável às aplicações acabou influenciando o estudo da matemática, que permaneceu sob uma orientação físico-matemática que predominava desde a *Encyclopédie* (Schubring, 2005, p. 482).

Um grande sinal dessa transformação pôde ser visto na famosa *École Polytechnique*, fundada em 1794, e a qual representava um marco no programa de algebrização e do método analítico. Com a sua militarização em 1804 e após uma ordem superior do *Conseil de Perfectionnement* em 1811, a escola viu um retorno do método sintético e da geometria a fim de priorizar a intuição. Somente aqueles assuntos que apresentassem aplicações diretas deveriam ser mantidos, e as soluções analíticas deram lugar às soluções sintéticas ou aproximativas que, apesar de serem reconhecidas como menos rigorosas e elegantes pelo conselho, eram mais simples e breves. Especificamente no âmbito da análise, a reforma incluiu o banimento do chamado "método dos limites" a favor do uso das quantidades infinitamente pequenas (Roque, 2016, p. vi-vii).

As ordens vindas do Conselho, no entanto, encontraram certa resistência entre o corpo docente que lecionava na escola. Apesar de os superiores terem pedido a publicação de livros que refletissem o novo programa de análise, nenhum instrutor publicou um livro cuja abordagem se baseasse no método dos infinitamente pequenos. De fato, matemáticos de fora da escola levaram a resolução muito mais a sério, na expectativa de poderem aumentar sua influência na instituição. Internamente, a reação do *Conseil d'Instruction* se deu através de uma livre interpretação da ordem, e o método dos infinitamente pequenos não se tornaram exclusivos, mas foram apresentados paralelamente a outros na condição de serem mostrados compatíveis com o método favorecido (Schubring, 2005, p. 399-401) Foi nesse contexto que Cauchy, então professor na Escola Politécnica, publicou o seu livro-texto em 1821, Curso de análise algébrica, que serviria como um manual para suas aulas (Roque, 2016, p. vii), contemplando conceitos básicos da análise

algébrica para uma introdução ao cálculo infinitesimal propriamente. O conceito de número assume relativa importância ao ser apresentado sistematicamente no início da obra, algo que não era comum até então entre livros de análise, o que tornam o livro como um importante ponto de partida em nossa análise no presente capítulo.

Conforme já apontamos anteriormente, enquanto na França dominou a epistemologia físico matemática, na Alemanha, especificamente no norte protestante, uma série de eventos favoreceu a concepção da matemática pura e as instituições centrais na produção de conhecimento matemático foram as universidades e não as escolas politécnicas. Desde 1810, reformas nas universidades prussianas caracterizavam-se pela valorização da pesquisa, principalmente nas faculdades de filosofia. Nesse contexto o professor exercia tanto o papel de ensinar como de realizar pesquisas e tal orientação acabou alcançando também a matemática. Além disso, os programas de treinamento para professores do *Gymnasium*, recém reformado na Prússia, permitiu a profissionalização científica deles. Tendo sido o primeiro estado a lograr tal profissionalização, a Prússia acabou criando uma base para o estabelecimento da matemática como uma disciplina científica nas suas universidades. Em linha com a visão neo-humanista dominante nessas instituições superiores, a matemática acabou se estabelecendo como uma disciplina "pura".

3.2. Novas noções de rigor e a necessidade de uma reformulação do conceito de número irracional para os fundamentos da análise

Desde o início do século em questão, em particular devido à introdução de sistemas públicos de ensino e da institucionalização de um ensino superior em vários países, uma crescente quantidade de matemáticos apontou o obstáculo da falta de um conceito de número adaptado para as disciplinas de análise. Dedekind oferece uma fala exemplar nesse sentido em seu pequeno livro de 1872, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* (Continuidade e Números irracionais). Nessa obra, ele apresentou os seus cortes de Dedekind a fim de resolver o problema que ele enxergava nos tratamentos anteriores dos números irracionais e admite que sua motivação veio a partir de suas lições na Escola Politécnica de Zurique:

> Minha atenção foi pela primeira vez direcionada às considerações que formam o assunto deste pequeno livro no outono de 1858. Como professo na Escola Politécnica em Zurique, encontrei-me pela primeira vez compelido a lecionar sobre os elementos do cálculo diferencial e me senti mais agudamente do que nunca a falta de um fundamento realmente científico para a aritmética (Dedekind, 1872, p. 9).

O conceito de número real, em particular, já era utilizado há muito tempo, porém, sem que houvesse uma reflexão sobre o conceito: a sua introdução vinha a partir de noções intuitivas e geométricas de quantidade contínua, dada por um segmento de reta, e a "completude" do conjunto numérico era assumida de maneira implícita. Para além disso, demais conceitos prevalentes na disciplina também eram afetados por uma conceitualização geométrica, além dos métodos de demonstração utilizados na disciplina: funções, por exemplo, eram fortemente associadas a uma equação e a curva que era descrita por ela e não a uma associação de objetos. Uma tal associação

não somente limitava o escopo das funções a serem estudadas na disciplina como não motivava uma separação conceitual entre continuidade e diferenciabilidade.

No século XIX, especialmente na França após a Revolução Francesa em 1789, uma nova epistemologia da disciplina começou a se difundir, favorecendo a descrição analítica dos conceitos matemáticos em detrimento de conceitualizações baseadas em aplicações, como seria o caso da geometria e de fenômenos físicos. Como veremos nas seções seguintes, a transição epistemológica não foi uniforme e tampouco se deu de maneira imediata e sem reviravoltas, mas destacamos aqui a proposta trazida pelo matemático Bernhard Bolzano no início do século XIX. Nascido em Praga, Bolzano publicou em 1817, "Demonstração Puramente Analítica"[19] onde objetivava oferecer uma demonstração puramente analítica do teorema do valor intermediário. Em seu prefácio, Bolzano oferece uma crítica mais geral aos métodos utilizados por matemáticos anteriores a ele, que permitiam que noções geométricas e noções de movimento invadissem a teoria pura da análise. Conforme ele já havia elaborado em publicações anteriores onde ele relata os métodos da matemática, a aritmética tinha primazia lógica sobre a geometria, e a matemática pura, que englobava tanto a aritmética como a álgebra e a análise, não deveria ter seus métodos confundidos com aqueles das aplicações. Demonstrações baseadas em aplicação ofereciam, afinal, apenas uma confirmação intuitiva, e não uma demonstração rigorosa, que só poderia ser oferecida de maneira lógica por meio dos fundamentos da matemática pura.

> O tipo mais comum de demonstração depende de uma verdade emprestada da geometria, a saber, que toda curva contínua de curvatura simples da qual as ordenadas são primeiramente positivas e então negativas (ou o inverso) deve necessariamente intersectar o eixo *x* em algum ponto que se encontra entre essas ordenadas. Certamente não há objeção contra a veracidade nem contra a obviedade dessa proposição geométrica. Mas é igualmente claro que ela é uma ofensa intolerável contra o método correto para a obtenção de verdades da matemática pura (isto é, aritmética, álgebra, análise) de considerações que pertencem a uma parte meramente aplicada (ou especial), a saber, a geometria (Bolzano, 1817, p.6).

A concepção analítica radical de Bolzano o motivou a descrever a concepção de continuidade em um intervalo de maneira analítica nesta publicação e, posteriormente, Bolzano também formularia a definição de continuidade pontual e a noção de diferenciabilidade. Com a separação conceitual dada de maneira analítica, Bolzano também foi talvez o primeiro a explicitar uma função contínua que não é diferenciável em nenhum ponto (Bolzano, 1817). A demonstração analítica do Teorema do Valor Intermediário proposta por Bolzano oferece uma outra grande novidade: ela se baseia no lema que pode ser entendido como a propriedade do supremo de quantidades reais e Bolzano destaca em seu prefácio que essa propriedade é o que caracteriza uma

[19] O título original completo do escrito é *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* (Demonstração analítica do teorema que diz que entre quaisquer dois valores que dão resultados de valores opostos, existe ao menos uma raiz real da igualdade) e contém uma descrição direta do que atualmente conhecemos como o Teorema do Valor Intermediário.

quantidade real[20]. Alguns anos depois, na França, Cauchy publicou o seu influente *Cours d'Analse* onde encontramos também grandes contribuições no sentido de fornecer formulações algébrico-analíticas de conceitos básicos da disciplina, no entanto, como veremos mais a fundo, ele ainda tem a noção de quantidade geométrica contínua como sendo fundamental e uma concepção de número real não é profundamente elaborada na obra. Isso se manifesta, por exemplo, nas suas duas demonstrações do Teorema do Valor intermediário. Devemos destacar, no entanto, que Bolzano tampouco elaborou uma teoria dos números reais em seu texto de 1817 antes de enunciar o lema previamente mencionado e, posteriormente, ele admitiu que sua demonstração estava incompleta (Ewald, 1999, p. 226)

Uma outra maneira comum de se referir aos números irracionais se dava a partir do fato de que eles constituem "limites de números racionais", como vemos na própria obra de Cauchy. Conforme Cantor opina em 1883 em seu famoso artigo, "Fundamentos de uma teoria geral de variedades: Uma investigação matemático-filosófica da teoria do infinito", essa concepção incorreria em um "erro lógico": o limite, quando irracional não existiria sem que os números irracionais tenham sido previamente definidos e este erro acabou não sendo percebido por que não comprometia as propriedades comumente associadas aos números irracionais. A utilização prática dos números irracionais era portanto inabalada pela definição em termos de limites.

De acordo com a historiografia, é comum separar as concepções de números reais entre aquelas que vieram antes e depois das formulações de Dedekind, Weierstraß, Cantor, Charles Méray e Heine, as quais surgiram a partir da década de 1860. Essa tese é exemplificada, por exemplo, pela fala do historiador da ciência, Jeremy Gray, que chama a análise pós-Weierstraß de "análise moderna":

> É, portanto, surpreendente e típico da mudança modernista que assim que duas teorias de números reais foram propostas que removiam as dúvidas sobre os fundamentos do cálculo (a de Dedekind e aquela de Méray, Cantor e Heine), diferenças de opinião começaram a surgir a respeito dos inteiros (Gray, 2008, p. 135)

A qualidade unificadora entre essas concepções seria, entre outras coisas, não somente a superação do erro lógico apresentado acima, mas também a emancipação dos fundamentos da análise da geometria e da intuição em linha com a concepção de Kronecker de que ocorria a "aritmetização da análise" na época. Representativamente, Boyer descreve essas diferentes concepções em uma seção que recebe o nome da expressão cunhada por Kronecker (Boyer, 1991, p. 560).

Visando a melhor compreender as diferenças qualitativas presentes nesses autores que são tidos como divisores de águas na historiografia, apresentaremos neste capítulo uma análise de diferentes concepções de número antes e depois das novas abordagens dos números irracionais. Para tanto, não nos atemos apenas aos nomes famosos, mas decidimos analisar também matemáticos pouco reconhecidos pela historiografia que tentaram de alguma forma fundamentar a análise no conceito de número na primeira metade do século XIX.

[20] Apontamos ainda que Mainzer (1991, p. 34) afirma erroneamente que a demonstração de Bolzano teria tido como premissa o que é atualmente conhecido como o "critério de Cauchy", além de afirmar que Bolzano já conhecia o critério antes dele ter sido divulgado por Cauchy.

Aproveitamos a citação supracitada de Jeremy Gray para apontarmos uma das principais teses deste capítulo: a historiografia costuma se referir a novas concepções de "números reais" ao se referirem às novas abordagens. Aqui, defenderemos que, em sua maioria, a proposta desses autores era de esclarecer o conceito de número irracional especificamente e não de desenvolver um conceito geral de número real como base do novo rigor na análise. Além disso, muitas vezes alega-se que as novas abordagens dos números reais seriam equivalentes, de modo que uma poderia ser traduzida pela outra. Nesse sentido, buscaremos mostrar não somente o que unifica tais concepções como as diferenças sutis que podem ser identificadas nessas variadas concepções a partir do momento que desistimos de traduzi-las em termos de conceitos modernos.

Conforme apontamos anteriormente, a nossa análise se iniciará a partir da obra de Cauchy de 1821, na qual encontramos uma primeira fundamentação da ançalise em um conceito de número desenvolvido. Ao longo do capítulo, achamos frutífero trazer de maneira destacada as diferentes formulações e demonstrações do teorema confrontado por Bolzano, isto é, o Teorema do Valor Intermediário. Faremos isso uma vez que, em nossa visão, isso se torna didático para observarmos a aplicação do conceito de número na análise bem como, de maneira mais ampla, a transição epistemológica que ocorreu na disciplina ao longo do período considerado. Pode-se dizer que o teorema possui um forte valor intuitivo e, também por conta disso, ele nos ajuda a evidenciar a persistente relação entre número real e a noção geométrica de grandeza.

Além dos aspectos mencionados acima, analisar as diferentes abordagens do teorema do valor intermediário nos convence de que as transformações que ocorreram na disciplina não se deram de maneira linear, direta e nem com total consciência dos agentes que lidavam com a disciplina. Em 1875, o matemático francês Darboux, adepto às novas abordagens trazidas por Weierstraß, publica *Mémoire sur les fonctions discontinues* (Memória sobre as funções idiscontínuas) nos *Annales de l'École Normale*, um artigo no qual, entre outras coisas, ele apresenta uma nova definição para a integral baseando-se no conceito de supremo. Nesse mesmo artigo, Darboux, abre mão de oferecer uma demonstração do Teorema do Valor Intermediário, uma vez que Cauchy já o teria demonstrado de maneira satisfatória:

> Este teorema foi estabelecido de maneira rigorosa por Cauchy na Nota III de l'Anályse Algebrique"[21] (Darboux, 1875, p. 62)

Como veremos em mais detalhes, a demonstração de Cauchy não concorda completamente com os padrões que marcam a abordagem Weierstrassiana e apontamos ainda que este comentário surge logo após Darboux oferecer uma demonstração do Teorema do Valor Extremo que segue a abordagem de Weierstraß. Isto demonstra como ele não estava ainda totalmente consciente da contribuição de Bolzano e, caso tenha tido contato com uma demonstração Weierstrassiana do teorema, Darboux não demonstra reconhecer a diferença que ela possui em relação à demonstração oferecida por Cauchy.

[21] *Ce théorème a été établi d'une manière rigoureuse par Cauchy dans la Note III de l'Analyse algébrique.*

3.3. A abordagem dos números por Cauchy

3.3.1. Estado da arte sobre o conceito de número de Cauchy e os fundamentos da análise: aritmetização da análise, a teoria dos limites e a fundamentação em quantidades reais

Antes de analisarmos o conceito de número na obra de Cauchy, iremos trazer algumas das considerações feitas pela historiografia sobre sua análise.

Muito já foi dito a respeito da "nova análise" que teria sido trazida pelas abordagens parecidas de Bolzano e de Cauchy (Grattan-Guiness, p. 373) O próprio Cauchy não escondeu sua discordância com as abordagens algébricas que haviam dominado a análise na França nas décadas anteriores:

> Quanto aos métodos, eu busquei dar a eles todo o rigor que se demanda na geometria, de modo a nunca reverter a raciocínios extraídos da generalidade da álgebra. Raciocínio desse tipo, ainda que comumente admitido, particularmente na passagem de séries convergentes para séries divergentes e de quantidades reais para expressões imaginárias, podem, a meu ver, serem consideradas apenas ocasionalmente como induções cabíveis para a apresentação da verdade, uma vez que elas concordam tão pouco com a precisão tão estimada nas ciências matemática. Devemos ao mesmo tempo observar que eles tendem a atribuir uma extensão indefinida a fórmulas algébricas, enquanto na realidade uma parte maior dessas fórmulas somente existem sob certas condições e para certos valores das quantidades que elas contêm [...] (Cauchy, 2016, p. *ii-iv*)

Conforme aponta o historiador da matemática Umberto Bottazzini, a crítica de Cauchy contra a "generalidade da algébrica" é especialmente direcionada à análise segundo Lagrange, que tinha as séries de potências como elemento essencial de sua teoria. Segundo ele, toda função da análise poderia ser expandida em séries de potência e as séries podiam ser consideradas de maneira puramente algébrica, isto é, sem considerar o valor numérico que elas poderiam assumir. Com isso, permitia-se a consideração de séries divergentes.

Cauchy era expressamente contrário a essa fundamentação e, conforme sugere Bottazzini, a proposta de Cauchy é estabelecer um novo tipo de rigor analítico baseado na "teoria de limite", que permite-lhe definir os conceitos de continuidade derivada, integral, convergência de séries e e a sua soma (Bottazzini, 1989, p. 103) Grattan-Guinness, por sua vez, caracteriza a "nova análise" promovida por Cauchy e Bolzano consiste na reescrita dos conceitos da análise em termos de aproximações de limites, "onde o valor de limite é definido pela propriedade de que os valores em uma sequência distam do limite por uma quantidade arbitrariamente pequena quando o parâmetro correspondente dista de seu próprio valor de limite" (Grattan-Guinness, 1970, p. 378)

As descrições referentes à nova análise de Cauchy sugerem um fato importante: ainda que ele tenha criticado a "generalidade da álgebra", sua abordagem em si possui um aspecto algebrizante, dos conceitos da análise tendo como base a representação algébrica da passagens de limite. Felix Klein chegou a atribuir a Cauchy o início da aritmetização da análise:

> [...] em todos os aspectos críticos, [o Curso de Cauchy] oferece uma fundamentação aritmética, livre de objeções; a partir dessa obra fundamental a assim chamada aritmetização de toda matemática começa (Bottazini, 2001, p. 34,35)

Tanto Bottazzini como Grattan-Guinness criticaram no entanto a associação de Cauchy à visão de que ele teria sido fundamental para o retorno do rigor na disciplina e dado fim à análise do século anterior por meio da aritmetização, como sugere também Bourbaki (Bottazzini, 2001, p.35) Conforme aponta Bottazzini, a própria noção de rigor é histórica e a obra de Cauchy não carrega as mesmas noções promovidas por Weierstraß décadas depois, por exemplo.

Apesar das críticas, os autores supracitados falam pouco a respeito do conceito de número que é amplamente discutido pelo autor tanto nos Preliminares como na Nota I que se encontra no final da obra, nem como sua concepção se relaciona de maneira mais ampla à sua nova proposta para a disciplina.

Nesse sentido, o historiador da matemática Michael J. Barany oferece uma abordagem diferente ao argumentar que a proposta de Cauchy de reformular os fundamentos da análise se dá a partir de sua fundamentação no conceito geométrico de grandeza. Segundo ele, quando Cauchy elogia os fundamentos da geometria e critica a generalidade algébrica, ele não pretendia apenas fazer com que a análise alcançasse o mesmo nível de rigor da geometria. A proposta era trazer a geometria à análise, no sentido de que as expressões algébricas deveriam ser condicionadas pelos seus referenciais "reais", isto é, as quantidades. É por conta disso que Cauchy rejeita séries divergentes, uma vez que isso significaria permitir a noção absurda de quantidades infinitas. Todas as séries seriam portanto condicionadas pelo fato de representarem quantidades reais. Por conta dessa epistemologia, Barany caracteriza sua concepção de análise como um "paradigma em transição": por um lado ele traz novas e importantes ferramentas algébricas à disciplina, por outro, ele as condiciona à geometria clássica.

Como também aponta Barany, a aritmética das quantidades e dos números presente tanto nos preliminares como na Nota I atestam o fato de que Cauchy tem como base o mesmo tipo de grandeza unidimensional na base da geometria euclidiana e preocupa-se em separar cuidadosamente os números positivos dos negativos a fim de garantir que o puro formalismo algébrico não se infiltrasse (Barany, 2010, p. 379) Ainda em linha com isso, a ontologia dos conceitos de Cauchy é evidenciada pelo fato dele caracterizar os números complexos como "expressões", destacando lhes falta o referencial real que os números e quantidades encontram nas quantidades.

O exemplo mais ilustrativo trazido por Barany para mostrar a metodologia sugerida por Cauchy se encontra nas suas demonstrações do Teorema do Valor Intermediário. De fato, Cauchy oferece duas demonstrações diferentes, uma se encontrando no corpo principal do texto, após a apresentação do conceito de continuidade, enquanto a segunda se encontra na Nota III. A primeira, que foi desconsiderada por Grattan-Guinness por se resumir a um "argumento geométrico ingênuo", é reveladora para Barany, pois mostra que Cauchy pressupõe que função seja dada geometricamente por uma curva no plano cartesiano e, além disso, outras referências espaciais são feitas. Logo após oferecer essa demonstração, Cauchy diz que ele é demonstrado de maneira puramente analítica em sua Nota III mas, como aponta Barany, em nenhum momento Cauchy sugere que sua primeira demonstração seja inferior por não ser demonstrada analiticamente.

Entraremos em mais detalhes quanto a essas demonstrações em nossa análise, mas Barany aponta que mesmo a segunda demonstração puramente analítica contém argumentos considerados geométricos. Segundo ele, no entanto, isso não configura necessariamente uma fuga do rigor analítico para Cauchy: "onde ele não via qualquer perigo dos símbolos perderem seus referenciais geométricos como em suas demonstrações do teorema do valor intermediário, ele podia de fato ser permissivo com seu uso" (Barany, 2013, p. 1338) Bottazzini, por sua vez, refere-se á primeira demonstração como sendo baseada em intuição geométrica, enquanto a segunda, assim como a de Bolzano, é completamente rigorosa "se assumirmos os números reais" (Bottazzini, 1991, p. 108)

Apesar das considerações de Barany sobre a concepção de Cauchy, julgamos ainda necessário analisar mais a fundo a maneira como ele introduz os conceitos de número e de quantidade, bem como a maneira como seus desdobramentos em sua análise.

3.3.2. O Curso de Análise de Cauchy: números, quantidades e expressões

Cauchy começa seu livro com uma importante seção intitulada "*Preliminare*" na qual ele elucida alguns conceitos. Como é nessa seção que Cauchy fala mais extensamente sobre o seu conceito de número, faremos agora uma análise da seção. Sua apresentação começa por uma separação entre dois conceitos básicos: número e quantidade:

> Adotaremos sempre a denominação de *números* no sentido que se emprega na aritmética, fazendo nascer os números da medida absoluta das grandezas; e aplicamos unicamente a denominação de *quantidades* às quantidades *reais positivas* ou *negativas*, quer dizer aos números precedidos dos sinais + ou - (Cauchy, 2016, p. 1)

O número surge portanto como uma indicação da medida de uma grandeza. Cauchy não chega a definir explicitamente o conceito de grandeza, mas algumas passagens posteriores mostram que Cauchy apresenta uma grandeza implicitamente como algo que possa de alguma maneira ser medida, como o tempo, comprimentos geométricos, etc.

O conceito de quantidade exercerá um papel essencial para a introdução de entes negativos. Na passagem anterior, elas foram identificadas apenas por suas representações simbólicas, mas Cauchy explica em seguida o que elas representariam.

> Além disso, consideramos as quantidades como destinadas a exprimir acréscimos ou diminuições - de maneira que uma grandeza dada será simplesmente representada um número, se nos contentarmos em compará-la a uma outra grandeza de mesma espécie tomada como unidade, e por este número precedido do sinal + ou do sinal -, se a consideramos como devendo servir ao acréscimo ou à diminuição de uma grandeza fixa da mesma espécie (Cauchy, 2016, p. 1)

Aqui, vemos que a concepção de quantidade é operacional, sendo a quantidade positiva um acréscimo e a quantidade negativa uma diminuição de uma grandeza dada. Segundo essa diferenciação, logo percebemos uma separação ontológica entre números e quantidades que é primordial: os números estão conectados a uma propriedade das substâncias, a sua "medida", que nunca pode ser menor do que "nada", isto é, negativa, nem sequer igual a nada ou nula. Apesar de uma quantidade ser representada por uma composição de um número com um sinal + ou -, ela não

representa uma medição apenas, mas denota que medida deverá ser retirada de uma outra ou somada a ela. Não há medidas negativas de coisas reais, apenas diminuições de uma certa medida a partir de outra. Apesar desse significado operacional, Cauchy trabalhará normalmente com quantidades consideradas em si, o que permitirá a consideração de ente negativos isolados.

A descrição feita por Cauchy das quantidades como aumentos ou diminuições efetuadas sobre uma grandeza remete ainda à concepção comum de quantidade como "tudo aquilo que pode ser aumentado ou diminuído", ainda que Cauchy não tenha explicitado essa definição, que se encontra no verbete *quantité* do volume XIII da *Encyclopédie*, que foi publicado em 1751.

> [...] Ao adotarem essas noções, os matemáticos modernos perceberam ainda que os números e as quantidades possuiam uma propriedade comum, a saber, sofrem aumento ou diminuição, assim, definiram quantidade geralmente como aquilo pode ser aumentado ou diminuído. [...][22] (d'Alembert & Diderot, 1751, p. 653).

Por conta dessa concepção, naturalmente, não pode haver quantidades nulas nem infinitas, uma vez que aquelas não podem ser diminuídas e estas não podem ser aumentadas. E a relação basilar de quantidade com o conceito de número leva ainda a uma outra consequência direta: o zero não pode ser considerado um número. Posteriormente, Cauchy oferece um exemplo de quantidade, o comprimento geométrico, e a sua descrição mostra como segmentos em direções opostas no plano podem ser entendidos sob a concepção de Cauchy de quantidade: segmentos "negativos" são permitidos a partir do momento em que eles representam diminuições ou "segmentos a serem subtraídos de um outro", e não segmentos com "medidas negativas".

> Um comprimento, medido sobre uma linha reta ou curva, pode ser, como toda espécie de grandeza, representado seja por um número, seja por uma quantidade, a saber: por um número, quando se considera somente a medida desse comprimento e por uma quantidade, ou seja, por um número precedido do sinal + ou -, quando se considera o comprimento em questão a partir de um ponto fixo, em uma linha dada, em um sentido ou em outro, para servir seja ao aumento, seja à diminuição de um outro comprimento constante terminando neste ponto fixo (Cauchy, 2016, p. 3).

Após sua definição de quantidade, Cauchy reproduz a concepção de oposição de quantidades de Fontenelle e faz uma ligação entre, por um lado, os números e os dois sinais + - e, por outro lado, os substantivos e adjetivos na língua, no mesmo estilo apresentado por Buée (ver seção 1.3.1.):

> Dito isso, o sinal + ou - colocado na frente de um número modificará o seu significado, quase como um adjetivo modifica o do substantivo (Cauchy, 2016, p. 1).

Segundo ela, as quantidades são iguais se possuem o mesmo sinal e o mesmo *valor numérico* e são ditas opostas se os seus valores numéricos forem iguais e seus sinais forem *contrários*. Essa separação entre dois elementos da quantidade reafirma ainda a sua concepção de

[22] Les Mathematiques modernes, en adoptant ces notions, ont remarqué de plus-que les nombres et les grandeurs avoient une propriété commune, savoir de souffrir augmentation ou diminution, ainsi ils ont défini en général la quantité ce qui peut être augmenté ou diminué.

que há apenas números absolutos: quantidades positivas e negativas são dotadas de um *valor numérico* que é sempre absoluto, isto é, trata-se de um número "maior do que nada" mesmo no caso das quantidades negativas e, por outro lado, possuem ainda uma qualidade representada separadamente pelo seu sinal. Cauchy afirma que esses princípios seriam suficientes para determinar a natureza das operações a serem realizadas com quantidades. O exemplo de explicação que ele oferece é ilustrativo:

> Por exemplo, duas quantidades estando dadas poderemos sempre encontrar uma terceira que, tomada por acréscimo de um número fixo, se ela é positiva, e por diminuição, em caso contrário, conduz ao mesmo resultado que as duas quantidades dadas, empregadas uma após a outra do mesmo modo. Essa terceira quantidade, que por ela mesma produz o mesmo efeito que as outras duas, é o que nós chamamos de sua soma. Assim as duas quantidades -10 e +7 têm por soma -3, dado que uma diminuição de 10 unidades seguida de um aumento de 7 unidades equivale a uma diminuição de 3 unidades (Cauchy, 2016, p. 2).

Nesse exemplo, vemos que Cauchy parece ressignificar igualdades de modo que elas representem igualdades entre quantidades (ou operações), potencialmente legitimando o surgimento de entes negativos sem que eles necessitem serem precedidos por um número maior do que ele. Igualdade não representa uma igualdade entre medidas, mas indica dois conjuntos de operações que, quando realizados sobre um *número* fixo, trazem o mesmo resultado numérico. Números negativos isolados em equações não significam o reconhecimento de números negativos entendidos como medidas. Estes surgem isolados em uma equação para indicar apenas que eles, como operações sobre números, equivalem a uma outra operação.. As operações básicas de adição e subtração sobre quantidades são definidas em seguida, mas o problema de operar com quantidades negativas e a regra dos sinais só serão atacados posteriormente.

> *Adicionar* duas quantidades é formar a sua soma. A diferença entre uma primeira quantidade e uma segunda é a quantidade que, adicionada à segunda, reproduz a primeira (Cauchy, 2016, p. 2).

Finalmente, Cauchy define as relações de desigualdade, demonstrando uma noção da ordenação das quantidades positivas e negativas.

> Enfim, dizemos que uma quantidade é maior ou menor do que uma outra, dependendo se a diferença entre a primeira e a segunda é positiva ou negativa. De acordo com essa definição, as quantidades positivas sempre excedem as quantidades negativas, e essas devem ser consideradas como tão menores quanto maior forem seus valores numéricos (Cauchy, 2016, p. 2).

Na passagem seguinte, Cauchy fará uma distinção fundamental que será importante para a sua explicação da regra dos sinais.

> Na álgebra, apresentam-se não somente números, mas também as quantidades, por letras. Como convencionou-se classificar os números absolutos na classe das quantidades positivas, pode-se designar a quantidade positiva que tem por valor numérico o número A por $+A$ ou apenas por A, ao passo que a quantidade negativa oposta é representada por $-A$.

> Do mesmo modo, no caso em que a letra *a* representar uma quantidade, convencionou-se considerar como sinônimos as duas expressões *a* e +*a*, e de representar por -*a* a quantidade oposta a +*a*. Essas observações são suficientes para estabelecer o que se chama a regra dos sinais (veja a nota I) (Cauchy, 2016, p. 1).

Aqui já podemos ver uma característica fundamental de Cauchy que é a diferenciação entre o termo literal maiúsculo que indica um *valor numérico maior do que 0* e o termo literal minúsculo que pode indicar, *independentemente do sinal que o precede*, uma quantidade positiva +A ou mesmo uma negativa, -*A*. O termo algébrico *a* é também reconhecido como "quantidade".

Fazer uma tal diferenciação significa que Cauchy considera a ideia de coeficiente, a saber, um termo algébrico que representa uma quantidade que pode ser negativa ou positiva independentemente do sinal operacional que possa estar à frente dela. Quando consideramos os termos algébricos dessa forma geral, os sinais + e - à frente deles recebem um novo significado: não mais os qualificam como positivos ou negativos, mas indicam se ela permanece inalterada (se o sinal for +) ou deve ser substituída pela sua oposta (quando estiver precedida pelo sinal -).

Em seguida, Cauchy inicia a sua definição de novos conceitos. Primeiramente, ele define uma quantidade variável, isto é, uma quantidade que recebe sucessivamente diversos valores diferentes, em oposição à quantidade constante, que recebe um valor fixo. Isto o permite definir o conceito de limite e, com isso, o conceito de número irracional:

> Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de maneira a diferir desse valor tão pouco quanto se queira, esse último é dito o limite de todos os outros. Assim, por exemplo, um número irracional é o limite das diversas frações que fornecem valores cada vez mais próximos a ele (Cauchy, 2016, p. 2-3).

Cauchy não fala mais do que isso sobre números irracionais. Como já mencionamos na introdução deste capítulo, tal caracterização será criticada posteriormente.

Sua próxima definição refere-se ao conceito de quantidade infinitamente pequena, intimamente conectada à concepção do zero:

> Quando os valores numéricos sucessivos de uma mesma variável decrescem indefinidamente, de maneira a se tornar menor do que qualquer número dado, essa variável torna-se o que chamamos um infinitamente pequeno ou uma quantidade infinitamente pequena. Uma variável dessa espécie tem zero por limite (Cauchy, 2016, p.3).

Diante da sua ideia de número como medida de uma quantidade, o zero não é considerado um ente numérico. O zero trata-se de um caso especial de variável que não tende a um número finito fixo mas ao "nada", de modo a se tornar cada vez menor. Essa abordagem de considerar o caso específico de variáveis que tendem a zero, isto é, infinitamente pequenas, separadamente das variáveis que tendem a um limite finito coloca Cauchy dentro da tradição francesa, e uma mesma abordagem pode ser vista com Carnot. A concepção de zero ligada a essa consideração ambivalente de limite coloca Cauchy não somente na tradição de Carnot como numa longa cadeia de matemáticos preocupados com os fundamentos da análise: Fontenelle, Cousin, Martin, L'Huilier e Stockler (Schubring, 2005, p. 448). Cauchy ainda considera as chamadas quantidades

infinitas positivas e negativas, isto é, as variáveis positivas que crescem ou as variáveis negativas que diminuem cada vez mais.

3.3.3. Nota I: a explicação das operações entre números separadamente das operações das quantidades

Passaremos agora para a Nota I do livro de Cauchy, "Sobre a teoria das quantidades positivas e negativas", onde ele oferece mais explicações sobre as operações básicas. É de grande relevância que Cauchy apresenta separadamente as operações sobre números e as operações sobre quantidades, uma vez que a legitimação das operações com entes negativos dependerá dessa separação ontológica.

Soma e subtração

Após revisar alguns dos pontos presentes nas Preliminares, Cauchy tenta explicar a controversa regra dos sinais. Algumas sutilezas podem ser inferidas da argumentação de Cauchy:

se representarmos por A seja um número, seja uma quantidade qualquer, e fizermos

$a = +A, b = -A$

teremos

$$+a = +A, +b = -A$$
$$-a = -A, -b = +A$$

Se nas quatro últimas equações colocamos entre parênteses os valores de a e b, obteremos as fórmulas

$$+(+A) = +A, +(-A) = -A$$
$$-(+A) = -A, -(-A) = +A$$

Em cada uma dessas fórmulas, o sinal do segundo membro é o que chamamos o produto dos dois sinais do primeiro. Multiplicar dois sinais, um pelo outro, é formar seu produto (Cauchy, 2016, p. 270)

Para Cauchy, essa explicação é o que fundamentaria a regra dos sinais de adição e subtração de quantidades. Tudo segue de uma convenção simbólica que não diz respeito a uma operação com quantidades mas uma "multiplicação de sinais". Como dissemos anteriormente, uma característica de Cauchy é sua capacidade de separar coeficientes, e a sua demonstração é dependente disso. Para ele, $+b$ indica a preservação do sinal da quantidade b, que no caso é - (pois b = -A). Logo, $+b$ = -A. Por outro lado, -b indica a obtenção da quantidade oposta a b, isto é, a alteração do seu sinal. Como o seu sinal é - (pois b=-A), então -b = -A. Substituindo b por -A nas equações obtidas exibe a composição de sinais envolvida nesses:$+(-A) = -A$ e $-(-A) = +A$. A "multiplicação dos sinais" na verdade envolve sinais com funções distintas: o sinal dentro de parênteses é "interno à quantidade b", e indica que ela é negativa (isto é, ela consiste em -A, o valor numérico A precedido pelo sinal), enquanto os sinais fora dos parênteses é externo à quantidade, indicando a preservação do seu sinal ou a tomada da sua oposta. Na prática

computacional, o sinal externo será nada menos do que aqueles que conectam quantidades, indicando assim operações de soma ou subtração entre elas:

> Uma consequência imediata das definições precedentes é que a multiplicação dos sinais não tem nenhuma relação com a multiplicação de números. Não nos surpreendemos ao observar que a noção do produto de dois sinais surge desde os primeiros passos que fazemos em análise, já que na adição ou na subtração de um monômio, multiplicamos realmente o sinal desse monômio pelo sinal + ou - (Cauchy, 2016, p. 273).

Por exemplo, segundo esta regra, temos que $a - (-bc) = a+bc$. Dessa maneira, os sinais + e - "externos" que precedem a e b na sua demonstração da regra dos sinais acima podem ser entendidos também no contexto de operações, isto é, na prática das transformações algébricas, a operação de soma mantém o sinal da quantidade que se sucede, enquanto a operação de subtração o inverte.

Após isso, Cauchy destaca a importância de explicar separadamente as operações sobre números e quantidades, e parte para a explicação da soma e adição de números.

> Adicionar ao número A o número b em outros termos, submeter o número A ao crescimento $+B$ é o que chamamos fazer uma *adição aritmética*. O resultado dessa operação chama-se *soma*. Nós a indicamos colocando após o número A o crescimento $+B$, assim como segue: $A+B$. Nós não demonstramos, mas admitimos como evidente, que a soma de diversos números permanece a mesma seja qual for a ordem em que os acrescentamos. É um axioma fundamental sobre o qual se apoiam a aritmética, a álgebra e todas as ciências de cálculo (Cauchy, 2016, p. 271).

A explicação ilustra como Cauchy admite as regras operacionais sobre números como sendo auto-evidentes enquanto as operações sobre quantidades precisariam ser de algum modo demonstradas. Logo em seguida ele ainda reconhece a comutatividade da soma de números como um outro axioma.

A propriedade da comutatividade para a soma de várias quantidades, no entanto, não é um axioma, mas um teorema que pode ser demonstrado diretamente a partir do axioma relativo à adição de números. As operações de soma e subtração sobre quantidades são finalmente definidas formalmente tendo-se em vista o que foi dito com relação à regra de sinais, apesar de Cauchy não relacionar esses resultados diretamente com a regra que ele estabeleceu. Somar significa justapor as quantidades, preservando os seus sinais, enquanto subtrair uma quantidade a de uma quantidade b significa *adicionar a quantidade oposta a b* (Cauchy, 2016, p. 272).
Após definir monômios e polinômios, Cauchy parte para a subtração de quantidades como sendo a oposta da soma.

Produto e Quociente

Ao apresentar a operação de multiplicação entre os diferentes tipos de números, Cauchy expôs uma espécie de extensão do conceito de número, partindo dos "inteiros" e indo até os irracionais. No caso destes últimos, a explicação de Cauchy reitera que eles são estabelecidos como limites de números racionais.

1. *B* é inteiro

> Quando *B* é um número inteiro, é suficiente, para obter *B*, acrescentar a unidade a ela mesma várias vezes seguidas. É preciso então para formar o produto de *A* por *B*, acrescentar o número *A* a ele mesmo esse número de vezes, ou seja, fazer a soma de tantos números iguais a *A* quantas forem as unidades em *B* (Cauchy, 2016, p. 273).

2. *B* é racional

> Quando *B* é uma fração que tem por numerador *m* e por denominador *n*, a operação por meio da qual chega-se ao número *B* consiste em dividir a unidade em *n* partes iguais e em repetir *m* vezes o resultado encontrado. Obtém-se, então, o produto de *A* por *B* dividindo o número *A* em *n* partes iguais e repetindo uma dessas partes *m* vezes (Cauchy, 2016, p. 273).

3. *B* é irracional

> Quando *B* é irracional, pode-se obter, com números racionais, valores cada vez mais próximos a ele. Percebe-se facilmente que, sob a mesma hipótese, o produto de *A* pelos números racionais em questão aproxima-se cada vez mais de um certo limite. Esse limite será o produto de *A* por *B*. No caso em que se tenha, por exemplo, $B = 0$, ter-se-á um limite nulo e concluir-se-á que o produto de um número qualquer por zero anula-se (Cauchy, 2016, p. 273).

Já a operação entre quantidades requer uma explicação da regra dos sinais.

> O produto de uma primeira quantidade por uma segunda é uma terceira quantidade que tem como valor numérico o produto dos valores numéricos das duas outras, e, como sinal, o produto de seus sinais (Cauchy, 2016, p. 274).

Cauchy evita falar sobre o que valida tal proposição, e simplesmente diz em seguida que, admitindo-a, podemos demonstrar a comutatividade da multiplicação de quantidades. Persiste, portanto, o problema de estabelecer a regra da multiplicação com quantidades como consequência do fato do conceito de quantidade ser fundado no conceito real de grandeza. Mas ainda assim há um aspecto interessante a ser percebido na definição de Cauchy, a saber, ela mostra que Cauchy concorda que só é possível multiplicar números por números e sinais por sinais, de modo que, por exemplo, a multiplicação controversa entre quantidades negativas é na verdade a composição de duas multiplicações distintas, possíveis e previamente explicadas: uma entre os valores numéricos (isto é, entre números) e outra entre sinais. Dessa forma, não existe de fato uma multiplicação direta entre entes negativos. Mas é evidente que o possível questionamento do significado real da operação para além do algoritmo simbólico persiste. Em 1828, o matemático alemão Johann Peter Wilhelm Stein (1796–1831), que seguiu em grande medida a nova abordagem de Cauchy e julgou seu *Cours d'analyse* "brilhante", criticou fortemente a fundamentação da regra dos sinais:

> [...] porque uma necessidade para suas definições não foi demonstrada de fato a elas não foram deduzidas, portanto [não pela] ideia básica, mas por algo secreto, que deveria vir à tona acima de tudo (Stein apud Schubring, 2005, p. 513).

A divisão entre quantidades, tal como a divisão entre números, é definida com referência à multiplicação.

Cauchy ainda chega a apresentar algumas propriedades da multiplicação e divisão, como a regra da distributividade para multiplicação e divisão, para um número qualquer de quantidades entre os parênteses: $k(a + b + c + ...) = ka + kb + kc + ...$ Mas Cauchy não oferece uma demonstração para elas, o que poderia necessitar da indução matemática. Outro ponto a ser notado é que Cauchy não considera a regra de associatividade, nem na soma e nem na multiplicação.

Expressões: os números "imaginários"

Cauchy ainda chega a estabelecer a exponenciação e os logaritmos de números e quantidades na Nota I. Mas agora nos direcionamos ao entendimento de Cauchy das chamadas "expressões". Estas se encontram apresentadas pela primeira vez no capítulo 7, onde Cauchy aborda as expressões imaginárias:

> Em análise, chama-se expressão simbólica ou símbolo toda combinação de sinais algébricos que não significa nada por ela mesma ou à qual atribui-se um valor diferente daquele que ela naturalmente deve ter. Nomeiam-se igualmente equações simbólicas todas aquelas que, tomadas ao pé da letra e interpretadas a partir das convenções geralmente estabelecidas, são inexatas ou não têm sentido, mas das quais podem-se deduzir resultados exatos, modificando e alterando segundo regras fixas, ou essas próprias equações, ou os símbolos que elas envolvem (Cauchy, 2016, p. 115).

Logo em seguida, Cauchy diz qual seria o propósito da introdução de tais expressões.

> O emprego de tais expressões ou das equações simbólicas é frequentemente um meio de simplificar os cálculos e de escrever sob forma abreviada resultados aparentemente bastante complicados (Cauchy, 2016, p. 115).

Como exemplo de expressão importante para a análise, Cauchy cita as expressões imaginárias, isto é, os números complexos, que ainda não haviam adquirido esse nome. Pelas duas passagens, verificamos que além dos dois conceitos básicos, número e quantidade, Cauchy necessita de mais um. Isto se dá pelo fato de que, segundo ele, as expressões não possuem sentido em si, isto é, não podem ser compreendidas em termos de grandezas ou qualquer outra coisa que seja real, tal como convencionou-se interpretar o simbolismo algébrico.

Expressões algébricas são portanto um instrumento cuja propósito é puramente utilitário, isto é, por estas permitirem abreviar cálculos. Neste sentido, fica claro que as regras para se transformar esses símbolos são estabelecidas de maneira convencional, isto é, elas não podem ser demonstradas tendo-se em vista o significado real dos símbolos. De qualquer maneira, como naturalmente se espera, o papel utilitário dessas expressões faz com que as regras não sejam definidas de maneira completamente arbitrária, mas tendo em vista preservar os resultados

anteriores. Cauchy reconhece a necessidade de "estender o conceito de igualdade" de modo que duas expressões imaginárias são iguais quando a parte real e a parte imaginária são iguais. Essa relação que, como Cauchy destaca, é convencional, permite considerarmos as quantidades reais como casos particulares das expressões imaginárias.

> Quando, na expressão imaginária $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, o coeficiente β de $\sqrt{-1}$ se desvanece, o termo $\beta\sqrt{-1}$ reduz-se a zero, e a própria expressão, à quantidade real α. Em virtude desta convenção, as expressões imaginárias contêm, como casos particulares, as quantidades reais (Cauchy, 2016, p. 117).

Logo em seguida, Cauchy explicita que convém estabelecer que as operações de soma, subtração e multiplicação sejam realizadas sobre expressões imaginárias de maneira análoga à maneira como elas eram realizadas com quantidades, dado a entender que essas regras não são necessárias mas estabelecidas por convenção.

> As expressões imaginárias podem ser submetidas, assim como as quantidades, às diversas operações da álgebra. Se se efetuar, em particular, a adição, a subtração ou a multiplicação de duas ou de várias expressões imaginárias, operando segundo as regras estabelecidas para as quantidades reais, obter-se-á como resultado uma nova expressão imaginária que será o que se chama *soma, diferença,* ou *produto* das expressões dadas; e nos serviremos das notações ordinárias para indicar esta soma, essa diferença ou esse produto (Cauchy, 2016, p. 117).

É de se notar que, em sua obra de 1867, Hankel (ver seção 1.4.) critica a apresentação da aritmética básica dos números complexos no curso de análise de Cauchy por acreditar que Cauchy não foi claro se a manutenção das operações da álgebra na passagem para os números complexos é algo arbitrário ou necessário. De fato, apesar de Cauchy enfatizar que, epistemologicamente, as expressões simbólicas que abarcam os números complexos não significam nada, ele não é totalmente claro sobre a justificação para o fato de tais expressões manterem as operações algébricas usuais. De fato, Hankel critica ao mesmo tempo também a justificação de Cauchy ao apresentar as operações com quantidades negativas na nota I (Hankel, 1867, p.14).

3.3.4. O conceito de número na Análise de Cauchy

Como já observamos, a concepção de número de Cauchy o leva a preservar uma tradição de separar o conceito de limite com base em uma concepção peculiar de número, segundo a qual o zero não é considerado como sendo um deles: os limites em si referem-se exclusivamente às variáveis que se aproximam um valor numérico e portanto finito. Quando a variável aproxima-se especificamente do zero, que não é um valor atribuível, ela é dita "infinitamente pequena" ou também pode ser chamada de infinitamente pequena. O termo limite já não é utilizado nesse caso, da mesma forma como Carnot procedeu anteriormente. Abaixo, apresentamos as duas definições e percebemos que a elaboração de ambas é semelhante.

> Quando os valores sucessivos dados à mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de modo que eles finalmente diferem-se de uma quantidade tão pequena quanto se queira, essa última é chamada de limite de todos os outros valores
> Quando os valores numéricos sucessivos da mesma variável diminuem indefinidamente, de modo a se tornar menor do que qualquer número dado, essa variável se torna o que se chama infinitamente pequena ou uma quantidade infinitamente pequena. Uma variável desse tipo possui zero como limite (Cauchy, 2016, p. 4).

A introdução dos infinitamente pequenos por Cauchy pode ser entendida por um lado como uma maneira de respeitar as exigências sobre os fundamentos da análise que estavam em prática na *École polytechnique*. Mas, ao mesmo tempo, elas eram estabelecidas de maneira conjunta com o conceito de limite e associadas a um processo semelhante. Apesar disso, é importante apontar que essa relação estreita entre limite e infinitamente pequenos prejudica a capacidade de algebrizar o conceito de limite. Ainda nesse sentido, apontamos como Cauchy oferece definições puramente verbais e o limite carece ainda de um símbolo que permita que ele seja utilizado de maneira operacional (Schubring, 2005, p. 452-453). De fato, Cauchy chega a apresentar o simbolismo *lim.* mas este serve apenas como uma abreviação e não permitiu uma abordagem operacional.

Continuidade e o Teorema dos Valores Intermediários

Falaremos agora sobre as já mencionadas demonstrações do teorema do valor intermediário oferecidas por Cauchy, considerando-se o fato de que ele nãos e utiliza de um conceito explícito de número real. A primeira, que se encontra no corpo principal do texto, é dada a seguir:

> De fato a função *f(x)* sendo contínua entre os limites $x = x_0$, $x = X$, a curva que tem por equação $y = f(x)$ e que passa primeiro pelo ponto correspondente às coordenadas $x_0, f(x_0)$, segundo pelo ponto correspondente às coordenadas X e *f(X)*, será contínua entre esses dois pontos; e, como a ordenada constante b da reta que tem por equação $y=b$ se encontra contida entre as coordenadas $f(x_0), f(X)$ dos dois pontos considerados, a reta passará necessariamente entre esses dois pontos, o que ela não pode fazer sem encontrar no intervalo a curva acima mencionada (Cauchy, 2016, p. 28).

Como Barany apontou, a demonstração não envolve a representação algébrica em termos de diferenças que caracteriza a definição de continuidade de Cauchy ou em passagens de limite, mas baseia-se na ideia de que a função é representável por uma curva no plano que, de acordo com a "intuição geométrica", deve cruzar a reta *f(x) = b*. A demonstração é ilustrativa pelo fato de que Cauchy em nenhum momento dá a entender que ela não seja rigorosa de fato ela é chamada explicitamente como uma demonstração. Além disso, ela ajuda a ilustrar o fato de que o conceito de função, ainda preso à ideia de uma curva no plano, era intrínseco ao entendimento de continuidade a partir de noções tradicionais de grandezas geométricas. A separação conceitual entre a função e a sua continuidade ocorre a partir do momento em que o conceito for dissociado de sua curva e passar a ser compreendido mais geralmente como uma associação de variáveis. O

exemplo da função de Dirichlet, que assume valores distintos quando x é racional e quando x é irracional é representativo nesse aspecto. Segundo essa concepção, descontinuidades deixam de se tornar "singularidades" e a concepção de continuidade precisará se apoiar em novas bases além da intuição geométrica.

Apesar de não dar sinais de que a prova acima não seja satisfatória, Cauchy dá a entender que ela não seja por ele considerada completamente analítica. Por conta disso, Cauchy oferece uma demonstração alternativa em sua Nota III, a qual seria puramente analítica (Cauchy, 2016, p. 29). Nela, o teorema é específico para o caso em que b=0, isto é, demonstrar que a função contínua deverá ter uma raiz no intervalo com extremos de sinais opostos

> Seja *f(x)* uma função real da variável *x*, que permanece contínua em relação a essa variável entre os limites $x = x_0, x = X$. Se as duas quantidades $f(x_0), f(X)$ são de sinais contrários, a equação
>
> $$f(x) = 0$$
>
> é satisfeita para um ou vários valores reais de *x* compreendidos entre x_0 e *X* (Cauchy, 2016, p. 313).

A demonstração baseia-se em subdividir o intervalo entre *x* e *X* e com isso conceber uma sequência de valores de *f*, uma consistindo em quantidades negativas e outra consistindo em quantidades positivas, que deverão portanto convergir para um limite comum *f(a)* que deve ser 0. Como Barany aponta, em termos algébricos, inferir que as duas sequências convergem para um limite comum *f(a)* necessitaria um lema adicional, o que Cauchy não faz neste momento. Pensando-se geometricamente, no entanto, o argumento pode parecer intuitivo.

A demonstração assemelha-se, no entanto, com a formação dos intervalos encaixados feita por Weierstraß, como veremos ainda neste capítulo. No entanto, é indiscutível que ambas as demonstrações são diferentes, uma vez que Weierstraß se utiliza de uma concepção nova de número real e também explicita o princípio do supremo, "adaptando" assim a demonstração ao seu padrão de rigor. A transição epistemológica representada pelas duas demonstrações distintas de Cauchy e Weierstraß não se dá de maneira completamente consciente e direta, diante do exemplo ilustrativo que já demos do matemático Darboux (1842-1917). Segundo ele, que subscrevia às novas ideias de Weierstraß, a demonstração de Cauchy já era completamente rigorosa (ver seção 2.1).

3.4. Outra concepção na França: Ampère

A concepção de Ampère vem cronológicamente antes daquela publicada por Cauchy. No entanto, devido ao fato de Ampère não ter legado manuscritos ou publicações que apresentem de maneira completa uma concepção de número, apresentaremos ela apenas agora a fim de a compararmos com a visão mais notável de Cauchy. De fato, Ampére e Cauchy alimentaram uma boa relação na École: após lecionar Cauchy na *École Polytechnique*, Ampère trabalhou ao lado dele na instituição e eles alternaram a frente do curso de análise a partir de 1815. Ampère se

efetivou como professor na escola em 1808, mas havia ingressado na escola em 1804 como *répétiteur* de Lacroix, cujo livro-texto havia acabado de se estabelecer como o padrão da escola.

Ampère tinha grande interesse em assuntos filosóficos e chegou a estudar filosofia alemã, principalmente Kant (Schubring, 2005, p. 383). Suas reflexões filosóficas certamente manifestaram-se em uma busca por estabelecer de maneira rigorosa conceitos básicos e um conceito particular que Ampére buscou melhor estabelecer foi o conceito de número.

O *Nachlass* de Ampère contém uma série de fragmentos interligados tendo em vista o que seria um curso de análise, ainda que estes sejam em sua maioria incompletos. No entanto, neles podemos ver no capítulo introdutório o tratamento de número e de quantidade. Ampère não foi muito além das operações básicas apesar de alguns ensaios mostrarem um projeto maior, mas é possível encontrar um princípio epistemológico comum a esses fragmentos: o conceito de número devia se tornar tão abstrato quanto possível, uma vez que Ampére associava abstração à generalidade e à simplicidade.

Seu primeiro passo na construção de uma concepção abstrata foi estabelecer uma diferenciação clara entre três conceitos que vimos anteriormente nos fundamentos do curso de Cauchy: grandeza, quantidade e número. Há, no entanto, diferenças claras entre as concepções dos dois. Segundo Ampère, quantidade é tudo aquilo que é composto de partes correspondentes uma à outra. Estas quantidades só podem ser aumentadas ou diminuídas através de acréscimos ou remoções de tais partes. A concepção de grandeza, por sua vez, carrega consigo uma clara característica de continuidade: consiste em uma variável que pode mudar de um estado para outro apenas se ela assume todos os estados sucessivos entre eles .Em outro fragmento, Ampère ainda diferencia uma grandeza dos diferentes valores que ela pode assumir sucessivamente A explicação desses dois conceitos básicos, grandeza e quantidade, remetem aos dois tipos de grandezas *concretas* citadas na *Encyclopédie*, as quais ficam associadas também à ideia de serem contínuas. No mesmo verbete, no entanto, quantidade é colocada como sinônimo de grandeza.

> A grandeza concreta é aquela em que a noção contém um sujeito particular. Ela pode ser composta ou de partes coexistentes ou de partes sucessivas, e sobre essa ideia encontram-se duas espécies, *l'etendue e le tems* [espaço e tempo].

Finalmente, o conceito de número é, para Ampère, o único meio para se medirem quantidades e grandezas. Dessa maneira, até aqui, vemos que Ampère trata de dois entes distintos e fundamentais: quantidade e grandeza. Diferentemente de Cauchy, quantidades não são mais entendidas como acréscimos e diminuições efetuadas sobre grandezas, mas constituem um conceito fundamentalmente distinto.

De qualquer maneira, Ampère acaba trazendo uma abordagem fundamentalmente inovadora em um aspecto: os conceitos de igualdade e desigualdade assumem um papel fundamental, uma vez que para obtermos números, necessitamos de um meio para efetuar medidas. Dessa forma, os primeiros sinais a serem apreendidos são os sinais de igualdade, "=", e os sinais de desigualdade, "<" e ">". É somente após esses conceitos que Ampère considera possível considerar aumentos e diminuições efetuadas pelas operações básicas e seus sinais, + e -.

Com relação a esses sinais operacionais, Ampère ainda comentou de maneira crítica o fato de o sinal - ser associado às quantidades negativas enquanto o sinal + caracteriza as quantidades

positivas. Por trás disso, reside o fato de que não se deveria associar quantidades negativas e positivas aos atos operacionais de diminuição e aumento. Tais associações eram praticadas por nomes como Bézout e Lacroix e vimos que Cauchy também realizou uma conexão semelhante. Ampére explica o problema dessa caracterização por meio de quantidades algébricas: ao lidarmos inicialmente com uma quantidade desconhecida, estamos livres para indicá-la por $+x$ ou por $-x$, assim como também podemos substituir $+x$ por $-y$, de modo que $+x = -y$ e $-x = +y$. Diante dessa arbitrariedade, quantidades positivas e negativas não deveriam ser intimamente ligadas aos sinais + e -. Com relação a essa crítica, é interessante verificar que Cauchy a contorna sem deixar de considerar que toda quantidade é dotada de um sinal: ao considerar que os sinais + e - exercem um papel diferente quando colocados à frente de quantidades algébricas (como, por exemplo, $+x$ ou $-x$) e sobre um valor numérico, indicado por letra maiúscula (+A ou -A). Nesse último caso, podemos determinar completamente se a quantidade é positiva ou negativa, visto que não há mais "operações com sinais" a serem feitas e a quantidade está na sua "forma final", enquanto no primeiro, o sinal apenas indica que ainda devemos realizar operações com sinais para obter um resultado determinado (isto é, um sinal seguido de um valor numérico representado por letra maiúscula). Portanto, expressões como $+x$ ou $-x$ nada dizem se a quantidade é positiva ou negativa.

Mas Ampère não entendia o simbolismo algébrico da mesma forma que Cauchy e o problema que ele percebeu o levou a tratar quantidades positivas ou negativas de maneira indiscriminada, uma vez que a caracterização delas depende de uma arbitrariedade.

> Estabeleceremos portanto, por ora, nenhuma distinção entre as quantidades positivas e negativas, nos reservando a dar a esse sujeito noções precisas quando tivermos desenvolvido suficientemente os primeiros princípios.

Em outro fragmento, Ampère chega a reconhecer um *status* igual para quantidades negativas e positivas. A sua grande façanha, no entanto, foi reconhecer não somente quantidades negativas como também os números negativos abstratos. Trata-se da primeira vez na França que esse conceito se encontra plenamente reconhecido.

> Não existem diferenças entre as quantidades positivas e negativas, mas aquelas que são situadas no lado oposto da unidade são marcadas por números negativos abstratos.

Ampère dá a entender que números negativos podem ser obtidos através de certos tipos de comparações entre quantidades e processos semelhantes ainda dariam origem a números fracionários e irracionais.

> [por uso de] o tipo de comparação que nos deu números negativos, deve-se ser capaz da mesma forma [...] de obter números inteiros, fracionais, ou irracionais, e todos os negativos.

Como dissemos, a apresentação de Ampère sobre o assunto é bastante fragmentada, de modo que não podemos encontrar uma concepção realizada que descreva e justifique os "números negativos abstratos" e operações que os envolvam. Mesmo assim, é perceptível que sua aceitação do conceito faz parte de seu confronto às abordagens sintéticas propagadas por Carnot e Lacroix

e as visões empiristas da época. Sua opinião favorável à abstração o leva a buscar um conceito de número como ponto de partida em vez do conceito de quantidade.

Apesar de suas ideias fundamentais inovadoras, Ampère nunca teria iniciado seus cursos na *École* abordando o conceito de número, de acordo com os *Registres d'Instruction* da instituição. De fato, os fragmentos claramente não se qualificam como notas de aula, mas rascunhos de uma publicação futura em que ele apresentaria "o primeiro fundamento da análise matemática, isto é, a ciência a que essa obra é dedicada.". No entanto, pode-se especular que Ampère tenha discutido sobre seus conceitos com alunos, inclusive Cauchy, que ingressou em 1805 na escola e assistiu ao curso de análise em que Ampère atuava como *répétiteur*. Fato é que a abordagem de Ampère de colocar o conceito de número como fundamental para a análise constitui algo incomum e inédito e Cauchy teria dado continuidade a essa prática.

3.4.1. A abordagem do conceito de número em seu curso de análise de 1824

As ideias de Ampère antagônicas aos métodos sintéticos que se fortaleciam na França também se refletiam em ideias fundamentais da análise matemática. Em 1806 Ampère publicou o seu *Mémoire* sobre a teoria de funções derivadas no *Journal de l'École Poytechnique*, a sua obra mais famosa que apresenta algumas importantes inovações como o reconhecimento da necessidade de demonstrar a derivada de uma função. Nela, Ampére já expressava ser contrário ao uso de infinitamente pequenos e sua abordagem remete ao método dos limites ainda que o termo "limite" não tenha sido utilizado explicitamente (Schubring, 2005, p. 384). Mesmo após as reformas institucionais que aconteceram na *École Polytechnique*, Ampère demonstrou resistência à introdução de infinitamente pequenos nos cursos de análise, como pode ser percebido, por exemplo, em notas de seu aluno Théodore Olivier que foram tomadas durante o curso de 1811/12 (Schubring, 2005, p. 402).

Outra obra que merece atenção é o *Précis de Calcul Différentiel et de Calcul Integral* (Tratado do cálculo Integral e diferencial) de 1824, um fragmento de um livro-texto que não veio a ser completo e que também era voltado para alunos da *École Polytechnique*. Como o nome sugere, a obra é voltada para um curso introdutório de cálculo e, dessa forma, não encontramos aqui nenhuma conceitualização de números ou outros conceitos mais básicos da matemática que eram assumidos como sendo conhecidos pelos alunos. Os conceitos iniciais aqui são as variáveis e as funções. Ampère mantém a sua postura de não explicitar um conceito de limite ao mesmo tempo em que tampouco introduz qualquer noção de infinitamente pequeno. Apesar disso, neste livro podemos encontrar alguns sinais do que pode ser uma tentativa de Ampère de se adaptar às novas normas estabelecidas na instituição de ensino: em algumas instâncias onde Ampère estuda o valor que uma função atinge à medida em que a variável independente se aproxima de um certo valor, ele separa explicitamente os casos em que essas funções recebem um valor "finito determinado" daquelas cujo valor se torna "nulo", isto é, "menor do que qualquer quantidade dada", ou infinito (Ampère, 1824, p. 6,13). Encontramos aqui, portanto, uma situação parecida com o que vimos na seção sobre Cauchy, isto é, um tratamento duplo para o que seriam limites de funções e que poderia ser motivado por uma concepção peculiar de número. No caso de Ampère, no entanto, não encontramos definições precisas e sistematicamente separadas para esses dois

casos e tampouco encontramos concepções desenvolvidas de número que pudessem explicar tal atitude, de modo que é possível especular que sua postura tenha sido uma mera adaptação às novas recomendações da instituição.

3.5. Recepção de Cauchy na Alemanha: Dirksen

3.5.1. O conceito de número de Dirksen

O próximo personagem a ser estudado se trata de um grande apreciador de Cauchy e de alguns de seus conceitos básicos na Alemanha, além de ser um representante da abordagem "pura" da matemática em busca de melhor elucidar os seus fundamentos. Enno Heeren Dirksen (1788 - 1845) estudou na Universidade de Göttingen com Gauß e, a partir de 1820, passou a atuar como professor de matemática na Universidade de Berlim. Dirksen teria passado ao menos duas décadas preparando uma grande obra para oferecer fundamentos rigorosos para a análise. O seu título seria *Organon de toda a Análise* (Schubring, 2005, p. 541). Esse grande projeto seria desenvolvido em três partes, mas apenas o volume intermediário veio ser publicado, enquanto uma grande quantidade de rascunhos referentes às outras partes foram encontrados entre os documentos de Dirksen. A presente análise se baseará na análise presente em Schubring (2005) do material de Dirksen, e focará na concepção de número desenvolvida nos seus escrito

Há inúmeras versões da teoria algébrica elementar nos papéis de Dirksen, mas ele não parece ter ficado satisfeito com nenhuma das versões. O conceito de número se revelou como o núcleo de seu problema conceitual (Schubring, 2015, p. 118). Enquanto este era um conceito fundamental a princípio, ele posteriormente foi apresentado de maneira intermediária e procedente de outras ideia. Em algumas ocasiões, Dirksen apelou até mesmo para a cognição humana.

A princípio, o número era um conceito básico e a quantidade era um conceito oriundo deste. No entanto, posteriormente, essa relação foi invertida, e alguns conceitos se inseriram antes mesmo da quantidade: conjuntos e a ideia indeterminada, "coisa", com a qual Dirksen tentaria estabelecer uma ligação com o entendimento humano através da imaginação. A adoção da ideia de conjunto como conceito fundamental havia sido implementada na Alemanha ainda no século anterior, através de Kästner e seus alunos Tralles e Metternich, além de Schultz (Schubring, 2005, p. 542). Essa tradição ainda será continuada e desenvolvida por Dedekind, que considera conjuntos e coisas também ao fundamentar os números naturais, como nós veremos, e ainda por Cantor.

Em um seção intitulada "Teoria básica de toda análise", a qual é parte de fragmentos referentes à teoria de funções, Dirksen apresenta alguns conceitos básicos. Há diferenças consideráveis nas versões posteriores e nas versões mais elaboradas, o primeiro capítulo chama-se "sobre conjuntos e seus índices", e é na sua primeira seção deste que encontramos o conceito de "coisa": uma generalização do aspecto cardinal. Ainda neste capítulo encontramos também algumas operações elementares com conjuntos.

Tendo definido o conceito de coisa, Dirksen define no segundo capítulo as quantidades. Estas consistem em coisas que contêm apenas uma única característica. O conceito de número só é apresentado no primeiro capítulo do segundo livro: eles consistem em razões de quantidades, ou

seja, as suas medidas. Apesar disso, Schubring aponta que a sua formulação é mais complicada do que isso (Schubring, 2005, p. 543). Dirksen ainda elabora que, se duas quantidades *A* e *B* forem iguais, seu número é dito "assinável" e se elas forem desiguais, seu número não será assinável. Aqui, devemos entender por igualdade a designação da quantidade. Ou seja, as quantidades devem ser de mesma natureza; caso elas não forem não há como depreender uma razão entre elas, uma unidade comum, de modo que não há como associar um número capaz de medi-las. Isto nos ajuda a compreender a sua noção de número como uma relação (razão) entre quantidades.

Assim como vimos no caso de Cauchy, em toda a análise de Dirksen, o zero não é um número. Esse caráter especial do zero também se deve à sua concepção de número em termos de medida de quantidades:

> Por número, queremos dizer aqui a *razão geométrica* na qual duas quanta iguais encontram-se em relação uma com a outra como quantidades. Por conta disso, um número não é um quantum, mas apenas o predicado de um quantum (Dirksen apud Schubring, 2005, p. 543-544).

A última frase deixa claro que Dirksen não considera número uma quantidade, mas apenas um predicado ou característica delas. O zero caracteriza-se como a "negação" de qualquer número assinalável. Por conta disso, Dirksen exigirá que quocientes sejam definidos apenas para números assinaláveis.

No capítulo seguinte, os números ainda são apresentados sob a representação aritmética de números, e a diferença *a - b* se restringe a resultados positivos. No entanto, na parte seguinte, intitulada "Sobre as formas algébricas de quantidades", os números negativos são introduzidos sem grandes discussões sobre o conceito. Nessa seção, a diferença *a-b* já não é mais restrita e Dirksen a inicia expandindo o conceito de número. Números completamente determinados, isto é, aqueles que assumem um único valor, em comparação com as variáveis que assumem múltiplos valores, agora são chamados de "quantidades algébricas reais", as quais são dotadas de um valor numérico (*Zahlenwerth*), o mesmo conceito que Cauchy chama de valor absoluto (Schubring, 2005, p. 544) E assim como Cauchy, Dirksen também estabelece uma notação simbólica para o valor numérico da quantidade. Dada uma quantidade *g*, o seu valor numérico é representado por *v.n g*, onde *v.n* significa *valeur numérique* (Schubring, 2005, p. 544).

Em seguida, Dirksen fez a separação entre o valor numérico e o sinal de um número algébrico real. Com isso, ele definiu os números negativos: quando um número completamente determinado *a* é considerado em seu valor numérico como sendo muito menor do que qualquer terceiro número *b* completamente determinado (Schubring, 2005, p. 544).

3.5.2. O conceito de número na Análise

A influência de Cauchy na concepção de número de Dirksen traz consequências relevantes também no desenvolvimento de conceitos da análise. Na seção central do *Organon*, encontra-se a discussão sobre o que ele chamava de "séries infinitas", as quais constituem o que chamamos de sequências numéricas. Assumindo o conceito de número de Cauchy, Dirksen estabelece também a distinção entre dois tipos de séries infinitas:

1. séries numéricas, isto é, aquelas cujos termos são sempre números positivos,
2. séries de quantidades, as quais podem possuir como termos números reais, negativos e até mesmo imaginários.

Após essa distinção, Dirksen ainda subdivide as sequências de cada um desses dois tipos em outras categorias de acordo com seu comportamento. Uma separação inicial é estabelecida entre séries "que permanecem finitas" e as que "não permanecem finitas". Ao final, Dirksen identifica um total de oito diferentes tipos de comportamento das sequências, sendo que três constituem os principais:

1. as que "permanecem finitas";
2. as que são "infinitamente pequenas em progresso";
3. as que são "infinitas em progresso".

A separação efetuada por Dirksen é de grande importância uma vez que ela revela sua adesão ao mesmo tipo de dicotomia que encontramos em Cauchy e Carnot sobre o tratamento do limite. Assim como esses autores, Dirksen apresenta o conceito de infinitamente pequeno associando-o a uma variável do segundo tipo acima e portanto não sendo uma quantidade singular. Mais especificamente, essa variável tem como limite o zero e deve ser numérica, o que significa que ela somente pode assumir valores positivos.

> a progressão de termos pode ser imaginada de modo que eles, a partir do termo com algum índice q [...] todos se tornam menores do que qualquer número dado assinalável β, seja ele tão pequeno quanto se possa imaginar (Dirksen 1845, 25).

Esse tipo de série infinita encontra-se claramente separada das séries infinitas que permaneciam finitas. Assim como Cauchy, Dirksen também separa o limite do seu "valor" e as séries que permaneciam finitas eram caracterizadas por possuírem como valor do limite um número positivo finito Q e portanto "assinalável". A separação entre as séries que permanecem finitas e as infinitamente pequenas em progresso" se torna preponderante em sua análise, particularmente porque o zero não é considerado um número assinalável. Na sua teoria de funções, onde Dirksen considera funções de sequências como sendo novas sequências em si, um mesmo tipo de diferenciação pode ser encontrado.

3.6. A Tentativa de Martin Ohm de estender o conceito de número

3.6.1. Vida e obra de Martin Ohm

Ohm nasceu na cidade de Erlangen, no Sul da Alemanha, onde passou os primeiros vinte e cinco anos de sua vida. Pouco antes do seu nascimento, a cidade tornou-se parte da Prússia, sucessora do condado protestante de Bayreuth. Ohm utilizou depois o relacionamento com oficiais prussianos em Erlangen para patronagem, para conseguir uma posição acadêmica em Berlin (Schubring, 1984). Ohm viveu em Erlangen as fortes mudanças políticas da época. Em 1806, depois da derrota da Prússia, Erlangen foi administrado pela França; desde 1810, o antigo condado tornou-se parte da Bavária, um país católico. Ohm foi educado primeiramente em casa, pelo pai,

um serralheiro. Somente com 11 anos ele ingressou no *Gymnasium* da cidade. Em 1807, matriculou-se na pequena universidade de Erlangen e estudou principalmente a matemática, e principalmente com Heinrich Rothe (1773-1842), um dos expoentes da escola combinatória na Alemanha. Em 1811, Ohm doutorou-se, com uma tese sobre um assunto da análise combinatória. Segundo as práticas da universidade, Ohm obteve o grau de um *Privat-Dozent*, a primeira posição típica numa carreira académica alemã, sem um salário – dependendo das taxas de inscrição dos alunos nas disciplinas. As tentativas de obter uma posição melhor fracassaram nos anos seguintes; em particular depois da derrota de Napoleão que efetuou na Bavária uma forte redução do ensino da matemática (Schubring ZDM 2012, p. 528).

Porém, a Prússia procurou professores de matemática para os seus *Gymnasien*, reformados segundo o programa neohumanista, com um papel forte na matemática. Candidatando-se no ministério prussiano, ele aceitou em 1817 a posição de professor de matemática no *Gymnasium* da cidade de Thorn, no leste da Prússia. Insatisfeito com uma posição numa escola, ele se esforçou para se mudar para Berlim, onde esperava conseguir se tornar professor na universidade, a principal da Prússia. Ohm se mostrou nessas tentativas como inadequado à concepção neohumanista de pesquisa na universidade e mandou pedidos ao ministério para obter uma posição de professor na universidade de Berlim. O ministério, estranhando um pedido tão incomum, criou uma comissão especial; a comissão decidiu que Ohm deveria ser examinado pela *wissenschaftliche Prüfungskommission*, o órgão para examinar estudantes que almejavam se tornar professores num *Gymnasium*. Esta comissão julgou, depois depois de uma prova escrita e uma aula didática, que Ohm seria qualificado como professor extraordinário. O ministério, porém, não o achou adaptado para uma carreira académica do padrão de pesquisa, e exigiu que ele se habilitasse para um novo tipo de posição, restrita ao ensino: "docente académico". Desta maneira, Ohm aceitou se mudar em 1821 para Berlim para lecionar em um *Gymnasium* a partir de 1822. O ministério alertou que Ohm deveria "combater sua alegada aversão a uma contratação em um *Gymnasium*" e reconhecer a sua vocação para lecionar em um *Gymnasium* em vez seguir uma carreira acadêmica (apud Schubring 1981, p. 129). Em 1824, ele alegou que sua saúde não lhe permitia seguir ensinando na escola; por pressões e patronagem, obteve a posição cobiçada de professor extraordinário na faculdade de filosofia. Em 1839, Ohm conseguiu a promoção para catedrático ("*ordentlicher Professor*"), não por méritos de pesquisa, mas por pressões da escola militar de artilharia, onde lecionou também, que alegou que Ohm ameaçou sair da Prússia (ibid.). Ohm faleceu em 1872.

Martin Ohm é um exemplo de um matemático que conseguiu uma carreira académica nos padrões tradicionais, fora dos novos valores da união entre pesquisa e ensino que emergiam na Prússia (Schubring, 1981, p. 128-129). E mesmo depois de ter sido imposto como professor na faculdade, ele continuou de atuar como um *practitioner*, não pesquisando na frente da ciência.

Quando Ohm conseguiu ser dispensado de ensinar na escola em 1822, tornou-se um importante produtor de livros-texto da matemática elementar. Porém, suas publicações foram iniciadas mesmo antes disso. Um primeiro período, como *Privat-Dozent* na universidade de Erlangen, é caracterizado por colaboração com o catedrático da matemática, Heinrich Rothe, nos padrões da análise combinatória. Já a tese de Ohm de 1811 apresenta um estudo especializado na área da análise combinatória, baseado nos conceitos de Rothe (Noble, 2022, p. 273-279). Em 1814,

Rothe e Ohm publicaram juntos um pequeno livro, sobre polígonos, utilizando conceitos da escola de análise combinatória.

A partir de 1816, Ohm mudou fortemente suas abordagens, deixando a análise combinatória no pano de fundo e focando agora em conceitos de aritmética e de álgebra. Este novo rumo foi ocasionado por cooperações estritas com seu irmão Georg Simon (1789-1854) que mais tarde tornar-se-ia o célebre físico. Simon seguiu um caminho um tanto incomum. Ele largou os estudos de matemática, também na universidade de Erlangen, em 1807, depois de três semestres e se mudou para a Suíça, como tutor privado. Aí, ele visitou o instituto de Pestalozzi, em Yverdum (Ifferten), o centro inovador para a pedagogia na escola primária/elementar, e com um impacto enorme para o ensino da aritmética e da geometria. Georg Simon voltou então para Erlangen, terminando seus estudos, doutorando-se também e tornando-se *Privat-Dozent* como o seu irmão caçula (Schubring 1983, p. 222). Ambos, porém, mudaram suas rotinas de lições e se decidiram, aparentemente desde 1813, à elaboração de uma "revisão" da matemática elementar (Bekemeier 1987, p. 22). Os irmãos promoveram esse projeto em uma divisão de trabalho: a aritmética e a álgebra seriam tratadas por Martin e a geometria ficaria a cargo de Georg Simon. Os dosi primeiros livros do programa de revisão foram *Elementare Zahlenlehre*, em 1816 por Martin, e o livro-didático *Grundlinien einer zweckmäßigen Behandlung der Geometrie* em 1817 de Simon. Desde o começo do projeto e desde o livro de 1816, o conceito de números se tornou o objeto principal dos estudos e publicações de livros-didáticos por Martin Ohm.

Estas pesquisas assumiram um novo rumo, mais abrangente e mais generalizante desde as publicações de 1822. Foi nesse ano que ele publicou os dois primeiros volumes de sua grande e mais ambiciosa obra, como o nome sugere: *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik* (Ensaio de um sistema perfeitamente consistente de matemática, um grande projeto fundacionista composto de nove volumes que continuaram sendo publicados até o ano de 1852.

Pode-se entender que as mudanças que ocorreram nas pesquisas de Ohm foram influenciadas por duas recepções de desenvolvimentos internacionais. Por um lado, ele recebeu as concepções de número na obra *Cours d'Analyse algébrique* (1821) de Cauchy. Conforme relatado em sua resenha de 1829 da tradução alemã de 1828, ele leu o livro pouco tempo depois da sua publicação.[23] Por outro lado, Ohm tornou-se ciente da obra de um matemático russo com descendência escocesa, bastante desconhecido na historiografia: Eduard Collins (1791-1840), que já em 181x foi chamado para a Academia em St. Petersburgo. Como Ohm comunicou ao seu irmão, em dezembro de 1823, o livro de Collins desse mesmo ano, *Grundlinien des typischen Kalkuls*, seria muito parecido com sua própria obra, apesar de ele também comentar de maneira crítica sobre "especulações generalizantes". Porém, ele relatou corretamente que Collins, diferentemente da sua concepção, "*hier keine bestimmte Operation genommen, sondern eine beliebige Operation allgemein gedacht ist, welche nun mit ihren Gegensätzen allgemeinen betrachtet wird, um zu entwickeln, wie sich diese Gegensätze modificiren und diese Modifikationen zur Erscheinung kommen (in den Formeln)*"[24] (Schubring 1983, p. 227, 245). O livro mostra uma comunicação

[23] Como foi a prática de Ohm, ele criticou fortemente na sua resenha os conceitos de número de Cauchy.

[24]"Nenhuma operação específica é realizada aqui, mas qualquer operação é geralmente pensada, que agora é considerada com seus opostos em geral, a fim de desenvolver como esses opostos se modificam e como essas modificações aparecem (nas fórmulas)."

forte entre as concepções de Collins e de Ohm. A página do título já contém uma citação de uma afirmação de Ohm sobre o processo de abstração e relação entre o particular e o geral. No prefácio, Collins conta ainda como conheceu as obras de Ohm: Ohm enviou em 1819 o seu livro *Kritische Beleuchtungen der Mathematik überhaupt* (1819), entre outras, para a Academia de Petersburgo e Collins foi encarregado de escrever uma resenha do livro. Esta tarefa o incitou a procurar todas as publicações dos dois irmãos, sendo instigado por eles a elaborar sua concepção de generalização das operações (Collins 1823, pp. *iii).*

3.6.2. Estado da arte

Enquanto o papel de Martin Ohm na universidade Berlim foi estudado primeiramente por Kurt-Reinhard Biermann, na sua obra importante sobre os matemáticos nesta universidade (Biermann, 1973)[25], a obra dele ficou conhecida, mas em geral só mencionada brevemente, sem uma própria análise. Felix Klein mencionou Ohm, no seu volume sobre a matemática no século XIX, no contexto das pesquisas sobre os fundamentos da aritmética, apenas como uma curiosidade (Klein 1926, p. 178). Bourbaki indicou Ohm como um dos primeiros a tentar avizinhar a aritmética com a análise, abordando os números racionais (Bourbaki 1984, p. 37). Boyer mencionou, também brevemente, Ohm na sua História da Matemática como uma primeira tentativa de reduzir a análise à aritmética, no contexto da concepção da aritmetização da análise (Boyer [1968] 2012, p. 392).

Uma primeira discussão mais ampla foi feita pelo historiador Lubos Novy, na sua obra *Origins of Modern Algebra* (1973), analisando abordagens para estudar a estrutura dos números na primeira parte do século XIX. Novy comentou muito sobre a posição de Ohm de relegar a geometria em um estatuto subordinado à aritmética. Quanto à concepção de números, Novy enfatiza que os números foram baseados nos números naturais, não denominados, e que o seu foco foram as operações entendidas como derivadas daquele conceito – e não as propriedades das quantidades (Ohm 1973, p. 185). Novy praticamente não enfatizou a concepção de Ohm da *Zahlbereichs-Erweiterung*. Segundo ele, a abordagem de Ohm era tradicionalista, continuando os rumos do século XVIII, e não assumindo os novos rumos da álgebra (ibid., p. 89).

Análises mais intensas foram realizadas por um grupo na universidade de Bielefeld. A tese de doutorado de Bernd Bekemeier estudou a obra principal de Ohm, o Ensaio de um Sistema Coerente da Matemática, e focou em particular sobre a concepção de *Zahlbereichs-Erweiterung*, concebida para estabelecer a construção dos vários domínios de números a partir dos naturais (Bekemeier, 1987). Desde já, o conceito de *Zahlbereichs-Erweiterung* tornou-se discutido e recebido na educação de matemática na Alemanha, para o currículo da aritmética. Hans-Niels Jahnke pesquisou sobre relações entre as concepções de Cauchy e de Ohm sobre a aritmetização da análise, em particular sobre a divergência de séries (Jahnke, 1987).

3.6.3. A concepção de Ohm: uma separação clara entre quantidade e número e o papel central assumido pelas operações no processo de extensão

[25] Biermann publicou em 1988 uma versão revisada e ampliada.

Em seu grande projeto de revisão da matemática elementar, o alvo principal das críticas de Ohm em relação à matemáticos anteriores consiste na posição fundamental que era dada às quantidades e a associação próxima que existia entre esse conceito e o de número. Para Ohm, assim como vimos já em Förstemann, a separação entre número e quantidade se torna crucial para a separação entre os campos da "matemática pura" e "matemática aplicada" e fica claro que o assunto da matemática pura é considerado superior.

> As quantidades são comparadas por meio de números, e unicamente por meio de números inteiros absolutos. Não há outros números. A doutrina dos números deve preceder a doutrina das quantidades, independentemente do conceito de quantidade. (Ohm, 1822, p. xi).

A figura abaixo, extraída da segunda edição da primeira parte de sua grande obra, exibe o mapa da disciplina que Ohm tinha em mente.

Matemática

I. Teoria dos números
    1. Teoria elementar dos números.
    2. Teoria superior dos números.

II. Teoria das quantidades
    1. Geral
    2. Especial
        a. Teoria das quantidades espaciais
        b. Teoria das quantidades de força

Na *Zahlenlehre* (teoria dos números), Ohm identifica a matemática pura, que consiste na aritmética, álgebra e análise. Já a *Grössenlehre* (teoria das quantidades) consiste em uma teoria posterior aplicada, na qual podemos encontrar a física e a geometria. Como pudemos ver neste capítulo, autores franceses como Cauchy e Carnot não realizaram esse tipo de separação fundamental entre aplicações e matemática pura com base nesses conceitos fundamentais. De fato, após elogiar esses dois autores franceses por suas críticas a aspectos anticientíficos que dominavam a análise, Ohm os acusa de falharem em realizar a devida reforma na disciplina precisamente por acreditarem que ela tem a ver com conceito de quantidade. Como a passagem abaixo deixa claro, os conceitos de quantidade negativa e imaginária são também contestados pelo autor alemão, isto é, nesse sentido, ele mostra um alinhamento com Carnot e não com as tendências na Alemanha. No entanto, essa posição radical não permanecerá em toda sua carreira.

> Todo mal surgiu da visão de que o cálculo tem a ver com quantidades. Isso deve levar à infeliz suposição de quantidades negativas e das ainda mais infelizes quantidades imaginárias, e cortou pela raiz qualquer tratamento mais livre e espiritual do assunto (Ohm, 1829, p. vi-vii).

Na prática, a concepção de Ohm o leva a tratar os dois assuntos separadamente, assim como Förstemann, iniciando com a *Zahlenlehre*. Como se pode perceber na primeira passagem da

presente seção, Ohm mantém a separação ontológica comum: os números são apenas os "inteiros absolutos", isto é, os "números naturais". Nem os negativos e nem mesmo o zero eram números propriamente, conforme a concepção francesa da época segundo Carnot. Em todas as definições do conceito que vemos em suas diferentes obras, encontramos o substrato intuitivo que deixa claro que o conceito fica associado a noções de contagem, o mesmo valendo para as definições básicas das operações: "O conceito de número é um conceito simples, e dado a nós; com ele o conceito de múltiplo e simples [*einfach*[26]]" (Ohm, 1828, p. 1)

Sua concepção limitada de número é o que o leva a desenvolver uma abordagem peculiar de extensão para legitimar as demais "formas numéricas (*Zahlformen*) tomando como base as "operações". Para Ohm, a consideração dos números nos leva s sete tipos diferentes de "atos mentais" ou operações entre números - adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, extração de raiz e os logaritmos - os quais levam a sete representações simbólicas:

$$a + b,\ a\text{-}b,\ ab,\ a{:}\,b,\ a^b\ \sqrt[b]{a},\ a?\,b^{27}$$

Tal como vimos na obra de Hankel, Ohm inicia apresentando cada uma dessas operações restringindo-se aos números, de modo que, por exemplo, a operação *a -b* fica restrita pela condição de que *a* seja maior do que *b*. A adição e a subtração são tratadas em conjunto, enquanto a multiplicação e a divisão são tratadas de maneira independente em outro capítulo e as outras tres operações surgem logo em seguida. Por tratar os grupos de operação de maneira independente, Ohm ainda precisa apresentar como podemos misturá-las.

Após definir cada grupo de operações, Ohm depreende uma série de igualdades juntamente com propriedades da relação de igualdade que se encontram claramente listadas ao fim de cada capítulo na segunda edição dao primeiro volume da obra, publicado em 1828. No caso da adição e subtração, Ohm depreender as seguintes relações:

α) das igualdades

1) $a+b=b+a$
2) $(a+b)+c = (a+c)+b$
3) $(a-b)+b=a$
4) $(a+b)-b=a$
5) $a-(a-b)=b$

β) da propriedade que diz que iguais somados ou subtraídos de iguais dão resultados iguais
γ) da propriedade referente à igualdade, que diz que se duas expressões são iguais à uma terceira, elas serão também iguais entre si (Ohm, 1828, p. 20)

Para chegar a esses resultados, Ohm muitas vezes recorre a demonstrações que claramente mostram o caráter intuitivo de sua fundamentação aritmética. A relação de associatividade da adição, por exemplo, $(a+b)+c = a+(b+c)$ é considerada verdadeira "pois em todos os casos obtém-

[26] *Einfach* é o termo em alemão que significa o oposto de "*mehrfach*"("múltiplo"). A nossa tradução, "simples", não é tão representativa pela falta de um termo mais adequado em português para transmitir essa ideia.
[27] O simbolismo peculiar de Ohm, *a?b*, indica o logaritmo de *a* na base *b*.

se diretamente o número que possui tantas unidades quanto *a, b* e *c* tomados em conjunto", enquanto a comutatividade, $a+b = b+a$, resulta do fato de que "sempre se tem o número que possui tantas unidades quando os números *a* e *b* tomados em conjunto." (Ohm, 1828, p. 14)

Após depreender esses resultados que resumem as operações, Ohm transita para um novo plano ontológico onde as letras não mais representam números verdadeiros[28] e sim algo mais geral", desprovido de significado enquanto as operações e a igualdade ganham um novo significado.

Ao lidarmos com esses símbolos, nós simplesmente assumimos a validade dessas equações que nos dizem que manipulações simbólicas podemos realizar, agora livres das restrições exigidas pela consideração específica de números.

Essa transição crucial dos números para expressões formais chamadas por ele em 1816 de meras "figuras" é o que abrirá caminho para o surgimento de novas "formas numéricas" não verdadeiras, como os negativos, as frações, os irracionais e os complexos. As restrições impostas às operações por conta do significado numérico dos símbolos literais não existem mais e a tarefa da análise consiste precisamente em buscar a generalização das operações.

> De acordo com isso, a Análise não lida com quantidades, mas apenas deve determinar as leis (mais gerais) das operações e segui-las com as mais distantes modificações. - Os assim chamados negativos, fracionários, imaginários, - não são quantidades, mas manifestações especiais mais gerais de conceitos de números (formas mais gerais ou composições), surgindo de uma abstração necessária das operações do que se está operando. Equações entre imaginários, quebrados, negativos não são igualdades entre quantidades e portanto não indicam uma semelhança (*Einerleiheit*) da quantidade, mas consistem meramente em modificações especiais das oposições sob as quais as operações encontram-se entre si, e meramente indicam a identidade das operações (Ohm, 1828, p. vii-viii)

A maneira exata como a transição ocorre é colocada de maneira bastante detalhada na edição de 1828. Tendo apresentado as leis das operações de soma e subtração, Ohm enuncia o que seria a sua versão do "princípio da permanência" e faz questão de oferecer uma demonstração de que resultados não numéricos não entram em contradição com os resultados numéricos anteriores.

> Se for mantida a dedução das equações descritas em (§14, α, β, γ) (que inclui todos os casos possíveis, e que, em particular, também forneceu os resultados dos parágrafos imediatamente anteriores) em geral, sem se preocupar mais com o significado das expressões individuais (ou seja, para os casos em que todas as diferenças são possíveis, bem como aqueles em que elas, parcial ou totalmente, se tornam impossíveis), a diferença *a-b*, então também a soma $a + b$ bem como a equação, será entendida em um outro sentido mais geral do que aquele que surge em (§10) e (§8) [as definições de soma e subtração], se os resultados individuais ainda tiverem um significado; mas nunca se pode ser levado a

[28] Número verdadeiro é uma expressão utilizada por Ohm para se referir ao que hoje chamamos de números naturais. Com ela, Ohm demarca ainda mais a diferença ontológica entre esses e os demais "objetos numéricos". Números negativos, fracionários e imaginários serão por ele chamados de "formas numéricas" e veremos mais sobre isso posteriormente.

> contradizer resultados numéricos por meio dessa abordagem mais geral com meras formas de cálculo.

3.6.4. Somas e subtrações indicadas e o surgimento das formas numéricas negativas positivas e nulas

Tendo feito a transição, Ohm também faz questão de oferecer uma nova definição para as operações, assim como precisa redefinir o conceito de igualdade, uma vez que estes eram definidos anteriormente tendo em vista uma relação entre números. A soma $a+b$ e a subtração $a-b$ não representam mais uma reunião ou remoção de unidades, mas "operações indicadas".

> Mas buscando o significado desses empregos mais gerais da soma, da diferença e da equação, descobre-se facilmente que agora a soma $a+b$ consiste em uma soma somente indicada e a diferença $a-b$ em uma subtração somente indicada, portanto soma e diferença devem ser consideradas meras formas de cálculo [*Rechnungsformen*], e as equações simplesmente revelam o comportamento de ambas as operações entre si.

Voltando ao texto, Ohm então começa a deduzir alguns resultados partindo-se da premissa de que teoremas α, β e γ são gerais. Em particular, pode-se agora considerar a forma antes impossível $b-b$, uma vez que não nos prendemos mais às condições impostas pela subtração entre números. Substituindo-a nas equações até então depreendidas, obtém-se que

$a+(b-b)=a$

$a-(b-b)=a$

Ohm então simplesmente define que expressões da forma $b-b$ podem ser substituídas pelo símbolo 0, pronunciado como "nulo". Dessa forma, vale que

1. $a+0=a$ ou $0+a = a$
2. $a-0=a$ (Ohm, 1828, p. 36)

É importante perceber como Ohm define zero sem recorrer a noções concretas de "nada". O zero é definido como uma substituição de uma subtração agora desimpedida pelo significado numérico dos termos literais, mostrando o caráter abstrato do conceito. O zero não constitui um objeto da teoria dos números verdadeiros, mas consiste em uma "forma de cálculo". Vale apontar ainda que a definição do zero é a mesma que será feita por Graßmann em 1861, como veremos posteriormente.

Tendo definido o 0 como uma "abreviação" de uma operação, Ohm define os números aditivos e os números subtrativos, respectivamente, como sendo as expressões $0+a$ e $0-a$, os quais podem ser simplesmente representados por $+a$ e $-a$. Dessa forma, termos algébricos "positivos" e "negativos" emergem também por meio de uma abreviação ou simplificação simbólica de operações. Não somente isso, mas essas definições permitem que as regras dos sinais das operações de soma e subtração sejam deduzidas (Ohm, 1828, p. 37). Substituindo-se b por 0 em algumas equações, obtemos, por exemplo, que

$$a+(0+c)=(a+0)+c=(a+c)+0, \text{ ou seja, } a+(+c)=a+c$$

E colocando 0 no lugar de *a* obtemos que $+(+c)=c$. Por um processo semelhante, podemos obter que -(+c)=-c, +(-c)=-c e -(-c)=+c

Essas últimas formas são importantes pois é colocada da mesma forma que a regra dos sinais determinada por Cauchy. No entanto, Cauchy define anteriormente que os sinais + e - possuem um segundo significado além do seu significado operacional, a saber, o de inverter (no caso do -) ou manter o sinal (no caso do +) pertencente à expressão literal que os sucede. No caso de Ohm, todos os sinais + e - indicam operações entre dois números, e eles surgem sem acompanharem dois símbolos por conta de uma definição clara de que isto simplesmente significa a omissão do termo 0 à frente do sinal. Dessa forma, os sinais + e - não são ambíguos: representam sempre uma operação entre dois números e, quando surgem expressões "puras" como $+a$ ou $-a$, estamos lidando na verdade com uma simples abreviação das operações $0+a$ *e* $0-a$, respectivamente.

Após obter uma série de resultados utilizando-se de formas de cálculo gerais, Ohm agora considera os casos em que, nas formas de cálculo gerais obtidas, substituímos as letras por números verdadeiros. Ou seja, agora ele investiga que tipos de resultados podemos obter através de sequências de operações como $12-(0-14)$ ou $(1+2)-6$, *etc.* sem assumir que esses símbolos sejam números em seu sentido verdadeiro. Ohm obtém três tipos de resultados simplificados possíveis: um número verdadeiro ou as formas impossíveis 0 e $-z$, onde z representa um número verdadeiro (isto é, -1, -2, -3, etc..). Essas formas agora são chamadas de "formas numéricas especiais", mas Ohm não associa o conjunto desses tipos de formas numéricas a nenhum nome específico como "números inteiros"

> A apreensão mais geral das somas e das diferenças, conforme determinado por (§29), nos leva então, quando se houve originalmente só números verdadeiros, a nenhuma outra forma especial do que o 0 (zero) e ao número subtrativo -z, onde z é um número verdadeiro.
>
> Para indicar que em uma expressão subtrativa $-z$, onde o termo z não é mais ele mesmo uma soma ou diferença, impossível ou não, mas um número verdadeiro, nós também chamaremos essa expressão $-z$ de um número negativo. E pela uniformidade, desejamos chamar $+z$ de um número positivo quando quisermos deixar claro que z não é nada além de um número verdadeiro (Ohm, 1828, p. 42).

3.6.5. Multiplicação, divisão e operações mistas: números fracionários "positivos"

Após depreender, da mesma forma que no capítulo anterior, um grupo de igualdades α que sumarizam os resultados acerca das operações e as relações β e γ acerca da igualdade, Ohm passa a tratar os símbolos literais como sendo sem conteúdo e redefine as operações. A igualdade também é redefinida e passa a ser designada "igualdade multiplicativa". Considerando-se as formas de cálculo obtidas mas agora substituindo as letras por números, Ohm obtém o seguinte resultado:

> A última forma especial $A{:}B$ ou $\frac{A}{B}$, onde A e B são números verdadeiros, mas A:B ou $\frac{A}{B}$ não é número (verdadeiro) e nem 1, pode ser chamada número fracionário ou fração; e então A pode se chamar de numerador e B por outro lado de denominador da fração. O número (verdadeiro), em oposição aos quebrados, seria então chamado também de número inteiro[29] (Ohm, 1828, p. 74)

Nota-se, portanto, que os números negativos e o zero não são contemplados nesse domínio numérico, uma vez que eles são formas numéricas provenientes das operações de subtração e soma. Essa é uma consequência direta da independência que os grupos de operações teriam entre si, conforme colocado na segunda edição do primeiro volume:

> Esses dois capítulos portanto não surgem em sequência, mas encontram-se lado a lado, e cada um dos dois poderia ser o primeiro se a multiplicação não resultasse da adição, se não fosse por isso mais natural, já que os dois capítulos não podem ser apresentados ao mesmo tempo para observar as regras aqui seguidas (Ohm 1828, p. 55).

A reunião de todas essas formas numéricas especiais, incluindo também as frações negativas, ocorrerá no capítulo seguinte, onde as quatro operações básicas serão consideradas em conjunto. É de se notar, no entanto, que a primeira edição da obra é estruturada de uma maneira diferente, de modo que as operações são misturadas imediatamente com a apresentação das operações de multiplicação e divisão. Uma consequência disso é que, ao tratar da extensão do conceito de número, as frações incluem as formas negativas e não se apresenta um duplo caminho como vimos na edição de 1828.

3.6.6. Operações mistas: introdução dos "números reais" e os irracionais compreendidos como frações

Ao misturar as quatro operações básicas, os teoremas mais basilares que aqui surgem se relacionam à distributividade, por exemplo, *a(b+c)=ab+bc* e *a(b-c)=ab-ac*. Será com a forma geral dessas propriedades que Ohm, diferentemente de Cauchy, conseguirá demonstrar a regra dos sinais:

1. *(-b).c = 0.c - b-c = 0-bc = -b.c* (obtida substituindo-se *a* por *0* no teorema (*a-b).c=ac-bc*
2. *a (-c) = a.0 - a.c = 0-a.c = -a.c (*obtida substituindo-se *b p*or zero no teorema *a(b-c)=ab-ac)*
3. *(-a)(-b) = -[(-a)b] = -(-ab) = +ab = ab* (a primeira igualdade pode ser obtida substituindo-se c por (0-b) no teorema (*a-b).c=ac-bc* e aplicando-se a distributiva, apesar de Ohm não especificar)
4. $\frac{-b}{c} = \frac{0-b}{c} = \frac{0}{c} - \frac{b}{c} = 0 - \frac{b}{c} = -\frac{b}{c}$(obtida se substituirmos *a* por 0 em $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$)
5. $\frac{a}{-b} = \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$ (pois$(-b)(-\frac{a}{b}) = +b.\frac{a}{b} = a$)
6. $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ (pois $(-b).\frac{a}{b} = -b.\frac{a}{b} = -a$)

[29] Ohm se refere aos números naturais como *ganze Zahlen* (números inteiros), uma prática que veremos ser comum na Alemanha da época.

Ohm demonstra que uma sequência de operações realizadas sobre números verdadeiros resultará em uma forma que pode ser colocada como um "Quociente-diferença" $\frac{A}{B}$. Isso significa reconhecer que todas as formas numéricas até então apresentadas estão contempladas no "conjunto" dos quocientes-diferença. Simplificados, esses objetos podem assumir as formas a seguir.:

$$+\frac{\alpha}{\beta};\ 0\ ou\ -\frac{\alpha}{\beta}$$

O conjunto dos números reais é definido logo a seguir, além de o autor dar um sinal para a existência de números que não são reais, isto é, os números imaginários:

> Essas 5 formas numéricas especiais[30] até então possíveis chamam-se também de números reais, e todas as formas especiais de número que subsequentemente surgem através da generalização das raízes e logaritmos (3), que não podem ser trazidas aos reais, serão chamadas de números imaginários (Ohm, 1828, p. 123)

A definição de número real por Ohm é surpreendente e reveladora, uma vez que ele ainda não introduziu números irracionais até então. De fato, veremos que, apesar de caracterizá-los pelas frações positivas e negativas e o 0, Ohm realmente entende os reais conforme a concepção tradicional e não se referia aos racionais.

Outro aspecto interessante surge em sua definição das relações de ordem. No caso dos números naturais, percebe-se que o entendimento a priori dos números como posicionados em uma sequência dada fornece por si só a noção de ordem. No caso dos números reais, a situação é diferente. Essas relações não são evidentes, uma vez que lidamos apenas com formas de cálculo. Por conta disso, elas são definidas de maneira "arbitrária" (*willkührlicher*) no sentido de que elas não são necessárias. Ele não assume os reais como sendo organizados conforme a reta numérica e reconhece que a definição é feita de tal forma tomando como inspiração a aplicabilidade dos números reais à teoria das quantidades.

> Uma vez que os números reais são apenas formas de cálculo, deve-se definir de antemão qual deverá ser tomado como maior ou menor. As definições são portanto livremente escolhidas de modo que nas aplicações sobre números denominados ou quantidades, o maior ou menor número não denominado será também o maior ou menor número denominado ou quantidade correspondente (Ohm, 1828, p. 95)

Uma definição dessa forma já havia sido feita anteriormente, quando Ohm determina que as frações não poderiam ter denominador 0 para assim fugir da ambiguidade que isto causaria, de modo a mostrar que nem sempre a generalização completa das operações é possível. Ao explicar sua escolha, Ohm diz que "este teorema é da maior importância nas aplicações e oferece aquelas exceções que o cálculo geral sofre às vezes." (Ohm, 1828, p. 112)

[30] Inteiros positivos, inteiros negativos, frações positivas, frações negativas e o 0.

3.6.7. Potências, Logaritmos e Raízes e a combinação entre todas as operações: números irracionais como frações

Naturalmente, as três novas operações são apresentadas a princípio sem serem misturadas com as demais operações. Quando isso é feito, os números irracionais finalmente surgem, apesar dos números reais já terem sido definidos.

Ao tratar da mistura das operações, Ohm define quatro extensões para as operações originais de potência e raiz: a potência absoluta, a potência-diferença, potências reais e a raiz absoluta. Esta última se refere a uma raiz em que o radicando é uma fração ou o em vez de ser necessariamente um número inteiro (Ohm, 1828, p. 187) Ohm questiona se a raiz $\sqrt[b]{a}$ possui sempre um significado, isto é, se existe sempre um número ou fração que, elevado à b-ésima potência, resulta em a. É fácil de ver que nem sempre isso acontece: Se a for inteiro, $\sqrt[b]{a}$ não terá sempre um número natural como resultado e não pode nunca ter como resultado uma fração. Da mesma forma, se a for uma fração da forma $\frac{\alpha}{\beta}$, tanto $\sqrt[b]{\alpha}$ e $\sqrt[b]{\beta}$ precisam ser números verdadeiros para que o resultado seja em si inteiro ou fracionário.

Dessa forma, nesses casos, raizes da forma $\sqrt[b]{a}$ poderiam constituir novas formas numéricas. Ohm tenta atribuir um significado a elas ao observar que se pode obter duas sequências cuja b-ésima potência se torna arbitrariamente próxima de a.

$$\left(\frac{W_n}{n}\right)^b < a < \left(\frac{W_n + 1}{n}\right)^b$$

Dessa forma, podemos "imaginar" que

$$\sqrt[b]{\left(\frac{W_n}{n}\right)^b} < \sqrt[b]{a} < \sqrt[b]{\left(\frac{W_n + 1}{n}\right)^b}$$

Como as raízes se cancelam com o expoente b das sequências, obtemos duas sequências de frações que se aproximam arbitrariamente de $\sqrt[b]{a}$, assumindo que este exista de alguma maneira. O número irracional $\sqrt[b]{a}$ fica então compreendido como o "limite" dessa sequência de frações. Apesar de não se utilizar do termo limite, percebe-se que a concepção de Ohm dos irracionais se encontra na mesma situação da concepção tradicional baseada em limites que também encontramos na obra de Cauchy: ele apenas assume a existência de um número real do qual as sequências monótonas limitadas se tornam arbitrariamente próximas.

> Em relação ao teorema anterior, qualquer que seja o número absoluto inteiro ou quebrado a, sempre haverá um número fracionário na Ideia [*Idee*], porém cujo numerador e denominador nunca pode ser dado (uma vez que ambos devem ser considerados como sendo infinitamente grandes) e que será representado por $\sqrt[b]{a}$, isto é, aquele que, quando considerado elevado à b-ésima potência, traz a como resultado. Esse número quebrado que apenas vive na Ideia e que é igual à raiz $\sqrt[b]{a}$ se chama raiz irracional; e todos que existem da mesma maneira apenas na Ideia, uma vez que eles possuem um numerador e denominador infinitamente grande, nunca um número quebrado que pode ser especificado,

> se chama número irracional de modo geral. Por outro lado, os inteiros ou frações cujos numeradores e denominadores podem ser expressos de maneira finita são chamados racionais (Ohm, 1828, p. 190)

O aspecto surpreendente da concepção de Ohm das raízes irracionais é que, ao perceber que os termos das sequências consistem em frações cujos numeradores e denominadores se tornam arbitrariamente grandes, a raiz fica compreendida como uma fração cujo numerador e denominador são "infinitamente grandes". Para Ohm, a raiz é uma fração mesmo sendo irracional. Isso explica o fato de Ohm ter definido os números reais de uma maneira que, aparentemente, referia-se ao que se compreende tradicionalmente por números racionais. Ohm considera que todos os números irracionais são também frações, ainda que ele as difira ontologicamente das frações racionais pelo fato de estas não envolverem a consideração de um "infinito atual", o que explica o fato de ele dizer que as irracionais vivem apenas na "ideia".

Afirmar que os irracionais são frações significa dizer que eles já estavam sendo considerados quando Ohm definiu os números reais e a concepção de um conjunto intermediário entre os inteiros e os reais, análogo aos racionais, não é necessária. O termo "racional" é utilizado apenas para diferenciar frações com numerador e denominador finito das frações em que esses termos são infinitos. Além das raízes irracionais, Ohm encontra também os chamados "logaritmos irracionais" que, assim como no caso das raízes, são reconhecidos através de uma sequência de frações e existem apenas na "Ideia".

A percepção que tivemos acerca da concepção de Ohm dos números irracionais nos leva a uma observação acerca de um breve comentário de Ferreirós (2007, p. 121). Segundo ele, Ohm teria introduzido os irracionais sucessivamente como raízes, logaritmos, etc., isto é, algebricamente, enquanto a definição de Dedekind em 1872 teria sido completamente geral. De acordo com as nossas considerações, os números irracionais de Ohm devem ter sido implicitamente introduzidos ao definir os números reais como "frações" e a consideração das raízes ou logaritmos irracionais não envolve um complemento algébrico dos "números racionais". É verdade que esses novos números surgem apenas enquanto ele busca um significado numérico para expressões que não possuíam ainda um significado envolvendo as novas operações, mas Ohm consegue encaixá-los na sua concepção anterior de números reais, de modo que uma nova extensão não é realmente feita.

A raiz quadrada geral ambígua e os números imaginários

Ohm não realizou uma extensão completa das operações mistas. Para tanto, seria necessário definir uma raiz $\sqrt[b]{a}$ e um logaritmo $a?b$ em que tanto b como a podem ser quaisquer números reais com a exceção de alguns casos pontuais. Em particular, vemos que Ohm não define raízes em que a é um número negativo nem logaritmos em que b é um número negativo. Por conta disso, evidentemente, não foi possível demonstrar que essas operações mistas gerais preservam as propriedades anteriormente demonstradas. Conforme Ohm explica, a generalização completa só é realizada no fim da segunda parte do seu livro, quando os números imaginários já estiverem definidos.

O surgimento desses novos números surge em meio do estudo de equações polinomiais, Primeiramente, Ohm é motivado a generalizar a raiz quadrada particular após perceber que equação $x^2 = a$, não possui sempre uma solução, a saber, quando a é negativo.

> Portanto, para tornar uma solução geral da equação quadrática $x^2 = a$ possível, devemos, tal como antes com a diferença e depois com os quocientes, tomar a forma $\sqrt{a}$ em um significado bastante geral (Ohm, 1828, p. 276)

Dessa forma, a expressão $\sqrt{a}$ fica identificada precisamente como solução de $x^2 = a$, permitindo assim que a equação possua uma solução geral. No entanto, Ohm observa que, se a for número absoluto (natural), então x poderá assumir tanto um valor positivo como um negativo, $+\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$, de modo que $\sqrt{a}$ se torna uma expressão ambígua nesse caso. De modo a garantir que a forma geral não entre em contradição com esse caso particular em que a é positivo, Ohm determina que a forma geral $\sqrt{a}$ terá também os dois valores formais $+\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$, supondo-se que agora $\sqrt{a}$ possua um significado específico, isto é, determinado pelo significado pré-estabelecido de raiz. Na prática numérica, isso significa que Ohm identifica qualquer raiz quadrada isolada, por exemplo,$\sqrt{1}$, a dois valores específicos distintos, $+\sqrt{1}$ e$-\sqrt{1}$, nos quais $\sqrt{1}$ já possui um "significado determinado".

Para que as propriedades já válidas para raízes inteiras sejam preservadas, algumas condições precisam ser impostas por conta da ambiguidade que caracteriza a forma geral $\sqrt{a}$. Por exemplo, a equação $\sqrt{a^2} = a$, que era válida para todo número -a, só será verdadeira se assumirmos que $\sqrt{a^2}$ corresponderá a apenas um de seus dois valores, a saber, ela jamais corresponderá ao valor -a. Da mesma forma, a propriedade β que diz que, se $a = b$, então as raízes também são iguais, isto é, $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, só será válida após o pressuposto de que as expressões $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ representam apenas um de seus dois valores de tal maneira que a igualdade permaneça válida.

Com a generalização da raiz por meio da equação $x^2 = a$, Ohm obtém uma fórmula geral da solução da equação quadrática. Especificamente no caso em que a raiz da solução contém um termo negativo, a solução terá a forma

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-q^2}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{q}{2a}\sqrt{-1}.$$

Figura 2: solução da equação quadrática (Ohm, 1828, p. 283)

de modo que Ohm consegue deduzir que toda equação quadrática terá duas soluções nas formas$P + Q\sqrt{-1}$e $P - Q\sqrt{-1}$. Nos capítulos seguintes, Ohm deduzirá que as equações de terceiro e quarto grau também apresentam soluções algébricas que possuem uma forma como essa, o que culminará no seu tratamento dos números imaginários.

A expressão $p + qi$ como a última forma numérica

No último capítulo da obra, Ohm considera a expressão $p + qi$ e as operações com essas formas, sendo i uma raiz quadrada geral e portanto ambígua$\sqrt{-1}$. Conforme o procedimento qe ele segue nessa obra, as operações realizadas com a forma geral $p + qi$ não são simplesmente definidas mas são de fato demonstradas. Primeiramente, ele encontra as várias potências de *i*, que independem se $i = +\sqrt{-1}$ou $i = -\sqrt{-1}$. Isso permite que ele então encontre as quatro primeiras operações básicas entre "formas complexas", além de demonstrar os quatro primeiros graus de suas potências e raízes., tendo em vista que ele apenas considerou equações polinomiais até o quatro grau até então.

Após isso, Ohm obtém o importante resultado que seria uma versão incompleta do teorema fundamental da álgebra: todas as equações polinomiais de grau até quatro sempre podem ser resolvidas e suas soluções possuem essa forma possuem soluções dessa forma. Além disso, Ohm diz ainda que:

> [...] Portanto toda expressão possivelmente formada até então dos números naturais ou pensados como dados por uma certa composição é real ou imaginária, mas em todo caso pode ser levada à forma $P + Qi$ [...] (Ohm, 1828, p. 416)

Ohm reconhece por ora que o resultado é ainda limitado uma vez que as operações de potenciação e radiciação, assim como o logaritmo, ainda não foram devidamente generalizadas. No entanto, o resultado sugere que a combinação entre as operações pode sempre ser igualada a uma forma complexa, isto é, a nova forma numérica constitui a última necessária, além de englobar todas as anteriores. Por conta disso, essas formas numéricas são chamadas por ele de "número geral-numérico" (Ohm, 1828, p. 417)

A generalização final das operações ocorre na segunda parte da obra: após ele "obter" o teorema fundamental do cálculo em sua versão acabada, Ohm consegue definir a raiz n-ésima geral, a qual possui *n* soluções complexas e, no último capítulo, a potência e o logaritmo são também finalmente generalizados. Por não precisar mais introduzir novas formas numéricas nesse processo, os "números geral-numéricos" realmente provam sua generalidade.

3.6.8. A Análise como parte da *Zahlenlehre* de Ohm

Na presente seção, analisaremos como o conceito de número de Ohm se manifesta no desenvolvimento de sua teoria da análise, conforme ela é desenvolvida a partir da segunda parte do volume sobre a *Niedern Analysis* e no seu segundo volume, "*Höhern Analysis*" (Análise superior). Conforme mencionamos anteriormente, Ohm compreende que a sua teoria formal das sete operações da aritmética fundamenta toda a análise, de modo que o seu conceito formal de número constitui o pilar que sustenta a análise superior, como o próprio autor admite (Ohm, 1829b, p. *xv*) A prática de lidar com números denominados não constitui, portanto, o propósito da análise na matemática pura, o que tampouco significa que essa prática deva ser completamente ignorada, dada a sua utilidade prática. Mas, visando a uma matemática pura independente, Ohm aborda o assunto sob esses dois pontos de vista claramente distintos: análise formal e análise numérica.

A concepção de cálculo na qual Ohm se apoia é aquela defendida por Lagrange, isto é, o pressuposto básico de que as funções relevantes na análise podem todas serem representadas em

séries de Taylor ou séries de potências finitas, chamadas de inteiras. Conforme Ohm mesmo admite, Lagrange teria sido o responsável por uma apresentação simples e essencial do assunto, diferentemente de autores anteriores (Ohm, 1829b, p. v, vii, *xx*) Com as séries formais de Taylor, Ohm consegue definir operações sobre funções, além de conceitos como a derivada, sem a necessidade de recorrer a concepções numéricas como aquela de limite, nem mesmo à consideração de quantidades infinitamente pequenas.

Apesar de assumir a primazia do cálculo formal com séries de Taylor, dentro dessa obra, Ohm não deixa de apresentar separadamente questões do âmbito numérico, nas quais o valor da cifra (*Ziffernwerth*) das funções é considerado. Nesse território, a influência da obra de Cauchy se torna mais evidente. É somente dentro desse tópico que se pode considerar a questão da continuidade de uma função e a definição proposta por Ohm se assemelha à apresentação oferecida por Cauchy, isto é, em termos de diferenças.

> Se futuramente for dito: uma função F(x) de *x* varia continuamente, com os valores continuamente variáveis de *x* então depreende-se daí: que a diferença $F(x+h) - F(x)$, que será chamada de variação de $F(x)$, torna-se menor quando absolutamente tomada, quando menor for considerado *h*, e que essa variação pode se tornar menor do que qualquer número pequeno porém dado *D*; e de fato para todo valor de *x*. Diz-se porém que $F(x)$ varia de maneira contínua para *x* entre α e β, então o que foi dito sobre a diferença $F(x+h) - F(x)$ apenas se *x* possuir um valor entre α e β. O número h chama-se daí a variação de *x* (Ohm 1829a, p. 138).

Nota-se que, diferentemente de Cauchy, Ohm considera tanto uma continuidade global como uma continuidade em um intervalo. Para considerar a variação contínua da função, Ohm também assume a variação contínua da variável *x*. Logo em seguida, Ohm oferece uma demonstração de que toda função inteira é contínua. A demonstração é bastante algébrica e se concentra em mostrar que a diferença $F(x+h) - F(x)$ pode se tornar tão pequena quanto se queira assumindo-se que *h* se torne suficientemente pequeno. No entanto, ela também necessita do pressuposto da representabilidade da função como uma série de potência e o fato de que sua derivada pode ser obtida diretamente a partir de sua expressão algébrica. Por conta disso, Ohm assume a diferenciabilidade para demonstrar a continuidade de *F*.

Um dos resultados que ele consegue obter a partir da continuidade da função inteira é o teorema do valor intermediário e sua demonstração mostra-se qualitativamente diferente da demonstração supracitada: "se $F(x)$ for positiva para $x = a$ e negativa se $x = b$, então haverá algum *x* nesse intervalo tal que $F(x)$ será nula." (Ohm, 1829a, p. 142) De fato, a demonstração de Ohm se assemelha bastante com a primeira demonstração oferecida na obra de Cauchy de 1821: F(x) se altera de maneira contínua, logo não pode "pular" o zero ao ir dos positivos e negativos. A demonstração é marcadamente verbal e em nenhum momento envolve passagens de limite e manipulações algébricas das diferenças que caracterizam a continuidade em sua definição, sem que Ohm em qualquer momento questione o rigor da demonstração.

> [...] mesmo porque, enquanto *x* assume de maneira contínua todos os valores próximos entre si entre *a* e *b*, F(x) apenas altera-se de maneira contínua, portanto deve ultrapassar o Zero na passagem dos positivos para os negativos (Ohm, 1829a. p. 142).

Após a demonstração, Ohm faz um comentário adicional a respeito da ocasião em que a raiz *x* seja irracional:

> Esse número irracional pode, no entanto, não ser dado, então podemos considerar infinitos valores aproximados específicos, os quais tornam-se menos diferentes dele do que qualquer número tão pequeno quanto se queira (Ohm 1829a, p. 142)

Após o tratamento das "funções inteiras", Ohm finalmente considera o conceito das séries formais infinitas de potências de *x* "que nunca são realmente apresentadas, mas apenas vivem na Ideia". As séries finitas, de fato, são consideradas como um caso especial das séries infinitas (Ohm, 1822, p. xiv).

Assim como no caso das funções inteiras, Ohm separa sistematicamente séries de potências formais, isto é, aquelas em que *x* é "geral", das séries numéricas, que surgem quando substituímos o símbolo *x* por um valor numérico. Conforme ele destaca, não faz sentido falar de convergência quando estamos considerando séries formais, mas apenas quando lidamos com séries numéricas (Ohm, 1829, p. 260-261) Nesses casos, pode-se dizer que a série assume um *valor*. Ohm também busca sistematicamente diferenciar uma igualdade formal entre duas séries e a igualdade numérica, que indica uma convergência. A igualdade formal não garante a igualdade numérica entre as duas séries pois é preciso verificar a *convergência* das séries em ambos os lados da equação. Nos casos em que isso acontece, pode-se dizer que a igualdade é mantida na passagem das séries formais para as séries numéricas. O caso exemplar é a função racional $\frac{1}{1+x}$. Para encontrar a sua forma em série de potência, $\sum_{v=0}^{\infty} av(1+x)$ Ohm considera a igualdade:

$$1 = \sum_{v=0}^{\infty} av(1+x)$$

e, comparando os coeficientes em ambos os lados, conclui que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots$Esta é uma *igualdade formal*, isto é, é válida independentemente dos valores numéricos que possam ser atribuídos a *x*. É apenas quando pensamos os termos como sendo números que devemos verificar se a igualdade formal se transforma em uma igualdade numérica, o que equivale a dizer que a série é convergente. Conforme vimos, Cauchy era contrário a essa prática de manipular séries infinitas de maneira puramente formal, isto é, séries infinitas que não sejam convergentes.

Ohm chega a considerar a convergência de algumas funções numéricas para valores de *x* em certos intervalos. Para tanto, Ohm se utiliza de critérios de convergência que foram apresentados por Cauchy. Diferentemente dele, no entanto, Ohm não separa fundamentalmente números de quantidades e "expressões": após sua sucessiva extensão das formas numéricas, ele simplesmente aponta que *p+qi* inclui todas as formas numéricas anteriormente obtidas. Diante disso, ele tampouco necessita de um conceito de "infinitamente pequeno" para separar limites tendendo a números reais de limites que se aproximam do zero.

Uma consequência natural da abordagem de Ohm é que ele, assim como Lagrange, desenvolve uma teoria da análise que é fundamentalmente independente de noções de limite que, por sua vez, depende da ideia de que a variável assume valores numéricos. O conceito de derivada pode ser estabelecido de maneira independente da noção de limite considerando-se a função y_{x+h} isto é, a expressão de *y* tal que *x* é substituído por $x+h$ onde quer que ele apareça. Como Ohm lida apenas com funções que se expressam em séries de potência (finitas ou não), podemos obter que $y_{x+h} = A + Bh + Ch^2 + \ldots$ A derivada de *y* será simplesmente definida como sendo o coeficiente *B* dessa expressão (Ohm, 1829b, p. 64-65), de modo que o "cálculo diferencial" resume-se à tarefa de encontrar esse coeficiente expandindo-se a expressão de y_{x+h}. Neste processo, não é necessário portanto considerar noções de limite. Ohm chega a apresentar diferentes métodos, incluindo o "método dos limites" [*Methode der Grenzen*] para realizar a mesma tarefa e chega a reconhecer que eles podem tornar a tarefa mais prática e rápida nas aplicações. No entanto, ele sempre destaca a primazia do cálculo formal que deve ser independente de qualquer noção de limite:

> Uma vez que o principal requisito do analista é contar com expressões completamente gerais (ou seja, aquelas que ainda não são reais e ainda não imaginárias), o cálculo diferencial é novamente melhor a este respeito do que o método dos limites (Ohm, 1829, p. 112).

Para concluir, é importante frisar que a separação fundamental entre séries de potência formais e numéricas se encontra presente também na Escola Combinatória que influenciou fortemente a formação de Ohm e o já mencionado Jakob Fries também fez uma separação fundamental da mesma forma. Uma novidade trazida por Ohm é que, subjacente a essa separação, Ohm ainda buscou justificar à sua maneira a legitimidade de "formas numéricas" além dos números naturais e para tanto, se utilizou da sua noção formal de número não denominado. Isso é o que atribui legitimidade ao cálculo numérico sem que Ohm deixe de destacar a primazia do cálculo puramente formal.

3.6.9. Recepção de ideias de Martin Ohm

Um dos aspectos mais marcantes da abordagem de Ohm consiste não somente na sua maneira única de realizar a extensão do conceito de número como a sua epistemologia formalista que justificaria o método e que é por vezes comparada com aquela da álgebra simbólica dos ingleses. Apesar de a comparação em termos da epistemologia ser válida, compreendemos que as diferenças no método da *Zahlbereichserweiterung* de Ohm e a álgebra que vemos, por exemplo, na obra de Peacock, não foram suficientemente destacadas. É de se notar que, apesar das semelhanças apontadas, não encontramos pistas sobre a existência de uma comunicação entre Ohm e os algebristas ingleses nas décadas de 1810 e 1820, época em que Ohm estava desenvolvendo e divulgando sua concepção. Apesar disso, é certo que houve recepção da obra de Ohm na Inglaterra ainda na década de 1830. Afirmamos isso pois a obra de Ohm de 1842, *Der Geist der mathematischen Analysis und ihr Verhältnis zur Schule* (O espírito da análise matemática e a sua relação com a escola), na qual ele apresenta um resumo de seu sistema desde o começo além de descrever aspectos de seu formalismo, foi traduzida no ano seguinte para o inglês por Alexander

John Ellis (1814-1890). Em uma redação posterior, *Algebra Identified with Geometry*, Ellis relata que teve contato com as obras de Peacock quando calouro e que foi amigo de Duncan Gregory (1813-1844), a quem devia muito por discussões que lhe proveram "os germes da concepção das operações e não da quantidade, como o verdadeiro significado das expressões algébricas" (Ellis, 1874, p. 81) Logo em seguida, Ellis diz que teve contato na mesma época com a "Tentativa" de Ohm e que posteriormente traduziu grande quantidade de suas obras, apesar de ter apenas publicado a obra supracitada. O fato de ele ter tido contato com a obra de Ohm enquanto amigo de Duncan Gregory em Cambridge sugere fortemente que a obra de Ohm foi conhecida entre matemáticos na universidade, fato que poderia ajudar a explicar a notável proximidade entre suas concepções.

Em sua tradução, Ellis oferece muitos elogios a Ohm e descreve também o sucesso que ele teria obtido em sua carreira na Alemanha apesar do início envolto em críticas:

> Ele viveu para ver suas ideias, que foram a princípio ridicularizadas, serem ensinadas nas escolas mais importantes na Prússia, e por aqueles que ele ensinou, em várias partes do País, em uma escala que se comprova pela rápida venda de suas obras elementares (Ohm, 1843, p. iii-*iv*)

Hankel, por outro lado, demonstra ser muito mais favorável às ideias que foram divulgadas pelos ingleses. Na sua obra já mencionada de 1867, ele critica a maneira convoluta como Ohm apresenta seu sistema na segunda edição de sua grande obra, isto é, aquela que analisamos com mais detalhes acima, alegando haver uma mistura desnecessária entre a concepção antiquada de número e o verdadeiro formalismo. Como vimos, Ohm inicia seus capítulos demonstrando teoremas sobre as operações baseando-se na concepção tradicional ou "intuitiva" de número, isto é, a concepção que Hankel considera a princípio em sua obra, para então favorecer a concepção puramente formal desde a consideração dos naturais, e esta mistura deve ser o problema ao qual Hankel se refere. Para ele, o formalismo deve ser perseguido desde o começo, a partir da nova concepção abstrata de número.

> Na Alemanha, Ohm deu uma descrição puramente formal das operações aritméticas na primeira edição de sua "tentativa", a qual então em sua segunda edição de 1828, sem mudar sua opinião de que "apenas um caminho que é logicamente estrito e portanto apenas aquele que oferece completa convicção", foi tão transformado a favor de uma maior popularidade que ele começa a partir do conceito ordinário de número e o utiliza em todos os lugares misturado com as operações formais (Hankel, 1867, p. 15)

Uma outra crítica à *Zahlbereichserweiterung* de Ohm é também particularmente pertinentes para a presente tese e falaremos sobre ela em mais detalhes na seção seguinte. No *Schulprogramm* de E. Kossak, Kossak cita Weierstraß em uma fala na qual ele discorda da ideia de que haveria outras operações básicas além da soma, subtração, multiplicação e divisão e que as demais poderiam ser analiticamente reduzidas a estas, de modo que a extensão do conceito de número não necessitaria das demais operações para ser completamente realizada. O nome de Ohm não chega a ser explicitamente mencionado na fala de Weierstraß, mas é perceptível que a sua crítica se aplica à concepção desenvolvida por Ohm.

3.7. Dedekind

As contribuições de Dedekind para uma teoria nova dos números irracionais e dos números naturais são amplamente conhecidas e divulgadas pela historiografia e se encontram sistematizadas, respectivamente, nas suas obras *Stetigkeit und Irrationalen Zahlen*, de 1872 e *Was sind und was sollen die Zahlen? (1888)*. Nesta seção pretendemos analisar a concepção de Dedekind do conceito de número tendo em vista a sua pretensão de que o conceito se encontre nas bases da disciplina de Análise.

3.7.1. Julius Wilhelm Richard Dedekind.

Dedekind (1831-1916) nasceu na cidade de Braunschweig, capital do ducado de Brunswick, e estudou no *Gymnasium* local *Martino-Catharineum* Inicialmente, seus interesses estavam na química e na física, mas a matemática logo veio a se tornar a matéria principal para ele. Em 1848, ele ingressou no *Collegium Carolinum*, intermediário entre o ensino médio acadêmico e o nível universitário.Lá, ele estudou geometria analítica, análise algébrica, cálculo diferencial e integral, mecânica e ciências naturais.

Seu ingresso na universidade de Göttingen se deu em 1850, época próxima da criação do seminário de matemática e física da instituição. Ele fez parte do seminário desde seu começo e foi lá que começou a estudar sobre os fundamentos da teoria dos números. Um ano depois, Riemann ingressou também no seminário e Dedekind viria a formar uma relação bastante próxima com ele. Na universidade, Dedekind estudou tópicos como cálculo diferencial e integral, o seminário de hidráulica de Georg Ulrich (1798-1879) e as lições de Wilhelm Weber (1804-1891) sobre física experimental, as quais causaram grande impressão nele. Seu doutorado veio em pouco tempo, em 1852, sob avaliação de Gauß, com uma tese sobre os elementos da teoria de integrais Eulerianas.

No ano de 1854, Dedekind qualificou-se para lecionar na universidade, isto é, como *Privatdozent* em Göttingen. A conferência que ele deu para a obtenção da qualificação, intitulada *Sobre a introdução de novas funções na matemática*, consiste no documento mais antigo em que encontramos suas ideias sobre os fundamentos da disciplina. Além de tópicos avançados como funções trigonométricas e funções elípticas, o breve texto da Habilitação inclui também comentários sobre fundamentos da aritmética elementar onde encontramos uma descrição detalhada da *Zahlbereichserweiterung*, a extensão do conceito de número a partir dos números naturais.

No ano de 1858, Dedekind foi convocado para lecionar na Politécnica em Zurique, onde lecionou sobre cálculo integral e diferencial. Conforme mencionamos antes, ele admite em seu famoso *Stetigkeit* de 1872 que foi enquanto professor de cálculo nesta instituição e no ano de seu ingresso que ele começou a sentir que era necessário reformular os fundamentos da aritmética. A formulação aritmética do conceito de continuidade que se encontra pela primeira vez publicada na obra de 1872 e que serve como base para uma nova teoria dos números irracionais teria surgido por volta dessa época.

> Como professor na Escola Politécnica em Zurique, encontrei-me obrigado pela primeira vez a lecionar sobre os elementos do cálculo diferencial e sentir mais intensamente do que nunca a falta de uma fundamentação realmente científica para a aritmética (Dedekind, 1872, p. 1)

Em 1862, Dedekind foi apontado para lecionar na Escola Politécnica em Brunswick, que havia sido criada a partir do Collegium Carolinum. Lá ele permaneceu até 1916, o ano de seu falecimento, junto de seu irmão e irmã, ignorando toda possibilidade de mudança ou conquista de uma esfera mais ampla de atividade. Na instituição, Dedekind também chegou a assumir cargos administrativos.

3.7.2. Concepções de Dedekind sobre a aritmética em sua Habilitação

Conforme mencionamos, apesar de Dedekind ter admitido que sua busca por uma reformulação dos fundamentos da aritmética teria começado em 1858, encontramos uma primeira breve descrição de seus fundamentos já em sua Habilitação de 1854 para se tornar *Privatdozent* em Göttingen. Lá ele não somente descreve com certo grau de detalhe o método de extensão do conceito de número como também comenta sobre as características fundamentais e singulares da matemática como disciplina científica.

Segundo ele, a motivação por trás da realização de uma *Zahlbereichserweiterung* a partir do conceito original de número recai em um "princípio geral" que ele assume como sendo necessário: a necessidade de "universalizar" as operações inversas. A tomada deste fato como um princípio explícito e claro que torna necessária a extensão do conceito é algo que encontraremos também na concepção de Weierstraß, como veremos em mais detalhes na seção seguinte. Se nos prendermos ao conceito inicial de número, as operações de subtração, divisão, etc. não são sempre realizáveis e, por conta disso, o princípio ordena que devemos estender o conceito.

> Porém tais definições das operações fundamentais não são mais suficientes para o maior desenvolvimento da aritmética, a razão disso sendo que elas assumem que os números com os quais elas ensinam a operar estão restritos a um domínio muito limitado. O requerimento da aritmética, a saber, de criar novamente todo o domínio numérico existente por meio de cada uma dessas operações, ou dito de outra forma: o requerimento da possibilidade incondicional de realizar as operações inversas indiretas de subtração, divisão, etc. torna necessário criar novas classes de números, uma vez que com a sequência original dos inteiros, esse requerimento não pode ser satisfeito (Dedekind, 1932, p. 431)

Por meio desse processo, Dedekind diz que obteríamos sucessivamente os números negativos, fracionários, irracionais e imaginários. A tomada deste importante princípio pode ser relacionado ainda ao princípio que, para Dedekind, caracteriza a matemática de modo mais amplo:as leis depreendidas de suas "definições primitivas" devem ser geralmente aplicáveis (Dedekind, 1932, p. 430) Segundo essa concepção, não somente o conceito de número deve ser estendido como as operações básicas também, isto é, de acordo com o princípio que pode ser entendido como análogo ao já mencionado princípio da permanência e é notável que Dedekind é bastante explícito quanto ao seu enunciado e ao seu papel na estrutura lógica da disciplina.

> Após o campo dos números ter sido estendido dessa forma, torna-se necessário definir novamente as operações que tinham sua eficácia determinada apenas para os números inteiros até então, de modo que elas também sejam aplicáveis aos números recém-criados (Dedekind, 1932, p. 431)

De acordo com sua caracterização da matemática, Dedekind consegue ainda argumentar explicitamente que todo o processo da Zahlbereichserweiterung não é feito de maneira arbitrária, isto é, as novas definições das operações não são arbitrariamente selecionadas, mas acabam decorrendo necessariamente a partir do fato de que elas devem preservar as "leis limitadas" que elas seguem a princípio, a saber, no território dos números naturais. Isto ele apresenta também por meio de exemplos pontuais como a definição da multiplicação quando o multiplicador é negativo. Conforme comentamos na introdução da pesquisa, a questão da arbitrariedade no estabelecimento das leis das operações em meio ao processo da *Zahlbereichserweiterung* foi discutida por matemáticos ingleses assim como por Hermann Hankel e Dedekind mostra uma argumentação distinta à deles, baseando-se no princípio que ele toma como caracterizante para a matemática.

É certo que Dedekind não apresenta explicitamente todo o processo da *Zahlbereichserweiterung*, em todas as suas sucessivas etapas, mas apenas descreve suas características básicas. Apesar disso, podemos observar que Dedekind possuía uma noção bastante desenvolvida do processo, fundando-o em princípios bastante explícitos. Posteriormente, além da construção dos números irracionais, Dedekind também realizou de maneira explícita outras etapas do processo em oportunidades distintas, inspirado, entre outras coisas, nas construções realizadas por Hamilton. Não entraremos nos detalhes de cada uma dessas construções, mas o leitor interessado pode consultar uma descrição simplificada que se encontra em Corry (2015, p. 228-232)

3.7.3. *Integral und Differentialrechnung*: manuscrito do curso de 1861/62 na Politechnique de Zurique e o manuscrito de 62/63 (Dugac)

A afirmação de Dedekind em 1872 de que ele teria obtido seu resultado sobre a fundamentação dos números irracionais ainda em 1858 enquanto professor na escola Politécnica de Zurique nos levou a buscar por manuscritos de suas lições na instituição para que pudéssemos verificar se Dedekind chegou a abordar tais reflexões ao longo de seu curso. Obtivemos acesso apenas a um manuscrito de suas lições de 1861/62 feito pelo aluno Heinrich Berchtold, isto é, já 3 anos após seu ingresso e descobrimos que o curso se inicia com uma apresentação breve do conceito de número. Decifrar o manuscrito provou-se um enorme desafio, tendo em vista a caligrafia do autor. Trazemos abaixo uma pequena amostra.

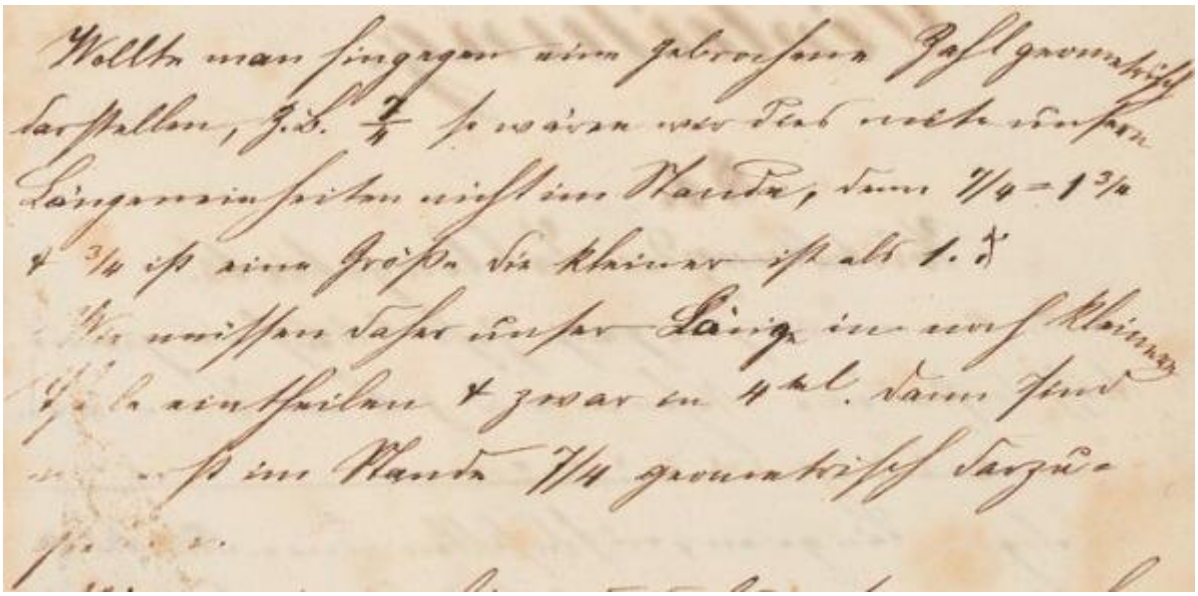

Figura 3: Trecho da página 2 do manuscrito de Berchtold. (Berchtold, 1861, *fl 2*)

O conteúdo acerca do conceito de número cobre apenas as cinco primeiras páginas e é feito de maneira geométrica intuitiva, sem grandes detalhes. Em se tratando dos números irracionais, Dedekind diz apenas que eles não podem ser dados com total precisão:

> Assim vemos que podemos expressar todos os números racionais, sejam eles positivos ou negativos, figurativamente. Só podemos expressar números irracionais com precisão até um certo limite. Vemos, então, que podemos representar qualquer número geometricamente, mas o inverso não é o caso, pois poderia ser dada a nós uma parte de uma reta que não poderia ser medida por nenhuma unidade concebível de comprimento.[31] (Berchtold, 1861, *fl.* 3)

Em seguida, ele ainda demonstra a irracionalidade de $\sqrt{2}$ considerando um triângulo retângulo e isósceles, isto é, mostrando que ele não pode ser comensurável com uma unidade pré-definida. Em sua, a sua nova abordagem não se encontra no manuscrito.

Vale ainda apontar que o manuscrito foi editado posteriormente e publicado por Winfried Scharlau e Max-Albert Knus em 1985. Como os autores reconhecem, algumas partes do texto original que eles julgaram desnecessárias foram deliberadamente removidas, mas identificamos algumas passagens um tanto relevantes que foram excluídas, a saber, a passagem supracitada em que se fala pela primeira vez dos números irracionais.[32]

No ano de 1862, Dedekind passou a lecionar na Escola Politécnica de sua cidade natal, Braunschweig. Apesar de não termos acesso direto a manuscritos do curso do semestre de inverno de 1862/63, verificamos em Dugac (1976, p. 151) um índice obtido de um manuscrito de Dedekind

[31] Wir sehen also, dass wir alle rationalen Zahlen g seien sie positiv oder negativ bildlich ausdrücken können. Irrationale Zahlen können wir nur bis zu einer gewissen Grenze genau ausdrücken. Wir sehen also, daß wir jede Zahl geometrisch darstellen können, hingegen ist es keineswegs auch umgekehrt so, denn es könnte uns ein Theil einer Linie gegeben sein, welche durch keine nur denkbare Längeneinheit zu messen wäre.

[32] Os editores não têm marcadas as partes que eles excluíram do manuscrito original.

com um planejamento para suas aulas de cálculo. Curiosamente, esse índice revela que a primeira parte do curso se chama *Das reelle Zahlgebiet; Stetigkeit desselben* (O campo dos números reais; sua completude). Apesar de não termos acesso ao conteúdo desse capítulo, o título sugere fortemente que, já no semestre de inverno de 1862/63, Dedekind mudou de abordagem e tentou incluir sua concepção dos números irracionais no contexto do seu ensino de cálculo.

3.7.4. Os cortes de Dedekind: a fundamentação dos números irracionais e, consequentemente, de todo cálculo

Na introdução de sua notável publicação de 1872, Dedekind deixa claro que resolver a questão da definição dos números irracionais implica resolver os fundamentos do cálculo diferencial. Segundo ele, essa ciência se encontra ancorada no teorema segundo o qual "toda quantidade que cresce continuamente, mas não além de todos os limites, deve certamente se aproximar de um limite".[33]

Apesar de ter evidências geométricas para a veracidade de tal teorema, Dedekind julga que uma abordagem rigorosa do cálculo exigiria uma demonstração de caráter puramente aritmético do teorema. A proposição se trata da mesma que Charles Méray criticou fundamentalmente em sua publicação de 1868 por ele ser incorretamente assumido (mais detalhes na seção 2.11.2.) e, assim como fez o autor francês, a solução oferecida por Dedekind para o tratamento devido do teorema se dá com o esclarecimento dos números irracionais. De acordo com Dedekind, a definição das chamadas "quantidades contínuas" deveria ser esclarecida aritmeticamente para que as demonstrações na ciência deixassem de se basear, conscientemente ou não, em noções geométricas.

Apesar da sua introdução sugerir um afastamento da geometria de uma proposta rigorosa para os fundamentos dos números irracionais, em sua investigação, Dedekind faz referências à reta geométrica. O autor começa assumindo os números racionais como objetos dotados de suas propriedades básicas de "corpo denso e ordenado", as quais seriam partilhadas pelos pontos da reta em seu entendimento geométrico. A diferença básica entre a reta e os números racionais consiste no fato de que há certamente infinitos pontos na reta que não correspondem a nenhum número racional, tendo em vista a existência de quantidades incomensuráveis. Essa diferença é o que o motiva a criar novos números de modo que tenhamos um domínio que possua a mesma completude que a reta.

Apesar das analogias feitas entre a reta e os números, Dedekind não busca fundamentar os números nas quantidades da geometria. O que ele busca é uma construção puramente aritmética que permita que tais analogias sejam feitas, isto é, a criação intelectual dos números reais não foge à intuição que motivou sua criação, a saber, o que atualmente se reconhece pela completude da reta:

[33] Aproveitamos aqui a tradução oferecida por Ferreirós (1999, p. 131) para a terminologia moderna: "uma sequência monótona crescente e limitada de números reais possui um único limite".

> Pois a maneira em que os irracionais geralmente são introduzidos se baseia diretamente na concepção de quantidades extensivas - o que em si não são definidas em lugar algum - e explica número como resultado da medição de tais quantidades por outra de mesmo tipo. Em vez disso, eu exijo que aritmética seja desenvolvida em si mesma (Dedekind, 1872, p. 17)

Dedekind também destaca a necessidade de seguir o princípio da permanência no processo, isto é, construir os números irracionais a partir do que é dado, os racionais, preservando as propriedades operacionais dos números naturais:

> Assim como os números negativos e fracionários são formados por uma nova criação, e as leis operacionais com esses números devem e podem ser reduzidas às leis operacionais com os inteiros positivos, devemos buscar definir completamente os números irracionais por meio dos racionais apenas (Dedekind, 1872, p. 17)

Finalmente, Dedekind axiomatiza a característica que confere completude à reta e que, segundo ele, não foi e provavelmente não pode ser demonstrada.

> Se todos os pontos de uma reta se encontram em duas classes, de tal maneira que todo ponto da primeira classe se encontra à esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe um e apenas um ponto que produz essa divisão de todos os pontos em duas classes, esse corte da reta em duas porções (Dedekind, 1872, p. 18).

Essa importante definição sobre a continuidade da reta constituirá a referência intuitiva para a propriedade aritmética de continuidade que ele tentará demonstrar após sua construção dos números reais.

Finalmente, no capítulo IV, Dedekind define seus cortes que servirão para a criação dos números irracionais.

> Agora, se qualquer separação do sistema R [dos números racionais] em duas classes A_1, A_2 é dada que possua apenas a propriedade característica de que todo número a_1 em A_1 é menor do que todo número a_2 em A_2, então por brevidade iremos chamar tal separação de corte e designá-la por (A_1, A_2) (Dedekind, 1872, p. 19).

O uso do termo corte é sugestivo pois, intuitivamente, pode-se entender o conceito como uma partição dos números racionais em dois conjuntos senjdo que todo elemento de um conjunto é maior do que o elemento do outro conjunto: corta-se a "reta" em dois pedaços.

Conforme a definição, Dedekind observa que todo número racional define um corte. De fato, se considerarmos A_2 como constituindo os números maiores ou iguais ao número racional considerado e A_1 como sendo formado pelos números menores do que ele. É como se o número racional constituísse a fronteira entre tais cortes. No entanto, Dedekind demonstra logo em seguida a possibilidade de construirmos cortes que não são produzidos dessa forma, isto é, que não são produzidos por nenhum número racional (não possuem um número racional na fronteira): tomando-se qualquer inteiro *D* que não seja um quadrado perfeito, digamos, *D=2*, então podemos definir a classe A_2 como sendo aquela formada por todos os números cujo quadrado é maior do

que *2*. e A_1 como sendo a classe dos demais números racionais. Em simbolismo moderno, poderíamos exprimir que:

$$A_1 = \{x\epsilon\ Q|\ x^2 > 2\} \text{ e } A_2 = \{x\epsilon\ Q|\ x^2 < 2\}$$

Observa-se, no entanto, que o corte que não é formado por nenhum número racional, uma vez que o suposto número da fronteira deveria ser "a raiz de 2" mas pode-se demonstrar que este não se trata de um número racional. Dedekind expõe em sua obra que, de modo geral, raízes de números que não são quadrados perfeitos não são racionais.

A exibição de cortes como este evidencia que há cortes que não correspondem a um número racional em termos da fronteira que apresentamos acima. Diante disso, Dedekind "cria" ou define os números irracionais completamente a partir desses cortes peculiares: os números racionais correspondem aos cortes produzidos por eles enquanto os números irracionais correspondem aos cortes que não são produzidos por nenhum número racional. Ao definir os números irracionais por meio de cortes, os quais podem ser entendidos como partições de números racionais, Dedekind assegura a sua proposta metodológica de definir os irracionais completamente a partir dos números racionais.

No capítulo seguinte, Dedekind finalmente demonstra a "continuidade" dos números reais e, com isso, pode-se dizer que a analogia entre os números reais e as quantidades é finalmente completa. No capítulo VI ele define as operações com números reais tendo como referência os cortes e, no capítulo VII, finalmente, Dedekind demonstra o teorema citado no início de sua obra como base do cálculo infinitesimal.

A maneira como Dedekind introduz os números irracionais se difere do método desenvolvido por Ohm. Ferreirós (1999, p. 121) comenta que Dedekind teria criticado a ideia de que os números irracionais seriam introduzidos por métodos algébricos, isto é, por meio da consideração de operações de extração de raiz e logaritmos, tal como teria feito Ohm, apesar de não termos encontrado a fonte em que Dedekind expõe tal crítica.[34]

3.8. A concepção de Número de Weierstraß: Os "números complexos" como base

A concepção da disciplina de análise defendida por Karl Weierstraß ecoa a defesa da transição epistemológica favorável à aritmetização dos conceitos básicos. Kopfermann oferece uma citação exemplar nesse sentido, retirada de uma lição de 1874 de Weierstraß:

> As principais dificuldades da análise superior vêm precisamente de uma apresentação embaçada e insuficientes detalhes de noções básicas e de operações aritméticas (Kopfermann apud Dugac, 1973, p. 77).

[34]Ferreirós direciona o leitor a uma seção anterior (III.1) onde já teria tratado sobre o assunto. No entanto, a seção não se encontra na obra e esse suposto erro parece persistir na segunda edição, publicada em 2007.

A fim de livrar as demonstrações da análise de noções externas geométricas ou físicas, Weierstraß tomou consciência de que seria necessário reformular o conceito de número irracional, afastando-o da concepção geométrica e favorecendo uma concepção aritmética:

> [...] existem inúmeras maneiras de introduzi-los: seja geométrica, seja física seja partindo da noção de número e das operações fundamentais da aritmética. "Considero que esta é a única maneira pela qual a análise pode ser estabelecida com rigor científico e todas as dificuldades removidas" (Weierstraß, 1923, p. 203-204).

A admissão de que uma reforma fundamental da disciplina deveria começar pelo conceito de número começou a tomar forma enquanto Weierstraß lecionava na Universidade de Berlim entre as décadas de 1860 e 1880. Suas lições consistiam em uma série de quatro disciplinas que eram oferecidas de maneira recorrente e que também eram aprimoradas ao longo desses anos. A primeira delas era intitulada "Teoria de Funções Analíticas", e sua introdução consistia em uma longa apresentação dos diferentes "sistemas" de número, o que atesta a importância que ele atribuiu ao conceito para a sua proposta fundacionista da disciplina. Ao analisarmos a abordagem do autor, verificamos que há muito mais a ser explorado além de sua já conhecida concepção dos irracionais e de seus resultados acerca dos números complexos e hipercomplexos: toda a sua prática de extensão do conceito de número toma como base a noção de *complexe Zahlen*, os seus "números complexos" em um sentido mais amplo do que os números complexos modernos e que tampouco devem ser confundidos com a noção de número hipercomplexo.

3. 8.1. Karl Weierstraß

Karl Weierstraß nasceu em Ostenfeld, na Prússia, em 1815. Desde jovem, Weierstraß destacou-se como aluno no Ginásio e já demonstrava interesse por matemática como leitor do Periódico de Crelle para a matemática pura e aplicada. Aos 19 anos e motivado pelos desejos de seu pai, Wilhelm Weierstraß, ele ingressou na Universidade de Bonn, onde obteve conhecimento nas áreas de direito, economia e administração em preparação para uma posição administrativa na Prússia (Biermann, 1975, 219). Na mesma universidade, Weierstraß também nutriu seu interesse pela matemática, tendo assistido às lições de análise do Julius Plücker e lido a obra de Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* (Fundamentos da nova teoria de funções elípticas), que aborda um dos tópicos preponderantes de suas pesquisas futuras.

Sem ter terminado os estudos em Bonn, Weierstraß voltou para casa depois de oito semestres sem um diploma em mãos. Nesta situação, parentes mediaram que ele podia se matricular na *Akademie Münster*, uma instituição de ensino superior, mas com só duas faculdades e com direitos menores de conferir graus. Mas foi possível de se qualificar para o magistério em escolas secundárias, e assim Weierstraß se matriculou para se tornar professor de matemática. Nos seus estudos de quatro semestres, ele estudou funções elípticas com Christoph Gudermann (1798-1852), um dos poucos matemáticos alemães competentes nesta área, mas com pouquíssimos alunos. Após obter a habilitação em 1840, sua carreira no ensino secundário começou com o estágio exigido de um ano, no ginásio de Münster. Depois, elwe foi contratado na escola

secundária católica Deutsch-Krone e posteriormente na escola secundária, também católica, de Braunsberg, ambas numa região pouco desenvolvida no leste da Prússia.

Em 1854, Weierstraß publicou um artigo no Periódico de Crelle, "Sobre a teoria das funções abelianas". Nele, Weierstraß apresenta soluções parciais para problemas legados por Abel e Jacobi. O artigo garantiu-lhe uma carreira universitária; a universidade de Königsberg lhe conferiu imediatamente o grau de doutor honoris causa. Suas muitas tentativas de obter uma posição de professor no ensino superior asseguraram-lhe, primeiramente, em junho de 1856, um cargo no *Gewerbe-Institut* (Colégio de Comércio), uma instituição de formação técnica, e, poucos meses depois, ele foi nomeado professor extraordinário da universidade de Berlim. Em novembro do mesmo ano, ele foi aceito também na Academia de Ciências de Berlim. Seu objetivo só foi alcançado após ele deixar o Instituto do Comércio, em 1864, quando ele assumiu uma cadeira em Berlim.

Até então, os esforços de Weierstraß sugerem que a teoria das funções abelianas eram o seu propósito exclusivo e que as funções analíticas seriam um meio para este fim. Seu interesse pelos fundamentos da análise somente se desenvolveu desde cerca 1860.

3.8.2. Os cursos de Weierstraß em Berlim

O primeiro curso de Weierstraß em Berlim foi ministrado no inverno de 1856-57, intitulado "Capítulos selecionados de físico-matemática". Este curso nos ajuda a apontar que ele se encontra ainda bastante interessado pela aplicação da matemática às demais ciências, principalmente à física. Após ministrar outras disciplinas nos anos seguintes, seu primeiro curso relacionado aos fundamentos da análise acontece nos anos de 1859-60. Este curso teria ajudado a moldar seu curso de "Cálculo diferencial" no *Gewerbeninstitut*, o qual foi redigido por Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), um dos principais alunos de Weierstraß, e que mostra o que seria a análise do autor até 1860. Como mostra Dugac em sua análise, esse importante texto serve para nos mostrar que Weierstraß não tinha ainda desenvolvido seu modelo dos números irracionais, mas ele já possuía algumas ideias embrionárias relacionadas ao que ele iria expor posteriormente: "existem quantidades que não podem ser expressas com a ajuda da unidade e de suas partes e para as quais é necessário utilizar a forma das séries infinitas" (Dugac, 1973, p. 57). A primeira exposição pública de sua teoria dos números irracionais deve ter sido feita no curso de inverno de 1863-64 na universidade sobre "teoria geral de funções analíticas" após a sua pausa durante os anos de 1861 e 62 por questões de saúde.

A partir de então Weierstraß começará a apresentar um ciclo de lições até a década de 1880, onde ele apresenta toda estrutura da sua matemática e, entre as exposições, havia a "teoria de funções analíticas". Todas as exposições eram sucessivamente atualizadas de acordo com suas pesquisas e baseavam-se somente naquilo que ele mesmo havia demonstrado (Biermann, 1975, p. 222). Por volta de 1874, os cursos de Weierstraß já terão alcançado grande popularidade e, como apontamos anteriormente, as ideias neles expostas se tornarão públicas por meio de notas de aula de alunos que vinham assistir ao curso do célebre matemático. Weierstraß não manifestou publicamente o motivo de não ter publicado uma obra fundacionista própria, mas alega-se que isso possa ter sido por conta de seu forte senso crítico (Biermann, 1975, p. 223). De fato, o próprio

Weierstraß se demonstrou insatisfeito com as apresentações de sua teoria por terceiros, como veremos em mais detalhes nas próximas seções.

3.8.3. Estado da arte

A importância da concepção de número de Weierstraß já se encontra destacada por Boyer, que aponta seu propósito de emancipar a análise da geometria, baseando-a no conceito de número. Assim como Méray, Weierstraß teria percebido que o desafio consistia em definir especificamente os número irracionais de modo que eles se tornem independentes do conceito de limite, revertendo, assim, o suposto erro lógico que teria sido cometido por Cauchy.

> Para corrigir o erro lógico de Cauchy, Weierstraß resolveu a questão da existência de um limite de uma sequência convergente ao fazer da sequência em o número ou limite (Boyer, 1991, p. 563).

Apesar de sugerir que os objetos utilizados na teoria de Weierstraß teriam sido sequências, Boyer deixa claro que, na verdade, Weierstraß se utiliza de um conceito particular seu, os agregados. De fato, muitas vezes encontramos na historiografia a afirmação de que Weierstraß teria definido os números reais em termos de "séries infinitas", o que não é totalmente correto, uma vez que ele se utiliza de agregados e não do conceito de séries.

> Números irracionais eram formados por séries infinitas desses números irracionais, ou melhor, como classes de equivalência apropriadas destes (Gray, 2008, p. 131).

Aproveitamos a mesma passagem para apontarmos mais um equívoco comum cometido pela historiografia, a saber, a afirmação de que Weierstraß teria se utilizado de "classes de equivalências" na sua definição dos números irracionais ou mesmo dos números reais. Tal como vimos ser comum na metodologia da *Zahlbereichserweiterung*, a redefinição da igualdade é necessária em cada etapa e muita atenção é dada à concepção de igualdade desenvolvida por Weierstraß entre agregados que virão a compor os ditos "números irracionais": Dantscher, sobre o qual falaremos em seguida, se refere à relação como "igualdade de Weierstraß". No entanto, conforme aponta Boniface (2007, p 324), o termo "relações de equivalência" não era utilizado na época ainda e o conceito de classes de equivalência ainda não havia sido desenvolvido, de modo que é melhor se referir ao que Weierstraß desenvolve como "relações de igualdade". Em 1973, Dugac cometeu o mesmo equívoco seguidas vezes (por exemplo, em Dugac (1973, p. 87)).

O artigo de Dugac de 1973, *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass*, consiste em um dos primeiros estudos especializados focando na sua concepção e número. O autor oferece uma análise original de inúmeros manuscritos que foram publicados por alunos de Weierstraß, além de outros textos. Assim como Boyer, Dugac destaca, entre outras coisas, o fato de que a concepção de número irracional de Weierstraß independe do conceito de limite (Dugac, 1973, p. 87). Uma análise mais recente baseada nos manuscritos de cursos ministrados por Weierstraß foi feita também por

Klaus Viertel. Em 1888, Peter Ullrich também chegou a publicar uma edição comentada do manuscrito redigido por Adolf Hurwitz (1859-1919) referente ao curso de Weierstraß de 1878.

Outro ponto bastante repetido na historiografia e que gostaríamos de destacar consiste na tese de que a concepção de número de Weierstraß era demasiadamente intricada e foi pouco reproduzida por outros matemáticos, que teriam preferido as teorias desenvolvidas por Dedekind, Cantor e Heine:

> A teoria um tanto desajeitada de Weierstraß foi substituída por outras duas, uma devido a Dedekind e a outra, a Cantor (e Heine, de maneira independente) (Gray, 2008, p. 132).

Para dar mais um exemplo, Ferreirós critica a abordagem de Weierstraß de maneira semelhante a Gray, acreditando que as concepções de Dedekind e Cantor teriam sido mais simples devido ao fato de que a aritmética dos números racionais eram assumidas, apesar do fato de que a teoria de Weierstraß se torna mais meandrosa precisamente após a apresentação dos números racionais.

> Weierstraß foi capaz de dar uma definição logicamente rigorosa dos números reais, ainda que tenha sido complexa e prolixa. Dedekind e Cantor irão simplificar a questão ao tomar a aritmética dos números racionais como dada (Ferreirós, 1999, p. 126).

Em busca de melhor contextualizar tais alegações, a recepção das ideias de Weierstraß consistiram em um dos aspectos mais importantes da nossa análise.

Por último, gostaríamos de destacar o que já comentamos anteriormente, a saber, o fato de a historiografia focar muitas vezes na construção de Weierstraß dos “números reais” sem se atentar suficientemente aos conceitos mais basilares que diferenciam sua concepção das demais que foram concebidas na época bem como das noções modernas. De fato, analisando os manuscritos de Weierstraß e textos provenientes de autores influenciados por ele, pudemos perceber que, em comum, eles apresentam nos princípios a concepção peculiar e essencial de “número complexo", a qual se encontra ignorada pela historiografia. A percepção desse fato motivou a escrita de um artigo que está sendo produzido por nós em conjunto com Débora Lima, no qual entraremos em maiores detalhes acerca dessa questão particular (ver Schubring et.al, 2023).

3.8.4. O conceito de número nos cursos de Weierstraß: uma diferente maneira de estender o conceito de número com base na concepção despercebida de “número complexo”.

Assim como no caso de Dedekind, a apresentação dos diferentes tipos de números se dá por meio de um processo de extensão que se baseia em um princípio análogo ao princípio da permanência e o princípio segundo o qual a generalização das operações inversas motiva a criação de novos tipos de números. A maneira como o processo se realiza, no entanto, é largamente diferente e envolve tipos de objetos matemáticos diferentes.

No manuscrito de 1878 de Hurwitz, encontramos uma versão bem representativa da elaboração dos fundamentos da aritmética por Weierstraß. O conceito peculiar de número complexo aparece logo no começo do manuscrito, juntamente com os conceitos fundamentais de número e unidade. Números complexos (*Complexe Zahl*) correspondem a "agregados de números de diferentes unidades" e é citado o exemplo concreto de uma coleção de diferentes unidades monetárias (Ullrich, 1988. p. 3) Apesar do exemplo concreto desse tipo de número, ele será crucial para a construção dos demais tipos de números de maneira abstrata.

Antes dos números complexos entrarem em cena, Weierstraß descreve a aritmética dos números naturais de maneira intuitiva, isto é, definindo verbalmente as concepções de igualdade, desigualdade e as operações básicas, chamando atenção para as propriedades básicas das operações de adição e multiplicação que deverão ser preservadas com a introdução de novos tipos de números posteriormente. Ao perceber a impossibilidade da operação inversa de divisão em alguns casos, Weierstraß é levado a introduzir as chamadas "partes exatas da unidade", que correspondem a números da forma *1/n*, sendo *n* um número natural. Por meio da "coleção" de partes exatas da unidade e da unidade, obtemos o equivalente aos números racionais positivos, os quais Weierstraß chama de *Zahlgrößen* (quantidades numéricas) (Ullrich, 1988, p. 4). Weierstraß define também dois tipos de "transformação" que podem ser feitas sob quantidades numéricas e que servirão para definir a relação de igualdade entre esses tipos de números.

1) *n* elementos da forma *1/n* podem ser substituídos pela unidade.

2) todo elemento pode ser substituído por suas partes exatas, por exemplo, 1 por *n.1/n*, *b* por *b* 1/*a.b*.

Conforme pede o processo de extensão conceitual, Weierstraß redefine também as operações básicas e as relações de desigualdade entre quantidades numéricas e verifica a preservação das leis operacionais dos números naturais. Vale apontar que Ferreiróis critica a maneira como Weierstraß introduz tais partes exatas sem oferecer uma "justificação" apesar de julgarmos que uma tal falta de justificação era comum. Como o próprio autor disse anteriormente, Cantor e Dedekind assumiram a aritmética dos números racionais para definir os irracionais.

> Na apresentação de Weierstraß, pode-se apenas contestar o fato de que as infinitas "partes exatas" da unidade são, aparentemente, introduzidas sem qualquer justificação (Ferreirós, 1999, p. 126)

A introdução dos "números irracionais" surge por meio da consideração de "números com infinitos elementos" e podemos imaginar esses objetos como coleções de unidades e partes da unidade com uma quantidade infinita de elementos. Weierstraß salienta que os infinitos elementos que compõem uma quantidade precisam pertencer a um campo numérico já estabelecido (unidades ou partes da unidade) e também precisam ser dados por uma lei bem definida. Com a introdução desse novo tipo de objeto, Weierstraß considera a noção importante de "componente" (*Bestandtheil*): *a'* é componente de *a* quando *a'* puder ser transformado em *a''* de modo que todo elemento de *a''* esteja presente em *a'*. É importante salientar que um componente é

necessariamente composto de uma quantidade finita de elementos. Com essa nova noção, Weierstraß consegue oferecer uma nova definição de igualdade que, como ele diz, abarca a definição que ele havia dado anteriormente, e que permitirá também estabelecer a igualdade entre os novos tipos de números que surgirão (isto é, os irracionais): "Dizemos que duas quantidades *a* e *b* são iguais quando toda componente de *a* possa ser transformada em uma componente de *b* e, inversamente, toda componente de *b* possa ser transformada em uma componente de *a."* A importância dessa nova definição de igualdade é que ela permite que falemos da igualdade de números com infinitos elementos fazendo referência a seus componentes que, conforme destacamos, são sempre finitos. Isto permite que a igualdade no caso infinito se reduza ao caso finito que já é conhecido. De maneira similar, Weierstraß define as operações de adição e multiplicação recorrendo aos componentes finitos das quantidades. É importante também destacar que nem toda quantidade com infinitos elementos são consideradas na aritmética. É necessário que elas sejam "finitas", ainda que elas possuam infinitos elementos, seus componentes devem ser menores do que um número finito *c* (Ullrich, 1988, p. 9). Weierstraß também julgou importante demonstrar a existência de quantidades com infinitos elementos que são finitas por meio de um exemplo.

Um fato importante é que, no manuscrito em questão, assim como em alguns outros, fica apenas implícito que a consideração de quantidades finitas com infinitos elementos leva à consideração de novos elementos numéricos, os quais chamaríamos de ""números irracionais positivos".[35] É provável que Weierstraß tenha sido contrário ao termo "irracional" por razões epistemológicas, da mesma maneira como ele negou o sentido de "imaginário" e "real", conforme podemos verificar, por exemplo, no manuscrito de Hettner de 1874. Todos estes domínios são, afinal, são estabelecidos tendo o mesmo estatuto na aritmética.

> É bastante incômodo para a linguagem matemática que não tenhamos uma expressão geral para aquilo que anteriormente seria denominado real. Pois a oposição entre reais e imaginários minguou. Como esta foi eliminada, novas designações deveriam ter sido introduzidas[36] (Hettner, 1874, *fl*. 116).

Como veremos mais adiante, Mittag-Leffler, que seguiu fortemente as concepções de Weierstraß, expôs uma crítica ao uso do termo "irracional" em um texto em que expõe os fundamentos da aritmética. Em se tratando de notas de aulas, verificamos o uso explícito do termo só de vez em quando: no manuscrito de 1884/85, que pertenceu a G. Thieme, mas cujo escritor original é desconhecido, encontramos uma definição explícita de números irracionais que aparece apenas após a introdução dos números negativos.

> A existência de quantidades numéricas irracionais, isto é, quantidades numéricas que não sejam formadas a partir de uma quantidade finita de elementos e nem sejam iguais a uma

[35] Um estudo mais aprofundado a respeito da terminologia de Weierstraß acerca dos números irracionais se encontra também no artigo conjunto já mencionado.

[36] *"Es ist sehr unbequem für die mathematische Sprache, dass wir keinen allgemeinen Ausdruck haben für das, was früher mit reell bezeichnet wurde. Denn der Gegensatz zwischen Reellen und Imaginären ist nun geschwunden. Als derselbe beseitigt wurde, hätten neue Bennenungen eingeführt werden müssen."*

> quantidade com quantidade finita de elementos, deve ser investigada em particular[37] (UB Bi, 1884/1885, *fl*. 90).

No *Schulprogramm* de 1872, sobre o qual falaremos mais na seção seguinte, escrito por Ernst Kossak, que assistiu ao curso de Weierstraß em 1865/66, encontramos explicitamente o destaque para o fato de que a etapa da introdução dos números com infinitos elementos é o que permite a consideração de números irracionais[38] (Kossak, 1872, p. 19). É importante apontar, no entanto, que o texto não consiste em um manuscrito de notas de aula, mas uma apresentação original e resumida dos fundamentos da aritmética de Weierstraß.

Após a consideração das quantidades finitas, Weierstraß continua sua apresentação considerando a unidade negativa e agregados envolvendo tanto a unidade positiva e suas partes como a unidade negativa e suas partes. Após a consideração de quantidades com infinitos elementos desse tipo, os ditos "números reais" são finalmente "completos", apesar de Weierstraß não demarcar que uma nova classe de números é formada nesta etapa.

Diante do que foi exposto, destacamos o fato de que o processo de extensão de número assume uma ordenação destacadamente diferente daquela realizada por Dedekind e demais autores: em vez de começar pela introdução dos números negativos, para então construir os racionais e os numérico reais em seguida, Weierstraß somente introduz os números negativos após ter introduzido os números irracionais positivos. Isto teria se dado em razão do papel basilar que ele atribui ao conceito de número complexo que é desconsiderado pela historiografia: os números reais positivos seriam, afinal, a maior extensão possível quando estamos munidos apenas de uma unidade básica. Para a consideração dos números reais, isto é, incluindo os números negativos, é necessário introduzir uma nova unidade que seja oposta à unidade principal. No mesmo caminho, os números complexos no sentido moderno são construídos considerando-se quatro unidades, a saber, 1, -1, *i* e -*i*. Para diferenciá-los do conceito mais geral de *Complexe Zahlen*, no manuscrito de Hurwiz, esses são chamados de *Komplexe Zahlen*.

Essa ordenação da extensão do conceito de número lograda por Weierstraß, bem como a concepção de que os números complexos teriam como base as quatro unidades remetem fortemente à concepção de Gauß, conforme já mencionada na seção 1.3.4. De fato, a influência de Gauß é inquestionável, uma vez que a questão levantada por ele a respeito do alcance da aritmética ganha grande relevância na teoria Weierstrassiana. Isso é exposto de maneira exemplar no já mencionado *Schulprogramm* de Kossak de 1872:

> A questão agora é se a aritmética não será capaz de expansão adicional e se outras unidades não podem ser adicionadas a essas unidades +1, +i, -1, -i. Acima (p. 15) Gauß afirmou que em aritmética geral nenhuma outra unidade além das dadas é admissível; uma vez que este

[37]"*Ob es irrationale Zahlgrossen giebt, d.h. Zahlgrössen die weder aus einer endlichen Anzahl von Elementen Zahlgrosse gebildet noth aus einer endlichen Anzahl von Elementen gleich sind, muss besdonders untersucht werden."* Weierstraß discute mais a respeito da definição em seguida.

[38] O *Schulprogramm* de Kossak foi importante para a difusão das ideias de Weierstraß, mas ele foi duramente criticado por Hermann Schwarz em uma carta a Weierstraß datada de 20 de junho de 1872. Mais detalhes sobre a crítica serão tratados na seção seguinte e, mais profundamente, no artigo conjunto que mencionamos.

> é o caso, veremos a partir do tratamento que o Sr. Weierstraß adota no desenvolvimento da teoria dos números complexos (Kossak, 1872, p. 23).

Em sua linguagem em termos de unidades e em sua metodologia baseada em extensões sucessivas, responder à questão de Gauß significaria apontar até onde a aritmética pode ser estendida, com a inclusão de novos pares de unidades independentes pela soma, na condição de respeitarmos o "princípio da permanência". Encontrar esse tal limite significaria encontrar a "forma numérica mais geral" da aritmética sob tais restrições. Conforme ele aponta, Weierstraß teria sido o responsável por demonstrar que esse limite se encontra nos números complexos de duas unidades independentes, isto é, da forma $a+Bi$, uma vez que, conforme ele demonstra, ao tentarmos introduzir um novo par de elementos básicos, a divisão se torna impossível para elementos não nulos e a propriedade que atualmente caracteriza os "domínios" também é perdida. O mesmo resultado chega a ser brevemente levantado no manuscrito de Hurwitz, porém, no escrito de Kossak, a investigação é explícita e possui mais relevância, tendo em vista uma resposta histórica à afirmação de Gauß.

> Essa investigação leva ao seguinte resultado: na aritmética geral, se a divisão permanecer admitir números complexos compostos por duas unidades básicas independentes uma da outra em relação à adição; e o número $a + Bi$, denotado no sentido mais estrito como um número completo, onde a e B são quaisquer números positivos ou negativos, deve ser considerado como a forma numérica mais geral (Kossak, 1872, p. 24).

Conforme apresentamos na seção seguinte, a demonstração proposta por Kossak para o teorema, apesar de atribuída a Weierstraß, é rechaçada por Schwarz, e o próprio Weierstraß chega a criticar o *Schulprogramm*. Uma demonstração alternativa se encontra ainda no manuscrito de Hettner de 1874, apesar dela se encontrar separada das notas de aula.

Além do paralelo com a concepção de Gauß, é importante destacarmos que a concepção Weierstrassiana despercebida de *Complexe Zahlen* se assemelha fortemente à concepção anterior e igualmente despercebida de "números complexos" que surgiu no século XVIII na França e que foi analisada por Ferreira (2018). Um exemplar dessa concepção se encontra na obra de Étienne Bézout (1730-1783):

> Um número que é composto de partes, portanto, com unidades diferentes, é chamado de número complexo; em contraste, aquele que contém apenas um tipo de unidade, é chamado de número incomplexo. 8liv. ou 8 livres é um número incomplexo. 8liv. 17s 8d, ou 8 livres 17 sous 8 deniers, é um número complexo (Bézout, 1770, p. 8)

Concepções similares se encontraram, por exemplo, em escritos de Camus (1749), Lacroix (1807), Bourdon (1837) e Caillet (1848), além de aparecerem ainda em textos ingleses, italianos, portugueses e espanhóis. De maneira geral, elas surgem no contexto de práticas com unidades de medidas não decimais, isto é, não há uma concepção abstrata como a de Weierstraß, mas tanto a definição como os exemplos concretos que o matemático alemão oferece mostram uma potencial recepção do conceito francês, o que pode ter sido feito primeiramente por Gauß, que pode ter se

inspirado nele ao propor a nova terminologia “números complexos” para se referir aos números da forma $a+bi$.[39]

3.8.4. O conceito de número na análise de Weierstraß: o “princípio do supremo” e o tratamento analítico dos conceitos da disciplina

O reconhecimento da diferença importante na concepção de Weierstraß dos números irracionais em relação às ideias precedentes é reconhecida por Cantor em 1883. Segundo ele, Weierstraß teria sido um dos que conseguiu perceber e contornar o problema conceitual de definir os números reais sem assumir a existência de um limite (Cantor, 1883, p. 566).

Com essa construção, Weierstraß se vê capaz de demonstrar importantes teoremas na análise de uma maneira nova e em linha com a concepção analítica de conceitos básicos. Como já mencionamos, Bolzano ofereceu em 1817 uma demonstração do teorema do valor intermediário onde assume-se a propriedade do supremo dos números reais de maneira explícita, mas sem que tal propriedade tivesse sido anteriormente demonstrada como característica dos números reais. No manuscrito de Weierstraß, o mesmo teorema é demonstrado como uma aplicação do princípio do supremo que é desta vez demonstrado.

Primeiramente, Weierstraß define os conceitos de *obere Grenze* (limite superior, ou em termos modernos, supremo) e *untere Grenze* (limite inferior ou ínfimo). Na análise de Weierstraß, a maioria dos conceitos principais da análise são expressos em termos algébricos, com base em intervalos, ϵ e δ, de acordo com sua concepção aritmética da disciplina, e o conceito de supremo surge de acordo com essa proposta:

> g chama-se limite superior de uma quantidade variável se nenhum valor da variável for maior do que g e se no intervalo $g-\delta \ldots g$, sendo δ uma quantidade arbitrariamente pequena, sempre encontraremos pontos [*Stelle]* da variável.g' é o limite inferior se não houver valor da variável menor do que *g’* e se sempre encontramos pontos da variável no intervalo arbitrariamente pequeno $g \ldots g+\delta$. Não importa se *g* e *g’* pertencem ao domínio [*Gebiet*] ou não (Ullrich, 1988, p. 84)

Por domínio, Weierstraß quer dizer precisamente o conjunto de todos os valores assumidos pela variável. Logo em seguida, ele enuncia e demonstra que "todo domínio de uma variável possui um limite superior e um limite inferior”. Para isso, Weierstraß se limita a demonstrar o caso em que o domínio limitado possui um limite superior, isto é, considerando-se o domínio como um conjunto limitado de números reais, temos aqui enunciado e demonstrado o princípio do supremo. Sua demonstração se baseia na sua concepção de números irracionais. Após isso, Weierstraß ainda demonstra o que chamamos de teorema de Bolzano-Weierstraß, isto é, que todo conjunto infinito e limitado de números reais possui um limite. Ambos os teoremas são posteriormente generalizados para um espaço real de *n* dimensões (Ullrich, 1988, p.89-91). Conforme aponta Gray (2008, p. 131), a demonstração do teorema de Bolzano-Weierstraß captura uma diferença crucial entre a concepção de Weierstraß e a de Cauchy. Enquanto Cauchy assumia a existência do limite,

[39] Essa questão é analisada mais a fundo no artigo conjunto já mencionado.

o qual seria inerente às quantidades contínuas que ele pressupunha, Weierstraß julga necessário provar sua existência por basear o conceito de número real de maneira fundamentalmente diferente.

Na seção seguinte à demonstração do princípio do supremo, Weierstraß oferece uma demonstração do teorema do valor intermediário como uma "aplicação", isto é, baseando-se no teorema anteriormente demonstrado e utilizando-se dos seus intervalos encaixados. A demonstração constitui mais um exemplar a ser contrastado com as demonstrações como aquelas feitas por Cauchy e Ohm e que se baseiam em noções geométricas intuitivas de função e da existência do limite.

Na seção seguinte, encontramos outro bom exemplo da "nova análise": o Teorema de Weierstraß, também conhecido como Teorema do Valor Extremo, que já havia sido demonstrado anteriormente no manuscrito de Bolzano da década de 1830, *Functionenlehre* (Teoria de Funções), o qual foi apenas publicado somente em 1930. Bolzano baseou sua demonstração no teorema de Bolzano-Weierstraß (Russ, 2004, p.460-462), isto é, no fato de que todo conjunto infinito limitado de números reais possui um limite, e Weierstraß oferece uma demonstração baseada no mesmo teorema, o qual ele havia demonstrado anteriormente, generalizado para um espaço real ou complexo de *n* dimensões (Ullrich, 1988, p. 91-92). De fato, a demonstração de Weierstraß desse teorema constitui mais um ótimo exemplo das mudanças percebidas na análise desde Cauchy, conforme destaca Gray (2008, p. 131): Cauchy assumia implicitamente a existência de um tal limite conforme sua concepção tradicional de quantidades contínuas.

É válido destacar novamente que tais diferenças fundamentais entre Cauchy e Weierstraß não eram completamente evidentes para os matemáticos da época. Como exemplo, podemos evocar novamente o caso do matemático francês Gaston Darboux (1842-1917), que subscrevia às ideias de Weierstraß: ao enunciar o teorema do Valor Intermediário, Darboux abre mão de demonstrá-lo, alegando que Cauchy já havia oferecido uma demonstração "rigorosa" em seu *Cours* (ver seção 2.1).

3.8.5. Divulgação da concepção de número de Weierstraß: Ernst Kossak, Dantscher, Otto Biermann E Mittag-Leffler

3.8.5.1. Ernst Kossak, a "aritmética geral" e a crítica de Schwarz

Os cursos ministrados por Weierstraß em Berlim alcançaram grande sucesso e atraíram alunos de diferentes regiões da Europa. Apesar disso, é notável que não houve forte transmissão de suas ideias fundamentais, em particular das suas concepções da aritmética e as poucas tentativas que surgiram de produzir um conteúdo original baseado nos cursos de Weierstraß mas sem consistir apenas em manuscritos foram em grande parte criticadas pelo professor de Berlim.

A primeira tentativa original que encontramos consiste no já mencionado *Schulprogramm* de 1872, escrito por Ernst Kossak, então professor do Friedrichs-Werderschen *Gymnasium*. No pequeno texto, ele apresenta os "Elementos da Aritmética" que se baseia no curso de Weierstraß de 1865/66 que ele presenciou.

Como ele descreve na introdução da obra, o seu principal propósito com a redação era promover uma reforma na apresentação do conceito de número no ensino:

> Com a seguinte dissertação pretendo contribuir para a obtenção de um acordo entre os professores de matemática quanto ao tratamento dos elementos da aritmética no ensino; mas a consecução desse objetivo é provavelmente mais bem promovida pelo fato de que a concepção científica desses elementos se torna geral. Estou bastante justificado em supor que este ainda não é o caso, pois alguns dos livros de aritmética que estão aparecendo em novas edições contêm imprecisões e encobrem as dificuldades e, assim, aumentam em vez de eliminar a ambiguidade dos conceitos (Kossak, 1872, p. 3).

Segundo Dugac, a obra possui grande importância e foi por meio dela que se difundiu a teoria de Weierstraß e chegou até mesmo a ser traduzida para o russo em Kiev no ano de 1884 (Dugac, 1873, p. 67) De fato, o texto é citado anos depois por nomes como Frege e Mittag-Leffler, sobre os quais falaremos mais a seguir, como fontes de estudo da concepção Weierstrassiana. Uma vantagem da dissertação é o fato de que, ainda que curta, ela inclui discussões bastante claras acerca de aspectos metodológicos e epistemológicos subjacentes à teoria. Cada etapa possui seu propósito explicado e o autor tenta ainda apontar de que maneira a teoria proposta por Weierstraß responderia questões acerca da aritmética que ainda não teriam sido respondidas.

Ainda na introdução, Kossak reproduz a transformação na epistemologia subjacente à extensão do conceito de número, segundo a qual apenas a consistência da definição importa e não mais o seu significado subjacente. A epistemologia ainda é posteriormente reiterada quando o autor busca explicar a justificação para os números negativos:

> Enquanto a introdução de novas unidades na aritmética costumava ser justificada "pela demonstração de um significado claro" da mesma (ver abaixo, p. 14, as explicações de Gauß), esta introdução é atualmente baseada apenas na definição das unidades a serem introduzidas, de modo que, por exemplo, a única razão para admitir a unidade negativa é que se quer permitir que a subtração seja universalmente válida e, consequentemente, deve-se assumir uma unidade que, adicionada à unidade positiva, resulta em zero. (Kossak, 1872, p. 17)

Curiosamente, Kossak diz ainda que o principal causador da transformação da aritmética na época reside no “princípio de inversão” que havia sido “emprestado” da teoria de funções elípticas .O princípio consiste no pressuposto de que as operações (transformações) sempre possuem um inverso, conforme ele já deixa claro na passagem acima, ao falar da subtração, e se trata do mesmo princípio que vimos na Habilitação de Dedekind e mesmo em manuscritos, como no de 1878, escrito por Hurwitz, conforme já citamos no início da seção anterior. O fato de Kossak citá-lo como transformador sugere que, de fato, ele se trata de um novo princípio para as teorias aritméticas da época.

> A razão para isso é que os elementos da aritmética foram submetidos a uma explicação estritamente científica, uma vez que o princípio da inversão, no qual essa teoria se baseia, também teve uma influência de longo alcance na aritmética (Kossak, 1872, p. 4).

Em termos de método, Kossak descreve de maneira bastante clara o procedimento já perseguido por Weierstraß que se assemelha ao princípio da permanência:

> Em geral, a razão para a definição de novas unidades reside na exigência de que as operações aritméticas, que são configuradas para números inteiros (positivos), sejam geralmente mantidas, onde primeiro os números inteiros negativos, bem como os números positivos fracionários e irracionais resultam, e então exigindo ainda que as mesmas operações aritméticas também sejam formadas para esses números, que existem para os números positivos inteiros, com base nas leis que foram derivadas para as operações aritméticas destes últimos, tem-se como resultado os números negativos fracionários e irracionais, e os números imaginários (veja abaixo p. 18); Por outro lado, a aceitação de novas unidades é limitada pelo fato de que os números complexos que as compõem devem ser tais que as operações aritméticas que se aplicam aos números inteiros, ou seja, adição, multiplicação e suas operações inversas, subtração e divisão, também podem ser realizado na mesma determinação que para os números inteiros, com base nas leis existentes para estes devem permanecer executáveis (Kossak, 1872, p. 3-4).

Um dos aspectos que mais merecem destaque a respeito da obra de Kossak é o fato de que, assim como Weierstraß, ele considera como conceitos básicos tanto "número" como "número complexo" no sentido despercebido que apresentamos na seção 2.8.3. No entanto, Kossak é muito mais explícito com relação a essa concepção como parte fundamental da teoria. Juntamente com esses conceitos, Kossak considera a noção do "Um" e, de maneira mais geral, a noção de "*Grundelement*" (elemento básico) que, apesar de Kossak não definir explicitamente, consiste em uma unidade específica.

> O conceito de número é assim dado a nós pela composição de objetos a partir de elementos do mesmo tipo. Mas se um objeto é composto de diferentes tipos de elementos, então, para poder produzir uma ideia dessa composição, é necessário afirmar quais tipos de elementos estão presentes e quantos elementos de cada tipo estão presentes. Isso leva ao conceito de número complexo: é a representação composta de diferentes grupos de elementos idênticos (Kossak, 1872, p. 17).

O processo de extensão do conceito de número segue um método e ordem semelhante àquele que encontramos nos demais manuscritos dos cursos de Weierstraß. Em particular, destacamos o fato de que a extensão aos números negativos somente surge após termos definido as frações e os números irracionais positivos, o que viria a acontecer com todo texto inspirado pela concepção Weierstrassiana. O momento em que Kossak introduz os números negativos é interessante pois, como já comentamos, ela nos ajuda a perceber a importância que o conceito de número complexo possui na concepção de Weierstraß. Como ele destaca, a próxima etapa requer a introdução de um novo elemento básico "oposto" e suas partes exatas:

> Partindo do domínio com uma primitiva, procedemos para a nossa próxima tarefa, a saber, obter as operações aritméticas para números compostos por dois elementos básicos opostos e as partes exatas deles (Kossak, 1872, p. 21).

A “dependência pela soma” é a maneira como Kossak separa elementos básicos opostos daqueles que não o são: podemos combinar números de elementos básicos opostos de tal maneira que eles sejam representados como combinações de apenas uma desses elementos básicos. Este não será o caso das unidades independentes pela soma, como seria o caso da unidade 1 e a unidade imaginária i.

Após estabelecer as operações aritméticas com a nova extensão, Kossak introduz a consideração de um novo par de unidades opostas, i e $-i$, a partir da solubilidade da equação $xx = -y$. Kossak chega a investigar a definição das operações aritméticas neste novo domínio e chega finalmente a um dos pontos fulcrais de seu escrito, isto é, a questão levantada por Gauß.

A demonstração desse importante resultado na aritmética, presente no escrito de Kossak, foi o principal alvo de uma crítica generalizada que Hermann Schwarz (1843-1910) fez a Kossak em uma carta a Weierstraß datada de 1872. O suposto erro ocorreu enquanto Kossak buscava por uma definição da multiplicação $xy=z$ entre dois números complexos x e y formados por duas unidades básicas, isto é, da forma $x = x_1e_1 + x_2e_2$ e $y = ye_1 + y_2e_2$. Conseguindo essa definição e demonstrando que ela satisfaz os requerimentos, bastaria posteriormente demonstrar que uma tal definição de multiplicação não seria possivel se x e y fossem compostos por mais de duas unidades básicas. Em meio a tal demonstração, Kossak depara-se com uma forma quadrática e faz uma dedução equivocada, segundo Schwarz:

> Das circunstâncias de que uma forma quadrática de duas variáveis só pode se tornar zero se ambas as variáveis individualmente tiverem o valor zero, nunca se pode concluir que ela não contém o produto das duas variáveis (Schwarz apud Dugac, 1973. p. 144).

Não entraremos a fundo nos detalhes da demonstração de Kossak para validar ou invalidar a crítica de Schwarz, mas o autor interessado no assunto pode consultar o artigo conjunto já mencionado. O que podemos adiantar é que, apesar de a crítica de Schwarz ser válida do ponto de vista algébrico, consideramos um exagero invalidar toda a demonstração apresentada por Kossak e todo o restante de seu texto.

Schwarz chega a criticar outros aspectos do texto de Kossak e alega de maneira mais geral que Kossak teria sido infiel à teoria do autor original. Um outro aspecto que ele chega a especificar é a suposta falta do estabelecimento claro do princípio da permanência e do princípio da inversão, o que julgamos surpreendente, visto que Kossak parece ser bem claro ao estabelecê-los em sua introdução.

> Logo no início sinto falta do estabelecimento do ponto de vista pelo qual a limitação do campo dos números é determinada, a exigência de reversibilidade ilimitada das operações aritméticas introduzidas pela adição e multiplicação geral, também sinto falta da ênfase na exigência de que todas as leis formais válidas para os números inteiros[40] devem ser mantidas (Schwarz apud Dugac, 1973, p. 144).

[40] Aqui, Schwartz se refere aos números naturais pela terminologia “ganze Zahlen” (números inteiros), o que, como já mencionamos, era comum entre autores alemães na época.

Infelizmente, não foi possível encontrar uma reação direta de Weierstraß às críticas de Schwarz. No entanto, em uma carta a Mittag-Leffler datada de 1885, o matemático critica Kossak, apesar de não especificar razões: "Você sabe como minha introdução à teoria de funções do Senhor Kossak e…foi bagunçada" (Weierstraß apud. Mittag-Leffler, 1910, p. 12).

Finalmente, é importante falarmos sobre uma última questão acerca do *Schulprogramm* de Kossak. Na última página do manuscrito, Kossak levanta a questão sobre a discordância entre Weierstraß e Ohm que já mencionamos: "O campo das operações elementares da aritmética está esgotado através de adição e multiplicação juntamente com seus métodos de cálculo reversos de subtração e divisão?" (Kossak, 1872, p. 29) De acordo com Kossak, Weierstraß teria respondido essa pergunta de maneira negativa, uma vez que elas podem ser analiticamente trazidas ao caso das quatro operações fundamentais. Isto sugere que Weierstraß discordava da maneira como Ohm considerava 7 tipos de operações básicas no processo de extensão do conceito de número.

> Considerou-se necessário introduzir potências, raízes e logaritmos como três novas operações elementares. Mas estes não são; pois se de alguma forma se pode trazer a conexão entre os números em uma forma analítica na qual aparecem apenas aquelas duas operações elementares, a saber, a adição e a multiplicação, e suas inversas, ainda não há razão para assumir uma nova operação como elementar (Kossak, 1872, p. 29).

Como vimos anteriormente, Ohm considera as operações de potenciação, raiz e logaritmos como parte imprescindível da extensão da aritmética e é com elas que ele levanta a consideração dos números irracionais e imaginários. Segundo Kossak, Weierstraß julgava que isso era desnecessário. Curiosamente, isto poderia justificar o fato de Kossak preferir a equação $xx=y$ em vez de $x^2 = y$ ao introduzir a consideração dos números irracionais e $xx=-y$ em vez de $x^2 = -y$ para a introdução dos elementos i e $-i$. A diferença da notação na verdade revela que estamos considerando uma multiplicação de um número x por ele mesmo, sem que necessitemos introduzir uma nova operação, isto é, a potenciação. A preferência por essas igualdades baseadas na multiplicação também se encontra no texto de Mittag-Leffler de 1909/1910, sobre o qual falaremos a seguir. Outra diferença entre Ohm e Weierstraß associada ao que foi mencionado por Kossak consiste no fato de que, por apresentar 7 operações fundamentais, isto é, um número ímpar de operações, a teoria desenvolvida por Ohm fere o princípio de inversão trazido por Kossak: Para toda operação básica, deveria existir uma que seja a inversa dela.

3.8.5.2. O lamento de Mittag-Leffler sobre as raras menções a Weierstraß

A falta de divulgação dos fundamentos de Weierstraß é atestada pelo matemático sueco Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), que foi aluno de Weierstraß e foi fortemente influenciado por ele. No ano de 1910, ele publicou sobre sua conferência no Congresso dos matemáticos em Estocolmo de 1909, intitulada *Sur les fondements arithmetiques de la théorie des fonctions d'après Weierstraß* (Sobre os fundamentos aritméticos da teoria das funções de Weierstraß) onde ele apresenta a extensão do conceito de número conforme o modelo Weierstraßiano. Em sua introdução, Mittag-Leffler explicita a fama obtida por Weierstraß bem

como o alcance internacional que seus cursos obtiveram, mas, ao mesmo tempo, critica a falta de recepção de suas ideias em sua época, em particular na Alemanha:

> O curioso é que na Alemanha, onde a personalidade de Weierstraß é mais enfatizada do que em outros lugares, estamos quase nos esquecendo dele. Raramente encontramos o nome dele mencionado e quase sempre em citações de obras de sua própria autoria (Mittag-Leffler, 1910 p. 11)

Apesar da crítica, podemos apontar que mesmo Mittag-Leffler não segue completamente a fundamentação aritmética desenvolvida por Weierstraß. Isto fica claro em seu artigo de 1920, onde ele apresenta o que seriam os três capítulos introdutórios da teoria de funções analíticas de Weierstraß, os quais consistem na apresentação do conceito de número e a sua extensão aos conceitos de números fracionários e "incomensuráveis".

Logo no segundo parágrafo do artigo, Mittag-Leffler diz: "A compreensão do termo número inteiro provavelmente não é a mesma de Weierstraß." Sua crítica à concepção de Weierstraß é de cunho epistemológico e reside no fato de que ela se baseia em uma noção de contagem e portanto fundada em experiências. Emancipar-se dessa concepção, segundo Mittag-Leffler, revelaria a natureza a priori do conceito número e ainda resolveria a questão polêmica do conceito de infinito, o qual se torna claro diretamente a partir do conceito de número.

> Se, por outro lado, se parte do conceito de número abstraído da experiência externa ao estabelecer o conceito de número, o infinito permanece obscuro e o sistema Weierstrassiano perde sua base mais importante (Mittag-Leffler, 1920, p. 157)

A mesma argumentação se encontra também em sua redação de 1909, apesar de ele não explicitar sua diferença em relação a Weierstraß de tal forma. No artigo de 1920, a sua definição explícita de número deixa mais clara a diferença entre sua concepção e a de Weierstraß:

> O número, o número inteiro é um conceito simples, dado a priori, que não pode ser definido por palavra ou imagem, e que constitui a forma básica de pensar (em si) (Mittag-Leffler, 1920, p. 158)

A noção de infinito ou "infinito matemático" surge então diretamente após sua definição aberta de número dar lugar a uma construção mental prática de um sistema numérico, a "sequência numérica" a partir de uma unidade, a qual não é definida explicitamente: a todo elemento, exceto o primeiro, corresponde um sucessor direto e o fato desse processo não ter fim, isto é, o fato de não haver um número que não possua um sucessor, ou um número maior do que todos os outros, nos leva ao conceito de infinito.

> Esse comportamento nos ocorre já na origem do pensamento o conceito de infinito, em sua forma original, ou seja, como um conceito matemático de infinito, o único conceito de infinito que o pensamento pode apreender. Este conceito de infinito é dado com e através do conceito de número inteiro e aparece com a mesma clareza que o próprio conceito de número (Mittag-Leffler, 1920, p. 159).

Segundo Mittag-Leffler seríamos, portanto, capazes de conceber a noção de infinito a partir dos números e o conceito somente se tornará nebuloso se tentarmos compreendê-lo por intermédio da realidade. O esclarecimento do conceito o leva a criticar Kronecker, que havia negado o infinito na matemática (Mittag-Leffler, 1909, p. 13-14).

Resolvida a questão do infinito, Mittag-Leffler segue então um caminho estruturalmente semelhante a Weierstraß, isto é, definindo a igualdade, desigualdade e as quatro operações. Contudo, como pudemos perceber, a concepção apriorística baseada na construção de uma sequência numérica é marcadamente diferente da ideia concebida por Weierstraß em termos de "agregados". A consequência disso será que as relações de igualdade e as operações serão definidas também de uma maneira diferente Para Mittag-Leffler, as operações são definidas verbalmente tendo em vista a noção de repetição sucessiva da unidade. Como ele ainda diz, a associatividade e a comutatividade gerais seguem a partir do "princípio de indução". Como veremos no capítulo posterior, esses aspectos aproximam sua concepção dos números inteiros daquela proposta por Graßmann em 1861.

A extensão do conceito de número ocorre primeiramente na definição dos números fracionários (*Gebrochene Zahlen*), a qual é introduzida a partir da generalização da solução da equação $xn=b$, seguida de uma definição nova para as operações e relações. No terceiro capítulo do artigo de 1920, Mittag-Leffler define o que ele chama de "números inteiros gerais" que seriam os números reais positivos. Nesta etapa Mittag-Leffler considera finalmente a noção de "grupo", a qual será usada tal como vemos nos demais textos para a definição das operações e das relações de "grupos com números ilimitados de elementos". Novamente distanciando-se de seu mentor, o autor busca traçar uma relação entre as concepções de Weierstraß e Cantor dos números reais. Isso pode ser compreendido como parte de seu empreendimento maior que foi explicitado em sua obra sobre funções meromorfas e suas generalizações: reunir as abordagens da análise de Weierstraß e Cantor em um único ponto de vista (Robinson, 2018, n.p.).

O fato de Mittag-Leffler ter selecionado o termo "números inteiros gerais" é sugestivo também pois indica esse sistema numérico como a extensão máxima que pode ser feita a partir de uma unidade, reforçando assim o que já discutimos sobre a maneira particular de Weierstraß de estender o conceito de número primeiramente até os reais positivos tendo em vista que assim estaríamos construindo um sistema "máximo" dependente de uma única unidade, para somente então introduzir uma nova unidade, a unidade negativa.

Por se tratar apenas dos três primeiros capítulos de uma teoria de funções analíticas, Mittag-Leffler não vai além disso e não chega a abordar números negativos e complexos. Apesar disso, o fato de ele interromper a apresentação ao chegar nos "números inteiros gerais" reforça novamente a concepção Weierstraßiana: a etapa constitui um momento importante, uma vez que ela constitui a extensão máxima do conceito de número (*Ganze Zahl*) constituído de uma única unidade. .o artigo de 1909, ele chega a ir além e considera brevemente os números negativos por meio de uma nova unidade e os números complexos.

3.8.5.3 A obra de Otto Biermann e a reação negativa de Weierstraß

De maneira a fortalecer a opinião de Mittag-Leffler sobre a carência de menções a Weierstraß, apontamos que encontramos uma única tentativa elaborada de apresentar a concepção

aritmética Weierstrassiana por meio de uma obra completa e original, isto é, algo mais extenso do que o pequeno texto criticado de Kossak. Trata-se do livro *Theorie der Analytischen Functionen* (Teoria das Funções Analíticas) de Otto Biermann (1858-1909), que foi publicado em 1887. Biermann confirma que, em sua época, faltava também uma obra original sobre a teoria de Weierstraß das funções analíticas (Biermann, 1887, p. *iii*). É importante apontarmos ainda que Weierstraß tampouco recebeu a obra de Biermann bem.

Conforme relata Weierstraß em sua correspondência com Schwarz, Biermann havia pedido a ele a permissão de publicar uma grande obra sobre sua teoria e o autor o alertou sobre a dificuldade envolvida nessa tarefa. Biermann admite ter feito tal pedido na introdução de sua obra:

> Com a permissão do meu estimado professor Weierstraß, que conhece o plano do presente trabalho, pude citar o livro com algumas de suas investigações, que são conhecidas apenas pelas palestras, para a qual considero meu primeiro dever expressar meus maiores agradecimentos neste momento.[41] (Biermann, 1887, p. *iii*)

Contudo, Weierstraß parece ter interpretado a passagem de modo que ele não somente permitiu a publicação como também teria aprovado o resultado final, uma vez que, segundo Biermann, o professor de Berlim conhecia o "plano do trabalho". Por conta disso, ele julga que Biermann teria sido mal-intencionado ao iniciar sua obra de maneira ambígua. Na correspondência, Weierstraß relata sua forte insatisfação com o resultado final, julgando que Biermann sequer presenciou suas lições introdutórias e que havia notas de aulas de seus alunos que seriam melhores (Weierstraß apud. Dugac, 1973, p. 143) Infelizmente, Weierstraß não chega a mencionar motivos particulares de sua insatisfação com a obra de Biermann, apesar de ter prometido esclarecer os "fatos verdadeiros" na mesma carta a Schwarz (ibid, p. 143). Um aspecto que pode ter incomodado Weierstraß consiste no mesmo problema que Schwarz comunica a ele sobre o *Schulprogramm* de Kossak: em nenhum momento, Biermann apresenta algo como o princípio da permanência e é menos explícito que Kossak na hora de utilizá-lo para estender o conceito de número (Biermann, 1887, p. 13)

3.8.5.4 "Lições sobre a teoria de Weierstraß números irracionais" de Dantscher e a crítica de Frege

No ano de 1908, Victor von Dantscher, então professor na Universidade austríaca de Graz, publicou *Vorlesungen über die Weierstrassche Theorie der irrationalen Zahlen* (Lições sobre a teoria de Weierstraß números irracionais), um texto onde ele descreve parte dos fundamentos da aritmética de Weierstraß, focando especialmente na teoria dos números irracionais e dos números complexos da forma $a+bi$. Dantscher foi outro aluno de Weierstraß e, como ele mesmo descreve no prefácio, a redação se baseia no curso de verão de 1872 e em uma lição de 1884 (Dantscher, 1908, n.p.) Apesar de Dantscher não mencionar explicitamente, obtemos que a lição de 1884 que ele assiste não poderia ser outra senão a mesma do manuscrito de 1884-1885 que mencionamos

[41] Mit meines hochverehrten Lehres Weierstrass Erlaubnis, dem der Plan der vorliegenden Arbeit bekannt ist, durfte ich das Buch durch einige seiner nur aus den Vorlesungen bekannten Untersuchungen zitieren, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen grössten Dank auszusprechen als erste Pflicht erachte.

acima. O autor fala ainda que nem todo conteúdo deve ser atribuído diretamente a Weierstraß: onde ele não aponta no texto a referência direta a ele com um "W", toda responsabilidade recairia sobre ele.

Uma das características importantes dessa obra é o fato de que, nela, Dantscher tenta defender a teoria de Weierstraß de algumas críticas, especialmente aquelas proferidas por Frege, as quais veremos a seguir. Dantscher assume a aritmética dos números e das frações a fim de focar a princípio na problemática dos "agregados aditivos de infinitos elementos positivos racionais".

A problemática é introduzida por meio da construção de uma série de números racionais que, elevados a uma potência *k*, aproximam-se arbitrariamente de um número *r* que não possui uma raiz racional. isto nos levaria à consideração de uma extensão do conceito de número se estabelecermos conjuntos de infinitos números racionais como um novo objeto, cuja aritmética deverá ainda ser estabelecida.

> Se alguém conseguir estender as operações aritméticas no campo dos números racionais para conjuntos de infinitos números racionais positivos, abre-se a perspectiva de obter um campo numérico no qual existe um número cuja k-ésima potência é igual a *r* (Dantscher, 1908, p. 9).

Assim como destacou Kossak, o desafio dessa extensão dos números é redefinir a relação de igualdade, uma vez que a concepção anterior não é capaz de se aplicar a "agregados aditivos" com infinitos elementos. A nova concepção de igualdade desenvolvida por Weierstraß, similar à que encontramos nos manuscritos analisados acima, é chamada por ele de "explicação da igualdade Weierstrassiana" e, de acordo com o método de extensão do conceito de número, deve ser capaz de substituir a definição anterior de igualdade que se aplicava às quantidades fracionárias para que o conceito estendido abarque as concepções anteriores (Dantscher, 1908, p.10, 39)

A crítica de Frege é diretamente citada por Dantscher no prefácio de sua redação e uma resposta breve a ela surge no capítulo 9. Em sua obra de 1893, o segundo volume de *Grundgesetze der Arithmetik* (Leis Fundamentais da Aritmética), Frege se refere à concepção de número de Weierstraß tendo como base manuscritos de seus alunos, incluindo os textos supracitados de Kossak e Biermann. Na parte final da passagem, Frege critica a sua concepção de soma de elementos infinitos que constitui a base para o conceito de número irracional:

> Weierstraß não compreende uma soma de infinitos positivos como um limite, mas sim como uma soma. A existência delas lhe parece tão certa quanto as que possuem número finito de somas; e, no entanto, isso não concorda com sua explicação da adição. Só ele considera necessário explicar a igualdade neste caso (violação do nosso primeiro princípio de definição) e assim chega à finitude. Isso tem a ver com o fato de que, como vimos acima, a palavra "soma" e o sinal de mais e de igual não possuem um significado fixo (Frege, 1893, p. 154).

Dugac (1973, p.83-84) teria alegado que tal crítica seria ingênua uma vez que o conceito de limite deveria ser definido após a concepção das somas infinitas, de acordo com o problema conceitual que abordamos anteriormente. No entanto, acreditamos que isso foge a essência da concepção peculiar de Frege do que seria uma definição e como a concepção de Weierstraß

escaparia dela, além do fato de que Frege não é totalmente claro se a concepção de limite deve preceder aquela de número irracional. O que ele contesta é o fato de que a concepção de soma Weierstrassiana, é incapaz de abarcar a noção de uma soma infinita. Não ficaria claro o que seria um agregado aditivo de infinitos elementos se este é considerado por meio de um conceito anterior (soma) que não se adapta naturalmente ao caso infinito. O fato de Weierstraß tentar estabelecer o conceito com uma nova definição de igualdade fugiria igualmente da concepção de Frege de definição que não permitiria tal fluidez que caracteriza o processo de extensão do conceito de número. Para Dantscher, a crítica de Frege pode ser rebatida com o fato de que o termo "soma" que surge no novo conceito consiste apenas em uma analogia ao fato de que os agregados infinitos possuem propriedades semelhantes às somas finitas, a saber, um agregado infinito convergente pode ser repartido em outros agregados que, reunidos (ou "somados"), resultarão no agregado original. Segundo Dantscher, a característica fundamental do conceito de agregados aditivos infinitos seria a convergência, a qual pode ser compreendida completamente em termos de somas finitas. Portanto, os agregados aditivos infinitos não violam a concepção de adição estabelecida e o termo "aditivo" somente é utilizado de maneira analógica, assim como o símbolo + que é utilizado na sua representação.

> A que caracteriza o processo de extensão das propriedades de um agregado aditivo convergente de infinitos racionais positivos mostram, de fato, que um tal agregado possui o caráter de uma soma, e justifica o uso da palavra soma. Se falamos de uma soma de infinitos racionais, então na realidade deve-se entender apenas que o agregado aditivo de todos esses números converge [...] (Dantscher, 1908, p. 29).

3.8.5.5 Reações na Itália: A análise de Ulisse Dini

Apresentamos aqui uma última figura da recepção da teoria de Weierstraß em nível internacional. Ulisse Dini (1845-1918) foi um matemático nascido na cidade de Pisa, Itália, em uma época em que a região passava por momentos intensos política e militarmente, à medida que a unificação se aproximava. Em 1861, após vencer uma competição para receber suporte financeiro para estudar no exterior, Dini foi a Paris, onde estudou com Charles Hermite (1822-1901) e Joseph Bertrand (1822-1900). Essa época foi marcada por bastante engajamento em assuntos matemáticos e Dini chegou a publicar sete textos enquanto permaneceu na França.

Em 1865, ele volta para Pisa e é apontado como professor de tópicos avançados de álgebra e teoria de geodésia e, posteriormente, em 1871, veio a suceder a Enrico Betti (1823-1892) nas cadeiras de análise e geometria avançada. Em 1877, ele passou também a assumir a cadeira de cálculo infinitesimal na universidade sem deixar a posição que havia conquistado anteriormente, e permaneceu em ambas até o final de sua vida. Na década de 1870, Dini também embarcou em sua carreira política: em 1871, foi apontado ao Conselho da cidade de Pisa e, em 1880, foi eleito ao parlamento italiano como representante de Pisa.

Duas grandes publicações de Dini merecem destaque: no ano de 1878, ele publicou uma das suas mais importantes obras, *Fondamenti per la Teorica delle Funzioni de Variabili Reali* (Fundamentos da teoria de funções de variáveis reais), na qual ele apresenta os fundamentos da análise real tendo como base o conceito de número e, entre 1907 e 1915, ele publicou outra grande

obra em dois volumes sobre análise infinitesimal: *Lezioni di analisi infinitesimale* (Lições de análise infinitesimal).

Foi enquanto professor de análise na universidade de Pisa que Dini começou a se interessar mais pelos fundamentos do assunto. Como ele aponta na introdução de sua obra de 1878, Dini tinha muitos questionamentos acerca dos fundamentos da análise que não pareciam ser atacados por ninguém em seu meio. Foi somente quando ele entrou em contato com obras de alemães, a saber, as memórias de Schwarz e Heine, que ele percebeu que havia outras pessoas que levantavam questionamentos semelhantes ou mais profundos. Notavelmente, Dini chegou a se comunicar com Schwarz e foi por intermédio dele que Dini se tornou ciente dos métodos de Weierstraß que influenciaram fortemente a obra:

> Eu escrevi para o Sr. Schwarz sobre o assunto e ele, com uma bondade pela qual eu o agradeço agora publicamente, quis comunicar a mim algumas informações internas do método que Weierstraß e outros matemáticos que foram seus alunos seguiam em suas demonstrações (Dini, 1878, p. iv)

A influência de autores alemães é notável na obra e não se resume a Weierstraß, Schwarz e Heine. Dini ainda cita a influência dos trabalhos de Dedekind, Hankel, e Paul Du-Bois Reymond (1831-1889), irmão do filólogo Emil Du-Bois Reymond (1818-1896), além da produção de Cantor. O forte interesse que um matemático italiano como Dini, bastante interessado nos fundamentos, teve por produções alemães em vez do que se produzia em seu ambiente sugere fortemente o que já apontamos, a saber, o maior interesse pelos fundamentos que se desenvolve nas comunidades matemáticas alemãs.

Como já falamos, Dini inicia a sua obra falando do conceito de número. Mais especificamente, ele busca fundamentar os números irracionais, aos quais ele também se refere como incomensuráveis (*incommensurabili)*, visando a uma fundamentação do conceito de limite, que será fundamental para a sua análise. Encontramos muitos elementos que, conforme apresentamos nas seções anteriores, compõem tendências nos fundamentos da matemática na Alemanha. Por um lado, ao perceber a impossibilidade da extração de raiz em alguns casos quando estamos limitados a frações e números inteiros, Dini concorda com a noção de que a busca pela generalização das operações leva a um processo de extensão do conceito de número que deve respeitar o chamado princípio da permanência:

> [...] convém, portanto, voltar ao conceito primitivo de número inteiro e de fração, para ver se a impossibilidade encontrada, em vez de ser uma impossibilidade real e própria relativa a esta operação, não provém do conceito ainda demasiado limitado que temos do número, e se este conceito ainda não é suscetível de uma extensão com a qual novos números são introduzidos na Aritmética a que corresponde algo real, pelo menos em geral, e com o qual desaparecem as dificuldades encontradas para extrair a raiz, e as outras operações da Aritmética ainda permanecem possíveis, e mantêm suas propriedades fundamentais (Dini, 1878, p. 1).

Além disso, Dini afirma que esse processo deve ser feito de uma maneira puramente aritmética, isto é, sem recorrer à geometria, apesar de conceder que ela sirva de alguma maneira como referência para percepção da existência de números incomensuráveis, em um estilo parecido com aquilo que é feito por Dedekind em sua obra de 1872: "vamos agora trazer esses conceitos para a Aritmética e, com eles, tentar estender o conceito de número independente da geometria, permanecendo perfeitamente na Aritmética" (Dini, 1878, p. 3).

Segundo Dini, a apresentação dos números irracionais no primeiro capítulo possui duas fontes principais: tanto a memória de Schwarz como a concepção de Dedekind em termos de cortes. Analisando o conteúdo do capítulo, no entanto, percebe-se a prevalência da concepção de Dedekind, enquanto aquela proposta por Weierstraß não se faz presente. As primeiras linhas de sua apresentação aritmética deixam claro que ele se baseia nos cortes de números racionais, utilizando-se de um simbolismo semelhante ao de Dedekind: "Imaginemos agora uma decomposição de números racionais em duas classes A_1e A_2 [...]" (Dini, 1878, p. 3). Com isso, encontramos em Dini mais um exemplar do fato de que a concepção de número de Weierstraß acabou não sendo reproduzida pelas comunidades, nem mesmo por aqueles que se inspiraram em seus métodos.

3.9. A abordagem de Charles Méray

3.9.1. Charles Méray

Charles Méray (1835-1911) nasceu em Chalon-sur-Saône, França. Após uma adolescência marcada tanto pelo amor quanto pela falta de compreensão pela matemática ("*Ênquete*...", 1905, p. 390-391) ingressou na *École Normale Supérieure* no ano de 1854. Durante os anos entre 1857 até 1959, lecionou no liceu de St. Quentin e, após isso, se retirou durante sete anos para um pequeno vilarejo de *Bourgogne.* Retornado à sua carreira como professor, Méray foi à Faculdade de Ciências de Lyon (Robinson, 2008, n.p.) e, em 1867, foi nomeado para o cargo de professor de cálculo diferencial e integral na Faculdade de Ciências de Dijon, por onde ficou até o final de sua carreira. Em 1899, ele ainda foi eleito como membro correspondente da seção de geometria da Academia de Ciências (Dugac, 1973, p. 334)

No fim de sua vida, Méray deixa uma breve passagem na Revista *L'enseignement mathématique* na qual ele reflete sobre a sua e nos ajuda a perceber alguns traços de suas intenções e crenças como matemático.

> Fui seduzido pela geometria até o último ponto da minha primeira iniciação aos métodos modernos [...] e aos 17 anos devorei literalmente a Geometria Superior de Chasles que acabara de tomar (1852). Mas logo percebi que a geometria é apenas um mito como ciência pura, que não era mais do que uma aplicação da análise aos fatos geométricos e eu me ocupei mais com a análise. Esta me pareceu lamentável por suas divagações, seus procedimentos, sua absoluta falta de rigor e meus principais esforços tendiam a torná-la natural, clara e rigorosa tanto quanto a mais leve questão de álgebra elementar. A matemática me seduz por si mesma e quase

> independentemente de suas aplicações. Não creio que jamais seus ramos superiores, tão luxuriantes hoje, prestarão às outras ciências, às artes industriais, serviços comparáveis, mesmo à distância, àqueles que estas atraíram, sempre atrairão de suas partes inferior e média (“*L'enseignement*…”, 1905, p. 46-47)

A passagem é importante por condensar alguns dos principais pontos que discutiremos: seu interesse quase unicamente pela análise ao longo de sua carreira, a necessidade de reformular as suas bases de modo a provê-la com rigor e clareza, a crença de que a análise constitui um conhecimento abstrato que não tem por base nem objetivo qualquer tipo de aplicação, e a sua primazia sobre a geometria e as demais ciências naturais que dela dependem. Vale apontar, no entanto, que Méray admite posteriormente que, se pudesse voltar no tempo, teria se dedicado mais às físicas naturais em vez de ter focado na matemática pura. Além disso, Méray lançou um livro de geometria em 1874 intitulado *Nouveaux Élements de Géométrie* e cuja reedição de 1904 esteve envolvida numa investida de reforma no ensino da geometria, tornando a disciplina mais próxima da realidade e da experiência concreta do que aquela promovida pelos seguidores mais próximos da obra de Euclides (D’Enfert, 2005, p. 252)

Sua preocupação com o rigor se encontra manifesto em boa parte de seus escritos, e surge imediatamente nos prefácios de suas duas maiores obras sobre a Análise: *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* (Novo resumo da análise infinitesimal) de 1872 e *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques* (Novas lições sobre a an´-alise infinitesimal e suas aplicações geométricas), publicada em quatro volumes de 1894 a 1898. Em 1872, Méray diz que:

> Nos fundamentos da Álgebra e da Geometria, geralmente irrepreensíveis do ponto de vista do rigor, unem-se em uma ordem perfeita verdades muito precisas e muito claras; pelo contrário, parece-me que as da Análise das funções muitas vezes deixam a mente meio satisfeita e como que perdida na onda de teorias que nenhum princípio simples parece dominar (Méray, 1872, p. *xi*).

Méray acreditava que a geometria e a álgebra é dotada de um rigor que não se encontra na análise, e isso se dava precisamente por conta das demonstrações “nas quais a geometria intervém”. Sua crítica se concentra principalmente na atribuição da continuidade como base da análise. Apesar de crer que esta seja uma “característica fundamental das funções”, Méray afirma que isse fato levou alguns erroneamente a assumi-la como fundamento da ciência, principalmente por parte daqueles preocupados com aplicações geométricas e mecânicas. Méray também se posiciona contra a ainda forte crença de que as propriedades de derivabilidade e continuidade se confundem, um consenso que já havia sido questionado anteriormente por Bolzano e se encontrava envolvida em debates na Alemanha (Bottazzini, 1986, p. 257-265). A solução que Méray sugere é unificar o cálculo através da propriedade de de que todas as funções podem ser expandidas em uma série de Taylor, indo de acordo com o projeto algebrizante proferido por Lagrange. E em sua perspectiva, o conceito de limite assume a base do cálculo, o que o acabou levando a desejar formular uma fundamentação para os números irracionais.

3.9.2. Estado da arte sobre a concepção de Méray

A bibliografia focada especialmente na vida e obra de Méray é relativamente escassa e costuma referir-se pontualmente à sua concepção "modernizante" dos números reais, mas sem entrar em grandes detalhes sobre sua construção. O que se costuma falar é que sua construção é semelhante à de Cantor por se basear no que chamamos atualmente de sequências de Cauchy (por exemplo, Mainzer (1991, p. 39) e Gray (2008, p. 133)). Nossa fonte principal se trata do artigo de Dugac de 1970, *Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite* (Charles Méray e a noção de limite). Nessa publicação, Dugac analisa os fundamentos da análise nos diferentes tratados do autor, além de analisar também a sua abordagem dos números irracionais.

Destacamos dois aspectos da análise de Dugac a respeito de Méray. Primeiramente, ele percebe duas aparentes questões que não foram bem elucidadas na fundamentação da disciplina pelo autor: por um lado, ele defende a independência da análise da geometria e das demais ciências, mas, por outro, defende sua concepção limitante de função com base no fato de que os fenômenos naturais podem ser representados por séries de Taylor. A outra questão seria a sua defesa do conceito de limite como base da análise ao mesmo tempo em que elogia a exposição dos fundamentos do cálculo diferencial de Lagrange, que defendia a eliminação do conceito na disciplina (Dugac, 1970, p. 339)

Quanto à fundamentação dos números irracionais, Dugac descreve como ele teria resolvido o problema histórico de definir o conceito de maneira "rigorosa" e a posição que o conceito de limite assume como elemento fundamental dessa resolução. Boyer, por sua vez, faz uma leve crítica à maneira vaga como Méray relaciona os irracionais aos limites de sequências, mas coloca sua teoria como sendo potencialmente equivalente à de Weierstraß:

> Méray era um tanto vago quanto a se ou não sua sequência convergente é o número. Se é, como parece indicado, então sua teoria é equivalente à desenvolvida ao mesmo tempo por Weierstraß (Boyer, 1974, p. 409).

Dugac reconhece também o pioneirismo de Méray na França ao afirmar que a teoria desenvolvida sobre os números irracionais se aplica igualmente aos números complexos, uma vez que estes são uma simples combinação de números reais.

Para além da sua abordagem inovadora dos números irracionais, Méray se preocupou também em desenvolver uma fundamentação bastante peculiar para as frações e os números inteiros e julgamos que tais abordagens não foram suficientemente abordadas pela historiografia. Toda a sua atitude de assumir a aritmética dos números naturais e expandir geneticamente o conceito de quantidade com base em livre postulação de "ficções" constitui ainda uma abordagem incomum na França e julgamos que este fato tampouco foi devidamente pontuado.

A seguir, apresentaremos as diferentes teorias que Méray ofereceu para os diferentes tipos de quantidades. Destacamos que a ordem cronológica em que elas foram apresentadas não coincide com a ordenação genética das quantidades, mas preferimos apresentá-las conforme a ordem cronológica para que possamos apontar detalhes que mostram algumas mudanças pontuais que ocorreram em seu discurso.

3.9.3. A fundamentação dos números irracionais: limites fictícios

As primeiras publicações de Méray vieram através de *mémoires* nos anos de 1868 e 1869. Na primeira, Méray esboça pela primeira vez a sua doutrina da Análise baseada no desenvolvimento em séries de Taylor e, na segunda, encontramos a primeira publicação na Europa de uma fundamentação aritmética dos números irracionais. O assunto ainda viria a ser novamente abordado sob diferentes roupagens na já mencionada obra de 1872, em um artigo de 1887 e no primeiro volume de sua grande obra de 1894. Apesar das diferenças relevantes, todas elas se encontram relacionadas por uma formulação com base em uma generalização do limite de sequências (ou, como ele chamava, variantes) de números racionais. Diante disso, focaremos na sua primeira apresentação em 1869.

Méray começa a sua apresentação dizendo que os fundamentos dos números irracionais se encontram em dois teoremas que costumam ser assumidos como axiomas:

1. Uma quantidade variável *v* que assume valores sucessivos indefinidos $v_1, v_2, \ldots v_n \ldots$. tende a um certo limite se os termos deste limite vão sempre aumentando ou diminuindo, desde que eles estejam no primeiro caso inferiores, no segundo caso superiores a uma quantidade fixa qualquer.
2. Toda variável de Cauchy tende a um certo limite. Isto é, se $v_{n+1} - v_n$ tende a zero para *n* aumentando indefinidamente, então a variável *v* tende a um limite.

O primeiro teorema afirma que "toda sequência monótona limitada é convergente", enquanto o segundo diz que toda sequência de Cauchy é convergente.

A sua crítica tem origem no fato de que, ao assumir os teoremas, os conceitos de limite e o conceito "bastante obscuro" de número irracional não são propriamente estabelecidos. Méray argumenta com relação à primeira proposição:

> Qualquer método adequado para determinar a existência de uma quantidade que satisfaça certas condições repousa essencialmente em algum processo por meio do qual se possa calcular a partir dos dados o próprio valor dessa incógnita. No entanto, as noções fornecidas por nosso axioma sobre a natureza da variável não nos permitem por si mesmas descobrir o valor de seu limite; portanto, também não são suficientes para estabelecer sua existência (Méray, 1868, p. 283)

Sua crítica ao axioma logo se direciona especificamente à maneira como ele conferiria existência aos irracionais, os quais ele chama de incomensuráveis. O axioma não seria capaz de determinar que os números irracionais realmente existam uma vez que ele não permite uma maneira de *calcular o seu valor a partir dos dados*, isto é, a partir dos termos da pela sequência. Dessa forma, a noção comum de que os números irracionais poderiam ser introduzidos como limites de sequências é contraditória. Podemos supor apenas a existência de limites racionais, que já se encontram estabelecidos ou assumidos em sua teoria. Somente esses são considerados "números".

> Mas, além disso, não é de alguma forma contradizer-se que se deseja relacionar a existência *analítica* de um objeto a uma hipótese que não o faz corresponder a nenhum número e que,

> portanto, não confere o único título ao qual é permitido inscrevê-lo nos cálculos? Inclino-me a acreditar nisso e a atribuir justamente a esta causa a dificuldade que ainda se experimenta em aprofundar a noção de quantidade incomensurável (Méray, 1868, p. 283)

Posto o problema, a sua solução consiste em estabelecer a convergência por meio do segundo teorema, isto é, com base na propriedade que caracteriza o "critério de Cauchy"[42]. Ele observa que se $v_{n+p} - v_n$tende a zero, o que vale universalmente para variáveis dotadas de limite racional, também se aplica a variáveis sem um limite atribuível e, nesses casos, "a natureza de v oferece uma semelhança extraordinária com aquela das variáveis realmente dotadas de limites". Definir a convergência a partir da propriedade em questão resolve o problema dos incomensuráveis citado por Méray pois nos permite fazê-lo sem que tenhamos que nos referir diretamente ao limite, o qual pode não ser atribuível e, portanto, não está ainda estabelecido na teoria. Por convenção, Méray diz que as sequências convergentes que não possuem limite atribuível são ditas possuírem um limite "fictício".

> A existência de um limite para uma variável convergente torna fácil enunciar algumas de suas propriedades que não dependem dessa particularidade e que muitas vezes seria muito mais inconveniente formular diretamente. Podemos, portanto, imaginar que seja vantajoso, no caso de não haver limite, manter a linguagem abreviada própria daquela onde há; e, para expressar a convergência da variável, diremos simplesmente que ela possui um limite (fictício) (Méray, 1868, p. 284)

Logo em seguida, Méray também diz que variáveis u e v são ditas equivalentes quando a diferença $u_m - v_n$ tender a zero. Tal equivalência o levará a dizer que por conveniência, esses limites fictícios são iguais. As operações envolvendo quantidades comensuráveis e incomensuráveis são estabelecidas por meio das variantes que as caracterizam: realizamos as operações entre os termos correspondentes das variantes e as variantes resultantes dessas operações também serão convergentes. De acordo com essa concepção, podemos, por exemplo, estabelecer as raízes quadradas e demonstrar uma igualdade aritmética como $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Curiosamente, Dedekind irá mencionar em sua obra *Stetigkeit* de 1872 que uma igualdade desse tipo, $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$, não tinha sido ainda devidamente demonstrada até as suas definições da aritmética com os cortes de Dedekind (Dedekind, 1872, p. 27)

> Pode-se imaginar uma infinidade de variáveis progressivas das quais os quadrados tendem a um número dado a, e se demonstra facilmente que elas são todas convergentes e equivalentes. É esse fato bastante certo que se exprime ao dizer que todo número possui uma raiz quadrada, proposição a qual não é verdadeira quando deixamos as palavras com seu significado literal. Quando a não é quadrado, $\sqrt{a}$ designará dentro dessa linguagem essa raiz fictícia, e dentro dos cálculos toda variável progressiva da qual o quadrado tende a a. Se por diferentes maneiras obtivermos uma variável convergente cuja equivalência pode ser vista a uma daquelas cujo quadrado tende a a, diremos que seu limite é igual a $\sqrt{a}$.

[42] Ressaltamos que Méray não se utiliza dessa nomenclatura para se referir à propriedade.

> A relação $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ que sendo α, β, γ variáveis comensuráveis quaisquer, das quais os quadrados tendem a a, b, ab, a diferença $\alpha\beta - \gamma$ tende a zero (Méray, 1868, p. 288)

A passagem também nos é útil para responder a crítica supracitada de Boyer. O autor acredita que Méray não é claro se os números irracionais correspondem às sequências em si ou se consiste nos limites (fictícios), o que não resolveria o problema da circularidade. De fato, em momento algum Méray define explicitamente os incomensuráveis como "classes de equivalência"[43] de variáveis convergentes sem limite racional, mas apenas fala da existência de uma "correspondência" entre os dois conceitos (Méray, 1868, p. 287) A passagem deixa claro, no entanto, que, por exemplo, o número irracional $\sqrt{a}$ designa as variáveis da qual o quadrado tende a a, sugerindo, assim que o número consiste em uma "classe de equivalência" de variáveis. Da mesma forma, não podemos deixar de destacar que Méray se mostra claramente ciente do problema em assumir os números irracionais como limites "no sentido literal" e que, além disso, diante das definições feitas por Méray de igualdade e das operações aritméticas, os objetos operacionalmente utilizados são, de fato, as variáveis.

Em relação à comparação que ele faz entre Méray e Weierstraß, destacamos apenas que, apesar de as duas construções irem em direção à resolução de um mesmo problema dentro de uma abordagem que julgamos "moderna", não podemos ignorar o fato de que os autores se utilizam de fundamentações que se baseiam em objetos matemáticos completamente distintos.

No fim do texto, Méray ainda diz que "as quantidades imaginárias[44], não sendo mais do que combinações de duas quantidades reais, dão lugar às mesmas considerações." Sobre essas quantidades, veremos uma construção teórica mais completa no primeiro volume de sua obra de 1894.

3.9.4. As frações como operações fictícias

Pudemos perceber que exposição da teoria aritmética dos números irracionais pressupõe uma teoria sobre os números inteiros e fracionários, os quais compõem os termos das variantes. O tratamento desses entes por sua vez, só foi abordada por Méray publicamente em 1889, em um artigo com o título sugestivo *Théorie élémentaire des fractions dégagée de toute considération impliquant soit la subdivision de l'unité abstraite, soit l'intervention des grandeurs concrètes. Son application à la spécification de ces dernières* (Teoria elementar das frações limpa de toda consideração envolvendo tanto a subdivisão da unidade abstrata, quanto a intervenção de quantidades concretas. Sua aplicação à especificação matemática destes últimos), e, depois, veio a ser acoplada ao seu tratado de 1894. Méray inicia o artigo com uma crítica à apresentação das frações nos tratados de aritmética. Colocamos abaixo a sua crítica completa:

---

[43] Utilizamos o termo entre aspas pois o utilizamos por analogia apenas. A ideia de classes de equivalência não havia sido ainda desenvolvida conforme a concepção moderna. Méray se utiliza apenas da noção de equivalência.

[44] Méray se refere ao que chamamos de números complexos. O termo "imaginário" ainda prevalece aqui por não haver ainda uma popularização internacional e plena do termo "complexo" sugerido por Gauß.

> Nos tratados de Aritmética, as frações são apresentadas como somas de partes alíquotas da unidade abstrata, o que é ininteligível, ou como medidas numéricas de quantidades que não são múltiplas exatas de suas unidades.
>
> Neste último caso, é verdade, os alunos percebem imediatamente o que significa 3/4 de metro, 5/7 de minuto, etc. mas eles só concebem de forma longa e difícil e empiricamente, isto é, sem nunca serem capazes de explicar a substância das coisas tão claramente como gostariam, para si próprios ou para os outros, o que é 3/4, 5/7, abstraídos de quaisquer medidas físicas, o que está sob os sinais $3/4 \pm 5/7, 3/4 \times 6/7, 3/4 : 5/7 \ldots$
>
> Lá, ademais, como em outras partes da Análise Pura, há de se erradicar a intervenção das quantidades concretas, pois a ciência dos números abstratos não podem adquirir uma clareza completa e unidade sem a exclusão rigorosa de toda consideração alheia (Méray, 1899, p. 421-422)

Tal como no seu escrito sobre os irracionais, Méray se mostra disposto a fazer uma reforma nos fundamentos da análise. Neste caso, mais claramente, Méray critica a intervenção de considerações concretas para explicar ou legitimar as frações, o que não condiz com a sua concepção abstrata de número da disciplina da Análise.

Méray considera que os números inteiros são os únicos que se encontram na fundamentação teórica e os demais entes seriam introduzidos como "ficções". Ou seja, enquanto as frações pareciam gozar da mesma cidadania que os inteiros no seu texto de 1868, agora estas também consistem em "ficções". A razão para inclusão de novos entes no cálculo é puramente prática, isto é, visando à diminuição das constantes restrições que acabariam por intervir nas operações. No caso das frações, a utilidade seria a generalização da divisão (Méray, 1899, p. 422).

Méray começa sua apresentação das frações considerando a dupla operação de multiplicar um número inteiro dado *E* por um outro inteiro *n* e, em seguida, dividir o resultado por um outro número *d* não nulo, $E \times \frac{n}{d}$. Segundo Méray, a operação pode também ser entendida como a operação de dividir *n* por *d* para depois multiplicar o resultado por *E*, $\frac{n}{d} \times E$. Evidentemente, no plano dos números inteiros, uma tal operação não é possível quando *n* não é divisível por *d*, mas Méray desenvolve uma aritmética desses "fatores fictícios", $\frac{n}{d}$, baseada no caso em que as operações são executáveis.

> Para conservar as vantagens quando *n* não é divisível por *d*, *convém representar mesmo nesse caso o resultado da operação acima pelo sinal* $E \times \frac{n}{d}$ ou $\frac{n}{d} \times E$ própria no caso onde *n* não é divisível por *d*, deixando-o com o nome de produto do número *E* pelo fator fictício $\frac{n}{d}$.
>
> Esses fatores fictícios cujas combinações são submetidas a um conjunto de regras que iremos expor rapidamente, são exatamente os números fracionários ou frações (Méray, 1889, p. 423)

Ordem e Igualdade

As relações de ordem e igualdade entre duas frações, $\frac{n'}{d'} >=< \frac{n''}{d''}$, podem ser definidas com base nas relações $E\frac{n'}{d'} >=< E\frac{n''}{d''}$, entre números inteiros, isto é, considerando-se um inteiro E tal que $E\frac{n'}{d'}$ compreenda um conjunto de operações executáveis entre números inteiros.

> Se a comparação dos produtos das duas frações $\frac{n'}{d'}, \frac{n''}{d''}$por um único inteiro E não =0 der lugar a uma das relações $E\frac{n'}{d'} >=< E\frac{n''}{d''}$, a mesma relação dará lugar entre os produtos das mesmas frações por todo outro inteiro [,,,], na condição de que essas multiplicações fictícias sejam todas executáveis (Méray, 1889, p. 424)

Méray ainda estabelece o seguinte teorema: "Para que exista uma tal relação entre essas frações, é necessário e suficiente que exista entre seus termos uma mesma na tabela: $n'd'' >=< n''d'$" (Méray, 1889, p. 424)

Soma, Subtração, Multiplicação e Divisão

Tal como a relação de ordem, as operações de soma e subtração são estabelecidas primeiramente por uma abstração de uma operação executável entre números inteiros. Após ter mostrado como transformar as formas de um grupo de frações de modo que elas tenham um mesmo denominador, Méray diz que, supondo-se possíveis as operações indicadas por $E\frac{n'}{d'}$, $E\frac{n''}{d''}$, $E\frac{n''}{d'''}\ldots$, temos que:

$$E\frac{n'}{d'} \pm E\frac{n''}{d''} \pm E\frac{n''}{d'''}\ldots = \frac{EN'+EN'+EN'''\pm\ldots}{D} = \frac{E(N'\pm N''\pm N'''\pm\ldots}{D} = E(\frac{N'\pm N''\pm N'''\pm\ldots}{D}).$$

A partir do seu resultado final, Méray estabelece que a soma de frações $\frac{n'}{d'}, \frac{n''}{d''}, \frac{n'''}{d'''}\ldots$quaisquer é representada pelo símbolo$\frac{n'}{d'} \pm \frac{n''}{d''} \pm \frac{n'''}{d'''}$, e é igual ao termo $\frac{N'\pm N''\pm N'''\pm\ldots}{D}$.

A multiplicação entre frações é estabelecida ao mesmo estilo:

> Se as operações $E\frac{n'}{d'}$, $(E\frac{n'}{d'}) \times \frac{n''}{d''}$ são possíveis, o resultado da última, igual evidentemente a $E\frac{n'n''}{d'd'}$, pode assim ser obtido ao multiplicar E pela fração única $\frac{n'n''}{d'd'}$. Essa última cuja lei de formação é evidente, se chama, por convenção, o produto de frações $\frac{n'}{d'}, \frac{n''}{d''}$ (Méray, 1899, p. 427)

A divisão, por sua vez, é definida a partir da multiplicação. Dadas duas frações $\frac{N}{D}, \frac{n}{d}$, ele obtém que a fração $\frac{Nd}{Dn}$é aquela que, multiplicada pela segunda, resulta na primeira, de modo que chamamos $\frac{Nd}{Dn}$de divisão de $\frac{N}{D}$ por$\frac{n}{d}$.

O último passo da teoria é observar uma relação entre os inteiros e as frações, de modo que os primeiros possam ser incorporados aos últimos. Dessa maneira, a aritmética das frações abarca também a aritmética entre inteiros:

> Se o inteiro R é o resultado de um conjunto dado de operações quaisquer executadas sobre os inteiros e', e'',.. (adições, multiplicações, subtrações e divisões, essas últimas essencialmente supostas possíveis), o resultado das operações fictícias de nomes indicados na teoria das frações, executadas paralelamente sobre as frações correspondentes $\frac{e}{1}, \frac{e''}{1}, \ldots$ será precisamente a fração $\frac{R}{1}$(sobre esta forma ou sobre uma outra).
>
> Para efetuar um cálculo aritmético qualquer sobre os inteiros, pode-se logo também:1. colocá-los como numeradores de frações, todas possuindo 1 como denominador comum. 2. substituir o cálculo propriamente dito dado pelo cálculo fictício de mesma denominação executado sobre essas frações. 3. buscar o numerador do resultado reduzido a sua expressão mais simples (Méray, 1889, p. 429)

Conforme mostraremos na seção 3.3., há fortes indícios de que a maneira como Méray desenvolve a aritmética das frações, bem como a sua concepção desses objetos como operações, influenciou a construção de Peano dos números racionais.

3.9.5. O conceito de número assume a dianteira em 1894: apresentação completa dos diferentes tipos de quantidades

Na obra de 1894, encontramos, finalmente, uma apresentação sistemática de todos os diferentes tipos de "números" por meio de um processo genético que se inicia a partir dos números naturais. A aritmética dos números inteiros que, no artigo de 1889, se distinguiam ontologicamente das frações, são construídos pela primeira vez nesta obra, também com base em "ficções". O motivo pelo qual Méray inicia seu tratamento da análise com o conceito de número desta vez se dá provavelmente por conta da centralidade que o conceito passa a assumir:

> A Análise matemática é a ciência geral dos números, isto é, das relações numéricas concebíveis entre os objetos diversos sobre os quais nossa atenção pode se dirigir sem se prender à sua natureza particular (Méray, 1894, p. 1)

Méray também fala sobre o caráter axiomático dos fundamentos da análise, provavelmente se referindo aos princípios auto-evidentes dos números naturais. Apesar de admitir uma tal concepção, destacamos que Méray jamais apresenta esses axiomas e a aritmética dos números naturais é sempre assumida sem maiores comentários.

> A análise matemática se compõe de uma sequência de proposições das quais ninguém pode perceber a última e das quais todas se deduzem umas após as outras a partir de axiomas, ou fatos gerais considerados como evidentes, em número extraordinariamente pequeno. Ela fornece a todos os outros conhecimentos humanos os princípios dos quais não podem prescindir e não toma emprestado de nenhum outro. Consideramos que ela forma por si mesma toda a matemática pura, da qual excluímos a geometria, assim como a mecânica, a

> física, etc., porque ela compreende essencialmente, como estas últimas ciências, embora em menor grau, a consideração contínua de fatos especiais relativos ao mundo material (Méray, 1894, p. 2)

Apesar de dar grande importância ao conceito de número, é importante destacarmos que Méray chama os demais tipos de entes de "quantidades", destacando, assim, uma provável distinção ontológica entre os números naturais e as construções seguintes. Méray não entra em detalhes acerca de aspectos filosóficos como esse, mas pode-se compreender que a distinção se manifesta no fato de que a aritmética dos números naturais é considerada evidente ou axiomática enquanto as demais quantidades são fabricadas por meio de "ficções", isto é, se baseiam em uma certa liberdade criativa que se permite na análise.

O caminho seguido por Méray o difere dos demais autores que vimos até então: as frações são introduzidas logo antes dos números negativos. Posteriormente, ele ainda apresenta a sua teoria dos incomensuráveis e das quantidades imaginárias, que são definidas a partir de pares ordenados de maneira semelhante ao que foi proposto por Hamilton. Ressaltamos ainda que Méray nunca se utiliza explicitamente de algo como o princípio da permanência para definir a aritmética dos diferentes tipos de quantidade. Apesar disso, algo como o princípio de inversão é perseguido tanto na construção das frações como dos números inteiros visando à comodidade prática de se operar sem restrições.

A apresentação das frações repete quase todo seu ensaio que apresentamos anteriormente e é seguida das quantidades "positivas" e "negativas". A princípio, elas são chamadas de "quantidades qualificadas" e são também consideradas "fictícias". O aspecto mais marcante da apresentação de Méray é o fato de que ele faz uma separação sistemática dos sinais operatórios + e - dos sinais quantificadores, isto é, indo na mesma direção de Förstemann e Wilckens, apesar de sua notação ser diferente.

> Chamaremos provisoriamente de qualificadas as quantidades absolutas convencionalmente providas de certas qualidades fictícias que as tornam aptas para sofrer as operações igualmente fictícias que serão sucessivamente definidas.
>
> A cada quantidade absoluta a não =0, corresponderão duas quantidades qualificadas, uma dita positiva e a outra negativa, das quais chamaremos a de valor absoluto (algumas vezes numérico) comum, e que provisoriamente representaremos por $+a$ e $-a$ respectivamente (Méray, 1894, p. 11)

Nesta apresentação, vemos ainda que Méray adota uma linguagem comum do século XVIII, de acordo com a qual quantidades negativas e positivas são quantidades absolutas dotadas de uma certa qualidade. A quantidade absoluta 0 como a única a produzir uma quantidade qualificada única, $\underline{o}$, também chamada de neutra.

Seu próximo passo é definir igualdade e a relação de oposição entre duas quantidades: duas quantidades qualificadas são iguais quando seus valores e suas qualidades coincidem, e são opostas quando seus valores são iguais, mas suas qualidades são distintas.

Logo em seguida, Méray define as operações fundamentais. Todas as regras são apresentadas de maneira puramente verbal semelhante às definições típicas do século anterior e

seguidas de exemplos concretos. Podemos ver ainda que elas são definidas diretamente para uma quantidade arbitrária de quantidades sendo operadas, e não apenas duas:

> A adição de múltiplas quantidades qualificadas dadas consiste em fazer a soma dos valores absolutos daquelas que são positivas, seguida da soma dos valores absolutos das negativas, e em qualificar pelo nome da maior dessas duas somas seu excesso sobre a menor (desconsidera-se naturalmente as quantidades neutras). Quando esse excesso é nulo, por exemplo, quando se trata de adicionar duas quantidades qualificadas opostas, obtém-se 0 por resultado (Méray, 1894, p. 11)

Logo em seguida, Méray ainda observa que a comutatividade da operação é válida e que o 0 é o seu elemento neutro.

Após definir as relações de ordem, Méray apresenta a regra dos sinais de soma e subtração, além da regra dos sinais da multiplicação. Nenhuma explicação para a escolha de tais regras é oferecida. Já a divisão é definida como a inversa da multiplicação.

> Dadas quantidades qualificadas combinadas segundo uma certa ordem por via de adições e subtrações consecutivas, o mesmo resultado final é também obtido se, à adição ou à subtração de qualquer uma entre elas, substitui-se respectivamente a subtração ou adição da quantidade oposta (Méray, 1894, p. 12)

> O produto de múltiplas quantidades qualificadas é aquela que possui por valor absoluto o produto dos valores absolutos dos fatores e que é positivo quando o número de fatores negativos é nulo ou par, negativo quando esse número é ímpar, neutro quando um dos fatores o é (Méray, 1894, p. 14)

Definidas as operações, Méray faz o mesmo que havia feito no tratamento das frações: assim como os números naturais e a sua aritmética podem ser entendidos em termos de uma aritmética com frações, eles podem também ser entendidos em termos de uma aritmética com quantidades qualificadas:

> Se R é o resultado de adições e multiplicações, subtrações e divisões (essas duas últimas formas de operações estando naturalmente supostas possíveis) executadas sobre as quantidades absolutas
>
> $$a, b, c, \ldots\ldots, 0.$$
>
> a quantidade positiva +R (ou neutra 0, se R = 0) é também o resultado de operações homônimas dentro da teoria das quantidades qualificadas, que seriam executadas paralelamente sobre as quantidades correspondentes positivas ou neutras
>
> $$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ldots\ldots$$

A última observação de Méray é pertinente por mostrar a sua consciência da diferença entre os sinais operacionais e os sinais qualificativos. Consideremos primeiramente um polinômio contendo termos absolutos (como $a + b - c - d + e \ldots$, onde cada letra representa, isoladamente, um

valor maior do que zero). Podemos transformar esse termo em outro contendo apenas o sinal *operatório* + se:

- onde houver termos absolutos *a, b, c…* precedidos pelo sinal +, substituímos eles por quantidades qualificadas +*a*.
- onde houver notações tais como -*a*, -*b, ……*, colocamos as quantidades negativas -*a*,... precedidas pelo sinal +.

Dessa forma, por exemplo, podemos escrever $a + b - c - d + e = +a + b + b + -c + -d$ e, diante disso, podemos julgar equivalentes as notações $\vec{a}$, $\vec{b}$,..., *a, b*,.... e +*a, +b, ….* assim como os símbolos $\overleftarrow{a}$, $\overleftarrow{b}$... podem ser compreendidos por meio de -*a*, -*b*,... (Méray, 1894, p. 17).

É por meio deste resultado que Méray explica a notação estabelecida onde não encontramos um simbolismo específico para representar quantidades qualificadas.

> O uso atual está de acordo com este último ponto de vista: achamos conveniente confundir quantidades positivas com seus valores absolutos, exceto para escrever na frente das notações destes, quando queremos melhor afirmar que foram transformados pelo pensamento em quantidades positivas, o sinal operativo + t*acitamente mudou para um sinal qualificativo*, e para representar uma quantidade negativa pela notação de seu valor absoluto precedido pelo sinal operativo - d*a mesma forma tomado em um novo sentido que é puramente qualificativo*. Assim, somos levados a dizer que as quantidades positivas têm o sinal + e as quantidades negativas o sinal -, embora não sejam necessariamente adições ou subtrações a serem executadas (Méray, 1894, p. 17, grifos do autor).

Pode-se interpretar que a sua demonstração de defesa da notação padronizada serve como uma forma de justificar o fato de o autor não se utilizar mais da sua notação particular de quantidades qualificadas ao longo da obra, mas apenas os sinais operacionais que passam a exercer o papel de qualificadores.

Com o fim da apresentação das quantidades qualificadas, Méray apresenta os diferentes tipos de funções e em seguida parte para a definição das quantidades chamadas incomensuráveis (irracionais). Sua apresentação por extensões fictícias dos números termina com a definição das quantidades imaginárias (complexas), a qual é, por sua vez, motivada pela capacidade de simplificar polinômios inteiros em fatores de primeiro grau.

3.9.6. Análise de Charles Méray

Conforme já foi comentado, a base do cálculo de Charles Méray reside na tese de que toda função pode ser descrita como uma série de Taylor, subscrevendo, assim, à concepção algébrica de Lagrange, ao mesmo tempo em que ele se encontra na necessidade de esclarecer o conceito fundamental de limite por meio do estabelecimento dos números irracionais.

Apesar de ter sido um dos primeiros a criticarem a visão tradicional de quantidade incomensurável e de criticar a ideia de que a continuidade constituiria a base da análise, Méray se

distancia dos novos conceitos trazidos pelas novas abordagens da análise que emergiram ao longo do século:

> Funções descontínuas, sem derivadas, não integráveis, etc. são encontradas apenas em dissertações metafísicas; não há, portanto, sentido se preocupar com elas (Méray, 1894, p. *xiii*).

Conforme aponta Dugac, a defesa da generalidade e independência da matemática das demais ciências, na intenção de manter a fluidez de sua teoria, Méray se distancia de qualquer consideração de funções que não podem ser exemplificadas pela natureza. Schubring (2005, p. 607) aponta que a postura de Méray constitui um exemplar da tradição físico-matemática que se estabeleceu na França no século XIX, segundo a qual os objetos estranhos às aplicações eram vistos com maus olhos.

De fato, a postura tradicional de Méray constitui na verdade uma reação à mudança de paradigma que começava a ser vista na França. Após a década de 1880, as faculdades de ciências passaram a ter uma função independente para o treinamento científico na República da França após 1871. Esse processo culminou na fundação de novas universidades em 1896 que integravam as faculdades que até o momento se encontravam isoladas. A consequência disso foi que a *École Polytechnique* perdeu seu papel dominante e a análise assumiu um papel preponderante em detrimento da geometria e da mecânica (Gispert, 1991, 206 ff. apud Schubring, 2005, p. 607-608).

3.9.7. A relação com a fundamentação dos irracionais por Georg Cantor em 1872

Conforme apontamos anteriormente, na seção 3.9.2, a concepção dos números irracionais proposta por Méray costuma ser comparada àquela desenvolvida pelo matemático Georg Cantor (1845-1918), conhecido como fundador da *Mengelehre*, e exposta em seu artigo de 1872, *Ueber die ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, no qual ele discute a teoria de séries trigonométricas e, para poder falar de pontos-limite, julga ser necessário desenvolver uma concepção de "números reais" em um primeiro momento, aos quais eles se refere pelo termo *Zahlgrösse*, entendidos como uma extensão dos racionais.

De fato, a concepção de Cantor também costuma ser comparada àquela desenvolvida por Weierstraß de modo que a versão de Cantor seria um aprimoramento e simplificação daquela proposta pelo professor de Berlim. Essa tese é reforçada pelo fato de que a influência de Weierstraß sobre Cantor é incontestável: após se mudar para a Alemanha aos 11 anos, Cantor veio a estudar em Berlim a partir de 1863, onde assistiu às lições de Weierstraß. A título de exemplo, tal comparação entre as duas concepções é colocada por Ferreirós (1999, p. 127), que chega a apresentar uma descrição da relação entre elas: as séries infinitas podem ser associadas à sequência de suas somas parciais, de modo que a toda sequência de Cauchy, utilizada na concepção de Cantor, corresponde uma série convergente, que teria sido o objeto utilizado na concepção de Weierstraß (Ferreirós, 1999, p. 127). Nesta seção, discutiremos brevemente as relações e diferenças entre essas concepções.

É fato que, assim como Méray, o objeto principal utilizado no processo de construção dos números reais são as chamadas "sequências de Cauchy" de números racionais: considerando-se o domínio (*Gebiet*) A dos números reacionais, pode-se construir sequências $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ em que cada elemento pertence a *A* e de modo que $a_{m+n} - a_n$ se torne pequeno à medida que *n* cresce e sendo *m* um número inteiro positivo. Cantor diz, então, que as sequências assim construídas são ditas possuírem um "limite definido *b*", destacando o fato de que isso significa apenas a relação apresentada entre os elementos da sequência (Cantor, 1872, p. 124). Dessa forma, a toda sequência, associa-se um certo símbolo diferente, *b*, *b', etc.*, de modo que o seu limite consiste apenas em um novo símbolo associado à sua respectiva sequência. Com isso, Cantor define as relações de ordem e igualdade entre essas sequências de maneira similar a Méray, expressando-as em termos de seus limites: *b=b', b>b'* ou *b<b' e* o conjunto de todos esses limites são ditos formarem o domínio *B*.

Neste primeiro momento, já percebemos uma diferença importante entre Méray e Cantor: enquanto o primeiro julga necessário realizar uma separação ontológica entre limites fictícios e racionais, tendo em vista a concepção de que números seriam apenas inteiros ou frações, Cantor simplesmente determina que toda sequência possui "um limite *b* determinado", apesar dele definir uma relação de ordem e igualdade entre os limite e os números racionais, de modo que alguns elementos do domínio *B* podem ser ditos iguais a números racionais enquanto outros não podem. No entanto, o desafio de lidar ontologicamente com os novos objetos, em contraposição aos números racionais, é sugerido também em uma breve passagem onde ele aponta que a teoria carece de um "objeto em si": "a quantidade numérica que, em princípio e em geral, carece de um objeto em si, somente surge como um elemento em proposições que são dotadas de objetividade" (Cantor, 1872, p. 126).

Além disso, o processo de extensão não para por aqui para Cantor, mas segue um processo infinito: tendo definido a aritmética do domínio B, Cantor constrói um novo domínio, C, composto por sequências de elementos de *B* e define as relações de ordem e igualdade, além da aritmética desse domínio, de maneira análoga ao que havia feito anteriormente em *B*. Então, Cantor aponta que, apesar de todo elemento de *A* pertencer a *B* mas nem todo elemento de *B* pertencer a *A*, tem-se que todo elemento de *B* pertence a C assim como todo elemento de *C* pertence a B e o mesmo acontece se seguirmos construindo novos domínios D, E, etc., formados por sequências de Cauchy do domínio anterior, mesmo eles sendo distintos entre si, tal como ele destaca. Isso significa que tal processo de extensão não leva à criação de novos tipos de *Zahlgrössen* em termos das relações de igualdade estabelecidas em cada etapa: todas *Zahlgrössen* pode ser ditas iguais a um elemento *b*, *c*, *d*, etc. de cada um desses infinitos domínios que surgem a partir de *B*.

É importante destacarmos também que Cantor não desenvolve uma teoria de extensões infinitas de quantidades numéricas apenas visando a mostrar que o processo não leva à criação de domínios que contenham novos elementos em termos da relação de igualdade. O autor menciona que um elemento de um domínio na λ-ésima etapa do processo de extensão consiste em uma Quantidade numérica, valor ou limite de λ-ésimo tipo (*Zahlengrösse, Werth oder Grenze* λ^{ter} *Art*), fazendo, portanto uma distinção sistemática entre os elementos de domínios distintos. Conforme já apontou Ferreirós (1999, p. 129), a diferenciação entre ordens de quantidades numéricas era

necessária para ele oferecer exemplos de um “conjunto de Cantor” do n-ésimo tipo, um objeto importante na teoria que ele desenvolve posteriormente. Tudo isso vem a mostrar que, apesar da concepção de Cantor e Méray se basearem em uma concepção parecida de sequências de Cauchy, os autores lidam ontologicamente de maneira diferente com os novos objetos que surgem e, além disso, o desenvolvimento das duas teorias são claramente distintas, tendo em vista principalmente a concepção dos diferentes tipos de quantidades numéricas definidos por Cantor, o que ocorre por conta do objetivo e concepção que ele tinha para além da noção de número.

Em se tratando das concepções de Méray e Weierstraß, acreditamos serem perceptíveis as diferenças importantes que ainda não foram suficientemente destacadas pela historiografia: mesmo que, em termos modernos, toda série convergente possa ser associada a uma sequência de Cauchy, a teoria de Weierstraß, baseada em diferentes unidades e suas partes, o leva a um processo muito mais extenso onde, por exemplo, os “números irracionais positivos” precisam ser introduzidos antes da introdução dos números negativos. Não somente isso, uma tal concepção pode ter sido motivada pelo do valor que ele dava à teoria de funções elípticas, o que clamaria por uma maneira de estabelecer os números complexos como última forma numérica. Cantor, por sua vez, interessado nos chamados conjuntos de Cantor, teria sido motivado a estabelecer os números reais tendo como referência os conceitos de sequência e de limite. A diferença prática entre as duas metodologias se torna evidente quando percebemos também que, com Cantor, a transição dos números racionais para as quantidades numéricas é feita de maneira direta, sem a necessidade de introduzir os irracionais positivos antes dos números negativos. Dessa forma, as diferenças ente as duas teorias, muitas vezes apagadas na historiografia, revelam diferentes objetivos dos autores com as disciplinas que se traduzem ou decorrem de diferentes noções do que constituem os objetos fundamentais.

3.10. Conclusão

As abordagens ditas modernas dos números irracionais, desenvolvidas por Dedekind, Méray e Weierstraß, revelam uma transformação fundamental: a eliminação definitiva da suposição tradicional de quantidade contínua. Tal mudança é deliberadamente percebida por Dedekind, que critica as abordagens anteriores baseadas em uma concepção pouco clara de quantidade contínua. Por outro lado, verificamos que as implicações de uma tal mudança não são plenamente percebidas pela comunidade matemática de maneira imediata, como mostra o comentário de Darboux sobre a demonstração satisfatória de Cauchy do Teorema do Valor Intermediário.

Abordagens anteriores como a de Martin Ohm, por sua vez, revelam a dificuldade de lidar ontologicamente com um objeto matemático que envolveria um infinito atual, a saber, o limite de uma sequência de frações. Diante disso, Ohm alega que esses números, em particular, existem apenas na “Ideia”. De fato, a recusa em conceder aos irracionais o mesmo estatuto dos demais números pode ser percebida mesmo no discurso de Méray em 1868. Apesar de acreditar ter uma resolução para o problema que persistia na definição esses objetos até o momento, ele acaba tendo de separá-los dos tipos anteriores de números por esses envolverem a introdução de “ficções”.

Posteriormente, como vimos, essa posição isolada dos números irracionais é mitigada, uma vez que todos os números além dos naturais passam a ser considerados também como sendo ficções.

É de se notar ainda que a historiografia tradicional persiste em caracterizar as novas abordagens dos números irracionais como formas de fundamentar os "números reais". Apontamos ao menos dois exemplos disso: em seu artigo de 1873, Dugac fala persistentemente que Weierstraß teria fundamentado os números reais em suas aulas. E na edição de Peter Ullrich do manuscrito de Hurwitz, publicada em 1988, o autor fabrica títulos para as diferentes seções do manuscrito que não se encontravam no texto original[45]. No capítulo 2, as subseções são todas intituladas fazendo-se referências a números reais, por exemplo, a seção 2.1. é chamada de *Definition der reellen Zahlen* (Definição dos números reais). No entanto, o manuscrito em momento algum apresenta uma definição explícita desse conjunto numérico. Não há nenhum destaque para o fato de que uma nova estrutura numérica é formada no capítulo em questão em que se estabelecem as séries contendo as unidades positiva, negativa e suas partes.

A recepção das novas abordagens dos números irracionais nos mostra que, por outro lado, houve reconhecimento da comunidade matemática. Um extenso verbete sobre o assunto se encontra na *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* (Enciclopédia das ciências matemáticas com inclusão de suas aplicações), a grande obra organizada pelo matemático alemão Felix Klein (1849-1925) que foi referência por muitas décadas. O artigo foi escrito por Alfred Pringsheim (1850-1941) e, nele, encontramos uma exposição sobre as abordagens de Weierstraß, Cantor e Dedekind, entre outras. Curiosamente, as abordagens de Weierstraß e Cantor são apresentadas dentro de uma mesma seção do verbete e Pringsheim sugere que a versão de Cantor se tratava de uma forma desenvolvida da primeira. Talvez por conta disso, Pringsheim prossegue descrevendo apenas a abordagem de Cantor e ignorando a maneira peculiar de Weierstraß de introduzir os números irracionais. Isso apenas reforça o que já mencionamos anteriormente, isto é, a abordagem de Weierstraß do conceito de número foi pouco reproduzida pela comunidade e o fato de sua abordagem ter sido ignorada em uma importante referência como a enciclopédia de Felix Klein deve ter contribuído para o estabelecimento de sua marginalização posterior.

> A teoria de Weierstraß e a de Cantor, que é um pouco mais conveniente de manusear e que, com Heine, pode ser descrita como um feliz desenvolvimento da primeira, se relacionam com uma representação formal específica de números irracionais, surgindo de maneira mais simples e familiar que todos aquelas de frações decimais infinitas (Pringsheim, 1898, p. 54).

Pringsheim ainda oferece mais uma evidência para a falta de referências disponíveis para os primeiros fundamentos da teoria de Weierstraß ao mencionar que eles foram apresentados pela primeira vez no já mencionado *Schulprogramm* de Kossak de 1872 e surgiram posteriormente no

[45] É importante apontar que Ullrich admite ter criado nomes para as seções uma vez que o manuscrito original não é subdividido em seções (Ullrich, 1988, p. *xvi*).

texto de Pincherle em 1880 e no livro de Biermann de 1887: todas essas referências mencionadas por Pringsheim foram criticadas pelo próprio Weierstraß.

As novas abordagens dos números irracionais não se viram completamente livres de polêmica e não foram absorvidas por toda comunidade imediatamente. Isto se deu pelo fato de que as fronteiras entre as diferentes matemáticas, bem como o que caracteriza um objeto matemático legítimo, não estavam estabelecidas de maneira homogênea.

O já mencionado Kronecker, que lecionava juntamente com Weierstraß na Universidade de Berlim, julgava que o princípio de Bolzano-Weierstraß se tratava de um "óbvio sofisma" que levaria à consideração de funções absurdas, apesar de ele nunca ter demonstrado tal fato (Gray, 2008, p. 131) Mais fundamentalmente, Kronecker era contrário ao conceito de número irracional na aritmética, álgebra e análise. Como vimos na seção 2.5.4., em sua publicação de 1887, Kronecker diz brevemente que esses objetos eram alheios à aritmética e propõe que fossem substituídos por congruências modulares e o mesmo se aplicaria a todos os demais números que não eram naturais.

Da mesma maneira, Gottlob Frege (1848-1925), conhecido por suas contribuições para a lógica e pelo desenvolvimento de uma nova teoria "logicista" dos números naturais, se distanciou das novas concepções dos números irracionais. Conforme já apontamos na seção 3.10.5.4. Frege chegou a criticar explicitamente a concepção desenvolvida por Weierstraß, mas nunca chegou a publicar uma alternativa para as concepções novas dos números irracionais. Como aponta Gray (2008, p. 134), ele nunca acreditou que os irracionais pudessem ser reduzidos aos números naturais ou a quantidades geométricas. Em vez disso, ele defendeu a tese tradicional Newtoniana de que números reais consistiam em razões de quantidades.

4. A fundamentação dos números (naturais)

No capítulo anterior, observamos que questionamentos presentes nos fundamentos da análise teriam motivado matemáticos como Weierstraß e Dedekind a clarificar a definição dos números irracionais. Segundo a resolução proposta por cada um desses autores, esses números estariam fundamentados "geneticamente" no sistema anterior dos números, isto é, nos números racionais. Como ainda pudemos ver, ambos autores se comprometem com um tratamento estritamente aritmético da análise, o que acaba por levar o conceito de número como base da disciplina em detrimento da geometria ou de intuições. Essa nova e multiforme concepção de rigor evidentemente não se iniciou com esses nomes mas tomou forma ao longo do século XIX em um processo que Felix Klein chama de "aritmetização da aritmética".

> [...] Com isso, surgiu a demanda por métodos exclusivamente aritméticos de demonstração; nada há de ser aceito como parte da ciência a não ser que sua verdade rigorosa possa ser claramente demonstrada pelas operações ordinárias da análise. Um breve exame dos livros-texto mais modernos do cálculo integral e diferencial é suficiente para mostrar uma grande mudança em questão de método [...] (Ewald, 1996, p. 966).

Nesse cenário em que construções genéticas teriam sido capazes de oferecer uma justificação aritmética para os números irracionais, surgem crescentes tentativas de clarificar o objeto anterior que servia de pressuposto para o contínuo: o número (natural). No já mencionado livreto de Dedekind, *Was Sind und Was Sollen die Zahlen*, encontramos uma das investidas nesse sentido que o autor teria seguido após sua clarificação dos números irracionais, mas nomes como Giuseppe Peano e Frege são também fortemente associados a esse movimento que também é marcado por uma interação forte entre a formalização da lógica e da matemática e o desenvolvimento da teoria de conjuntos. No presente capítulo, pretendemos apresentar o processo de formulação e consolidação dos princípios da aritmética no século XIX e iniciamos com a abordagem de um livreto onde encontramos alguns dos traços comuns das formulações que se darão posteriormente e que é reconhecido por todos os três autores que relacionamos ao movimento. Trata-se da obra de aritmética de Hermann Graßmann, *Lehrbuch der Arithmetik*, de 1861, que obteve maior alcance principalmente por meio da divulgação feita a partir da obra de Hankel que já citamos no capítulo 1. Após Graßmann, daremos ênfase à pequena obra de Giuseppe Peano, *Arithmetices principia*, de 1889, onde também encontramos um testemunho da influência de Graßmann. É nesta obra que encontramos a primeira formulação dos axiomas de Peano e, portanto, a primeira axiomatização da aritmética propriamente dita dentro desse novo cenário. Certamente, teremos o cuidado de elaborar sobre a concepção de axioma peculiar a este autor uma vez que os demais autores aqui citados não caminham nessa direção por motivos que pretendemos explorar. Nesse mesmo sentido, iremos ainda discorrer brevemente sobre o "programa de axiomatização de Hilbert" principalmente a fim de contrastar sua concepção sobre os fundamentos

da matemática e a sua preferência pela axiomatização em detrimento da concepção genética dos números que caracteriza até mesmo a elaboração feita por Peano. Antes de entrarmos nos eventos do século XIX, no entanto, será útil apresentarmos brevemente a história da axiomatização da aritmética anterior ao século em questão. Isso será feito com base principalmente no estudo realizado por Risi (2016).

4.1. A axiomatização da aritmética antes do século XIX

Antes de tentarmos compreender as origens da fundamentação axiomática da aritmética, é importante colocar duas observações relevantes. Primeiramente, é importante ter em mente que, na tradição euclidiana, os axiomas (ou postulados) não foram sempre considerados como os princípios fundamentais da matemática, de modo que fundamentar a aritmética através de enunciados não foi sempre sinônimo de axiomatizar a disciplina. Houve, inclusive, muitos matemáticos da Idade Moderna que acreditavam que os fundamentos da matemática se encontravam sobre as definições, e que os axiomas e postulados poderiam ser provados a partir delas. Clavius, por exemplo, um importante comentarista jesuíta dos *Elementos*, tentou demonstrar todos os princípios exceto pelas definições. De acordo com Risi (2016, p. 602), a respeito dos axiomas e postulados, "eles não eram exatamente considerados propriamente como declarações que não admitiam uma prova mas sim declarações que não necessitavam de uma". As discussões sobre a epistemologia dos axiomas, definições e postulados na época de Euclides ou os motivos epistemológicos para ele ter disposto a sua obra da maneira como o fez (a saber, excluindo axiomas no Livro VII de aritmética) é irresoluta, e não focaremos nestes debates aqui. Risi mostra que, em se tratando das publicações de tradição euclidiana, as definições matemáticas se encontraram muito menos mutáveis ao longo dos séculos em comparação com os axiomas, e é válido focar em pressupostos de cunho axiomático e não em definições para conhecer um pouco das tentativas de fundamentar a aritmética dentro dessa práticas (Risi, 2016, p. 602).

Fato é que os *Elementos* foram, indiscutivelmente, extremamente influentes, e a ausência de postulados ou axiomas no Livro VII de Euclides teve profundas consequências na história da matemática e na epistemologia da disciplina. Discussões a respeito dos fundamentos da aritmética foram raros em comparação com a geometria, a qual permaneceu vista por muito tempo como o fundamento de toda a matemática (Risi, 2016, p. 609). Ainda assim, houve algumas tentativas de axiomatizar a aritmética mesmo antes de nomes como Peano, Frege e Dedekind terem tentado formalizar o conceito de número natural. De fato, a primeira versão impressa dos *Elementos*, de 1482, se baseava na edição medieval de Campano da Novara (século XIII), a qual apresenta nada menos que quatro noções comuns e dez postulados no livro VII referente à aritmética. Esta edição, que na verdade se trata de uma compilação, se baseia em duas fontes: a *Arithmetica* de Jordano de Nemora, uma obra que não se encontra na tradição euclidiana, e uma tradução dos *Elementos* a partir do árabe, de John de Tynemouth, datada do século XII. Poderíamos ir mais a fundo na genealogia de Tynemouth, mas ela deve ser a primeira que se tem registro a considerar a teoria euclidiana dos números como um domínio axiomático (Risi, 2016, p. 611). Além disso, a prática do matemático grego Heron de Alexandria, provavelmente presente nessa genealogia, revela algo

que era um tanto comum: pressupostos que se encontravam necessários nas demonstrações de Euclides mas que não eram por ele enunciadas, podiam ser adicionadas como pressupostos, e estes, por sua vez, podiam talvez ser demonstrados em seguida a partir de outros pressupostos. Postulados também costumavam ser enunciados para que se permitisse fazer uma certa "construção" numérica. Por exemplo, vejamos o seguinte postulado da edição de Campano: "Tomar qualquer quantidade de números iguais ou múltiplos de qualquer número dado."

Enunciados como esses não parecem estar relacionados com uma caracterização fundamental dos números, mas a função delas seria permitir que tomemos números de um certo tipo quando outro nos é dado pelo enunciado do teorema ou problema. Abaixo, abarcamos uma lista dos axiomas e postulados presentes na obra de Campano que já são suficientes para mostra o caráter majoritariamente operacional de ambos os tipos de enunciados, algo que se percebe como ponto comum nos demais axiomas de outros autores posteriores que Risi apresenta.

1. Um número que divide o inteiro e a parte que é subtraída dele também divide a diferença (John de Tynemouth)
2. Qualquer número que divide dois números também divide a sua soma. (John de Tynemouth)
3. Qualquer número que divide algo também divide tudo que é dividido por ele (John de Tynemouth)
4. Tomar qualquer quantidade de números iguais a qualquer número dado (Jordano de Nemore)
5. Tomar um número tão grande quão for do que qualquer número dado (Jordano de Nemore)
6. A série de números pode ser estendida infinitamente (Jordano de Nemore)
7. Aquela parte que possui maior denominação é menor, e aquela parte que possui uma menor denominação é maior. (Jordano de Nemore)
8. A unidade é uma parte de qualquer número, e denominada por ele (Jordano de Nemore)
9. Todo número é um múltiplo da unidade tantas vezes quanto a unidade for parte dele (Jordano de Nemore)
10. Todo número multiplicado pela unidade resulta nele mesmo. A unidade multiplicada por qualquer número resulta nesse número (Jordano de Nemore)
11. A diferença dos extremos é composta das diferenças das diferenças entre os mesmos extremos com relação aos termos médios (Jordano de Nemore)
12. Tomar qualquer quantidade de números iguais ou múltiplos de qualquer número dado (Campano da Novara)
13. Nenhum número pode ser diminuído ao infinito (Campano da Novara)

Outro aspecto importante sobre a axiomatização da aritmética diz respeito ao papel das noções comuns na teoria dos números. O comentarista Proclus, por exemplo, argumenta que esses axiomas consistem em princípios compartilhados entre a geometria e a aritmética, e uma tal concepção de "matemática universal" era comum. Axiomas desse tipo lidam com mereologia (relações entre as partes e o todo), somas e subtrações mereológicas, igualdades e relações de

ordem entre quantidades. O que permitia que houvesse esse compartilhamento de princípios vem do fato de que os números eram muitas vezes concebidos como coleções de unidades (como diz a própria definição 2 de Euclides no Livro VII) e, portanto, as regras de composição e divisão dos números eram enunciadas como operações mereológicas (Risi, 2016, p. 605, 606). Por conta disso, ao falarmos de axiomas aritméticos, é importante ter em consideração também os princípios que dizem respeito à mereologia. Trazemos abaixo noções comuns originais de Euclides, às quais outras foram adicionadas posteriormente.

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. Caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. Se iguais forem subtraídas de iguais, as restantes são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma à outra.
5. O inteiro é maior que a parte (Risi, 2016, p. 618)

Para trazer mais um exemplo, colocaremos aqui uma obra que não foi abarcada por Risi mas que inclui um importante pressuposto referente à comutatividade de quantidades. Trata-se da obra do francês Antoine Arnauld (1612-1694), intitulada *Nouveaux Élémens de Geometrie*. Apesar do título declarar que o livro aborda os elementos da geometria e não da aritmética, Arnauld deixa claro que as suas suposições se referem a quantidades gerais e que, portanto, abarcam também os números e quantidades específicas. De qualquer maneira, a obra também reforça o que falamos anteriormente, sobre o fato de a geometria ser muito mais colocada em debate com relação aos seus fundamentos e ser considerada como base de toda a matemática. A segunda suposição é a mais notável, por se referir à comutatividade, uma propriedade que era muitas vezes assumida sem ser previamente enunciada. De fato, a própria obra de Arnauld reforça esse ponto: apenas a comutatividade da multiplicação é enunciada como uma suposição, enquanto a comutatividade da soma não é.

> Em segundo lugar, que se sabe que é a mesma coisa na multiplicação começar por aquele que se deseja entre os dois números que se multiplica: 3 vezes 5, é a mesma coisa que cinco vezes 3, que 4 vezes 6 é a mesma coisa que 6 vezes 4 (Arnauld, 1667, p. 2).

O primeiro axioma, por sua vez, simplesmente declara que se sabe somar e multiplicar com números pequenos, por exemplo, 4 e 5 são 9, 3 vezes 5 são 15, etc (Arnauld, 1667, p. 2). Já o sexto, declara uma questão notacional: utilizam-se letras para se referir a quantidades quaisquer (Arnauld, 1667, p. 4).

Ao apresentarmos os axiomas de Peano será fácil perceber como os axiomas desta seção se distinguem marcadamente das tentativas mais formais de analisar a natureza dos números naturais, o que é comum dadas as transformações epistemológicas e filosóficas que elas envolvem. Partindo ao século XIX, falaremos agora sobre Hermann Graßmann e sua obra de 1844.

4.2. Hermann Günther Graßmann (1809-1877)

Graßmann nasceu em Stettin, Prússia, em 1809. Seu pai, Justus Graßmann, estudou teologia mas posteriormente veio a se tornar professor de matemática da prestigiosa escola secundária *Marienstifts-Gymnasium* em Stettin. Influenciado pela Escola Combinatória, as ideias de seu pai certamente vieram a influenciar Graßmann como ele mesmo admite. Também seguiu os passos do pai, qualificando-se como professor secundário e como pastor (Schubring, 2009, p. 177).

Graßmann nunca teve treinamento formal em matemática na universidade e tampouco conseguiu obter uma posição em instituições de ensino superior, o que poderia ajudar a explicar o surgimento de ideias inovadoras que ele concebeu como autodidata em matemática. Sua obra mais notável é certamente a *Ausdehnungslehre (Teoria de extensões)* de 1844, onde ele desenvolveu um cálculo vetorial inovador, não prendendo-se às três dimensões do espaço sensível, e também considerando a multiplicação de quantidades considerando-se um produto anti-comutativo. Além disso, na mesma obra encontra-se uma introdução onde Graßmann discorre sobre a sua concepção da filosofia da matemática que deve ter sofrido a influência de seu irmão, Robert Graßmann, conforme defendido em Schubring (1996). Robert também foi professor de escolas secundárias em Stettin e esteve especialmente interessado em assuntos referentes aos fundamentos da matemática e sua relação com a filosofia (Schubring, 1996, p. 62, 65). Um nome que provavelmente encontra-se por trás das ideias expostas na obra de Graßmann é o já mencionado Jakob Fries (Schubring, 1996, p. 62, 65). Como mencionamos, Fries, que também foi influenciado pela escola combinatória, havia tentado desenvolver uma filosofia da matemática pura no sentido de estudar "leis das formas conectadas" (Schubring, 1996, p. 66). Fries também desenvolveu uma disciplina fundamental da matemática subjacente a todas as outras e independente, a *Syntatic*. Esta poderia ser vista como precursora da *Formenlehre* (teoria das formas) que é enunciada por Graßmann na obra de 1844 e que constitui também uma disciplina fundamental anterior às disciplinas da matemática pura (Schubring, 1996, p. 66).

Após a publicação da *Ausdehnungslehre* e seu relativo insucesso, Graßmann e seu irmão teriam iniciado um trabalho conjunto para uma exposição fundacionista completa dos diversos ramos da *Formenlehre* com uma divisão de trabalho bem estabelecida: Robert ficaria encarregado de falar sobre lógica e filosofia enquanto Hermann escreveria sobre os campos da matemática, isto é, a aritmética e a *Ausdehnungslehre*. Apesar de Graßmann não mencionar essa relação com seu irmão, a sua nova edição da Ausdehnungslehre de 1862 deve fazer parte desse projeto. De fato, a fonte mais extensa que atesta a existência da cooperação entre os irmãos se encontra apenas em uma obra de 1890 de Robert Graßmann, quando seu irmão já havia falecido. A única menção feita por Graßmann a esse projeto surge de maneira passageira em sua obra de 1861, o *Lehrbuch der Arithmetik für Höhere Lehrantstalten* (Livro-texto de aritmética para instituições de ensino secundário), que constitui a sua contribuição para o projeto no ramo da aritmética. A apresentação da aritmética deste livro é aforista e Graßmann discorre pouco sobre concepções filosóficas subjacentes. No entanto, é perceptível que noções que compõem a sua filosofia da matemática bem como a sua *Formenlehre* são preponderantes para uma compreensão plena dessa obra.

Graßmann busca elaborar os fundamentos da disciplina e acredita oferecer a primeira apresentação científica do assunto, conforme ele mesmo admite no prefácio (Graßmann, 1861, p. v). Ele não acreditava estar axiomatizando a aritmética nesta obra e, de fato, ele reconhece em sua

filosofia que a matemática é fundada em definições e não em axiomas, tendo em vista a sua concepção tradicional kantiana do que constituiria um axioma.

4.2.1. Recepção da concepção de Graßmann

Tornou-se tradicional a alegação de que a obra de Graßmann teria sido ignorada por seus contemporâneos, uma tese que pode ser ilustrada pelo artigo de Heath de 1971 com o título sugestivo *The Neglect of the Work of H. Graßmann* (A desconsideração da obra de H. Graßmann).

Há fortes evidências, no entanto, que apontam para o fato de que a obra de Graßmann foi discutida ainda no século XIX de maneira relativamente extensa. O melhor exemplar desse fato é a coletânea completa de suas obras promovida por Felix Klein, um projeto que rendeu seis volumes completos. Desde 1892, quando Felix Klein havia demonstrado interesse no projeto, apenas um seleto grupo de matemáticos teve uma coletânea publicada em seu modelo (Schubring, 1996, p. xii) O conhecimento da obra de Graßmann por Klein teria vindo por meio de outra obra reconhecida, a já mencionada *Theorie der complexen Zahlensysteme* de Hankel (Grattan-Guinness, 2005, p. 438). Como já discutimos, Hankel se baseia fortemente na obra de 1861 bem como na aritmética de Graßmann em sua publicação e reconhece explicitamente a importância do autor no desenvolvimento de uma "teoria pura das formas" nas suas considerações históricas (Hankel, 1867, p. 16).

Em relação à obra de aritmética de Graßmann, destacamos a falta de uma análise minuciosa na historiografia, apesar de ela ser reconhecida pela sua importância na história dos fundamentos da aritmética. O *Lehrbuch der Arithmetik* é mencionado principalmente por ter influenciado a axiomatização da aritmética feita por Peano (por exemplo, em (Lewis, 2005, p. 432)), sem que tenhamos uma análise mais próxima. Wang (1957) por sua vez oferece uma tentativa de listar os princípios ou axiomas subjacentes à obra de Graßmann (Wang, 1957, p. 147-148), mas isto ele faz para a apontar as falhas que seu sistema ainda possuía em relação a tentativas mais modernas.

Uma das grandes contribuições da obra de Graßmann é o uso sistemático do princípio de indução para demonstrar proposições básicas da aritmética, as quais muitas vezes não eram antes demonstradas. O reconhecimento desse feito na obra de Graßmann se encontra, por exemplo, em Ferreirós (2002, p. 222), mas sem que fosse mostrada a maneira como isso é feito pelo autor. Ao comparar as obras de Peano e Graßmann, Ferreirós comenta que "[...] curiosamente, diferentemente de Peano, ele [Graßmann] não postulou um axioma de indução. Dessa forma Peano apresentou mais claramente os pressupostos básicos" (Ferreirós, 2005, p. 618). Uma crítica similar se encontra na obra de Michael Potter, *The Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap (As Filosofias da aritmética de Kant a Carnap)*. Segundo o autor, é surpreendente que Graßmann não tenha identificado o princípio de indução como um pressuposto, considerando-se que ele o utilizou largamente em demonstrações ao longo da obra e que o método já era utilizado desde o século XVII e já havia se tornado comum em meados do século XIX (Potter, 2007, p. 59, 60). Discordamos da ideia de que tal diferença entre Peano e Graßmann seja algo "curioso" ou "surpreendente" por uma série de fatores, alguns dos quais ficam mais claros quando analisamos a história do princípio de indução. Quando Graßmann publicou sua obra, explicitar a indução como um dos "princípios da aritmética" não era comum, mesmo porque uma análise fundacionista da

aritmética de maneira sistemática com base nesse princípio foi feito de maneira pioneira pelo matemático prussiano.

É importante destacar também que o princípio é de fato explicitamente mencionado por Graßmann no prefácio da obra como um "método de demonstração" ao lado de outras técnicas mais comuns[46] (Graßmann, 1861, p. *vi*). É plausível imaginar que Graßmann não julgava necessário explicitar "métodos de demonstração" como parte do corpo de princípios da aritmética, mesmo porque Graßmann não tinha em mente a mesma estrutura disciplinar e nem a mesma forma de apresentação daquela projetada por Peano. Exigir de Grassmann que o princípio fosse exposto claramente como parte dos princípios da aritmética seria, para nós, exigir práticas modernas em épocas em que elas não existiam. Entraremos mais a fundo nessa crítica em nossa análise, na qual traremos ainda alguns aspectos sobre a história do princípio para compreendermos melhor a abordagem de Graßmann.

De modo geral, julgamos que a historiografia ainda não expôs de maneira suficientemente didática e explicita as diferenças no tratamento dos fundamentos da aritmética de Graßmann em relação a abordagens anteriores. Em se tratando da influência que a obra veio a ter, julgamos necessário explicitar melhor por que razão essa obra favorece uma axiomatização da aritmética sem ser deliberadamente axiomática. Já em relação às influências que Graßmann teria recebido, julgamos que há supostos detalhes na obra que revelam uma possível influência direta ou indireta da aritmética de Martin Ohm.

4.2.2.A Aritmética de Graßmann (1861)

O curto capítulo introdutório de Graßmann já nos traz alguns esclarecimentos importantes. A matemática fica identificada como "a ciência da conexão entre quantidades".
Quantidades, por sua vez, são entendidas como "toda coisa que deva ser colocada como sendo igual ou desigual a outra." E duas coisas são iguais quando "em vez de uma, a outra pode ser colocada." Nenhuma menção a exemplos de quantidades reais são feitas para ilustrar ou corroborar tais definições. E isso já se torna um ponto interessante dadas as pretensões didáticas do autor, por sinalizar que a realidade ou não das quantidades não fará parte de sua argumentação. Nos parágrafos seguintes, Graßmann trata de mostrar como essas ideias iniciais podem ser representadas através de símbolos. Destacamos que apesar do sinal de igualdade ser o tradicional "=", o sinal de desigualdade é "$\gtrless$". Os sinais das conexões são os sinais de + e -, e o autor não trata de explicar neste momento o que significavam essas conexões (soma e subtração). A única coisa dita é que duas quantidades são conectadas através destes sinais e que tais conexões geram novas quantidades chamadas de resultado que, por sua vez, podem ser novamente conectadas a mais uma quantidade, e assim por diante.

O capítulo fecha com uma notável definição de aritmética: "A aritmética lida com as quantidades que resultam de conexões feitas com uma quantidade *e".* Tal definição é notável por não abarcar nenhum tipo de menção à especificidade da aritmética em oposição à álgebra, a qual lidaria com quantidades mais gerais, representadas por letras. Da maneira como foi caracterizada

[46] Mostraremos esses diferentes métodos de demonstração com mais detalhes em nossa análise abaixo.

neste capítulo, sinaliza-se uma aritmética que se distancia das concepções típicas do século anterior, a qual era caracterizada com o cálculo "auto-evidente" de números específicos e conhecidos. Mas a questão do que seria a quantidade singular e outros aspectos serão mais bem elucidados em seguida.

As Operações Básicas

1. Soma: a construção da "sequência elementar"

Os próximos capítulos são dedicados às quatro operações básicas. Vejamos como ele inicia o tratamento da adição e como ela é fundamental para a construção propriamente da sequência das quantidades:

> Forma-se com uma quantidade *e* uma sequência de quantidades através das seguintes etapas: *Coloca-se e* como um membro da sequência, *coloca-se e + e* (lê-se *e* mais *e*) como o membro seguinte da sequência, e assim se prossegue *deduzindo-se o membro seguinte a partir de cada último membro da sequência, adicionando-se a ele +e*. Da mesma forma, estabelece-se e + -e (lê-se *e* mais menos *e*) como o membro imediatamente anterior da sequência, e assim se prossegue deduzindo-se o próximo membro precedente a partir de cada membro inicial da sequência, adicionando-se a ele +- *e*, então obtém-se em ambos os lados a sequência infinita
>
> ...*e* + - *e* + - *e* + - *e*, *e* + - *e* + - *e*, *e* + - *e*, *e*, *e* + *e*, *e* + *e* + *e*,.. (Graßmann, 1861, p. 2-3).

Nessa importante passagem, percebemos que alguns dos princípios de Graßmann podem ser extraídos:

I. Existe um elemento inicial elementar *e;*

II. *Existe o termo e+e* formado a partir da conexão (representada por +) do termo elementar com outro, e assim podemos proceder, um passo de cada vez. Isso significa que sabemos que *e+e+e* pode ser construído na terceira etapa do processo, mas não sabemos ainda o que seria *e+(e+e)* uma vez que ele não foi construído neste processo aqui explicitado.

III. *Existe ainda o termo* e + -e formado a partir da conexão (+) entre *e* e o elemento *-e* (que Graßmann não chegou a introduzir anteriormente, mas que podemos compreender como uma espécie de unidade negativa) e podemos seguir fazendo conexões semelhantes a partir desse elemento:, *e* + - *e* + - *e seguido de e* + - *e* + - *e* + - *e* e assim por diante. Perceba que aqui não sabemos ainda o que seria, por exemplo, *e+e+e* +-*e* uma vez que esse elemento não foi construído no processo aqui explicitado.

De acordo com os pressupostos I e II, de fato, Graßmann define a sequência numérica a partir do 1 e das sucessivas "conexões" +1, mas é perceptível que se pode identificar os princípios utilizados por Graßmann aqui. Além disso, percebemos que ele introduz de uma vez o que

podemos chamar de quantidades negativas de maneira não problemática. Logo em seguida, Graßmann explicita mais um pressuposto:

IV. Os elementos da sequência são distintos entre si.

A partir disso o autor estabelece que, se a é um membro dessa sequência (ou seja, a substitui um dos membros da sequência supracitada) então $a + e$ é o seu sucessor e $a + -e$ é o seu antecessor. Além disso, se b for o sucessor de a, estabelecemos a adição da unidade:

$$b = a+e$$
$$a = b + -e$$

O zero (0), por sua vez, é estabelecido apenas como um rótulo para o elemento $e+-e$ da sequência (isto é, o antecessor de e), e isso acaba apenas servindo como um facilitador na linguagem, visto que este elemento específico tem uma importância elementar dentro da estrutura. Ideias como "nada" não entram em questão nas suas demonstrações de enunciados aritméticos. Da mesma maneira, não há nenhum pressuposto que garanta imediatamente que "quantidades opostas se destruam" na operação. O simples enunciado de que $a + -e + e = a$, isto é, que " a adição sucessiva de uma unidade positiva e uma negativa não altera nada" é demonstrado por Graßmann de uma maneira que ilustra como seu método garante a manipulabilidade lógico-simbólica dos princípios sem a intervenção de ideias intuitivas de contagem.

Seja b o membro da sequência básica que é sucessor de a. Portanto:

$b = a+ e$ (a partir de 8)
$a = b+ -e$ (a partir de 9)
Colocando-se na segunda igualdade o valor de b da primeira, obtém-se que:

$$a = b+ e + -e$$

Sua próxima definição importante estabelece que, dadas duas quantidades a e b,

$$a + (b+e) = a+ b +e$$

se aplica. Trata-se da definição recursiva de soma que nos permite depreender como se realizam conexões de soma além das conexões elementares +e ou -e. Novamente, destacamos como Graßmann necessita definir simbolicamente resultados de forte "valor intuitivo" que antes eram tomados por garantido. A definição recursiva da soma se torna padrão tanto na obra de Peano como na obra de Dedekind, além de ser mencionada também na obra de Frege (1884).

O uso extensivo da demonstração por Indução: associatividade e comutatividade geral

O potencial da abordagem de Graßmann é novamente testado uma vez que, por meio de sua definição recursiva e do "princípio de indução", Graßmann demonstra a associatividade geral da

soma, $a + b + c = a + (b + c)$. Mais uma vez, um princípio que era antes assumido ou demonstrado verbalmente por meio de noções intuitivas, como vimos na obra de Ohm, é demonstrado a partir de sucessivas etapas de manipulações lógicas-simbólicas que são garantidas por seus pressupostos e pelos resultados anteriormente demonstrados:

$$a + b + c = a + (b + c)$$

Demonstração (indutivamente com relação a c). Assumamos que a fórmula 22 [acima] se aplique para algum valor *c*, então

a + [b+ (c+e)] = a + [b+c+e] (por 15)
= a+ (b+c)+e (por 15)
= a+ b + c + e (pelo que foi assumido)
= a+b+(c+e) (por 15b)
…

a + [b+ (c+e)] = a + [b+c+e] (por 17)
= a+ (b+c)+e (por 17)
= a+ b + c + e (pelo que foi assumido)
= a+b+(c+e) (por 17b)

…
Agora, ela também se aplica para c = e (por 15), portanto ela se aplica também de maneira geral.

Percebemos que o princípio de indução em relação a uma quantidade *c*, aqui utilizado, pode ser representado pelas seguintes etapas.

1. Assumimos que o enunciado se aplique para um dado valor *c*;
2. Demonstramos que o enunciado também é valido para *c+e*
3. Observamos que o enunciado também é válido para o caso em que c=*e*, que corresponde à definição recursiva de soma.

Em nenhum momento, Graßmann explicita claramente essas etapas nem mesmo menciona a indução como um "princípio da aritmética" na introdução de seu livro. Apesar disso, como já mencionamos, ele surge em seu prefácio como um dos quatro métodos de demonstração: progressiva, regressiva, indireta ou por indução. A primeira consiste no método convencional de demonstrar uma igualdade transformando-se o lado esquerdo até que alcancemos o lado direito (o que assume a noção de transitividade da igualdade), o segundo consiste em um processo similar em que iniciamos pelo lado direito da equação. O terceiro consiste na demonstração por absurdo e por último temos o princípio de indução. Na obra de Peano, veremos que esses pressupostos serão explicitamente apresentados como parte da teoria da aritmética (Considerando-se que os dois primeiros métodos se reduzem à transitividade da igualdade) em vez de serem tidos como métodos de demonstração que não necessitam ser claramente enunciados.

É na obra de Graßmann que encontramos a primeira instância em que o princípio de indução é utilizado amplamente para a demonstração de princípios básicos de aritmética. Conforme nossa crítica anterior, dizer que o princípio era "comum" na época de Graßmann ignora o fato de que ele não era utilizado sistematicamente da mesma maneira que o autor prussiano o fez e não era apresentado claramente como um princípio da aritmética. Dito isto, é fato que Graßmann não foi o primeiro a se utilizar do princípio e tampouco cunhou seu nome. De acordo com Freudenthal (1953), há fortes controvérsias sobre quem teria sido o primeiro a se utilizar do princípio, até mesmo porque ele muitas vezes não era explicitamente enunciado e confundia-se com uma versão "incompleta". Na obra de Pascal de 1654, *Traité du Triangle aritmetique*, encontramos exemplos em que o princípio é utilizado de maneira relativamente explícita para demonstrar alguns teoremas, ainda que o princípio não fosse chamado pelo nome de indução (Freudenthal, 1953, p. 32). Segundo o autor, no entanto, é plausível defender até mesmo que o princípio tenha sido utilizado nos *Elementos* de Euclides, ainda que de maneira implícita (Freudenthal, 1956, p. 28-29). Outro nome que é fortemente associado à descoberta do princípio seria Jakob Bernoulli. Em tempos menos longínquos, Freudenthal cita exemplos na Inglaterra onde o princípio já é exposto de maneira bastante desenvolvida, alguns anos antes da obra de Graßmann: no tratado de Peacock de 1830 e no artigo da *Penny Cyclopedia* de Augustus de Morgan, onde as etapas do método de demonstração são descritos e um exemplo de teorema chega a ser demonstrado com sua utilização (Freudenthal, 1956, p. 37) O estabelecimento pleno do princípio como parte do arcabouço da aritmética teria se dado finalmente com Dedekind no último quarto do século.

A originalidade no uso do princípio de indução na obra de Graßmann se torna clara quando percebemos que ela é crucial não somente para a demonstração da associatividade como também da comutatividade, $a + b = b + a$, após a demonstração do caso particular $a+e = e+a$. Novamente, a abordagem de Graßmann o leva a demonstrar o que que antes era tido como uma verdade evidente. No caso da obra de Cauchy, por exemplo, vimos que o princípio é tido como um axioma, enquanto no caso da obra de Ohm, a demonstração é feita verbalmente com base em noções de contagem. E o princípio é preponderante também para a demonstração de resultados básicos das demais operações fundamentais da aritmética.

2. Subtração

A operação de subtração $a - b$ também fica definida unicamente por meio de uma igualdade, a saber, a mesma que foi utilizada por Martin Ohm.

$$a - b + b = a$$

Ideias concretas como "remoção" não ficam mais associadas à operação de modo a servirem para demonstrar teoremas.

A subtração é também definida unicamente por meio de uma equação não mais fica associada a ideias concretas como "remover" cujos significados literais serviriam para demonstrar afirmações matemáticas. A demonstração de que $a + b - b = a$ também é válida é feita logo em seguida.

Vale a pena observarmos como algumas “regras de sinais” da subtração com binômios ficam demonstrados de maneira puramente simbólica. A seguir, temos a demonstração de Graßmann da identidade $a - (b + c) = a – b - c$.

$a-b-c = a - b - c + (b+c) - (b+c)$ (por 29)
$= a - b - c + (c+b) - (b+c)$ (por 23)
$= a - b - c + + c + b - (b + c)$ (por 22)
$= a - b + b - (b+ c)$ (por 28)
$= a - (b+ c)$ (por 28)

Em seguida, temos duas designações importantes, 37 e 38, que explicam que a forma negativa $-a$ é na verdade uma rotulação nova para a operação $0-a$ e, da mesma forma, $+a$ é o mesmo que $0+a$.
(37) $0 - a = -a$
(38) $+a = a$
Essas designações servirão para justificar as “regras dos sinais” das operações de soma e subtração, 39 e 40.

(39) $a + (-b) = a-b$
(40) $a - - b = a + b$, *e* $- -b = b$

Tudo isso é feito de maneira marcadamente similar ao que vemos na obra de Ohm. Em seguida, Graßmann demonstra uma série de teoremas.

3. Multiplicação

A multiplicação traz mais algumas questões interessantes. Os números inteiros convencionais finalmente aparecem aqui, e ficam estabelecidos da seguinte maneira:

- considere uma *sequência básica* cujo elemento unitário é 1.
- chame o elemento sucessor de 1 (1+1) de 2. E o sucessor deste, por sua vez, será chamado de 3 (3 = 2+1 = 1+1+1), e assim por diante.
- Chame o antecessor de 1 (1 + -1) de 0 e, seguindo o mesmo procedimento do item acima, estabeleça os números negativos.

A sequência assim definida é chamada de sequência numérica. Isto é, ela é apenas uma instância específica das sequências básicas que haviam sido definidas anteriormente. Isto aponta de maneira marcante como Graßmann estava tentando compreender a estrutura em si do conjunto dos números inteiros como uma sequência com duas “caudas infinitas”. Os números inteiros são afinal apenas rótulos para elementos de um conceito mais geral que precisa ser compreendida de maneira lógica e independente de ideias concretas alheias à teoria. Além disso, finalmente, o autor identifica as quantidade a e $-a$ como quantidades opostas, isto é, quantidades que se diferem apenas pelo sinal precedente.

A multiplicação é estabelecida de uma maneira recursiva que viria a se estabelecer:

(52) a.1 = a para toda quantidade *a.*

(56) a(B+1) = aB+a. Isto mostra como multiplicar a pelos demais números positivos. Portanto, se *B = 1, a(B+1) = a.2 = a.1+a = a +a.* Se *B = 2, a (B+2) = a.3 = a.2+a=a+a+a. E assim por diante.*
(57) a.0 = 0 para toda quantidade *a.*
(58) *a(-B) = -(aB).* Isto mostra como multiplicar por números negativos. Percebe-se que a operação dentro do parênteses ficou definida no item 56.

O primeiro aspecto notável na definição de Graßmann para a multiplicação é que ela fica definida neste instante para multiplicações entre um multiplicando que é uma quantidade qualquer *a* e um multiplicador que é especificamente um número, isto é, um elemento necessariamente pertencente à sequência numérica. Deste modo, a sequência numérica se diferencia das demais sequências. Isso se dá porque, como Graßmann explica posteriormente, existem tanto quantidades denominadas como quantidades não denominadas, que são os números, isto é, ele faz a mesma distinção que é feita por Ohm (Graßmann, 1861, pág. 132) A sua aritmética nos mostra como operar com quantidades denominadas e com números e torna-se necessário evocar a sequência numérica especificamente ao falar da multiplicação pois é neste instante que as diferenças entre os dois tipos de quantidades se manifesta: entendendo-se a multiplicação como uma soma iterada, não faria sentido o multiplicador ser uma quantidade concreta.

Tendo em vista a distinção entre quantidades denominadas e não denominadas, não existe uma comutatividade que diz que *aB = Ba*, sendo B um número e *a* uma quantidade qualquer. Primeiramente, Graßmann demonstra a comutatividade entre dois *números* e, em seguida, ele demonstra apenas que $a\gamma\beta = a\beta\gamma$. Ou seja, ele demonstra que a comutatividade vale nos *multiplicadores numéricos* que multiplicam uma quantidade *a*, o que segue imediatamente da comutatividade entre números que ele havia antes demonstrado.

Graßmann traz ainda uma nova reflexão sobre comutatividade no capítulo 16, onde ele faz um panorama sobre as sete operações aritméticas, isto é, as mesmas sete operações básicas segundo Ohm. Graßmann introduz o capítulo da seguinte maneira:

> Há três níveis de operações, e em todos uma operação de agregar e uma ou duas de remover. As operações do primeiro nível são a adição e subtração, as do segundo Multiplicação e divisão, do terceiro potenciação, radiciação e logaritmo. As operações de agregamento são a adição, multiplicação, potenciação, as de remoção são a subtração, divisão, radiciação e logaritmo (Graßmann, 1861, p. 126).

Graßmann não diz exatamente o que separa um nível do outro, mas pelos exemplos que ele traz posteriormente, podemos sugerir que cada nível pode ser entendido em termos de operações do nível anterior, sendo o primeiro nível (que abarca a adição e a subtração) o original e mais simples. É importante lembrarmos ainda que identificamos uma mesma separação das operações em níveis na obra de seu pai, Justus Graßmann e na de Förstemann de 1825. No caso da obra de Förstemann, os números somente se tornam necessários quando alcançamos o segundo nível (Förstemann, 1825, p. 5), exatamente como ocorre na prática dentro da aritmética de Graßmann.

Graßmann ainda faz mais uma observação teórica sobre a comutatividade e diz que "as operações com quantidades determinadas sempre são reduzidas a uma operação com números":

> Como as partes da adição são intercambiáveis, existe para a adição apenas uma operação de remoção. Da mesma maneira, como os fatores de um produto, contanto que eles sejam números, podem ser intercambiáveis, existe para a multiplicação de números apenas uma operação de remoção. Por outro lado, se o multiplicando for uma quantidade determinada e o multiplicador for um número, então os fatores não podem mais ser intercambiáveis, já que o multiplicador não pode ser uma quantidade determinada. Então dois tipos de operação de remoção surgem, a saber 1) remoção pelo multiplicador, isto é, repartição, 2) remoção pelo multiplicando, isto é, medição. Porém, como as operações com quantidades determinadas sempre são reduzidas a uma operação com números, essa distinção é supérflua para a execução da operação (Graßmann, 1861, p. 128).

Alguns resultados importantes no capítulo referem-se às regras dos sinais, demonstradas de maneira também semelhante a Ohm:

(75) *(-a). B = a (-B) = -aB.*
Prova: (*-a*). *B* = (*0-a*) *B (por 37)*
= *0. B - a.B (por 69)*
= 0 - *aB (por 74)*
= *-aB (por 37)*

Além disso, *a* (*-B*) = *-aB* (por 58)

(76) *(-a) (-B) = aB*
Prova: (*-a) (-B)* = -[*a*(*-B*)] (por 75).
=--[*aB*] (por 75).
=*aB* (por 40)

Finalmente, traremos a demonstração por indução da comutatividade entre números pois, como veremos mais tarde, Peano a citará como a primeira demonstração rigorosa da propriedade. Não incluiremos aqui de onde vem cada passo na sua dedução; o importante é perceber que Graßmann faz questão de apontar que a regra vale se considerarmos que os termos são números e não necessariamente quantidades quaisquer:

(72) Se α e β são números, então $\alpha\beta = \beta\alpha$. "Fatores de um produto podem ser trocados, (se eles forem números)."

Prova (indução) A fórmula 72 se aplica para algum valor numérico β, então:

$$\alpha(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha = \beta\alpha + \alpha = \beta\alpha + 1.\alpha = (\beta + 1)\alpha$$
$$\alpha(\beta - 1) = \alpha\beta - \alpha = \beta\alpha - \alpha = \beta\alpha - 1.\alpha = (\beta - 1)\alpha$$

Agora, a fórmula 72 se aplica para $\beta = 1$, pois

$$\alpha.1 = \alpha = 1.\alpha$$

4. Divisão

Após apresentar uma teoria dos números, o autor se refere à divisão. Sendo *b* não nulo, a:b ou $\frac{a}{b}$é a quantidade (pertencente a uma sequência básica) que satisfaz a seguinte propriedade:

a:b.b=a, ou a/b . b = a.

Ao dizer que a/b pertence a uma sequência básica, Graßmann deve se referir a um resultado que ele desenvolve no capítulo: podemos formar de uma nova sequência básica a partir de divisões "impossíveis". Desta maneira, se considerarmos a quantidade *a/B*, podemos formar uma nova sequência básica cujo elemento unitário *e'* é tal que *e'B = e,* sendo *e* a unidade da sequência à qual *a* pertence. Em outras palavras, a unidade é uma fração unitária que contém o elemento *a* (digamos, 1/*B*, apesar de Graßmann não colocar desta maneira). Da mesma maneira, se considerarmos várias frações, podemos formar uma nova sequência cujo elemento unitário é a fração que contém todas elas, isto é, cujo denominador é o produto dos denominadores das frações dadas e cujo numerador é a unidade das quantidades que são numeradores. Formamos assim uma sequência básica que contém todas as frações dadas e se reduz a uma sequência do mesmo tipo que as sequências fundamentais anteriores.

A mesma questão levantada sobre a multiplicação também se aplica à multiplicação. E o autor deixa claro que, se *a* e *b* forem ambas quantidades, então a divisão entre eles será um número que, ao multiplicar *b*, produz *a*. Mais notavelmente, ao discutir sobre a possibilidade de *a/0*, Graßmann diz o seguinte:

> [...] de qualquer maneira, ao quociente cujo denominador é zero pode ser concedido um significado, particularmente se o quociente *a* for diferente de 0, diz-se que a/0 é infinito. A saber, 0 está contido infinitas vezes em *a*, e, portanto, *a* sempre sobra. Se o numerador também for nulo, então diz-se que 0/0 é indeterminado, pois, a saber, toda quantidade multiplicada pelo nulo produz o nulo (Graßmann, 1861, p. 45).

É notável que a sua argumentação para dizer que a/0 é infinito quando *a* é diferente de nulo escapa de seu método baseado em resultados anteriores. Ele de maneira nenhuma utiliza a definição de divisão que ele possui, uma vez que ela desconsidera casos com denominador nulo. Contudo, o autor logo diz que casos como esses não serão considerados a seguir, e é importante destacar que se trata de um "comentário". É possível ele não estava se prendendo ao rigor que ele se comprometeu a seguir ao longo do corpo do livro.

Definição de números irracionais, reais, teoria dos números complexos e o princípio da permanência

No capítulo sobre radiciação, Graßmann finalmente apresenta uma definição de número racional e irracional.

> Números inteiros e frações são chamados de números racionais. Por outro lado, as quantidades que não são racionais, mas às quais todas as proposições de comparações se aplicam no mesmo escopo que se aplicam aos racionais, são chamados de irracionais (Graßmann, 1861, p. 99).

A definição de número irracional sugere que Graßmann os identifica como os números restantes da "reta numérica", isto é, os números que obedecem às mesmas propriedades de ordem que os números racionais mas não são racionais. Esta propriedade distingue os irracionais e racionais do outro tipo de número que Graßmann trata neste livro, isto é, os números imaginários. É notável, porém, que Graßmann não constrói os números irracionais, mas apenas assume a existência deles ao tratar da operação de extração de raiz. Ao mencionar a raiz de 2, por exemplo, Graßmann apenas se preocupa em demonstrar que tipo de número ele é, racional ou irracional. É natural que a apresentação dos números irracionais tenha ocorrido de tal forma diante do fato de que as novas construções somente vieram posteriormente na mesma década do lançamento desta obra.

A definição mais geral dos números reais, assim como a dos imaginários, surge antes do seu tratamento das equações quadráticas por estas exigirem a consideração das raízes negativas.

> Uma quantidade que é positiva ou negativa chama-se real, uma quantidade que não é nem positiva nem negativa nem nula, mas que, conectada a outras quantidades produz uma quantidade real, chama-se imaginaria (Graßmann, 1861, p. 114).

Da mesma forma que Ohm, Graßmann redefine as operações básicas para os casos que não se adequam às definições anteriores, válidas apenas para números positivos.

> Pode-se demonstrar que nenhuma das leis previamente comprovadas se aplica a expressões ambíguas e que, portanto, o cálculo com tais expressões deve ser absolutamente rejeitado. A radiciação e o logaritmo das quantidades que não são positivas (ou seja, zero, negativo ou imaginário) e logaritmar com uma base negativa ou imaginária só pode ser definida com precisão se as leis de cálculo com quantidades imaginárias forem estabelecidas (veja o capítulo 24) (Graßmann, 1861, p.128).

O corpo principal do texto termina com o tratamento das progressões aritméticas e geométricas. Em anexo, vemos o tratamento da teoria dos números imaginários e dos polinômios, nos capítulos 24 e 25, respectivamente.

As operações de soma e subtração são estabelecidas logo depois da maneira convencional. Com relação à multiplicação, o autor é bastante explícito: ela é definida estabelecendo-se que $i.i = -1$. Após isso, ele faz uma observação relevante: definimos a operação de tal forma pois se tem como princípio a preservação das leis usuais das operações até onde for possível, isto é, Graßmann se baseia no princípio da permanência.

> As razões pelas quais essas conexões são definidas justamente desta maneira e não elaboradas de outra maneira resultam facilmente quando se considera que é determinante manter as leis de conexão usuais para essas quantidades também enquanto for possível (Graßmann, 1861, p. 184).

4.3. Giuseppe Peano

Peano nasceu em uma fazenda próxima à cidade de Cuneo, na Itália. Seu tio G. Michelle Cavallo era sacerdote e advogado em Turim e, ao perceber que Peano se destacava em seus estudos, convidou-o a Turim para completar seus estudos. Sua ótima performance no Liceo Cavour, onde ele estudou seus últimos anos no ensino secundário, lhe rendeu uma bolsa que concedia um alojamento no *Collegio delle Provincie.* Sua associação com a Universidade de Turim, que se prolongou pelo restante de sua vida, iniciou-se no ano de 1876, quando ele lá se matriculou como aluno, provavelmente após ter ingressado no *Collegio delle Provincie*. Seu exame final na universidade ocorreu em 1880, e o teste envolvia mecânica racional, geodésia teórica, geometria superior, mecânica superior e física matemática. Peano conseguir pontuação máxima e foi proclamado nesse ano doutor em matemática (Kennedy, 2006, p. 8).

Logo após obter seu diploma, Peano iniciou a sua carreira no ensino, ocupando a cadeira de professor assistente de álgebra e geometria analítica no período de 1880 a 1881. O período também viu a sua primeira publicação, apesar da mesma não ter sido tão importante em relação às suas produções posteriores. No período acadêmico seguinte, Peano se tornou assistente do professor Angelo Genocchi na cadeira de cálculo infinitesimal, posição que ocupou até 1889 (id, 2006, p. 10). No ano de 1882, Peano fez uma importante descoberta enquanto substituia Genocchi: encontrou um erro no livro-texto de J. A. Serret sobre cálculo integral que era utilizado no curso, erro este referente à definição de área de superfícies curvas. Apesar desse equívoco ter sido percebido anteriormente, a descoberta marca o início da sua trajetória como caçador de erros em textos sobre cálculo, um traço inicial da sua preocupação com o rigor na matemática, preocupação esta que se encontra também inserida na sua prática como professor em Turim. Em 1883, Peano publicou o primeiro de uma série de artigos sobre cálculo, intitulado *Sulla integrabilità delle funzioni*. Nesse artigo, Peano apresentou a sua própria definição de integral e do conceito de área, e a sua apresentação já marca definitivamente o seu programa de tornar o cálculo mais rigoroso (Segre, 1994, 247). Em 1884, houve mais um caso revelador: Peano publica uma edição editada do livro de Genocchi em nome dele, a qual rendeu algumas controvérsias. Mais importante do que isso são os comentários que se podem ver no início do livro. Peano apresenta uma definição de número incomensurável que se traduz na definição oferecida por Dedekind em *Stetigkeit* de número irracional (Segre, 1994, p. 271). Como aponta Segre (1994, p. 272), apesar de Peano fazer menção direta à obra de Dedekind, ele ainda não deve ter lido sua obra sobre números irracionais nessa época, mas se baseou em Dini, que havia seguido proximamente o método do alemão. Além disso, uma nota no rodapé deixa mais claro que Peano tinha uma visão tal como a de Dedekind e Dini de considerar o conceito de número preponderante para a fundamentação da análise:

> A análise se baseia, sem qualquer postulado, no conceito de número. E ainda que este conceito já deva ser familiar a partir da aritmética e da álgebra, considerou-se benéfico apresentar aqui a definição dos números incomensuráveis, de modo que as provas seguintes seriam claras (Segre, 1994, p. 1991).

No ano de 1886, tornou-se também professor na Academia Militar Real, passando a lecionar nos dois locais ao mesmo tempo. Alguns anos depois, Peano publicou um livro inteiro baseado na sua busca por erros (Segre, 1994, p. 248).

Após uma série de publicações referentes a problemas específicos de cálculo, Peano publicou em 1888 o seu terceiro livro, *Calcolo Geometrico*. É neste livro, no capítulo introdutório, que encontramos o seu primeiro tratamento da lógica matemática, um assunto que ele abordará extensivamente em pesquisas futuras, tendo como referência as obras de Schröder, Boole, Peirce, entre outros. Apesar disso, não fica muito clara a motivação para tal teoria sobre as "operações da lógica dedutiva" nesta obra, uma vez que não parece haver muita relação entre ela e o restante do livro. A parte mais sugestiva com relação a isso se encontra no prefácio da obra, quando ele fala que a as operações da lógica dedutiva "apresentam uma ótima analogia com aquelas da álgebra e do cálculo geométrico." (Peano apud Segre, 1888, p. VII) Ou seja, Peano parece sugerir um papel analógico que o estudo da lógica matemática pode prestar em relação à álgebra e ao cálculo geométrico.

A lógica matemática se vê presente também no seu notável livreto que foi lançado no ano seguinte, *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (Os Princípios da Aritmética, apresentado por um novo método). Esta é a publicação à qual nos referimos no início do capítulo, na qual encontramos a primeira versão dos seus famosos axiomas. A seção seguinte será centrada nesta obra, mas um fato curioso que já adiantamos é que ela toda se encontra escrita em um latim mistura com alguns termos de seu próprio cunho, numa época em que tal prática já não era mais muito comum. Kennedy, que fez uma grande biografia sobre Peano, sugere que isto tenha sido apenas "um ato de puro romantismo, talvez o único ato romântico em sua carreira." (Kennedy, 2006, p. 36). No mesmo ano, Peano publicou uma obra inspirada na *Vorlesungen über Geometrie* de Pasch, intitulada *I principii di geometria logicamente espositi* (Os Princípios da Geometria Apresentados Logicamente). Apesar de não ser totalmente original nesta obra, Peano busca estender à geometria o seu projeto apresentado na obra anterior, axiomatizando-a tal como ele fez com a aritmética e mostrando um discurso bastante focado em uma apresentação simbólica, rigorosa e clara.

No ano de 1890, Peano finalmente passou a assumir um cargo principal na Universidade de Turim, quando se tornou Professor Extraordinário de Cálculo Infinitesimal. Agora consolidado, no ano seguinte, Peano inaugurou seu próprio periódico, a *Rivista di Matematica*, juntamente com muitos co-fundadores e colaboradores. Foi dentro deste projeto que Peano publicou a maioria de seus textos sobre lógica matemática, (Kennedy, 2006, p. 51) e é na sua primeira edição que encontramos o seu importante artigo de 1891, *Sul Concetto di Numero*, no qual ele compara a sua análise com a de Dedekind, prova a independência dos seus axiomas, traz algumas curtas reflexões filosóficas sobre o conceito de número e, pela primeira vez, faz menção aos fundamentos dos números inteiros (e, portanto, dos números negativos). No mesmo artigo, Peano reconhece também a primazia de Grassmann na demonstração das propriedades da comutatividade e associatividade da operação de soma entre números naturais e a de Dedekind na apresentação explícita do princípio de indução (Peano, 1891, p. 96).

É também no fim desse artigo que ele faz a primeira menção ao seu outro grande projeto, *Formulario*, no qual ele publicaria todas as proposições matemáticas conhecidas na linguagem "precisa" e "concisa" do seu simbolismo lógico (Peano, 1891, p. 266). O projeto se estenderia por

muitos anos e seria a maior manifestação do seu projeto leibniziano de obter uma linguagem simbólica universal para a ciência. É ainda no contexto do *Formulario* que Peano deixa mais claro o papel da lógica na matemática. Ela, afinal, não serve apenas como analogia mas é também instrumental para a análise das ideias matemáticas, pois ela ajuda na obtenção das "ideias fundamentais, a partir das quais as outras são expressas" (Segre, apud Peano, 1994, p. 298). Em suma, o simbolismo da lógica não apenas torna mais claras as ideias matemáticas, as quais são estruturadas em um edifício lógico-dedutivo, como também funciona como uma ferramenta que nos permite analisar se uma proposição parte precisamente das premissas que temos disponíveis, o que nos permite naturalmente descobrir também que ideias trazemos como pressupostos e quais delas se encontram nas fundações.

Após a sua maturação, o projeto do *Formulario* foi levado tão a sério que ele acabou por atrapalhar o ensino de Peano. Nas suas aulas, ele começou a focar demais na explicação dos seus símbolos em detrimento do cálculo em si, o que acabou por incomodar alunos e colegas ao ponto de ele ser liberado da Academia Militar Real, em 1901 (Kennedy, 2006, p. 141). Não obstante, os anos restantes de sua vida foram dedicados majoritariamente à edição do *Formulario* e na promoção de uma linguagem auxiliar internacional, voltada especialmente para ajudar na comunicação dos cientistas, mais um projeto que ele credita a Leibniz (Kennedy, 2006, p. 150) O interesse pelos fundamentos da matemática já se encontrava em segundo plano nessa segunda metade de sua vida. No ano de 1903, Peano chegou a propor a sua própria *Interlingua*, e ainda escreveu uma série de artigos nela, mas, como aconteceu com toda língua artificialmente criada, ela não se popularizou suficientemente (Segre, 1994, p. 320). Peano faleceu em 1932.

Como foi sugerido neste relato, o fio condutor na produção de Peano foi a sua busca por clareza, ainda que seu projeto de simbolismo generalizado tenha falhado no alcance desse objetivo se considerarmos a sua recepção pela comunidade científica. Mas a primeira axiomatização propriamente dita da aritmética, deve-se ter em mente, surge em meio a esta preocupação fundamental, e em meio às pesquisas sobre cálculo de alguém que conhecia bem as obras de Dedekind e de Graßmann. Analisaremos agora o importante livreto de 1889 e perceberemos como seu projeto se manifestou pontualmente na sua aritmética.

4.3.1. Historiografia sobre os axiomas de Peano e o seu conceito de Número

A vida e obra de Peano foram extensamente analisadas especialmente por Hubert Kennedy que escreveu uma biografia do autor, além de ter escrito uma série de artigos sobre o matemático italiano. Na historiografia recebida, alguns aspectos sobre Peano aparecem alinhados. Em relação à sua epistemologia, Corry o descreve nem como logicista nem como formalista, mas como um matemático que "concebia ideias matemáticas como sendo derivadas de nossa experiência empírica" (Corry, 2004, p. 43-44). Para dar apoio à sua tese, Corry cita a fala do próprio Peano:

> Qualquer um pode tomar uma hipótese e desenvolver suas consequências lógicas. No entanto, se alguém quiser dar ao seu trabalho o nome de geometria, é necessário que tais hipóteses ou postulados expressam o resultado de observações mais simples e elementares de figuras físicas (Corry, 2004, p.44).

Apesar de a fala acima referir-se especificamente à geometria, autores como Kennedy e Segre (1991) argumentam na mesma direção de Corry, oferecendo falas em que Peano mostra-se favorável à fundamentação da matemática na intuição. Dessa forma, o propósito de Peano com o uso generalizado de simbolismo no estilo do projeto de Leibniz da *calculus ratiocinator* teria sido a simplificação e remoção de ambiguidades nos fundamentos, e não a transformação da matemática em um "jogo de símbolos" sem um significado subjacente.

Os axiomas de Peano já foram extensamente analisados pela historiografia, bem como sua posição na história dos fundamentos da lógica e da aritmética. Heijenoort (1967) oferece uma análise ampla de uma série de obras no contexto do desenvolvimento da lógica matemática e a obra de aritmética de Peano de 1889 figura entre uma delas. A influência de Graßmann também é amplamente reconhecida, mesmo pelo fato de Peano reconhecê-la abertamente na introdução de sua obra. As comparações entre as duas obras, no entanto, acabam dando espaço para descrições simplificadas da relação entre elas:

> De fato, Arithmetices principia pode ser considerado uma simplificação, refinamento e tradução em linguagem lógica (o "nova methodo" em seu título) do *Lehrbuch der Arithmetik* de Graßmann. [1861] (Ferreirós, 2005, p. 618).

Apesar das relações inquestionáveis entre as obras, objetivamos questionar essa visão evidenciando suficientemente algumas diferenças importantes entre as obras de Peano e Graßmann em nossa análise, de modo que a primeira não possa ser compreendida como uma tradução da segunda.

Quanto ao contexto mais geral da matemática em que a obra de 1889 foi publicada, parece ainda consensual que ela pode ser mais bem compreendida em meio à aritmetização da análise que ocorria no século, a qual não é igualmente associada à obra anterior de Graßmann. Segre oferece como pano de fundo para a axiomatização de Peano os desenvolvimentos da análise desde o século XIX até Weierstraß e a lacuna que ainda persistia no sentido de esclarecer os princípios dos números naturais. Além desse fato, Segre explicita também o fato de que Peano esteve amplamente envolvido em pesquisas associadas aos fundamentos da análise antes de direcionar-se aos fundamentos da aritmética e da lógica. Grattan-Guinness concorda com essa compreensão da obra de Peano e aponta ainda o fato de que, não por coincidência, outros matemáticos teriam trabalhado no mesmo sentido de fundamentar a aritmética na mesma época, mesmo que de maneira independente.

> A obra de Peano sobre os números naturais encontrava-se em uma encruzilhada de suas diversas contribuições matemáticas, naturalmente conectando sua pesquisa anterior em análise com o foco que surgia nos fundamentos da lógica, e sendo necessário pré-requisito para o projeto *Formulario*. Ele buscava preencher a lacuna mais significante nos fundamentos da matemática na época, quando a aritmetização da análise havia sido essencialmente completada. Não é mera coincidência que outros matemáticos (Gottlob Frege, C.S. Peirce e Dedekind) publicaram obras convergentes na mesma década (Ferreirós, 2005, p. 618).

Concordarmos com a tese, nossa análise pretende explicitar outros detalhes que favorecem tal interpretação.

Finalmente, destacamos uma lacuna encontrada na historiografia sobre Peano, a saber, a pouca atenção que é dada ao seu desenvolvimento dos demais números além dos naturais. Nesse sentido a única publicação em que encontramos uma discussão é o breve artigo de 1974 de Hubert Kennedy, *On Peano's concept of Number* (Sobre o conceito de número de Peano), onde ele apresenta brevemente, de maneira crítica, a abordagem de cada um dos diferentes tipos de número por Peano, inclusive em obras posteriores ao livreto de aritmética de 1889. Tal lacuna se torna mais relevante ao percebermos que a curiosa ausência dos números negativos no *Arithmetices principia* é quase ignorada pela historiografia, apesar de Peano ter abordado os números negativos posteriormente.

A título de exemplo, Grattan-Guinness compara novamente Graßmann a Peano ao mencionar que Graßmann inicia sua teoria com os números inteiros enquanto Peano inicia de maneira mais simples, apenas com os números naturais, mas o mesmo autor não destaca o fato de que Peano sequer chega a abordar os números inteiros nessa obra apesar de desenvolver os racionais e reais positivos logo em seguida (Ferreirós, 2005, p. 618, 622-623). O artigo supracitado de Kennedy é o único em que encontramos menção às abordagens posteriores de Peano sobre os números negativos, mas ele apenas menciona a ausência dos números negativos na obra de 1889 sem nenhum comentário adicional. Em nossa análise, tentaremos oferecer algumas explicações possíveis para a ausência dos números negativos no *Arithmetices principia* além de analisarmos as suas abordagens posteriores desse tipo de número.

4.3.2. A busca por clareza e o método axiomático de Peano: ideias e proposições primitivas

No prefácio da obra de 1899, encontramos uma passagem representativa da preocupação de Peano pela clareza na comunicação do conhecimento e como o seu projeto de simbolismo generalizado serviria como um meio para alcançar esse propósito. Sua principal crítica às tentativas anteriores de fundamentar a aritmética se direciona à ambiguidade causada pelo uso da linguagem comum. A passagem a seguir mostra que o seu projeto simbólico se espelha na álgebra:

> Eu indiquei por meio de símbolos todas as ideias que ocorrem nos fundamentos da aritmética, de modo que toda proposição seja enunciada apenas com estes símbolos. Os símbolos pertencem à lógica ou à aritmética […] com essa notação, toda proposição assume a forma e a precisão de que as equações desfrutam na álgebra, e a partir das proposições assim escritas outras podem ser deduzidas, por um processo que se assemelha à solução de equações algébricas. Essa é a razão principal pela qual escrevo este ensaio (Peano, 1889, p. *iii*).

A referência à resolução de equações ajuda a elucidar a analogia entre a álgebra, o cálculo geométrico e a lógica que mencionamos na seção anterior. Da mesma maneira que, ao resolvermos uma equação algébrica, seguimos simbolicamente de uma etapa para a próxima de maneira direta e não ambígua, isto é, sem a necessidade de explicações literais que remetam ao significado subjacente aos símbolos, podemos adotar a mesma postura no processo dedutivo na aritmética se

tivermos símbolos que representem as suas ideias básicas e regras claras sobre como manipular estes símbolos. Uma atitude similar se encontrava já na obra de 1882 de geometria de Pasch que influenciou Peano:

> De fato, dada que a geometria deve ser verdadeiramente dedutiva, o processo de inferência deve ser completamente independente do significado dos termos geométricos, assim como deve ser independente das figuras (Pasch, 1882, p. 98).

Segundo sua apresentação simbólica de uma ciência, estruturalmente, ela deve se iniciar com o que Peano chama de ideias primitivas e proposições primitivas. As primeiras constituem os conceitos iniciais que não poderiam ser definidos a partir de outros, enquanto as proposições primitivas compreenderam relações entre essas ideias primitivas que não poderiam ser demonstradas.

> As propriedades fundamentais das ideias primitivas são determinadas pelas "proposições primitivas", ou as proposições que não são provadas, e a partir das quais todas as outras propriedades dos entes são determinadas. As proposições primitivas funcionam de uma certa maneira como definições das ideias primitivas (Peno apud. Kennedy, 1958, p. 435).

Especificamente na aritmética, as ideias primitivas e seus símbolos correspondentes seriam, conforme exposto em sua obra de 1889:

- O símbolo *N* significa número (inteiros positivos)
- O símbolo *a+1* significa o sucessor de *a* ou *a mais 1*.
- O símbolo 1 significa unidade
- O símbolo = significa é igual a. isso deve ser considerado um novo símbolo, apesar de ele ter a aparência de um símbolo da lógica (Peano, 1889, p. 1)

Já as proposições primitivas ou axiomas, as quais analisaremos em detalhes a seguir, seriam:

Axiomata.

1. $1 \in \mathrm{N}.$
2. $a \in \mathrm{N} . \supset . a = a.$
3. $a, b, c \in \mathrm{N} . \supset : a = b . = . b = a.$
4. $a, b \in \mathrm{N} . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c.$
5. $a = b . b \in \mathrm{N} : \supset . a \in \mathrm{N}.$
6. $a \in \mathrm{N} . \supset . a + 1 \in \mathrm{N}.$
7. $a, b \in \mathrm{N} . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1.$
8. $a \in \mathrm{N} . \supset . a + 1 - = 1.$
9. $k \in \mathrm{K} \therefore 1 \in k \therefore x \in \mathrm{N} . x \in k : \supset_x . x + 1 \in k : : \supset . \mathrm{N} \supset k.$

Figura 4: Os axiomas de Peano (Peano, 1889, p.1)

As proposições primitivas são escritas tanto por meio das ideias primitivas como com o simbolismo da lógica, e da teoria de classes e funções, as quais ele apresenta anteriormente, apesar de não realizar uma axiomatização dessas teorias na sua obra de 1889.[47]

A ideia de um conceito ser indefinível se baseia, por sua vez, na sua concepção particular e simbólica de definição. Definir um novo símbolo *x* significa igualá-lo a um agregado de símbolos que já foram previamente definidos. Como não se pode fazer isso com as ideias primitivas, elas são "definidas" por meio das proposições primitivas, permitindo, assim, que o processo dedutivo tenha um começo.

> Definição ou simplesmente Def é uma proposição da forma *x=a*, onde *a* é um agregado de símbolos com significado conhecido, *x* é um símbolo ou agregado de símbolos ainda sem significado *[...]* (Peano, 1889, p. *xvi*).

Como veremos em detalhes a seguir, os demais tipos de números, negativos, fracionários e irracionais, são de fato definidos a partir do tipo anterior, conforme sua concepção de definição. Com isso, pode-se dizer que os números naturais fundamentam todos os demais em seu sistema e a análise estaria finalmente assentada no conceito de número.

Peano discute pouco a respeito das ideias primitivas e axiomas da aritmética na obra de 1889. No entanto, em seu já mencionado artigo de 1891, *Sul concetto di numero*, Peano traz uma discussão mais aprofundada. Nele, Peano faz uma abordagem parecida com a da sua obra aritmética anterior, fazendo referência direta a *ela*, sugerindo que um dos objetivos do artigo era expor algumas propriedades dos números sobre bases mais gerais e de uma maneira mais concisa (Peano, 1891, p. 87).

Após a apresentação dos axiomas da aritmética (que agora constituem apenas 5, como falaremos em mais detalhes a seguir), Peano coloca a seguinte questão: "podemos definir a unidade, o número, a soma de dois números?" Para responder a isto, ele começa criticando a definição de Euclides que diz que "número é agregado de várias unidades" por ela servir apenas como um esclarecimento e não como uma definição. Em seguida ele mostra que, pelo menos em nível prático, esse questionamento não constitui um grande problema:

> Uma criança, em tenra idade, usa as palavras, um, dois, três, etc.; posteriormente, ela usa a palavra número; só muito mais tarde a palavra agregado aparece em seu vocabulário. E como a filologia nos ensina, o desenvolvimento dessas as palavras ocorrem na mesma ordem nas línguas arianas. Assim, do ponto de vista prático, a questão parece-me resolvida, ou seja, não há vantagem, ao ensinar, em dar uma definição de número. Esta ideia é muito clara para os alunos, e qualquer definição iria apenas confundi-los (Peano, 1891, p. 90, 91).

Suas observações seguintes sugerem que uma definição "teórica", no entanto, envolveria descrever uma igualdade simbólica entre número e os demais símbolos de sua teoria, o que é

[47] Como Peano admite no prefácio de sua obra de 1899, sua lógica se baseia em obras de outros autores, especialmente nas de George Boole e de Schröder Para uma análise da lógica na obra de Peano de 1899, pode-se consultar Heijenoort (1967, p. 83-85).

impossível, segundo ele, pois a ideia de número não pode ser descrita dessa maneira. Apesar disso, ele não nega que "se o número não pode ser definido, podem ser enunciadas aquelas propriedades das quais se obtêm todas as inumeráveis e conhecidas propriedades dos números." Ou seja, podemos de fato enunciar axiomas referentes às propriedades basilares dos números com as quais deduzimos logicamente todas as propriedades numéricas relevantes, mas isso não quer dizer que enunciar tais propriedades constitui uma definição propriamente. Na concepção de Dedekind, os números seriam de fato definidos, mas Peano não parece reconhecer uma contradição entre as duas concepções, e chega a sugerir que o conceito de ambos coincide, apesar das diferenças metodológicas.

> Há uma aparente contradição entre o que foi dito e o que Dedekind diz, que deve ser apontada imediatamente. Aqui o número não é definido, mas suas propriedades fundamentais são anunciadas. Em vez disso, Dedekind define o número e chama precisamente de número o que satisfaz as condições precedentes. Evidentemente, as duas coisas coincidem (Peano, 1891, p. 94).

Sua simples aceitação de que seu sistema coincide com o de Dedekind poderia se dar pelo fato de que Peano não parecia se interessar muito em aspectos filosóficos acerca dos seus axiomas (Segre, 1998, p. 306-307) Apesar disso, ele traz uma observação interessante sobre como os conceitos primitivos indefiníveis poderiam ser apreendidos, apesar de eles não poderem ser deduzidos a partir de outros conceitos:

> Os conceitos, portanto, que não definimos são os de número, N, de unidade, 1, e do sucessor de um número *a*, que aqui é indicado por um instante com a +. Esses conceitos não podem ser obtidos por dedução, eles devem ser obtidos por indução (abstração) (Peano, 1891, p. 91).

Peano não deixa aqui muito claro o que ele entende por abstração nem por indução, de modo que não é possível precisar o que ele quis dizer. Na sua introdução ao *Formulario* de 1894, Peano faz um comentário similar, porém, dessa vez, refere-se aos princípios primitivos de qualquer ciência:

> Em toda ciência, após ter analisado as ideias, expressando as mais complicadas através das mais simples, encontra-se um certo número que não pode ser reduzido entre elas, e as quais não se pode definir mais. Essas são as ideias primitivas da ciência, é necessário adquiri-las através da experiência, ou através da indução, é impossível explicá-las através da dedução (Peano, 1894 apud Segre, 1994, p.314-315).

Apesar da ambiguidade se manter e Peano não ir mais a fundo no assunto em outras ocasiões, o seu uso das palavras "experiência", "abstração" e "indução" para se referir ao processo de aquisição das ideias primitivas da ciência apontam para uma concepção empirista ou, como sugere Segre (1998, p. 313-318), possivelmente intuicionista. Um aspecto que não parece ter sido apontado pela historiografia poderia fortalecer essa tese: nas ocasiões em que Peano discute a essência dos demais tipos de números, ele os descreve como abstrações de operações feitas sobre números naturais, assentando, assim, a legitimidade dos demais tipos de números nas operações possíveis com números naturais. Falaremos mais a respeito desse assunto a seguir.

4.3.3. Aritmética de Peano:

Os axiomas dos números

Trazemos agora uma tradução brusca e uma análise dos axiomas para o simbolismo moderno.

O primeiro axioma estabelece que 1 é um elemento do conjunto N.

1. $1 \in N$

Os axiomas 2-5 estabelecem o valor do símbolo não definido "=" na aritmética. O axioma 2 estabelece que ela é reflexiva, o axioma 3 estabelece que ela é simétrica (percebe-se aqui um "c" desnecessário que foi incluído por Peano), o axioma 4 estabelece que ela é transitiva, e o axioma 5 diz que, se um primeiro elemento for igual a um segundo elemento pertencente a N, então o primeiro também pertencerá a N. No artigo *Sul concetto di numero*, Peano reduz os axiomas da aritmética a apenas cinco ao separar estes quatro axiomas referentes ao sinal "=".

2. $a \in N \Rightarrow a = a$
3. $a, b, c \in N \Rightarrow [(a = b) \Leftrightarrow (b = a)]$
4. $a, b \in N \Rightarrow [(a = b) \wedge (b = c)] \Leftrightarrow (a = c)$
5. $a = b \wedge b \in N \Rightarrow a \in N$

O axioma 6 estabelece o sucessor de um elemento *a*, *a+1*. Todo sucessor de um número natural é também um número natural.

6. $a \in N \Rightarrow a + 1 \in N$

O axioma 7 nos garante que, se dois elementos de N forem iguais, então os seus sucessores devem necessariamente ser os mesmos. Este axioma exerce o papel do axioma que diz que a "função sucessor é injetiva", mas Peano não utiliza aqui uma tal função, nem explicita que ela seja injetiva.

7. $a, b \in N \Rightarrow (a = b) \Leftrightarrow a + 1 = b + 1$

O oitavo axioma distingue um elemento, o 1, dos demais elementos de N, por este não ser o sucessor de nenhum elemento.

8. $a \in N \Rightarrow a + 1 \neq 1$

E o nono e último axioma se refere ao axioma de indução. Isto é, o princípio de indução já não é mais assumido como um "método de demonstração" tal como vemos no *Lehrbuch der Arithmetik* de Graßmann, mas passa a fazer parte dos princípios da aritmética. A única observação a ser feita é que o simbolismo "$k \in K$" indica que *k* é um conjunto. Mais precisamente, Peano lida com classes em vez de conjuntos, e K seria a classe de todas as classes, à qual *k* é pertencente.

9. $(k \in K \wedge 1 \in k \wedge [(x \in N \wedge x \in k)] \Rightarrow \forall x, x + 1 \in k) \Rightarrow N \subset K$

A partir do axioma 7, Peano é capaz de definir recursivamente cada número tal como Leibniz fez anteriormente: 2=1+1, 3=2+1, 4=3+1, etc (Peano, 1889, p. 1). Logo em seguida, surgem os primeiros teoremas. Observar a demonstração da simples proposição "$2 \in N$" nos ajuda a perceber o padrão do seu método de demonstração. Tal como vimos no livro de Graßmann, também vemos

aqui uma tentativa de mostrar que cada proposição se origina de proposições anteriormente demonstradas e isso é indicado por meio de uma numeração que acompanha cada etapa do processo dedutivo.

Theoremata.

11. $2 \in N$.

Demonstratio:

$P1 . \supset :$	$1 \in N$	(1)
$1 [a] (P6) . \supset :$	$1 \in N . \supset . 1 + 1 \in N$	(2)
$(1)(2) . \supset :$	$1 + 1 \in N$	(3)
$P10 . \supset :$	$2 = 1 + 1$	(4)
$(4) . (3) . (2, 1 + 1) [a, b] (P5) : \supset :$	$2 \in N$	(Theorema).

Figura 5: A demonstração de Peano de que 2 pertence aos naturais. (Peano, 1889, p. 2)

Peano ainda oferece uma forma reduzida da demonstração em uma única linha:

$$P1 . 1 [a] (P6) : \supset : 1 + 1 \in N . P10 . (2, 1 + 1) [a, b] (P5) : \supset : Th.$$

vel

$$P1 . P6 : \supset : 1 + 1 \in N . P10 . P5 : \supset : Th.$$

Figura 6: A demonstração reduzida de que 2 pertence aos naturais. (Peano, 1889, p. 2)

Diferentemente de Graßmann, Peano não se preocupa em traduzir os teoremas a serem demonstrados para uma linguagem comum. O enunciado e a demonstração simbólica tornam-se por si só satisfatórios para comunicar o que se pretendia.

Ao definir as operações de adição, multiplicação e potenciação, Peano se utiliza das definições recursivas de Graßmann.[48] Definidas as operações, Peano demonstra uma série de proposições básicas em um estilo Grassmanniano, inclusive a comutatividade e a associatividade da soma.

As operações inversas de subtração e divisão são também definidas e, de acordo com o que já dissemos, Peano lida apenas com números positivos, de modo que o conjunto dos inteiros não chega a ser construído aqui. Se a for "maior do que" b, $N \cap \{x | x + a = b\}$ será igual ao "conjunto vazio" e subtrações com esta característica não se encontram definidas para números naturais. Da mesma forma, a divisibilidade estabelece os limites para a divisão: $a, b \in N \Rightarrow a | b \Leftrightarrow (b/a \neq \emptyset)$. Após ter estabelecido os números N, Peano define imediatamente os racionais positivos e, após estes, os irracionais. É notável que Peano inverte os símbolos desses dois conjuntos: os racionais positivos são indicados por Q enquanto os reais são representados por R.

Peano nunca chegou a discutir por que razão não introduziu os números negativos em sua obra de 1899 e, conforme já discutimos, esse fato parece ser ignorado pela historiografia. Os

[48] Heijenoort (1967, p. 83) observa que definições recursivas não seriam justificadas em seu sistema conforme o que Peano estabelece como sendo uma "definição". Nesse sentido, Dedekind teria ido além em seu *Zahlen*, ao justificar esse tipo de definição por meio de seu teorema 126.

negativos surgem pela primeira vez em 1891, no artigo *Sul concetto di numero*, e Peano nada diz sobre o motivo deles não terem aparecido no seu livro de aritmética. Uma hipótese que propomos é que Peano estava tentando apresentar a aritmética tradicional segundo Euclides em sua nova roupagem simbólica. Oferecemos essa possibilidade pelo fato de que Peano demonstra uma série de teoremas contidos na obra grega e faz questão de mencionar que os resultados são provenientes de lá. Como não havia nada que pudesse ser associado a números negativos n'Os Elementos, Peano teria preferido omiti-los em seu livro.

Os números racionais e reais positivos

Como dissemos anteriormente, enquanto os números naturais são axiomatizados, os números racionais e reais são apenas definidos. Tendo em vista a concepção de Peano de definição como uma igualdade entre um novo ente e um agregado de símbolos ou conceitos pré-estabelecidos e o fato de que os demais tipos de números não requerem a elaboração de novos tipos de axiomas, pode-se depreender que os números naturais e seus axiomas servem como base para todos os demais tipos de números e, consequentemente, para toda análise, ainda que Peano não tenha explicitado a realização de tal façanha com a obra.

No estabelecimento dos números racionais positivos por Peano, fomos capazes de perceber uma notável influência de Charles Méray que será fortemente sugerida por comentários de anos posteriores: o matemático italiano admite que o método de Méray já compreendia uma maneira correta de estabelecer as razões. Abaixo, trazemos as quatro definições necessárias para estabelecer os novos entes.

Definitiones.

1. $m, p, q \in \mathrm{N} . \supset . m \frac{p}{q} = m\, p / q.$
2. $p, q, p', q' \in \mathrm{N} . \supset :: \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} . = \therefore x \in \mathrm{N} . x \frac{p}{q}, x \frac{p'}{q'} \in \mathrm{N} : \supset_x . x \frac{p}{q} = x \frac{p'}{q'}.$
3. $\mathrm{R} = :: [x \in] \therefore p, q \in \mathrm{N} . \frac{p}{q} = x : - = \Lambda.$
4. $p \in \mathrm{N} . \supset . \frac{p}{1} = p.$

Figura 7: a definição dos números racionais positivos por Peano (Peano, 1889, p.13)

Traduzindo estas definições para uma linguagem simbólica moderna, obtemos algo como:

1. $m, p, q \in N \Rightarrow m\frac{p}{q} = mp/q$
2. $p, q, p', q' \in N \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow [(x \in N \wedge x\frac{p}{q}, x\frac{p'}{q'} \in N) \Rightarrow (\forall x, x\frac{p}{q} = x\frac{p'}{q'})]$
3. $Q^+ = \{x | [p, q \in N \wedge \frac{p}{q} = x] \neq \perp\}$
4. $p \in N \Rightarrow \frac{p}{1} = p$

A primeira definição não apenas define uma multiplicação entre um número natural e o novo ente "razão", $\frac{p}{q}$, mas faz com que possamos entender esses novos entes em termos da operação de multiplicação, *mp*, seguida de uma divisão, *mp/q* entre números naturais. Ou seja, é como se Peano compreendesse frações em termos de uma multiplicação seguida de uma divisão possível de números naturais, o que corresponde ao método de Méray. Como ainda veremos, Peano também irá reafirmar seguidas vezes a sua visão das frações como abstrações de operações executáveis sobre números naturais.

A segunda definição merece atenção pois corresponde a um tipo peculiar de definição que Peano irá descrever em seus artigos *Le definizioni per astrazione* (As definições por abstração) de 1915 e *Le definizioni in matematica* (As definições na matemática) de 1921: a definição por abstração. Conforme ele descreve em seu artigo de 1915: "as definições em que o que se define é a igualdade entre dois novos entes são chamadas de definição por abstração." (Peano, 1915, p. 2). No presente caso, define-se a igualdade entre razões, $\frac{p}{q} = \frac{p\prime}{q\prime}$ recorrendo-se a símbolos pré-estabelecidos e, dessa forma, os novos entes $\frac{p}{q}$ ficam estabelecidos. Novamente, a igualdade é definida de maneira semelhante à maneira c por Méray: $\frac{p}{q} = \frac{p\prime}{q\prime}$ serão iguais quando as multiplicamos por um número natural *x* de modo que $x\frac{p}{q} = x\frac{p\prime}{q\prime}$ e estas correspondem a operações executáveis (multiplicação seguida de divisão) sobre números naturais

A terceira definição simplesmente define que o conjunto Q^+ *co*mpreende todas as razões existentes. A quarta definição, por sua vez, diz que, se o denominador for 1, a razão pode ser igualada ao número natural correspondente ao numerador da razão. Dessa forma, assim como Méray, Peano também finaliza a definição com uma forma de compreender os naturais como "subconjunto" dos racionais. A relação de ordem e as operações entre razões serão definidas logo em seguida

A concepção dos números reais não nos oferece grandes surpresas e se baseia no conceito pré-definido de supremo de um subconjunto A de números racionais positivos.

$$R^+ = \{x|A \in \text{"}Subconjuntos\ de\ Q^+\text{"} \wedge A \neq \emptyset \wedge (Q^+ \cap \{z|z > sup(A)\}) \neq \emptyset \wedge sup(A) = x] \neq \perp\}$$

Considerando-se as condições postas por Peano, pode-se dizer que o conjunto dos números reais positivos é entendido como "o conjunto de todos os supremos de todos os subconjuntos limitados e não vazios de *Q*". Um aspecto interessante da sua definição dos números reais é que Peano tem a preocupação em garantir que os reais não possuam um elemento maior do que todos os supremos de todos os subconjuntos de Q, o qual ele associa ao infinito, ∞. Em razão disso, ele inclui a condição $Q^+ \cap \{z|z > sup(A)\}) \neq \emptyset$**.** Além disso, o 0 tampouco deve ser considerado um número real positivo.

> O símbolo R^+ lê-se quantidade, e indica os números reais positivos, racionais ou irracionais, com a exceção de 0 e ∞ (Peano, 1889, p. 16).

Tendo definido as relações de ordem e as operações ele não demonstra mais nenhum teorema sobre os números reais, apenas dizendo que as proposições 17, 28 e 29 sobre os racionais

podem ser também demonstradas para o caso dos números reais (Peano, 1889, p. 16) O livro é encerrado com um capítulo em que ele define os conceitos de interior, exterior e limite de um conjunto.

4.3.4. Sobre o conceito de número (1891): definição dos números inteiros

Conforme dito, o artigo *Sul concetto di numero*, que pode ser entendido como uma versão estendida e comentada dos seus princípios da aritmética de 1899, contém a primeira aparição dos números negativos em um escrito de Peano. Como também já foi dito, os axiomas da aritmética são agora reduzidos para apenas cinco e Peano redemonstra pela primeira vez a independência deles (Peano, 1891, p. 93) De acordo com Kennedy (1972, p. 134-136), considerando-se que a questão da independência se reduz à questão da consistência, Beltrami foi o primeiro a fazer uma demonstração do tipo: em 1868, ele demonstra a independência dos postulado das "paralelas de Euclides". No entanto, teria sido Peano quem desenvolveu a técnica como um método geralmente aplicável. Somente posteriormente, com a publicação da *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert é que a questão da demonstração da completude, consistência e independência de um conjunto de axiomas se tornou uma prática comum.

Para falarmos de sua apresentação dos números inteiros, que é bastante distinta e não é tão simples quanto uma definição baseada em pares ordenados de naturais, precisamos mostrar primeiramente a sua definição recursiva da operação de adição.[49] Ela não se diferencia substancialmente da que foi apresentada dois anos antes, mas aparece de uma maneira mais "generalizada", o que acaba sendo importante: considera-se uma operação α realizada entre elementos de um conjunto s e a definimos a partir do conceito de sucessor $b+$ que foi "definido" pela axiomatização

1. $s \in K \ \wedge \ \alpha \ \in s\backslash s \ \wedge \ a \in s \Rightarrow a \ \alpha \ 1 = a \ \alpha$
2. $s \in K \ \wedge \ \alpha \ \in \ s\backslash s \ \wedge \ a \ \wedge \ b \in N \Rightarrow a \ \alpha \ (b+) = (a \ \alpha \ b)\alpha$

Em suas observações, Peano diz que

> $a + b$ representa aquilo que se obtém executando b vezes sobre a a operação +, ou seja o sucessor de a, da ordem b, ou seja, a soma de a e b. Novamente se a é um homem, e com ap indicamos "o pai de a", com $ap2$, $ap3$, ... indicaremos respectivamente o avô, o bisavô, etc. (Peano,1891, p. 95).

Após enunciar a ordem dos naturais, Peano apresenta a sua primeira definição para a construção dos números inteiros. Trata-se da definição do zero. Ele enuncia este objeto através de duas definições, uma geral que considera um conjunto s qualquer, e uma equivalente porém específica, que considera o conjunto N. Vejamos uma tradução esta última:

[49] Curiosamente, ao falar da definição dos inteiros e das frações como pares ordenados, Quine (1963, p. 120) alega que Peano teria definido frações em termos de pares ordenados em 1901. No entanto, como aponta Kennedy (1974, p. 390), Peano nunca definiu os números inteiros ou racionais de tal forma.

$$a \in N \Rightarrow a + 0 = a$$[50]

Logo em seguida, ele também define a função $\alpha -$, a inversa da função α aplicada sobre um elemento *y*. No contexto do livro, $x\alpha$ é a operação que toma o sucessor de *x* enquanto $x\alpha -$ tomará o antecessor de *x*.

$$a, b \in K \wedge \alpha \in a \backslash b \wedge y \in b \Rightarrow y\alpha - = \{x | x\alpha = y\}$$

E Peano introduz os números negativos em uma de suas observações. pela primeira vez, dando os primeiros sinais de que compreende esses entes como operações:

> O conjunto do sinal de inversão -, e do número positivo b é o que é chamado de número negativo. Então o sinal -5 possui o significado "inverta e repita cinco vezes". Portanto, se *xp* significa "o pai de *x*, a escrita *xp-2* significa o filho do filho de *x*," e se *x* é um número, *x* + *-5* significa" o que é obtido fazendo a próxima operação inversa de *x*, cinco vezes", ou seja, "o número que precede *x* de cinco casas." Não precisaremos introduzir nenhum novo sinal para indicar "número negativo", pois a notação -N é suficiente (Peano, 1891, p. 99).

Vejamos, finalmente, as definições de Peano para estabelecer o conjunto dos números inteiros.

1. $n = N \cup 0 \cup -N$[51]
2. $0 + 1 = 1$
3. $-1 + 1 = 0$
4. $a \in N \Rightarrow -(a + 1) + 1 = -a$

A primeira proposição mostra que Peano utiliza o simbolismo *n* para se referir aos números inteiros e este consiste na união entre os naturais, o zero e o conjunto dos números negativos, que ele havia anteriormente representado por -*N*.[52] Como ele mesmo explica em seguida, o propósito das proposições 2,3 e 4 é de estabelecer a ordem desses novos números. A proposição 2 diz que o sucessor do 0 é o 1, a segunda diz que o sucessor do -1 é o 0, e a quarta permite definir de maneira iterada o sucessor de todos os números negativos restantes. As operações de soma e subtração ficariam estabelecidas considerando-se a definição original de adição para números naturais e os números negativos como operações inversas.

A definição da multiplicação e potenciação entre números inteiros é definida de maneira bastante diferente e se baseia em um novo tipo de simbolismo para indicar uma iteração de operações, apesar de Peano apenas descrevê-lo verbalmente de maneira intuitiva e nunca oferecer uma definição propriamente dita:

$$a, b \in n \Rightarrow a \times b = 0[(+a)b]$$
$$a \in n. b \in N \Rightarrow a^b = 1[(\times a)b].$$

---

[50] Percebemos que a definição não satisfaz a sua concepção de definição.

[51] Posteriormente, Ugo Cassina, discípulo de Peano que publicou as *Obras Selecionadas do autor em três volumes entre 1957 e 1959*, aponta que o símbolo 0 deveria representar *i0*, o símbolo utilizado por Peano para indicar um conjunto composto pelo único elemento, 0. Não se poderia escrever N ∪ 0 ∪-N uma vez que 0 não representa um conjunto (Peano, 1957 apud Kennedy 1974, p. 390).

[52] Nota-se, no entanto, que Peano nunca define simbolicamente o que constitui o conjunto -N.

A definição 1[da multiplicação] é considerada geral, e aplicável a qualquer que seja o sinal de a e b. Pela definição, $a \times 3 = 0 + a + a + a$, isto é, $a + a + a$ qualquer que seja a, positivo ou negativo. Por sua vez, ´para obter $a \times (-3)$, deve-se realizar a operação $+a$ sobre 0, invertida, três vezes, isto é, a operação -a deve ser seguida três vezes e se obterá *0-a-a-a*. A regra de sinais se obteria imediatamente (Peano, 1891, p. 101). Peano ainda chega a atribuir a primeira prova rigorosa e "reduzida a silogismos" da comutatividade da multiplicação a Graßmann. Outra consideração interessante é que Peano traz uma crítica à definição tradicional de multiplicação que se encontra, por exemplo, no *Cours d'Analysis* de Cauchy (Peano, 1891, p. 101-102).

4.3.5. Abordagens posteriores de Peano: crítica ao princípio da permanência "tradicional" e reforço a uma ontologia restrita do número

O notável texto de Peano de 1891 não foi a última vez em que ele abordou a sua concepção de número e as demais classes numéricas. Trazemos aqui alguns recortes de abordagens posteriores que reforçam um dos pontos importantes que apresentamos: os números negativos -a, os números somados +a e as frações são entendidos como operações executáveis sobre números naturais. Sua abordagem seguinte dos números negativos veio em 1898, em seu *Formulario*.

> Seja a um número natural, então -a é uma operação que, aplicada a um número que não seja menor do que a, produz um número [...] Os símbolos $+N_0$ e $-N_0$ (P024) correspondem, mais ou menos, às palavras "números positivos" e números negativos", eles aparecem como operações…. O símbolo +a é equivalente à expressão "somar a" e -a significa "subtrair a"". Indo de acordo com o uso comum, chamamos essas operações de "números inteiros" e, pelas definições P025, 037, e 039 1, temos a coincidência formal dos números N_0 e os números positivos $+N_0$ (Peano apud. Kennedy, 1974, p. 391).

A passagem acima é reveladora por mostrar claramente que -a não somente é uma operação como só pode ser realizada sobre um número maior do que o próprio a, pois, caso contrário, obteríamos um número que não seria natural. Os números positivos e negativos seriam, portanto "abstrações" das operações de soma e subtração executáveis e, por convenção, estes passam a ser chamados de números inteiros. Por abstração entende-se que estes objetos operacionais se tornam entes em si que não necessitam mais estar operando sobre um número natural. Em um artigo onde ele comenta sobre essa seção do *Formulario*, Peano diz:

> Os assim chamados números negativos e frações são definidas como as operações de subtração e divisão. Portanto, elas retornam à mais remota antiguidade, e representam bem o uso que nós fazemos deles, a teoria resultante é muito simples. Eles são considerados dessa maneira em um número de textos, de uma maneira mais ou menos clara (Peano apud. Kennedy, 1974, p. 391).

Novamente, as frações são tidas como objetos operacionais. Trazemos ainda uma nota que Peano inclui em uma publicação de 1901, referente ao artigo que ele leu no Congresso Internacional de Filosofia em Paris. A sua concepção de frações como operações executáveis sobre

um número é colocada de maneira ainda mais reforçada e, conforme havíamos sinalizado anteriormente, Peano aponta que a fundamentação feita por Méray concorda com essa visão.

> Nós preferimos considerar *a/b* como representante de uma operação composta $\times\ a/b$, isto é, "multiplique por *a* e dívida por *b".* Os dois operadores *a/b* e *c/d* são iguais sempre que, aplicados ao mesmo número (um que torne as duas operações possíveis), elas dão resultados iguais [...].
>
> *E*ncontra-se essa maneira de considerar frações como operações em Méray, *Leçons sur L' Analyse Infinitesimale*, p. 2, e já publicada por ele em *Nouvelles Annalles de Mahématiques* (1889), p. 421. Essa ideia é a mais natural (Peano apud. Kennedy, 1974, p. 367).

Um esclarecimento mais concreto em relação à ontologia dos diferentes tipos de números é oferecido em seu artigo *Sui fondamenti dell' Analisi* (Dos Princípios da Análise). Peano aponta um problema linguístico que surge no processo de extensão do conceito de número e que finalmente explica a sua preferência por designar os demais objetos como operações: os adjetivos restringem o sujeito, isto é, determinam uma subclasse contida no sujeito, mas os adjetivos "inteiro" e "racional", que são atribuídos a "número", estendem o sujeito "número" que, originalmente, contém apenas os naturais. Possivelmente ecoando a visão de que os antigos gregos tiveram suas práticas distorcidas pelos modernos, Peano chega a alegar que tal prática não se encontrava em Euclides. Ele se deu pela busca recente em fazer do número algo além dos naturais por meio do princípio da permanência:

> essa prática, contrária ao uso comum, não se encontra em Euclides, ainda que alguns cálculos bastante interessantes com irracionais tenham sido desenvolvidos lá. É bastante recente. Consequentemente, desejou-se de toda forma fazer com que a expressão "número inteiro" indicasse um número, e assim o princípio da permanência foi criado por Hankel em 1867 (Peano, 1910 apud Kennedy, 1973, p. 225).

Após descrever as etapas do processo de extensão de número com o princípio, Peano aponta que ele alcançou seu apogeu com o artigo de Schubert na *Encyclopäedie*, sobre o qual já falamos na introdução. Peano critica a sua formulação original, na qual Schubert afirma que se deve "provar que para números em um sentido amplo, os mesmos teoremas valem para números no sentido estreito". Peano alega que, se todos os teoremas assim valessem, as categorias de todos os tipos de números seriam idênticas e se degenerarem em uma só: "os números fracionários são inteiros!" A correção da formulação do princípio teria vindo somente na edição em francês, onde se diz que se deve ser "guiado por uma preocupação em manter as leis formais tão quanto for possível". De acordo com Toader (2021), para Peano, o princípio da permanência serve como um "princípio de prática", isto é, ele funciona como um guia metodológico para favorecer a preservação de notações familiares na matemática sempre que possível, por razões de praticidade. Apesar de tal resolução, Peano encerra o assunto com uma afirmação que confirma que, apesar de se apoiar no princípio da permanência metodologicamente, o seu questionamento filosófico persiste, e os novos entes que são criados no processo não seriam números, mas pertenceriam a alguma outra categoria, como a das operações. Os únicos números seriam os números naturais.

> Os entes que consideramos a princípio, $-1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{-1}$, podem ser definidos buscando-os em uma categoria conhecida que os contenha. Eles surgem por abstração ou como operações (Peano apud Kennedy, 1973, p. 227).

4.3.6. Hilbert: defesa do método axiomático na aritmética em vez do método "genético".

O matemático alemão David Hilbert (1862-1943) é famoso pelas suas investigações acerca dos fundamentos da matemática e da lógica. No centro de seu programa para a resolução dos fundamentos da disciplina, encontramos o método axiomático. Nesta seção, buscaremos explicitar de que maneira a proposta de Hilbert para a fundamentação dos números se diferencia daquela proposta por Peano, apesar de ambos os nomes serem fortemente associados ao método axiomático. Fazemos isso com a intenção de responder a crítica feita por Kennedy em seu artigo, *The origins of Modern Axiomatics: From Pasch to Peano* (As Origens da axiomatização moderna: De Pasch a Peano), no qual ele alega que Hilbert teria se apropriado do método que já havia sido colocado em prática por Peano. A mesma crítica foi ainda mencionada por Segre (1998, p. 309), mas sem nenhum tipo de resposta.

Sua primeira investigação envolvendo o método é encontrada em seu famoso livro, *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria), de 1899, onde ele anuncia uma tentativa de apresentar um sistema axiomático para a geometria que seja *simples, completo e independente.* Para alcançar esse objetivo, Hilbert se utiliza de investigações meta geométricas sobre as relações lógicas entre as proposições iniciais como a construção de um modelo aritmético para demonstrar a independência e consistência relativa entre eles.

No ano seguinte, Hilbert aplicou o mesmo método axiomático na aritmética, por meio de em seu artigo *Über den Zahlbegriff (Sobre o conceito de número)* que foi publicado como parte da *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*[53]. A princípio, Hilbert aponta a diferença entre a maneira como os fundamentos da geometria e a aritmética costumavam ser apresentados até então: na geometria, o método axiomático é plenamente utilizado, isto é, assume-se a existência dos elementos primitivos (retas, pontos e planos) e relacionam-se estes elementos por meio de axiomas. Por outro lado, na aritmética, se procede por meio do que ele chama de "método genético". Deixaremos aqui a descrição completa de Hilbert dessa abordagem:

> Começando pelo conceito do número 1, geralmente imaginam-se os demais inteiros positivos racionais 2,3,4,... como originários do processo de contagem, e desenvolvem-se suas leis de cálculo; então, ao requerer que a subtração seja universalmente aplicável, obtêm-se os números negativos; em seguida definem-se frações, digamos, como um par de números — de modo que toda função linear possua um zero; e finalmente define-se o número real como um corte ou uma sequência fundamental, assim alcançando o resultado que toda função racional indefinida (e de fato toda função contínua indefinida) possua um zero. Podemos chamar esse método de introdução do conceito de número de método

[53] "Relatório anual da Associação Alemã de Matemáticos"

> genético, pois o conceito mais geral de número real é engendrado pela extensão sucessiva do conceito simples de número (Hilbert, 1900, p. 180).

Hilbert se refere, sem maiores detalhes, ao método da *Zahlbereichserweiterung* e sugere que uma investigação seja feita para que se saiba se este seria de fato o único método possível para o tratamento da aritmética. Sua opinião é de que o método axiomático deveria ter primazia.

> Apesar do grande valor pedagógico e heurístico do método genético para a apresentação final e fundamentação lógica completa de nosso conhecimento, o método axiomático merece a primeira posição (Hankel, 1900, p. 181).

Com isso, Hilbert apresenta então os cinco axiomas que, juntos, caracterizam o "sistema" dos números reais. O questionamento que levantamos é: Kennedy estaria correto ao alegar que Hilbert teria atribuído o método axiomático a si sem mencionar que Peano já havia seguido o mesmo método anteriormente?

> Hilbert tampouco menciona Peano mesmo em sua apresentação dos postulados dos números reais [9]. De fato, (sem nomeá-lo, ele rotula o desenvolvimento de Peano dos números reais como o "método genético" ao mesmo tempo em que reserva o rótulo "método axiomático para sua própria apresentação! (Kennedy, 1972, p. 135).

Por um lado, julgamos que, se nos atermos às descrições do próprio Hilbert, seria justo dizer que o método de Peano para a aritmética seria, sim, axiomático. O entendimento de Hilbert do método com base na suposição de elementos básicos e axiomas que serviriam para descrever as relações entre esses elementos se assemelha bastante com aquilo que foi descrito por Peano e a formalização da aritmética proposta por ele elimina a necessidade de se recorrer a ideias de contagem. Em outras ocasiões, Hilbert reitera esses aspectos do método axiomático, colocando-o novamente em uma posição próxima à de Peano. Há ainda outras semelhanças entre as propostas de Peano e Hilbert para a axiomatização, como a importância dada à formalização completa da teoria e sua relação com a busca pela simplicidade como um guia metodológico.[54] Finalmente, o próprio Hilbert chegou a elogiar Peano deliberadamente pela sua contribuição para o método axiomático, ainda que isso tenha ocorrido posteriormente, em 1917, em papéis associados ao seu curso em Göttingen naquele ano (Abrusci apud Segre, 1998, p. 311).

Apesar destes apontamentos, é importante destacar que, para além das descrições dadas por Hilbert do seu método axiomático aplicado aos números, a sua realização prática evidencia uma diferença fundamental entre ele e Peano. Conforme descrevemos acima, Hilbert não axiomatiza os números naturais para depois "construir" os demais conjuntos numéricos a partir deles, como faz Peano. Para o matemático italiano, a ideia de definição e sua aplicação prática no estabelecimento dos diferentes conjuntos numéricos aponta que ele de fato segue um aspecto relevante do que Hilbert descreve como sendo o "método genético". É necessário seguir a hierarquia: primeiro se introduzem as ideias primitivas e os axiomas dos números naturais para, com isso, construir (definir) os inteiros e assim os demais conjuntos sucessivamente a partir desses

[54] Há ainda muitas diferenças fundamentais entre os dois autores se formos além das questões aqui trazidas. Mais sobre as relações e diferenças entre Peano e Hilbert podem ser encontrado em Segre (1998, p. 307-313).

elementos novos. O fato de os demais conjuntos "numéricos" não envolverem ideias que não possam ser expressas por meio das ideias primitivas dos números naturais significa que eles não precisam nem devem ser automatizados.

A prática de Hilbert se diferencia claramente dessa abordagem. Pode-se axiomatizar os números reais, tal como ele faz na prática, sem a necessidade de construir anteriormente os naturais, inteiros e racionais. Para Hilbert, os reais caracterizam-se pelo sistema de coisas suas relações são descritas pelos axiomas e seria mesmo justo dizer que, nesse sentido, Hilbert aproxima-se de uma abordagem moderna segundo a qual seria possível axiomatizar a existência dos números reais como um "corpo ordenado completo" sem a necessidade teórica, portanto, de construí-lo a partir dos naturais. Em seu artigo de 1904, Hilbert deixa esse ponto mais claro ao insinuar que os números naturais e os reais possuem suas próprias axiomáticas e que isso serviria para defender a cidadania dos números reais contra os ataques proferidos por matemáticos como Kronecker.

> Em particular, em se tratando do axioma da completude, ele expressa o fato de que a totalidade dos números reais contém, no sentido de uma correspondência um para um entre elementos, qualquer outro conjunto cujos elementos satisfazem também os axiomas que o precedem; considerando-se assim, o axioma da completude também se torna uma estipulação exprimível por fórmulas construídas como as que se encontram acima, e os axiomas para a totalidade dos números reais não se diferem qualitativamente em qualquer respeito de, digamos, os axiomas necessários para a definição dos inteiros. No reconhecimento deste fato se encontra, creio eu, a verdadeira refutação da concepção dos fundamentos da aritmética associados a L. Kronecker [...] (Hilbert, 1904, p. 185).

Segundo Hilbert, Kronecker teria sido "dogmático" ao assumir os números naturais como a verdadeira fundamentação da aritmética por estes serem dados imediatamente a nós. Com a abordagem axiomática oferecida por Hilbert, as noções de natural e real seriam igualmente "simples" e qualquer processo infinito envolvido na criação dos números reais seria eliminado, conforme ele aponta já em 1900 (Hilbert, 1900, p. 184). Com essa nova concepção, Hilbert parece sugerir que a soberania ontológica dos números naturais é definitivamente perdida e, talvez por consequência disso, o método genético que parte deles se torna desnecessário. Como vimos na seção anterior, Peano acreditava também que "número" se refere apenas aos naturais e os demais são dependentes, isto é, são, potencialmente, entendidos como operações abstraídas sobre eles. Sendo assim, se entendermos o método axiomático da aritmética neste sentido mais preciso conforme a prática de Hilbert e o método genético como algo equivalente à *Zahlbereichserweiterung* (para além de como os números naturais são introduzidos neste processo), verificamos uma importante proposta transformadora nos fundamentos da aritmética com Hilbert, potencialmente relacionada a uma atitude diferente perante a ontologia dos diferentes "entes numéricos".

5. Síntese

A presente tese contribui com novos resultados que revelam a importância que uma nova conceitualização de número carregou em meio às novas noções de rigor que se estabeleciam na matemática ao longo do século XIX - em particular no sentido de colocar a análise sob bases mais sólidas e na axiomatização da matemática. Pode-se dizer que o movimento de transição desperta juntamente à Revolução Francesa, em particular, nas abordagens algebrizantes que se manifestam nos primeiros anos da *École Polytechnique*. Posteriormente, no entanto, o foco do movimento muda para a Alemanha, particularmente na Prússia, onde se desenvolve sempre mais fortemente a abordagem de algebrização. A produtividade dos *practitioners* como Förstemann e Ohm merecem destaque. Desde o último terço do século se percebe a entrada de um novo país: a Itália, representada por nomes como Pincherle, Dini e Peano. Já na França, encontramos apenas a abordagem isolada de Méray que, curiosamente, demonstrou-se contrário às novas abordagens quando estas adentraram o território francês. Já no território britânico, com tanta tradição na matemática, houve somente um breve período com algumas contribuições no início do século e não teve um papel preponderante no estabelecimento do novo rigor. Houve contribuições pontuais que merecem destaque, como a conceitualização dos números reais e complexos por Hamilton, que foi altamente influente, mas elas não se estabeleceram em meio à transformação epistemológica e conceitual que apresentamos ao longo dos capítulos, o que se pode perceber, por exemplo, pela falta de menção a autores ingleses na análise da segunda metade do século.

De acordo com os resultados apresentados no capítulo 1, apontamos o papel essencial da epistemologia na resolução de conflitos conceituais que se encontravam na matemática: a aritmética dos números passa a ser entendida a partir de relações abstratas e não mais em termos de substâncias. Conceber e operar com números negativos foi, ao longo do tempo, um ponto polêmico entre matemáticos e estudiosos em geral e somente a separação definitiva entre quantidades e os números foi capaz de resolver o problema. Com a separação, a *Zahlbereichserweiterung* surge como uma ideia-chave no sentido de oferecer uma metodologia alternativa para a fundamentação das operações dos demais tipos de números.

No contexto da análise matemática, enxergamos diferentes conflitos cuja resolução teve de percorrer uma elaboração nova dos números irracionais, não exatamente os reais, tal como se destaca na historiografia. Damos destaque especial para os novos resultados que obtivemos sobre a fundamentação da aritmética por Weierstraß, que se baseia em uma reveladora concepção alternativa de “números complexos”. Bastante interessado na teoria das funções elípticas, Weierstraß sugere fortemente que sua verdadeira intenção se tratava em estabelecer os números complexos como a última das formas numéricas, de modo que a fundamentação dos “números reais” não recebe o mesmo destaque por ele. Conforme apontamos, sua abordagem foi pouco reproduzida pela comunidade matemática em âmbito internacional.

6. Bibliografia

Fontes

Bibliothek der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich (Suiça).

Hs 707:2. Richard Dedekind, Integral- und Differentialrechnung, Vorlesung von Julius Wilh. Richard Dedekind und von Heinrich Durège, 1861-62. Vorlesungsnachschrift von Heinrich Berchtold

Library of the University of Illinois at Urbana-Champaign:

Einleitung in die Theorien der analytischen Funktionen. Von Prof. Dr. Weierstrass. Nach den Vorlesungen vom s.S. 1874 ausgearbeitet von G. Hettner (Sigla: LUIAC 1874)

Universitätsbibliothek Bielefeld, Rara:

Einleitung in die Theorie der Analytischen Funktionen (nach Weierstraß). Wintersemester 1884-85. [anônimo] (Sigla: UB Bi 1884-85)

Publicações

Ampère, André-Marie. *Précis de calcul différentiel et de calcul intégral*. [S.I.]: [s.n.], 1824.

André-Marie Ampère, *Mémoire: Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à l'expression finie des termes qu'en néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque,* in *Journal de l'École Polytechnique*, tome 6, *cahier* 13, pp. 148–181. 1806.

Barany, Michael. God, King, and Geometry: Revisiting the Introduction to Cauchy's Cours d'Analyse. *Historia Mathematica,* v. 38, n.3, pp. 368-388, 2011.

Barany, Michael. Stuck in the Middle: Cauchy’s Intermediate Value Theorem and the History of Analytic Rigor, *Notices of the American Mathematical Society, v.60, n.10, pp. 1334-1338, 2013.*

Bekemeier, Bernd. *Martin Ohm (1792-1872): Universitäts- und Schulmathematik in der neuhumanistischen Bildungsreform*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1987.

Biermann, Kurt-Reihard . *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810-1910*. Berlin:Akademie-Verlag. 1973.

Biermann, Kurt-Reihard. *Dedekind, (Julius Wilhelm) Richard*. Complete Dictionary of Scientific Biography. Encyclopedia.com, 2022. Disponível em https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/dedekind-julius-wilhelm-richard. Acesso em 15, 08, 2022.

Biermann, Kurt-R. Weierstrass. In: Gillispie. Dictionary of Scientific Biography. Vol. 2. New York: Scribner, 1975.

Biermann, Otto. *Theorie der Analytischen Functionen*. Leipzig: Teubner, 1887.

Boniface, Jacqueline; Schappacher, Norbert. Sur le Concept de nombre en mathematique' Cours inedit de Leopold Kronecker. À Berlin (1891). *Revue d'histoire des mathématiques*, v. 7, p. 207-275, 2001.

Boniface, Jacqueline. *Leopold Kronecker's conception of the foundations of mathematics*, in *Philosophia Scientiæ* CS. 5, pp. 143-156. 2005.

Boniface, Jacqueline. The Concept of Number from Gauss to Kronecker. In: Goldstein, Catherine et. al. *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's disquisitiones Aritmeticae*. New York: Springer, 2007.

Bottazzini, Umberto, Dalmedico, Amy. *Changing Images in Mathematics From the French Revolution to the New Millenium*. London: Routledge. 2001.

Bottazzini, Umberto. *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer, 1986.

Bourbaki. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Masson:Paris, 1984.

Boyer, Carl. A History of Mathematics, New York: Wiley, 1991.

Cantor, Georg. Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen*, v. 5, n. 1, p. 123-132, 1872.

Cauchy, Augustin-Louis. *Curso de Análise de Cauchy*. Tradução de Tatiana Roque & Gert Schubring. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

Cassirer, Ernst. Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Berlin: Verlag Bruno Cassirer, 1910.

Collins, Eduard. *Grundlinien des typischen Kalkuls*. St. Petersburg: Kaiserliche Akademie der Wissenschaften, 1823.

Dantscher, Victor von. *Vorlesungen über die Weierstrasssche Theorie der irrationalen Zahlen*. Leipzig und Berlin: Teubner, 1908.

Darboux, Gaston. Mémoire sur les fonctions discontinues, *Annales scientifiques de l'É.N.S.* v.4, p. 57-112, 1975.

d'Alembert, Jean & Diderot, Denis. *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Metiers. Tome XIII. Par une Societé des Gens de Lettres.* Paris : Briasson, David, Lebreton, Durand, 1751.

Dedekind, Richard. Über die Einführung Neuer Funktionen in der Mathematik; Habilitationsvortrag. In: Dedekind, Richard. *Gesammelte mathematische Werke*, v.3, p. 428-438. Braunschweig: Vieweg & Sohn, 1832.

Dedekind, Richard. *Stetigkeit und Irrationalen Zahlen*. Braunschweig: Friedrich Bieweg und Sohn, 1872.

Dedekind, Richard. Über die Einführung Neuer Funktionen in der Mathematik; Habilitationsvortrag. In: Dedekind, Richard. *Gesammelte mathematische Werke, v.3, p. 428-438.* Braunschweig: Vieweg & Sohn, 1932.

Dini, Ulisse. *Fondamenti per la Teorica Delle Funzioni di Variabili Reali*. Pisa: T. Nistr & C. 1878.

Dugac, Pierre. Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite. Revue d'histoire des sciences et de leurs applications. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications,* v. 23, n. 4, p 333-350; 1970

Dugac, Pierre. Éléments d'analyse de Karl Weierstrass. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 10, p. 41-176. 1973.

Edwards, Harold. *Kronecker's views on the foundations of mathematics*, in *The history of modern mathematics* Vol. I, p. 67-77. Boston : 1989.

Enfert, Renaud d'. L'enseignement mathématique dans le primaire et le secondaire au début du XXe siècle - Vers une culture commune?. *Lycées, lycéens, lycéennes, deux siècles d'histoire*, p. 247-255, 2005.

Ewald, William. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics. Vol. II.* New York: Oxford University Press, 1996.

Ferreira, Débora. *Descobrindo e Analisando Práticas Matemáticas Desconhecidas - o Caso dos "Números Complexos"*. Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2018.

Ferreirós, José. *Labyrinth of Thought: A history of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Basel: Springer, 1999.

Ferreirós, José. Richard Dedekind (1888) and Guiseppe Peano (1889), Booklets on the Foundations of Arithmetic. In: *Grattan-Guinness et al. Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940.* London: Elsevier, 2005.

Förstemann, Wilhelm. *Ueber den Gegensatz positiver und negativer Grössen.* Nordhausen: Happach, 1817.

Förstemann, Wilhelm. *Bemerkungen über verschiedene Begriffe und Theorien aus der allgemeinen Grössen- und Zahlenlehre*. Schulprogramm Gymnasium Danzig, 1825.

Förstemann, E. W. *Das leben von Wilhelm August Förstemann*. Dresden: C. Heinrich, 1891.

Freudenthal, Hans. Zur Geschichte der vollständigen Induktion. *Archives internationales d'histoire des sciences,* v. 22 p. 17-37, 1953.

Frege, Gottlob. *Grundgesetze der Arithmetik*. Band II. Jena: Hermann Pohle, 1903.

Gauß, Carl. Selbstanzeige von Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda. In: *Werke*, v.2. *p. 169-178, 1863.*

Graßmann, Hermann. *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die abrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre von Magnetismus und die Ktystallonomie erlautert.* Leipzig: Otto Wigand, 1844.

Graßmann, Hermann. *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Erster Teil: Arithmetik*. Berlin: Enslin, 1861

Graßmann, Hermann. *Die Ausdehnungslehre. Vollstanding und in strenger Form bearbeitet*. Berlin: Enslin, 1862.

Grattan-Guinness, Ivor. Bolzano, Cauchy and the “New Analysis” of the Early Nineteenth Century. *Archive for History of Exact Sciences* C.6, p.372-400, 1970.

Gray, Jeremy. *Plato's Ghost: the Modernist Transformation of Mathematics.* Princeton: Princeton University Press, *2008.*

Grimberg, Gérard. Gauss, os resíduos Biquadráticos e a representação geométrica dos números complexos. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 14, n. 29, p. 145-166, 2014.

Hankel, Hermann. *Vorlesungen über komplexe Zahlen und Funktionen. I Theil: Theorie der komplexen Zahlensysteme*. Leipzig: Voss, 1867

Heijenoort, P. *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879 -1931*. Cambridge: Harvard University Press, 1967.

Jahnke, Hans. Motive und Probleme der Arithmetisierung der Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts - Cauchys Analysis, in der Sicht des Mathematikers Martin Ohm. *Archive for History of Exact Sciences*, n.2, v. 37, p. 101-182, 1987.

Kennedy, Hubert. The origins of modern mathematics: Pasch to Peano. *American Mathematical Monthly*, n.2, v.79, p. 133-136, 1972.

Kennedy, Hubert. Peano's Concept of Number. *Historia Matematica*, n.1, p. 387-408, 1974.

Kennedy, Hubert. *Life and Works of Giuseppe Peano: Definitive Edition*. Concord: Peremptory publications, 2006.

Klein, Felix. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.* Berlin: Springer, 1926.

Knus, M.; Scharlau, W. *Vorlesung über Differential- und Integralrechnung 1861/62 in einer Mitschrift von Heinrich Berchtold*. Wiesbaden: Vieweg, 1985.

Kossak, Ernst. *Die Elemente der Arithmetik,* Programm des Friedrichs-Werder Gymnasiums. Berlin: Nauckcschen buchdruckerei 1872.

Lewis, Albert. Hermann G. Graßmann, *Ausdehnungslehre, first edition (1844)*. In: *Grattan-Guinness et al. Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940.* London: Elsevier, 2005.

Mainzer, Klaus. Real Numbers. In: *Numbers*. Tradução: H.L.S. Orde. Springer: New York, 1991.

Mittag-Leffler, Gösta. *Sur les fondements arithmétiques de la théorie des fonctions d'après Weierstrass*. In: Mittag-Leffler, Gösta.; Fredholm, I. Comptes rendu Congrès des mathematiciens tenu à Stockholm 22-25 Septembre 1909. p. 10-31. Leipzig/Berlin: Teubner, 1910.

Méray, Charles. *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données.* In: *Revue des sociétés savantes.* Paris: Imprimerie Impériale, 1869.

Méray, Charles. *Nouveau Précis D'Analyse Infinitésimale*. Paris: F. Savy, 1872.

Méray, Charles. Théorie élémentaire des fractions dégagée de toute considération impliquant soit la subdivision de l'unité abstraite, soit l'intervention des grandeurs concrètes. Son application à la spécification de ces dernières. *Nouvelles Annales de Máthématiques.* v. 8, série.3, p. 421-435, 1899.

Méray, Charles. *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques. V.1, Paris: Guathier-Villars,* 1894.

Noble, Eduardo. *The Rise and Fall of the German Combinatorial Analysis*. New York: Springer, 2022.

Novy, Lubos. *Origins of Modern Algebra.* Leyden: Noordhoff & Prague: Academia, 1973.

Ohm, Georg Simon. *Grundlinien zu einer zweckmäßigen Behandlung der Geometrie zu höheren Bildungsmitteln an vorbereitenden Lehranstalten*. Erlangen: Palm & Enke, 1817

Ohm, Martin *De elevatione serierum infinitarum secundi ordinis ad potestatem exponentis indeterminati*. Erlangae: typis Adolphi Ernesti Junge. 1811.

Ohm, Martin. *Elementarzahlenlehre zum Gebrauch für Schulen und Selbstlernende*. Erlangen: Palm & Enke, 1816.

Ohm, Martin. *Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik*: *Erster Theil*. Berlin: Riemann, 1828

Ohm Martin. Ohm, Martin. *Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik: Zweiter Theil*. Berlin: Riemann, 1829a

Ohm, Martin. *Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik*: *Dritter Theil*. Berlin: Riemann, 1829b

Ohm, Martin. A.L. Cauchy's Lehrbuch der Mathematischen Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von C.L.A. Huzler. *Leipizig Lieratur-Zeitung*, v. 2, n. 255, p. 2033-2038, 1829c.

Ohm, Martin. *Der Geist der Mathematischen Analysis und ihr Verhältniss zur Schule*. Berlin, Dunder, 1842.

Ozigova, Elena Petrovna. *Matematika v Petersburgskoj Akademii Nauk v konce XVIII – pervoj polovine XIX*. Leningrad: Nauka, 1980.

Peano, Giuseppe. *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita*. Torino: Bocca, 1889.

Peano, Giuseppe. Le definizioni per astrazione. In: *Bollettino della Mathesis*. Pavia: Fratelli Fusi, 1915.

Peano, Giuseppe. Le definizioni in matematica, in *Periodico di matematica*, s. 4., v. 1, n. 8, p. 175-189., 1921

Peano, Giuseppe. Sui fondamenti della geometria. In: *Opere Scelte*, v.3. *p. 115-157, 1957.*

Peano, Giuseppe. Sui concetto di numero. *Rivista di matematica*, v.1, p. 87-102; 256-67. 1891.

Pringsheim, Alfred. *Irrationalzahlen und konvergenz unendliche prozesse*. In: Meyer, W. et al. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen V.1-1, p. 47-146. Leipzig: Teubner, 1898.

Risi, Vincenzo De. *The development of Euclidean axiomatics: The systems of principles and the foundations of mathematics in editions of the Elements in the Early Modern Age,* in *Archive for History of Exact Sciences, n. 70, pp. 591-676, 2016.*

Robinson, Albert. *Méray, Hughes Charles Robert*. Complete Dictionary of Scientific Biography. Encyclopedia.com, 2022. Disponível em https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/meray-hugues-charles-robert. Acesso em 20, 08, 2021.

Roque, Tatiana. História da Matemática - Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Rothe, Heinrich August & Martin Ohm (1814). *Solutio problematis summe memorabilis atque generalis ad diuisionem polygonorum per diagonales spectantis*. Erlangen: [s.n.], 1814.

Schubert, Hermann. Grundlagen der Arithmetik. In: Meyer, W. et al. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen v.1-1, p. 1-27. Leipzig: Teubner, 1898.

Salazar, Michel. *Rupturas no estatuto dos números negativos - o caso da Inglaterra (1630 - 1830).* Dissertação de mestrado. Rio de Janeiro, UFRJ/ IM, 2019.

Schubring, Gert. *The Conception of Pure Mathematics as an Instrument in the Professionalization of Mathematics, Social History of Nineteenth Century Mathematics*, ed. Herbert Mehrtens, Henk Bos, Ivo Schneider, p. 111-134. Basel: Birkhäuser, 1981.

Schubring, Gert. D*as mathematische Leben in Berlin. Zu einer entstehenden Profession an Hand von Briefen des aus Erlangen stammenden Martin Ohm an seinen Bruder Georg Simon. Erlanger Bausteine zur Fränkischen Heimatforschung*, Jahrbuch 30, pp.221-249, 1983.

Schubring, Gert. Martin Ohm und Friedrich August Pfeiffer. Eine Ergänzung zu "Das Mathematische Leben, *in Berlin. Erlanger Bausteine zur Fränkischen Heimatforschung*, Jahrbuch 31, pp. 203-205, 1984.

Schubring, Gert. The Cooperation Between Hermann and Robert Graßmann on the Foundations of Mathematics. in Schubring, Gert (org). *Hermann Günther Graßmann (1809-1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar*. New York: Springer, p. 59-70, 1996.

Schubring, Gert. *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17-19th Century France and Germany.* New York: Springer, 2005.

Schubring, *Gert.* Hermann Günther Graßmann (1809–1877): Ein vielseitiger Innovator. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, ed. 17, p. 177-185, 2009

Schubring, Gert. *Os números negativos - exemplos de obstáculos epistemológicos?* São Paulo: Livraria da Física, *2012*

Schubring, Gert. Antagonisms between German states regarding the status of mathematics teaching during the 19th century: processes of reconciling them. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, v.4, n.4, p. 525-535, 2012.

Schubring, Gert. *Tentativas de estabelecer o conceito de número como fundamento para cursos de análise*, in *Caminhos da Educação Matemática*, v. 3, n. 1, p. 111-125, 2015.

Schubring, Gert. A biografia de Argand: as lendas e as fontes. *Revista do professor da matemática*, ano *36*, n. 95, p. 2-8. 2018a.

Schubring, Gert. *Os números negativos – Exemplos de obstáculos epistemológicos?* Segunda edição. Série: História da Matemática para Professores. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018b.

Schubring, Gert. Interactions between epistemologies of mathematics and educational systems - the emergence of mathematical communities according to cultures and states in 19th century Europe. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, v. 4, n. 1, p.1-16, 2021.

Schubring, Gert. Salazar, Michel. Lima, Débora. The publication of Weierstraß's number conception in 1872 and its significance (in preparation).

Segre, Michael. Peano's Axioms in their Historical Context. *Archive for History of Exact Sciences*, v.40, n. 3-4, p. 201-342. 1994.

Spezialli, Pierre. *Dini, Ulisse*. Complete Dictionary of Scientific Biography. Encyclopedia.com, 2022. Disponível em https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/dini-ulisse. Acesso em 20, 07, 2023.

Stammbach, Urs. Gauß und Dirichlet – Eine Episode. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, n.21, p.182-188, 2013.

Toader, Iulian. Permanence as a principle of practice. *Historia Mathematica*, v. 54, p. 77-94, 2021.

Ullrich, Peter. *Einleitung in die Theorie der Analytischen Funktionen. Vorlesung Berlin 1878, in einer Mitschrift von Adolf Hurwitz, bearbeitet von Peter Ullrich*. Wiesbaden: Springer, 1988.