UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

O ÉTER E A ESTRUTURA DA MATÉRIA: FUNDAMENTAÇÃO DOS MODELOS ATÔMICOS DE J. J. THOMSON.

DIEGO DIAS UZÊDA

Rio de Janeiro
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

O éter e a estrutura da matéria: fundamentação dos modelos atômicos de J. J. Thomson

Diego Dias Uzêda

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática — PEMAT, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro — UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física

Orientadora: Penha Maria Cardozo Dias

Rio de Janeiro

Março 2022

O éter e a estrutura da matéria: fundamentação dos modelos atômicos de J. J. Thomson

Diego Dias Uzêda

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática — PEMAT, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro — UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

Aprovada por:

Profa. Dra. Penha Maria Cardozo Dias
(Presidente)

Prof. Dr. Olival Freire Junior
(UFBA)

Prof. Dr. Ricardo Avelar Sotomaior Karam
(University of Copenhagen)

Prof. Dr. Carlos Farina de Souza
(UFRJ)

Prof. Dr. Carlos Eduardo Magalhães Aguiar
(UFRJ)

Rio de Janeiro

Março 2022

U99é Uzêda, Diego Dias
O éter e a estrutura da matéria: fundamentação dos modelos atômicos de J.J.Thomson / Diego Dias Uzêda -- Rio de Janeiro, 2022.
165 f.
Orientadora: Penha Maria Cardozo Dias
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Ensino da Matemática, 2022.
1. éter. 2. tubo de Faraday. 3. átomo de Thomson. 4. anéis de vórtice. 5. J.J.Thomson. I. Dias, Penha Maria Cardozo. II. O éter e a estrutura da matéria: fundamentação dos modelos atômicos de J.J. Thomson.

Resumo

O éter e a estrutura da matéria: fundamentação dos modelos atômicos de J. J. Thomson

Diego Dias Uzêda

Orientador: Penha Maria Cardozo Dias

Resumo da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

Na tese argumentamos que os modelos hidrodinâmicos de anéis de vórtice, desenvolvidos por Joseph John Thomson foram a base teórica de seu modelo atômico. A descoberta de seus corpúsculos permitiu-lhe conciliar anéis em um éter contínuo com a carga discreta preconizada pela eletrólise. O mecanismo essencial para desenvolvimento da teoria foram os tubos de Faraday. Esses tubos, tiveram diferentes significados, por autores diferentes, dependendo do contexto e do problema tratado. A tese ainda faz uma revisão do corpo conceitual do eletromagnetismo criado a partir do éter. Ela também revê a incorporação dos modelos hidrodinâmicos nas teorias de éter, o que constituiu a base das teorias de vórtices.

Palavras-chave: éter, tubo de Faraday, átomo de Thomson, anéis de vórtice, J.J.Thomson.

Abstract

The ether and the structure of matter: foundation of J. J. Thomson's atomic models

Diego Dias Uzêda

Orientador: Penha Maria Cardozo Dias

Abstract da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ensino e História da Matemática e da Física.

In this thesis we argued that the hydrodynamic models of vortex rings, developed by Joseph John Thomson, were the theoretical basis of his atomic model. The corpuscles discovered by him made it possible to reconcile the continuous ether with a discrete charge, as demanded by the phenomenon of electrolysis. Faraday tubes were the essential mechanism in the theory. These tubes acquired different meanings by different authors, depending on the context and the problem that was addressed. The thesis also reviews the conceptual body of the electromagnetic theory that issued from the ether. It also reviews the embedding of hydrodynamic models into aether theories, which formed the basis of vortex theories.

Keywords: ether, Faraday's tube, Thomson's atom, vortex ring, J.J.Thomson.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Cefet-RJ, instituição a qual faço parte.

Agradeço muito à Professora Penha Maria Cardozo Dias, que foi mais do que uma orientadora incansável, motivadora e inspiradora, ela foi uma mestre que, além de História da Física, me ensinou sobre o que é parceria. Um exemplo de pessoa que levarei por toda minha vida.

Agradeço aos membros e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PEMAT) da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Agradeço, também, aos professores do programa que estiveram sempre dispostos em compartilhar sua sabedoria comigo e os demais colegas.

Agradeço a Professora Marta Barroso, pelas conversas no café do "Anjinho" e sua escuta ativa. Além disso, agradeço por ter conseguido um incrível espaço de estudo e convivência para os alunos de doutoramento da linhas de Ensino e História da Física, dentro do Instituto de Física da UFRJ, apelidado carinhosamente de "cafofo".

No "cafofo" tive o prazer de convier com grandes amigos e amigas: Dudu (Eduardo Gama), Karlita (Karla Silene), Huguito (Hugo Detoni) e Dani (Daniele). Sou grato por ter tido vocês comigo nessa jornada.

Gostaria de agradecer ao queridos Magno Luiz, Leandro Silva, Chaves Jansley e Daniel Martins pelo apoio e conversas. Ao Otávio Fossa por toda consultoria sobre LaTeX .

Serei sempre grato ao meu pai, Carlos Henrique Barcellos Uzêda, que me deixou com suas boas lembranças; Maria da Conceição Dias Uzêda, minha mãe e ao meu irmão Cleber Dias Uzêda, que mesmo longe sempre me apoiaram.

Por fim, agradeço à minha filha Helena Estellita Uzêda e ao meu filho Vinícius Estellita Uzêda por estarem sempre comigo e serem parte de mim. À minha esposa, minha amada e minha vida, Letícia de Souza Estellita Pessôa, o meu reconhecimento e agradecimento por ser minha companheira incansável, por somar seus sonhos aos meus, por todo carinho, paciência e apoio. Sem vocês, nada faria sentido.

Sumário

Sumário **viii**

1 Introdução **1**

2 O eletromagnetismo britânico **6**

2.1 Uma nova fenomenologia 7

2.2 Caracterização do campo e as linhas de força 11

2.3 Os tubos e seu abandono 16

2.3.1 As configurações magnéticas propostas por W. Thomson 17

2.3.2 *On Faraday's Lines* 21

2.3.3 *On Physical Lines* 32

2.3.4 *Dynamical Theory* 41

2.3.5 *Treatise* 43

3 A teoria dos anéis de vórtices e o átomo **52**

3.1 Vorticidade 54

3.2 O átomo de vórtice 65

3.3 O éter constitui a matéria 73

3.3.1 Os nós 74

3.3.2 Uma analogia para química 77

4 O átomo de vórtice de J. J. Thomson **80**

4.1 "On Motion of Vortex Rings" 82
4.1.1 Estabilidade de um anel de vórtice (Parte I) 86
4.1.2 Interação entre dois anéis de vórtices livres (Parte II) 93
4.1.3 Anéis de vórtices ligados e sua estabilidade (Parte III) 97
4.1.4 Os elementos químicos (Parte IV) 109

5 Os tubos abertos **117**

5.1 Os tubos de Faraday (ou de J. J. Thomson?) 121
5.2 O campo elétrico e o magnético 123
5.3 Descargas elétricas 131
5.4 O átomo 134
5.5 Uma proposta de categorização dos elementos 139

6 Considerações finais e reflexões **143**

Referências bibliográficas **146**

Capítulo 1

Introdução

Entre os físicos, há um discurso tácito, no qual o éter é entendido, apenas, como um substrato que possibilitava a propagação da luz, sendo inteiramente abandonado, após os experimentos de Albert Abraham Michelson e Edward Williams Morley, no final do século XIX. Ademais, ainda dentro desse discurso, considera-se que o éter foi provado ser inexistente e relegado ao ostracismo pela Teoria da Relatividade, de Einstein, no início do século XX. O éter foi muito mais que um suporte para a propagação da luz e tão pouco foi abandonado subitamente, o que motiva a reflexão sobre a sua importância no desenvolvimento da Física. Esta tese mostra que o éter impulsionou programas que ajudaram a elaborar uma teoria da matéria.

O éter apresenta-se, ao longo da história, em diferentes formas e estruturas que respondem a uma fenomenologia e a um problema sob análise, tornando necessário a delimitação do estudo. Assim, nesta tese, o recorte temporal é limitado ao desenvolvimento do Eletromagnetismo no Reino Unido, entre os meados do século XIX e o princípio do século XX. Dentro desse contexto, aqueles envolvidos no desenvolvimento da teoria eletromagnética tinham como proposta manter — diferentemente de uma teoria balizada pela ação a distância — fidelidade a um modelo mecânico capaz de intermediar as interações eletromagnéticas.[1]

[1] O éter luminífero, que vinha sendo tratado desde Fresnel, tinha outros objetivos.

Em uma corrente de pensamento, em que as interações eram intermediadas, as ferramentas desenvolvidas (matemática e modelos físicos) consideravam um éter de características idênticas às de um fluido ideal; o estudo dos fenômenos elétrico e magnético através da mecânica dos fluidos mostra que tubos de vórtice foram uma poderosa ferramenta na consolidação da teoria eletromagnética e da teoria atômica. Nesse cenário, os tubos de Faraday foram o elemento basilar na fundamentação da teoria eletromagnética e da estrutura atômica. A história dessa fundamentação é escrita pelos diferentes significados dados aos tubos, seja por Michael Faraday, William Thomson, Peter Gabriel Tait, James Clerk Maxwell e por Joseph John Thomson, mostrando como o éter imaterial pôde justificar a constituição da matéria.

As linhas de força propostas por Faraday concretizam as interações elétricas e magnéticas; posteriormente, na interpretação dada por Maxwell, as linhas ganham volume e se tornam tubos em um fluido ideal. Em *Faraday Lines*, Maxwell mostra como os tubos de Faraday podem ser usados para matematizar as teorias elétrica e magnética; Maxwell explica, na primeira parte de *Physical Lines*, a interação magnética por tubos de vórtice. As distribuições magnéticas de W. Thomson são entendidas através da composição de configurações solenoidais e laminares, relativas a tubos e cascas, respectivamente. Aliados às percepções de W. Thomson e Tait acerca da constituição da matéria, os resultados de Hermann Helmholtz na teorização da dinâmica de fluidos fizeram dos tubos de vórtice — fechados, entrelaçados ou retorcidos formando nós — uma potente entidade na caracterização da estrutura atômica. J. J. Thomson apoia-se em W. Thomson e formula seu primeiro modelo atômico caracterizado por tubos de vórtice fechados, em forma de anel, para explicar a estabilidade atômica, a valência química e as propriedades periódicas dos elementos; posteriormente, com os avanços da teoria eletromagnética, J. J. Thomson "abre" seus tubos, que outrora eram anéis, para conciliar a estrutura contínua do éter com a discretização da carga. Nesse momento, J. J. Thomson enxerga os tubos como ferramenta fundamental capaz de abarcar os conceitos de carga, descarga elétrica, campo

elétrico, campo magnético e a constituição do átomo em um único sistema explanatório. Em todas as teorias atômicas formuladas por J. J. Thomson, nunca deixou de existir a preocupação sobre o arranjo dos elementos que compõe o átomo para justificar as propriedades dos elementos; a analogia com o experimento dos magnetos flutuantes de Alfred Mayer é recorrente nos trabalhos em que J. J. Thomson explica a estrutura atômica, que foi um argumento para fazer a conexão entre o modelo de átomos de vórtice e seu modelo atômico com corpúsculos.

A ligação entre eletricidade e magnetismo já era observada, de maneira qualitativa, quiçá especulativa, por volta do século XV, quando se observou que bússolas eram perturbadas durante tempestades (ROCHA, 2015). No mais, pode-se verificar no trabalho de Humphry Davy sobre fenômenos magnéticos produzidos por eletricidade, em 1820, seu relato afirmando que, há mais de uma década e meia, já existiam estudos relacionados a tais fenômenos (DAVY, 1821). Além disso, já em 1750, em carta a Peter Collinson, Benjamin Franklin refletia acerca da relação entre a eletricidade e o magnetismo (MARTINS, 1986, p. 92). De fato, existe um longo e sinuoso caminho histórico até o experimento apresentado, em 1820, na Universidade de Copenhagen, por Hans Christian Ørsted, sobre a ação magnética da corrente elétrica; mesmo assim, o experimento de Ørsted será tomado como ponto de partida para começo de uma narrativa. As reações aos resultados de Ørsted originaram diversas áreas de pesquisa, mais notavelmente em Paris e Londres, iniciando-se, a partir daí, as linhagens *Continental* e *Britânica*. Essas duas linhas são resultado de uma simplificação de diferentes interpretações e discussões — muito mais amplas — acerca do fenômeno eletromagnético. Na França, por exemplo, a ação da corrente elétrica sobre magnetos não teve interpretação consensual. Ainda como exemplo, o efeito eletromagnético trouxe pesquisas que não se restringiram à geografia europeia, houve investigações relacionadas à criação de eletroimãs nas Américas, inclusive (STEINLE, 2013).[2] No entanto,

[2] Nos Estados Unidos, em Albany, o professor Joseph Henry desenvolveu trabalhos sobre os formatos de eletroímãs (STEINLE, 2013).

as percepções principais consideradas nesta tese são aquelas vastamente exploradas na atual literatura, que reconhece duas linhagens: a *Continental*, decorrente principalmente dos trabalhos de André-Marie Ampère;[3] a *Britânica*, desenvolvida essencialmente a partir dos trabalhos e conceitos introduzidos por Faraday.

Habitualmente, ao dissertar acerca do éter, a literatura secundária recorre a discursos tradicionais que paralelizam, classificam e comparam duas visões concorrentes em sua argumentação; em síntese, a bibliografia, em geral, conduz as análises relativas ao éter para uma discussão polarizada, comumente, entre discreto × contínuo, clássico × moderno e *Britânicos* × *Continentais*. O discurso adotado para esta tese foge dessas propostas tradicionais de análise, as quais chamamos de "dicotomias classificatórias".

O presente trabalho entende que o desenvolvimento da teoria pode ser descrito usando a noção de "ressignificação", na qual uma ideia ou conceito recebe novo significado no desenvolvimento da mesma teoria.[4] Assim sendo, a argumentação da tese é conduzida identificando "ressignificação" de um conceito emergente da Teoria Eletromagnética do século XIX no Reino Unido — os *tubos de Faraday*.

Um panorama das abordagens mais proeminentes das ciências elétrica e magnética desenvolvidas pela escola britânica é exposto no Capítulo 2. Esse é um assunto muito discutido na literatura, porém o capítulo se dedica aos pontos pouco ou nada salientados pela historiografia; por exemplo, as distribuições magnéticas de W. Thomson. A historiografia destaca o *Physical Lines* e o *Treatise* de Maxwell, enquanto lê *Faraday's Lines* em segundo plano. Porém, além de ser o primeiro trabalho de Maxwell acerca da teoria eletromagnética, *Faraday's Lines* mostra que os tubos são a ferramenta de articulação da analogia entre a teoria dos fluidos e a teoria eletromagnética; a dinâmica dos vórtices é introduzida em *Physical Lines*.

[3] Na França, as teorias geradas pela escola *Continental* contavam também com as contribuições de Jean-Baptiste Biot, Félix Savart entre outros.

[4] Os livros clássicos de Max Jammer sobre a evolução dos conceitos da Física podem ser tomados como exemplo para o termo "ressignificação".

No Capítulo 3 apresentamos a teoria base na construção dos tubos fechados (anéis de vórtice) e dos tubos abertos (tubos de Faraday); o início discute a teoria hidrodinâmica dos vórtices, desenvolvida por Helmholtz. Essa teoria é, posteriormente, apropriada por W. Thomson para construir analogias e desenvolver um modelo de átomos de vórtice.

O modelo de átomos de vórtice é revisitado no Capítulo 4, no qual discutimos como J. J. Thomson estruturou seu primeiro modelo atômico, o de anéis de vórtice. Não há, na literatura, explicação detalhada da matemática dos átomos de vórtice, desenvolvida em seu premiado *On the Motion of Vortex Rings*. Porém o estudo da estabilidade dos anéis de vórtice mostrou a possibilidade de existência de estruturas sub-atômicas na constituição do átomo.

Discutindo o modelo de eletrólise desenvolvido por J. J. Thomson, historiadores comentam que esse modelo mostra como a carga pode ser discretizada; porém, o ponto importante, que não é mencionado, é que J. J. Thomson só foi capaz de incluir a discretização da carga na estrutura atômica porque tinha um modelo robusto de configuração estável e um candidato a carga, seu corpúsculo descoberto em 1987 (Capítulo 5).

Capítulo 2

O eletromagnetismo britânico

Como afirmado na introdução, a literatura aborda de maneira vasta os conceitos e peculiaridades das linhagens *Continental* e *Britânica* e, por isso, não é foco da tese paralelizar essas duas visões e compará-las. Contudo, será exceção a seção *Uma nova fenomenologia* que recorrerá a uma comparação, por uma necessidade de contextualização, entre a abordagem de Michael Faraday e André-Marie Ampère.

Os tubos de Faraday construídos por Maxwell a partir das linhas de força fazem parte da caracterização dos campos elétrico e magnético, sendo assim necessário discorrer acerca do tema. Entretanto, a abordagem não é concentrada na construção do conceito de campo trazido pela triangulação Faraday, W. Thomson e Maxwell. A análise é feita através da ressignificação do conceito de tubo, que é uma estrutura caracterizada pelo éter.

Inicialmente, em *On Faraday's Lines* e na primeira parte de *On Physical Lines*, os tubos de Faraday aparecem como estruturas básicas na concretização do conceito de campo e na matematização da fenomenologia eletromagnética da teoria de Maxwell.

Os tubos são revisitados por J.J. Thomson e ganham protagonismo em sua teoria, na qual se apresentam de vários modos, abertos e fechados, com diferentes funções, concretizando o campo e a estrutura atômica.

Assim, o objetivo deste capítulo é mostrar que houve diferentes interpretações para a fenomenologia eletromagnética no início de sua formulação, que o conceito de campo foi

desenvolvido por décadas e que as estruturas de tubos tornaram possível a fundamentação da teoria eletromagnética. A ênfase é dada à caracterização espacial da ação magnética desvendada por Faraday e, em seguida, serão articuladas as principais concepções que existiram como plano de fundo para a teoria atômica de J.J. Thomson.

2.1 Uma nova fenomenologia

A fenomenologia apresentada pelo experimento de Ørsted mostrava, diferentemente das forças usuais (puxões e empurrões), uma ação transversal da corrente elétrica de um fio sobre o magneto. Essa fenomenologia foi interpretada, basicamente, por duas percepções diferentes: a *Continental*, decorrente principalmente dos trabalhos introduzidos por Ampère; a *Britânica*, desenvolvida a partir dos trabalhos e conceitos de Faraday (SIEGEL, 1991, p. 6). A primeira percebia o fenômeno através de uma ação transversal do fio sobre o magneto, à distância, sem qualquer intermediário entre os objetos da interação, enquanto a segunda propunha um comportamento rotatório para a ação do fio através do éter como agente intermediador.

Tanto Ampère quanto Jean-Baptiste Biot e Félix Savart desenvolveram, assim como a maior parte da escola Continental, a teoria da ação magnética das correntes elétricas originadas pela ação a distância. A força era entendida como interação entre elementos infinitesimais de corrente, ou magnetos, obedecendo à lei do inverso do quadrado da distância e proporcional à intensidade de corrente.[1] As propostas para determinar a ação da corrente elétrica de Biot e Ampère são análogas: as forças de interação dependem dos ângulos entre a direção da corrente e a direção da linha entre os segmentos de corrente que interagem. Entretanto, enquanto Biot focava na ação do elemento de corrente sobre um magneto, Ampère olhava para a interação entre dois elementos de corrente. Assim, Ampère, Biot e Savart mostraram leis que regiam a ação das forças de interação magnética

[1] Ampère deduz a chamada Lei de Ampére a partir de quatro experimentos com sua "balança", que mostram a lei do inverso do quadrado da distância (DIAS; ALVES, 2015).

dos fios sem a caracterização do campo, conceito que é estruturado mais tarde com a *escola Britânica*.[2] Biot e Savart nunca se debruçaram sobre a questão da configuração da direção da ação da força magnética exercida pela corrente, Biot simplesmente afirmou que a força era dirigida perpendicularmente ao plano do fio contendo o ponto de ação da força onde se localiza o magneto (STEINLE, 2013, p. 545 – 547). Ampère analisou a atração e repulsão (HEILBRON, 1981; SIEGEL, 1991), sem introduzir rotações (STEINLE, 2013, p. 552), buscando uma lei geral, ao passo que Biot focava em uma situação particular.

Faraday inicia seus trabalhos sobre eletromagnetismo por volta de 1820, no laboratório de Humphry Davy (1778 – 1829), na *Royal Institution of London* (STEINLE, 2013, p. 551; DARRIGOL, 2000, p. 16 – 18). Nessa época, investigou questões relativas à teoria eletromagnética de Ampère, desvendando uma fenomenologia eletromagnética diferente: a configuração circular da ação magnética ao redor do fio (figura 2.1). Os experimentos com limalha de ferro levaram Faraday a acreditar que o fato fundamental, a característica elementar do fenômeno, era a rotação do polo ao redor do fio, ou do fio ao redor do polo (HEILBRON, 1981, p. 201). Essas rotações seriam a conexão de diversos fatos do Eletromagnetismo (DARRIGOL, 2000, p. 17), algo mais fundamental que forças caracterizadas como puxões e empurrões (SIEGEL, 1991, p. 9). Faraday desenvolveu outros trabalhos sobre o assunto e mostrou, em 1832, suas 'curvas magnéticas' e, em 1839, ilustrou suas 'linhas de ação da indução'; a lei de indução eletromagnética data de 1831. Entretanto, seus trabalhos tiveram pouca repercussão na época, suas ideias ganharam força mais tarde, nos meados de 1840, pelas mãos – e mente – de W. Thomson (STEINLE, 2013, p. 562). As ideias de Faraday são aprimoradas ao longo das próximas décadas e tomam corpo à medida que W. Thomson e Maxwell matematicamente interpretam, através da dinâmica de um meio contínuo, a fenomenologia emergente. A caracterização do conceito de campo inicia-se principalmente nesse período.

[2] O conceito de campo já estava presente nas discussões acerca dos fenômenos elétricos e magnéticos, desde 1780 e, em geral, era entendido existindo em uma região do espaço, onde se poderia observar corpos de prova, eletrizados (ou magnetizados), movimentando-se através dessa região (HEILBRON, 1981).

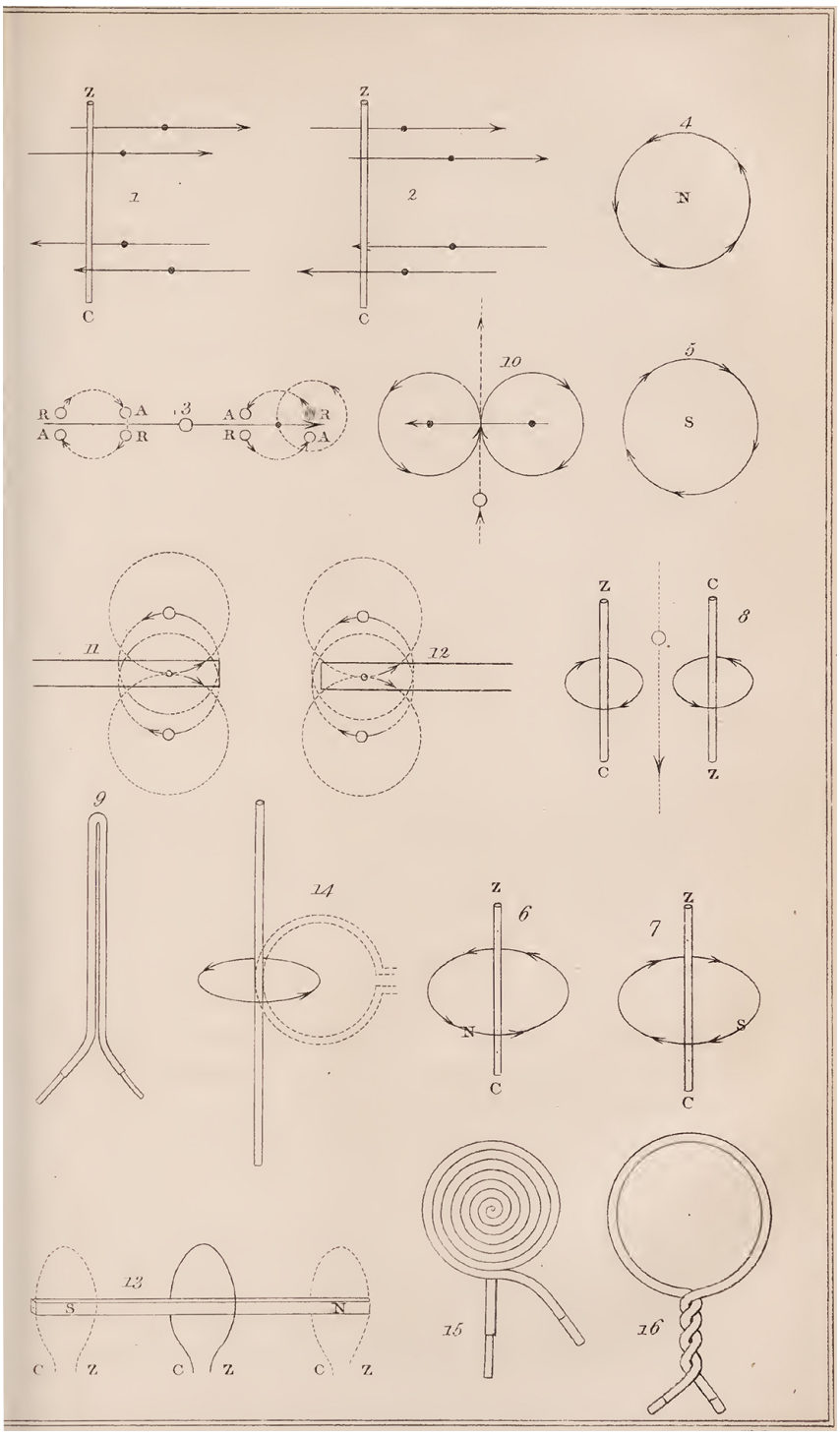

Figura 2.1: Representação da ação magnética de Faraday em *On Some New Electromagnetical Motions and on the theory of Magnetism* de 1821. As imagens 6 e 7 representam a ação da corrente elétrica do fio sobre magneto.

	Ampère	**Faraday**
Metodologia	de Laplace [3] e Newton [4]	descoberta de rotações contínuas a partir de minuciosa análise de resultados experimentais da interação entre magnetos e fios
Caracterização do fenômeno	interação entre elementos de corrente	caracterização de *power* [5] e concretização das interações
Teorização	expressão da força a partir de princípios gerais além da determinação dos parâmetros angulares e relação com a distância a partir de experimentos [6]	teoria aberta, cuja unidade é dada pela conexão entre fatos experimentais

Tabela 2.1: Comparação entre as abordagens de Ampère e Faraday sobre a ação magnética.

As investigações de Faraday e Ampère diferenciam-se em metodologia e isso influencia diretamente a interpretação de cada um. Enquanto Ampère começa com uma hipótese abstrata e matemática para caracterizar a ação, Faraday parte do concreto, da visualização de círculos ao redor dos fios e seu conceito de *power* para, a partir daí, teorizar. Apesar dos resultados obtidos por Ampère e Faraday terem sido compatíveis, Faraday rejeitava a ideia de que a atração ou a repulsão fosse o fato primitivo; ele achava que atração e repulsão

[3] Segundo Darrigol, "Laplace e seus discípulos buscaram reduzir todos os fenômenos a forças centrais agindo entre partículas de fluidos ponderáveis e imponderáveis, em uma analogia com a teoria da gravitação" (DARRIGOL, 2000, p. 1).

[4] Segundo Ampère, "[p]rimeiro observe os fatos, varie as circunstâncias quanto possível, acompanhe esse trabalho inicial com medidas precisas para, delas, deduzir leis gerais, fundamentadas, apenas, na experiência e deduzir dessas leis, independentemente de qualquer hipótese sobre a natureza das forças que produzem os fenômenos, o valor matemático dessas forças, ou seja, a fórmula que os representa, esse é o curso que Newton seguiu. [...], [E] foi [esse curso] que me serviu de guia em todas as minhas pesquisas sobre fenômenos eletrodinâmicos. Apenas consultei a experiência para estabelecer as leis desses fenômenos e, daí, eu deduzi a fórmula que pode sozinha representar as forças pelas quais eles são originados". (AMPÈRE, 1823, p. 176).

[5] Segundo Darrigol, "[c]onceito muito utilizado por Faraday, porém pouco definido. Aparentemente, *power* podia se referir a uma porção do espaço, onde ações emanavam e poderiam fazer parte, tanto de um magneto quanto de um fio com corrente elétrica" (DARRIGOL, 2000, p. 19).

[6] Ampère inicialmente obtém a força em coordenadas angulares:

$$d^2F = \rho(\theta, \theta', \omega)\frac{i.i'.ds.ds'}{r^n};$$

r é o comprimento do segmento que une os centros dos dois elementos de circuito, ρ é uma função dos ângulos θ, θ' e ω; θ e θ' são os ângulos entre um elemento de circuito e $\hat{r}$ e ω é o ângulo entre os planos contendo os elementos de circuito; i e i' são elementos de corrente, ds e ds' são elementos de circuito.

fossem consequência da distribuição de *power*, apresentado em rotações eletromagnéticas (DARRIGOL, 2000, p. 20). A tabela 2.1 mostra, de forma resumida, um esquema da diferença na abordagem de Ampère e Faraday sobre os fenômenos eletromagnéticos.

2.2 Caracterização do campo e as linhas de força

As caracterizações dos campos elétrico e magnético perpassam por inúmeras discussões nos meados do século XIX, nas quais os principais atores envolvidos foram: Faraday, guiado pelos seus experimentos na teorização da fenomenologia eletromagnética; W. Thomson, que através de analogias iniciou um tratamento matemático formal das ideias de Faraday e Maxwell, que usufrui dos avanços trazidos pelos seus conterrâneos. Para Darrigol, a base da teorização dos campos é um meio material que responde às características, ora de um fluido líquido, ora de um sólido elástico (DARRIGOL, 2000, p. 175). Pois, é através desse sistema que a caracterização dos campos segue.

As teorias de Faraday eram estabelecidas em duas perspectivas diferentes sobre a mesma fenomenologia elétrica: em uma havia as linhas de força distribuídas no espaço, em outra a mediação da ação elétrica por um meio dielétrico composto por partículas contíguas (HARMAN, 1982, p. 73 – 79). Então, o campo poderia ser teorizado a partir de dois aspectos: das propriedades do espaço, caracterizado como campo de forças e representado em termos de um arranjo espacial; ou, através de um éter constituído de partículas discretas. A elaboração do conceito das linhas de força demandou anos para sua consolidação por parte de Faraday. Seus trabalhos acerca do conceito datam do início da década de 1830, estendendo-se até 1852 com trabalhos a respeito de sua caracterização e representação (FARADAY, 1852a) e, também, sobre sua natureza (FARADAY, 1852b). A evolução da construção das linhas de força por Faraday demandaria uma atenção que não faz parte do escopo desta tese, embora merecesse um estudo específico.

Um dos experimentos mais significativos na caracterização do campo foi feito por Faraday, em 1845, e possui, basicamente, a seguinte configuração: um pedaço de vidro

é atravessado por luz polarizada e, enquanto a luz viaja através do vidro, um campo magnético uniforme é alinhado paralelamente à direção de propagação da luz (figura 2.2). O efeito apresentado, sob essas condições, é a rotação do plano de polarização da luz, efeito hoje conhecido como *Efeito Faraday*.

A descoberta da rotação do plano de polarização da luz na presença de um campo magnético não foi ao acaso, ela foi fruto de onze anos de estudos e experimentos dedicados a desvendar alguma relação entre eletricidade e a luz (FARADAY, 1839; KNUDSEN, 1976, p. 235). Pela interpretação de W. Thomson, o Efeito Faraday corrobora a característica rotatória do campo magnético; a linha de força corresponde ao eixo de rotação do meio no qual a luz se propaga. Assim, W. Thomson traz uma representação física da ação magnética através de sua teoria de vórtices moleculares, na qual o eixo de rotação desses vórtices estão alinhados ao campo magnético externo, promovendo uma ação rotatória sobre a luz (HARMAN, 1987, p. 79–83). Esse modelo constitui a estrutura básica para a teoria eletromagnética da luz de Maxwell (KNUDSEN, 1976, p. 236, 244–246).

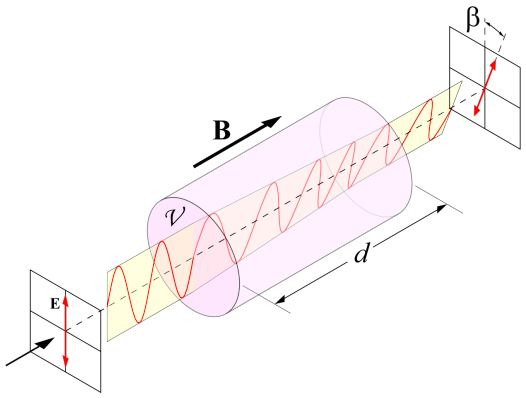

Figura 2.2: Esquema moderno ilustrando o Efeito Faraday. Rotação de ângulo β do plano de polarização da luz após atravessar cristal ν de comprimento d submetido a um campo magnético $\mathbf{B}$.

Como já mencionado, as ideias de Faraday acerca da ação eletromagnética mudaram ao longo de seus estudos e foram construídas juntamente com W. Thomson em discussões

ao longo de anos, até a concepção do conceito de campo (DORAN, 1975, p. 162–179). W. Thomson teve um papel central; ele impulsionou a teoria, matematizando-a e manteve discussões sobre os conceitos emergentes. Por exemplo, W. Thomson mostra a equivalência matemática da Lei de Coulomb (formulada pela ação a distância) com a ação elétrica intermediada por um meio contínuo de partículas, trazendo notoriedade à teoria proposta por Faraday (THOMPSON, 1910, p. 141–145, DORAN, 1975, p. 167, KNUDSEN, 1985, p. 154).[7]

HEAT and ELECTRICITY.

Note on a passage in Fourier's Heat 25
On the uniform motion of heat in solid bodies, and its connection with the mathematical theory of electricity 71
On the linear motion of heat. Parts I. and II. 170, 206
On the attractions of conducting and non-conducting electrified bodies 275
On orthogonal isothermal surfaces 286
On the knight's move at chess. By *R. Moon* 233
Solutions of problems 95, 152, 292

Figura 2.3: Seção do *Cambridge Mathematical Journal* sobre Eletricidade e Calor. Todos os trabalhos que não constam o nome do autor são de autoria de W. Thomson.

A relação, entre eletricidade e calor, foi mostrada no trabalho *On the Uniform Motion of Heat in Homogeneous Solid Bodies and its Connection with Mathematical Theory of Electricity*, em 1842, publicado na revista *Cambridge Mathematica Journal*, onde W. Thomson publicava desde seus dezesseis anos sob o pseudônimo *PQR* (DESPEAUX, 2011, p. 163). O mecanismo de analogias foi um sistema comum na construção da teoria eletromagnética por W.Thomson (THOMPSON, 1910; HARMAN, 1982; KNUDSEN, 1985; SIEGEL, 1991; DARRIGOL, 2000; SILVA; MARTINS, 2003); de fato, suas contribuições partem de analogias entre as teorias de calor e eletromagnetismo, não é coincidência que a seção da revista *Heat and Electricity*, destinada aos trabalhos relativos a eletricidade,

[7] O termo 'campo magnético' é introduzido por Faraday em 1845; o termo 'campo de força' foi usado por W. Thomson em uma carta a Faraday, em 1849; enquanto Maxwell usa o termo 'campo magnético' em carta a W. Thomson, em uma discussão das idéias de Faraday (HARMAN, 1987, p. 72).

também fosse destinada a trabalhos acerca da teoria de calor (figura 2.3). O mecanismo analógico de W. Thomson permeia toda sua produção, sua teoria eletromagnética segue por um estudo de analogias com a hidrodinâmica, principalmente na caracterização dos *campos*.

A teoria de representação dos *campos* desenvolvida por W. Thomson é inicialmente apresentada em *A Mechanical Representation* (1847), no qual considera a propagação das forças elétricas e magnéticas como tensões, respectivamente linear e rotacional, em um sólido elástico. O entendimento da ação magnética a partir de uma tensão rotacional em um meio elástico era condizente com o efeito magnético sobre a luz, isto é, o efeito Faraday (HARMAN, 1982, p. 82). Em *Dynamical Illustration of the Magnetic and the Helicoidal Rotatory Effects* (1857), W. Thomson introduz a ideia hidrodinâmica de vorticidade para descrever a ação rotatória do campo magnético. A descrição proposta por W. Thomson ressoa em trabalhos futuros de Maxwell, nos quais a dinâmica rotatória do campo magnético é entendida como vórtices no éter. O mecanismo de analogia para os campos de W. Thomson é bem discutido na literatura, especialmente em (BUCHWALD, 1977), (KNUDSEN, 1985), (SMITH; WISE, 1989, p. 203–285) e (DARRIGOL, 2000, p. 113–136).

Apoiado nas contribuições de W. Thomson, Maxwell tem como proposta desenvolver e matematizar as ideias de Faraday, deixando isso bem claro tanto no seu *Treatise* quanto em seus trabalhos antecessores. Entretanto, seu objetivo não pode ser tomado apenas como um tratamento matemático dos conceitos " inovadores "de Faraday (linhas e partículas do dielétrico). Afim de desenvolver a teoria, Maxwell se apropria, reformula, transforma e adapta os conceitos de Faraday para que os modelos de campo se tornem conceitualmente mais consistentes. A proposta de Maxwell era formular modelos e teorias que conseguissem dar conta das questões conceituais deixadas por Faraday acerca do campo: a relação entre o modo de propagação da força e a natureza que o constitui. Dentro dessa proposta, Maxwell produz cinco principais trabalhos: *On Faraday's Lines*(1856), seu primeiro artigo

acerca do assunto; *On the Physical Lines* (1861 – 1862); *A Dynamical Theory*, em 1865 e, por último seu *Treatise* de dois volumes, em 1873.

Em *Faraday's Lines*, Maxwell descreve a fenomenologia eletromagnética por intermédio de analogias com o movimento de um fluido incompressível para, em seguida, analisar as consequências de seu método através de aplicações (MAXWELL, 1856, p. 159). Por analogia, as linhas de força são representadas por linhas de escoamento do fluido e "podem ser modificadas para serem aplicadas às ciências de eletricidade estática, magnetismo permanente, magnetismo de indução e correntes galvânicas uniformes" (MAXWELL, 1856, p. 42). Assim, Maxwell desenvolveu um modelo, um conjunto de proposições de linhas e superfícies aplicado na representação dos fenômenos, no qual a intensidade da grandeza em questão era representada — seja elétrica ou magnética — pelo fluxo do fluido que se movia no interior de tubos delimitados pelas linhas de força.

Para Maxwell, em *On Physical Lines*, o conceito de vorticidade ganha protagonismo na concepção dos fenômenos eletromagnéticos. Nesse artigo, dividido em quatro partes, Maxwell aplica a teoria de vórtices aos seguintes casos: fenômenos magnéticos (parte I), correntes elétricas (parte II), eletricidade estática (parte III) e ação do magnetismo sobre a luz polarizada (parte IV). O elemento central da teoria está contido na primeira parte, o modelo de vórtices moleculares aplicados à magnetoestática, sendo caracterizado, nesse momento, o campo magnético. Nas partes seguintes, a lei da indução magnética, a lei eletrostática e a luz são deduzidas a partir do modelo de vórtices. Assim, em seu trabalho, Maxwell unifica a luz e os fenômenos elétrico e magnético, tanto estático quanto dinâmico, em um mesmo modelo. A estrutura de tubos aparecem na parte I e justifica as interações na magnetostática, mas com o desenrolar da teoria nas demais partes do trabalho, os tubos perdem protagonismo. A estrutura que inicialmente foi central, em *Faraday's Lines*, embora mantenha sua importância, posteriormente perde destaque.

O próximo trabalho de Maxwell, *Dynamical Theory* é mais conciso e não demanda modelos de estruturas, seus principais recursos são os conceitos de energia potencial e

cinética. O seu último trabalho, o tratado é um compilado de toda teoria e contém um caráter didático, como um manual. Contém como elementos principais, assim como em seu trabalho anterior, os conceitos de energia potencial e cinética associadas a um meio elástico – o éter.

Para que seja melhor entendido o conceito de ressignificação dos tubos de Faraday, se faz necessário revisitar, mesmo sendo de forma breve, os trabalhos de Maxwell. É o que segue.

2.3 Os tubos e seu abandono

As representações das linhas de força de Faraday é bem disseminada na literatura, entretanto a sua evolução para tubos não está bem elucidada. Há na bibliografia secundária a indicação que Faraday usava a estrutra de tubos para definir o *tubo de força*, uma estrutura formada por um conjunto de linhas de força que interceptam uma pequena curva fechada permitindo associar uma intensidade magnética à área da seção transversal desse tubo, o que foi feito por Maxwell. Dessa forma, a ação magnética seria análoga à vazão constante de um fluido através de um tubo; quer dizer, a intensidade da ação magnética seria determinada pela seção reta do tubo e a direção da ação seria determinada pelas linhas de escoamento do fluido. Porém, uma procura do termo *tube of force* ou, até mesmo, apenas o termo *tube*, através da ferramenta de busca dentro da obra digitalizada de Faraday, *Experimental Researches* (1839, 1844, 1855), não revela o uso de tubos como estrutura para determinar a intensidade magnética (e nem tão pouco a intensidade elétrica) em momento algum. Em *Electrodynamics from Ampère to Einstein*, Darrigol comenta que Faraday pensava em tubos compostos pelas linhas de força para representar a força elétrica e W. Thomson enxergava, por sua vez, similaridade nesses tubos com sua teoria do fluxo de calor (DARRIGOL, 2000, p. 116–117). Entretanto, Darrigol não mostra referência sobre os tubos nos trabalhos de Faraday.

O uso dos tubos como ferramenta na teorização da fenomenologia eletromagnética

demanda uma pesquisa direcionada à origem de seu uso e, assim, nos leva a um caminho que foge do centro desta tese, pois o foco aqui é bem delineado. A pesquisa propõe investigar os tubos como ferramenta nas teorias de matéria desenvolvidas por um ator específico — J.J. Thomson. Ele entende que os tubos "se apresentam mais prontamente à formação de uma imagem mental" na representação do campo do que o *displacement*, que era representação dada por Maxwell (THOMSON, 1904a, p. 16). Os tubos aos quais J.J. Thomson se refere são elétricos, mas têm a configuração geométrica dos que aparecem na primeira parte do *Line's of force* e perdem espaço nos demais trabalhos de Maxwell. Para W. Thomson os tubos auxiliam no entendimento da distribuição magnética e articulam conceitos que são revisitados nas teorias de J.J. Thomson.

Sendo assim, tentando entender o que os tubos representam em teorias que antecedem J.J. Thomson, a discussão será introduzida em duas etapas: primeiro, apontamentos sobre o trabalho de 1872 de W. Thomson, pouco explorado pela literatura secundária e que traz, em si, excelentes ilustrações do uso da hidrodinâmica para analogia na construção do eletromagnetismo e, além disso, usa tubos como elemento na caracterização da distribuição magnética; segundo, descrever alguns pontos dentro da teoria eletromagnética maxwelliana. Sendo todos elementos importantes que aparecerão na teorização de J.J. Thomson.

2.3.1 As configurações magnéticas propostas por W. Thomson

As configurações de tubos já aparecem em *A Mathematical Theory os Magnetism* (1872) — trabalho que antecede as publicações de Maxwell acerca do assunto — e apresenta a proposta de investigar problemas relativos à distribuição da matéria magnética. Nesse trabalho, W. Thomson desenvolve uma análise usando analogias, nas quais associa configurações de certas distribuições magnéticas a situações da dinâmica de fluido (THOMSON, 1872, p. 378-379). As distribuições investigadas são duas: a solenoidal e a lamelar (figura 2.4).

A primeira está associada a configuração da ação magnética ocasionada por um solenoide definido como "solenoide magnético". O termo solenoide,[8] segundo W. Thomson, foi sugerido pela expressão "solenoide eletrodinâmico", aplicada por Ampère a um certo arranjo de circuitos elétricos que forma um tubo e, além disso, produz o mesmo efeito magnético de uma longa barra magnetizada longitudinalmente. Dessa maneira, a distribuição magnética definida como *solenoidal* é semelhante àquela produzida por um solenoide. Essa distribuição pode ser entendida considerando-se uma barra infinitamente fina, longitudinalmente magnetizada e com intensidade magnética variando inversamente com a área de sua seção transversal. Nessa configuração, é definida uma grandeza chamada *strength*, que nada mais é que o produto entre a intensidade magnética e a área da seção transversal.[9] Partindo dessa configuração, W. Thomson constrói a imagem de um tubo para dada distribuição magnética, na qual esses tubos podem se apresentar de maneira aberta ou fechada.

No caso da segunda distribuição, a lamelar, W. Thomson parte de uma casca com a distribuição de magnetização normal a sua superfície e a considera constituída por uma folha infinitamente fina. O termo lamelar (*lamillar*), segundo W. Thomson, foi preferido a laminado (*laminated*) pois o último poderia sugerir algo plano, já que o mesmo era muitas das vezes associado à estruturas planas; enquanto o primeiro termo seria mais adequado e geral, porque abrange superfícies tanto curvas — em forma de concha, casca, calota — quanto planas. Tais superfícies podem aparecer, assim como no caso solenoidal, em duas formas: aberta, tal uma fita; ou fechada, tal uma casca esférica, por exemplo.

Assim, toda configuração magnética pode ser entendida como a composição das distribuições solenoidal e lamelar (THOMSON, 1872, p. 380):

Se um ímã finito de qualquer forma for capaz de se dividir em um número infinito

[8] Vem do grego $\sigma\omega\lambda\acute{\eta}\nu$ e pode significar tubo (calha ou canal).

[9] Essa grandeza é utilizada na teoria de átomos de vórtice que será discutida mais à frente, no próximo capítulo. O *strength* será definido pelo produto da vorticidade pela área da seção transversal do filamento de vórtice. Porém, por ora, essa definição não influenciará na diferenciação dos tipos de distribuições magnéticas propostas por W. Thomson.

de solenóides que são fechados ou têm suas extremidades na superfície delimitadora, a distribuição do magnetismo nele é considerada solenoidal, e a substância é considerada solenoidalmente magnetizada. Se um ímã finito de qualquer forma for capaz de se dividir em um número infinito de camadas magnéticas que são fechadas ou têm suas bordas na superfície delimitadora, a distribuição do magnetismo nele é considerada lamelar, e a substância é dita ser lamelarmente magnetizada.

A partir dessas configurações e entendendo os fenômenos magnéticos como fruto da matéria magnética caracterizada por um fluido ideal, a teorização avança através da matemática existente para a dinâmica de um meio imcompressível.

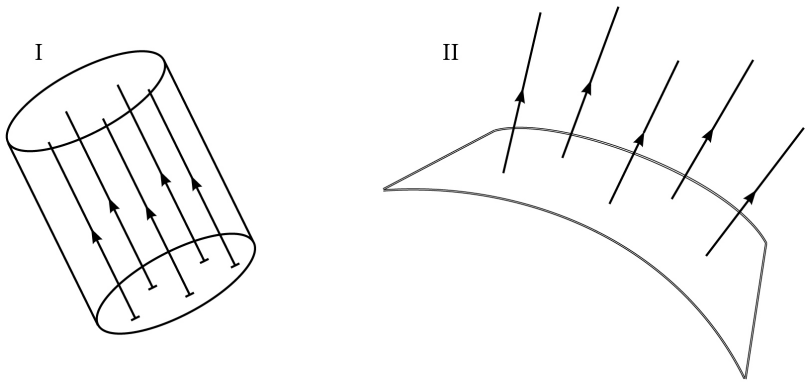

Figura 2.4: Representação das distribuições "solenoidal", em I, e "lamelar", em II. As setas representam as linhas de campo magnético produzidas pelas diferentes distribuições das magnetizações.

No caso solenoidal, considerando-se a matéria magnética em um fluido ideal e em regime estacionário, uma dada densidade de matéria magnética pode ser descrita pela equação

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0 \tag{2.1}$$

onde α, β e γ são as componentes da magnetização em um ponto (x, y, z) no interior da configuração solenoidal. Através de uma percepção contemporânea, permitindo-se ser

anacrônico, α, β e γ são as componentes do vetor $\mathcal{M}$ de maneira que a equação acima pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathcal{M} = \mathbf{0} \tag{2.2}$$

A equação 2.1 é análoga à equação de continuidade de um fluido homogêneo e incompressível se $\mathcal{M}$ for a velocidade do fluido. Nessas condições, através de um tubo, a velocidade do fluido (ou melhor, a velocidade média) em qualquer parte é inversamente proporcional à área da seção.[10]

Portanto, a intensidade e a direção da magnetização em uma distribuição solenoidal estão sujeitas à mesma condição que a velocidade de um fluido incompressível em movimento (THOMSON, 1872, p. 384).

Na situação em que a distribuição é lamelar, é possível imaginar um magneto que é constituído por uma série de superfícies ou, dizendo de outra maneira, por inúmeras cascas. Essas superfícies podem ser descritas por uma função ψ, onde $\psi = \psi(x, y, z)$. Para cada casca estará associada uma função ψ que parametriza a superfície. Por definição, uma casca magnética possui as linhas de magnetização ortogonais a essas superfícies. A distribuição magnética será lamelar se $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ for o diferencial de uma função de três variáveis independentes, de tal sorte a obter

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} &= 0 \\ \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz} &= 0 \\ \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Em uma perspectiva atual, a função ψ corresponde a um potencial magnetostático, no qual cada superfície — ou casca — define uma superfície equipotencial. As quantidades α, β e γ são as componentes de $\mathcal{M}$ (a magnetização) e a relação entre α, β e γ e ψ, no

[10] As componentes α, β e γ são definidas pelo produto da intensidade magnética i pela área da seção transversal a do sólido magnetizado. Assim (α, β, γ) = (ial, iam, ian), onde (l,m,n) são os cossenos diretores; ou ainda, $(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha\hat{\mathrm{x}} + \beta\hat{\mathrm{y}} + \gamma\hat{\mathrm{z}}$.

caso lamelar, pode ser traduzida como $\mathcal{M} = \boldsymbol{\nabla}\psi$, fazendo com que a equação 2.3 possa ser escrita $\boldsymbol{\nabla} \times \mathcal{M} = \mathbf{0}$, pois $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\psi = 0$.

Assim, W. Thomson pode entender a distribuição magnética em magnetos a partir da composição de duas possíveis configurações, uma em que $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathcal{M} = 0$ e outra em que $\boldsymbol{\nabla} \times \mathcal{M} = 0$.

Dois elementos que apareceram aqui serão revisitados em trabalhos futuros de J.J. Thomson, o *strength* na configuração tubular, definido como o produto da intensidade com a área da seção transversal do tubo; e as condições do movimento estacionário para um fluido ideal. Em verdade, essas condições — fluido incompressível e em regime estacionário — serão sempre condição para o estudo dos fenômenos baseados na dinâmica dos fluidos.

2.3.2 *On Faraday's Lines*

Maxwell reconhece nas linhas de força uma ferramenta para matematizar os fenômenos elétricos e magnéticos. Em seu primeiro trabalho sobre a fenomenologia eletromagnética — *Faraday's Lines* (1856) — Maxwell usa as linhas de força para construir uma analogia com as equações de um fluido e, após matematizar a ação elétrica e magnética, ele explica o estado eletrotônico de Faraday.[11] A estratégia usada para analogia é associar as linhas de força às linhas de escoamento de um fluido; ela é semelhante àquela adota por W. Thomson em *Uniform Motion of Heat*, onde os fenômenos elétricos são deduzidos por analogia com a propagação de calor, no entanto Maxwell deduz os fenômenos elétricos e magnéticos por analogia com a dinâmica de um fluido (MAXWELL, 1856, p. 30):[12]

[11] Dentro de uma perspectiva contemporânea, o estado eletrotônico é o potencial vetor (BORK, 1967). Pelas palavras de Maxwell (MAXWELL, 1856, p. 52) :

> *[...]um estado em que todos os corpos são lançados pela presença de ímãs e correntes. Este estado não se manifesta por nenhum fenômeno conhecido, desde que não seja perturbado, mas qualquer mudança neste estado é indicada por uma corrente ou tendência para a corrente. A este estado ele deu o nome de "Estado Eletrotônico".*

[12] W. Thomson basicamente usou o que chamamos hoje de *Lei de Gauss* para uma dada distribuição de fonte de calor. O elemento de área para dada superfície com distribuição uniforme de fontes é $d\omega_1^2$; ρ_1 pode ser entendido como uma densidade, que nas palavras de W. Thomson é "uma quantidade que mede a intensidade das fontes de calor, em diferentes partes da superfície" (THOMSON, 1842, p. 73). Assim,

> *Podemos [. . .] obter uma visão [. . .] mais adequada às nossas investigações mais difíceis, adotando para a definição das forças de que tratamos [campos elétricos e magnéticos], que elas podem ser representadas em magnitude e direção pelo movimento uniforme de um fluido incompressível.*
>
> *Proponho, então, descrever primeiro um método pelo qual o movimento de tal fluido possa ser claramente concebido; em segundo lugar, traçar as consequências de assumir certas condições de movimento e apontar a aplicação do método a alguns dos fenômenos menos complicados de eletricidade, magnetismo e galvanismo [corrente elétrica]; e, finalmente mostrar como, por uma extensão desses métodos e a introdução de outra idéia de Faraday [o estado eletrotônico], as leis das atrações e ações indutivas de ímãs e correntes podem ser claramente concebidas, sem fazer quaisquer suposições quanto à natureza física da eletricidade, ou acrescentar qualquer coisa ao que já foi provado por experimentos.*

A intensão de Maxwell era partir de um fenômeno conhecido para, então, construir uma teoria de uma nova fenomenologia. Ora, a matemática era comum aos fenômenos de calor e eletricidade; portanto, sua proposta era partir da dinâmica de um fluido ideal em escoamento laminar e, em seguida, formular uma construção espacial geométrica das linhas de força. Maxwell tinha como proposta inicial explicar e ilustrar a ideia de "linhas de força".

A ação da resultante das forças em cada ponto do espaço mostrava como poderia ser visualizada a linha de força; a situação era análoga para corpos magnetizados. Com essa descrição, era possível construir uma representação visual e espacial da ação elétrica e magnética. Porém, Maxwell percebeu que essa representação carecia da informação da

---

para a temperatura v em um ponto externo a superfície, W. Thomson escreveu:

$$v = \iint \frac{\rho_1 d\omega_1^2}{r_1}$$

Expressão análoga de um potencial para uma dada distribuição elétrica. Para complementar, consulte (THOMSON, 1842) e (DARRIGOL, 2000, p. 114 - 116).

intensidade da ação (MAXWELL, 1856, p. 30) :

> *[D]evemos, portanto, obter um modelo geométrico dos fenômenos físicos, que nos diga a direção da força, mas ainda assim devemos exigir algum método para indicar a intensidade da força em qualquer ponto.*

É nesse momento que Maxwell introduz os tubos como elemento para matematização (MAXWELL, 1856, p. 30) :

> *Se considerarmos essas curvas não como meras linhas [de força], mas como tubos finos de seção variável carregando um fluido incompressível, então, como a velocidade do fluido é inversamente [proporcional] à seção do tubo, podemos fazer a velocidade variar de acordo com qualquer lei dada, regulando a seção do tubo, e desta forma podemos representar a intensidade da força, bem como sua direção pelo movimento do fluido nesses tubos. Este método de representar a intensidade de uma força pela velocidade de um fluido imaginário em um tubo é aplicável a qualquer sistema de forças concebível, além de ser capaz de grande simplificação no caso em que as forças são tais como explicadas pela hipótese de atrações variando inversamente ao quadrado da distância, como as observadas em fenômenos elétricos e magnéticos. No caso de um sistema de forças perfeitamente arbitrário, geralmente haverá interstícios entre os tubos; mas, no caso das forças elétricas e magnéticas, é possível dispor os tubos de modo a não deixar interstícios. Os tubos serão então meras superfícies, direcionando o movimento de um fluido que preenche todo o espaço.*

Portanto, a analogia com o movimento hidrodinâmico através de um tubo permite que as forças de interação sejam "representadas em magnitude e direção pelo movimento uniforme de um fluido incompressível" (MAXWELL, 1856, p. 30).

A proposta de Maxwell segue por três etapas, já descritas anteriormente (MAXWELL, 1856, p. 30), porém agora pontuadas de forma explicita:

- "descrever um método pelo qual o movimento de um fluido incompressível pode ser claramente concebido";

- "traçar as consequências de assumir certas condições de movimento e apontar a aplicação do método a alguns dos menos complicados fenômenos de eletricidade, magnetismo e galvanismo";

- "mostrar como, por uma extensão desses métodos, e a introdução de outra ideia devida a Faraday, as leis das atrações e ações indutivas de ímãs e correntes podem ser claramente concebidas, sem fazer quaisquer suposições quanto à natureza física da eletricidade, ou adicionar qualquer coisa àquilo que já foi provado por experimentos".

Dessa maneira, o artigo prossegue com a seção *Teoria do movimento de um fluido incompressível*, onde são formuladas diversas condições e premissas a respeito do meio material em questão. Nesse momento fica evidente a proposta de teorizar a dinâmica do meio material para, posteriormente, desenvolver as analogias com os fenômenos elétricos e magnéticos. Maxwell enfatiza e deixa claro, em sua primeira condição, que o meio material de propriedades descritas nada mais é do que um apoio ao manuseio das ferramentas que se apresentam à mente (MAXWELL, 1856, p. 31) :

> *Não se deve presumir que a substância aqui tratada possua qualquer uma das propriedades dos fluidos comuns, exceto aquelas de liberdade de movimento e resistência à compressão. Não é nem mesmo um fluido hipotético que é introduzido para explicar fenômenos reais. É meramente uma coleção de propriedades imaginárias que podem ser empregadas para estabelecer certos teoremas em matemática pura de uma forma mais inteligível para muitas mentes e mais aplicável a problemas físicos do que aqueles em que apenas símbolos algébricos são usados. O uso da palavra "Fluido"não nos levará a erro, se lembrarmos que denota uma substância puramente imaginária [...]*

As condições seguintes impostas caracterizam o fluido ideal e o seu estado de movimento:

- o fluido deve ser incompressível. Isso é colocado como consequência da lei que diz que "a porção de fluido que em qualquer instante ocupou um determinado volume, ocupará em qualquer instante subsequente um volume igual" (MAXWELL, 1856, p. 31). Tendo, assim, uma lei para a conservação da quantidade de fluido;

- o fluido precisa estar em movimento estacionário, assim a direção e a velocidade em um dado ponto fixo independem do tempo. Isso caracteriza as linhas de movimento do fluido que, mais à frente, serão associadas às linhas de força;

- o conjunto de linhas de movimento compõe um tubo de movimento;

- pela imposição da lei de incompressibilidade, a quantidade de fluido, que passa por qualquer seção do tubo, em dado intervalo de tempo, será a mesma. Dessa maneira, considerando uma unidade de volume atravessando uma seção do tubo em uma unidade de tempo, teremos um tubo unitário de movimento de fluido e, assim, o movimento do fluido pode ser definido por unidades de tubos;

- o movimento do fluido pode ser determinado por tubos unitários, a velocidade do fluido é determinada pela área da seção do tubo unitário em dado ponto;

Conforme novos elementos são introduzidos as equações vão sendo construídas. Após condições acima impostas, o fluido é considerando permeando um meio que oferece resistência a seu movimento e, supondo um meio uniforme, "qualquer porção do fluido em movimento através do meio de resistência está sujeito a uma força de retardo proporcional a sua velocidade" (MAXWELL, 1856, p. 34), de maneira que a resistência seja dada pelo produto kv, onde k é uma constante que representa as propriedades resistivas do meio e v o módulo da velocidade do fluido.

A definição matemática para a pressão nessas condições parte de uma fonte imersa nesse fluido, no qual a pressão a uma infinita distância da fonte é zero. O fluido tem, assim, seu fluxo de forma radial e uma vez que a unidade de volume flui para fora de cada superfície esférica ao redor do ponto em unidade de tempo, a velocidade a uma distância r da fonte é

$$v = \frac{1}{4\pi r^2} \tag{2.4}$$

A pressão decresce a uma taxa kv, ou ainda, $\frac{k}{4\pi r^2}$, e sendo a pressão nula no infinito a pressão em dado ponto será

$$p = \frac{k}{4\pi r} \tag{2.5}$$

Dessa maneira, Maxwell conseguiu descrever o movimento de um fluido ideal, incompressível e imponderável,[13] através de um meio resisitivo isotrópico. Ele dividiu o fluido em pequenos tubos unitários, por onde passava uma unidade de volume por unidade de tempo. O fluxo era definido pela configuração de tubos, o sentido era dado pelo escoamento, o inverso da área da seção definia o módulo da velocidade do fluido. Nessa configuração, onde há variação de pressão em todo fluido, é possível determinar um conjunto de pontos de igual pressão de tal sorte a se definir uma superfície de mesma pressão perpendicular à direção do fluxo. Assim, para um fluido imponderável com movimento uniforme, Maxwell conclui que a velocidade do fluido é proporcional ao gradiente de pressão (MAXWELL, 1856, p. 39-40).

Na seção *Applications of the Idea of Lines of Force*, após estruturar os tubos, Maxwell expande o uso de sua ferramenta dizendo (MAXWELL, 1856, p. 42):

[13] Sem massa, "sem inércia" segundo Maxwell (MAXWELL, 1856, p. 33).

> *Tenho agora que mostrar como a ideia de linhas de movimento do fluido [caracterizados por tubos], [...] pode ser modificada de modo a ser aplicável à ciência da eletricidade estática, magnetismo permanente, magnetismo de indução e correntes galvânicas uniformes, reservando as leis do eletromagnetismo a uma consideração especial.*

No caso da eletrostática, os tubos estavam relacionados às linhas de indução elétrica enquanto a pressão e a resistência estavam associadas ao potencial e à capacidade indutiva do dielétrico. A aplicação nesse caso se dá de forma direta, pois considerando a velocidade do fluido devida a todas as fontes em dado ponto, é possível relacioná-la à força resultante sobre as partículas de matéria elétrica naquele mesmo ponto como situação análoga (MAXWELL, 1856, p. 42) :

> *A velocidade devida a cada fonte seria proporcional à atração sobre a partícula correspondente, e a velocidade resultante devida a todas as fontes seria proporcional à atração resultante de todas as partículas. Agora é possível encontrar a pressão resultante em qualquer ponto, adicionando as pressões relativas às fontes dadas e, portanto, podemos encontrar a velocidade resultante em uma determinada direção a partir da taxa de diminuição da pressão nessa direção, e isso será proporcional à atração resultante das partículas resolvidas naquela direção.*

Como a atração resultante no caso eletrostático é proporcional à diminuição de pressão do fluido, Maxwell escreveu:

$$X = -\frac{dp}{dx}, \tag{2.6}$$

como componente da força resultante; para o potencial V:

$$dV = Xdx + Ydy + Zdz = -dp. \tag{2.7}$$

Considerando-se a pressão nula no infinito, $p = 0$ e $V = 0$, tem-se $V = -p$.

Em notação moderna, a equação 2.6 é uma componente da relação:

$$\mathcal{F} = -\boldsymbol{\nabla} V. \tag{2.8}$$

Por fim, para a situação eletrostática, a analogia com o movimento do fluido mostra:

$$V = -p; \tag{2.9}$$

$$X = -\frac{dp}{dx} = -ku; \tag{2.10}$$

$$dm = \frac{k}{4\pi} S, \tag{2.11}$$

onde V é o potencial elétrico, X é a intensidade da força elétrica, k a capacidade indutiva do dielétrico, dm são as cargas produzidas pela fonte S. Lembrando que as linhas de força são os tubos unitários do movimento do fluido, podendo ser, dessa maneira, determinadas numericamente pelos tubos.

No magnetismo, os tubos eram as linhas de força magnética — aquelas descritas por Faraday —[14] enquanto o gradiente de pressão era a intensidade magnética, chamada de "força resultante do magnetismo", e a resistência estava associada ao inverso do "poder condutor" das linhas de força. Pela semelhança matemática entre os fenômenos da eletricidade e magnetismo, Maxwell toma a liberdade de aplicar a mesma estrutura de tubos aos magnetos (MAXWELL, 1856, p. 44) :

> *Um ímã é concebido como sendo feito de partículas magnetizadas elementares, cada uma das quais com seus próprios pólos norte e sul,* **cuja ação sobre os outros pólos norte e sul é governada por leis matematicamente idênticas às da eletricidade**.[15] *Consequentemente, a mesma aplicação da ideia de linhas de força pode ser feita a este assunto [magnetos permanentes], e a mesma analogia de movimento do fluido pode ser empregada para ilustrá-lo.*

[14] Segundo Darrigol (2000, p. 144), as linhas de força magnéticas de Faraday eram diferentes das de Maxwell, pois não possuíam fonte. Os tubos usados por Maxwell tinham massa que correspondiam à matéria magnética.

[15] Ênfase nossa.

Os pólos do imã eram células unitárias onde o fluido entrava por uma face (sumidouro), polo sul; e saia por outra face (fonte), polo norte. A composição de células formavam o tubo unitário. A descrição de Maxwell contempla a distribuição magnética usada por W. Thomson em 1851, em seu trabalho *A Mathematical Theory of Magnetism* (MAXWELL, 1856, p. 44):

> *[. . .] Em cada célula unitária, a unidade de fluido entra por uma face e flui pela face oposta, de modo que a primeira face se torna um sumidouro unitário e a segunda uma fonte unitária em relação ao resto do fluido [. . .]. Se agora considerarmos a célula como parte de um sistema, o fluido que flui para fora de uma célula fluirá para a próxima, e assim por diante, de modo que a fonte será transferida do final da célula para o final do tubo unitário . Se todos os tubos unitários começam e terminam na superfície delimitadora, as fontes e sumidouros serão distribuídos inteiramente naquela superfície e, no caso de um ímã que tem o que foi chamado de distribuição solenoidal ou tubular de magnetismo, todas as fontes magnéticas imaginárias a matéria estará na superfície.*

Na eletrocinética, os tubos de Maxwell correspondiam às linhas de corrente, a pressão era o potencial eletrostático ou tensão e a resistência do meio estava associada a resistência elétrica. Maxwell via semelhança entre grandezas envolvidas nos fenômenos estático e cinético da eletricidade, afirmando que o potencial eletrodinâmico é análogo ao potencial eletrostático (MAXWELL, 1856, p. 46):

> *[. . .] temos aqui uma corrente de fluido movendo-se uniformemente em circuitos condutores, que se opõe a uma resistência à corrente que deve ser superada pela aplicação de uma força eletromotriz em alguma parte do circuito. Por conta dessa resistência ao movimento do fluido, a pressão deve ser diferente em diferentes pontos do circuito. Essa pressão, comumente chamada de tensão elétrica, é fisicamente*

> *idêntica ao potencial da eletricidade estática e, portanto, temos os meios de conectar os dois conjuntos de fenômenos.*

Após mostrar que os tubos podem ser aplicados tanto aos fenômenos elétricos quanto aos magnéticos, Maxwell lança mão de um relevante aspecto em sua analogia: a distinção entre força e fluxo.[16] Tal diferença é crucial para a associação entre a fenomenologia elétrica e magnética em seu trabalho e, posteriormente, é retomada mais à frente em seu *Treatise*. Maxwell separa as grandezas em duas classes, a *intensidade* e a *quantidade*.[17] Para Maxwell, a intensidade está associada à tensão do meio, algo que causa a corrente elétrica, ou algo como o efeito visto em um eletroscópio. No caso da quantidade, ele se refere ao "vigor" da grandeza,[18] algo como a corrente elétrica que um capacitor carregado produz. Desse modo, os tubos e superfícies montam, juntos, a estrutura básica na relação entre eletricidade e magnetismo. De forma sucinta, o termo quantidade refere-se ao número de tubos que atravessa uma dada superfície — o fluxo — enquanto a intensidade se refere ao número de superfícies perpassadas por um dado tubo — o vigor.

Essa proposta permitiu que Maxwell escrevesse a força eletromotiva como a variação de uma certa 'intensidade' que representasse o *estado eletrotônico* de um condutor, entendendo-se que (MAXWELL, 1856, p. 51):

> *Um condutor fechado em um campo magnético pode estar em um determinado estado decorrente da ação magnética. Enquanto esse estado permanecer inalterado nenhum efeito ocorre, mas, quando o estado muda, surgem forças eletromotivas, dependendo de sua intensidade e direção nessa mudança de estado.*

ou, pelas palavras de Faraday (1839, p. 16) usadas por Maxwell (apud MAXWELL, 1856, p. 51):

---

[16] O termo *força* está sendo empregado aqui com o sentido de robustez, pujança, vigor.

[17] Em seu tratado, Maxwell distingue as grandezas referentes às *linhas* das referentes à *área*, (MAXWELL, 1873, § 12).

[18] Termo nosso.

> *Embora o fio esteja sujeito a indução voltaelétrica ou magnetoelétrica,*[19] *ele parece estar em um estado peculiar, pois resiste à formação de uma corrente elétrica nele; que, se em seu estado normal, tal corrente seria produzida; e quando não é influenciado, tem o poder de originar uma corrente, uma potência que o fio não possui em circunstâncias normais. Esta condição elétrica da matéria não foi reconhecida até agora, mas provavelmente exerce uma influência muito importante em muitos, senão na maioria dos fenômenos produzidos por correntes de eletricidade. Por razões que aparecerão imediatamente, depois de aconselhar vários amigos eruditos, ousei designá-lo como o estado eletrotônico.*

Dessa forma, Maxwell conseguiu aliar os tubos com superfícies na matematização da fenomenologia eletromagnética. As relações que chegam ao estado eletrotônico são bem descritas por Darrigol (2000, p. 146) e Dias (2014), por isso não é necessário trazê-las aqui. Porém, apenas com a intensão de ilustrar, podemos ver como é escrita a lei de Àmpere nessas condições. Considerando que $\boldsymbol{a}$ é a corrente de fluido e $\boldsymbol{\alpha}$ é a força motriz e diferencia as grandezas elétricas e magnéticas a partir dos índices "1"(magnéticas) e "2"(elétricas), [20] como foi feito por Maxwell:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{a}_2, \tag{2.12}$$

que pode ser traduzido como

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathcal{H} = \boldsymbol{J}. \tag{2.13}$$

Dessa maneira, a seção mostrou que os tubos definidos por Maxwell foram inicialmente, dentro de um mecanismo de analogias, as ferramentas básicas propostas na construção de sua teoria eletromagnética. Os tubos seguem como mecanismo de representação do

[19] Faraday refere-se à eletricidade que flui através de um fio devido a uma bateria voltaica como eletricidade voltaica e, o efeito que esse fio faz sobre um segundo fio como indução voltaelétrica. A produção de eletricidade a partir de "imãs comuns", Faraday chama de indução magnetoelétrica (AL-KHALILI, 2015).

[20] Veja (MAXWELL, 1856, p. 55).

campo, porém deixam de ser o coração da teoria perdendo lugar para outras características do meio etéreo, como mostrado a seguir.

2.3.3 *On Physical Lines*

A matematização dos fenômenos desvendados por Faraday continuam sendo a proposta de Maxwell em seus próximos trabalhos. Contudo, o cenário agora é outro. O final da década de 1850 e as décadas seguintes são marcadas por uma temática emergente no estudo da hidrodinâmica: a dinâmica dos vórtices. Um excelente recurso para aqueles que interpretam fenômenos eletromagnéticos a partir de um meio contínuo como o éter. Pois, os vórtices trouxeram suporte à definição do caráter rotatório do campo magnético, importante aspecto na construção das relações eletromagnéticas.

No período entre 1858 a 1868, Hermann von Helmholtz produz uma série de importantes trabalhos sobre Hidrodinâmica. Em seu artigo *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen* (1858),[21] Helmholtz introduz vórtices na investigação da dinâmica de um fluido,[22] usando analogias com fenômenos eletromagnéticos para ilustrar sua teoria hidrodinâmica. Ele apontou que as linhas de movimento do fluido eram organizadas da mesma maneira que as linhas de força magnética em torno de uma corrente elétrica fluindo ao longo do eixo do vórtice e, assim, trabalhou a partir do eletromagnetismo para desenvolver argumentos físicos e obter uma compreensão intuitiva do comportamento dos vórtices (FALCONER, 2019). A associação feita era: o eixo de rotação dos vórtices do fluido ficava determinado pelo sentido da corrente elétrica. Em contraponto, a proposta de Maxwell na analogia hidrodinâmica dos vórtices com o eletromagnetismo possuía outro viés, no qual indicava o eixo de rotação dos vórtices do fluido alinhado ao sentido do campo magnético

[21] Com título completo *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen* ou ainda, em português, *Sobre Integrais das Equações Hidrodinâmicas que Correspondem a Movimentos de Vórtices*.

[22] A proposta do Helmholtz era entender a dinâmica de um fluido real, a ideia era complementar às teorias de fluidos anteriores, como a teoria da hidrodinâmica de Euler, por exemplo. Helmholtz teoriza a influência do atrito sobre o ar no interior dos tubos do órgão (instrumento musical). Ao introduzir o atrito na dinâmica, Helmholtz chega ao vórtice como solução das equações da hidrodinâmica euleriana (DARRIGOL, 2005, p. 145).

(MAXWELL, 1862, p. 86):

> *O professor Helmholtz investigou o movimento de um fluido incompressível e concebeu linhas traçadas de modo a corresponder em todos os pontos ao eixo instantâneo de rotação do fluido ali [naquele mesmo ponto]. Ele observou que as linhas de movimento do fluido são arranjadas de acordo com as mesmas leis em relação às linhas de rotação, como aquelas pelas quais as linhas de força magnética são arranjadas em relação às correntes elétricas. Por outro lado, neste artigo [On Physical Lines], considerei o magnetismo como um fenômeno de rotação, e as correntes elétricas como consistindo na translação real das partículas, assumindo assim o inverso da relação entre os dois conjuntos de fenômenos.*

A escolha de Maxwell é inspirada pelo experimento de Faraday (sobre a rotação do plano de polarização da luz) e as ideias de W. Thomson, presentes em *On a Mechanical Representation* (1847) e *Dynamical Illustrations of the Magnetic and the Heliçoidal Rotatory Effects* (1857).

As analogias sugeridas por Helmholtz e Maxwell podem ser parecidas, porém possuem implicações completamente diferentes, pois Maxwell as usa para definir características dos campos elétrico e magnético.[23]

W. Thomson (1860) havia observado que não havia alternativa se não considerar que

> *[. . .] um certo alinhamento de eixos de revolução neste movimento [dos vórtices] É magnetismo.*[24] [Pois] o experimento magneto-óptico de Faraday torna isso não uma hipótese, mas uma conclusão demonstrada (THOMSON, 1860, p. 224–225).[25]

Para Maxwell, o Efeito Faraday é o que indica a natureza rotatória do campo magnético, pois (MAXWELL, 1862, p 87):

[23] Há mais sobre as relações entre as analogias de Maxwell e Helmholtz em (BOKULICH, 2015).
[24] A letra maiúscula e a escrita em itálico é ênfase dada por W. Thomson e foi preservada.
[25] Também encontrada em (SIEGEL, 2014, p. 194).

> *[...] a direção absoluta de rotação [do plano de polarização da luz polarizada] é a mesma se a luz viaja do norte ao sul ou do sul ao norte, — um fato que distingue esse fenômeno daqueles produzidos por quartzo e terebentina, etc, em que a direção absoluta de rotação [do plano de polarização] é revertida quando a direção de propagação da luz é invertida.*[26]

E, ainda, Maxwell se distância da escolha de Helmholtz (MAXWELL, 1862, p 87):

> *A transferência de eletrólitos em direções fixas pela corrente elétrica e a rotação da luz polarizada em direções fixas pela força magnética são os fatos cuja consideração me induziu a considerar o magnetismo como um fenômeno de rotação, e as correntes elétricas como fenômenos de translação, em vez de seguir a analogia apontada por Helmholtz [...].*

Maxwell possui argumentos a seu favor na escolha das características linear e rotatória na formulação do campo elétrico e magnético (SIEGEL, 1991, p. 47):

- efeitos lineares da corrente elétrica, como na eletrólise;
- ausência de efeitos rotatórios da corrente elétrica, segundo experimentos realizados por Faraday;
- ausência de efeitos lineares do magnetismo;
- efeitos rotatórios do magnetismo, como visto na mudança do plano de polarização da luz (Efeito Faraday).

[26] No caso do efeito Faraday, se houver reflexão da luz, a direção de polarização continua girando no mesmo sentido, em contraste com o que ocorre no caso de meios opticamente ativos. Nesse último caso, se houvesse reflexão, a direção de polarização giraria no sentido de voltar à polarização original (e continuar girando nesse sentido). É como se voltássemos no tempo, passando o filme de volta. A questão é que, no efeito Faraday, a onda se propagar no mesmo sentido ou no sentido contrário ao do campo magnético a polarização gira em mesmo sentido, aumentado a inclinação em relação ao plano original polarização. Isso é diferente do caso dos meios opticamente ativos, no qual o plano de polarização volta ao plano original após reflexão.

Desse modo, a interação magnética fica representada pela dinâmica de vórtices. Os tubos de vórtices correspondem ao arranjo geométrico das linhas de campo magnético, pois o eixo de revolução do vórtice é o campo magnético (figura 2.5).

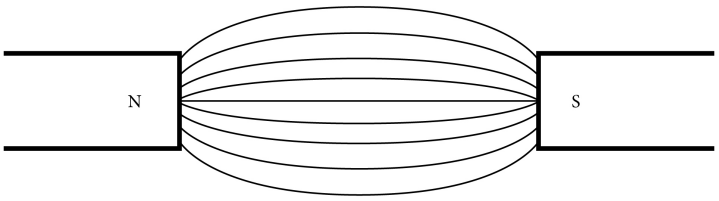

Figura 2.5: Linhas de campo magnéticas, que são entendidas como tubos de vórtices, configurando a interação entre polos opostos.

Essa correspondência promove a visualização do campo, porém ainda falta uma questão: como a intensidade é determinada nesse modelo? Pois bem, a intensidade do campo magnético fica determinada pela velocidade angular dos vórtices, assim:

$$\omega \equiv \mathcal{H}. \tag{2.14}$$

Nesse caso, um aumento na intensidade do campo é entendida pelo alargamento equatorial do tubo de vórtices, o que implica o encurtamento de seu comprimento (figura 2.6). Essa configuração justifica a aproximação de imãs e a deformação das linhas de campo quando os mesmos se aproximam.

A analogia da vorticidade com o campo magnético dá conta de alguns aspectos, como os que foram mostrados acima, contudo trazem um entrave em sua conciliação com a teoria eletromagnética. De fato, como os vórtices seriam arranjados em uma região onde o campo magnético possua um único sentido? Ou ainda, perguntando de outra maneira, como conciliar vórtices solidários girando no mesmo sentido?

Na parte II de *On Physical Lines*, Maxwell introduz um elemento capaz de resolver a

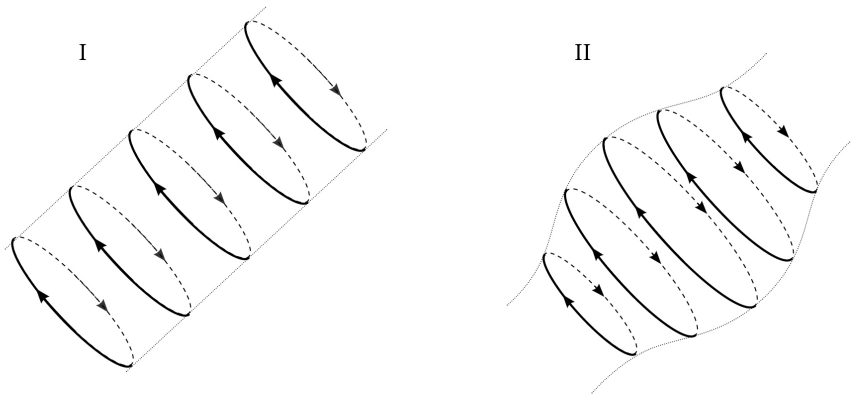

Figura 2.6: Onde $\mathcal{H} \neq 0$, o meio é preenchido por tubos de vórtices ou filamentos. O aumento da intensidade do campo é a expansão equatorial do vórtice que implica, assim, o encurtamento do tubo. Em (I) tubo mais longo que em (II) que é mais curto devido alargamento equatorial.

questão. Vórtices adjacentes poderiam rodar em um mesmo sentido se houvesse partículas esféricas capazes de rolar, sem deslizar, entre os vórtices e com isso transmitir o movimento entre os vórtices vizinhos. A essas partículas, Maxwell deu o nome de "idle wheels". Essas "wheels" formavam a matéria elétrica. Nesse modelo o fenômeno da indução magnética é explicado e os sistemas de vórtices agem como um mecanismo conectado capaz de transferir movimento elétrico de um condutor para outro (figura 2.7).

Uma certa quantidade de "wheels" junto com um conjunto de vórtices formam uma molécula do meio, a corrente elétrica é determinada pela transferências de "wheels" entre vórtices (MAXWELL, 1861, p 285):

> *[...] de acordo com nossa hipótese, uma corrente elétrica é representada pela transferência das partículas móveis interpostas entre os vórtices vizinhos. Podemos conceber que essas partículas são muito pequenas em comparação com o tamanho de um vórtice, e que a massa de todas as partículas juntas é insignificante em comparação com a dos vórtices, e que muitos vórtices, com suas partículas circundantes,*

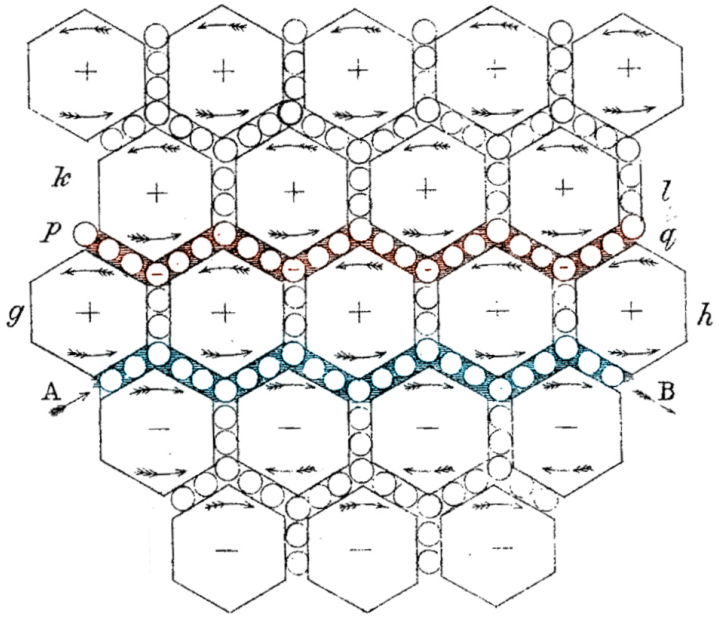

Figura 2.7: Mecanismo usado por Maxwell como analogia para a fenomenologia eletromagnética. Os hexágonos são os vórtices, o sentido de rotação é representado pelas setas curvas e os sinais de "+" e "−", nos quais o "+" corresponde ao sentido anti-horário (campo magnético apontando para fora da página) e o "–" corresponde ao sentido horário (campo magnético apontando para dentro da página). As pequenas esferas são as "idle wheels". As cores azul e vermelha foram ênfase nossa a fim de mostrar as correntes primária (azul) e a induzida (vermelha).

estão contidos em uma única molécula completa do meio.

Através de um pensamento mecanicista em um contexto onde o campo elétrico carrega característica linear e campo magnético possuí caracterização rotatória, fazendo as analogias entre corrente elétrica e movimento de "wheels", associando velocidade angular dos vórtices ao campo magnético, Maxwell escreve para a lei de Ampère (MAXWELL, 1862, p 85):

$$p = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right),$$
$$q = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right),$$
$$r = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right);$$

onde, p, q e r são as componentes da densidade de corrente e α, β e γ são as componentes

da intensidade do campo magnético. Que, de maneira moderna, podemos escrever:

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla} \times \mathcal{H}. \tag{2.15}$$

A fim de sustentar sua correlação, Maxwell suscita relações mecânicas que combinem as mesmas características:

- Se α, β e γ representam deslocamentos lineares ou mudanças de posição, então p, q e r representam deslocamentos rotatórios ou mudança de posição angular;

- se α, β e γ representam velocidades lineares, então p, q e r representam velocidades angulares;

- se α, β e γ representam forças, então p, q e r representam um torque ou torção;

- se α, β e γ representam as velocidades rotatórias de vórtices cujos centros são fixos, então p, q e r representam as velocidades com as quais as partículas soltas colocadas entre esses vórtices seriam transportadas.

As considerações dinâmicas nesse modelo levaram Maxwell a outras conclusões. Com efeito, se os vórtices adjacentes giram com mesma velocidade angular, as partículas que entremeiam os vórtices rodam sem transladar; por outro lado, se os vórtices adjacentes giram com velocidades angulares diferentes, as partículas que entremeiam os vórtices rodam **e** transladam. Sendo assim, a condição para que exista mudança da velocidade angular (que significa mudança de campo magnético) é que haja força tangencial feita pelas "wheels" sobre as superfícies dos vórtices. Essa força tangencial gera um torque sobre as células. Esse torque é igual à taxa de variação do momento angular da célula que é, por sua vez, proporcional à intensidade de campo magnético. Assim, de acordo com a ação e reação, deve haver uma força tangencial igual e oposta sobre as partículas. Maxwell chamou essa força de "força eletromotriz" agindo sobre a corrente. Então, sabendo-se que

o rotacional da força eletromotriz é proporcional à taxa de variação da intensidade do campo, a equação final é:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dp}{dz}-\frac{dr}{dy}\right) &= \mu\frac{d\alpha}{dt},\\
\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dr}{dx}-\frac{dp}{dz}\right) &= \mu\frac{d\beta}{dt},\\
\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dp}{dy}-\frac{dq}{dx}\right) &= \mu\frac{d\gamma}{dt};
\end{aligned}$$

onde, p, q e r representam as componentes da força eletromotriz de Maxwell — o campo elétrico — e α, β e γ são as componentes magnéticas. Assim, a equação acima em notação moderna fica:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathcal{E} = -\mu\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} \tag{2.16}$$

A equação 2.16 mostra que, mais uma vez, há vínculo entre grandezas lineares e rotatórias. As relações e deduções matemáticas de Maxwell seguem basicamente com as seguintes analogias: “idle wheels” é a matéria elétrica; fluxo de “wheels” é a corrente elétrica; força sobre as “wheels” é a força eletromotriz; pressão entre as “wheels” é a tensão ou potencial eletrostático; velocidade angular dos vórtices é a intensidade magnética (tabela 2.2).

O próximo passo de Maxwell é a introdução de termos que definem a elasticidade do meio e, a partir das considerações acerca da elasticidade, a lei de Ampère é corrigida introduzindo a corrente de deslocamento e a lei de Gauss é demonstrada (MAXWELL, 1862, p. 12–24). A suposição da elasticidade do meio magneto-elétrico permitiu a extensão da teoria à eletrostática, na qual as tensões elásticas do éter mecânico correspondiam ao campo eletrostático. As “colméias” podiam ser deformadas pela ação das forças feitas pelas pequenas partículas ao redor e, por sua vez, essa deformação variavam de acordo com a movimentação das “rodas livres”. Por exemplo, em uma situação de campo magnético

Modelo de vórtices moleculares		**Eletromagnetismo**
"idle wheels"	$\longleftrightarrow$	matéria elétrica
fluxo de "wheels"	$\longleftrightarrow$	corrente elétrica
força sobre as "wheels"	$\longleftrightarrow$	força eletromotiva
pressão entre as "wheels"	$\longleftrightarrow$	tensão ou potencial
velocidade angular dos vórtices	$\longleftrightarrow$	intensidade magnética

Tabela 2.2: Analogia no modelo de vórtices moleculares de Maxwell.

uniforme, os vórtices giram com mesma velocidade angular e as "wheels" possuem apenas movimento de rotação. Sendo assim, neste caso, a força eletrostática é nula, pois não existe tensão sobre os vórtices (ou sobre as "wheels"). Contudo, se por algum motivo houver variação na rotação dos vórtices, as "wheels" irão transladar, além de girar; a mudança de movimento das "wheels" é causada por uma força exercida pelos vórtices que, devido a ação e reação, sofrem ação das "wheels" e se deformam. Essa dinâmica da variação da deformação dos vórtices aliada à variação da rotação dos vórtices propaga-se como onda, o que seria uma onda eletromagnética (MAXWELL, 1862, p. 85–95).

Em *On Physical Lines*, Maxwell teve como proposta central juntar os fenômenos eletromagnéticos e a luz sob um único modelo. O título íntegro de seu trabalho deixa isso claro, *On Physical Lines of Force: The Theory of Molecular Vortices Applied to ...*

... *Magnetic Phenomena* (1861);

... *Electric Currents* (1861);

... *Statical Electricity* (1862);

... *the Action of Magnetism on Polarized Light* (1862).

A proposta era ousada e teve sucesso na demonstração de que o meio eletromagnético é o mesmo meio em que a luz se propaga. Um marco na história da Física.

Os tubos são inicialmente usados no trabalho, porém perdem espaço para outros elementos de caracterização do meio, as definições e a matemática giram em torno do modelo de "colmeias" que representam os vórtices interagindo com as pequenas partículas, as "wheels". Para os próximos trabalhos os conceitos de elasticidade do meio e vorticidade se mantém na teorização dos fenômenos eletromagnéticos, entretanto sem a ilustração de um mecanismo como justificativa.

Os cálculos desenvolvidos por Maxwell no seu modelo de vórtices em *On Physical Lines* são extensos e ricos em detalhes, merecem, por isso, atenção exclusiva que não será dada aqui. Porém, é possível ver a matemática e as nuances do modelo usado em *Physical Lines* através dos trabalhos de Seigel (1985, 1991, 2014), Darrigol (2000), Harman (1982), Wise (1979), Campbell (1882), todos autores usados como leitura para a construção desta seção.

2.3.4 *Dynamical Theory*

Unificar a luz e os fenômenos elétricos e magnéticos em uma dinâmica de um único meio mecânico foi, de fato, um grande feito de Maxwell. Dentro desse programa, Maxwell escreveu as equações que são a base do eletromagnetismo clássico até hoje e mostrou que uma onda eletromagnética se propaga com a velocidade da luz. Em *A Dynamical Theory of the Elctromagnetic Field* (p. 460), Maxwell mantém a ideia dos fenômenos eletromagnéticos como a dinâmica de um meio e propõe sua

> *[...] teoria do* Campo Eletromagnético*, porque tem a ver com o espaço na vizinhança dos corpos elétricos ou magnéticos e, pode ser chamada de* Teoria Dinâmica*, porque assume que naquele espaço há matéria em movimento, pela qual os fenômenos eletromagnéticos observados são produzidos.*[27]

[27] As ênfases do original foram mantidas.

A proposta da luz como onda eletromagnética mantém-se, pois "as ondulações são de uma substância etérea". A luz era devida à propagação da deformação do meio etéreo, o qual possui elasticidade, na qual Maxwell chamou de "resiliência do meio". Maxwell entende que a luz se propaga através da alternância entre a energia "real", devido ao movimento das partes do meio; e a energia "potencial", devida à resiliência (MAXWELL, 1865, p. 461):

> *O meio é [...] capaz de receber e armazenar dois tipos de energia, a saber, a energia "real", dependendo dos movimentos de suas partes, e a energia "potencial", que consiste no trabalho que o meio fará na recuperação do deslocamento em virtude de sua elasticidade.*
>
> *A propagação das ondulações [a luz] consiste na transformação contínua de uma dessas formas de energia na outra alternadamente e, a qualquer momento, a quantidade de energia em todo o meio é igualmente dividida, de modo que metade é energia de movimento e [a outra] metade é resiliência elástica.*

Em *Dynamical Theory*, os mecanismos de interação são suprimidos pelo método e conceitos estabelecidos por Lagrange, em *Mécanique analytique* (1788) como externado por Maxwell (MAXWELL, 1865, p. 467–475). As componentes principais para a descrição dos fenômenos eletromagnéticos são: o movimento e a elasticidade do meio, energia cinética e potencial; pois "a energia nos fenômenos eletromagnéticos é energia mecânica" (MAXWELL, 1865, p. 487). O foco de Maxwell é a dinâmica do meio, entretanto sem se ater ao mecanismo de interação. Embora a teoria estude as interações no meio etéreo, nessa ocasião não há mais demanda de uma estrutura como as "idle wheels" e as colmeias (MAXWELL, 1865, p. 487):

> *Em uma ocasião anterior [em* On Physical Lines*] tentei descrever um tipo particular de movimento e um tipo particular de tensão, dispostos de forma a explicar*

> *os fenômenos. No presente artigo, evito qualquer hipótese desse tipo; e ao usar palavras como momentum elétrico e elasticidade elétrica em referência aos fenômenos conhecidos da indução de correntes e a polarização de dielétricos, desejo meramente direcionar a mente do leitor para fenômenos mecânicos que o ajudarão a compreender os elétricos.*

A associação básica feita é: a energia cinética é o movimento produzido pelo trabalho da força magnética sobre a matéria elétrica, enquanto a tensão elétrica, ou ainda, o campo elétrico é associado à energia potencial armazenada no meio. Toda teoria gira em torno das analogias com a mecânica, o que leva Maxwell às mesmas equações do eletromagnetismo que havia escrito outrora — em *Physical Lines* — mostrando consistência do método.

O meio elástico, que suporta deformação e as mudanças de movimento ocasionadas nesse mesmo meio tornam-se os principais protagonistas da teoria eletromagnética, ficando para trás, dessa forma, as estruturas que representavam essas qualidades. Embora as linhas de força permaneçam, pois são elas que mostram a disposição espacial das superfícies equipotenciais, não há mais tubos, "idle wheels", colmeias, catracas, engrenagens ou qualquer imagem física que represente as interações eletromagnéticas. Posteriormente, em seu *Treatise*, Maxwell mantém a elasticidade do meio para caracterizar a carga eletrostática e introduz o conceito de *displacement*, conceito de difícil aceitação e compreensão da teoria eletromagnética maxwelliana (BUCHWALD, 1985a, p. 25). É sobre esse conceito que J. J. Thomson monta sua crítica a Maxwell e retoma os tubos como estrutura representativa do campo (THOMSON, 1904a, p. 16).

Alguns pontos sobre o *Treatise* e a apresentação do conceito de *displacement* é o que segue.

2.3.5 *Treatise*

No mês de Março de 1873 é publicado, em dois volumes, o *Treatise on Electricity and Magnetism*, fruto de quase vinte anos de dedicação de Maxwell ao estudo da teoria ele-

tromagnética. Esse Tratado era, em grande parte, um manual avançado sobre teoria matemática, instrumentação e fundamentos experimentais de eletricidade e magnetismo, em uma nova abordagem teórica de campo. Nesse período, o Tratado foi implementado a vários regimes de treinamento dentro da Universidade de Cambridge (WARWICK, 2003, p. 286–291), como foi o caso do famoso exame *Mathematical Tripos* (WILSON, 1982, p. 338). Maxwell buscava inserir-se em um contexto que carecia de abordagens quantitativas a respeito da teoria eletromagnética. Segundo Darrigol (2000, p. 166), nos poucos livros existentes sobre a temática, não havia uma abordagem sistemática e completa. Por exemplo, o *Traité d'électricité* (1853), de Auguste de la Rive, possuía uma abordagem basicamente empírica, pouco matemática e ignorava, ou interpretava erroneamente as ideias de Faraday. Outro exemplo é o caso de *Lehre vom Galvanismus* (1861), de Wiedemann, que trazia de forma precisa ideias de trabalhos publicados no período, porém sua forma enciclopédica de apresentação era inadequada para orientação dos estudantes.[28] Assim, como um manual, a estrutura do *Treatise* mostra-se didática. O livro começa introduzindo conceitos preliminares como unidades fundamentais (MAXWELL, 1873, § 3–5), continuidade de uma função (MAXWELL, 1873, § 8), diferenças entre escalares e vetores (MAXWELL, 1873, § 11) dentre outros temas. Em seu prefácio, Maxwell mostra preocupação em resgatar as principais teorias até o momento e justificar sua escolha de abordagem. Embora reconheça a importância das teorias pautadas pela ação a distância, Maxwell diferencia sua abordagem daquelas feitas por Wilhelm Eduard Weber, Georg Friedrich Bernhard Riemann e outros (MAXWELL, 1873):

> *Essas hipóteses físicas [da ação a distância], no entanto, são inteiramente estranhas à maneira de ver as coisas que adoto, e um objetivo que tenho em vista é que alguns dos que desejam estudar eletricidade podem, lendo este tratado, ver que há outra maneira de tratar o assunto, que não é menos adequada para explicar os*

[28] Segundo Maxwell, ambos os livros, *Tratié d'électricité* e *Lehre vom Galvanismus* são importantes na compreensão dos fenômenos elétricos e magnéticos, veja seção xi do prefácio do *Treatise* (1873).

> *fenômenos, e que, embora em algumas partes possa parecer menos definida, corresponde, a meu ver, mais fielmente ao nosso conhecimento real, tanto no que afirma como no que deixa em aberto.*

O tratado apresenta as ideias de Maxwell mais amadurecidas, sua proposta central tem abordagem semelhante àquela encontrada em *Dynamical Theory*, pois trata o éter como um único meio com propriedades macroscópicas variáveis e evita especulações sobre sua natureza. O *Treatise* ostenta aspectos gerais dos campos elétricos e magnéticos como eixo estruturante, tais como a teoria de campo para a eletricidade baseada em conceitos de carga e corrente; uma derivação dinâmica das equações de movimento pelo método lagrangeano; e a essência da teoria eletromagnética da luz. Em segundo plano, o tratado traz tipos especiais de condução elétrica, teorias especiais de magnetização e a rotação magneto-óptica, na qual Maxwell recorre a detalhes da conexão entre o éter e a matéria.

Dentre tantas ideias contidas no *Treatise*, como mostra Buchwald (1985b, p. 230–231), pode-se destacar:

- Carga é uma descontinuidade no deslocamento elétrico (hoje, o vetor $\mathbf{D}$) e a corrente é o éter em movimento;
- o efeito da matéria sobre o éter é misterioso e deve ser deixado de lado até que os problemas sejam resolvidos pelo método da energia;
- a condutividade elétrica é particularmente misteriosa e tem algo a ver com a estrutura da matéria;
- condições de contorno são ferramentas analíticas cruciais;
- modelos mecânicos do éter são importantes ilustrações das trocas de energia mas não refletem a verdadeira estrutura do éter.[29]

[29] Segundo Buchwald, esta lista pode ser ampliada, porém estes aspectos foram os principais usados pelos Maxwellianos.

Diferente de *On Physical Lines*, onde a corrente elétrica correspondia ao fluxo de partículas ("wheels") entre os vórtices ("colmeias") e a carga ao acúmulo dessas partículas, no *Treatise*, semelhantemente ao *Dynamical Theory*, Maxwell define a corrente elétrica como transferência da polarização e a carga como descontinuidade da polarização. Essa descontinuidade é associada ao deslocamento elétrico (**D**). Maxwell inicia sua discussão com a garrafa de Leyden (MAXWELL, 1873, § 111):

> **I**. *Deslocamento elétrico. Quando a indução ocorre em um dielétrico, ocorre um fenômeno que é equivalente a um deslocamento de eletricidade na direção da indução. Por exemplo, em um frasco de Leyden, no qual o revestimento interno é carregado positivamente e o revestimento externo negativamente, o deslocamento na substância do vidro é de dentro para fora. Qualquer aumento deste deslocamento é equivalente [...] a uma corrente de eletricidade positiva de dentro para fora, e qualquer diminuição do deslocamento é equivalente a uma corrente na direção oposta.*

Dentro dessa percepção, em vez de considerar a carga uma substância elétrica que pudesse se acumular nos corpos, Maxwell entendia a carga como um epifenômeno do campo. Seu conceito envolvia a transformação da energia armazenada no éter em forma de calor, o que era representado macroscopicamente pela condutividade elétrica. Por exemplo: pode-se imaginar uma região do éter sem a presença de matéria ordinária e que contenha campo elétrico — tendo assim energia potencial armazenada no éter; colocando-se um pedaço de matéria nessa região — por exemplo um condutor — a região do éter, agora ocupada pela matéria, começa a perder a energia armazenada por conta da condução; o resultado é a criação de uma diferença nos valores do deslocamento elétrico na fronteira entre a matéria e o éter livre; essa diferença representa, em qualquer instante, a carga elétrica na fronteira. A corrente elétrica era considerada a taxa com a qual uma parte do éter se move; se o éter não for perturbado, não existe corrente. Para ligar os dois

processos, carga e corrente, é assumido ou que a corrente gera um campo magnético ou então que um campo magnético variável gera um deslocamento do éter. Pelas palavras de Maxwell a carga é (MAXWELL, 1873, § 111):

> **II**. *Eletrificação superficial das partículas do dielétrico. Conceba qualquer porção do dielétrico, grande ou pequeno, a ser separada (na imaginação) do resto por uma superfície fechada, então devemos supor que em cada porção elementar desta superfície há uma eletrificação medida pelo deslocamento total da eletricidade através daquele elemento da superfície em seu interior.*
>
> *No caso da jarra de Leyden cujo revestimento interno é carregado positivamente, qualquer porção do vidro terá seu lado interno carregado positivamente e seu lado externo negativamente. Se esta porção estiver inteiramente no interior do vidro, sua eletrificação superficial será neutralizada pela eletrificação oposta das partes em contato com ele, mas se estiver em contato com um corpo condutor que é incapaz de manter em si o estado indutivo, a eletrificação superficial não será neutralizada, mas constituirá aquela eletrificação aparente que é comumente chamada de Eletrificação do Condutor.*
>
> *A eletrificação, portanto, na superfície limite de um condutor e do dielétrico circundante, que na teoria antiga era chamada de eletrificação do condutor, deve ser chamada na teoria da indução de eletrificação superficial do dielétrico circundante.*
>
> *Segundo essa teoria, toda eletrificação é o efeito residual da polarização do dielétrico. Essa polarização existe em todo o interior da substância, mas aí é neutralizada pela justaposição de partes eletrificadas opostas, de modo que é apenas na superfície do dielétrico que os efeitos da eletrificação se tornam aparentes.*

Para a melhor compreensão da argumentação apresentada por Maxwell, será seguido de perto a discussão feita pelo Buchwald (1985a, p. 25–27), na qual faz-se, por simplificação, um paralelo entre a garrafa de Leyden e uma esfera positivamente carregada

imersa em um dielétrico infinito. A discussão mostra a diferença entre uma percepção moderna e a percepção maxwelliana.

Através de uma visão moderna, a análise deve ser feita a partir da carga positiva distribuída sobre a superfície da esfera condutora (figura 2.8). Esta carga produz um campo elétrico que polariza o dielétrico ao redor. O dielétrico é dividido em duas partes — como proposto por Maxwell — por uma superfície imaginária (S): uma parte interna (A), que está entre condutor e a superfície imaginária; e outra parte externa (B), que está após a superfície imaginária e segue ao infinito. Seguindo uma visão moderna, a fronteira interna de A — a parte interna em contato com a esfera — contém carga de polarização negativa, na qual é menor em magnitude que a carga de condução da esfera. A fronteira de A delimitada pela superfície S contém carga de polarização positiva, numericamente igual à carga negativa encontrada na parte de A que está em contato com a esfera. As cargas contidas na parte A se compensam, deixando assim a parte de B que toca a superfície S carregada negativamente (figura 2.9).

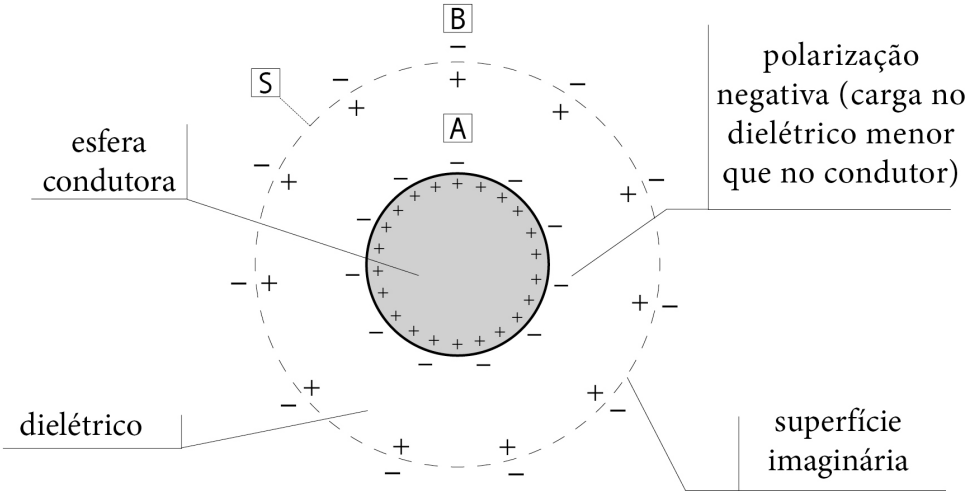

Figura 2.8: Distribuição de carga em uma esfera condutora imersa em um dielétrico infinito na visão moderna.

Agora, analisando a situação através da citação de Maxwell (MAXWELL, 1873, § 111),

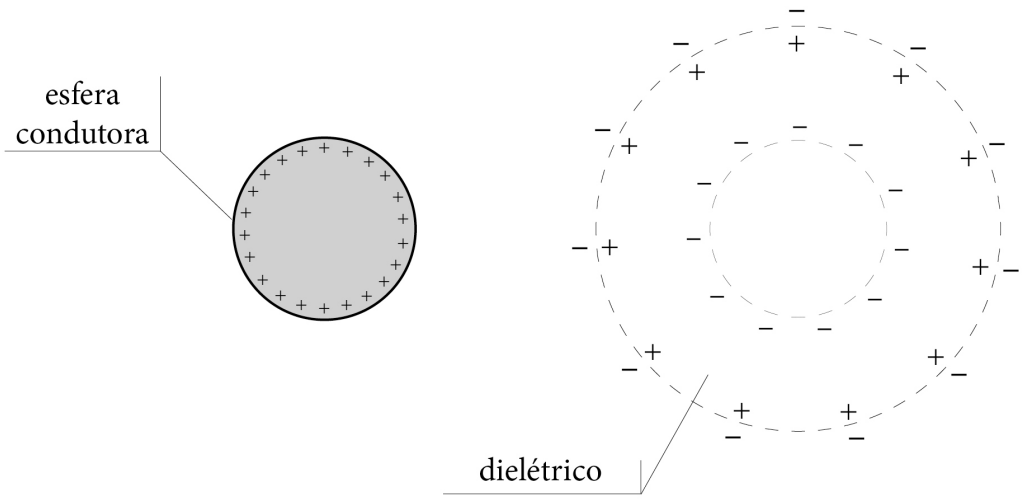

Figura 2.9: A carga contida na superfície da esfera condutora induz carga no dielétrico de sinal oposto e menor em magnitude.

o esquema é dado de outra maneira (figura 2.10). Procedendo da mesma maneira que descrito anteriormente, dividindo o dielétrico em duas partes, A e B. Neste caso, há um deslocamento elétrico **D** por todo dielétrico que aponta para fora a partir do centro da esfera. Considerando-se primeiro a parte B, tendo em vista que o deslocamento elétrico aponta do centro da esfera para fora, **D** aponta paralelo ao vetor normal à superfície interna de B. Pela definição de Maxwell, a superfície interna de B, aquela logo após a superfície imaginária S, está carregada positivamente; essa quantidade de carga por unidade de área é numericamente igual à **D**.

Sobre a parte A que toca a superfície S: o deslocamento elétrico que aponta do centro da esfera para fora está em sentido contrário ao vetor normal à superfície interna de A, consequentemente a carga é negativa e de mesma magnitude da carga contida no interior de B; sendo assim, a carga total nessa região é nula. Porém, na interface entre a esfera condutora e o dielétrico, a superfície interna de A possui o vetor normal à superfície paralelo e em mesmo sentido ao vetor **D**, dessa maneira a carga nessa superfície é positiva. Todavia, não há deslocamento elétrico dentro do condutor fazendo com que não haja carga

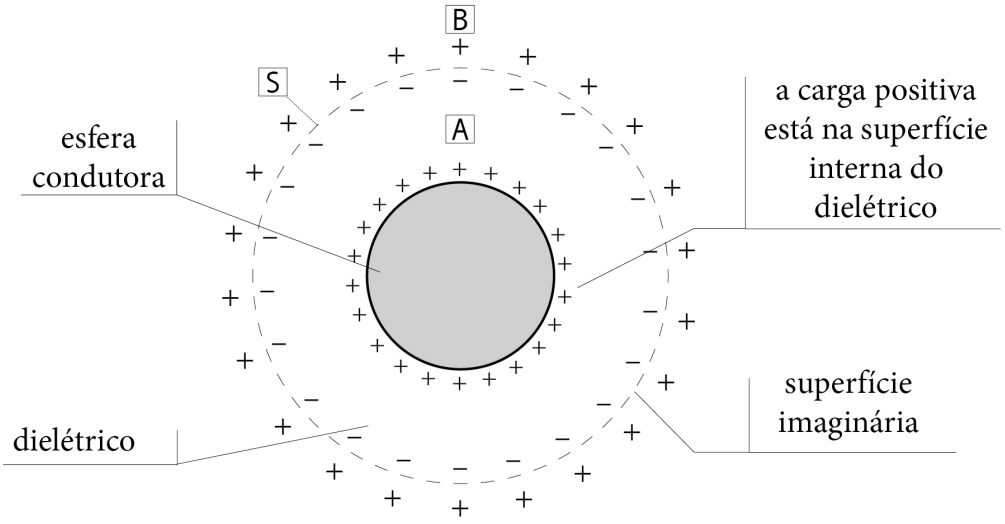

Figura 2.10: Distribuição de carga em uma esfera condutora imersa em um dielétrico infinito na visão de Maxwell.

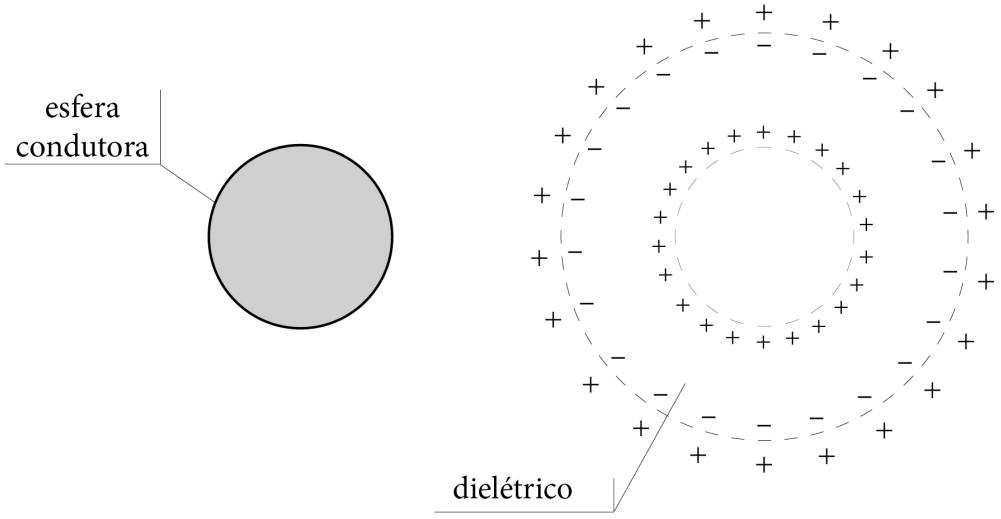

Figura 2.11: Não há carga no condutor, a carga está no meio e é um subproduto da descontinuidade de **D**.

em sua superfície (figura 2.11). Assim, a teoria moderna vê carga positiva na superfície do condutor, enquanto a teoria de Maxwell vê carga positiva na parte interna do dielétrico.

Nesse momento o presente capítulo cumpre seu objetivo. Nele mostramos as ideias

que gravitavam ao redor da teoria maxwelliana e as principais influências. Os tubos fundamentaram a teoria em seu início e ao longo da evolução dos conceitos perderam lugar para outras abordagens. Após muito tempo, J. J. Thomson revisita os tubos dando novas qualidades a eles e usa a vorticidade para dar conta de fenômenos e componentes que antes estavam em aberto, a saber: a eletrólise e a estrutura do átomo. O próximo passo será mostrar o contexto em que o conceito de vorticidade antecede os trabalhos de J. J. Thomson.

Capítulo 3

A teoria dos anéis de vórtices e o átomo

Não há dúvida que os trabalhos de Hermann Ludwig Ferdinand Helmholtz durante o período de 1858 até 1868 foram seminais,[1] pois trouxeram importantes contribuições à teorização da hidrodinâmica, em especial à dinâmica dos vórtices, principalmente em *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen* de 1858.

A pesquisa de Helmholtz teve origem nos fenômenos acústicos, nos quais a problematização era determinar as formas de movimento que o atrito produzia nos fluidos. Segundo Russell McCormmach e Christa Jungnickel (1986, p. 307), Helmholtz acreditava que o atrito acarretava mudanças significativas no movimento dos líquidos e, por isso não podia ser ignorado. Além de importantes contribuições para a teorização da hidrodinâmica, Helmholtz também mostrou relações de sua teoria com outros fenômenos físicos, como a eletricidade e o magnetismo (DORAN, 1975; DARRIGOL, 2005; MELESHKO; AREF, 2007; BOKULICH, 2015).

A consideração das rotações em um meio contínuo não foi uma contribuição original de Helmholtz,[2] porém os avanços na teorização, apresentados por ele, permitiram a W. Thomson justificar sua teoria atômica de vórtices. Para W. Thomson, a teoria era consistente com dois preceitos filosóficos: seu comprometimento com modelos dinâmicos e sua

[1] Helmholtz recebeu o título "von"em 1882 (MELESHKO; AREF, 2007).

[2] A fenomenologia já havia sido estudada em trabalhos anteriores como os de d'Alembert (1749), Euler (1752-1755), Lagrange (1760) e Cauchy (1815) (MELESHKO; AREF, 2007).

profunda aversão ao atomismo de Lucretius, pois neles havia "a suposição monstruosa de pedaços de matéria infinitamente fortes e infinitamente rígidos" (THOMSON, 1867, p. 15). Na percepção de W. Thomson o modelo de vórtices possibilitava entender o átomo em termos de um fluido contínuo fundamental que permeava todo espaço (NAVARRO, 2012, p. 37).

A teoria da dinâmica de vórtices, embora tenha sido também investigada por cientistas continentais, raramente foi relacionada com a constituição da matéria e a teoria atômica. Em verdade, a proposta de entender a matéria formada por átomos de vórtices era britânica em essência, originada na Escócia especialmente por W. Thomson e logo difundida por físicos matemáticos treinados na tradição de filosofia natural de Cambridge. Alguns dos mais proeminentes físicos atômicos de vórtices foram Peter Guthrie Tait, William Hicks, William John Macquorn Rankine e J. J. Thomson. O único outro país, onde o átomo de vórtice foi recebido favoravelmente, foram os Estados Unidos da América (KRAGH, 1976, p. 33).

A análise deste capítulo é focada nas contribuições de W. Thomson à elaboração dos átomos de vórtice, que serviram como referência direta para J. J. Thomson em seu tratado de 1883.

Para tanto, alguns elementos e definições são necessárias para o entendimento das representações feitas por W. Thomson, que serão revisitadas posteriormente por J. J. Thomson; o estudo sobre filamentos e anéis de vórtices é um exemplo. Assim, nesta seção, o que segue são alguns ingredientes da teoria de vórtices de Helmholtz que foram — e ainda são — importantes na hidrodinâmica. A apresentação recorrerá a uma linguagem moderna em sua maior parte, o que não prejudica a argumentação; longe disso, a linguagem moderna nesse momento auxiliará o entendimento de conceitos cruciais da teoria.[3]

[3] Para mais informações acerca da percepção dos ingleses sobre os trabalhos de Helmholtz, pode-se consultar obras de seus contemporâneos como George Francis FitzGerald (1902) e Maxwell (1877). Para investigações mais recentes sobre Helmholtz pode-se consultar (CAHAN, 1993), (DARRIGOL, 1998),

3.1 Vorticidade

O termo *vorticity* foi introduzido por Horace Lamb em 1916 no seu livro *Hydrodynamics* (p. vii, 30). Nesse trabalho, Lamb entende a vorticidade como um vetor de características definidas a serem apresentadas mais à frente neste capítulo. Outros autores utilizavam uma nomenclatura diferente e entendiam a vorticidade através de suas componentes; por exemplo, Stokes chamava as componentes da "vorticidade" de *velocidades angulares*, Helmholtz usava *velocidades de rotação*, W. Thomson nomeou de *componentes da rotação* e Alfred Barnard Basset usava *rotações moleculares* (TRUESDELL, 1954, p. 58). Segundo Truesdell (1954, p. 58–65), a noção de vorticidade aparece a partir do século XVIII e avança através de diferentes perspectivas de atores como Jean le Rond d'Alembert (1749), Leonhard Euler (1752), Joseph-Louis Lagrange (1760), Joseph-Louis Cauchy (1815 e 1841), James MacCullagh (1839), George Gabriel Stokes (1851), William John Macquorn Rankine (1851), Hermann Helmholtz (1858), Hermann Hankel (1861), Gustav Roch (1863), William Thomson (1869), Alfred Bernard Basset (1888) e outros. Rever a construção de tal conceito foge do escopo da tese. O interessante neste momento são as definições incialmente propostas por Helmholtz, influentes nos trabalhos de seus contemporâneos e sucessores.

As teorias que antecederam *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen* estudavam a dinâmica dos fluidos através das componentes da velocidade de cada elemento do fluido.[4] Essas componentes eram determinadas a partir dos chamados "coeficientes diferenciais" da função *potencial de velocidade* (MELESHKO; AREF, 2007, p. 198).[5] Tal abordagem tinha sucesso na descrição do movimento de fluidos ideais em situações cu-

(DARRIGOL, 2005).

[4] Lagrange estudava a dinâmica a partir do referencial solidário ao elemento de fluido, Euler analisava a variação da velocidade em referencial fixo. Essas duas abordagens se traduzem, dentro de um perspectiva contemporânea, em uma análise da dinâmica dos fluidos através de dois sistemas de coordenadas: lagrangiano e euleriano.

[5] A ideia de potencial de velocidade foi proposta por Euler entre os anos 1752 – 1755 (TRUESDELL, 1954, p. 69).

jas forças atuantes pudessem ser descritas através de um potencial (DARRIGOL, 2005, p. 149). Assim, dentro desse contexto, a velocidade do fluido $\boldsymbol{u}$ descrita por uma função velocidade potencial ϕ pode ser dada por

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi, \tag{3.1}$$

que satisfaz à condição

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u} = \mathbf{0}. \tag{3.2}$$

Um fluxo submetido a essa condição é denominado **irrotacional**. Ao rotacional $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}$ é associada a grandeza vorticidade:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}. \tag{3.3}$$

As componentes de $\boldsymbol{\omega}$ são:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) \quad , \\
\omega_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) \quad , \\
\omega_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) \quad ,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde α, β e γ são as componentes da velocidade $\boldsymbol{u}$, enquanto x, y e z são as componentes do vetor posição de uma partícula do fluido em um dado referencial.

Contudo, no caso em que existe atrito, como as forças de resistência não são conservativas, o movimento não pode ser descrito a partir de um potencial. Nesse caso, Helmholtz propõe: estudar situações onde existam forças não conservativas e, assim, desenvolver uma abordagem independente das forças responsáveis pelo movimento.

Segundo Darrigol (2005, p. 149-150), a condição $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ era interpretada pela ausência de rotação local do movimento de um fluido em dado instante; portanto, a

ausência de um potencial para a velocidade sinaliza a existência de vórtices no fluido.

Para examinar a evolução temporal da vorticidade, Helmholtz escreve a equação de Euler para o movimento de um fluido:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}[\nabla P - \nabla V], \tag{3.5}$$

onde P é a pressão, ρ a densidade (constante) e V o potencial devido a ação das forças externas. Ao aplicar o operador $\boldsymbol{\nabla}\times$ à equação (3.5), Helmholtz obtem a evolução temporal da vorticidade:[6]

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}, \tag{3.6}$$

que comumente é escrita como

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}, \tag{3.7}$$

onde $\dfrac{D}{Dt} \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})$ é a *derivada material* ou *derivada convectiva*, que representa a taxa de variação de determinada quantidade de um elemento de fluido que se move ao longo de sua trajetória. Assim, pode-se entender que $\dfrac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt}$ representa a taxa de variação do vetor $\boldsymbol{\omega}$ de um elemento de fluido que se desloca com velocidade $\boldsymbol{u}$.

O significado físico da vorticidade, como mencionado anteriormente, retoma uma constelação de autores e trabalhos que antecedem o *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen* (1858). Porém, mesmo não revendo a maioria desses trabalhos antecessores, é

[6] A equação (3.5) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) - 2\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho}[\nabla P - \nabla V].$$

Aplicando $\boldsymbol{\nabla}\times$ temos:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega}),$$

que pode ser escrito como

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = -\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\cdot)\boldsymbol{\omega}.$$

Essa equação já havia sido obtida por d'Alembert e posteriormente por Euler de maneira mais geral (TRUESDELL, 1954, p 172; DARRIGOL, 2005, p 150). A equação (3.6) de Helmholtz é um caso particular, no qual temos o fluido de densidade constante, onde $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0$.

relevante dizer que muitas ideias usadas por Helmholtz já circulavam no período em que ele desenvolveu seu trabalho. Por exemplo, em *On the theorems of the internal friction on fluids in motion* (1845), dentre tantos seminais resultados acerca do estudo dos fluidos, Stokes demostra um teorema fundamental que decompõe o movimento instantâneo de um elemento de um fluido em três (DARRIGOL, 2005, p. 151): translação, expansão e rotação. De outra maneira: um estado de movimento instantâneo arbitrário pode ser resolvido em cada ponto por uma translação uniforme, uma dilatação ao longo de três eixos mutuamente perpendiculares e uma rotação rígida desses eixos (TRUESDELL, 1954, p. 66).[7]

Helmholtz define a vorticidade como $\boldsymbol{\omega}/2$ para descrever a rotação do elemento infinitesimal do fluido; além disso introduz: as linhas de vórtices e filamentos de vórtices. O filamento de vórtice é definido a partir do tubo de vórtice que, por sua vez, é definido pelas linhas de vórtice ou linhas de vorticidade. As linhas de vórtice são linhas paralelas ao vetor vorticidade em qualquer ponto, semelhante às linhas de força no eletromagnetismo; o filamento de vórtice é um tubo de vórtice com área de seção reta infinitesimal; o tubo de vórtice é um tubo cuja superfície longitudinal é formada por linhas de vorticidade (figura 3.1). Outra importante definição, que está associada a essas estruturas, é a propriedade da circulação,[8] que pode ser definida a partir de um tubo de vórtice; considerando-se uma curva $\mathcal{C}$ fechada cujos pontos pertençam às linhas de vorticidade desse tubo (figura 3.1); a circulação é

$$\Gamma(\mathcal{C}(t), t) = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{l},$$

onde $\boldsymbol{u}$ é a velocidade da partícula de fluido e $d\boldsymbol{l}$ é um elemento infinitesimal da curva $\mathcal{C}$; pelo teorema de Stokes:

[7] Essa análise é próxima daquela apresentada por Cauchy em seus trabalhos desde 1823 (TRUESDELL, 1954, p. 66, nota 1).

[8] A circulação é o termo associado ao *strength* de um tubo. Esse termo foi utilizado por W. Thomson na descrição de suas distribuições magnéticas, na qual *strength* era definido pelo produto da intensidade magnética e a área da seção transversal do tubo dada distribuição solenoidal. Veja a seção (2.3.1). A definição e as propriedades da circulação são discutidas por W. Thomson em seu trabalho *On Vortex Motion* de 1869, que será comentado mais à frente.

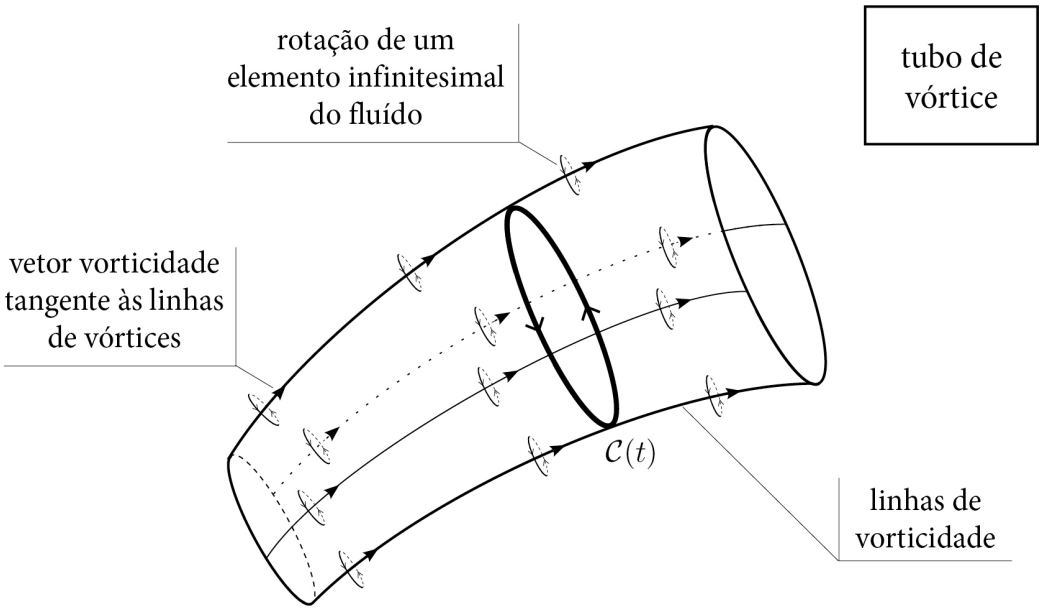

Figura 3.1: Tubo de vórtice formado pelas linhas de vorticidade (ou linhas de vórtices). O vetor da vorticidade local $\boldsymbol{\omega}$ é tangente à linha de vorticidade. As linhas conjugadas formam o tubo. A curva $\mathcal{C}$ fechada, associada ao tubo de vórtice, delimita a integral de linha na definição da circulação.

$$\Gamma(\mathcal{C}(t), t) = \int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}) \cdot d\boldsymbol{a},$$

sendo $d\boldsymbol{a}$ um elemento de área infinitesimal de qualquer superfície delimitada pelo bordo $\mathcal{C}$.

A partir dessas definições, Helmholtz demostrou alguns importantes resultados que, nos livros atuais de dinâmica dos fluidos costumam ser assim enunciados:

- duas partículas que fazem parte da mesma linha de vórtice em dado instante, continuam compondo a mesma linha em qualquer instante de tempo;

- durante o movimento do fluido, os filamentos de vórtices esticam (ou contraem) na mesma proporção que a velocidade da rotação varia;

- por último, filamentos de vórtices apresentam-se sempre fechados (como um anel)

ou terminam nos limites do fluido.

Assim, os tubos de vórtice não começam ou terminam em um ponto no interior do fluido, tubos de vórtice ou formam circuitos fechados, como anéis, ou se estendem até as regiões de fronteira. A circulação do tubo permanece constante com o tempo e ao longo de seu comprimento, ou seja, são estruturas estáveis do fluido. As linhas compostas sempre pelas mesmas partículas são definidas como *linhas materiais*; assim, as linhas de vórtices são linhas materiais, pois cada linha de vórtice sempre compreende os mesmos elementos de fluido. A vorticidade, em um fluido ideal, não pode ser gerada ou destruída e as linhas de vórtices nunca se cruzam; desse modo, um tubo ou anel de vórtice se mantém íntegro em um fluido ideal. Com seus teoremas, segundo Darrigol (2005, p. 153), Helmholtz descreveu alguns casos simples da dinâmica de vórtices em um fluido ideal infinito: vórtices em uma fina célula plana,[9] em um filamento linear e anéis de vórtices.

Helmholtz obtém independentemente as representações de Stokes (1849) para o problema clássico de análise vetorial, o qual determina um campo vetorial a partir da divergência e rotacional do campo.[10] A determinação do campo de velocidade para um fluido incompressível leva Helmholtz, por analogia, à lei de Biot-Savart do eletromagnetismo. Desse modo, caracterizando a interação entre dois elementos do fluido que estão em rotação, Helmholtz determina a magnitude da velocidade induzida por um primeiro elemento do fluido sobre um segundo: deve ser diretamente proporcional ao volume do primeiro elemento, a velocidade angular e o seno do ângulo entre a linha que une os dois elementos e o eixo de rotação, sendo inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os dois elementos (HELMHOLTZ, 1867, p. 498).

Em "Filamentos de vórtices paralelos retos" (HELMHOLTZ, 1867, p. 503), Helmholtz estuda casos de interação entre filamentos de vórtices retilíneos paralelos. Em particular,

[9] Em duas dimensões, o lado direito da equação (3.7) é nulo pois, nesse caso, a velocidade angular só tem componente perpendicular a esse plano.

[10] A terminologia usada por Helmholtz para a componente divergente é "integrais hidrodinâmicos de primeira classe"; para a componente rotacional é "integrais hidrodinâmicas de segunda classe" (HELMHOLTZ, 1867, p. 500).

ele considera vários filamentos de vórtice paralelos infinitamente finos, cada um dos quais possui um valor para sua circulação, dado por m (produto da área da seção transversal e da velocidade angular). A partir daí, Helmholtz estabelece a lei de conservação do centro de vorticidade de um conjunto de vórtices pontuais. A discussão se inicia com a descrição do movimento de um único filamento (HELMHOLTZ, 1867, p. 504):

> *1. Se houver um único filamento de vórtice retilíneo de seção indefinidamente pequena em um fluido infinito em todas as direções perpendiculares a ele [filamento], o movimento de um elemento do fluido a uma distância finita [do filamento] depende apenas do produto ($[\zeta]\ dadb = m$) da velocidade de rotação e a seção,*[11] [12] *não da forma dessa seção. Os elementos do fluido giram em torno [do filamento] com velocidade tangencial* $= \frac{m}{\pi r}$*, onde* r *é a distância do centro de gravidade do filamento. A posição do centro de gravidade, a velocidade angular, a área da seção e, portanto, é claro, a magnitude* m *permanecem inalteradas, mesmo que a forma da seção indefinidamente pequena possa se alterar.*

Em seguida é descrita a interação entre dois vórtices, em que o movimento acontece em torno do "centro de gravidade" dos vórtices (figura 3.2 e 3.3) e os valores de m são considerados análogos à "massa" (HELMHOLTZ, 1867, p. 504–505):

> *2. Se há dois filamentos retilíneos de seção indefinidamente pequena em um fluido ilimitado, cada um fará com que o outro se mova em uma direção perpendicular à*

[11] O texto original tem um erro gráfico no qual ζ é trocado por ξ. Diferente do texto original, aqui será usado ζ (HELMHOLTZ, 1867, p. 503).

[12] Para Helmholtz, a e b são as coordenadas de um filamento em um plano, sendo sua seção dada por $dadb$. A vorticidade é descrita pelo vetor $\boldsymbol{\omega}$ de componentes (ξ, η, ζ) que podem, por sua vez, ser escritas em termos das componentes (u, v, w) do vetor velocidade $\boldsymbol{u}$. Assim

$$2\xi = \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x}, \qquad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Em notação moderna:

$$2\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}\,.$$

linha que os une. Assim, o comprimento dessa linha de junção não será alterado. Eles irão, portanto, girar em torno de seu centro de gravidade comum a distâncias constantes dele. Se a rotação estiver na mesma direção para ambos (ou seja, de mesmo sinal), o centro de gravidade estará entre eles. Se em direções opostas (ou seja, de sinais diferentes), o centro de gravidade estará na linha que os une. E se, além disso, o produto entre a velocidade e a seção for o mesmo para ambos, de modo que o centro de gravidade esteja a uma distância infinita, eles se deslocam para a frente com velocidade igual e em direções paralelas perpendiculares à linha que os une.

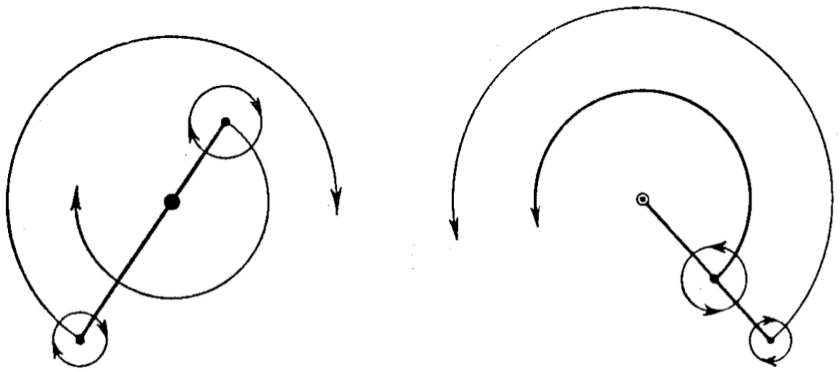

Figura 3.2: Dinâmica de dois filamentos retilíneos paralelos. Em (I), a rotação de cada filamento está no mesmo sentido (mesmo sinal) e em (II) as rotações estão em sentidos opostos (sinais diferentes) (MELESHKO; AREF, 2007).

No caso de anéis de vórtice circulares (figura 3.4), o anel se move ao longo de seu eixo e na mesma direção do fluxo do fluido em seu centro (HELMHOLTZ, 1867, p. 510):[13]

[...] em um filamento de vórtice circular de seção muito pequena de fluido indefinidamente estendido, o centro de gravidade da seção tem, desde o início, uma velocidade aproximadamente constante e muito grande paralela ao eixo do anel

[13] O movimento de um anel de vórtice é exibido em um vídeo da galeria do IRVINE LAB da Universidade de Chicago, que compõe o trabalho *Creation and dynamics of knotted vortices* (IRVINE LAB, 2017), disponível em ⟨http://irvinelab.uchicago.edu/images/DFD2013_final.mov⟩.

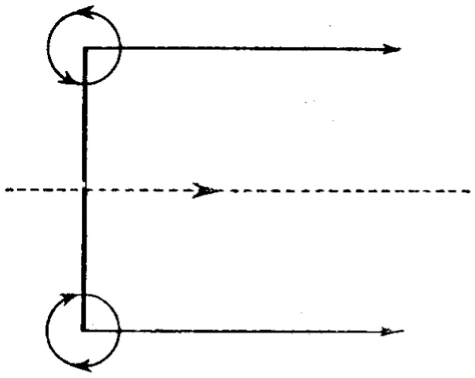

Figura 3.3: Caso em que o centro de gravidade está a uma distância infinita (MELESHKO; AREF, 2007).

> *de vórtice, e este é direcionado para o lado ao qual o fluido flui através do anel. Filamentos de vórtice indefinidamente finos de raio finito teriam uma velocidade de translação indefinidamente grande.*

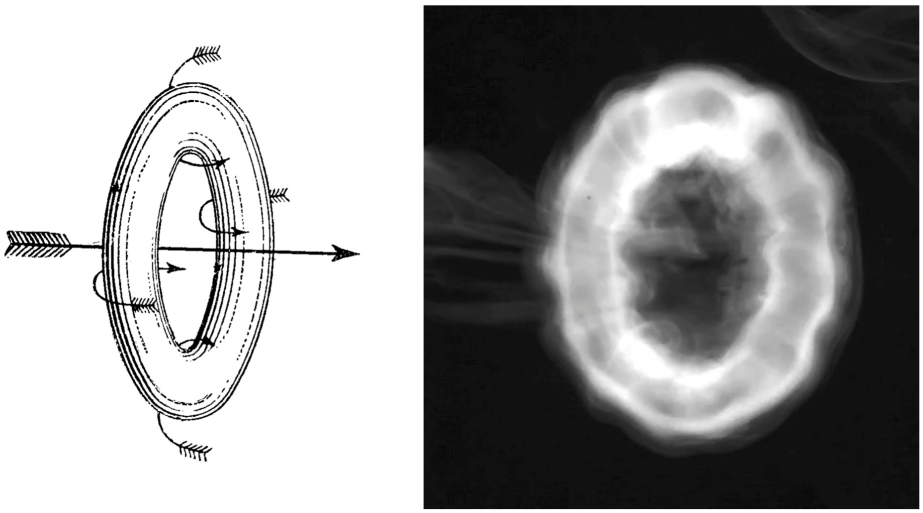

Figura 3.4: Dois anéis de vórtice. À esquerda, o anel de vórtice representado por P.G. Tait (TAIT, 1876, p. 296). As setas curvas indicam o sentido da rotação do corpo do anel; a seta maior e reta indica o sentido do movimento do anel. À direita, o anel de fumaça obtido no vídeo produzido em laboratório pelo grupo de pesquisadores do *Irvine Lab* da Universidade de Chicago (IRVINE LAB, 2013); disponível em ⟨http://irvinelab.uchicago.edu/images/DFD2013_final.mov⟩.

Helmholtz conclui afirmando que a velocidade do anel está relacionada a sua seção transversal. Após conclusões acerca do movimento de um único anel, Helmholtz analisa

a interação entre dois anéis que se movem na mesma direção (figura 3.5); o movimento acontece na seguinte sequência: o anel de trás (**A**) provoca um alargamento na abertura do anel (**B**), esse alargamento de (**B**) implica o estreitamento de sua seção transversal, fazendo com que sua velocidade diminua; por sua vez, a cintura do anel (**A**) aumenta (diminuindo sua abertura), o que faz com que sua velocidade aumente e passe por dentro de **B** (quadros 2, 3 e 4 da figura 3.5). Após a passagem de (**A**) por (**B**), o anel (**A**) tem sua cintura estreitada e, por isso, sua abertura alargada, até voltar às suas dimensões iniciais, enquanto o anel (**B**) tem sua cintura alargada e, por isso, sua abertura diminuída até voltar às suas dimensões inicias (quadros 2, 3 e 4 da figura 3.5); o ciclo se reinicia (HELMHOLTZ, 1867, p 510).[14]

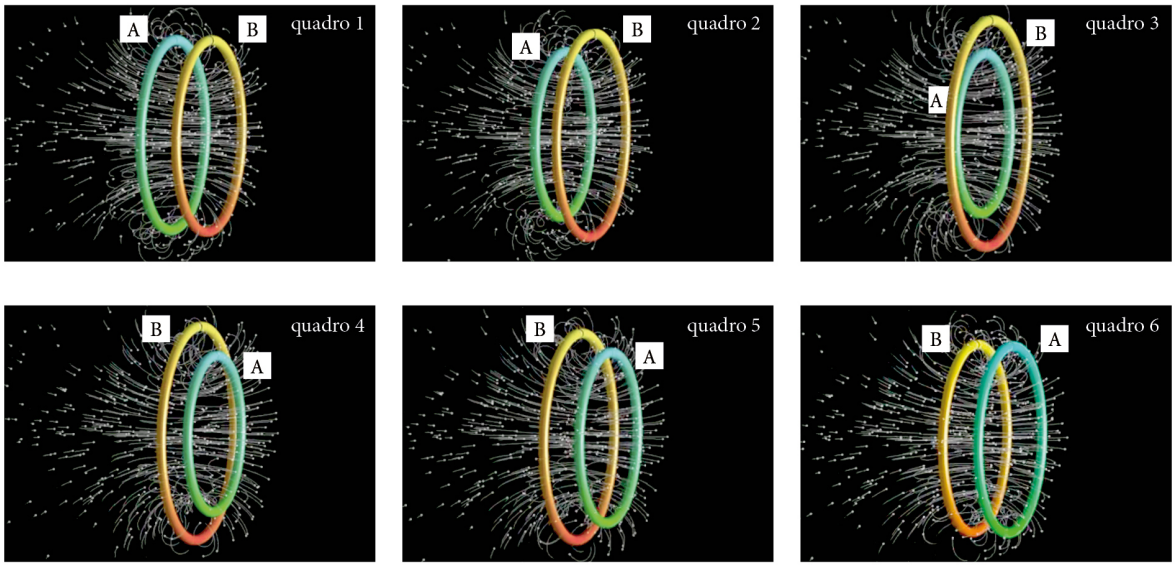

Figura 3.5: Sequência de seis quadros ilustrando a dinâmica de interação de dois anéis de vórtices alinhados no mesmo eixo, movendo-se na mesma direção e com velocidades iguais. O anel verde é o **A**, o abóbora é o **B**. Imagens retiradas do vídeo da simulação disponibilizado no *YouTube* por (REVUVAI, 2010). Disponibilizado em ⟨https://youtu.be/SPBMEXX5xBI?list=PLIMnzgTihapCI8WlczKbqWylwjVeu-Jvx⟩.

Helmholtz termina seu trabalho revisitando os conceitos introduzidos em seu artigo e

[14] Dinâmica conhecida como *Leapfrogging*.

deixa em aberto algumas questões (HELMHOLTZ, 1867, p 510):

> *[...] pode-se notar que é de natureza fácil estudar esses movimentos de anéis de vórtice circulares, puxando rapidamente, um disco circular semi-imerso, por um curto espaço ao longo da superfície de um fluido, ou a ponta quase semicircular de uma colher e retirando-a rapidamente. Permanecem no fluido semi-anéis de vórtices, cujos eixos estão na superfície livre. A superfície livre forma um plano limite do fluido através do eixo e, portanto, não há nenhuma mudança essencial no movimento. Esses anéis de vórtice seguem adiante, alargam-se quando chegam a uma parede e são alargados ou contraídos por outros anéis de vórtice, exatamente como deduzimos da teoria.*[15]

Não há dúvida que os trabalhos de Helmholtz trouxeram luz – e questões – às mentes dos cientistas de sua época. Segundo Darrigol (2005, p. 153), o trabalho de Helmholtz sobre a dinâmica de vórtices é considerado historicamente fundamental para o entendimento da teoria, matemáticos como Rudolph Clebsch, Bernard Riemann e Hemann Hankel desenvolveram outros pontos importantes da teoria. Meleshko (2010) cita nomes como Felix Klein e Geoffrey Ingram Taylor como cientistas dedicados a problemas deixados por Helmholtz. No Reino Unido, a hidrodinâmica de Helmholtz uniu-se às ideias de Stokes, que foram apropriadas por W. Thomson, Tait e Maxwell e posteriormente por Lamb, Larmor, FitzGerald e J.J. Thomson.

A linha seguida neste trabalho é focada sobre as principais influências de W. Thomson sobre J.J. Thomson. Assim, a teoria de W. Thomson que versa sobre constituição da matéria através dos vórtices será o próximo tema abordado.

[15] Uma visualização desse experimento sugerido por Helmholtz pode ser vista no link: ⟨https://youtu.be/72LWr7BU8Ao⟩ (COWERN, 2015).

3.2 O átomo de vórtice

Ao longo do século XIX emergiu, na Grã-Bretanha, uma rica tradição de teorias físicas que buscavam compreender a natureza do campo e do átomo dentro de uma perspectiva na qual o éter era protagonista. Nesse cenário, os campos elétrico e magnético eram entendidos como fenômenos em um meio contínuo não material — o éter — e os átomos como produtos dinâmicos desse meio. A partir da metade do século, com as teorias do éter luminífero e dos tubos de Faraday, desenvolve-se uma rejeição consciente dos conceitos tradicionais de átomo — rejeitando modelos de átomos como o de Lucretius. À frente dessa rejeição, estava W. Thomson que desenvolveu, alimentado pelas teorias dos vórtices da hidrodinâmica, sua teoria de átomos de vórtice. A propriedade de indestrutibilidade, junto com as diferentes configurações que um filamento fechado pode apresentar (figura 3.6), na qual a mais simples é a de um anel (torus), motivaram W. Thomson a desenvolver um modelo atômico baseado em anéis de vórtice, como na figura (FALCONER, 2019; THOMSON, 1867).

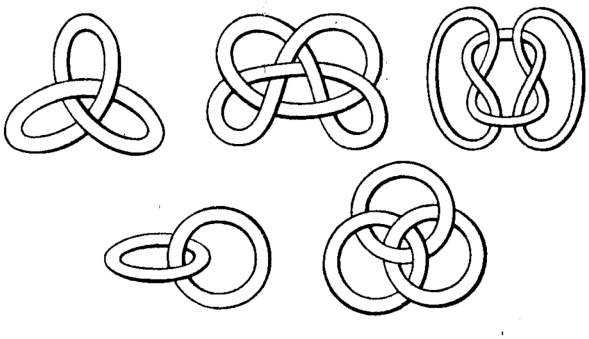

Figura 3.6: Representações de configurações de átomos de vórtice. Na linha superior estão três configurações que apresentam *nó*: um único filamento emaranhando em diferentes possibilidades. Na linha inferior são mostradas duas possíveis configurações de anéis de vórtices entrelaçados: dois ou mais filamentos que permanecem unidos (THOMSON, 1867, p. 244). O primeiro caso da segunda linha é comentado em carta de W. Thomson para Helmholtz (THOMPSON, 1910, p. 513–515).

O interesse de W. Thomson pelos vórtices antecede o trabalho de Helmholtz, o que

é corroborado por sua interpretação da ação magnética em 1857 (Capítulo 2) e, anteriormente, sua contribuição com o modelo de átomos de vórtice de Rankine (RANKINE, 1851).[16] O átomo de Rankine consiste em um pequeno núcleo rodeado por uma atmosfera elástica de inúmeros vórtices, onde luz e calor irradiavam devido às vibrações do núcleo. Rankine aplicou seu modelo atômico de vórtice a uma série de fenômenos, incluindo transições de fase e termodinâmica. No entanto, seu modelo era muito diferente do átomo de vórtice hidrodinâmico que W. Thomson sugeriu em 1867. O átomo de W. Thomson era uma estrutura que fazia parte do éter contínuo e Rankine entendia o éter como uma estrutura molecular e não via o átomo como um componente do éter (KRAGH, 1976). Embora inicialmente W. Thomson sugerisse a Stokes que átomos discretos pudessem se originar de uma não homogeneidade no contínuo (FALCONER, 2019), W. Thomson, em 1867, se inclina a uma interpretação hidrodinâmica do átomo (MELESHKO; AREF, 2007; DARRIGOL, 2005; KRAGH, 1976; SIEGEL, 1981). Os experimentos de Tait com anéis de fumaça chamaram a atenção de W. Thomson para a hidrodinâmica de Helmholtz, na qual reconheceu os fundamentos de um modelo de átomo formado por anéis de vórtice etéreos.

Segundo Smith e Wise (1989), não existe evidência que W. Thomson tivesse tido conhecimento do trabalho de 1858 de Helmholtz até 1862, quando Tait compartilhou sua tradução pessoal com seu conterrâneo W. Thomson. Em 1867, Tait publica a tradução de *Wirbelbewegungen* (HELMHOLTZ, 1867), além de desenvolver experimentos com caixas produzindo anéis de fumaça para visualização dos fenômenos. A *smoke box* era uma caixa — como sugere o nome — com uma membrana elástica colocada em lado oposto a um buraco, onde podiam ser produzidos anéis de fumaça e, assim, estudar a dinâmica dos anéis de vórtices (figura 3.7).

[16] O trabalho de Rankine, *On the Centrifugal Theory of Elasticity* (1851), foi lido na *Royal Society of Edinburgh* em fevereiro de 1850 e publicado na *Philosophical Magazine* em dezembro de 1851. As duas seções *Investigation on the General Equations between the Heat and the Elasticity of a Gas* e *On temperature, and of Real Specific Heat* tiveram mudanças sugeridas por W. Thomson antes de serem lidas na *Royal Society of Edinburgh*, como o próprio Rankine informa no início da publicação.

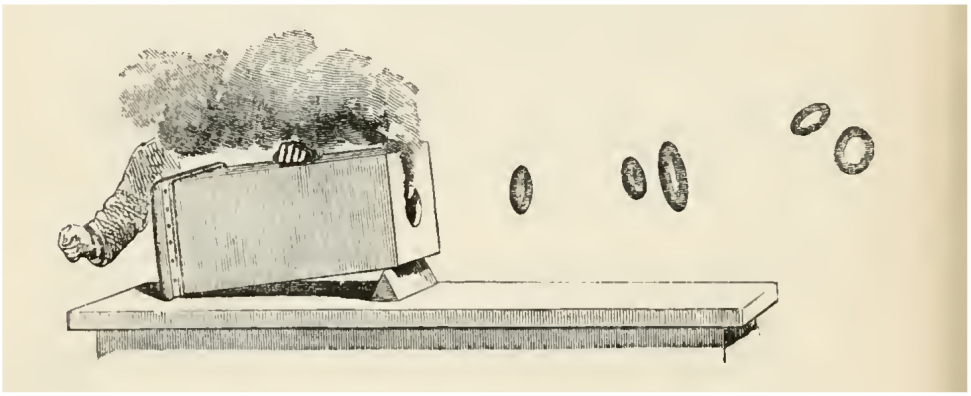

Figura 3.7: Aparato experimental para produção de anéis de fumaça (TAIT, 1876, p. 292).

Considerando-se as condições ideais de um fluido, as leis que regem a dinâmica dos vórtices encontravam um entrave em seu estudo experimental: a viscosidade dos fluidos reais. Entretanto, os anéis de fumaça apresentavam as propriedades básicas da dinâmica dos filamentos de vórtice. Os anéis de fumaça eram filamentos de vórtices fechados que, embora não fossem eternos, perduravam tempo suficiente no ar para serem estudados. Eles viajavam mantendo sua estrutura, mesmo sendo perturbados. Caso os anéis de fumaça ricocheteassem um com outro, eles não se destruíam e seguiam viagem vibrando em torno de sua forma original. Em Janeiro de 1867, W. Thomson presenciou uma "exibição magnífica" das propriedades dos anéis de vórtices em uma *lecture* ministrada por Tait; provavelmente, nesse contexto, Thomson percebeu que os anéis de vórtice de Helmholtz apresentavam as propriedades que um átomo precisava ter. Em carta, W. Thomson mostra seu fascínio pelo experimento e algumas conclusões a Helmholtz (THOMPSON, 1910, p. 513–515):

> *[...] Tait me mostrou em Edimburgo uma maneira magnífica de produzi-los [os anéis de vórtices]. [...] Às vezes podemos fazer um anel disparar através de outro, ilustrando perfeitamente a sua descrição; quando um anel passa perto de outro, cada um fica muito perturbado e parece estar em um estado de vibração*

> *intensa por alguns segundos, até que se assente novamente em sua forma circular. A precisão da forma circular de todo o anel e a finura e redondeza da seção são vistas lindamente. Se você [Helmholtz] tentar, fará facilmente anéis com um pé de diâmetro e uma polegada ou mais de seção, e será capaz de segui-los e ver o movimento giratório constituinte.*

W. Thomson continua e deixa explícito seu interesse em trabalhar o tema com sua ferramenta mais poderosa, a matemática (THOMPSON, 1910, p. 513–515):

> *As vibrações são um belo tema para o trabalho matemático. A solução para a vibração longitudinal de uma coluna de vórtice reta surge com bastante facilidade.*

Em relação ao átomo, a constituição da matéria e os elementos químicos, W. Thomson entende que (THOMPSON, 1910, p. 513–515):

> *[a] permanência absoluta da rotação e a relação imutável que você provou entre ela e a porção do fluido, uma vez adquirindo tal movimento em um fluido perfeito, mostra que se há um fluido perfeito em todo o espaço, constituindo a substância de toda a matéria, um anel de vórtice seria tão permanente quanto os átomos sólidos assumidos por Lucrécio e seus seguidores (e predecessores) para explicar as propriedades permanentes dos corpos (como ouro, chumbo, etc.) e as diferenças de seus caracteres. Assim, se dois vórtices fossem criados uma vez em um fluido perfeito, passando um pelo outro como elos de uma corrente, eles nunca poderiam entrar em colisão ou quebrar um ao outro, eles formariam um átomo indestrutível; toda variedade de combinações pode existir.*

A carta de Thomson deixa explicito dois importantes pontos: primeiro, sua percepção que a matéria pode ser descrita por um meio imaterial e contínuo, o éter; segundo, a matemática e os elementos desenvolvidos pela teoria hidrodinâmica são ferramentas básicas para entender a matéria como subproduto do éter.

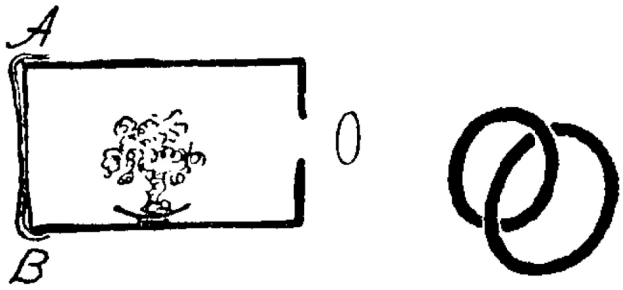

Figura 3.8: Dois dos desenhos apresentados na carta. À esquerda, um esquema da caixa que produz os anéis de fumaça; a parede AB é o fundo elástico que está oposto à abertura da caixa e ao anel de fumaça, desenhado logo à frente. À direito estão dois anéis de vórtice entrelaçados.

Assim, para Thomson, os átomos de vórtice poderiam se apresentar de diversas maneiras, como mostra a figura 3.6. As diferentes possibilidades de configurações de nós em anéis de vórtice dariam conta de explicar os diversos elementos químicos, enquanto os anéis de vórtice entrelaçados representariam diferentes compostos.

O que W. Thomson buscava mostrar era que sua teoria dos vórtices respondia a questões importantes sobre a constituição da matéria, pois os átomos de vórtice:

- com sua natureza indestrutível e impenetrável, satisfaziam a propriedade da conservação da matéria;
- com sua elasticidade e vibrações, explicavam o espectro luminoso;
- possuíam diferentes configurações e, com isso, poderiam ser associadas a diferentes elementos;
- não necessitavam de mecanismo artificial — por exemplo forças de interação — para manter diversos anéis juntos em uma molécula, o que daria conta da afinidade química dos elementos.

Então, expandindo a temática, W. Thomson contribui com três emblemáticos trabalhos no mesmo ano de 1867: *On Vortex Atoms* e *On Vortex Motion* (publicado somente

em 1869) e uma nota ao final da tradução de *Wirbelbewegungen* feita por Tait. Esses três trabalhos podem ser lidos de forma independente, apesar de estarem sob o mesmo assunto.

No primeiro trabalho de 1867, onde afirma que os "anéis de Helmholtz são os verdadeiros átomos" (THOMSON, 1867, p. 94), W. Thomson apresenta três importantes aspectos a respeito da teoria dos átomos de vórtice:

- forças entre moléculas, que precisavam ser consideradas nas teorias cinéticas dos gases, poderiam agora ser substituídas pela "elasticidade cinética" dos anéis de vórtice e, assim, extinguir qualquer natureza arbitrária ou *ad doc* da teoria cinética dos gases: a "[elasticidade cinética] é a elasticidade perfeita para anéis de vórtice em um líquido perfeito. É pelo menos um começo tão bom quanto o "choque de átomos" para explicar a elasticidade dos gases." (THOMSON, 1867, p. 95);

- os padrões dos espectros ópticos produzidos por gases aquecidos agora poderiam ser entendidos através das vibrações dos átomos de vórtice, uma vez que "o átomo de vórtice tem modos fundamentais de vibração perfeitamente definidos, dependendo unicamente daquele movimento, cuja existência o constitui." (THOMSON, 1867, p. 96);

- e o estado sólido poderia ser entendido pelos átomos de vórtice, pois "uma teoria de sólidos e líquidos elásticos na dinâmica de átomos de vórtice [...] pode ser razoavelmente antecipada." (THOMSON, 1867, p. 95).

O *Vortex Atoms* não é um trabalho com desenvolvimento e provas matemáticas; W. Thomson comenta a dificuldade matemática de determinar as frequências e formas de vibrações periódicas até mesmo para um anel de vórtice circular. No entanto, em *Vortex Atoms*, W. Thomson inicia uma profunda discussão sobre a constituição da matéria sob a teoria dos vórtices. Ainda no mesmo trabalho, de forma qualitativa, sem mostrar

matematicamente como chega ao resultado, W. Thomson descreve as ondulações que uma coluna de vórtice longa e infinita pode suportar. Essa ondulação ocorre em torno de seu eixo e é traduzida através do número de onda azimutal i, que está relacionado a "uma velocidade angular igual a $(i-1)/i$ da velocidade angular desta rotação". Nas palavras de Thomson (THOMSON, 1867, p. 97):

> *[...] como o número de cristas em uma circunferência inteira é igual a i, para um desvio harmônico de ordem i, há i - 1 períodos de vibração, no período de revolução do vórtice. Para o caso i = 1 não há vibração e a solução expressa apenas um vórtice infinitesimalmente deslocado com sua forma circular inalterada. O caso i = 2 corresponde à deformação elíptica da seção circular; e para ele o período de vibração é simplesmente, portanto, o período de revolução. Esses resultados são, é claro, aplicáveis ao anel de Helmholtz, quando o diâmetro da seção aproximadamente circular é pequeno em comparação com o diâmetro do anel, como ocorre nos anéis de fumaça exibidos para a Sociedade.*

Neste momento é importante mencionar, tendo em vista a citação acima, que as análises dos anéis de vórtice feita por W. Thomson e muitos dos seus contemporâneos apresentaram resultados impressionantes e possuíam algumas importantes premissas:[17]

- distribuição uniforme da vorticidade ao longo do filamento e vorticidade nula em seu exterior;
- a seção reta do filamento é circular;
- a cintura do filamento é muito menor que o raio do anel: $a/R \ll 1$.

A equação $(i-1)/i$ aparece como resultado, treze anos depois, de um caso especial, dentro de uma análise mais geral trazida em *Vibration of Columnar Vortex* (1880).

[17] Essas condições são tidas como "ideias". Em 1888, Chree já havia mostrado que a seção reta do filamento pode não se manter circular (CHREE, 1888).

Ainda em *Vortex Atoms*, W. Thomson mostra um esboço "desenhado pelo Sr. D. M'Farlane a partir de cálculos que ele realizou",[18] das linhas de fluxo de "um vórtice duplo que consiste em dois vórtices retos paralelos infinitamente longos de rotações iguais em direções opostas"(figura 3.9). Muitas questões importantes da teoria de vórtices que não apareciam em *Vortex Atoms* foram fornecidas em artigos posteriores (CRAIK, 2012).

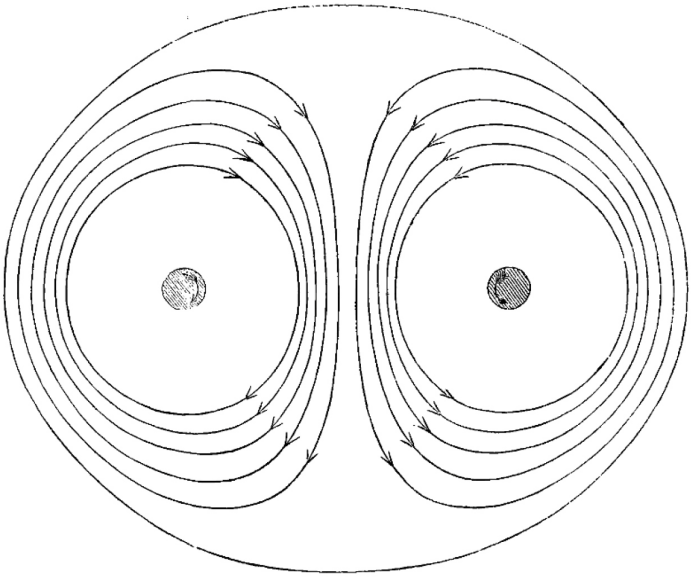

Figura 3.9: Seção transversal do anel de fumaça que possui a mesma configuração que um "vórtex duplo" (THOMSON, 1867, p. 99).

O segundo trabalho, *On Vortex Motion*, publicado apenas em 1869, apresenta importantes resultados que fortalecem a teoria dos vórtices. Diferente do *Vortex Atoms*, o *Vortex Motion* apresenta, em suas 44 páginas, definições e demonstrações matemáticas de importantes conceitos da teoria de fluidos. A análise prossegue na linha da proposta trazida por Helmholtz em 1858, pois apresenta uma abordagem cinemática da análise de um "espaço [que] é continuamente ocupado por um líquido incompressível e sem fricção, sem ação de forças sobre ele, e [no qual] os fenômenos materiais de todos os tipos dependem exclusivamente dos movimentos criados nesse líquido" (THOMSON, 1869, p. 217).

[18] Donald M'Farlane foi colaborador no ensino e pesquisa de W. Thomson do início dos anos 1850 até 1880 (ROWLINSON, 2006).

Dentro desse cenário, foram obtidos poderosos resultados, como a generalização do teorema de Green (THOMSON, 1869, p. 239–242) e o conhecido teorema da circulação, enunciado em seu trabalho (THOMSON, 1869, p. 247):[19]

> *A integral de linha do componente tangencial da velocidade em torno de qualquer curva fechada de um fluido em movimento permanece constante ao longo do tempo.*

Isso implica que "as circulações são iguais em todos circuitos de um tubo de vórtice" (THOMSON, 1869, p. 250).

A representação dos átomos por anéis de vórtices são ilustrados dentro dessa perspectiva e apresentados pela figura (3.6) de forma recorrente na literatura.

Em *Wirbelbewegungen*, Helmholtz não define a equação que determina a velocidade de translação do anel de vórtice. Na nota ao final da tradução de Tait, de 1867, W. Thomson apresenta uma expressão para a intensidade da "velocidade de translação de um anel de vórtice circular" (HELMHOLTZ, 1867, p. 511):

$$v = \frac{\omega a^2}{2R}\left(log\frac{8R}{a} - \frac{1}{4}\right),$$

onde ω é a "velocidade angular da rotação molecular" no centro do filamento (vorticidade),[20] a é o raio que define a espessura do filamento — a cintura — e R o raio do anel — a distância do centro do anel até a linha no centro do filamento (figura 3.10).

3.3 O éter constitui a matéria

A proposta de compor a matéria por tubos etéreos não foi uma exclusividade de W. Thomson. A literatura secundária em sua maioria entende que junto dele, seu amigo Tait

[19] A circulação, atualmente, é uma entidade independente da forma do vórtice e mensurável por integração ao longo de qualquer circuito ao redor do vórtice. Nesse sentido, a noção de circulação pode ser tomada como uma das primeiras introduções de considerações topológicas na mecânica dos fluidos (MELESHKO; AREF, 2007, p. 26).

[20] Definida pela equação (3.6). O vetor $\boldsymbol{u}$ é perpendicular ao vetor $\boldsymbol{\omega}$ e tangente à superfície do anel.

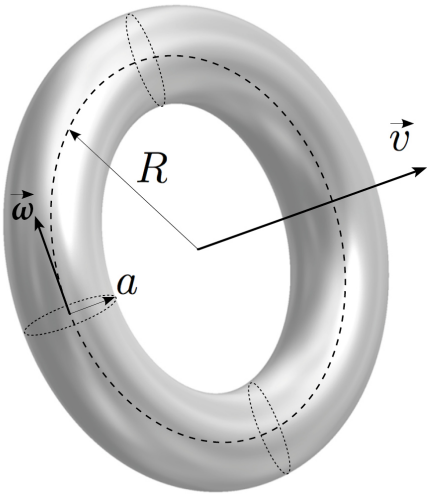

Figura 3.10: Representação do anel de vórtice, sua velocidade de translação $\boldsymbol{v}$, vorticidade $\boldsymbol{\omega}$, raio R e sua cintura de raio a.

foi um dos grandes expoentes da proposta na Grã-Bretanha da era Vitoriana.

3.3.1 Os nós

A contribuição de Tait à ciência é extensa e revela seu interesse em uma ampla gama de assuntos científicos, tanto puramente matemáticos, como no caso dos quatérnions (TAIT, 1867), quanto os experimentais, como, por exemplo, os anéis de fumaça que ele mostrou a W. Thomson (TAIT, 1876). Tait é conhecido também por sua coautoria em dois livros emblemáticos: *Treatise on Natural Philosophy* (TAIT; THOMSON, 1867), junto com W. Thomson, e *The Unseen Universe* (TAIT; STEWART, 1878), junto com Balfour Stewart. Segundo Smith e Wise (1989, p. 352), o Tratado de Filosofia Natural pretendia substituir o *Principia* de Isaac Newton, que era baseado em forças, por um novo *Principia*, baseado em energia. No livro Universo Invisível, Tait revisa os átomos de vórtice e afirma que mesmo se os átomos de vórtice não existissem, eles são "muito valiosos pelo menos de um ponto, a saber, a extensão e o aprimoramento de métodos matemáticos" (TAIT; STEWART, 1878; KRAGH, 1976).[21] Em *On Knots*, Tait é levado à consideração das formas dos nós,

[21] Tait se diferenciava de W. Thomson na visão dos átomos de vórtice. Para Tait, os átomos de vórtice não poderiam ser eternos porque contrariavam suas crenças religiosas ou, segundo Kragh, seu "princípio

motivado pela teoria dos átomos de vórtice de W. Thomson (TAIT, 1877):

> *definidos pelo número de seus cruzamentos; ou, o que dá no mesmo, a investigação dos modos essencialmente diferentes de unir pontos em um plano, de modo a formar curvas fechadas simples com um dado número de pontos duplos.*

O que fica perceptível pelas diferentes configurações na figura (3.11).

Nesse trabalho, Tait percebe a complexibilidade que a estrutura atômica pode mostrar, pois (TAIT, 1877, p. 145):

> *[o] enorme número de linhas no espectro de certas substâncias elementares mostra que, se a sugestão de Thomson estiver correta, a forma dos átomos de vórtice correspondentes não pode ser considerada muito simples.*

As raias espectrais dos elementos foram evidência para a teoria do átomos de vórtice (MCGUCKEN, 1969). Para Tait, as raias espectrais estavam relacionadas com os diferentes modos de vibrações que o vórtice enquanto átomo, poderia ter. A estrutura atômica de um elemento seria caracterizada pelo número de nós. A figura 3.12 ilustra e ajuda o entendimento da proposta de Tait. A fim de fazer a conexão entre os nós e os átomos de vórtice, uma infinidade de tipos de nós foram propostos, o que levou Tait a estudar casos mais complicados. Os átomos podiam se apresentar com o mesmo número de nós, porém de formas diferentes e, assim, possuir modos diferentes de vibração. Além de usar a teoria dos nós para entender possíveis mecanismos de emissão de luz de átomos, Tait também tentou representar os elementos químicos por meio de uma classificação adequada de nós e links (TAIT, 1877).

A teoria dos nós teve suas raízes na teoria dos átomos de vórtice, mas logo se desenvolveu em um estudo matemático independente, em que a teoria de W. Thomson saiu de cena. A teoria dos nós, embora fosse robusta e sofisticada, não foi exatamente o caminho seguido por J.J. Thomson na construção de seu átomo e, por isso, não será discutido seu

sacrossanto de continuidade ininterrupta"(KRAGH, 1976, p. 87)

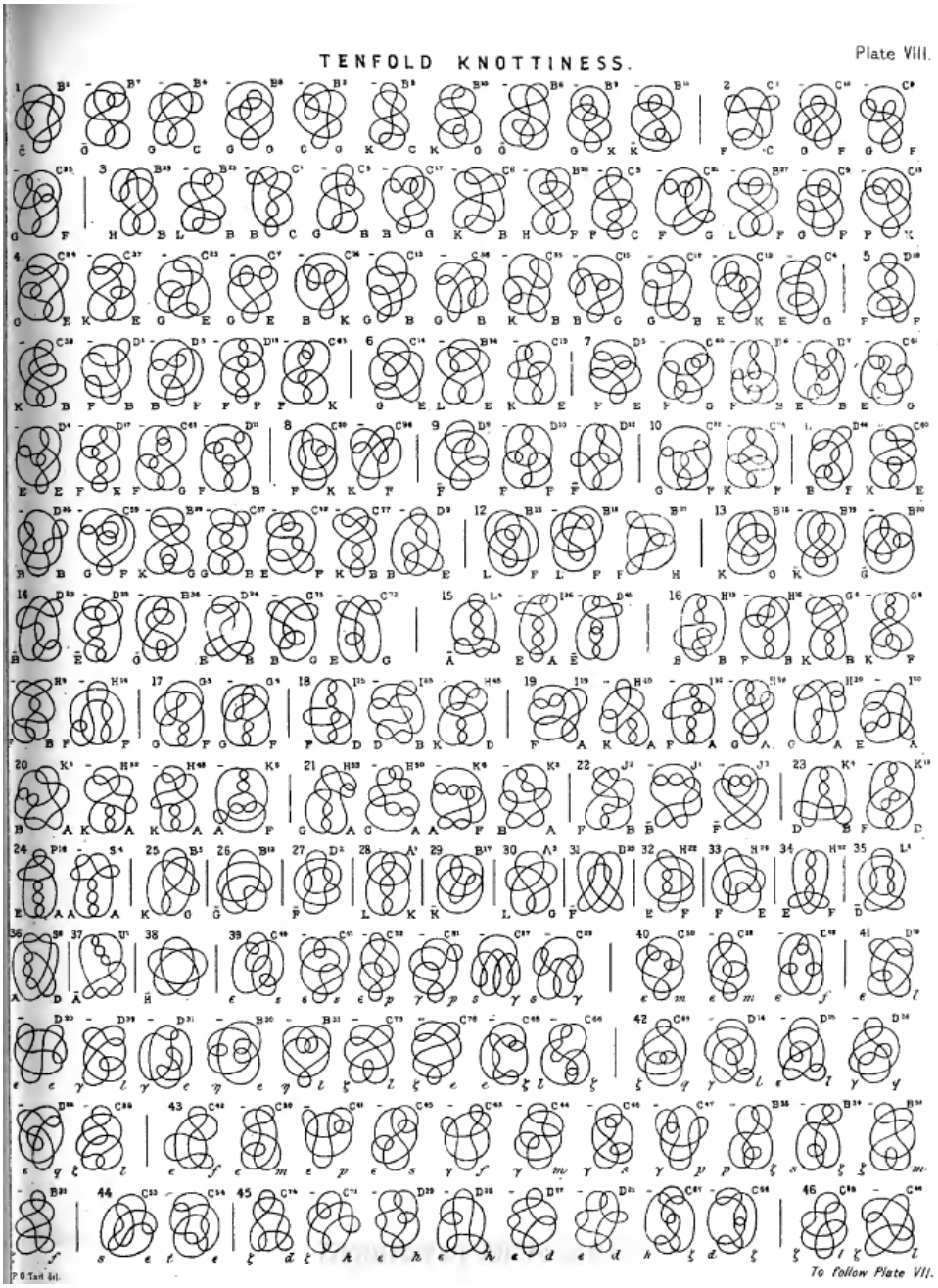

Figura 3.11: Tabela de nós na obra de Tait em que ele listou possíveis configurações para um dado número de "nós".

desenvolvimento aqui. Os trabalhos dos nós de Tait ilustram possíveis desdobramentos da teoria dos átomos de vórtice e foram importantes para áreas correlatas da ciência, como a Topologia, por exemplo.

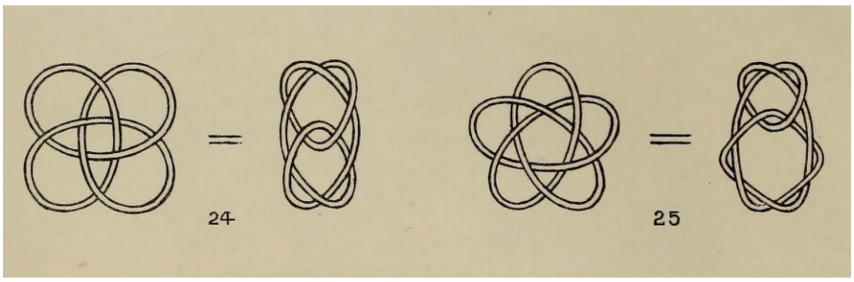

Figura 3.12: Dois elementos diferentes com seus modos equivalentes.

3.3.2 Uma analogia para química

Em 15 de abril de 1878, W. Thomson apresentou um trabalho à *Royal Society of Edimburgo* sob o título "On vortex vibrations, and on instability of vortex motions". A palestra nunca foi publicada, mas sua temática é correlata à de um breve artigo que apareceu três dias depois na *Nature*, em que foi descrito um experimento feito por um físico americano. Alfred Marshall Mayer, professor do *Stevens Institute of Technology* em Nova Jersey, estudou as configurações de agulhas igualmente magnetizadas (magnetos) flutuando na água. Além da repulsão mútua, as agulhas eram submetidas a ação de um grande ímã de polaridade oposta, colocado sobre elas. Colocando até vinte agulhas na água, Mayer observou como elas vibravam e se organizavam em configurações estáveis como triângulos e quadrados (STELDERS, 1976; KRAGH, 1976). Ilustra a figura (3.13).

W. Thomson reconheceu uma analogia entre as configurações adquiridas pelos ímãs a um sistema de vórtices, pois as configurações dos magnetos eram semelhantes "[a]o equilíbrio cinético de grupos de vórtices colunares girando em círculos ao redor de seu centro de gravidade comum" (THOMSON, 1878a, p. 13). Para Thomson, o experimento de Mayer poderia mostrar configurações de equilíbrio possíveis para vórtices, os quais só poderiam ser tratados matematicamente. Pois, o experimento mostra a configuração que é estável para os ímãs, podendo ser uma confirmação experimental de que é estável para

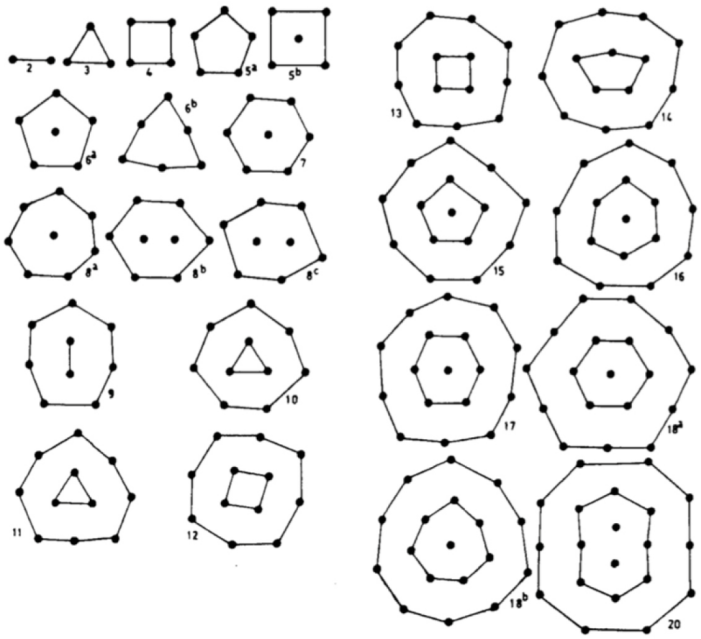

Figura 3.13: Configurações dos maguinetos flutuantes de Mayer (MAYER, 1879, p. 100 – 101).

os vórtices (THOMSON, 1878a, p. 14):

> *A estabilidade do hexágono de seis ímãs mostra que o polígono simples é instável para sete ou qualquer outro número superior a seis. Assim, o belo experimento do Sr. Mayer nos traz muito perto de uma solução experimental de um problema que há muito tempo estava sem solução — de vital importância na teoria dos átomos de vórtice — para encontrar o maior número de barras que um redemoinho de vórtice pode ter.*

As contribuições de W. Thomson à teorização da dinâmica de fluidos é extensa e não se resume aos trabalhos de 1867. Suas publicações sobre a temática datam de 1847 com *On the equation of continuity* e chegam a 1906 com *Initiation of deep-sea waves*, resultando 38 publicações, sem levar em consideração cartas, *lectures* e demais produções sobre o assunto. Está fora da proposta da tese analisar toda essa produção; foram comentados apenas os trabalhos que ajudaram e ilustraram o uso dos tubos como ferramenta no

desenvolvimento da teoria da constituição da matéria. Muitos dos assuntos aqui tratados serão retomados no próximo capítulo para melhor compreensão dos trabalhos de J.J. Thomson.

Capítulo 4

O átomo de vórtice de J. J. Thomson

Ao longo da segunda metade do século XIX a teoria eletromagnética avança na Grã-Bretanha associada a uma estrutura de éter submetida às leis da dinâmica dos fluidos. À medida que a teoria é desenvolvida, diversas questões, que antes eram obscuras, passam a ser esclarecidas e acomodadas no pensamento científico da época; por exemplo, o caso da caracterização dos campos, das interações eletromagnéticas, da propagação da luz e sua natureza eletromagnética. Contudo, outras questões foram sendo colocadas e abertas. Os resultados trazidos por Maxwell e seus contemporâneos suscitaram discussões importantes acerca da teoria eletromagnética, mas pouco avançaram no entendimento da constituição da matéria e discretização da carga. Com efeito, a caracterização da carga por Maxwell revela um mecanismo que entende sua natureza como um subproduto do éter contínuo.[1] Para Buchwald (1985a, p. xii – xiii), "os Britânicos eram fortemente avessos ao uso de átomos no eletromagnetismo"; ele conclui em seu trabalho que a natureza da condução é um dos temas mais obscuros da teoria eletromagnética maxwelliana (BUCHWALD, 1985a, p. 267). Por certo, Maxwell revela a limitação de seu conhecimento acerca da eletrólise, pois "no atual estado de formação imperfeita de nossas idéias sobre eletricidade, as teorias da eletrólise são muito insatisfatórias" (MAXWELL, 1873, § 255). A esses dois problemas — a compreensão da constituição da matéria e a eletrólise — J. J. Thomson

[1] Final do Capítulo 2, a carga eletrostática é entendida como uma descontinuidade do éter.

faz importantes contribuições utilizando sua principal ferramenta: a dinâmica de vórtices ilustrada por tubos, ora abertos, ora fechados.

O historiador Jaume Navarro revela em sua descrição do percurso histórico das ideias de J. J. Thomson, que os tubos de Faraday começaram como um modelo mental concreto no éter e, lentamente, se tornam a realidade física em suas teorias (NAVARRO, 2012, p. 2). Em seus trabalhos, Isobel Falconer mostra de forma explícita que os tubos de Faraday formaram o plano de fundo para as teorias da composição da matéria e discretização da carga (FALCONER, 1985, p. 114, 125 – 126, 137 – 139, 150, 160, 170 – 174, 261; DAVIS e FALCONER, 1997, p. 12, 60 – 89, 166). No que diz respeito à constituição da matéria, Navarro descreve o empenho de J. J. Thomson em seguir os passos de Maxwell na intenção de mudar o *status* da ciência Química em Cambridge; nesse esforço, o intento de J. J. Thomson atravessa questões políticas, de relações interpessoais e científicas (NAVARRO, 2012, p. 37 – 54). Antecedendo e em coro com Navarro, a historiadora Falconer (1985) mostra como os trabalhos de J. J. Thomson se entrelaçam com a Química. Entretanto, J. J. Thomson não foi pioneiro na intenção de levar a matemática à Química. Na seção (3.3.1) mostramos que Tait desenvolve uma teoria de "nós" para explicar possíveis mecanismos de emissão de luz pelos átomos e, também, representar os elementos químicos por meio de uma classificação adequada de "nós" e "elos". Ainda dentro desse cenário, tendo em vista o trabalho da historiadora Karen Parshall (1997), a proposta de criar vínculo com a Química estava na ordem das discussões, em Cambridge, considerando-se as investigações de Arthur Cayley, James Sylvester e William Clifford sobre teorias dos grafos e invariantes aplicadas à Química. Mas, certamente, J. J. Thomson se destacou de seus contemporâneos, pois introduziu em sua visão fenomenológica analogias com a hidrodinâmica (FALCONER, 1985, p. 16), caracterizando os elementos constituintes da matéria através de tubos de vórtices.[2] Seus contemporâneos optaram por analogias com dispositivos mecânicos, como engrenagens e roldanas, como extensões das "colmeias"

[2] Com a única exceção de seu modelo girostático do átomo (THOMSON, 1895).

apresentadas por Maxwell em seus *Physical Lines* (HUNT, 1991).

Nesse contexto, J. J. Thomson apresenta suas teorias acerca da constituição da matéria as quais antecedem o seu famoso trabalho sobre a "descoberta" do elétron (THOMSON, 1897).[3] O *Cathode Rays* é um trabalho que, isoladamente, pouco traduz as importantes contribuições de J. J. Thomson à ciência da matéria, no entanto, ele é determinante, pois foi um dos elementos determinantes para que J. J. Thomson conseguisse responder uma questão na qual vinha pensando a bastante tempo: como conciliar o éter contínuo à discretização da carga? Assim, a constituição da matéria trouxe dois momentos importantes para J. J. Thomson: o primeiro, entender o átomo através do éter sem discretizar a carga; o segundo, aliar o éter contínuo à discretização da carga.

Antecipando a resposta à pergunta acima, os tubos de Faraday são o mecanismo que a responde (FALCONER, 1987, p. 20, 120 – 338). Mostrar como J. J. Thomson realiza essa conciliação é um dos resultados da pesquisa desta tese. Neste capítulo mostraremos que os anéis de vórtices são elementos subatômicos que podem formar estruturas estáveis, o que é minimamente necessário para que sejam constituintes do átomo. A partir de então, J. J. Thomson mostra como seu modelo pode explicar a ligação entre átomos.

4.1 "On Motion of Vortex Rings"

O estudo da estabilidade foi feito em um trabalho de grande impacto muito citado, porém pouco elucidado por historiadores. Esse trabalho é "On Motion of Vortex Rings" (1883),

[3] Atribuir a descoberta do elétron a um único indivíduo é uma questão controversa na historiografia. Pois, como mostra Falconer (1985, 1987, 1989, 1997, 2001), a pesquisa experimental de J. J. Thomson em 1884 não era entender a natureza dos raios catódicos. O interesse maior de sua pesquisa sobre descargas em gases era entender a relação entre matéria, eletricidade e ligações químicas. Sua atenção dirigiu-se à natureza raios catódicos apenas após a descoberta do Raio-X em 1895. O elétron, chamado por J. J. Thomson de "corpúsculo", foi gradualmente introduzido nas teorias de condução de eletricidade, composição da matéria e ligações químicas. Os "corpúsculos" permeavam os trabalhos de J. J. Thomson ainda em 1907. George Smith entende que existe uma constelação de atores envolvidos na "descoberta" do elétron e J. J. Thomson foi um desses atores (SMITH, 2001). Um estudo sobre o elétron nas primeiras décadas do século XX pode ser lido em Buchwald e Warwick (BUCHWALD; WARWICK, 2001)

premiado com Adams Prize de 1882.[4]

J. J. Thomson considera tubos fechados como ferramenta para a compreensão da matéria; além disso, apresenta importantes analogias que mostram como esses tubos formam diferentes átomos sugeridos pelo experimento de Mayer. J. J. Thomson desenvolve átomos formados por vórtices aos moldes propostos por W. Thomson (1867, 1869). A temática da interação entre anéis de vórtices estava em voga naquele período em Cambridge (KRAGH, 1976), motivando a investigação de J. J. Thomson sobre a estabilidade de anéis de vórtices entrelaçados. A questão acerca da estabilidade era importante, pois a premissa básica compreendia que os átomos deviam ser estruturas estáveis. Sendo assim, a intenção de J. J. Thomson consistia em descrever um modelo atômico estável capaz de explicar a valência química (THOMSON, 1883, p. 1):

> *[Os anéis de vórtice] [s]ão indestrutíveis e indivisíveis; a intensidade [(*strength*)] do anel de vórtice e o volume de líquido que o compõe permanecem inalterados para sempre; e se qualquer anel de vórtice estiver amarrado ou se dois anéis de vórtice forem ligados de alguma forma, eles manterão para sempre o mesmo tipo de nó ou ligação. Essas propriedades parecem nos fornecer bons materiais para explicar a propriedade permanente da molécula.*[5]

Helmholtz (1858) já havia mostrado que os filamentos de vórtice em um fluido perfeito eram permanentes e não se destruíam (discutido no Capítulo 3). Esses filamentos constituiriam o átomo, pois a matéria seria formada pela dinâmica de um meio contínuo; o átomo seria assim uma estrutura secundária de uma entidade básica (THOMSON, 1883, p. 1):

> *propondo explicar por intermédio das leis da Hidrodinâmica todas as propriedades dos corpos como consequência do movimento desse fluido [o éter]. É, portanto,*

[4] Prêmio criado em 1848 que comemora a descoberta de Netuno por John Couch Adams e, no período em questão, estava aberto apenas aos estudantes de Cambridge.

[5] Os termos 'átomo' e 'molécula' eram usados de forma confusa, pois nem sempre distinguiam entre átomos e moléculas.

> *evidentemente [uma teoria] de um caráter muito mais fundamental do que qualquer teoria até agora apresentada.*

Segundo essa proposta, J. J. Thomson estuda as configurações de anéis de vórtices estáveis como uma teoria capaz de explicar a constituição da matéria. Portanto, *Motion of Vortex Rings* carrega um importante avanço no entendimento da estrutura atômica, pois mostra como essa construção é possível.

A premiação *Adams Prize*, à qual J. J. Thomson submeteu seu tratado, no ano de 1882, tinha como tema "uma investigação geral da ação mútua entre dois vórtices fechados em um fluido incompressível perfeito". No prefácio do tratado, J. J. Thomson revela seu intento em "aplicar alguns dos resultados à teoria da matéria" e, além disso, deixa claro as condições do fluido para a validade de sua teoria, caracterizando assim o éter: fluido incompressível, sem descontinuidades na distribuição de pressão e em regime de movimento estacionário.[6] A análise é puramente cinemática, na qual J. J. Thomson mostra como a distribuição de velocidades do fluido afeta, a partir de pequenas perturbações, a geometria do anel de vórtice. A temática fica apresentada em quatro momentos, descritos abaixo de forma breve:

- Parte I, contendo discussão acerca das vibrações que um único anel de vórtice executa quando é ligeiramente perturbado em sua forma circular;
- Parte II, contendo uma investigação da ação mútua entre dois anéis de vórtices, que se movem de modo a nunca se aproximarem mais do que uma distância da ordem do diâmetro deles e, ao final desta parte, é analisado o efeito de uma esfera próxima a um anel de vórtice;
- Parte III, contendo a investigação do movimento de dois anéis de vórtice entrelaçados e as condições necessárias para a existência de mais vórtices compondo o sistema;

[6] Para W. Thomson, "*steady motion*" é definido como "o movimento que, a todo e qualquer momento, é precisamente semelhante ao que já foi" (THOMSON, 1887).

- Parte IV, contendo algumas aplicações dos resultados das partes anteriores à teoria dos gases, além de uma proposta para a ação química do átomo.

Antes de iniciar o estudo de cada ítem listado acima, J. J. Thomson estabelece as condições matematicas do fluido ideal. É necessário que exista uma função $F(x, y, z, t) = 0$ que descreva uma superfície no interior do fluido, de tal sorte a obedecer à seguinte equação (THOMSON, 1883, p. 1-2):[7]

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \tag{4.1}$$

em que u, v e w são as componentes da velocidade do fluido em um ponto x, y e z (conservando-se a notação original do tratado). No tratado, J. J. Thomson assume que F é uma função que descreve a superfície de um toróide, ou seja, a superfície de um anel de seção circular. Em notação contemporânea vetorial, a equação (4.1) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla F = 0. \tag{4.2}$$

Segundo J. J. Thomson, seu método é "muito simples" e consiste em determinar as componentes u, v e w por intermédio das equações de Helmholtz que definem a velocidade das partículas do fluido a partir da vorticidade (THOMSON, 1883, p. x); em seguida substitui esses valores na equação (4.1) para resolver os problemas citados nas Partes I, II e III.

As próximas seções descrevem os pontos principais dos itens acima listados. Na primeira parte, como os cálculos são muito longos, apenas algumas passagens serão apresentadas para ilustrar o método. Nas partes seguintes, o foco será dado às questões da fenomenologia inerentes à composição do átomo.

[7] J.J. Thomson não usa a notação $\frac{\partial}{\partial}$. A notação foi mudada por conveniência do leitor moderno.

4.1.1 Estabilidade de um anel de vórtice (Parte I)

A Parte I tem o propósito de mostrar o comportamento de um único anel de vórtice, quando sua forma circular original for ligeiramente perturbada (figura 4.1).[8]

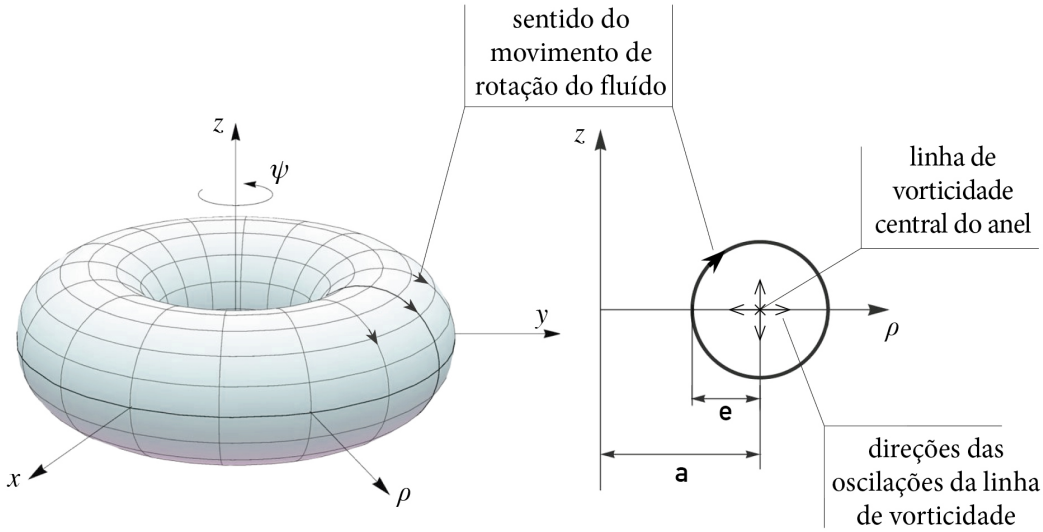

Figura 4.1: Coordenadas em um anel de vórtice. À esquerda, o anel de vórtice e suas coordenadas cartesianas e cilíndricas cilíndricas ρ e ψ. À direita, está a seção transversal no plano ρz, onde está indicado o sentido da linha de vorticidade e suas direções de vibração, quando perturbado.

O comportamento do anel é estudado a partir da equação que descreve a linha central de vorticidade do anel. A condição de análise imposta é que a seção transversal do anel seja muito pequena se comparada à sua abertura (THOMSON, 1883, p. xi, 13), o que é ilustrado na figura (4.1) como $\mathsf{a} \gg \mathsf{e}$ (por conveniência, o desenho está fora de escala). Dessa maneira, a investigação das mudanças na estrutura do anel se dá, apenas, pela análise das mudanças da forma de sua linha central, pois toda vorticidade pode ser considerada concentrada no centro da seção transversal do anel, ilustrada na figura (4.1).

[8] Antes de direcionar a atenção às perturbações sofridas pelo anel de vórtice, J. J. Thomson mostra: que o momento linear e o momento angular resultantes de "qualquer distribuição de vórtices em uma massa ilimitada de fluido permanecem constantes em magnitude e direção" (THOMSON, 1883, p. 5–7); entretanto, quando há sólidos no fluido a uma distância finita dos vórtices as resultantes do momento linear e angular não são mais constantes; ao final dessa parte introdutória, a equação da energia cinética de um anel de vórtice é deduzida (THOMSON, 1883, p. 11).

A linha central do anel de vórtice perturbada é descrita pelo par de equações (THOMSON, 1883, p. 13):

$$\rho = \mathsf{a} + (\alpha_n \cos n\psi + \beta_n \sin n\psi) \tag{4.3}$$

$$z' = \mathsf{z} + (\gamma_n \cos n\psi + \delta_n \sin n\psi), \tag{4.4}$$

em que z', ρ e ψ são as coordenadas cilíndricas que descrevem a linha de vórtice central do anel; o eixo z' é perpendicular ao plano que contém o anel formado pela linha de vórtice, o eixo x marca a linha onde o ângulo ψ é determinado. O termo a é o raio do anel formado pela linha de vórtice e z é a altura da linha de vórtice em relação à origem do eixo de coordenadas (figura 4.1). Os coeficientes α_n, β_n, γ_n e δ_n são as pequenas perturbações que alteram a forma circular do anel. O objetivo é provar que os termos α_n, β_n, γ_n e δ_n são oscilações harmônicas, logo estáveis (equação 4.24) com período de oscilação ϖ dado pela equação (4.26).

As perturbações são obtidas a partir das velocidades decorrentes da rotação do fluido (THOMSON, 1883, p. 3):

$$\delta u = \frac{1}{2\pi r^3} \left\{ \eta'(z - z') - \zeta'(y - y') \right\} dx'dy'dz', \tag{4.5}$$

$$\delta v = \frac{1}{2\pi r^3} \left\{ \zeta'(x - x') - \xi'(z - z') \right\} dx'dy'dz', \tag{4.6}$$

$$\delta w = \frac{1}{2\pi r^3} \left\{ \xi'(y - y') - \eta'(x - x') \right\} dx'dy'dz', \tag{4.7}$$

em que u, v e w são as componentes da velocidade e ξ', η' e ζ' são as componentes da velocidade angular.[9] Os elementos de velocidade δu, δv e δw são as componentes da velocidade do fluido no ponto (x, y, z) que surge devido à rotação ξ', η' e ζ' no elemento de

[9] Em notação moderna, pode-se escrever:

$$\delta \boldsymbol{u} = \frac{1}{2\pi} \frac{\{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} d^3\boldsymbol{r}', \tag{4.8}$$

onde, a velocidade é $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x, y, z)$ e a vorticidade $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\xi', \eta', \zeta')$

fluido $dx'dy'dz'$, em que r é a distância entre os pontos (x, y, z) e (x', y', z'). Em coordenadas cilíndricas, os pontos ficam associados assim: $\{(x', y', z') \to (\rho, \psi, z')\}$ e $\{(x, y, z) \to (R, \phi, z)\}$. Essas equações haviam sido obtidas por Helmholtz (HELMHOLTZ, 1867, p. 498), a partir de analogia entre o magnetismo e o movimento de um fluido.

Integrando as equações (4.5), (4.6) e (4.7):

$$u = \frac{m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^3}\left\{(z-z')\frac{dy'}{d\psi} - (y-y')\frac{dz'}{d\psi}\right\}d\psi, \tag{4.9}$$

$$v = \frac{m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^3}\left\{(x-x')\frac{dz'}{d\psi} - (z-z')\frac{dx'}{d\psi}\right\}d\psi, \tag{4.10}$$

$$w = \frac{m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^3}\left\{(y-y')\frac{dx'}{d\psi} - (x-x')\frac{dy'}{d\psi}\right\}d\psi, \tag{4.11}$$

onde o termo m é a circulação do vórtice (*strength*), que será considerada constante, dada pelo produto da vorticidade pela área da seção transversal do anel, ou seja, $m = \omega 2\pi \mathsf{e}^2$.

Usando coordenadas cilíndricas, $x' = \rho\cos\psi$ e $y' = \rho\sin\psi$ e considerando os valores perturbados de x', y' e z':

$$\frac{dx'}{d\psi} =$$

$$- \quad a\sin\psi - \sin\psi(\alpha_n\cos n\psi + \beta_n\cos n\psi) - n\cos\psi(\alpha_n\sin n\psi - \beta_n\cos n\psi) \tag{4.12}$$

$$\frac{dy'}{d\psi} =$$

$$- \quad a\cos\psi + \cos\psi(\alpha_n\cos n\psi + \beta_n\sin n\psi) - n\cos\psi(\alpha_n\sin n\psi - \beta_n\cos n\psi) \tag{4.13}$$

$$\frac{dz'}{d\psi} =$$

$$- \quad n(\gamma_n\sin n\psi - \delta_n\cos n\psi) \tag{4.14}$$

Assim, escrevendo $h = z - z'$ e substituindo as derivadas (4.12), (4.13) e (4.14) em

(4.9), a componente u da velocidade é dada por:

$$\begin{aligned} u = \frac{m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^3}\Big\{ & ha\cos\psi + ny(\gamma_n \sin n\psi - \delta_n \cos n\psi) \\ & + \frac{1}{2}\left[(n+1)h\alpha_n + (n-1)a\gamma_n\right]\cos(n+1)\psi \\ & - \frac{1}{2}\left[(n-1)h\alpha_n + (n+1)a\gamma_n\right]\cos(n-1)\psi \\ & + \frac{1}{2}\left[(n+1)h\beta_n + (n-1)a\delta_n\right]\sin(n+1)\psi \\ & - \frac{1}{2}\left[(n-1)h\beta_n + (n+1)a\delta_n\right]\sin(n-1)\psi \\ & + n(\alpha_n\gamma_n - \gamma_n\beta_n)\sin\psi - \frac{1}{2}(\alpha_n\gamma_n + \beta_n\delta_n)\cos\psi \\ & - \frac{1}{4}(\alpha_n\gamma_n - \beta_n\delta_n)\left[\cos(2n+1)\psi + \cos(2n-1)\psi\right] \\ & - \frac{1}{4}(\alpha_n\delta_n - \gamma_n\beta_n)\left[\sin(2n+1)\psi + \sin(2n-1)\psi\right]\Big\}\, d\psi \end{aligned} \tag{4.15}$$

e similarmente para v e w.

O termo r^3 em coordenadas cilíndricas é dado por:

$$r^3 = \left\{\rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos(\phi - \psi) + (z - z')^2\right\}^{\frac{3}{2}}; \tag{4.16}$$

sendo ρ dado pela equação (4.3), o termo $\dfrac{1}{r^3}$ é expandido em:

$$\sum_{l\,=0}^{\infty}(A_l + B_l\cos n\psi + C_l\sin n\psi + D_l\cos 2n\psi + E_l\sin 2n\psi) \times \cos l(\psi - \phi), \tag{4.17}$$

onde A_l contém termos independentes de $\alpha_n, \ldots$; B_l e C_l são os termos de primeira ordem das perturbações; D_l e E_l são os termos de segunda ordem das perturbações. A expansão (4.17) é inserida em (4.15), o que gera um conjunto de equações com coeficientes A_n, B_n, C_n, D_n e E_n a serem determinados;[10] as componentes da velocidade ficam descritas na forma

[termos independentes de $(\alpha_n, \ldots)$]+
[termos contendo $(\alpha_n, \ldots)$ em primeira potência]+
[termos contendo $(\alpha_n, \ldots)$ em segunda potência].

[10] Thomson altera a nomenclatura dos índices, trocando l por n, após integração das equações.

Para obter $A_n, \ldots$, Thomson (THOMSON, 1883, p. 22) faz uma analogia com a Teoria Planetária, apresentada em *Mécanique Céleste* (LAPLACE, 1798, t. I, §49) e *Du Système du Monde* (PONTÉCOULANT, 1834). O procedimento é comparar a expansão de $\frac{1}{r^3}$, dada pela equação (4.17), com a expansão de $\frac{1}{r^3}$, dada na forma da "Função Perturbadora" da Teoria Planetária:

$$\frac{1}{(q-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} = c_0 + c_1\cos\theta + \ldots c_n\cos n\theta + \ldots. \tag{4.18}$$

Assim, os coeficientes $A_n, \ldots$ podem ser identificados aos coeficientes $c_n, \ldots$. Seguindo o processo:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{\{\rho^2+R^2+h^2-2\rho R\cos(\phi-\psi)\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2R\rho}\frac{1}{(q-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.19}$$

onde $q = \dfrac{R^2+\rho^2+h^2}{2R\rho}$ e $\theta = (\phi-\psi)$; a expansão é feita sob a condição em que $\mathsf{a} \gg \mathsf{e}$, o que leva valores da velocidade em pontos muito próximos da linha de vorticidade, caso em que $\rho \sim R$ e h é muito pequeno.

No próximo passo, J. J. Thomson estuda as mudanças na superfície do vórtice toroidal. As equações que descrevem a superfície perturbada do anel de vórtice são dadas (THOMSON, 1883, p. 29):

$$\rho = \mathsf{a} + (\alpha_n\cos n\psi + \beta_n\sin n\psi) + \mathsf{e}\cos\chi \tag{4.20}$$

$$z = \mathsf{z} + (\gamma_n\cos n\psi + \delta_n\sin n\psi) + \mathsf{e}\sin\chi, \tag{4.21}$$

onde χ é o ângulo definido no plano $z\rho$, medido a partir do plano xy, como indicado na figura (4.2).

De posse das componentes u, v e w da velocidade do fluido e escrevendo a equação (4.20) na forma $F(x,y,z,t) = 0$, J. J. Thomson retoma a equação diferencial (4.1) e determina a velocidade angular das partículas que giram em torno da linha central, a velocidade de translação do anel de vórtice e os termos α_n, β_n, γ_n e δ_n. Para a velocidade angular (THOMSON, 1883, p. 31):

$$\frac{d\chi}{dt} = -\omega + \frac{3}{16}\omega\frac{\mathsf{e}^2}{\mathsf{a}^2}\left(\log\frac{64\mathsf{a}^2}{\mathsf{e}^2} - \frac{5}{3}\right), \tag{4.22}$$

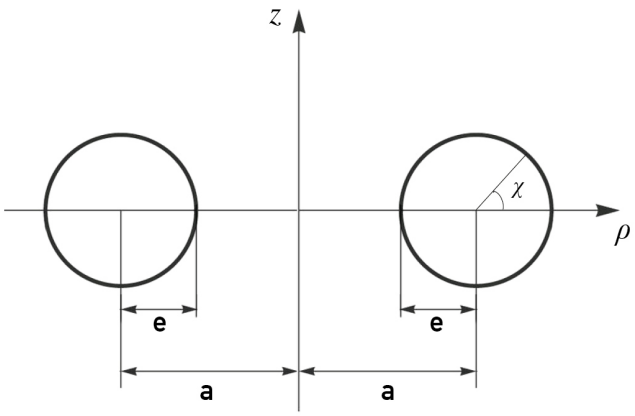

Figura 4.2: Seção transversal do anel de vórtice dada pelo plano $z\rho$.

onde ω é a velocidade angular. Então, sob a condição $\frac{\mathsf{e}}{\mathsf{a}} \ll 1$, a equação (4.22) se torna:

$$\frac{d\chi}{dt} = -\omega,$$

o que está de acordo com o resultado mostrado por W. Thomson em uma nota inserida na tradução feita por Tait do trabalho de Helmholtz (HELMHOLTZ, 1867).

A velocidade de translação do anel de vórtice é dada por:

$$\frac{d\mathsf{z}}{dt} = \frac{m}{2\pi\mathsf{a}}\left(\log\frac{8\mathsf{a}}{\mathsf{e}} - 1\right), \tag{4.23}$$

que está em desacordo com a equação dada por W. Thomson na mesma nota (HELMHOLTZ, 1867).[11]

[11] Para W. Thomson a velocidade de translação é dada por $\frac{m}{2\pi\mathsf{a}}\left(\log\frac{8\mathsf{a}}{\mathsf{e}} - \frac{1}{4}\right)$.

Os termos α_n, β_n, γ_n e δ_n são dados por (THOMSON, 1883, p. 35):

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= A\cos\left[L\left\{n^2(n^2-1)\right\}^{\frac{1}{2}}t + B\right], \\
\beta_n &= A'\cos\left[L\left\{n^2(n^2-1)\right\}^{\frac{1}{2}}t + B'\right], \\
\gamma_n &= A\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left[L\left\{n^2(n^2-1)\right\}^{\frac{1}{2}}t + B\right], \\
\delta_n &= A'\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left[L\left\{n^2(n^2-1)\right\}^{\frac{1}{2}}t + B'\right],
\end{aligned} \tag{4.24}$$

onde A, A', B e B' são constantes arbitrárias e L é uma função de n associada a um conjunto de parâmetros do anel (THOMSON, 1883, p. 34):

$$L = \frac{m}{4\pi\mathsf{a}^2}\log\frac{64\mathsf{a}^2}{\mathsf{e}^2} - 4\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - 1. \tag{4.25}$$

Por fim, do conjunto de equações (4.24) obtém-se o período de oscilação ϖ das vibrações sofridas pelo anel, pois

$$\varpi = \frac{2\pi}{L\left\{n^2(n^2-1)\right\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.26}$$

Assim, para J. J. Thomson, o conjunto de equações que definem os termos $\alpha_n \ldots$ mostram que o anel circular de vórtice oscila em torno de uma configuração estável para pequenas alterações de sua linha central. W. Thomson já havia provado que pequenas mudanças no formato da seção transversal do anel de vórtice são estáveis (THOMSON, 1880). Sendo assim, o anel de vórtice é estável para toda e qualquer alteração em seu formato.

Em dois momentos principais, W. Thomson pondera sobre as vibrações da forma circular do anel de vórtice. No primeiro momento, em *Vortex Motion*, W. Thomson afirma que "o átomo-vórtice possui modos fundamentais de vibração perfeitamente definidos" que dependem unicamente do movimento do fluido, ocasionado pelos vórtices que o constitui (THOMSON, 1869, p. 96). No segundo, em 1878, no trabalho *Vortex Statics*, W. Thomson

ilustra alguns poucos modos de vibração que um anel de vórtice pode ter a partir de analogias com um aro circular de borracha (THOMSON, 1878b). Porém, em todos esses casos, W. Thomson reconhece a complexidade do estudo das vibrações da forma circular do anel de vórtice e, com isso, passa a propor uma análise das vibrações da seção reta do anel. No trabalho *Columnar Vortex*, de 1880, W. Thomson analisa as vibrações existentes em uma coluna de vórtice, e entende que seus resultados podem ser aplicados aos anéis de vórtices sob a seguinte condição: os anéis possuírem o diâmetro de sua seção transversal muito pequenos se comparados ao diâmetro do anel. Essa condição é crucial e define a metodologia seguida por J.J. Thomson, como ficará evidente nas partes a seguir.

4.1.2 Interação entre dois anéis de vórtices livres (Parte II)

Nesta seção J. J. Thomson analisa as perturbações nas seguintes situações: quando dois vórtices cruzam o caminho um do outro, sem se aproximarem mais que uma distância da ordem de seus diâmetros (figura 4.3); quando um vórtice passa próximo a objetos sólidos, como uma esfera por exemplo.

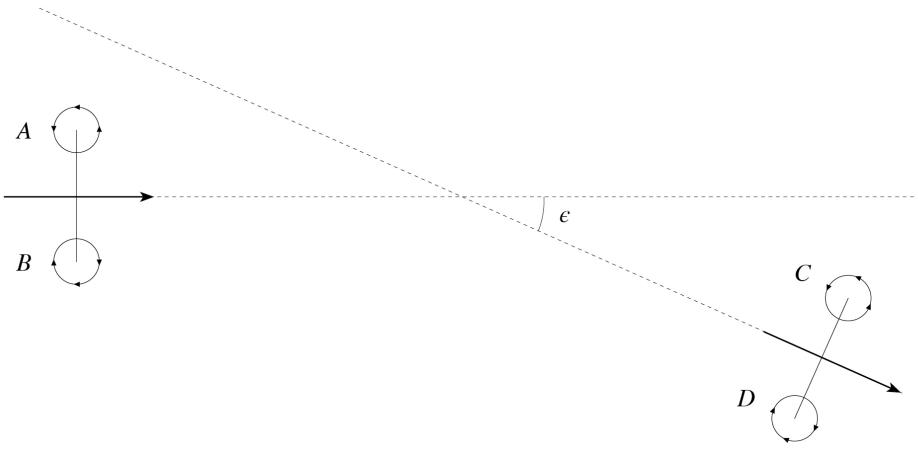

Figura 4.3: A figura mostra a seção de dois vórtices toroidais AB e CD. O movimento está indicado pelas flechas. Figura adaptada de (THOMSON, 1883, p. 37)

O problema é determinar os efeitos causados pelo vórtice AB sobre o vórtice CD

(figura 4.3). Assim, como primeiro passo, é preciso definir as variações nas componentes da velocidade em CD devido a ação de AB. Cada vórtice é descrito pelo par de equações que define a linha central do filamento de vórtice nos moldes das equações (4.3 e 4.4); dessa maneira, haverá um par de equações para cada vórtice. A velocidade da linha central do filamento de vórtice é definida por duas componentes: uma radial, dada pela derivada temporal da equação (4.3) e que diz respeito às vibrações radiais, e a outra é; a componente perpendicular à seção longitudinal (as setas na figura 4.3), obtida pela derivada temporal da equação (4.4).

A ação de um vórtice sobre o outro é determinada pela evolução temporal dos coeficientes $\alpha_n \ldots$ e $\alpha'_n \ldots$. O problema é resolvido em dois casos separadamente: primeiro caso, quando os vórtices se movem em mesmo sentido, melhor dizendo, os dois vórtices se deslocam para frente (figura 4.4); segundo caso, quando os vórtices estão em sentidos opostos, como em um movimento de colisão (figura 4.5).

Os cálculos levam em consideração:

- o vórtices (I) e (II) viajando com velocidade de translação p e q;
- ϵ o ângulo entre as direções das trajetórias de (I) e (II);
- c a menor distância entre os centros dos anéis de vórtice (figura 4.4);
- ϱ a menor distância entre as trajetórias de (I) e (II) (figura 4.4);
- m e m' as circulações de (I) e (II);
- a e b os raios dos anéis de vórtice (I) e (II);
- k a velocidade relativa.

Caso I: mesmo sentido

Esse caso é ilustrado na figura (4.4).

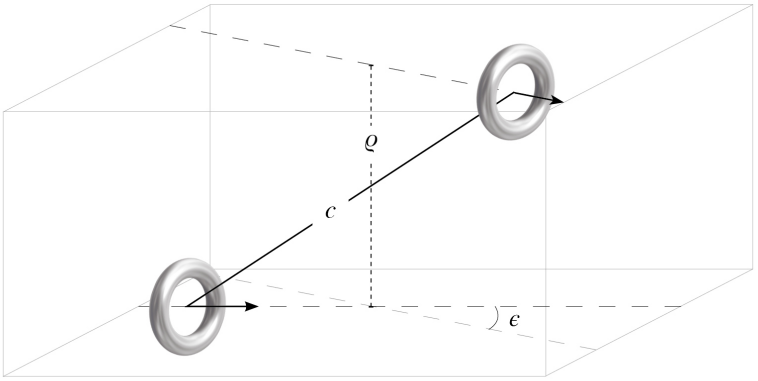

Figura 4.4: Representação espacial das trajetórias concorrentes dos vórtices AB e CD.

Os vórtices passam pelo ponto de interseção de suas trajetórias com a linha que define ϱ em instantes diferentes; para o vórtice (II), a equação da variável z perturbada:

$$z = \mathsf{z} + \gamma' \cos\psi + \delta' \sin\psi.$$

Obtém-se, após longos cálculos, que os coeficientes perturbativos são:

$$\gamma' = \frac{2ma^2b}{c^4k^4} \sin^2\epsilon\, pq\, (q - p\cos\epsilon)(c^2 - \varrho^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{4\varrho^2}{c^2}\right); \tag{4.27}$$

$$\delta' = -\frac{2ma^2b\varrho \sin^2\epsilon}{c^4k^3}\, pq \left(1 - \frac{4\varrho^2}{3c^2}\right); \tag{4.28}$$

o acréscimo no raio do anel é dado por:

$$\frac{ma^2bp^2q}{c^4k^4} \sin^3\epsilon\, (c^2 - \varrho^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{4\varrho^2}{c^2}\right). \tag{4.29}$$

Caso II: sentido contrário

Neste caso são analisados os seguintes aspectos:

1. a alteração no raio do anel;

2. deflexão na trajetória sobre o plano do movimento do vórtice, o vórtice pode ter sua trajetória desviada para sua direita ou esquerda;

3. deflexão na trajetória sobre o plano perpendicular ao plano do movimento do vórtice, o vórtice pode ter sua trajetória desviada para cima ou para baixo.

Essa análise envolve o ângulo ϕ, tal que $\varrho = c\cos\phi$, representado na figura (4.5).

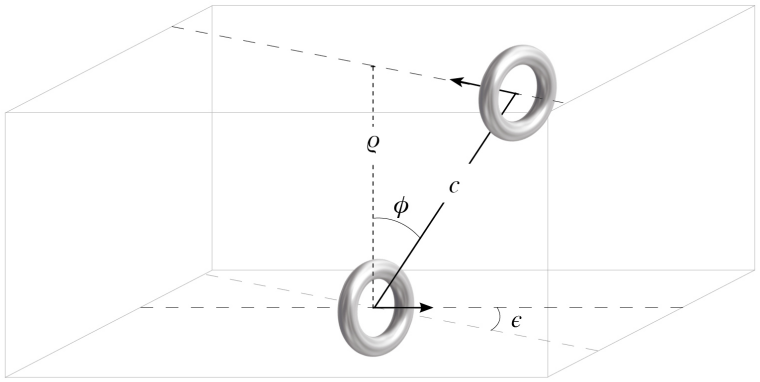

Figura 4.5: Ângulo ϕ.

Obtém-se, após longos cálculos, a equação que define a alteração do raio do anel:

$$\frac{ma^2bp^2q}{c^3k^4}\sin^3\epsilon\sin 3\phi. \tag{4.30}$$

Os desvios nas trajetórias são dados por:

$$\Delta_{\parallel} = -\frac{2ma^2}{c^3k^4}\sin^2\epsilon\sin 3\phi\, pq(p - q\,\cos\epsilon), \tag{4.31}$$

$$\Delta_{\perp} = \frac{2ma^2}{3c^3k^3}\,pq\sin^2\epsilon\cos 3\phi, \tag{4.32}$$

onde a equação (4.31) representa a deflexão na trajetória sobre o plano do movimento do vórtice e, a equação (4.32) representa a deflexão na trajetória sobre o plano perpendicular ao movimento do vórtice.

Ao final da análise da interação entre os vórtices, para a situação onde as trajetórias se intersectam, J. J. Thomson deduz as equações que mostram as vibrações que os anéis de vórtice executam após interação:

$$\rho = \mathsf{a} - \frac{m\pi n^4 \mathsf{a}^4 \sqrt{2}}{4k^5\sqrt{3}} \frac{\epsilon^{\frac{-nc}{k}}}{\sqrt{nc/k}} \sin 2\phi + nt + \epsilon, \tag{4.33}$$

$$z = \mathsf{z} - \frac{m\pi n^4 \mathsf{a}^4 \sqrt{2}}{8k^5} \frac{\epsilon^{\frac{-nc}{k}}}{\sqrt{nc/k}} \cos 2\phi + nt + \epsilon. \tag{4.34}$$

Assim, J. J. Thomson mostra que os vórtices, após interação, vibram em torno de sua forma circular de forma estável.

A Parte II termina analisando o comportamento do vórtice interagindo com um grande concentrado de massa. As equações deduzidas são aplicadas a um caso onde o vórtice interage com uma esfera. J. J. Thomson mostra que os vórtices são atraídos quando passam nas proximidades de uma esfera. Esse resultado está de acordo com os cálculos anteriores de W. Thomson (THOMSON, 1869, p. 229).

4.1.3 Anéis de vórtices ligados e sua estabilidade (Parte III)

Esta seção do *Treatise* apresenta o estudo do comportamento de vórtices entrelaçados e pode ser subdividida em outras três partes: primeira, definição das vibrações para uma coluna de vórtice; segunda, análise do comportamento de dois anéis entrelaçados; terceira, estudo de como os anéis se comportam, quando há mais que dois anéis entrelaçados. O problema principal é analisar a estabilidade para essas configurações de vórtices entrelaçados.

Para melhor compreensão, esta seção será descrita em duas etapas: primeira, uma visão geral das condições e configurações dos elementos envolvidos no fenômeno; segunda, descrição da metodologia empregada por J. J. Thomson.

Anéis de vórtice: uma visão geral.

A análise se inicia examinando as mudanças no formato da seção transversal do vórtice, a fim de verificar a permanência de seu formato circular. O estudo possui premissas que já foram apontadas anteriormente, os anéis de vórtices estudados são muito finos e

com abertura muito grande. Levando isso em consideração, J. J. Thomson entende que o estudo dos anéis de vórtices pode, assim, ser simplificado ao estudo de vórtices em forma de coluna. Com efeito, o estudo da estabilidade e alteração no formato da seção transversal do anel é feito sob a seguinte aproximação: um pedaço do anel é um tubo reto, ou seja, uma coluna. Isso tem implicações diretas na investigação da interação entre anéis, que será mostrado a seguir.

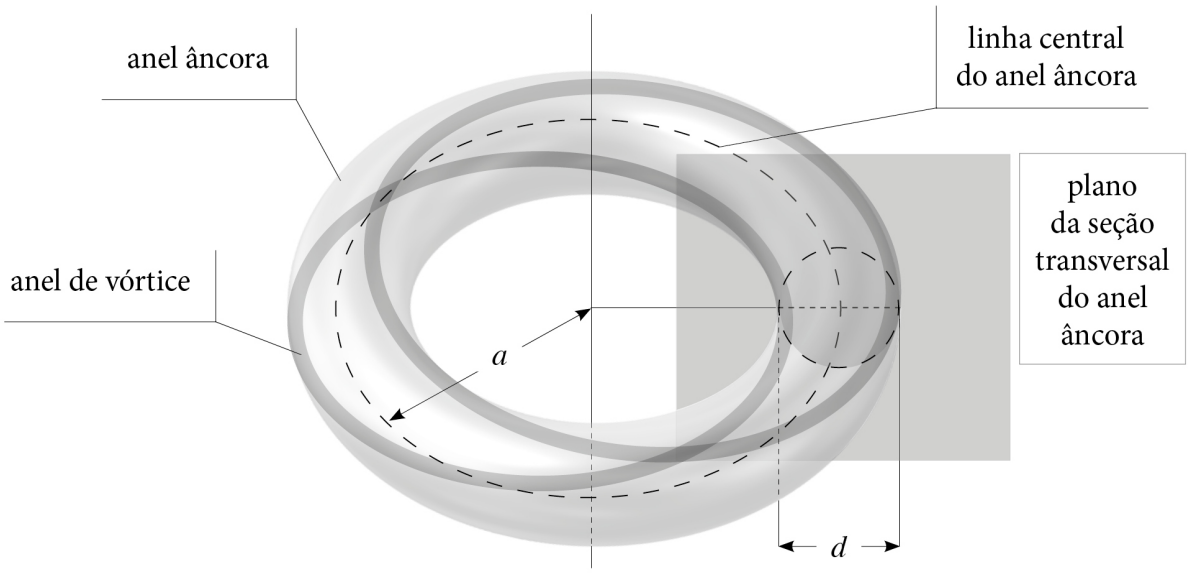

Figura 4.6: Anel âncora descrito pela dinâmica de interação de dois anéis de vórtices entrelaçados. O anel âncora também segue a relação entre abertura e seção transversal, isto é $a \gg \frac{d}{2}$.

Quando dois anéis de vórtices com mesma circulação e aberturas muito maiores do que suas seções transversais estão entrelaçados, um pequeno trecho de suas estruturas irá interagir como dois tubos cilíndricos interagem entre si. A situação onde há dois vórtices no mesmo plano foi descrita por Helmholtz e mostra que, quando a vorticidade de cada um possui mesma orientação, eles giram em torno de seu chamado centro de gravidade (HELMHOLTZ, 1867).[12] Além disso, há o estudo da interação de colunas de vórtices

[12] Figura 3.2.

realizado por W. Thomson (THOMSON, 1878a).

Ao girarem em torno de um centro, as colunas descrevem conjuntamente uma superfície cilíndrica. Considerando que cada coluna é parte de um todo, ou ainda, cada coluna é um pequeno trecho de um anel de vórtice, dois anéis interagindo descrevem uma superfície também em forma de anel, de modo que os vórtices estão contidos dentro de outro anel — o "anel âncora" (figura 4.6). Esse anel também obedece à condição de relação entre abertura e seção transversal, ou seja, a abertura do anel âncora é muito maior que sua seção transversal. Com efeito, em uma seção transversal do anel âncora são encontradas duas outras seções transversais, uma para cada vórtice, em posições diametralmente opostas (figura 4.7).

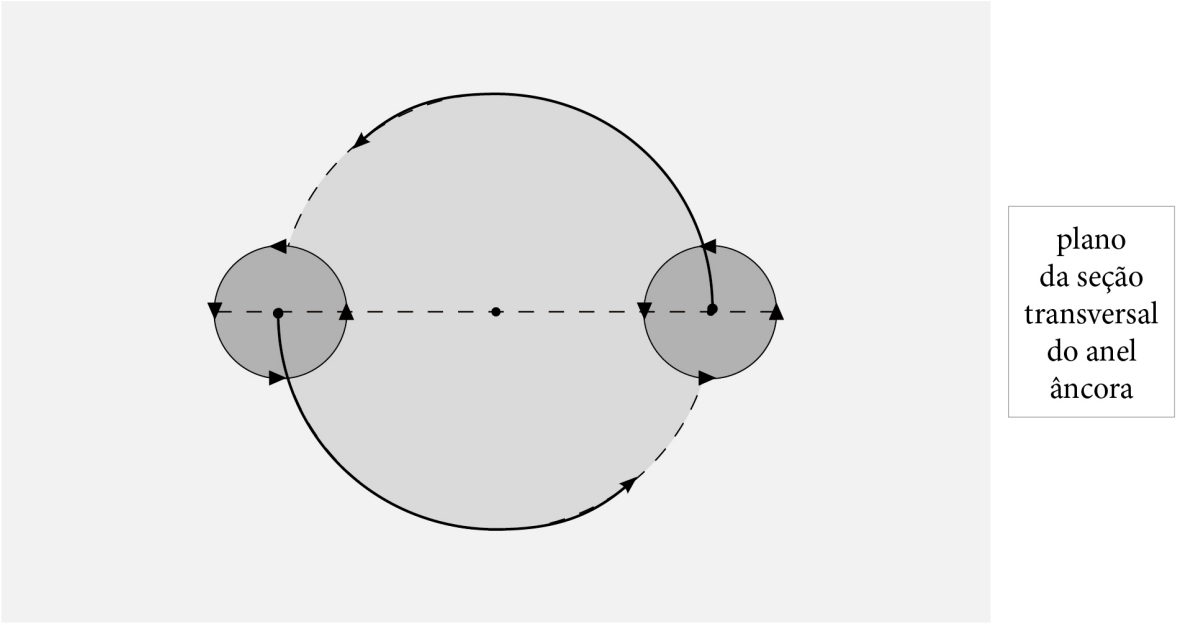

Figura 4.7: Seção transversal do anel de ancoragem contendo duas seções transversais de dois vórtices entrelaçados. Os vórtices executam um movimento circular em torno da linha central do anel âncora.

J. J. Thomson mostra que os anéis de vórtice giram com velocidade angular $2m/\pi d^2$, enquanto o eixo circular do anel âncora translada com velocidade $\frac{m}{2\pi a}\log\frac{64a^2}{\mathsf{e}^2}$ (THOMSON, 1883, p. xvii), onde m é a circulação de um anel de vórtice e e, o raio de sua seção

transversal, enquanto a é o raio do eixo circular do anel âncora e d o diâmetro de sua seção transversal (figura 4.8).

Figura 4.8: Quatro quadros, I, II, III e IV, representando a evolução temporal de dois vórtices entrelaçados: à esquerda está a vista frontal, à direita a vista lateral. Enquanto os vórtices transladam com velocidade $\frac{m}{2\pi a}\log\frac{64a^2}{\mathrm{e}^2}$, eles giram com velocidade angular $2m/\pi d^2$ em torno da linha central do anel âncora. Imagem adaptada de (FUENTES; ARTEGA, 2011).

A dinâmica dos anéis entrelaçados envolve outra condição para que se obtenha o movimento descrito na figura (4.8): a distância entre os anéis é muito grande se comparada aos raios de suas seções transversais, porém muito pequena se comparada à abertura do anél; isso garante que os anéis estejam paralelos entre si. Como os anéis de vórtice e o anel âncora são muito finos e de grande abertura, a interação entre dois anéis de vórtice se torna basicamente a interação entre duas colunas de vórtices retas e paralelas, o que reitera aquilo que foi dito nos parágrafos anteriores. Sob essas condições, J. J. Thomson mostra que a geometria da seção transversal de cada anel de vórtice se altera ao longo do tempo, na qual elipses se configuram oscilando em torno da forma circular da cintura do anel.

Após determinar as condições das configurações, J. J. Thomson define matematicamente a quantidade de vórtices que pode estar sob as condições descritas.

Anéis de vórtice: a metodologia de J. J. Thomson.

A simplificação da interação dos anéis em um problema de interação entre duas colunas de vórtices possibilitou J. J. Thomson recorrer a resultados já estabelecidos na literatura. Diferente das seções anteriores, a *Parte III* começa descrevendo o movimento do fluido em um plano através da função escoamento ou função de corrente.[13]

Os primeiros cálculos definem as vibrações ao longo da superfície de um cilindro de vórtice e mostram o método empregado. Em seguida, a partir dos resultados obtidos, as configurações dos vórtices entrelaçado são estudadas.

Uma coluna

Para um único vórtice visto como uma coluna, como em (4.3), J. J. Thomson escreve a equação de sua seção transversal perturbada (THOMSON, 1883, p. 71):

$$\rho = \mathsf{a} + (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta); \tag{4.35}$$

J. J. Thomson (1883, p. 72) recorre à definição de Lamb (1876, § 138) da *stream function*:

$$\Psi = -\frac{1}{\pi} \iint \omega \log \rho \; dx' dy', \tag{4.36}$$

onde ω é a velocidade angular das partículas do fluido.

A solução de (4.36) fora do cilindro é (THOMSON, 1883, p. 72):

$$\Psi = C - \omega \mathsf{a}^2 \log \rho + (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \frac{\mathsf{a}^n}{\rho^n}. \tag{4.37}$$

[13] A *stream function* foi introduzida por Lagrange em *Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides*, de 1781, sua interpretação cinemática aparece em *On Plane Water-Lines in two Dimensions*, de 1864. Em um fluido incompressível, para um fluxo em duas dimensões, a *stream function* (Ψ) descreve as componentes da velocidade do fluido que, em coordenadas cartesianas e em duas dimensões são $u = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ e $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$. Além disso, ela define as linhas de corrente (*stream lines*), que representam a trajetória das partículas de um fluido em regime estacionário.

A solução de (4.36) dentro do cilindro é (THOMSON, 1883, p. 72):

$$\Psi = C' - \frac{1}{2}\omega\rho^2 + (A'_n \cos n\theta + B'_n \sin n\theta)\frac{\rho^n}{\mathsf{a}^n}, \tag{4.38}$$

onde C e C' são constantes.

Substituindo (4.35) em (4.37) e (4.38) e assumindo Ψ contínua, o que implica (4.37) igual a (4.38) na fronteira, os coeficientes A_n, A'_n, B_n e B'_n são relacionados (THOMSON, 1883, p. 72):

$$\begin{aligned} A_n &= A'_n, \\ B_n &= B'_n. \end{aligned}$$

Agora, assumindo $\dfrac{d\Psi}{d\rho}$ contínuo (THOMSON, 1883, p. 72):

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\mathsf{a}\omega\alpha_n}{n}, \\ B_n &= \frac{\mathsf{a}\omega\beta_n}{n}; \end{aligned}$$

assim Ψ fica definido.

Para determinar as vibrações da coluna de vórtice, ou seja, determinar os termos α_n e β_n é necessário calcular as componentes da velocidade na superfície da coluna. Em coordenadas cilíndricas, basta calcular $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial\theta}{\partial t}$. Por um lado (THOMSON, 1883, p. 73):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{d\alpha_n}{dt}\cos n\theta + \frac{d\beta_n}{dt}\sin n\theta - n(\alpha_n \sin n\theta - \beta_n \cos n\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{4.39}$$

Por outro lado, agora as componentes das velocidades podem ser definidas pela função de corrente, que em coordenadas cilíndricas são (THOMSON, 1883, p. 73):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}. \tag{4.41}$$

Assim, sendo ρ dado por (4.35) e desprezando os termos de segunda ordem para α_n e

β_n, temos (THOMSON, 1883, p. 73):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\omega(\alpha_n \sin n\theta - \beta_n \cos n\theta), \tag{4.42}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega - \frac{\omega}{\mathsf{a}}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta). \tag{4.43}$$

Substituindo as equações (4.42) e (4.43) em (4.39), as vibrações na superfície do cilindro são dadas pela equação (THOMSON, 1883, p. 73):

$$\frac{d^2\alpha_n}{dt^2} + (n-1)^2\omega\alpha_n = 0, \tag{4.44}$$

que tem como solução (THOMSON, 1883, p. 74):

$$\alpha_n = A\cos[(n-1)\omega t + k],$$

onde A e k são constantes arbitrárias.

De maneira análoga (THOMSON, 1883, p. 74):

$$\beta_n = A\sin[(n-1)\omega t + k].$$

Assim, na superfície, ρ pode ser reescrito como (THOMSON, 1883, p. 74).:

$$\rho = a + A\cos\{[n\theta - (n-1)\omega t] - k\}, \tag{4.45}$$

o que mostra que o período de oscilação das vibrações na superfície do cilindro é $\dfrac{2\pi}{(n-1)\omega}$ (THOMSON, 1883, p. 74). Esse resultado está de acordo com aquele mostrado por W. Thomson em *Vortex Atoms* (1867) e mais tarde demostrado em *Columnar Vortex* (1880).

Duas colunas

A investigação continua analisando a interação entre duas colunas, que podem ter circulações diferentes. As equações que descrevem suas seções transversais têm a forma da equação 4.3. Os termos $\alpha_n \ldots$ para cada vórtice são definidos de forma análoga ao caso anterior. A função corrente para a distribuição de velocidades de dois vórtices é escrita e,

a partir de suas soluções, os termos $\alpha_n \ldots$ são determinados bem como as componentes da velocidade do fluido (THOMSON, 1883, p. 74–78).

J. J. Thomson obtém os seguintes resultados que (THOMSON, 1883, p. 78):

- as seções transversais oscilam formando elipses em torno da forma circular;
- os vórtices giram em torno um do outro com velocidade angular $\frac{m+m'}{\pi d^2}$, onde m e m' são as circulações de cada vórtice e d a distância entre os dois vórtices;
- a velocidade angular é constante se o movimento for estacionário.

Após essas conclusões, J. J. Thomson busca generalizar os resultados e estudar a possibilidade de dois vórtices estarem entrelaçados l vezes. Para esse caso, J. J. Thomson determina as frequências de vibrações e, com isso, mostra a estabilidade do sistema (THOMSON, 1883, p. 78–85, 88–92).[14] Em seguida, J. J. Thomson prova que dois vórtices entrelaçados estão, caso possuam forma circular, em equilíbrio sob um movimento estacionário (THOMSON, 1883, p. 92–93).

Após analise da dinâmica de dois vórtices entrelaçados, inicia-se o estudo das configurações estáveis possíveis para mais do que dois vórtices entrelaçados. A proposta de J. J. Thomson é aplicar o mesmo método desenvolvido para dois vórtices em configurações em que existam números maiores de vórtices entrelaçados. Assim, como no caso de dois vórtices, o movimento dos anéis descreverá um anel âncora, de tal sorte a ter no plano da seção circular transversal desse anel âncora vórtices inscritos formando um polígono (figura 4.9).

O problema da análise da estabilidade do sistema é pensado assim: imaginando os centros dos vórtices nos vértices de um polígono, qual será o movimento executado se um desses vórtices for levemente tirado de sua posição inicial? A pergunta é colocada da seguinte maneira por J. J. Thomson (THOMSON, 1883, p. 94):

[14] Entre as páginas 86 e 87, J. J. Thomson faz outras considerações sobre dois vórtices com circulações diferentes.

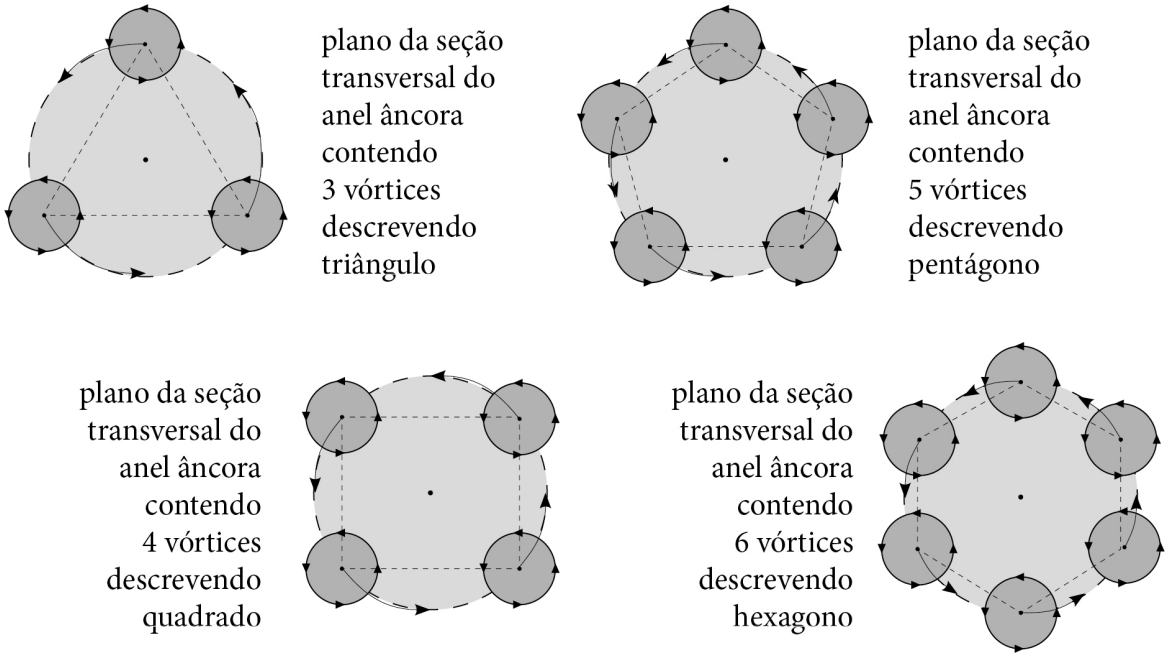

Figura 4.9: Corte transversal do anel âncora contendo 3, 4, 5 e 6 seções dos anéis de vórtices entrelaçados. Cada vórtice está localizado sobre um vértice de um polígono inscrito na circunferência criada pela seção transversal do anel âncora.

Um sistema de n vórtices cilíndricos iguais, arranjados em intervalos iguais sobre uma circunferência é levemente deslocado, qual o movimento subsequente?

J. J. Thomson prevê que deva haver um limite para o número de vórtices que possam estar em equilíbrio estável quando organizados em intervalos iguais sobre uma circunferência. Pois, quando há um grande número de vórtices organizados sobre uma circunferência, a distância entre os consecutivos vórtices poderá se tornar pequena em comparação a seu raio e, assim, à medida que o número de vórtices cresce, o sistema apresentará pontos de descontinuidade. E, segundo W. Thomson, todo movimento descontínuo é instável em um fluido (THOMSON, 1887).[15] [16] Nessa condição, a configuração de vórtices

[15] W. Thomson conseguia apenas provar a estabilidade dos movimentos mais simples do que aqueles que ele precisava. Por muitos anos, ele se contentou em fazer analogias com anéis de fumaça para o estudo da estabilidade. Presumivelmente para preparar uma investida posterior sobre esse difícil problema, W. Thomson focou em problemas mais simples, nos quais estudava movimentos de cilíndros de vórtice dentro de um recipiente tubular (DARRIGOL, 2002). Para esse caso, uma simples consideração de simetria mostrou que uma distribuição uniforme de vorticidade dentro de um cilindro coaxial é estável (THOMSON, 1887, p. 172).

[16] Apesar da publicação de *On Stability of Steady Motion* ser de 1887, posterior ao *Treatise* de J. J.

seria desestruturada e separada em grupos com quantidades menores de vórtices.[17]

A seguir apresentamos alguns pontos realizados por J. J. Thomson para análise da estabilidade de uma configuração contendo n vórtices.

Os vórtices serão localizados a partir da origem de um sistema de coordenadas sobre o centro de gravidade, em torno do qual orbitam os vórtices. Assim, o n-ésimo vórtice pode ter, quando perturbado, sua posição definida por um par de coordenadas (r_n, ϕ_n), dado por (THOMSON, 1883, p. 94):

$$r_n = (r + s_n), \tag{4.46}$$

$$\phi_n = (\varphi_n + \theta_n), \tag{4.47}$$

onde r e φ_n definem a posição do vórtice quando não há perturbação, enquanto s_n e θ_n representam os termos perturbativos.

Para análise da estabilidade, as componentes da velocidade, radial e angular, são determinadas a partir da função de corrente dada por n vórtices (THOMSON, 1883, p. 95) em um ponto (R, ϕ):

$$\Psi = -\frac{m}{2\pi} \sum \log[r_n^2 + R^2 - 2r_n R\cos(\phi_n - \phi)]. \tag{4.48}$$

Assim, para componente radial (THOMSON, 1883, p. 96):

$$\frac{ds_n}{dt} = \frac{m}{2\pi r}\left\{\frac{\theta_n - \theta_1}{1-\cos(\varphi_n - \varphi_1)} + \frac{\theta_n - \theta_2}{1-\cos(\varphi_n - \varphi_1)} + \dots\right\}; \tag{4.49}$$

e, para a componente angular (THOMSON, 1883, p. 97):

$$\frac{rd\theta_n}{dt} = -\frac{m}{2\pi r^2}\left\{-\frac{s_n(q-1)(q-11)}{6} + \frac{s_{q-n}}{1-\cos(\varphi_n - \varphi_1)} + \frac{s_{q-n}}{1-\cos(\varphi_n - \varphi_2)} + \dots\right\}, \tag{4.50}$$

onde q corresponde à quantidade de vórtices entrelaçados e $s_0 = 0$.

Thomson (1883), muitos dos resultados já haviam sido apresentados no início da década de 1880.

[17] Mais à frente, essa situação será revisitada e associada às configurações apresentadas pelo experimento de Mayer.

Para os vórtices distribuídos sobre uma circunferência, onde todos possuem a mesma circulação, pode-se escrever (THOMSON, 1883, p. 97):

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n = 0 \tag{4.51}$$

$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n = 0. \tag{4.52}$$

As equações (4.49), (4.51) e (4.52), segundo J. J. Thomson, permitem resolver a questão da estabilidade dos anéis ligados. O número de vórtices define o número de equações que respondem à configuração, pois n é o número que corresponde ao n-ésimo vórtice.

Tomemos como exemplo uma configuração com 3 vórtices entrelaçados, o que envolve 6 equações diferenciais de primeira ordem, 3 para a componente radial:[18]

$$\begin{aligned}
\frac{ds_1}{dt} &= \frac{m}{2\pi r}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{\frac{3}{2}} + \frac{\theta_1-\theta_3}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{m}{\pi r}\theta_1 \quad , \\
\frac{ds_2}{dt} &= \frac{m}{2\pi r}\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{\frac{3}{2}} + \frac{\theta_2-\theta_3}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{m}{\pi r}\theta_2 \quad , \\
\frac{ds_3}{dt} &= \frac{m}{2\pi r}\left(\frac{\theta_3-\theta_1}{\frac{3}{2}} + \frac{\theta_3-\theta_2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{m}{\pi r}\theta_3 \quad ;
\end{aligned}$$

e 3 para a componente angular:

$$\begin{aligned}
\frac{rd\theta_1}{dt} &= -\frac{m}{2\pi r^2}\left(\frac{8}{3}s_1 + \frac{s_2}{\frac{3}{2}} + \frac{s_3}{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{m}{2\pi r^2}s_1 \quad , \\
\frac{rd\theta_2}{dt} &= -\frac{m}{2\pi r^2}\left(\frac{8}{3}s_2 + \frac{s_1}{\frac{3}{2}} + \frac{s_3}{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{m}{2\pi r^2}s_1 \quad , \\
\frac{rd\theta_3}{dt} &= -\frac{m}{2\pi r^2}\left(\frac{8}{3}s_3 + \frac{s_1}{\frac{3}{2}} + \frac{s_2}{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{m}{2\pi r^2}s_1 \quad .
\end{aligned}$$

Ao serem relacionadas, pode-se escrever 6 equações diferenciais de segunda ordem, 3 equações para s e 3 equações para θ de forma análoga. Por uma questão de simplicidade,

[18] Para a distribuição de vórtices sobre os vértices de um triângulo:

$$\begin{aligned}
\varphi_2 - \varphi_1 &= \frac{2\pi}{3}, \\
\varphi_3 - \varphi_2 &= \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

descrevemos apenas as equações de s, sendo uma para cada vórtice:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 s_1}{dt^2} + \frac{m^2}{\pi^2 r^4} s_1 = 0 \quad , \\
\frac{d^2 s_2}{dt^2} + \frac{m^2}{\pi^2 r^4} s_2 = 0 \quad , \\
\frac{d^2 s_3}{dt^2} + \frac{m^2}{\pi^2 r^4} s_3 = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Assim, para 3 vórtices entrelaçados, cada vórtice apresenta um movimento estável com período de oscilação $\dfrac{2\pi^2 r^2}{m}$.

O raciocínio é análogo para as demais configurações ($n = 4, 5, 6, \dots$), nas quais o número de equações diferenciais de segunda ordem é proporcional ao número de vórtices, ou seja, como exemplo, para um sistema contendo 4 vórtices serão geradas 4 equações de segunda ordem para s e quatro para θ e, assim, sucessivamente para cada n. A partir de $n = 5$, as equações para $\frac{d^2 s}{dt^2}$ e $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$ formam um sistema linear de equações homogêneas e coeficientes constantes. São procuradas soluções da forma $e^{\lambda t}$, onde λ é solução da equação característica.

Pode-se verificar, como exemplo, o caso onde $n = 5$, ou seja, onde há 5 vórtices entrelaçados. A equação diferencial de segunda ordem para s_1 é dada por (THOMSON, 1883, p. 101):

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} = -\{a' s_1 + b'(s_2 + s_5)\}, \tag{4.53}$$

onde a' e b' são constantes. As equações para $s_{2,3,\dots}$ são análogas e a equação característica é obtida fazendo igual zero o determinante da matriz:

$$\begin{vmatrix}
a' + \lambda^2 & b' & 0 & 0 & b' \\
b' & a' + \lambda^2 & b' & 0 & 0 \\
0 & b' & a' + \lambda^2 & b' & 0 \\
0 & 0 & b' & a' + \lambda^2 & b' \\
b' & 0 & 0 & b' & a' + \lambda^2
\end{vmatrix} . \tag{4.54}$$

Para esse caso, $\lambda^2 < 0$ e, por isso, a configuração para 5 vórtices ligados é estável (THOMSON, 1883, p. 102).

A condição para estabilidade das configurações de vórtices, $\lambda^2 < 0$ é tirada do *Treatise of Natural Philosophy* de W. Thomson e Tait. Pois (TAIT; THOMSON, 1867, § 344):

> *[...] o caráter do equilíbrio quanto à estabilidade ou instabilidade é discriminado de acordo com o caráter das raízes de uma equação algébrica de grau igual ao número de graus de liberdade do sistema.*
> *Se as raízes (λ^2) da equação determinante [equação característica] são todas reais e negativas, o equilíbrio é estável: em todos os outros casos é instável.*

Usando desse lema, J. J. Thomson conclui que configurações de até 6 vórtices são estáveis e, a partir de 7 vórtices são instáveis, pois pelo menos uma das raízes da equação característica é positiva (THOMSON, 1883, p. 106):

> *Concluímos, portanto, que seis é o maior número de vórtices que podem ser dispostos em intervalos iguais ao redor da circunferência do círculo.*

A seção termina recordando a analogia que W. Thomson fez com o experimento dos magnetos flutuantes de Mayer (THOMSON, 1878a), na qual associa as configurações de equilíbrio estável dos magnetos a configurações de vórtices colunares em estado estacionário estável (Capítulo 3). Mayer mostra a estabilidade de seus magnetos, quando colocados sobre os vértices de triângulos, quadrados e pentágonos; entretanto, instável para hexágonos ou um polígono com número maior de vértices (MAYER, 1878). Desse modo, segundo a proposta de analogia de W. Thomson, isso mostraria que o movimento estacionário é estável para três, quatro e cinco vórtices colunares retos dispostos em intervalos iguais ao redor da circunferência de um círculo, o que está de acordo com o que foi apresentado por J. J. Thomson, que estendeu o resultado para seis vórtices.

4.1.4 Os elementos químicos (Parte IV)

A última parte do tratado traz a intenção de J. J. Thomson em aplicar os resultados obtidos nas seções anteriores a questões relativas à constituição da matéria; por simplicidade aplica restritamente ao estado gasoso. Antes de apresentar a teoria desenvolvida no tratado para a combinação de elementos químicos, o início da seção mostra a conciliação

dos resultados com a teoria cinética dos gases. A proposta é associar o comportamento dos anéis de vórtices a grandezas como temperatura e pressão. Associar a temperatura do gás ao raio e velocidade de translação do anel é um exemplo. A *Parte II* do tratado é o ponto focal da argumentação nesse momento, pois é nela que há o estudo sobre as interações entre vórtices viajando no espaço com trajetórias concorrentes. J. J. Thomson usa as definições de pressão dada por W. Thomson em 1881 e temperatura dada por Maxwell em 1879 para, assim, adaptar seus resultados a essas definições apresentadas (THOMSON, 1883, p. 109 – 114).

No caso das combinações químicas, J. J. Thomson recorre à interação de dois anéis de vórtice viajando no mesmo sentido da maneira que já foi descrito nesta tese (figura 3.5). O gás é entendido a partir das condições dos átomos e moléculas que o constituem e, por isso, as características de como os anéis são entrelaçados são essenciais. Para melhor entendimento, será descrita a maneira como dois átomos podem estar combinados em um gás.

Para J. J. Thomson, a combinação química entre dois átomos compreende seguinte estrutura: dois anéis de vórtice, paralelos um ao outro, com distância entre eles constante e muito menor que seus raios; os centros de cada vórtice (centro da seção transversal do anel) descrevem uma circunferência, enquanto transladam juntos; a velocidade de translação do sistema é muito menor que a velocidade linear com que os vórtices componentes desse sistema descrevem uma circunferência. Essa estrutura composta por dois anéis de vórtices é uma molécula, pois (THOMSON, 1883, p. 114):

> *Podemos supor que a união ou emparelhamento dessa forma de dois anéis de vórtices de tipos diferentes é o que ocorre quando dois elementos dos quais esses anéis de vórtice são átomos se combinam quimicamente; enquanto, se os anéis de vórtice são do mesmo tipo, esse processo é o que ocorre quando os átomos se combinam para formar moléculas.*

Quando o sistema, acima descrito, de dois anéis de vórtice interage com um terceiro anel de vórtice na vizinhança, os raios dos anéis que formam o sistema mudam e, dessa maneira, suas velocidades de translação também mudam, implicando o desmonte do sistema.

O intervalo de tempo em que os anéis permanecem juntos é chamado de *paired time*, aqui denominado "tempo de emparelhamento" (THOMSON, 1883, p. 115). Por definição, em condições normais, sem influência externa, o tempo de emparelhamento é maior do que o intervalo de tempo em que o átomo se encontra sozinho e livre de outros átomos. Para esse último intervalo de tempo, o termo usado é *free time*, aqui denominado "tempo livre".

O gás sob ação externa terá suas moléculas "quebradas" mais cedo do que se o gás estiver em condição contrária (livre de ação externa). Assim, o tempo de emparelhamento de um gás submetido à ação externa é menor do que o tempo de emparelhamento de um gás livre. Por consequência, haverá uma situação na qual a ação externa será grande o suficiente para fazer com que o gás não apresente mais as propriedades de seus compostos químicos, mas sim, apenas, as propriedades de seus átomos. Para essa última situação, entende-se que o gás está dissociado ou decomposto (THOMSON, 1883, p. 115). Dessa maneira, o tempo de emparelhamento e o tempo livre definem se haverá, ou não, combinação química entre os átomos.

Átomos combinados e emparelhados por longo intervalo de tempo precisam que seus filamentos possuam a mesma circulação (THOMSON, 1883, p. 117–118). Também, como mostrado na *Parte III*, um átomo é composto por anéis com, no máximo, seis filamentos de mesma circulação. Nessa proposição, J. J. Thomson afirma que cada anel de vórtice não precisa ser único; pois, a proposição continuará verdadeira se os anéis de vórtices forem compostos por outros anéis de menor circulação, ou seja, um único anel pode ser considerado como resultante do entrelaçamento de outros anéis de menor circulação; sempre respeitando a condição de estabilidade, na qual só poderá haver seis vórtices

interagindo.

Ao entender que um vórtice pode ser considerado pela composição de outros vórtices de menor circulação, os sistemas de vórtices ficam divididos em "primários" e "secundários". Com auxílio do esquema da figura (4.9), pode-se entender que o anel âncora é primário, enquanto os anéis de vórtice que compõem o anel âncora são os secundários. No caso onde exista um único anel, o sistema é apenas primário.[19]

Embora a figura (4.9) se refira à seção transversal do anel âncora, a condição de estabilidade para seis vórtices é deduzida sob a condição que os anéis entrelaçados tenham abertura muito grande se comparados com sua cintura e, com isso, o problema de estabilidade se resume a uma analise de vórtices em forma de coluna. Mas ora, os vórtices que tratam da combinação química (*Parte IV*) possuem as mesmas relações de tamanho propostas para os vórtices entrelaçados (*Parte III*); então, as condições de estabilidade são estendidas à composição química. Assim, a argumentação no entendimento dos compostos químicos segue nessa linha (THOMSON, 1883, p. 119):

> *Agora suponhamos que os átomos dos diferentes elementos químicos sejam compostos de anéis de vórtices todos com mesma circulação, mas que alguns desses elementos consistam em apenas um desses anéis, outros em dois dos anéis ligados entre si, ou então de uma curva contínua com duas voltas,*[20] *outras de três e assim sucessivamente; mas nossa investigação no final da Parte III mostra que nenhum elemento pode consistir em mais de seis desses anéis se eles estiverem dispostos da maneira simétrica descrita [dispostos nos vértices de um polígono].*
>
> *Então, se qualquer um desses átomos se combinar de modo a formar uma combinação permanente, as circulações de todas as primárias no sistema formado pela*

[19] A circulação do anel âncora — primário — é igual a soma da circulação dos anéis constituintes — secundários.

[20] Isso é outra configuração de anéis de vórtice além das mencionada aqui, entrelaçados ou separados com seus planos paralelos entre si. O anel contínuo com duas voltas se refere a um nó, comentado na seção (3.3.1). Pode-se entender esse anel semelhante ao formato do número "8", no qual sua forma é retorcida fazendo com que os "círculos" superior e inferior fiquem com seus planos paralelos um ao outro.

combinação devem ser iguais. Assim, um átomo de um elemento pode combinar-se com outro átomo do mesmo tipo para formar uma molécula da substância que consiste em dois átomos.

Assim, um átomo consistindo de dois anéis entrelaçados pode comportar-se como um anel com o dobro da circulação, três anéis entrelaçados, com três vezes a circulação e assim por diante. Então, os compostos químicos são considerados como sistemas resultantes de subsistemas de anéis. Logo, em síntese, as condições para a permanência das combinações são: a circulação de cada anel que interage dentro de um sistema ou subsistema deve ser a mesma; o número de vórtices deve ser menor ou igual a 6.

Pode-se exemplificar, supondo-se um átomo composto por dois anéis ligados combinado com um átomo composto apenas por um único anel. Nessa situação, todos os primários deverão ter a mesma circulação, assim os átomos que consistem de dois anéis são combinados com dois átomos de apenas um anel (figura 4.10).

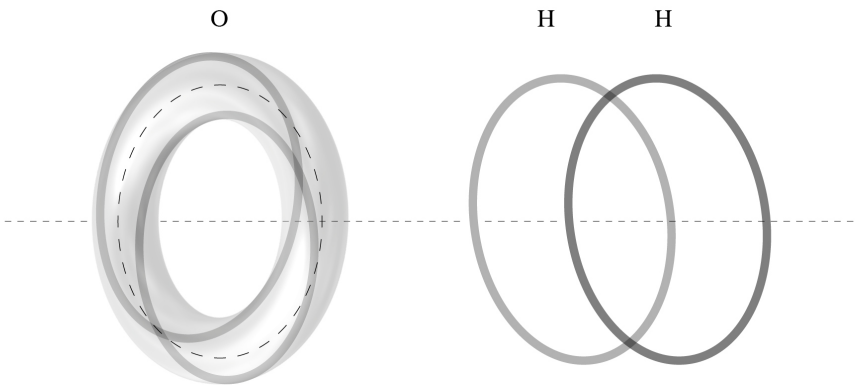

Figura 4.10: Representação de um caso onde um átomo composto por dois anéis entrelaçados forma uma molécula junto com dois átomos de um anel. A relação pode figurar a molécula da água (H_2O).

Por exemplo, o oxigênio pode ser considerado como um átomo composto por dois anéis entrelaçados, enquanto o hidrogênio, como um átomo de um único anel. Assim, se

o oxigênio é um primário composto por dois secundários, uma outra composição possível para ele, por exemplo, é o dióxido (figura 4.11).

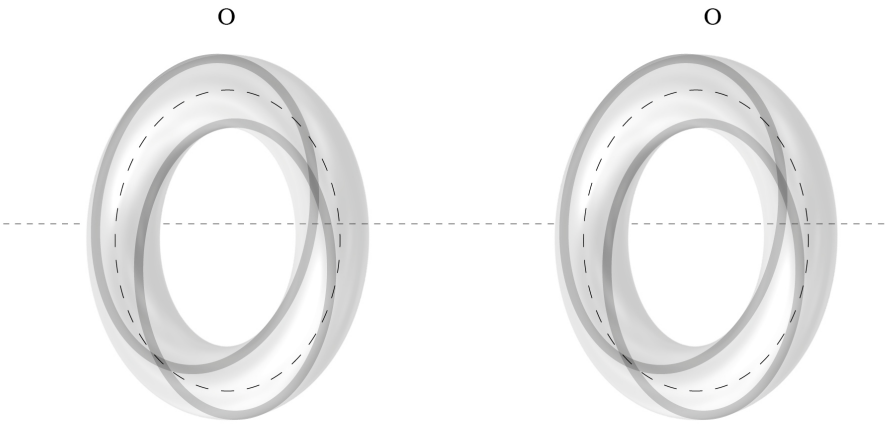

Figura 4.11: Representação de um caso onde um átomo composto por dois anéis entrelaçados forma uma molécula junto a outro átomo composto por dois anéis. A relação pode configurar a molécula de dióxido (O_2).

As combinações mais simples são mais prováveis que as mais complexas, fazendo com que a chance de encontrar-se compostos simples seja infinitamente maior que a chance de encontrar-se compostos com configurações mais complexas. Com efeito, o composto do exemplo acima apresenta a configuração mais simples, sendo formado por um átomo de dois anéis com dois átomos de único anel (figura 4.10). As configurações mais simples seguem o mesmo raciocínio, ou seja, é mais provável que um átomo de três anéis esteja combinado com três átomos de um único anel e assim por diante. Para J. J. Thomson, essa ideia sugere que os átomos dos elementos sejam chamados de mônade (único anel), díade (dois anéis), tríade (três anéis), tétrades (quatro anéis) e assim em diante (THOMSON, 1883, p. 120).

J. J. Thomson reconhece suas limitações em seu tratado e entende a necessidade de algumas suposições arbitrárias para os compostos conhecidos. Os compostos de nitrogênio, por exemplo, apresentam problemas na definição de nós em sua estrutura. Com efeito, na amônia (NH_3), o nitrogênio pode apresentar-se como uma tríade, pois pode-se entender

que o nitrogênio é um átomo com três anéis, enquanto o hidrogênio é apenas um anel; uma outra maneira de entender o composto amônia, é imaginar o nitrogênio, assim como o hidrogênio, sendo mônade; dessa forma, a amônia é composta por quatro primários. Todavia, o óxido nítrico (NO) mostra o nitrogênio como díade, pois se combina com o oxigênio que também é díade (como no exemplo dado na figura 4.10), pois o oxigênio se combina com dois átomos de hidrogênio. J. J. Thomson resolve a inconsistência considerando que o átomo de nitrogênio poderia se alternar em mônade e díade (THOMSON, 1883, p. 123 – 124):

> *No entanto, é concebível que um átomo possa passar por um processo que faria com que ele agisse como um [anel] contendo o dobro de 'links'. Para ilustrar isso, pegue um único anel circular e puxe os lados opostos para que eles se cruzem no centro do anel, formando uma figura de oito, depois dobre uma metade da figura de oito sobre a metade, o anel contínuo agora formará dois círculos cujos planos são quase coincidentes. Se o anel circular representasse uma linha de núcleo de vórtice, o anel duplicado se comportaria como um contendo o dobro de 'links' do anel original.*

Dessa maneira, o nitrogênio no composto NO é um primário formado por dois secundários, enquanto no composto NH_3 ele é um primário sem secundários.

Assim, a afinidade química está associada ao número de anéis de vórtice contidos no átomo. Para o caso dos átomos constituídos por mais de um anel de vórtice, não haverá elemento composto por mais do que seis anéis de vórtice. Como implicação, os compostos químicos gasosos formados seguiam a relação AB_n com $n \leq 6$, o que concordava com os compostos gasosos conhecidos na época, com a exceção do cloreto de tungstênio (WCl_6) (KRAGH, 1976, p. 65).

Dentro dessa perspectiva, J. J. Thomson segue avaliando outros elementos e constrói uma tabela de valência. Seus resultados apresentam concordância razoável com os dados

existentes na época. Ao final, J. J. Thomson reconhece a complexidade da estrutura química da matéria (THOMSON, 1883, p. 124):

> *De acordo com a visão que adotamos, a atomicidade corresponde à complexidade do arranjo atômico; e os elementos de alta atomicidade consistem em mais anéis de vórtice do que aqueles cuja atomicidade é baixa; assim, alta atomicidade corresponde a arranjo atômico complicado, e deveríamos esperar encontrar os espectros de corpos de baixa atomicidade muito mais simples do que aqueles de alta atomicidade.*

Capítulo 5

Os tubos abertos

Um ano após a publicação de seu *Treatise*, J. J. Thomson assume a cadeira como professor e chefe do laboratório Cavendish.[1] Suas atenções se voltam aos experimentos de descargas em gases, porém não sobre a natureza dos raios catódicos.[2] Inicialmente J. J. Thomson se dedica aos experimento de descarga em gases com a intenção de compreender a relação entre matéria, eletricidade e combinação química. Sua atenção sobre a natureza dos raios catódicos surge após 1895 com a descoberta dos raios-X (FALCONER, 1985; FALCONER, 1987; DAVIS; FALCONER, 1997; FALCONER, 2001). Nessa conjuntura, após a publicação de *Cathode Rays*, o elétron — então chamado de corpúsculo — é introduzido gradativamente por J. J. Thomson em suas teorias da condução de eletricidade, composição da matéria e ligações químicas.

No início da década de 1880, a trajetória de J. J. Thomson é marcada por sua análise matemática e especulativa acerca da estrutura da matéria, através dos anéis de vórtice, tendo as configurações de Mayer como principal apoio experimental para analogia. Ao assumir a posição de chefe do laboratório Cavendish, J. J. Thomson começa a dispor de recursos próprios para experimentação, o que dirigiu sua atenção aos experimentos com descarga em gases. J. J. Thomson reconhecia a importância do estudo dos experimentos de descargas em gases, porque alinhava-se com o pensamento de Maxwell, no qual

[1] De 1884 até 1919.

[2] As investigações sobre a natureza de raios catódicos de J. J. Thomson culminaram na descoberta de seu "corpúsculo" que, mais tarde, foi batizado como elétron.

(MAXWELL, 1873, § 57):

> *[...] muitos [...] fenômenos sobre descarga elétrica são extremamente importantes e, quando eles forem mais bem entendidos, eles provavelmente irão trazer luz acerca da natureza da eletricidade, assim como a natureza dos gases [...]*

Em verdade, J. J. Thomson fazia coro com Maxwell ao pensar que, para os fenômenos de descarga em gases (THOMSON, 1893, p. 189):

> *talvez não haja outro ramo da física que nos ofereça uma oportunidade tão promissora de penetrar no segredo da eletricidade.*

Com efeito, não é por acaso que o segundo capítulo do *Recent Researches* é dedicado ao estado da arte dos fenômenos conhecidos até então sobre descarga em gases, pois "não há resumo nos livros didáticos em inglês da extensa literatura sobre o assunto" (THOMSON, 1893, p. 53).[3]

Ainda sobre descarga elétrica e a natureza da eletricidade, J. J. Thomson enxerga a eletrólise como um fenômeno central para o entendimento da fenomenologia, pois apoia-se sobre os direcionamentos dados por Maxwell, no qual afirma que (MAXWELL, 1873, § 255):

> *[d]e todos fenômenos elétricos, eletrólise aparenta ser o mais provável para nos fornecer uma visão real da verdadeira natureza da corrente elétrica.*

Sendo assim, a intenção e o foco de J. J. Thomson ficam evidentes; o *Recent Researches* apresenta suas duas principais preocupações: as interpretações dos fenômenos eletromagnéticos através dos tubos de Faraday e os resultados experimentais de Hertz

[3] O livro *Notes on Recent Researches in Electricity and Magnetism* é conhecido como o livro que dá sequência ao *Treatise* de Maxwell. De fato, o subtítulo de *Recent Researches* é *Intended as a Sequel to Professor Clerk-Maxwell's Treatise on Electricity and Magnetism.*

sobre a existência das ondas eletromagnéticas.[4] Os tubos forneciam um mecanismo capaz de responder às questões dos fenômenos eletromagnéticos que lhe eram caras. Hertz obteve resultados que traziam alento à teoria de tubos.

Os resultados dos experimentos de Hertz foram muito bem recebidos pelos britânicos, pois corroboravam a teoria da onda eletromagnética de Maxwell (HUNT, 1991, p. 158 – 162). Entre os anos de 1888 e 1890, J. J. Thomson usa técnicas experimentais de Hertz para desenvolver experimentos que comprovassem resultados de Maxwell (NAVARRO, 2012, p. 60). O principal interesse era a relação entre a velocidade de propagação de descargas elétricas em condutores e nos dielétricos em torno do condutor. J. J. Thomson desenvolveu experimentos não só em sólidos, também em líquidos e gases (THOMSON, 1889a; THOMSON, 1889b; THOMSON, 1889c). Os resultados levaram J. J. Thomson lentamente a abandonar a sua teoria baseada nos anéis de vórtice, segundo Navarro (2012, p. 61). De fato os resultados encontrados mostravam que a velocidade da descarga em tubos era próxima à da luz, fato desconsiderado em seu *Treatise*. A questão da rápida propagação da eletricidade em gases traz um problema, pois (THOMSON, 1889c, p. 132):

> *[a] taxa muito rápida com que a descarga elétrica é propagada através de um gás rarefeito nos compele em admitir que a eletricidade não é conduzida por átomos carregados que se movem com essa velocidade [próxima da luz].*

A fim de resolver o problema, J. J. Thomson introduz o mecanismo de propagação em cadeia, um modelo análogo à *Grotthus chain*.[5] Esse mecanismo será mais bem explicado mais à frente na seção *A eletrólise* (5.3), mas, por ora, pode-se dizer que o modelo da

[4] A maioria dos capítulos de *Recent Researches* estão dedicados em explicar os tubos de Faraday, enquanto o experimento de Hertz aparece apenas no capítulo 5. Isso poderia levar ao entendimento que o experimento de Hertz não está relacionado aos tubos de Faraday, o que não é verdade (NAVARRO, 2012, p. 60).

[5] Freiherr Christian Johann Dietrich Theodor von Grotthuss (1785-1822) foi um cientista nascido na Lituânia. Inspirado pela pilha de Volta, Grotthus propôs uma teoria de eletrólise publicada em 1805 em Roma (PAULIUKAITE; JUODKAZYTĖ; RAMANAUSKAS, 2010). Esse mecanismo de condução elétrica também foi usado por Humphry Davy no início dos século XIX e revisitado por Faraday em 1833 em seus estudos da eletrólise (DARRIGOL, 2000, p. 81)

cadeia de Grotthus contempla o fenômeno da associação (e dissociação) antes apresentado na teoria dos anéis de vórtice, enquanto, ao mesmo tempo, explica a rapidez da propagação elétrica no meio.[6]

Dessa forma, as teorias de J. J. Thomson tomam como base os tubos de Faraday, o que é explicitado (THOMSON, 1891, 140 – 150):

> *Eu tenho que tentar[...] desenvolver um método para expressar os vários processos que ocorrem no campo elétrico em termos de mudanças na forma ou posição dos tubos de indução eletrostática que se supõe estarem distribuídos por todo o campo[...] Métodos como este, de materializar, por assim dizer, concepções matemáticas, parecem ter utilidade mesmo onde, como no caso da Eletricidade, a teoria analítica está bem estabelecida; pois qualquer método que nos permita formar uma imagem mental do que se passa no campo elétrico tem um frescor e um poder de fornecer rapidamente as principais características de um fenômeno, distintas dos detalhes, que poucos podem esperar derivar de análises puramente de métodos analíticos. A experiência mostrou, penso eu, que a concepção de deslocamento elétrico [displacement] de Maxwell é de caráter um tanto geral demais para se prestar facilmente à formação de uma concepção de um mecanismo que ilustraria, por seu funcionamento, os processos que ocorrem no campo elétrico. Para tanto, a concepção de tubos de indução eletrostática introduzida por Faraday parece possuir muitas vantagens. Se considerarmos esses tubos como tendo uma existência física real, podemos, como me esforçarei para mostrar, explicar os vários processos elétricos – como a passagem de eletricidade através de metais, líquidos ou gases, a produção de uma corrente, força, a indução de correntes, e assim por diante, – como decorrentes da contração ou alongamento de tal tubo e seu movimento através do campo elétrico.*

Assim, J. J. Thomson afirma que os tubos de Faraday é a estrutura básica do éter capaz

[6] A dissociação para J. J. Thomson era entendida através dos átomos de vórtice (4.1.4).

de explicar os fenômenos eletromagnéticos.

Nesse momento J. J. Thomson se afasta dos átomos de vórtice em forma de anel, entretanto ele não abandona a dinâmica da vorticidade. De fato, como será desenvolvido nas próximas seções, a estrutura que comporta a vorticidade é expandida e passa a abarcar outros fenômenos, como a eletrólise e a descarga em gases, além de compor o átomo. Dentro desse contexto, J. J. Thomson lança mão de sua ferramenta fundamental: os tubos de Faraday.[7]

5.1 Os tubos de Faraday (ou de J. J. Thomson?)

Os tubos de Faraday eram tubos unitários de indução eletrostática com mesma intensidade correspondente a uma unidade de carga (THOMSON, 1893, p. 3),

> *[s]e assumirmos que os tubos no campo são todos da mesma intensidade, a quantidade de eletricidade positiva livre em qualquer superfície será proporcional ao número de tubos que saem da superfície.*

Os tubos eram concebidos mecanicamente no éter como filamentos de vórtices fechados ou com seus terminais ligados à matéria ordinária, ou melhor, ao átomo. Evidenciando-se, assim, uma flagrante analogia entre os filamentos de vórtice de Helmholtz,[8] colocada de forma consciente por J. J. Thomson (THOMSON, 1893, p. 3 – 4):[9]

> *A propriedade dos tubos de Faraday de sempre formarem circuitos fechados ou alternativamente terem suas extremidades em átomos pode ser ilustrada pela*

[7] Importantes conceitos da ciência não se estabelecem de forma isolada. Os tubos de Faraday de J. J. Thomson tiveram forte influência de grandes mentes como John Henry Poynting, Arthur Schuster, and William Hicks, como mostram os historiadores Darrigol (2000, p. 269), Kragh (1976, p. 70) e Navarro (2012, p. 64)

[8] Como descrito em (3), os filamentos de vórtices apresentam-se sempre fechados (como um anel) ou terminam nos limites do fluído.

[9] Já havia sido comentado de forma similar em (THOMSON, 1891, p. 150):

> *[. . .] os tubos se assemelham a linhas de vorticidade em hidrodinâmica, pois essas linhas devem ser fechadas ou ter suas extremidades em um limite do fluido.*

> *propriedade similar possuída pelos tubos de movimento em vórtice em um fluido sem fricção; esses tubos ou formam circuitos fechados ou têm suas extremidades na fronteira do líquido no qual ocorre o movimento do vórtice.*

Os tubos possuem direção, iniciam-se em cargas positivas e terminam em cargas negativas, desse modo os átomos onde os tubos se iniciam estão positivamente carregados e, ao contrário, aqueles que recebem os tubos estão negativamente carregados (THOMSON, 1893, p. 3):

> *[...] esses tubos partem de locais onde há eletricidade positiva e terminam em locais onde há eletricidade negativa, sendo a quantidade de eletricidade positiva no início do tubo igual à da negativa no final.*

J. J. Thomson ressignifica os tubos e, assim, faz uma releitura daqueles já apresentados por Maxwell em *Faraday Lines* e em seu *Treatise*, no qual Maxwell ilustra os tubos (MAXWELL, 1873, § 82):

> *Se a linha de força se move de modo que seu início trace uma curva fechada na superfície positiva, seu final traçará uma curva fechada correspondente na superfície negativa e a própria linha de força gerará uma superfície tubular chamada tubo de indução.*

Para o entendimento dos fenômenos citados a partir dos tubos abertos, torna-se imperativo descrever a representação do campo elétrico a partir desses tubos, pois são eles responsáveis pela caracterização da carga. Na seção 5.4, será mostrado que os tubos serão os elementos que compõem o átomo. Na seção 5.2 será mostrado como o campo elétrico e magnético são modelados por tubos e na seção 5.3 será mostrado como a descarga elétrica é explicada pelo modelo de tubos. A maior parte do texto será balizado pela *Lecture* apresentada por J. J. Thomson na Universidade de Yale em 1903, que foi publicada no ano de 1904a. O *Electricity and Matter* contém os avanços mais recentes do período acerca da

"ciência elétrica" relativos à visão de J. J. Thomson do que seja a constituição da matéria e a natureza da eletricidade, segundo ele (THOMSON, 1904a, prefácio):

> *[...] duas questões que provavelmente estão tão intimamente conectadas, que a solução de uma supriria a da outra.*

5.2 O campo elétrico e o magnético

Em sua autobiografia, J. J. Thomson escreve (THOMSON, 1936, p. 94 – 95):

> *Uma coisa que me atraiu foi a analogia entre as propriedades dos filamentos de vórtice e as das linhas de força elétrica introduzidas por Faraday para representar o campo elétrico. . . De fato, parecia que mesmo que a vorticidade não fosse suficiente para representar a matéria, ela ainda poderia dar uma representação muito útil do campo elétrico.*

Os tubos como campo elétrico mantinham a vorticidade em sua caracterização, pois eram formados por feixes de filamentos de vórtice, onde os eixos de rotação dos vórtices estavam paralelos ao eixo do tubo (figura 5.1). Assim, os tubos eram repletos de filamentos que davam a direção através da regra da mão direita (THOMSON, 1895, p. 512).

A teorização do campo elétrico resgata a representação da ação elétrica através das linhas de força proposta por Faraday (capítulo 2). Essas linhas coincidem com a direção da ação elétrica e a intensidade é dada pela concentração de linhas em dada região, ou seja, regiões com maior número de linhas possui maior intensidade da ação elétrica. Dessa maneira, o campo elétrico era repleto de linhas de força elétrica, as quais eram traçadas emergindo das cargas positivas e terminando nas cargas negativas. J. J. Thomson reconhece que as linhas de força são descritivas mas não são quantitativas, ou seja, as linhas representam a região de ação elétrica e fornecem a intensidade da ação de forma qualitativa. Entretanto, segundo ele, é fácil desenvolver um método que quantifique a ação, bastando introduzir a ideia de "tubos de força" (THOMSON, 1904a, p. 14):

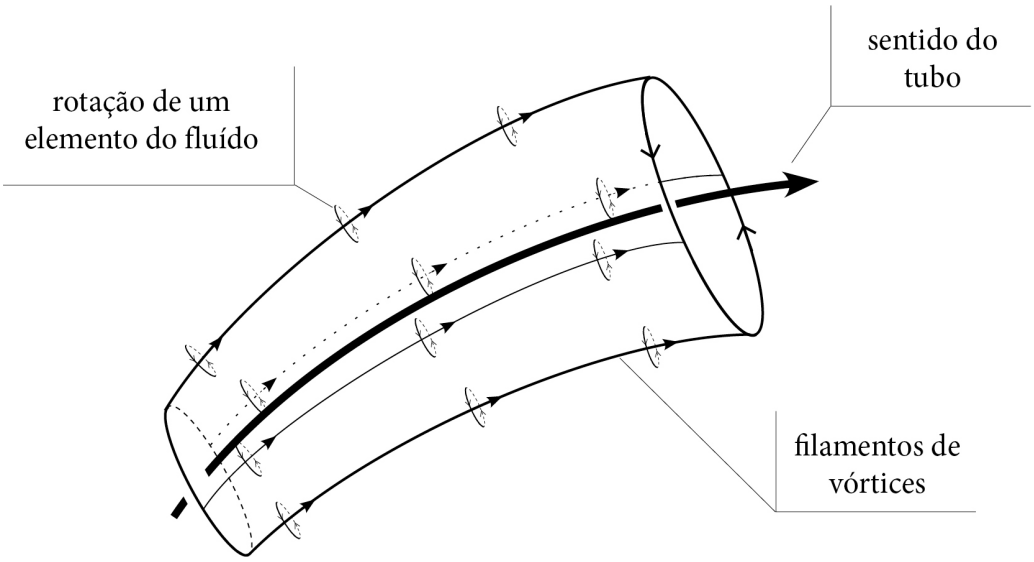

Figura 5.1: Filamentos de vórtices compondo um tubo. A direção do tubo é alinhada à vorticidade dos filamentos e seu sentido é dado pela regra da mão direita.

> *Se através da fronteira de qualquer pequena curva fechada no campo elétrico traçarmos as linhas de força, essas linhas formarão uma superfície tubular e se seguirmos as linhas de volta à superfície eletrificada positivamente, a qual começam e a partir da qual avançam para superfície negativamente eletrizada, onde terminam, podemos provar que a carga positiva encerrada pelo tubo em sua origem é igual à carga negativa encerrada por ele em sua extremidade. Escolhendo adequadamente a área da pequena curva através da qual traçamos as linhas de força, podemos fazer com que a carga contida no tubo seja igual à carga unitária.*

Segundo J. J. Thomson, os tubos de Faraday poderiam justificar o campo magnético e explicar as definições de *electric displacement* usados por Maxwell em seu *Treatise* (THOMSON, 1895, p. 512):

> *Quando esses tubos se espalham no meio, eles dão origem ao deslocamento de Maxwell e o movimento dos tubos através do meio produz um campo magnético.*

Para o "deslocamento elétrico" de Maxwell, a explicação de J. J. Thomson parte de duas ideias, apresentadas a seguir. A primeira considera uma superfície fechada, onde a diferença entre a quantidade de tubos que adentram e a quantidade de tubos que saem da superfície é igual à soma algébrica das cargas dentro dessa superfície. A essa soma, Maxwell chamou de *electric displacement*. A segunda considera o sentido do "fluxo" de tubos por unidade de área definindo o *electric displacement* em dada direção a partir de um ponto. A rotação existente nos tubos dá origem a uma pressão, a qual é associada a tensão no meio. Os tubos na eletrostática se repelem, o que justifica a representação em linhas curvas (5.2 e 5.3). A região de maior concentração de linhas é a região de maior tensão/pressão. Para determinar a tensão, J. J. Thomson faz referência a resultados apresentados no tratado de Maxwell (THOMSON, 1904a, p. 16). Assim, a tensão é dada por $\frac{1}{2}NR$ onde, N é a densidade de tubos em dada superfície fechada perpendicular às linhas de força e R é a intensidade elétrica.[10]

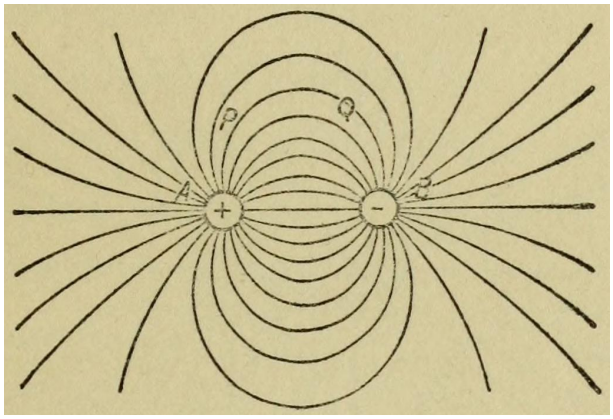

Figura 5.2: Linhas entre cargas opostas. As linhas se repelem, a região PQ possui maior concentração de linhas do que na região além de PQ. A repulsão entre as linhas contidas na região PQ é maior do que na região fora de PQ fazendo com que as linhas se entortem (THOMSON, 1904a, p. 11).

A energia potencial eletrostática do campo elétrico é associada ao movimento de rotação do éter ocasionado pelos vórtices dos tubos de Faraday (THOMSON, 1893, p. 5):

[10] Maxwell apresenta em seu tratado a tensão $p = \frac{1}{2}\mathfrak{D}\mathfrak{E}$, onde $\mathfrak{D}$ é o *displacement* e $\mathfrak{E}$ é chamada de intensidade eletromotiva (MAXWELL, 1873, § 111).

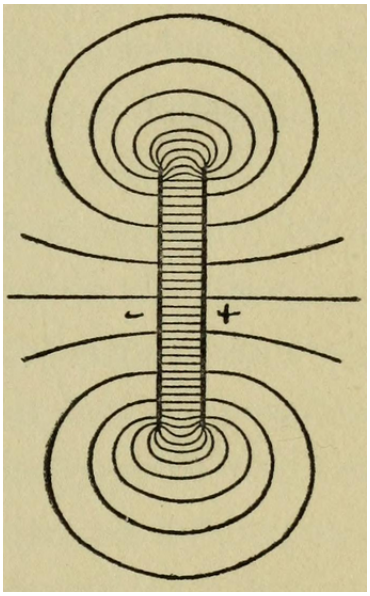

Figura 5.3: Linhas entre placas paralelas. As linhas entre as placas são retas e nas beiras das placas são curvas. Em dada linha do campo entre as placas, a pressão para baixo exercida pelas linhas de força logo acima será igual à pressão para cima exercida pelas linhas logo abaixo. Para uma linha de força próxima à borda da placa, no entanto, a pressão das linhas de força abaixo excederá a pressão daquelas acima, fazendo com que a linha de força se projete até que sua curvatura e tensão contrabalancem a ação das linhas que estão entre a placa (THOMSON, 1904a, p. 13 – 14).

> *[...] nos tubos de Faraday há uma distribuição de velocidade do éter tanto nos próprios tubos quanto no espaço que os circunda. Assim, podemos ter rotação no éter dentro e ao redor dos tubos, mesmo quando os próprios tubos não têm velocidade de translação, a energia cinética devido a esse movimento constitui a energia potencial do campo eletrostático.*

Para o caso no qual os tubos estejam em movimento translacional, a energia é associada ao campo magnético. E, a fim de ilustrar a relação entre o movimento dos tubos e o campo magnético, J. J. Thomson em *Electricity and Matter* usa a descarga de um capacitor de placas paralelas como exemplo (THOMSON, 1904a, p. 17 – 19). A descarga é realizada por um fio condutor colocado em contato em uma das extremidades de cada placa do capacitor (5.4). O fio ocupará um lugar no espaço que outrora era ocupado por um tubo de Faraday e, segundo J. J. Thomson, nessa situação, os tubos dentro do condutor

"contraem-se às dimensões moleculares", o que significa que a corrente elétrica nesse fio pode ser entendida pela corrente de Grotthus.[11] Considerando-se a repulsão mútua dos tubos de Faraday, a substituição de um tubo eletrostático por um fio condutor faz com que a repulsão, anteriormente exercida pelo tubo, desapareça. Assim, um tubo imediatamente acima do fio estará submetido a uma repulsão de um outro tubo logo acima do primeiro, dessa maneira, o primeiro tubo é empurrado em direção ao fio. Essa dinâmica se mantém até que todos os tubos sejam empurrados em direção a fio, onde ocorre a descarga elétrica (5.4). A movimentação desses tubos produz o campo magnético. Então, de maneira concisa, pode-se entender que o resultado da conexão das placas do capacitor produz uma corrente elétrica através do fio, que flui no sentido da placa positiva para as placa negativa e, enquanto isso, há o surgimento do campo magnético entre as placas. Embora J. J. Thomson reconheça a direção do campo magnético sendo perpendicular à pagina, ele não se preocupa em explicitar o sentido do campo.

A intensidade do campo magnético é $4\pi\sigma v$, onde σ é a densidade de carga contida nas placas e v a velocidade com que as cargas se movimentam (THOMSON, 1904a, p. 17–18).[12]

Dessa maneira J. J. Thomson associa o movimento dos tubos de Faraday ao campo magnético (THOMSON, 1904a, p. 18–19):

[11] O mecanismo da corrente de Grotthus será, como já comentado, mostrado mais à frente.

[12] A intensidade do campo magnético definida a partir da velocidade da carga já era conhecida por Maxwell (1873, § 606 – 607) e por J. J. Thomson (1893, p. 8):

$$4\pi p = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz},$$
$$4\pi q = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx},$$
$$4\pi r = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy},$$

onde p, q, r são as componentes da corrente elétrica nas direções dos eixos cartesianos x, y e z; ao mesmo tempo que α, β e γ são as componentes do campo magnético. Se escrito em notação moderna:

$$4\pi \boldsymbol{J} = \nabla \times \mathcal{H}$$

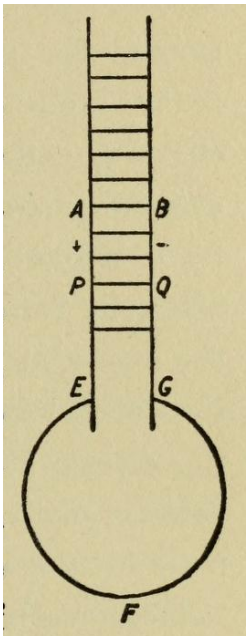

Figura 5.4: Duas placas paralelas, A e B, carregadas. O fio condutor EFG conecta as extremidades do capacitor. O tubo PQ deixa o seu estado de equilíbrio no instante que há diminuição da tensão na região compreendida entre PQ e EFG. (THOMSON, 1904a, p. 17).

> *Aqui temos dois fenômenos que não ocorrem no campo eletrostático constante, um o movimento dos tubos de Faraday, o outro a existência de uma força magnética [campo magnético]; isso sugere que há uma conexão entre os dois, e que o movimento dos tubos de Faraday é acompanhado pela produção de força magnética [campo magnético]. [...] Pois, como o deslocamento elétrico é medido pela densidade dos tubos de Faraday, [...] o movimento dos tubos de Faraday, por hipótese, implica força magnética [campo magnético].*[13]

Os tubos de Faraday, por princípio, não podiam nem ser criados nem ser destruídos. Então, a variação do campo elétrico era dada pelo movimento dos tubos implicando campo magnético. Assim, para J. J. Thomson (THOMSON, 1904a, p. 19), um tubo de Faraday movendo-se com velocidade v produz um campo magnético com intensidade $4\pi v \sin\theta$ e

[13] O campo magnético $\mathcal{H}$ era denominado força magnética. O termo força nesse caso é entendido como intensidade, assim, a expressão "força magnética" pode ser melhor entendida como "intensidade do campo magnético".

tem direção perpendicular ao tubo e à velocidade (5.5). O termo θ é o ângulo formado pela direção do tubo e o movimento. Para o caso do capacitor de placas paralelas (5.4), o movimento do conjunto de tubos de Faraday produz um campo magnético com intensidade $4\pi\sigma v$ (como mencionado acima), pois $\sin\theta = 1$ já que a direção do tubo é perpendicular à direção que se movimentam.

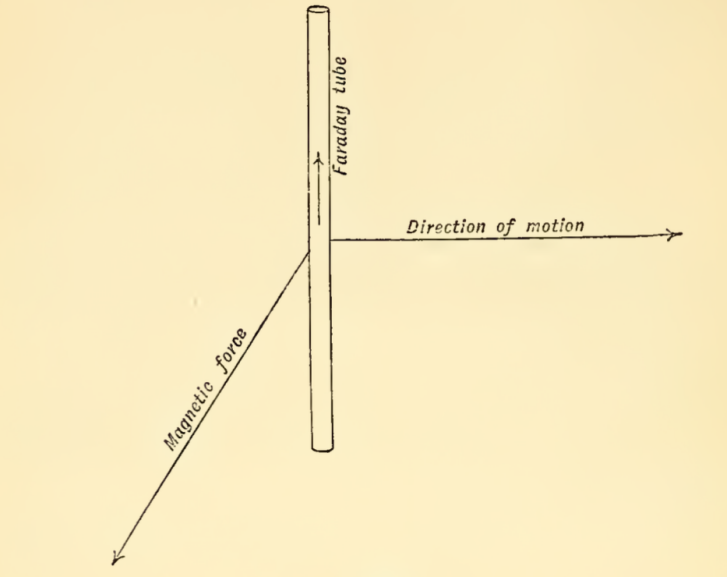

Figura 5.5: Representação da ação magnética implicada pelo movimento do tubo de Faraday (THOMSON, 1893, p. 12).

A fim de analisar as consequências da existência de campo magnético pelo movimento dos tubos, J. J. Thomson recorre a uma caso particular: uma esfera carregada em movimento. E, a partir dela, infere a energia existente devido ao movimento dos tubos. Esse resultado será revisitado posteriormente, quando J. J. Thomson estrutura seu átomo. Por ora, é importante perceber como a massa da carga contida na esfera é determinada pela energia do campo magnético que, por sua vez é caracterizado pelo éter. Assim, a situação pode ser pensada como a seguir.

Quando há uma esfera carregada,[14] há pequenos tubos de Faraday unitários emergindo ou incidindo na superfície da esfera (dependendo da carga da esfera). Os tubos se espalham

[14] J. J. Thomson não faz menção sobre a esfera ser condutora, o que, de verdade, não tem importância, pois a análise dos campos é feita para pontos externos à esfera.

de forma radial e uniforme em torno da esfera; em dada região do espaço é possível imaginar uma concentração de tubos, ou melhor, uma densidade de tubos que pode ser dada por $\frac{e}{4\pi r^2}$ (THOMSON, 1904a, p. 20), onde r é a distância do centro da esfera até um ponto qualquer do espaço.[15]

O movimento da esfera com os tubos produz um campo magnético em uma região do espaço de intensidade $\frac{ev\sin\theta}{r^2}$, onde v é a intensidade da velocidade com que a esfera se movimenta (figura 5.6).

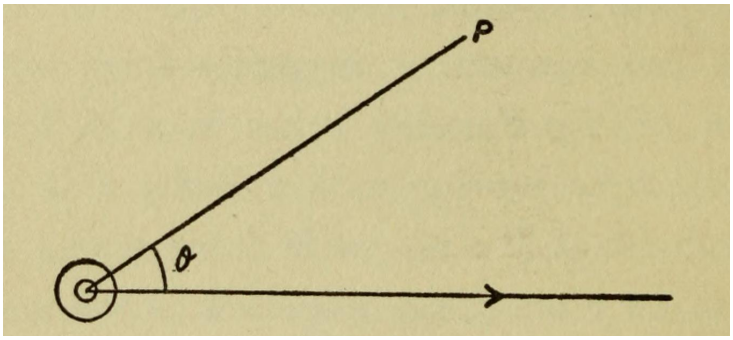

Figura 5.6: Representação de uma esfera carregada, centrada no ponto O, movimentando-se da esquerda para a direita em direção horizontal. A densidade de tubos de Faraday no ponto P é dada por $\frac{e}{4\pi OP^2}$, onde e é a carga sobre a esfera e θ é o ângulo entre os tubos de Faraday e a direção de movimento (THOMSON, 1904a, p. 20).

Ao campo magnético, em certa região do espaço, está associada uma densidade de energia igual a: $\frac{\mu\mathcal{H}^2}{8\pi}$, onde μ é a permeabilidade magnética do meio. Assim, para a esfera carregada se movendo, a energia por unidade de volume pode ser escrita como $\frac{\mu e^2 v^2\sin^2\theta}{8\pi r^4}$; integrando para todo o espaço, a energia será $\frac{\mu e^2 v^2}{3a}$, onde a é o raio da esfera (THOMSON, 1904a, p. 21).Dessa maneira, J. J. Thomson considera que para o movimento dos tubos há uma energia associada igual a $\frac{\mu e^2 v^2}{3a}$, enquanto há no movimento da esfera uma energia cinética igual a $\frac{1}{2}mv^2$, onde m é a massa da esfera. Então, a energia total é :

$$E = \frac{1}{2}\left(m + \frac{2\mu e^2}{3a}\right)v^2, \tag{5.1}$$

[15] Em retrospecto, como mostra Darrigol (2000, p. 296), pode-se entender a situação a partir do vetor deslocamento $\mathcal{D}$, assim, em uma pequena região $d\boldsymbol{S}$ do espaço ao redor da esfera carregada, a densidade de tubos pode ser representada por $\mathcal{D}\cdot d\boldsymbol{S}$.

que seria a energia de uma esfera que se move com velocidade v e possui massa $M = m + \frac{2\mu e^2}{3a}$ ao invés de m. O que leva J. J. Thomson a crer que, por conta da carga elétrica, a massa da esfera é aumentada por $\frac{2\mu e^2}{3a}$, sendo essa a massa da carga contida na esfera. Assim, através dessa visão, a matéria é um produto do éter:

> *Nessa visão da constituição da matéria, parte da massa de qualquer corpo seria a massa do éter arrastada pelos tubos de Faraday que se estendem pelo átomo entre os constituintes eletrizados positiva e negativamente. O ponto de vista que desejo apresentar a vocês é que não é apenas uma parte da massa de um corpo que surge dessa maneira, mas que toda a massa de qualquer corpo é apenas a massa de éter que circunda o corpo que é transportada por os tubos de Faraday associados aos átomos do corpo. De fato, toda massa é massa do éter, todo momento, momento do éter, e toda energia cinética, energia cinética do éter.*

Nesse contexto, não há distinção entre massa, carga e éter. Pois, a eletrificação é um fenômeno que está nas extremidades dos tubos, enquanto a massa da partícula carregada é a massa de éter carregada pelos tubos de Faraday.

Mais à frente, esse resultado é revisitado por J. J. Thomson para descrever a massa de seu corpúsculo carregado.

5.3 Descargas elétricas

J. J. Thomson iniciou seus trabalhos experimentais sobre descargas em gases em 1884 (FALCONER, 1985, p. 132). Contudo, foi em 1890, desvencilhando-se da teoria dos átomos de vórtice, que J. J. Thomson propõe a *Grotthus chain* como mecanismo para entender as descargas elétricas (THOMSON, 1890a; THOMSON, 1890b). Nesse período, J. J. Thomson inicia uma série de trabalhos teóricos e experimentais sobre a relação da velocidade de propagação de descargas em condutores e dielétricos ao redor dos condutores

(THOMSON, 1889a; THOMSON, 1889b; THOMSON, 1889c). Sua motivação provavelmente emergiu dos resultados experimentais sobre as ondas eletromagnéticas apresentados por Hertz (FALCONER, 1985, p. 132). Um ponto a se destacar é que a cadeia de Grotthus era um mecanismo que conseguia transferir carga com a rapidez exigida pelos experimentos que J. J. Thomson vinha realizando.

Segundo J. J. Thomson (1936, p. 326–327), Grotthus introduz a ideia de moléculas compostas por átomos positivos e negativos amarrados em uma cadeia, como as limalhas de ferro ficam arranjadas sob ação magnética. Os átomo positivo (+) de uma das moléculas fica próximo de um átomo negativo (−) de uma molécula vizinha; se AB, CD e EF representam moléculas, na *Grotthus chain* as moléculas estariam organizadas como abaixo:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ - & + \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & D \\ - & + \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ - & + \end{pmatrix}$$

A atração sofrida pelo átomo A devido à ação de B é contrabalançada pela repulsão ocasionada por C, que está imediatamente ao lado de B. Essa relação segue por toda a cadeia, fazendo com que todos os átomos estejam em equilíbrio, com exceção daqueles que estão nas extremidades. Assim, as forças a que os átomos das extremidades estão submetidos corresponde às forças entre duas partículas separadas pelo comprimento da cadeia.

O tubo de Faraday são a ferramenta que J. J. Thomson incorpora ao sistema e, assim, faz sua releitura do fenômeno de descarga elétrica. Nesse contexto, sua ideia de carga caracterizada por tubos permitiu-lhe inserir os tubos de Faraday na explicação das descargas por intermédio da cadeia de Grotthus. Pois, nesse caso, as moléculas são constituídas por átomos de cargas opostas que estão, por sua vez, ligados pelos tubos de Faraday. A figura (5.7) é a ilustração da descarga elétrica.

Os pequenos tubos AB, CD e EF representam as moléculas de um gás, por exemplo. O grande tubo OP é o campo elétrico entre as placas e faz com que as moléculas de gás se alinhem, de modo que AB, CD e EF estejam paralelos a OP. As moléculas polarizadas

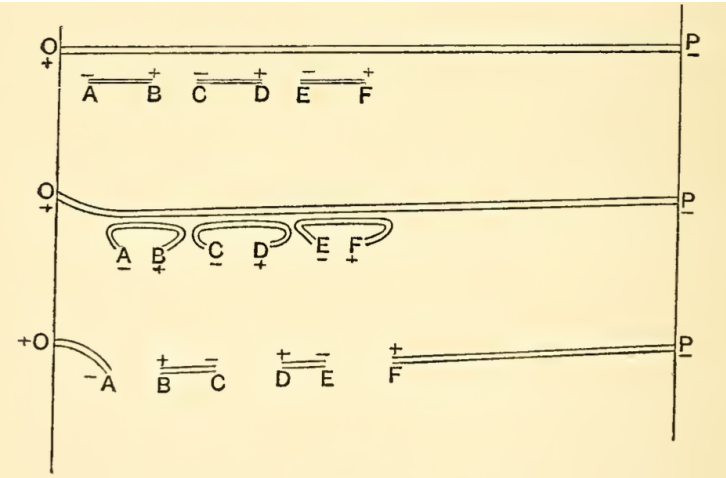

Figura 5.7: Mecanismo de descarga elétrica a partir dos tubos de Faraday (THOMSON, 1893, p. 46).

e o campo ficam em sentido contrário e, dessa maneira, eles se atraem e entortam.[16] Então, os tubos de Faraday se chocam e se rompem, fazendo com que um átomo negativo fique ligado à placa positiva e, também, um átomo positivo fique ligado à placa negativa. Segundo Navarro (2012, p. 66), J. J. Thomson costuma extrapolar suas ideias para outros contextos sem muitas justificativas, o que fez J. J. assumir que esse processo acontece em todos os meios, sólidos, líquidos e gasosos.

Então, dentro dessa explicação para o fenômeno de descarga elétrica, há a importante estrutura caracterizando a matéria: os tubos de Faraday, que emergem e terminam em átomos, fazendo com que, dessa maneira, os átomos em uma molécula estejam sempre conectados por tubos. Assim, um átomo é capaz de transportar carga, se estiver dissociado de uma molécula e, com ele, haverá um tubo de Faraday solidário com extremidade livre.

Esse mecanismo possui as principais ideias que J. J. Thomson desenvolveu, as descargas em gases envolvendo a dissociação molecular fundamentada na eletricidade, diferente da dissociação dos átomos de vórtice (4.1.4). Com efeito, os tubos de Faraday trouxeram a discretização da carga, percepção outrora desconsiderada na teoria dos anéis de vórtice

[16] O tubo de vórtice que representa o campo elétrico gira em sentido oposto ao dos tubos que representam as moléculas. Vórtices com sentidos contrários de rotação se atraem quando muito próximos.

(THOMSON, 1893, p. 3):

> *[Consideramos os tubos] como quantidades físicas reais tendo tamanho e forma definidos. Se aceitamos esse ponto de vista, naturalmente olhamos os tubos como tendo todos a mesma intensidade e há razões para acreditar que essa intensidade seja tal que, quando eles terminam em um condutor há na ponta na extremidade do tubo uma carga de eletricidade negativa igual aquela que, na teoria da eletrólise, associamos a um átomo de um elemento monovalente como o cloro.*
> *Essa intensidade dos tubos unitários é adotada, porque o fenômeno da eletrólise mostra que ele [o tubo] é uma unidade natural e que parte fracionadas dessa unidade não existem [...]*

Nesse sentido, a ideia de carga elétrica fica alinhada com o pensamento maxwelliano, no qual a carga elétrica é um fenômeno que surge pela interface entre éter e matéria e, além disso, os tubos de Faraday são a estrutura que concilia o discreto da carga com o contínuo do éter.

5.4 O átomo

Para a compreensão do átomo, é imprescindível perceber a clareza com que J. J. Thomson entende, a partir de uma bagagem carregada dos mais recentes avanços na "Ciência Elétrica", a conexão existente entre a constituição da matéria e a natureza da eletricidade. Pois, como já citado ao final da seção (5.1) e, agora, retomado aqui de forma mais extensa, J. J. Thomson registra seu intento de (THOMSON, 1904a, prefácio):

> *[...] relacionar os recentes avanços feitos na Ciência Elétrica sobre nossas visões da Constituição da Matéria e da Natureza da Eletricidade; duas questões que provavelmente estão tão intimamente conectadas, que a solução de uma supriria a da outra.*

A estrutura de "Electricity and Matter" denuncia a proposição implícita — agora explícita — de J. J. Thomson ter os tubos de Faraday compondo o átomo. Em um total de seis capítulos, três são dedicados à elucidação do papel dos tubos na fenomenologia, os quais antecedem os capítulos sobre a natureza da eletricidade e a constituição do átomo. Assim, nos capítulos I, II e III, J. J. Thomson se ocupa com as propriedades dos tubos de Faraday: a tensão e representação do campo elétrico, a massa de éter carregada por eles e as perturbações propagadas ao longo de sua estrutura. No capítulo IV, o intento é entender a natureza "das cargas de eletricidade que formam o início e o fim dessas linhas [de força]" (THOMSON, 1904a, p. 71).[17] Sob o título "A estrutura atômica da eletricidade", o capítulo mostra como dada quantidade de carga é constituída por um número finito de cargas individuais. Nessa percepção:

> *cada extremidade de um tubo de Faraday será o lugar de onde parte um número fixo constante de tubos ou de onde eles chegam.*

O que quer dizer que a carga está na extremidade do tubo. A unidade de carga negativa é aquela que J. J. Thomson nomeou de "corpúsculo" (THOMSON, 1904a, p. 87):

> *[os corpúsculos] são [sempre] os mesmos, seja qual for a eletrificação que possa ter surgido ou onde quer que se encontrem.*

Assim, os corpúsculos, discretos, são explicados pelos tubos de Faraday e, além disso (THOMSON, 1904a, p. 41):

> *[...] a massa de uma partícula carregada surge da massa de éter ligada pelo tubo de Faraday associado à carga.*

A associação da massa ao éter foi discutida na seção (5.2), porém, agora, a carga não está mais contida em uma esfera, mas, sim, em um corpúsculo. Nesse caso, de pequenas partículas — como os corpúsculos — a massa de éter carregada pelos tubos caracteriza a massa da partícula (THOMSON, 1904a, p. 49 – 50):

[17] As linhas de força são os tubos de Faraday.

> *Consideramos a massa neste caso como devida à massa de éter transportada pelos tubos de Faraday associados à carga. Como esses tubos se estendem a uma distância infinita, é como se a massa da partícula fosse difundida pelo espaço e não tem limite definido. Em consequência, entretanto, do tamanho muito pequeno da partícula e do fato de que a massa do éter transportada pelos tubos (sendo proporcional ao quadrado da densidade dos tubos de Faraday) varia inversamente como a quarta potência de sua distância da partícula,*[18] *descobrimos por um cálculo simples que, exceto por uma fração muito insignificante, toda massa está confinada a uma distância da partícula que é realmente muito pequena comparada com as dimensões normalmente atribuídas aos átomos.*

Dentro desse contexto, no qual a massa, a carga e os tubos se integram em um único mecanismo explanatório, J. J. Thomson recorda dois importantes resultados de seus experimentos sobre descarga elétrica para, assim, compor seu átomo. Um dos resultados versa sobre a massa e natureza de seu corpúsculo, o outro diz respeito à massa e natureza da eletrificação positiva. A relação entre esses dois resultados são essenciais na compreensão dos elementos que compõem o átomo.

Quanto aos resultados referentes à natureza do corpúsculo, J. J. Thomson recorre aos experimentos de raios catódicos, os quais mostram que (THOMSON, 1904a, p. 90):

> *[...] se nós produzimos os corpúsculos através dos raios catódicos, [...] nós sempre temos o mesmo tipo de corpúsculo.*

Ou seja, os corpúsculos provenientes de diferentes materiais são sempre do mesmo tipo. E, além disso, a massa do corpúsculo é sempre menor do que a massa de qualquer átomo conhecido. Então, como conclusão, o corpúsculo deve ser um constituinte do átomo de diferentes substâncias (THOMSON, 1904a, p. 90):

[18] A densidade de tubos de Faraday em dado ponto é $\frac{e}{4\pi r^2}$ como visto na seção (5.2.)

> *Como corpúsculos semelhantes em todos os aspectos podem ser obtidos de agentes e materiais muito diferentes, e como a massa dos corpúsculos é menor que a de qualquer átomo conhecido, vemos que o corpúsculo deve ser um constituinte do átomo de muitas substâncias diferentes. Que de fato os átomos dessas substâncias têm algo em comum.*

Quanto aos resultados experimentais acerca da eletrificação positiva, eles caminharam em outro sentido. Eles mostraram que a razão carga-massa das partículas positivas é muito maior que a razão carga-massa das partículas negativas;[19] em alguns casos, pelos experimentos de J. J. Thomson, os resultados mostravam que a massa da eletricidade positiva chega a ser maior que a massa do átomo de hidrogênio. Além disso, a razão carga-massa para a eletricidade positiva varia consideravelmente com a natureza dos eletrodos e o gás usado nas descargas em tubos (THOMSON, 1904a, p. 88). Esses resultados trouxeram uma releitura da "teoria de um fluído" de Benjamin Franklin.[20] Em vez de assumir, como Franklin fez, o fluido elétrico como eletricidade positiva, J. J. Thomson considerou o "fluido elétrico" negativo. Assim, a eletrificação negativa é uma coleção de corpúsculos: a eletrificação negativa é uma coleção desses corpúsculos. Como consequência, a transferência de eletricidade é efetuada pelo movimento dos corpúsculos do lugar onde há um ganho de eletrificação positiva para o lugar onde há um ganho de eletrificação negativa (THOMSON, 1904a, p. 89), ou seja, um corpo eletrificado positivamente é aquele que perdeu alguns corpúsculos.

Portanto, posto esse cenário, em que os tubos definem os corpúsculos, os corpúsculos definem a carga, a carga define a massa ou em que haja qualquer outro arranjo associando os elementos "carga", "corpúsculo", "tubos de Faraday" e "massa", como o átomo é constituído? Para responder à questão, J. J. Thomson junta as peças que conectam os

[19] Da ordem de 10^2 na maioria dos casos.

[20] Benjamin Franklin propôs a existência de um único fluido elétrico e diferenciou os corpos eletrizados em positivos e negativos. Com a eletrização, os corpos negativos ficavam com falta de fluido elétrico e os positivos ficavam com excesso de fluido elétrico. Sua teoria era concorrente com a "teoria dois fluidos". Ambas as teorias são comentadas por Maxwell em seu tratado (MAXWELL, 1873, § 37).

elementos e inicia sua resposta considerando que "os átomos dos elementos químicos são constituídos por sistemas mais simples", um agregado de "dubletos" (THOMSON, 1904a, p. 90). Esses dubletos são pequenos sistemas neutros compostos por pequenas cargas opostas e de mesma quantidade. Essas cargas estão conectadas pelas linhas de forças — que na verdade são tubos.

Então, considerando os corpúsculos como:

- uma das extremidades de um tubo de Faraday,
- partículas que agregam massa em suas intermediações, por intermédio dos tubos,
- as partículas que constituem o átomo,
- responsáveis por definir a carga,

então J. J. Thomson supõe que o volume ocupado pela eletricidade positiva é muito maior que o volume ocupado pelo corpúsculo (THOMSON, 1904a, p. 93). O que implica que as linhas de força são muito mais condensadas nas proximidades do corpúsculo do que em qualquer outra parte do espaço; fazendo com que a quantidade de éter mantida pelos tubos (a massa do sistema) esteja muito mais próxima dos corpúsculos do que em qualquer outro lugar. Dessa maneira, para os dubletos, a sua massa não dependerá da posição do terminal positivo. Como os tubos estão mais concentrados nos terminais negativos, lugar dos corpúsculos, o terminal positivo ocupa todo e qualquer espaço ao redor. Por consequência, uma porção de dubletos é semelhante a um aglomerado de corpúsculos embebidos no meio eletricamente positivo.

Tendo isso em vista, J. J. Thomson parte para explicar a periodização dos elementos químicos.

5.5 Uma proposta de categorização dos elementos

A preocupação em teorizar as configurações possíveis da estrutura atômica apareceu no primeiro modelo de J. J. Thomson para o átomo (capítulo 4). Embora, mais de 20 anos depois, o contexto tenha mudado devido o avanço das teorias, J. J. Thomson manteve uma poderosa ferramenta em sua teoria: a analogia com o experimento de Mayer.

Em 1883 não havia corpúsculos, no entanto havia anéis que podiam se configurar de forma estável e conseguiam dar sentido às propriedades dos elementos. No ano de 1897, J. J. Thomson ainda externava sua preocupação com a distribuição de seus corpúsculos como um "problema de encontrar as configurações de equilíbrio estável para um número de partículas iguais agindo umas sobre as outras de acordo com alguma lei de força" (THOMSON, 1897, p. 313). Um problema análogo àquele envolvido na estrutura dos átomos de vórtice.

Em 1904b, no mesmo ano de publicação de *Electricity and Matter*, J. J. retoma a análise das configurações de corpúsculos no átomo e recorre a um método análogo àquele usado em 1883, no qual são analisadas a evolução temporal de pequenas perturbações. Entretanto, nesse novo momento, o átomo é uma esfera positiva com corpúsculos configurados em intervalos iguais sobre uma circunferência concêntrica à esfera. Após todo empenho na demonstração matemática das configurações estáveis possíveis, J. J. Thomson reconhece sua limitação e recorre, assim, ao poder da analogia em sua teoria (THOMSON, 1904a, p. 113):

> *Tal distribuição [onde os corpúsculos estão simetricamente distribuídos] seria tecnicamente de equilíbrio, mas a matemática mostra que, a menos que o número de corpúsculos seja muito pequeno, digamos sete ou oito no máximo, esse arranjo é instável e, portanto, nunca pode persistir. Quando o número de corpúsculos é maior que esse número limite, os corpúsculos se dividem em dois grupos. Um grupo que contém o menor número de corpúsculos está na superfície de um pequeno corpo*

> *concêntrico com a esfera; o restante está na superfície de um corpo concêntrico maior. Quando o número de corpúsculos aumenta ainda mais, chega um estágio em que o equilíbrio não pode ser estável mesmo com dois grupos, e os corpúsculos agora se dividem em três grupos, dispostos sobre as superfícies de conchas concêntricas; e à medida que aumentamos o número, passamos por estágios em que mais e mais grupos são necessários para o equilíbrio. Com qualquer número considerável de corpúsculos, o problema de encontrar a distribuição quando em equilíbrio torna-se muito complexo para ser calculado.*

Os arranjos maiores que, por causa do problema da estabilidade, se dividem em arranjos menores são os pontos de interseção para analogia com o experimento de Mayer, que já foi mostrado no Capítulo 3. No entanto, por uma questão de completeza, o experimento será descrito novamente, porém, agora, de maneira diferente.

Nesse experimento, vários ímãs pequenos flutuam em um recipiente de água. Os ímãs são agulhas de aço igualmente magnetizadas e flutuam por estarem fixas em pequenos discos de cortiça. As agulhas são colocados de modo que os pólos norte estejam todos acima ou todos abaixo da superfície da água. Esses pólos, como os corpúsculos, se repelem com forças que variam inversamente com a distância entre eles. A força atrativa é fornecida por um pólo sul (se os pequenos ímãs tiverem seus pólos norte acima da água) suspenso a alguma distância acima da superfície da água. Assim, o pólo sul exercerá sobre os pólos norte dos ímãs flutuantes uma força atrativa cuja componente, paralela à superfície da água, será radial, direcionada para o centro do recipiente com água. As configurações que os imãs flutuantes assumem, de dois até vinte, estão representadas na figura (3.13) e, a partir deles, Mayer organiza uma tabela mostrada por J. J. Thomson em *Electricity and Matter* (figura 5.8).

A figura (3.13) mostra que, quando o número de ímãs flutuantes não excede cinco, os ímãs se organizam nos vértices de um polígono regular. Com efeito, cinco imãs estão nos vértices de um pentágono, quatro nos vértices de um quadrado e assim por diante.

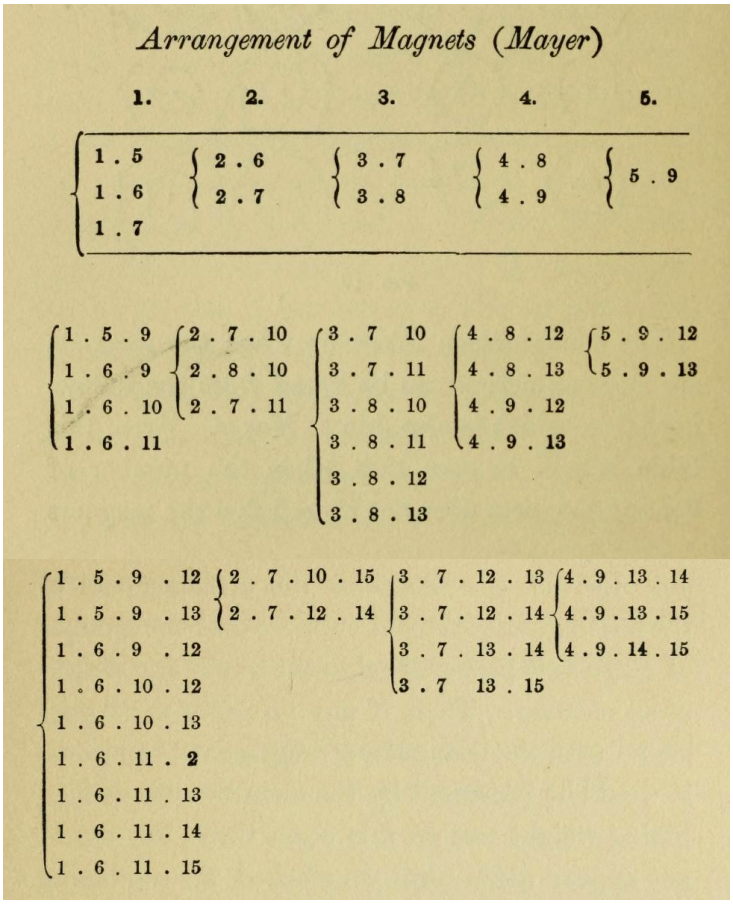

Figura 5.8: Tabela contendo o número de imãs flutuantes (THOMSON, 1904a, p. 116).

Entretanto, quando o número de imãs é maior que cinco, essa lógica não é mais válida. Assim, seis ímãs não se organizam nos vértices de um hexágono, mas se dividem em dois grupos, estando um ímã no centro e outros nos vértices de um pentágono regular ao redor do primeiro. Essa disposição em dois grupos dura até que haja quinze ímãs; a partir daí os imãs formam três grupos; a partir de vinte e sete ímãs há quatro grupos; e assim por diante.

A tabela da figura (5.8) mostra como essas configurações podem ser arranjadas. Os números no topo (1, 2, 3, 4 e 5) representam a quantidade de imãs no centro da configuração e são os mesmos números que classificam os grupos. Abaixo do número 1, por exemplo, estão todas as configurações que possuem 1 imã no centro. Os números ao lado representam os outros imãs que estão na configuração possível; por exemplo, a sequencia

$1 \cdot 5 \cdot 9$, por exemplo, informa como 15 imãs podem estar configurados com 1 imã no centro, um grupo de 5 na próxima camada e, na camada mais externa, uma grupo de 9 imãs. O número de algarismos em cada linha indica o número de camadas; por exemplo, $2 \cdot 7$ indica que há duas camadas, $2 \cdot 7 \cdot 10$ indica que há três camadas, $2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 15$ indica que há quatro camadas.

A tabela da figura (5.8) oferece sugestões, segundo J. J. (1904a, p. 117), para a explicação de algumas das propriedades dos átomos. Pode-se ter como exemplo a lei de periodicidade que organiza os elementos em ordem crescente do peso atômico. Nesse caso, o elemento lítio (de baixo peso atômico) possui certas propriedades que o elemento seguinte, na sequência crescente de peso atômico, não apresenta. Entretanto, essas propriedades reaparecem no sódio e, em seguida, desaparecem até chegar ao potássio, e assim sucessivamente. Na analogia com os imãs flutuantes, pode-se supor que o número de ímãs seja proporcional ao peso atômico de um elemento. Então, se alguma propriedade estiver associada ao arranjo triangular dos ímãs, ela estará presente em todos elementos que possuírem uma configuração de três imãs no centro: essa propriedade está presente na configuração $3 \cdot 7$ (peso combinado de 10 magnetos), em seguida, na $3 \cdot 8$ (peso combinado de 11 magnetos), reaparecendo na configuração $3 \cdot 7 \cdot 10$ (peso combinado de 20 magnetos) e assim por diante, podendo aparecer na configuração $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 15$ (peso combinado de 38 magnetos). Assim, o arranjo triangular aparece e desaparece de maneira análoga a periodicidade das propriedades dos elementos organizados de acordo com o peso atômico.

Capítulo 6

Considerações finais e reflexões

A História da Física é poderosa na revelação de estruturas intelectuais do pensamento — entendendo por isso, a escolha de um problema e sua formulação dentro de um conjunto de ferramentas intelectuais.

O impacto dessas estruturas na descoberta científica foi reconhecido, no caso de Galileu Galilei, por Mathias Schemmel (2012), Carla Rita Palmerino (2010), Paolo Palmieri (2003); Schemmel usa a precisa expressão "tools for thinking" ao se referir a essas estruturas.[1] Mary Hesse (1961, 1966) discute analogias existentes na relação entre modelo e fenômeno no eletromagnetismo.

Nesta tese foram discutidos "tools for thinking" sobre as quais se apoia a teoria eletromagnética. A analogia hidrodinamica permitiu o reconhecimento de tubos, os "tubos de Faraday", ferramenta para a matematização da fenomenologia eletromagnética então conhecida. O éter e seus tubos tornaram possível:

- Concretizar os campos elétrico e magnético dentro da estrutura do éter. O éter exerceu, pois, uma função ontológica para os campos elétrico e magnético, integrando-os a uma visão mecanicista da Natureza.

- Deduzir equações para o eletromagnetismo, a partir de movimentos de estruturas no éter, portanto, dentro de um espírito mecanicista.

[1] No caso de Galileu, esses "tools" foram: o uso de proporções, a representação gráficas de quantidades cinemáticas, e a regra da dupla distânica (DIAS et al., 2019).

- Formular modelos para a estrutura da matéria. Em particular, ao reconhecer que seus corpúsculos poderiam ser a unidade de carga preconizada pela eletrólise, J. J. Thomson uniu o éter contínuo com uma estrutura discreta nele embebida.

Adentrando o século XX, importantes físicos ainda meditavam sobre o éter. Frank Wilczek especula sobre a possibilidade de um éter,[2] que complementaria a física de partículas (WILCZEK, 1999, p. 13);

> *Por que elétrons têm, em qualquer lugar do universo, precisamente as mesmas propriedades — a mesma massa, carga, momento magnético? Porque todos eles são manifestações de uma única entidade mais básica, o campo de elétrons, um éter que pervaga todo o espaço e tempo uniformemente.*

Além disso, Wilczek compara o "vazio" ao éter, afirmando que o vazio é um "meio invisível e inescapável [que] altera o comportamento da matéria que vemos" (WILCZEK, 2005). Em *The lightness of being* (2008), Wilczek busca responder a pergunta "do que é feito o mundo?" e reflete sobre a existência do éter na busca de sua resposta. Paul Maurice Adrien Dirac escreveu três artigos *Is there a Æther* (1951a), *A New Classical Theory of Electrons* (1951b) e *Quantum Mechanics and the Aether* (1954); em que tenta conciliar teorias contemporâneas com uma estrutura de éter. Albert Einstein, embora afirme, em 1905, que o éter é "supérfluo", mais tarde, em 1920, reflete sobre a compatibilidade do éter com a teoria da relatividade (EINSTEIN, 2007):

> *Uma reflexão mais cuidadosa nos ensina, entretanto, que a teoria da relatividade especial não nos obriga a negar o éter. Podemos supor a existência de um éter; apenas devemos desisitir de atribuir um estado de movimento definido a ele[...] Há um argumento de peso a ser aduzido em favor da hipótese do éter. Negar o éter é, em última análise, supor que espaço vazio não possui quaisquer qualidades*

[2] Ganhador do Prêmio Nobel, em 2004, com David Gross e Hugh David Politzer, pelas contribuições à teoria da interação forte.

> *físicas. [...] De acordo com a teoria geral da relatividade, o espaço sem éter é impensável[...]*

J. J. Thomson concilia seus tubos à emissão da luz em um modelo capaz de explicar o fóton em seus dois artigos, *A suggestion as to the structure of light* (1925), *The Structure of Light* (1925a); além de ministrar a *Fison Memorial Lecture* (THOMSON, 1925b), homônima de seu artigo publicado no mesmo ano.

O éter não foi subitamente abandonado ao final do século XIX.

Referências Bibliográficas

AL-KHALILI, J. The birth of the electric machines: a commentary on Faraday (1832) 'Experimental researches in electricity'. **Phylosophical Transaction of Royal Society A**, The Royal Society Publishing, v. 373, 2015. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.1098/rsta.2014.0208⟩. 31

AMPÈRE, A.-M. Mémorie sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience, dans lequel se trouvent réunis les mémories que m. amprère a communiquś à l'académie royale des sciences, dans les séances des 4 et 26 décembre 1820, 10 juin 1822, 22 décembre 1823, 12 septembre et 21 novembre 1825. **Mémories de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France**, tomo VI, p. 175 – 388, 1823. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1827. 10

BOKULICH, A. Maxwell, Helmholtz, and the unreasonable effectiveness of the method of physical analogy. **Studies in History and Philosophy of Science**, Elsevier, v. 50, p. 28 – 37, 2015. Disponível em: ⟨http://dx.doi.org/10.1016/j.shpsa.2014.09.012⟩. 33, 52

BORK, A. M. Maxwell and the Vector Potential. **History of Science Society**, Chicago Journals, v. 58, n. 2, p. 210 – 222, 1967. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.1098/rsta.2014.0208⟩. 21

BUCHWALD, J.; WARWICK, A. **Histories of the Electron**: The Birth of Microphysics. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 2001. 82

BUCHWALD, J. Z. William Thomson and the Mathematization of Faraday's Electrostatics. **Historical Studies in the Physical Sciences**, University of California Press, v. 8, p. 101 – 136, 1977. Disponível em: ⟨http://www.jstor.org/stable/27757369⟩. 14

BUCHWALD, J. Z. **From Maxwell to Microphysics**: Aspects of Eletromagnetic Theory in the Last Quarter of the Nineteenth Century. Chicago and London: The University of Chicago Press, 1985a. 43, 47, 80

BUCHWALD, J. Z. Modifying the Continuum: Methods of Maxwellian Electrodynamics. In: P. M. HARMAN. **Wranglers and Physicists**. UK: Manchester University Press, 1985b. cap. 9, p. 225–241. 45

CAHAN, D. **Hermann Von Helmholtz and the Foundations of Nineteenth-Century Science**. California: University of California Press, 1993. 53

CAMPBELL, L.; GARNETT, W. **The Life of James Clerk Maxwell**. London: Macmillian and Co., 1882. 41

CHREE, C. Vortices in a compressible fulid. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, VI, p. 59 – 68, 1888. 71

COWERN, D. **Leapfrogging vortex rings**. 2015. Disponível em: ⟨https://youtu.be/72LWr7BU8Ao⟩. Acesso em: 29 de agosto de 2020, 20h40. 64

CRAIK, A. D. Lord kelvin on fluid mechanics. **European Journal Physical Journal H**, v. 37, n. 1, p. 75 – 114, 2012. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.1140/epjh/e2012-30004-y⟩. 72

DARRIGOL, O. From organ pipes to atmospheric motion: Helmholtz on fluid mechanics. **Stud. Phys, Sci.**, v. 29, p. 1 – 51, 1998. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.2307/27757803⟩. 53

DARRIGOL, O. **Electrodynamics from Ampère to Einstein**. US: Oxford University Press, 2000. 8, 10, 11, 13, 14, 16, 22, 28, 31, 41, 44, 119, 121, 130

DARRIGOL, O. Stability and Instability in Nineteenth-Century Fluid Mechanics. **Revue d'historie des mathématiques**, v. 8, p. 5 – 65, 2002. Disponível em: ⟨https://eudml.org/doc/252119⟩. 105

DARRIGOL, O. **Worlds of Flow**: A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl. US: Oxford University Press, 2005. 32, 52, 54, 55, 56, 57, 59, 64, 66

DAVIS, E. A.; FALCONER, I. **J.J. Thompson and the 'Discovery of the Electron'**. [S.l.]: Taylor and Francis, 1997. 81, 82, 117

DAVY, H. On the Magnetic Phenomena Produced by Electricity. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 111, p. 07 – 19, 1821. 3

DESPEAUX, S. E. A voice for mathematics: Victorian Mathematical Journals and Societies. In: RAYMOND FLOOD AND ADRIAN RICE AND ROBIN WILSON. **Mathematics in Victorin Britain**. [S.l.]: OUP Oxford, 2011. cap. 7, p. 155 – 174. 13

DIAS, P. M. C.; ALVES, V. H. Escrevendo o "Livro da Natureza" na linguagem da matemática: A lei de Ampère. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 4, p. 4601, 2015. Disponível em: ⟨http://dx.doi.org/10.1590/S1806-1117374230⟩. 7

DIAS, P. M. C. et al. What the mid-aged Galileu told the elderly Galileo: Galileo's search for the laws of fall. **Physics in Perspective**, v. 21, p. 194 – 221, 2019. 143

DIAS, P. M. C.; MORAIS, R. F. Os fundamentos mecânicos do eletromagnetismo. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 36, n. 3, p. 3601, 2014. 31

DIRAC, P. A. M. Is there an æther? **Nature**, Nature Publishing Group, v. 168, n. 4282, p. 906 – 907, 1951a. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.1038/168906a0⟩. 144

DIRAC, P. A. M. A New Classical Theory of Electrons. **Proceedings of the Royal Society of London.**, The Royal Society London, v. 209, n. 1098, p. 291–296, 1951b. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.1098/rspa.1951.0204⟩. 144

DIRAC, P. A. M. Quantum Mechanics and the Aether. **The Scientific Monthly**, JSTOR, v. 78, n. 3, p. 142–146, 1954. Disponível em: ⟨https://www.jstor.org/stable/20945⟩. 144

DORAN, B. Origins and Consolidation of Field Theory in Nineteenth-Century Britain: From the Mechanical to the Electromagnetic View of Nature. In: _____. **Hitorical Studies in the Physical Sciences**. US: Oxford University Press, 1975. v. 6, p. 133–260. 13, 52

EINSTEIN, A. On the Electrodynamics of Moving Bodies. **Annalen der physik**, v. 17, n. 10, p. 891 – 921, 1905. 144

EINSTEIN, A. Ether and the theory of relativity. In: **The genesis of general relativity**. [S.l.]: Springer, 2007. p. 1537–1542. Originalmente publicado em 1920 como "Äther und Relativitätstheorie" na Springer Berlin, com base em um discurso proferido em 5 de maio de 1920, na Universidade de Leyden. A primeira versão em inglês é de 1922 em Albert Einstein: "Sidelights of Relativity" em Methuen, Londres, pp. 3?24. 144

FALCONER, I. **Theory and Experiment in JJ Thomson's Work on Gaseous Discharge**. Tese (Doutorado) — University of Bath, 1985. 81, 82, 117, 131, 132

FALCONER, I. Corpuscles, electron and cathode rays: J.J.Thomson and the Discovery of the Electron. **British Journal for the History of Science**, v. 377, 1987. Disponível em: ⟨http://dx.doi.org/10.1017/S0007087400023955⟩. 82, 117

FALCONER, I. J.J. thomson and 'cavendish physics'. In: FRANK A.J.L. JAMES. **The development of the Laboratory: Essays on the Place of Experiment in Industrial Civilization**. London: Palgrave Macmillan, 1989. cap. 6, p. 104 – 117. 82

FALCONER, I. Corpucles to Electrons. In: JED BUCHWALD AND ANDREW WARWICK. **Histories of the Electron: The Birth of Microphysics**. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 2001. cap. 2, p. 77 – 100. 82, 117

FALCONER, I. Vortices and atoms in the Maxwellian era. **Philosophical Transactions of Royal Society A**, v. 20, p. 241 – 276, 2019. Disponível em: ⟨http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2018.0451⟩. 32, 65, 66

FARADAY, M. On some new electromagnetical motions, and on the theory of magnetism. **Quarterly Journal of Science**, v. 12, p. 74 – 96, 1821. 9

FARADAY, M. **Experimental Researches in electricity and magnetism**. London: Taylor and Francis, 1839. I. 12, 16, 30

FARADAY, M. **Experimental Researches in electricity and magnetism**. London: Taylor and Francis, 1844. II. 16

FARADAY, M. On the Lines of Magnetic Force. In: _____. **Experimental Researches in electricity and magnetism**. London: Taylor and Francis, 1852a. p. 402 – 06. 11

FARADAY, M. On the Physical Character of the Lines of Magnetic Force. In: _____. **Experimental Researches in electricity and magnetism**. London: Taylor and Francis, 1852b. p. 407 – 37. 11

FARADAY, M. **Experimental Researches in electricity and magnetism**. London: Taylor and Francis, 1855. III. 16

FUENTES, O. V.; ARTEGA, A. R. Quasi-steady linked vortices with chaotic streamlines. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 687, p. 571 – 583, 2011. Disponível em: ⟨http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2011.394⟩. 100

HARMAN, P. M. **Energy, Force, and Matter**: The Conceptual Development of Nineteenth-Century Physics. UK: Cambridge University Press, 1982. 11, 13, 14, 41

HARMAN, P. M. Mathematics and Reality in Maxwell's Dynamical Physics. In: KARGON AND ACHINSTEIN. **Kelvin's Baltimore Lectures and Modern Theoretical Physics**: Historical and philosophical perspective. Cambridge: MIT Press, 1987. p. 267–297. 12, 13

HEILBRON, J. L. The Electrical Field before Faraday. In: G. N. CANTOR AND M. J. HODGE. **Conceptions of Ether**: Studies in the History of Ether Theories 1740–1900. Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney: Cambridge University Press, 1981. cap. 6, p. 187 – 214. 8

HELMHOLTZ, H. von. Über integrale der hydrodynamischen gleichungen, welche den wirbelbewegungen entsprechen. **J. für Reine Angew. Math.**, v. 55, p. 25 – 55, 1858. 32, 52, 56, 66, 72, 83

HELMHOLTZ, H. von. On the Integrals of the Hydrodynamic Equations That Correspond to Vortex Motions. **The London, Edinburgh, and Dublin Philophical Magazine and Journal of Science**, v. 33, n. 226, p. 485 – 512, 1867. Tradução de Peter Guthrie Tait. 59, 60, 61, 63, 64, 66, 73, 88, 91, 98

HESSE, M. B. **Forces and Fields**: The Concept of Action at a Distance in the history of physics. [S.l.]: Dover Publications, 1961. 143

HESSE, M. B. **Models and Analogies in Science**. [S.l.]: University of Notre Dame Press, 1966. 143

HUNT, B. J. **The Maxwellians**. Ithaca and London: Cornell University Press, 1991. 82, 119

IRVINE LAB. **A smoke ring is a common example of a filament vortex loop.** 2013. Disponível em: ⟨http://irvinelab.uchicago.edu/images/DFD2013_final.mov⟩. Acesso em: 20 de janeiro de 2019, 15h43. 62

IRVINE LAB. **A vortex ring produced by extruding fluid from a circular orifice imaged using bubbles**. 2017. Disponível em: ⟨http://irvinelab.uchicago.edu/images/nphys2560-s2.mov⟩. Acesso em: 09 de julho de 2017, 23h20. 61

JUNGNICKEL, C.; MCCORMMACH, R. **Intellectual Mastery of Nature**: Theoretical Physics from Ohm to Einstein. Chicago and London: The University of Chicago Press, 1986. v. 1. 52

KNUDSEN, O. The Faraday Effect and Physical Theory: 1845 – 1873. **Arch. Hist. Exact. Sci.**, v. 15, p. 235, 1976. 12

KNUDSEN, O. Mathematics and Physical Reality in William Thomson's Electromagnetic Theory. In: _____. **Wranglers and Physicists**. UK: Manchester University Press, 1985. cap. 6, p. 149 – 179. 13, 14

KRAGH, H. The Vortex Atom: A Victorian Theory of Everything. **Centaurus**, v. 44, p. 32–114, 1976. 53, 66, 74, 75, 77, 83, 115, 121

LAGRANGE, J. L. Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides. **Nouveaux mémoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin**, 1781. 101

LAGRANGE, J. L. **Mécanique analytique**. [S.l.: s.n.], 1788. 42

LAMB, H. **A Treatise of the Mathematical Theory of the Motion of Fluids**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1876. Primeira edição. 101

LAMB, H. **Hydrodynamics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1916. Quarta edição. 54

LAPLACE, P. S. **Traité de mécanique céleste**. [S.l.: s.n.], 1798. 90

LARMOR, J. Thoughts on the work of Helmholtz, being an abridgement of the Helmholtz memorial lecture. In: _____. **The Scientific Writings of the Late George Francis FitzGerald**. Hodges, Figgis, 1902. (Dublin University Press series), cap. 74, p. 378 – 86. Acessado 14:38 de 24 fevereiro de 2021. Disponível em: ⟨https://archive.org/details/scientificwriti00fitzgoog/page/n451/mode/2up⟩. 53

MARTINS, R. de A. Ørsted e a descoberta do eletromagnetismo. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, v. 10, p. 89 – 114, 1986. 3

MAXWELL, J. C. On Faraday's Lines of Force. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**, X, Part I, p. 27 – 83, 1856. Reimpresso em *MSP* 1: 155 – 229. 14, 15, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31

MAXWELL, J. C. On the Physical Lines of Force. **Philosophical Magazine** — Parts I and II, n. 21, 1861. Reimpresso em *MSP* 1: 451 – 488. 15, 36, 40

MAXWELL, J. C. On the Physical Lines of Force. **Philosophical Magazine** — Parts III and IV, n. 23, 1862. Reimpresso em *MSP* 1: 489 – 513. 15, 33, 34, 37, 39, 40

MAXWELL, J. C. A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. **Philosophical transactions of the Royal Society of London**, n. 155, p. 459 – 512, 1865. Reimpresso em *MSP* 1: 526 – 597. 15, 42

MAXWELL, J. C. **A Treatise on Electricity and Magnetism**. [S.l.]: Clarendon press, 1873. Terceira edição 1892. 15, 30, 43, 44, 46, 47, 48, 80, 118, 122, 125, 127, 137

MAXWELL, J. C. Hermann Ludwig Ferdinand Helmholtz. **Nature**, n. 15, p. 389 – 91, 1877. Reimpresso em *MSP* 2: 592 – 598. 53

MAXWELL, J. C. On Stresses in Rarified Gases Arising from Inequalities of Temperature. **Philosophical Transaction of Royal Society**, n. 170, p. 231 – 56, 1879. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.1098/rstl.1879.0067⟩. 110

MAYER, A. M. Floating Magnets. **Nature**, n. 18, p. 258 – 260, 1878. 109

MAYER, A. M. On the Morphological Laws of the Configurations Formed by Magnets Floating Vertically and Subjected to the Attraction of a Superposed Magnet. **Philosophical Magazine**, n. 17, p. 98 – 108, 1879. 78

MCGUCKEN, W. **Nineteenth-Century Spectroscopy**: Development of the Understanding of Spectra 1802?1897. Baltimore: Johns Hopkins Press, 1969. 75

MELESHKO, V.; AREF, H. A bibliography of vortex dynamics 1858-1956. **Advances in Applied Mechanics**, v. 41, p. 197 – 292, 2007. 52, 54, 61, 62, 66, 73

MELESHKO, V. V. Coaxial axisymmetric vortex rings: 150 years after Helmholtz. **Theoretical and Computational Fluid Dynamics**, v. 24, p. 403–431, 2010. 64

NAVARRO, J. **A History of the Electron**: J. J. and G. P. Thomson. UK: Cambridge University Press, 2012. 53, 81, 119, 121, 133

PALMERINO, C. R. The Geometrization of Motion: Galileo's Triangle of Speed and Various Transformations. **Early Science And Medicine**, v. 15, n. 4-5, p. 410 – 447, 2010. Disponível em: ⟨http://dx.doi.org/10.1163/157338210x516279⟩. 143

PALMIERI, P. Mental Models in Galileo's Early Mathematization of Nature. **Studies In History And Philosophy Of Science**, v. 34, n. 2, p. 229 – 264, 2003. Disponível em: ⟨http://dx.doi.org/10.1016/s0039-3681(03)00025-6⟩. 143

PARSHALL, K. H. Chemestry through invariant theory? James Joseph Sylvester's Mathematization of the Atomic Chemistry. In: PAUL H. THEERMAN AND KAREN H. PARSHALL. **Experiencing Nature: Proceedings of a Conference in Honor of Allan G. Debus**. Boston and Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. p. 81 – 111. 81

PAULIUKAITE, R.; JUODKAZYTĖ, J.; RAMANAUSKAS, R. Theodor von Grotthuss' Contribution to Electrochemistry. **Electrochimica Acta**, v. 236, p. 28–32, 2010. Disponível em: ⟨http://dx.doi.org/10.1016/j.electacta.2017.03.128⟩. 119

PONTÉCOULANT, G. **Théori analytique du système du monde**. [S.l.: s.n.], 1834. v. 3. 90

RANKINE, W. J. M. On the Centrifugal Theory of Elasticity. **Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 2, n. 14, p. 509 – 542, 1851. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.1080/14786445108646929⟩. 66

RANKINE, W. J. M. On Plane Water-Lines in two Dimensions. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 154, p. 369 – 391, 1864. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.1098/rstl.1864.0010⟩. 101

REVUVAI. **Leapfrogging vortex rings**. 2010. Disponível em: ⟨https://youtu.be/SPBMEXX5xBI?list=PLIMnzgTihapCI8WlczKbqWylwjVeu-Jvx⟩. Acesso em: 09 de julho de 2017, 23h32. 63

RIVE, A. de la. **Traité d'électricité**. Paris: Libraire de L'académi Impériale de Médicine, 1853. 44

ROCHA, J. F. M. Origem e evolução do eletromagnetismo. In: JOSÉ FERNANDO MOURA ROCHA. **Origem e evolução das ideias da Física**. Brasil: EDUFBA, 2015. cap. III, p. 185 – 274. Segunda edição. 3

ROWLINSON, J. S. Dr Thomas Carver and Lord Kelvin. **Notes and Records of the Royal Society of London**, v. 60, n. 2, p. 161 – 170, 2006. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.1098/rsnr.2006.0139⟩. 72

SCHEMMEL, M. Medieval Representations of Change and Their Early Modern Application. **Foudations of Science**, v. 19, n. 1, p. 11 – 34, 2012. Disponível em: ⟨http://dx.doi.org/10.1007/s10699-012-9312-9⟩. 143

SIEGEL, D. M. Thomson, Maxwell, and yhe universal ether in Victorian physics. In: G. N. CANTOR AND M. J. S. HODGE. **Conceptions of ether**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1981. cap. 8, p. 239 – 268. 66

SIEGEL, D. M. Mchanical Image and Reality in Maxwell's Electromagnetic Theory. In: P. M. HARMAN. **Wranglers and Physicists**. UK: Manchester University Press, 1985. cap. 6, p. 180 – 201. 41

SIEGEL, D. M. **Innovation in the Maxwell's Electromagnetic Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 7, 8, 13, 34, 41

SIEGEL, D. M. Maxwell's Contributions to Electricity and Magnetism. In: RAYMOND FLOOD, MARK MCCARTNEY AND ANDREW WHITAKER. **James Clerk Maxwell: Perspectives on his Life and Work**. UK: Oxford University Press, 2014. cap. 10, p. 187 – 203. 33, 41

SILVA, C.; MARTINS, R. William Thomoson e o uso de analogias e modelos no eletromagnetismo. **Epistemología e Historia de la Ciência**, v. 9, n. 4282, p. 401 – 409, 2003. 13

SMITH, C.; WISE, M. N. **Energy and Empire**: A biografical study of Lord Kelvin. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 14, 66, 74

SMITH, G. J. J. Thomson and the Electron, 1897 – 1899. In: JED BUCHWALD AND ANDREW WARWICK. **Histories of the Electron: The Birth of Microphysics**. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 2001. cap. 1, p. 21 – 76. 82

STEINLE, F. Electromagnetism and Field Physics. In: JED BUCHWALD AND ROBERT FOX. **The Oxford Handbook of the History of Physics**. UK: Oxford University Press, 2013. cap. 18, p. 533 – 570. 3, 8

STELDERS, H. A. M. A. M. Mayer's experiments with floating magnets and their use in the atomic theories of matter. **Annals of Science**, v. 33, n. 1, p. 67–80, 1976. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.1080/00033797600200141⟩. 77

STOKES, G. G. On the Theoris of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**, VIII, 1845. 57

STOKES, G. G. On the Dynamical Theory of Diffraction. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**, IX, 1849. 59

TAIT, P. G. **An Elementary Treatise on Quaternions**. [S.l.: s.n.], 1867. Primeira edição. 74

TAIT, P. G. **Lectures on Some Recent Advances in Physical Science, with a Special Lecture on Force**. [S.l.]: Macmillan and Co., 1876. Segunda edição. 62, 67, 74

TAIT, P. G. On Knots. **Transactions of the Royal Society of Edinburgh**, v. 28, p. 145 – 190, 1877. 75

TAIT, P. G.; STEWART, B. **The Unseen Universe**: Physical Speculations on a Future State. [S.l.: s.n.], 1878. Primeira edição. 74

TAIT, P. G.; THOMSON, W. **Treatise on Natural Philosophy**. [S.l.: s.n.], 1867. Primeira edição. 74, 108

THOMPSON, S. **The Life of William Thomson**: Baron Kelvin of Largs. London: Macmillan, 1910. v. 2. 13, 65, 67, 68

THOMSON, J. J. **A Treatise On the Motion of Vortex Rings**. London: MacMillan, 1883. 53, 82, 83, 85, 86, 87, 90, 92, 93, 99, 101, 102, 103, 104, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 114, 115, 116, 139

THOMSON, J. J. Specific inductive capacity of dielectrics when acted on by very rapidly alternating electric forces. **Proceedings of the Royal Society**, v. 46, p. 292 – 5, 1889a. 119, 132

THOMSON, J. J. Note on the effect produced by conductors in the neighbourhood of a wire on the rate of propagation of electrical disturbances along it, with a determination of this rate. **Proceedings of the Royal Society**, v. 46, p. 1 – 13, 1889b. 119, 132

THOMSON, J. J. The resistance of electrolytes to the passage of very rapidly alternating currents, with some investigations on the times of vibration of electrical systems. **Proceedings of the Royal Society**, v. 45, p. 269 – 290, 1889c. 119, 132

THOMSON, J. J. On the passage of electricity through hot gases. **Philosophical Magazine**, v. 29, p. 358 – 366, 1890a. 131

THOMSON, J. J. Some experiments on the velocity of transmission of electric disturbances and their application to the theory of the striated discharge through gases. **Philosophical Magazine**, v. 30, p. 129 – 140, 1890b. 131

THOMSON, J. J. On the illustraton of the properties of the electric field by means of tubes of eletrostatic induction. **Philosophical Magazine**, v. 31, p. 149 – 171, 1891. 120, 121

THOMSON, J. J. **Notes on Recent Researches in Electricity and Magnetism**: Intended as a Sequel to Professor Clerk-Maxwell's Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford: The Clarendon Press, 1893. 118, 121, 122, 125, 127, 129, 133, 134

THOMSON, J. J. The Relation between the Atom and the Charge of Electricity carried by it. **Philosophical Magazine**, v. 40, p. 511 – 44, 1895. 81, 123, 124

THOMSON, J. J. Cathode Rays. **Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 5, n. 44, p. 293 – 316, 1897. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.1080/14786431003659214⟩. 82, 139

THOMSON, J. J. **Electricity and Matter**. New York: Charles Scribner's Sons, 1904a. Mrs. Hepsa Ely Silliman Memorial Lectures, Universidade de Yale. 17, 43, 122, 123, 125, 126, 127, 128, 130, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 141, 142

THOMSON, J. J. On the Structure of the Atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structure. **Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 7, p. 237 – 265, 1904b. 139

THOMSON, J. J. A Suggestion as to the Structure of Light. **Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 6, n. 48, p. 737 – 746, 1925. 145

THOMSON, J. J. The Structure of Light. **Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 6, n. 50, p. 1181 – 1196, 1925a. 145

THOMSON, J. J. **The Structure of Light**. London: G. Bell and Sons, 1925b. 145

THOMSON, J. J. **Recollections and Reflections**. Cambrige: Cambrige University Press, 1936. 123, 132

THOMSON, W. On the Uniforme Motion of Heatin Homogeneous Solid Bodies, and Its Connection with the Mathematical Theory of Electricity. **The Cambrigde Mathematical Journal**, v. 3, p. 71 – 84, 1842. 13, 21, 22

THOMSON, W. On a Mechanical Representation of Electric, Magnetic, and Galvanic Forces. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, v. 2, p. 61, 1847. 14, 33, 78

THOMSON, W. Dynamical Illustrations of the Magnetic and the Heliçoidal Rotatory Effects of Transparent Bodies on Polarized Light. **Proceedings of the Royal Society of London**, v. 8, p. 150 – 58, 1857. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.1098/rspl.1856.0043⟩. 14, 33, 66

THOMSON, W. On the Vortex Atoms. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh**, v. 6, p. 94 – 105, 1867. Reimpresso em Phil. Mag. vol. xxxiv, 1867, p. 15 – 24. 53, 65, 66, 70, 71, 72, 83, 103

THOMSON, W. On the Vortex Motion. **Transactions of the Royal Society of Edinburgh**, xxv, p. 217 – 60, 1869. Apresentado em 29 de Abril de 1867. 57, 70, 72, 73, 83, 92, 97

THOMSON, W. A Mathematical Theory of Magnetism. In: _____. **Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism**. [S.l.]: Macmillan and Co., 1872. cap. XXIV, p. 340 – 424. Publicado na Philosophical Transactions of the Royal Society of London em 1851. 17, 18, 20

THOMSON, W. Floating Magnets: Illustrating vortex-systems. **Nature**, xviii, p. 13 – 14, 1878. 77, 78, 99, 109

THOMSON, W. Vortex Statics. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh**, ix, p. 59 – 73, 1878. 93

THOMSON, W. Vibration of a Columnar Vortex. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh**, x, p. 443 – 56, 1880. Reimpresso em Phil. Mag. vol. x, 1880, p. 155 – 168. 71, 92, 93, 103

THOMSON, W. On the Average Pressure Due to Impulse of Vortex Rings. **Nature**, xxiv, 1881. Lido em Roy. Soc. Edin. em Abril de 1881. 110

THOMSON, W. On the Stability of Steady and of Periodic Fluid Motion. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, xxiii, p. 459 – 464, 529 – 539, 1887. 84, 105

THOMSON, W. Initiation of Deep-Sea Waves of Three Classes. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh**, xxvi, p. 399 – 436, 1906. Reimpresso em Phil. Mag. vol. xiii, 1907, p. 1 – 36. 78

THOMSON, W. Atmospheric Electricity. In: _____. **Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism**. Cambridge University Press, 2011. (Cambridge Library Collection - Physical Sciences), cap. XVI, p. 192 – 239. Royal Institution Friday evening lecture em 1860. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.1017/CBO9780511997259.017⟩. 33

TRUESDELL, C. **The Kinematics of Vorticity**. Bloomington: The Indiana University Press, 1954. 54, 56, 57

WARWICK, A. **Master of Theory**: Cambrigde and the Rise of Mathematical Physics. Chicago and London: The University of Chicago Press, 2003. 44

WHITTAKER, E. **The Lightness of Being**: Mass, Ether, and the Unification of Forces. [S.l.]: Basic Books, 2008. 144

WIEDEMANN, G. H. **Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus**. Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1861. 44

WILCZEK, F. The Persistence of Ether. **Physics Today**, American Institute of Physics, v. 52, n. 1, p. 11, 1999. Disponível em: ⟨https://www.jstor.org/stable/20945⟩. 144

WILCZEK, F. An emptier emptiness? **Nature**, NaturePublishingGroup, v. 435, p. 152–153, 2005. 144

WILSON, D. B. Experimentalists among the mayhematicians: Physica in the cambridge natual sciences tripos, 1851–1900. **Historical Studies in the Physical Sciences**, v. 12, n. 2, p. 325–371, 1982. Disponível em: ⟨https://doi.org/10.2307/27757499⟩. 44

WISE, N. The Mutual Embrace of Electricity and Magnetism. **Science**, v. 203, p. 1310–1318, 1979. 41