UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

BRUNA MOUSTAPHA-CORRÊA

RUMO A UMA POSTURA PROBLEMATIZADORA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: ARTICULANDO PRÁTICAS HISTÓRICAS E PRÁTICAS DE SALA DE AULA

RIO DE JANEIRO
JUNHO DE 2020

BRUNA MOUSTAPHA-CORRÊA

RUMO A UMA POSTURA PROBLEMATIZADORA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: ARTICULANDO PRÁTICAS HISTÓRICAS E PRÁTICAS DE SALA DE AULA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutora em Ensino e História da Matemática e da Física.

Orientação: Victor Giraldo e Aline Bernardes

RIO DE JANEIRO

JUNHO DE 2020

CIP - Catalogação na Publicação

M933r

Moustapha-Corrêa, Bruna
RUMO A UMA POSTURA PROBLEMATIZADORA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: ARTICULANDO PRÁTICAS HISTÓRICAS E PRÁTICAS DE SALA DE AULA / Bruna Moustapha-Corrêa. -- Rio de Janeiro, 2020.
362 f.

Orientador: Victor Giraldo.
Coorientadora: Aline Caetano da Silva Bernardes.
Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática, 2020.

1. Matemática. 2. Formação de Professores. 3. História da Matemática. I. Giraldo, Victor, orient. II. Caetano da Silva Bernardes, Aline, coorient. III. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

BRUNA MOUSTAPHA-CORRÊA

RUMO A UMA POSTURA PROBLEMATIZADORA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: ARTICULANDO PRÁTICAS HISTÓRICAS E PRÁTICAS DE SALA DE AULA

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutora em Ensino e História da Matemática e da Física.

Rio de Janeiro, 30 de junho de 2020.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo – UFRJ (Orientador)

Prof. Dra. Aline Caetano da Silva Bernardes – UNIRIO (Orientadora)

Profa. Dra. Tatiana Marins Roque –UFRJ

Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira – UFOP

Profa. Dr. Fumikazu Saito – PUC-SP

Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa – UFBA

Prof. Dr. Arthur Belford Powell – Rutgers University

Para todas as Anas Cláudias que me ensinaram a ver o mundo além das minhas janelas.

Para Ana Carolina, Andersen, Angélica, Bruno, Daniel, Leonardo, Marcelo, Rafael, Sérgio, Tayná, Thiago e Ubirajara sem os quais este trabalho não seria o que é.

AGRADECIMENTOS

Eu leio agradecimentos. Talvez por ser aqui um momento de emoção em meio a tantas formalidades exigidas pelo trabalho acadêmico. Penso em escrever esses agradecimentos desde que ingressei no doutorado, mas só comecei a escrever em abril de 2018, na volta do sanduíche. Eu tinha anotações, pensamentos, sentimentos (porque o doutorado é uma montanha russa de emoções!) e sentar para organizar tudo isso foi até uma tarefa fácil... perto do que foi organizar as minhas ideias nesta tese!

Escolhi fazer esse registro nominal e detalhadamente a quem, de alguma forma, se relaciona diretamente com esse momento da minha vida. Sei que posso ter esquecido de alguém. Assumo essa responsabilidade. Mas, na verdade, o que realmente acredito é que a gente devolve as coisas para o Universo e ele se encarrega de todo o resto. Gratidão em poder entender as coisas desse jeito!

Começo agradecendo ao PEMAT/UFRJ, por ser o programa da minha pós-graduação. Especialmente, nas figuras do Victor e da Tatiana por permitirem a continuação da minha formação na casa que já me era habitual, por continuarem a me abrir portas e por me permitirem e me incentivarem a fazer parte deste programa.

O doutorado foi um processo transformador para mim, em ***muitos*** sentidos. O meu trabalho, por exemplo, transformou-se. Entrei com um projeto e saio com outro, é verdade. Mas cada etapa faz parte do meu processo. E a minha entrada nesse processo começou com o auxílio do Alessandro, a quem agradeço as oportunidades de aprendizagens vivenciadas nas pontes que nos conectaram desde 2014.

Para mim, os últimos 6 anos me fizeram refletir sobre algo que sempre desejei e nem sempre consegui colocar em prática: ser sozinha não tem o mesmo valor de ser acompanhada, afinal, ***eu sou porque nos somos***. *Gisela, Ulisses e Cleber CN, eu não teria passado pela seleção da mesma forma que passei sem vocês!* Junto à Gisela, agradeço também à Mariana, pois juntas formamos um grupo do whatsapp *das meninas* para estudar aqueles tantos textos da disciplina de Reflexões. Aproveito, então, para agradecer aos professores que me deram aula. Guto, pela disponibilidade em me ouvir quando ainda estudava os perfis conceituais e também por me chamar atenção de duas coisas que me marcaram: a necessidade de ao olhar para um personagem [da história] não só observar quem o precedeu e o influenciou, mas também quem o sucedeu; e se pensamos em um modelo é sempre importante pensar nos casos extremos.

Marcia e Marta pelas aulas de Metodologia. E Victor e Wellerson pelas aulas de Saberes Docentes. E a todos os demais professores e colaboradores do PEMAT com quem tive a oportunidade de aprender direta ou indiretamente ao longo desses anos.

A mudança de tema – total, diga-se de passagem – como tudo na minha vida, foi um processo intenso. Agradeço, a Agnaldo que veio aqui em casa uma noite e segurou na minha mão para que eu conseguisse tomar uma decisão nem um pouco fácil. A Cleber Haubrichs por ter me feito acreditar na minha ideia. E a Tatiana e Victor por terem me aceitado e sugerido a Aline à comissão de orientação (sim, eu precisei de uma comissão de orientação!). A Victor, especialmente, por ter me ouvido tantas vezes. Nesse processo de mudança também preciso agradecer à Tereza, a quem sei que me cuidou como uma mãe, chamando-me para conversar na busca por entender por que tanta intensidade bem no começo do doutorado; e também por ter me ouvido quando colocaram dúvidas sobre a possibilidade de um afastamento das minhas atividades profissionais; mas, sobretudo, por ter me incentivado a traçar um plano para conseguir conciliar o trabalho e a conclusão da tese.

Para mim, *amar o trabalho é essencial*. A mudança de projeto foi uma construção de um projeto com o qual eu me identificasse *por completo*. E o recomeço não foi sozinha… Minha amiga Letícia me fez perguntas difíceis que vou pensar para sempre, tipo “daqui a dez anos você se vê falando sobre o quê?” *Let, você começou a me inspirar lá no mestrado e a nossa convivência se ampliou de um jeito que eu jamais pude imaginar. Ter a sua amizade é muito bom. Em 2012, um ano difícil, de reconstrução, eu recebi uma ligação sua, me convidando para participar do projeto Matdigital que acabou culminando com os encontros que, depois de alguns meses, originaram o LaPraME e o meu ingresso no doutorado. Gratidão também por todas as vezes que me ouviu e me compreendeu nesse processo duro de doutoramento. Saber que tinha [tenho] a quem recorrer, acalma.*

Quando estou perdida, costumo falar com pessoas que, às vezes podem parecer não ter nada a ver, mas que, na minha cabeça, há uma lógica que as conecta na solução que estou buscando. Cleber Haubrichs é uma das pessoas. Além de também ser daquele grupo de pessoas que admiro a ponto de pensar “quero ser assim quando eu crescer”. Ele me falou num desses meus desabafos para encontrar meu novo projeto “hum… isso parece legal!” A ideia girava em torno de análise e síntese e ele me mandou um texto que me fez entender, finalmente, uma dúvida que pairava na minha cabeça desde 2008. Agradeço também pela leitura atenta do texto da minha qualificação e da escuta também sempre atenta. *Eu sou é muito sortuda de ter você para trocar ideias. Que tenhamos estórias e histórias para contar!*

Voltando às formalidades, agradeço à banca avaliadora da minha qualificação. Ethel pela generosidade em participar num ambiente pouco usual. Fumi, que tive o prazer de conhecer neste momento, por ter apontado o diferencial que a minha proposta tinha, mas, especialmente, por me inspirar a partir da leitura de sua produção acadêmica e endossar que tudo que fazemos tem um propósito e serve a tantos outros; agradeço também pela disponibilidade em avaliar a versão final deste trabalho. À Ana Cristina, pesquisadora com olhar acurado que admiro, e com quem tive a oportunidade de discutir mais detalhadamente a proposta da qualificação, agradeço e desejo que nossas conversas possam se expandir; também tenho o prazer de tê-la na minha banca de defesa. Junto a este agradecimento Jonei, o "novo" elemento da banca examinadora, a quem também muito admiro.

Agradeço também à CAPES, pela bolsa de estudos concedida para a realização do estágio de sanduíche no exterior. Nessa ocasião tive a alegria de poder desfrutar da pessoa maravilhosa, generosa e inspiradora que é Arthur. Arthur, grande entusiasta do Brasil, não me deixou esquecer a importância de valorizar a produção nacional brasileira. Me mostrou, de modo *mais que perfeito*, como é importante refletir sobre o que se escreve e como o processo de escrita é um processo formativo. *Arthur, a sua marca está neste trabalho, e espero tê-la comigo pra sempre!*

A ideia de ir estudar com Arthur talvez tenha começado lá naquele 2012 de reconstruções. Fofa me recebeu na sua casa e junto com o Wellerson tentaram me convencer a fazer o doutorado em São Paulo em 2013. Eles não conseguiram me convencer, mas o fato é que o doutorado já fazia parte da minha história. *Agradeço a vocês dois o incentivo e a oportunidade de troca. Fofa, obrigada por me receber na sua casa, por tantas vezes ter estado do meu lado, por me sugerir tantas coisas e por podermos conversar sobre tudo!*

Não acho que seja uma pessoa difícil de me adaptar, entretanto, a minha temporada no Ironbound não teria sido a mesma sem vocês, Gabi, Eduardão, Dudu, vovó Gil e Babi! Dudu merece um agradecimento especial, porque foi ele quem não me deixou esquecer quão importante é viver o que pregamos. Naturalizamos coisas o tempo todo. É possível desnaturalizar? *Claro* que sim! Basta lembrar que cada um é único e, portanto, a realidade é vista e vivida de muitos jeitos e, por isso, é preciso explicar e explicitar o que se faz e o que se espera. Sempre. *Obrigada por me receberem na sua casa, mas, sobretudo, por me terem feito parte da sua família!*

A temporada do sanduíche foi fácil pela receptividade da família que me acolheu. Mas isso não quer dizer que não tenha precisado de terapia. Afinal, o doutorado faz a gente crescer e crescer, às vezes (tipo, sempre) dói. A minha terapia foi andando pelas ruas de Nova Iorque falando sobre a vida, sobre o Brasil, sobre as coisas que me afligiam, que me incomodavam, enquanto meu "terapeuta" tirava centenas de fotos. No final de um desses dias, ele me escreveu: "O correr da vida embrulha tudo; a vida é assim: esquenta e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e depois desinquieta. O que ela quer da gente é coragem." *Netun [e Guimarães Rosa], obrigada por não me deixar esquecer da coragem!*

Ainda sobre a temporada do sanduíche na Rutgers, agradeço à Carol, que me recebeu quando lá cheguei, e a Luiz e sua família. *Foi ótimo podermos compartilhar dos momentos de aprendizagem sob supervisão do Arthur e também, é claro, dos passeios e das experiências da vida estadunidense.*

Para terminar as formalidades, agradeço à UNIRIO, especialmente aos chefes do Departamento de Matemática e ao diretor da Escola de Matemática por todo apoio necessário para a concessão do meu afastamento para o sanduíche. Agradeço também ao corpo docente do PROFMAT/UNIRIO que permitiu a realização do estudo de campo em uma das suas turmas. *Espero ver frutos deste trabalho nas práticas docentes da nossa Escola.* Agradeço também a oportunidade de ter podido compartilhar ideias da minha pesquisa com colegas e estudantes, afinal, falar sobre sempre nos faz entender de outra forma. E agradeço especialmente aos meus estudantes que durante esses cinco anos entenderam todas as minhas ausências para que eu pudesse aproveitar as oportunidades que o doutorado me ofereceu.

Na vida a gente vai encontrando um montão de pessoas especiais, umas são tão especiais que acabam sendo mais que amigos, acabam se tornando irmãs e irmãos. E eu, sortuda que sou, tenho alguns. Gladson, meu irmão mais velho, a quem sempre procuro quando tenho um problema e com quem adoro trabalhar junto! E ele é agregador. Com ele ganhei, o irmão mais novo e juntos são uma dupla com quem sou muito grata por poder fazer matemática de um jeito especial, acolhedor. Michelito, com todos sua espiritualidade, além de compor essa dupla (que eu sempre vou me colocar no meio pra não perder meu lugar!) foi a quem eu recorri para entender finalmente uma dúvida que eu tinha há muito tempo sobre a diferença de sentido entre análise e síntese (porque, afinal, tanto faz dizer "Si A est vraie, B le sera aussi" ou dizer "B serait vraie , si A l'était") *Merci! E que nós três possamos fazer muitas coisas juntos!*

Ainda sobre o eu sou porque nós somos. *Será que sou tesouro, porque vocês o são, Érika e Lu?* A vida presenteia a gente com umas pessoas que às vezes, aparentemente, não têm nada a ver com a gente. Talvez a nossa essência seja a mesma... que honra a minha, então! *Obrigada, por me aceitarem do jeito que sou e nem por isso deixarem de apontar o que eu* *preciso prestar atenção. Ter a mão, os ouvidos e os ombros de vocês me faz muito mais segura de mim. Esse trabalho também tem a marca de vocês, porque vocês me apoiaram sempre!* A Lu preciso estender o agradecimento, pois ela me emprestou seu filho para testar algumas ideias. Uma deu tão certo que virou uma das tarefas usadas no estudo de campo. *João e Ronaldo, obrigada também!*

Falando das tarefas... agradeço à Elena e à Irene com quem tenho o prazer de trabalhar junto no programa MathTASK. A elas também preciso agradecer por darem suporte a alguns dos meus voos. *A marca de vocês está neste trabalho, não só por terem me ajudado com alguns referenciais teóricos, mas, sobretudo, por me fazerem acreditar no meu potencial como pesquisadora. Obrigada por entenderem este estudo na sua essência e por terem sugerido o formato (babouska) dos artigos desta tese. Obrigada por tantas trocas, especialmente na escrita do paper, mas também por ideias de problemas (I have a problem!), e por mensagens e skypes, por quilômetros rodados, por coquetéis (potentes; sempre, claro!) e por me batizarem academicamente. Σας ευχαριστώ για όλα!*

As tarefas que compõem o estudo empírico foram desenvolvidas a partir de trocas (diretas ou não) com alguns bons amigos e os personagens recebem seus nomes assim como o de alguns estudantes, que contribuíram ou inspiraram. *Andreia (Fofa), Fábio Menezes, Rodolfo, Lucíola, Lu, João, Ronaldo, Paula, Diego, Ana Kaleff, s. Sérgio (Lucia), Luiz Felipe, Flávio, Victor, Aline, Gladson (Pedro), Michel (Levi), Ronaldo Busse, Cassiano, Raphael e Julia (Matemaníaca), obrigada!* Já os diários reflexivos e os relatos no início de cada encontro são inspirados na prática de três alfabetizadoras, com quem tive a felicidade de cruzar durante os encontros de formação do PNAIC. *Adriana, Naara e Vivian, com vocês eu aprendi o poder desses relatos. E neste trabalho tem muito disso. Obrigada!*

Aproveito para agradecer a Marcello e a Diego, cuja convivência diária nos aproximou. *Marcello, que possamos compartilhar práticas e que eu possa aprender com você muitas histórias.* Diego, com quem compartilho uma classe de equivalência e a irmandade acadêmica, escutou alguns desabafos e muitas vezes me encorajou, jogando luz para ângulos que podem parecer ignorados por mim à primeira vista, mas que são, sim, considerados. *Obrigada, Diego. Que possamos entrelaçar nossas teses nas nossas práticas e em ações que reconhecem a diversidade com que se produz matemática.*

Agradeço também às conexões internacionais que tive a oportunidade de fazer ao longo desse processo de doutoramento e que me encorajaram implícita ou explicitamente a seguir os rumos acadêmicos para além das fronteiras brasileiras e a partir de quem pude reconhecer a contribuição do meu trabalho. Além de Arthur, Elena e Irene, estendo meus agradecimentos a Kathy, Renaud, Uffe e Anna.

A sala de aula é um lugar sagrado. Professores de verdade sabem disso. O sagrado está em justamente perceber que se ensina, mas também se aprende cotidianamente. A turma, para além do espaço físico da sala, congrega os estudantes e a professora e, para mim, é um dos espaços que se aprende a conviver com o outro e também a aprender com o outro, seja lá quem o outro for. Ensinar isso nem sempre é fácil. E viver isso é uma delícia! Na verdade, para mim, é o único jeito de realmente aprender (e ensinar). ***Com*** o outro. *E eu sou muito, muito grata por ter podido conviver e aprender com vocês, Carol, Andersen, Angélica, Bruno, Daniel, Léo, Marcelo, Rafael, Tayná, Thiago, seu Sérgio e Bira. Vocês não só participaram do estudo empírico, vocês deram vida a ele, ao se engajarem em tarefas tão diferentes das que estavam acostumados, registrando suas impressões e deixando suas marcas neste trabalho e também em mim. Sem vocês este trabalho seria outro. Muito obrigada!*

Confesso que sempre achei meio piegas os agradecimentos aos estudantes. Muitas vezes soou para mim como um protocolo a ser cumprido. Mas este trabalho me fez rever isso... e mais do que agradecer, eu dedico este trabalho aos meus estudantes, representados por Ana Cláudia e pela turma que experienciou o estudo empírico. Aqui também agradeço aos professores que participaram do minicurso "O método da falsa posição: problematizando soluções" do VII EEMAT, que ajudou a delimitar a proposta apresentada nesta tese. Além também dos participantes da oficina "Resolvi diferente... E agora?", nas dependências do UFF de Pádua, que aconteceu antes da qualificação quando ainda pensava em soluções analíticas e sintéticas para problemas – estendo os agradecimentos a Adriana, Lucas e Mario, que gentilmente resolveram os problemas, de modo que eu pudesse usar suas soluções para discutir na oficina. *Espero, sinceramente, que este trabalho se perpetue na minha prática e que contagie tantas outras professoras e tantos outros professores que convivem e conviverão comigo. Que nós possamos sempre aprender uns com os outros!*

Agradeço às amigas e aos amigos que torcem por mim. Os que entendem o que eu faço e os que não fazem ideia ("Ué? Seu doutorado não é em matemática?", "Depois do doutorado acabou, né?"). Os que estão aqui por perto e os que estão de longe. Os que de uma forma ou de outra se conectaram a mim por meio do meu processo de doutoramento estão eternizados nesta tese através dos pseudônimos que usei para referir aos personagens do estudo empírico: **Apolo** (que representa Elena e Irene), **Cleber** Haubrichs, **Gabiangela** (que representa Gabi e Angela), **Gladson**, **Guilherme** (que representa também Érika), **Leticia**, **Luciane**, **Michel**, **Naylor**,

Silvio (que representa também a Fofa), **Ulisses** e **Vinicius**. ***Eu sou porque nós somos!*** *Que sorte a minha ter vocês no meu caminho! Espero ser com vocês. Sempre.*

À Tatiana agradeço a orientação no início da pesquisa que culmina nesta tese. E também pelo seu papel na pesquisa em História da Matemática aqui no Brasil e por tanto incentivar pesquisas que articulem as áreas de História e de Educação Matemática. *Tati, para mim você sempre será a minha (primeira) mãe acadêmica, aquela que primeiro me abriu as portas do mundo acadêmico. Você tinha razão, esta tese sempre foi mais da formação do que da história. Mas a história nunca saiu do meu horizonte. Espero que eu tenha aprendido direitinho e que possamos problematizar tanto a matemática quanto a educação, seja qual for o espaço (educacional, social, cultural ou político).*

À Aline, que riu quando Tatiana sugeriu que ela também me orientasse, agradeço pela paciência, parceria, humor e espiritualidade, dedicação e acuidade com que assumiu esse papel. *Sei quão trabalhoso foi o desafio de me orientar. Admiro a sua coragem em assumir os desafios. Sei também que sem você, eu teria me perdido e que tenho muito a aprender com você. Muito obrigada! Que possamos problematizar através das teias da história em outras oportunidades*.

Ao Victor... último agradecimento que escrevi, aquele que mistura um montão de emoções. Certamente por ele estar tão intrincado neste trabalho. Articulado e cheio de conexões, é reconhecido nacional e internacionalmente – *obrigada pelo papel que desempenha na Educação Matemática brasileira*. Nossa convivência mais próxima começou também lá naquele ano de 2012 de reconstruções e desde então mantemos uma relação próxima. Ele me acolheu no doutorado nos três momentos pelos quais passei, nos dois primeiros momentos como co orientador e depois como orientador principal. Abriu portas que me projetaram. Este texto é um texto nosso – meu, dele e da Aline (e parte da Elena e da Irene também). E esta pesquisa, que nasceu de algo tão meu, tem a sua marca. Acho que essa marca é tão forte que talvez eu mesma não saiba diferenciar o que é só meu do que é meu a partir dele. A verdade é que o Victor deixou eu ser eu de um jeito tão livre que em muitos momentos eu não soube ser sem ele. Foi difícil entender isso. *De qualquer jeito, a minha tese só é uma tese feita de problematizações por causa de você. Obrigada!*

Agradeço também à Renata que me enche muitas vezes (muitas!), mas que sei que me admira e que torce por mim. E à vovó e ao vovô, com quem tive o privilégio de conviver diariamente. No início do doutorado, o vovô se foi e no final ele voltou no formato de aliança, que na minha mão me deu forças na etapa final tão árdua. *Sua determinação e coragem em desbravar o desconhecido, vô, muitas vezes me inspiraram. Obrigada!*

A mamãe e papai continuo agradecendo do mesmo jeito que agradeci no meu mestrado: *obrigada por me fazerem do jeitinho que sou*. (E esse agradecimento pode ser estendido aos meus pais acadêmicos Tatiana, Victor, Aline, Arthur, Elena e Irene) Diminzinha, além de ter me feito desse jeitinho, nunca poupou esforços para me dar o que eu precisei, inclusive quando eu nem consegui notar. Papai me faz ter certeza que preciso respeitar o diferente e que preciso falar para todos sobre o meu trabalho. *Quem sabe um dia vocês leem isso tudo que eu escrevi e se orgulham de mim? Muito obrigada!*

Emancipate yourselves from mental slavery

None but ourselves can free our minds!

Bob Marley

MOUSTAPHA-CORRÊA, Bruna. **Rumo a uma Postura Problematizadora na Formação de Professores de Matemática: articulando práticas históricas e práticas de sala de aula**. 2020. Tese (Doutorado em Ensino e História da Matemática e da Física) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

RESUMO

Esta tese encontra-se na interseção de duas grandes áreas: Formação de Professores e História da Matemática. Apresenta um construto teórico e uma proposta de formação docente para professores em serviço, que é o objeto de pesquisa desta tese. O construto teórico *postura problematizadora* articula diferentes perspectivas epistêmicas. No campo da Educação, essas articulações incluem desde a educação problematizadora de Paulo Freire; passando pela valorização dos saberes da experiência, preconizada por Maurice Tardif e colaboradores; pelo consequente reconhecimento da docência como profissão, tal como António Nóvoa defende; pelos coletivos docentes em que "prática" e "teoria" são entendidas de forma indissociável, representados pela investigação como postura de Marilyn Cochran-Smith e Susan Lytle e pelas perspectivas de formação defendidas por Brent Davis e seus colaboradores ao sustentarem a (re)interpretação e (re)elaboração do conhecimento de matemática para o ensino (*substruct*); pelas *mathtasks* propostas por Irene Biza, Elena Nardi e seus colaboradores como uma possibilidade de mobilização de experiências da prática em atividades de formação; pelo entendimento da aprendizagem (matemática) como participação no(s) discurso(s) (matemático(s)) proposto por Anna Sfard. No campo da História da Matemática e suas aplicações ao ensino, nossas referências teóricas incluem o desenvolvimento de uma escuta intencional por meio da análise de fontes históricas, proposto por Abraham Arcavi e Masami Isoda; o argumento teórico de Tinne Kjeldsen e seus colaboradores, que enaltece o potencial de tornar as metarregras implícitas nos discursos de fontes históricas objetos explícitos de reflexão; até a problematização das diferentes interpretações históricas por Ivor Grattan-Guinness e por Fumikazu Saito e o reconhecimento, enaltecido por esse último, de que as narrativas históricas e suas interpretações não são neutras. A *postura problematizadora* prevê uma deslocação: no lugar de buscar por respostas, busca-se por perguntas motrizes. Visando ao desenvolvimento da *postura problematizadora*, apresentam-se as *atividades problematizadoras*, uma proposta de formação de professores em serviço, estruturada em três etapas, que combina dois tipos de tarefas e lança mão de tarefas avaliativas reflexivas. Nesta proposta, no lugar de oferecer mais conteúdo, busca-se mudar a postura dos professores em relação à matemática e ao seu ensino e também em relação ao seu papel na formação docente. Foi realizada uma aplicação desta proposta em uma disciplina de história da matemática em um mestrado profissional na cidade do Rio de Janeiro com 12 professores, entre os meses de agosto e dezembro de 2018. A *Commognition* é utilizada tanto no desenho das atividades problematizadoras, quanto para analisar os dados gerados pela sua aplicação. Os resultados da sua aplicação indicam que os professores participantes passaram a problematizar suas práticas docentes, bem como a própria matemática e a sua história. Nesse sentido mostra-se como promissora para discutir história da matemática de acordo com as perspectivas mais atualizadas e também para a formação de professores, na medida em que coloca os professores no centro da sua formação.

Palavras-Chave: Postura problematizadora, atividades problematizadoras, matemática problematizada; formação de professores; história da matemática; Commognition; coletivos docentes

MOUSTAPHA-CORRÊA, Bruna. **Towards a Problematizing Stance in Mathematics Teachers' Education: articulating historical practices and classroom practices**. 2020. Thesis (Ph.D. in Teaching and History of Mathematics and Physics) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

ABSTRACT

This thesis is in between two major areas: Teachers Education and History of Mathematics. It presents a theoretical construct and a proposal for teachers in-service education, which is the object of research of this thesis. The theoretical construct *problematizing stance* we propose articulates different epistemic perspectives. Within the field of Education, these articulations include: Paulo Freire's problematizing education; the valorization of the knowledge from experience, advocated by Maurice Tardif and collaborators; the consequent acknowledgment of teaching as a profession, as António Nóvoa defends; the teachers' collectives in which "practice" and "theory" are understood as being inseparable, represented by inquiry as stance by Marilyn Cochran-Smith and Susan Lytle and by the in-service education perspectives defended by Brent Davis and his collaborators when supporting (re)interpretation and (re)elaboration of mathematical knowledge for teaching (*substruct*); the *mathtasks* proposed by Irene Biza, Elena Nardi and their collaborators as a possibility to mobilize experiences from practice in in-service education; the understanding of learning (mathematics) as participation in the (mathematical) discourse(s) proposed by Anna Sfard. In the field of the History of Mathematics and its applications to teaching, our theoretical references include: the development of an intentional listening approach through the analysis of historical sources, proposed by Abraham Arcavi and Masami Isoda; the theoretical argument of Tinne Kjeldsen and her collaborators, which praises the potential of making metarules which are implicit in the historical sources' discourses as explicit objects of reflection; the problematization of the different historical interpretations by Ivor Grattan-Guinness and by Fumikazu Saito and the acknowledgment, praised by the latter, that the historical narratives and their interpretations are not neutral. The *problematizing stance* seeks to provoke a shift: instead of looking for answers, we are looking for driving questions. Aiming at the development of the problematizing stance, we present the *problematizing activities* as a proposal for teacher in-service education, structured in three stages, which combine two types of tasks and make use of reflective assignments. In this proposal, rather than offering more content, we seek to provoke shifts in the teachers' stance towards mathematics and its teaching, as well as their role in their own in-service education. An application of this proposal was made in a module of history of mathematics in a professional master's program in the city of Rio de Janeiro, with 12 teachers, between August and December 2018. Commognition is used both in the design of problematizing activities and for analyzing the data produced in the application. The results of our in-service education proposal application indicate that the participant teachers started to problematize their teaching practices, as well as mathematics and its history. In this sense, we consider these problematizing activities as promising to discuss history of mathematics accordingly to the most updated perspectives and also for teachers education, as it places teachers at the center of their own education.

Keywords: Problematizing stance, problematizing activities, problematized mathematics, teachers education, history of mathematics, Commognition, teachers' collectives

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A BRUNA POR ELA MESMA

Fundamental é mesmo o amor
É impossível ser feliz sozinho
Tom Jobim

Pra pedir silêncio eu berro
Pra fazer barulho eu mesma faço
Rita Lee

A minha flor predileta é tulipa. Eu amo nadar. Eu prefiro cachoeira à praia. *Tá*, tudo bem! Isso não é importante pra me conhecer aqui na minha tese. Mas saber que eu decidi ser professora de matemática quando eu estava na 8ª série e que meus pais demoraram alguns anos para aceitar essa minha escolha talvez seja.

Eu fiz graduação na UFF, entrei em 2000, concluí o Bacharelado em 2003 e a Licenciatura em 2004. Lá na UFF tinha uma disciplina de história da matemática, eu fiz com o professor Pierre. Já vasculhei minha memória muitas vezes tentando lembrar por que, quando ou como me interessei por história da matemática, mas não consigo lembrar – talvez tenha sido nas aulas de Fundamentos de Geometria com o professor Bria, no estudo das geometrias não euclidianas. Mas me lembro muito bem que o Pierre sempre me falava da Tatiana – "Lá na UFRJ tem uma professora que estuda história da matemática. Ela tem até o cabelo parecido com o seu." Quando terminei a faculdade, meus professores me incentivaram a continuar estudando, mas eu não me via estudando matemática pura ou matemática aplicada, nem computação gráfica – UFF, UFRJ, IMPA, LNCC eram algumas das opções. Esse negócio de história da matemática não saía da minha cabeça!

Em 2005, eu comecei a dar aula para Secretaria de Estado de Educação, aqui no estado do Rio de Janeiro (SEEDUC/RJ). Eu me lembro que falava assim para a minha mãe logo que passei no concurso "Mãe, eu não sei o que tenho que fazer". Ela me respondia "Vão te explicar." É... sabemos que não foi bem assim que aconteceu. Enfim, professores são sobreviventes, se viram nos trinta diariamente. Eu, entretanto, sempre fui de elaborar, observar e só depois fazer. Então, enquanto muitos de meus colegas seguiam dando aulas em muitos lugares, eu seguia com as minhas aulas na SEEDUC/RJ para turmas da 1ª série do Ensino Médio, na mesma escola. Como de costume, os professores novatos são "presenteados" com as "“piores”" turmas. Assim, das 6 turmas da 1ª série, eu fui alocada para dar aula para aquelas que tinham os estudantes fora da faixa etária e que eram "“mais fracos”". Muitas aspas, porque essas classificações carregam muito juízo de valor – qual critério utilizado para dizer que algo é pior ou mais fraco? Enfim, eu, uma filha da classe média, que, ainda que não vivesse no luxo, tinha uma vida bem confortável, acreditava convictamente que qualquer um que quisesse poderia estudar. Mas não é bem assim. *Nem todos podem estudar*. Essa realidade apresentou-se para mim através da Ana Cláudia. Claudinha foi uma das minhas alunas dessas turmas fora da faixa etária. Lembro da sua letra bonita, do capricho com suas anotações e da dedicação em realizar as tarefas propostas. Na minha cabeça, ela tinha que fazer vestibular, fazer uma faculdade, estudar. Mas não é bem assim. *Nem todos podem estudar*. Numa manhã, encontrei-a no pátio da escola, conversamos qualquer coisa e eu entusiasticamente perguntei "E, aí, Claudinha? O que você vai fazer no vestibular?" Ao ouvir a pergunta, Ana Cláudia imediatamente abaixou a cabeça e resmungou "Isso não é para mim, não, professora". Não me lembro exatamente o que respondi para Ana Cláudia... Essa cena, entretanto, é muito clara na minha memória até hoje – e sempre me enche de emoção: "Como assim alguém pode dizer que não pode estudar?" Perguntava-se aquela menina da classe média. "Eu não estou sugerindo que ela viaje para a Disney, eu só sugeri que ela estudasse", pensava. Talvez esse tenha sido o gatilho para o meu entendimento de docência. Anos depois encontrei a seguinte frase de António Nóvoa "Educar é conseguir que a criança ultrapasse as fronteiras que, tantas vezes, lhe foram traçadas como destino pelo nascimento, pela família ou pela sociedade". Eu tenho certeza que o significado que dou a essa frase tão potente é devido ao que Claudinha me ensinou naquela manhã. E me reconheço nessa situação como uma privilegiada. Não porque nasci na classe média. Mas porque entendi que não é bem assim. *Nem todos podem estudar*. Que não tem essa coisa de quem quer estuda. Que o nosso país é cruel e destina muitas pessoas a permanecerem dentro das fronteiras impostas pelo nascimento, pela família e pela sociedade. É um tipo diferente de privilégio. Acho que até pouco falado, mas que me coloca numa posição de conseguir ultrapassar as fronteiras que [não] me foram impostas.

Naquele mesmo ano de 2005 abriu um curso de mestrado em Ensino de Matemática na UFRJ. E a Tatiana era professora do Programa! Pronto, decidi onde faria o mestrado. E assim foi. Fiz a seleção e comecei o mestrado em março de 2006. Eu sempre fui uma estudante dedicada e com bons resultados. Mas, na verdade, eu era (ou será que ainda sou?!) boa mesmo reproduzindo o que aprendi. Decidir, escolher sempre foi difícil para mim. No mestrado a decisão pelo tema da minha dissertação aconteceu numa aula de Geometria. Luiz Carlos era o professor e ele passava boa parte da aula contando histórias (ou seriam estórias?). Elas me encantavam. Um certo dia ele falou que a tradução de um livro poderia render uma dissertação. A orientadora eu já tinha escolhido. E quando a procurei com essa ideia, Tatiana me sugeriu traduzir a “Introdução à Arte Analítica” de François Viète. Assim aconteceu. Porém a tradução acabou ficando como anexo. O texto mesmo está dividido em três partes: A Análise na Tradição Grega; A Álgebra Árabe; e A Arte Analítica de François Viète.

Na “Introdução à Arte Analítica”, Viète apresenta a ferramenta algébrica por meio do método analítico para resolver qualquer tipo de problema (ele afirma *NULLUM NOM PROBLEMA SOLVERE* no final do se livro). Por isso, mostrou-se essencial entender o que era o método analítico. *E foi assim, nos estudos para minha dissertação de mestrado, que esta tese começou*. Desde que estudei os métodos de análise e síntese me classifiquei como analítica e também como uma pessoa com dificuldade para criar (e às vezes até entender) coisas através da síntese. Também pensei muito sobre como a síntese é um tipo de pensamento matemático que, por ignorância, pode ser desaprovado, inclusive, por professores. Isso, portanto, acabou moldando a minha prática docente: *como professora não posso desvalidar de cara um pensamento ou raciocínio diferente do meu*.

A vida deu um montão de voltas. Nessas voltas, eu sempre ouvi que eu era “demais para o Estado”. E eu ouvi isso de muitas maneiras, de muitas pessoas, em muitos contextos. Essa fala sempre me incomodou: ela é preconceituosa; como se os professores do Estado fossem menos. Bom, nessas voltas eu acabei encontrando a formação de professores. Primeiro, lá em 2001, estudante de graduação – o meu primeiro “trabalho” foi como tutora do ensino a distância do consórcio CEDERJ. Depois trabalhei no Proletramento. Trabalhei também na Fundação CECIERJ, elaborando material e coordenando projetos para a SEEDUC/RJ; no projeto MatDigital; ingressei como docente na UNIRIO; e coordenei um polo do PNAIC.

E a formação de professores me encantou. Trabalhar num curso de Licenciatura como o da UNIRIO é bom demais! O corpo docente é razoavelmente aberto para as questões apontadas pela pesquisa e tentamos implementar alguns desses apontamentos no nosso curso. É desafiador, mas é muito bom!

A decisão pelo tema desta tese também não foi fácil. Mas por um motivo diferente: “agora” eu já sei mais o que quero. E mesmo com todas as voltas que a vida dá, a história da matemática sempre esteve por aqui. E essa coisa de análise e síntese também. Esta tese começou, portanto, com a ideia de fazer um estudo histórico sobre análise e síntese e como reconhecer esses dois modos de se fazer matemática é importante para o professor de matemática. Ah... o professor de matemática, sobretudo o da escola, é valorizado nesta tese! Da qualificação para cá as coisas mudaram um pouquinho. E ficou lindo! Eu sou muito grata por ter tido à minha disposição as pessoas, as ideias, os momentos e as oportunidades que passo a relatar. Eu garanto: vai valer a leitura.

UMA TESE FEITA DE PROBLEMATIZAÇÕES

Nesta tese problematizamos tudo: a educação, os conhecimentos necessários para o ensino, a formação de professores, os modos com que a matemática é produzida, os tipos de tarefas docentes, o pensamento e a comunicação, o modo como a matemática é entendida, o que é matemática, como contar a sua história. Mais do que respostas procuramos fazer perguntas. Questionamos coisas que, à primeira vista, podem parecer certas e claras, mas que na verdade podem carregar muitas sutilezas que nos representam sem que percebamos. Por exemplo, a suposição implícita de um sentido único – e não problematizado – para escola permite que propostas como "escola sem partido" ganhem voz e eco na nossa sociedade. É como se a noção de escola fosse universal e todos tivessem certeza sobre o que ela significa. Entretanto, diferentes concepções (políticas) de escola levam a diferentes modos de educar. Queremos dizer que, se as nossas premissas buscam simplesmente por mais produtividade, a escola deve, por exemplo, formar cidadãos que estejam preparados para produzir mais, contribuindo com os anseios de quem determina os padrões de produtividade. Por outro lado, se buscamos por uma sociedade mais democrática e inclusiva, em que as pessoas sejam respeitadas em suas idiossincrasias e que, portanto, o ambiente em que vivemos e nossas formas de estar no mundo sejam também respeitados, a escola deve formar cidadãos críticos e conscientes dos seus papeis no mundo – e não mais meros reprodutores de ações indicadas por outras pessoas, das quais esses podem nem mesmo estar cientes.

Acreditamos neste último paradigma de escola. Ainda que nossa pesquisa seja sobre a formação em serviço de professores, ter clareza sobre a noção de escola é um pressuposto da nossa perspectiva. Na pesquisa que aqui relatamos estudamos as possibilidades de interação de diferentes referenciais teóricos. De um lado, estão os referencias da Formação de Professores, sobretudo: aqueles que reconhecem que os saberes docentes da experiência constituem uma epistemologia própria da profissão docente (TARDIF; LESSARD; LAHAYE, 1991); aqueles que, ao identificarem a matemática para o ensino como emergente e dinâmica, e os saberes docentes como constantemente reinterpretados e (re)elaborados na medida em que são mobilizados no ato de ensinar (e. g. DAVIS; RENERT, 2013; DAVIS; SIMMT, 2006), explicitam que esses saberes não podem ser esgotados por listas prescritivas definidas *a priori* e sem a participação dos professores; além daqueles que estabelecem o potencial dos coletivos docentes, como a investigação como postura (e. g. COCHRAN-SMITH; LYTLE, 2009; COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999) e os *concept studies* (e. g. DAVIS; RENERT, 2013; 2014). Em outro lado, encontram-se os referenciais mais atualizados de História da Matemática, que buscam entender as práticas do passado situadas em seus contextos sem a necessidade de compará-las às práticas do presente (GRATTAN-GUINNESS, 2004a; b; SAITO, 2016b; SAITO, 2018), e que nos levam a entender a necessidade de reflexão na escolha das fontes históricas utilizadas no ensino (e. g. SAITO, 2018). Soma-se ainda a *Commognition* (SFARD, 2008), o referencial a partir do qual se entende a matemática como um discurso, e aprender como participar de um discurso.

Uma perspectiva monológica de ensino, segundo a qual os estudantes são encarados como meros receptores de conhecimento, como ocorre na educação bancária denunciada por Freire (2016), pode ser observada em cursos de formação de professores que definem conjuntos fixos de conhecimentos sobre o conteúdo e de procedimentos pedagógicos, a serem adquiridos pelos professores em formação, ignorando os conhecimentos emergentes da prática, bem como as experiências dos professores. Tal perspectiva se assemelha à visão de matemática não problematizada (GIRALDO, 2019), a qual pressupõe um entendimento da matemática a partir de uma perspectiva de evolução linear e universal (de acordo como os padrões eurocêntricos), que se dá exclusivamente por meio do trabalho de gênios com talento inato. Em particular, essa visão pode moldar e difundir uma ideia de que a matemática é apenas para os “talentosos”, sendo papel da escola a seleção dos “melhores”. Em outras palavras, tal visão contribui para uma imagem excludente da matemática. Ao refletir sobre como o conhecimento matemático é historicamente produzido, problematizamos essa visão de matemática. Para tanto, mostra-se essencial entender que a história não está pronta e acabada, ou seja, a história é reinterpretada e reescrita ao longo do tempo (SAITO, 2018).

Apesar de pesquisas nacionais e internacionais terem denunciado a falta de estudos empíricos que discutam como a história da matemática pode contribuir para o ensino da disciplina, no nível escolar e também na formação inicial e continuada de professores (e. g. FAUVEL; VAN MAANEN, 2000; JANKVIST, 2009; SAITO, 2016a; 2018), mais recentemente é possível encontrar propostas de ensino que consideram e utilizam abordagens históricas (e. g. BERNARDES; ROQUE, 2018; CLARK, 2014; CLARK; KJELDSEN;

SCHORCHT; TZANAKIS, 2018; SAITO; DA SILVA DIAS, 2013). No entanto, como destaca Saito (2018), embora existam algumas iniciativas promissoras integrando história no ensino da matemática – como por exemplo, as que citamos –, ainda há muitas iniciativas que se constituem em relatos de experiências, sem articulação teórica e metodológica fundamentada nos paradigmas próprios da pesquisa em História da Matemática e em Educação Matemática. Na busca pela integração desses dois campos de pesquisa é fundamental que suas especificidades teóricas e metodológicas sejam consideradas. Como Saito (2018) critica, a maioria dessas iniciativas é centrada no conteúdo matemático, ancorando-se em pressupostos historiográficos presentistas – isto é, em interpretações classificadas como *herança* por Grattan-Guinness (e. g. 2004b).

Há mais de trinta anos, especialmente no campo da Educação Matemática, as pesquisas em Formação de Professores vêm reconhecendo as especificidades dos saberes docentes (e. g. BALL; THAMES; PHELPS, 2008; DAVIS; RENERT, 2013; DAVIS; SIMMT, 2006; SHULMAN, 1986), bem como a autoridade do professor da escola sobre esses saberes (e. g. COCHRAN-SMITH; LYTLE, 2009; NÓVOA, 2009; TARDIF, 2000; TARDIF; LESSARD; LAHAYE, 1991). Além disso, a literatura internacional também tem apontado para a importância dos trabalhos em coletivos docentes em que os professores intencionalmente investigam suas próprias práticas com vistas a sua reinterpretação e reelaboração (e. g. COCHRAN-SMITH; LYTLE, 2009; DAVIS; RENERT, 2013). No âmbito da pesquisa nacional brasileira, diversas propostas de formação em serviço de professores se fundamentam no trabalho colaborativo, tendo os próprios professores como protagonistas, a partir de diferentes referenciais teóricos (e. g. CYRINO, 2016; DOS ANJOS; NACARATO; DE FREITAS, 2018; FIORENTINI, 2014).

Diante dessas questões apontadas pela literatura desses diferentes campos de pesquisa, e reconhecendo as iniciativas pioneiras em trabalhos colaborativos no contexto brasileiro, esta tese discute possibilidades de desenvolvimento e de implementação de uma proposta de formação docente:

i. em que os professores em formação efetivamente participem dos processos formativos, contribuindo com seus saberes e suas experiências;
ii. que utilize a história da matemática para desconstruir a ideia de que a matemática é apenas para alguns escolhidos, a partir do entendimento de que diferentes práticas matemáticas podem coexistir;
iii. considere as especificidades teóricas e metodológicas desses campos.

Para tanto, primeiramente apresentamos e promulgamos uma ***postura problematizadora***, em que a problematização seja um hábito consciente e constante, e, com vistas ao seu desenvolvimento, apresentamos as ***atividades problematizadoras***.

As *atividades problematizadoras* se caracterizam pela combinação e integração de dois tipos de tarefas docentes, por uma estrutura bem delimitada e por tarefas avaliativas. Tarefas docentes vêm sendo amplamente pesquisadas e utilizadas na Educação Matemática (e. g. WATSON; OHTANI; AINLEY, 2015). Para os propósitos desta tese, utilizamos as *mathtasks* propostas por Biza e seus colaboradores (BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2007; 2018), e nos inspiramos na literatura, particularmente nos trabalhos de Kjeldsen e seus colaboradores (e. g. KJELDSEN, 2011; KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012) e de Arcavi e Isoda (2007), para propor o que denominamos *tarefas históricas*. Tal como Irene Biza e seus colaboradores propõem, com as *mathtasks* pretendemos promover discussões articuladas sobre conteúdos matemáticos e questões relacionadas ao seu ensino, o que potencialmente coloca os professores no papel de professores em sua própria formação – e não como meros receptores de conhecimento. Por outro lado, com as *tarefas históricas* pretendemos desenvolver a escuta intencional nos professores e desestabilizar suas zonas de conforto, na medida em que apresentamos aos professores práticas (matemáticas) supostamente diferentes daquelas com que estão acostumados a lidar e usar.

A estrutura das atividades problematizadoras (que denominamos de *rodada*) é composta por três etapas bem delimitadas, que denominamos *disparando a discussão*, *zoom in e zoom out histórico* e *reflexão de práticas docentes*, e compreende momentos em que os professores possam, ao estudar práticas históricas, refletir sobre suas próprias práticas docentes. Já as tarefas de avaliação, que incluem *diários reflexivos*, *relatos do encontro*, *portfólios* e *propostas de abordagem*, foram pensadas de modo a permitir que os professores reflitam durante todo o processo e que tenham a oportunidade de (re)interpretar e (re)elaborar suas práticas.

Todo o desenho das atividades problematizadoras levou em consideração a teoria da *Commognition* (SFARD, 2008), a qual também é utilizada para analisar os dados produzidos na sua aplicação. Nesse sentido, as tarefas propostas, bem como a condução das atividades problematizadoras visam à explicitação dos discursos (SFARD, 2008) dos professores.

Desenvolver a postura problematizadora não implica na mera substituição de concepções ou práticas por outras pré-determinadas. Ao contrário, a postura problematizadora prevê um deslocamento político e epistemológico: no lugar de buscar por respostas, buscamos por perguntas, perguntas que nos movam. Assim, procuramos fomentar nos professores uma visão da própria matemática e de seu ensino como campos intrinsecamente problematizados –

isto é, impulsionados por perguntas que impõem constantes estados de movimento, e que não são esvaziadas pela proposição de respostas. Dessa forma, acreditamos que os professores serão capazes de problematizar visões monológicas de educação, passando a considerar progressivamente visões mais dialógicas, aproximando-se assim da educação problematizadora. Além disso, entendemos o desenvolvimento de uma postura problematizadora permanente em relação a suas próprias práticas como uma forma de reafirmar a autoridade dos professores da escola sobre os saberes docentes.

A ideia de elaborar uma proposta de formação ancora-se na carência de propostas que se referenciem na História da Matemática e na Formação de Professores como campos de pesquisa. Reconhecemos, entretanto, que algumas premissas nas quais nossa proposta se sustenta extrapolam a interseção dessas duas áreas. Queremos dizer, especificamente, que as tarefas avaliativas e as tarefas docentes – mesmo quando consideradas separadamente – nos remetem ao papel de centralidade dado aos professores em formação. Esse aspecto pode (e deve) ser considerado nos mais diversos contextos de formação – em serviço, inicial, com uma determinada especificidade (como no caso desta pesquisa). Nesse sentido, entendemos que esta proposta pode contribuir com a Formação de Professores também de formas não diretamente relacionadas com sua ideia original, qual seja, articular práticas históricas e práticas de sala de aula.

A nossa proposta se inspira em nossas próprias práticas como professores – tanto da Educação Básica, como do Ensino Superior – e também em discussões apontadas pela literatura de pesquisa. Dado que ela emerge de nossas práticas (docentes e de pesquisa), em lugar de rotula-la em padrões pré-existentes, procuramos elaborar nossa proposta fundamentada na literatura, justificando, assim, as tarefas que a compõem, bem como suas combinações e articulações. Isso está de acordo com o que Barbosa (2015, p. 363) chama atenção ao defender formatos insubordinados para teses e dissertações: "O processo de pesquisa não deve ser acondicionado aos limites da forma [...], mas é a forma que deve decorrer do processo de pesquisa."

Nesta pesquisa, desenvolvemos um estudo empírico com 12 professores que estavam cursando um mestrado profissional na cidade do Rio de Janeiro, realizado entre os meses de agosto e dezembro de 2018. O objeto de pesquisa desta tese, entretanto, não está nos saberes ou concepções dos participantes, mas sim na própria proposta de formação em serviço ofertada (as atividades problematizadoras). Os professores têm, portanto, o papel de nos auxiliar a avaliar (no sentido de avaliar conosco) essa proposta, a partir da perspectiva de quem a experienciou. Nessa perspectiva, são objetivos da pesquisa

a. formular a *postura problematizadora*;
b. elaborar uma proposta de formação – as *atividades problematizadoras* – como *uma* possível forma para desenvolver a *postura problematizadora*;
c. descrever uma aplicação das *atividades problematizadoras*; e
d. apresentar *uma* análise de algumas mudanças discursivas experienciadas pelos participantes durante essa aplicação.

A apresentação da postura problematizadora nesta tese se dá, em princípio, teoricamente. Estabelecidos nossos pressupostos e nossos objetivos, apresentamos como tal postura pode ser promovida na prática e discutimos os resultados observados a partir da implementação da proposta. Finalmente, refletimos sobre nossa proposta, indicando as contribuições tanto para a Formação de Professores quanto para a História da Matemática no Ensino, bem como perspectivas futuras. Neste sentido, esta tese está organizada em 3 grandes partes: discussão teórica; o estudo empírico e uma análise de dados; e contribuições e perspectivas.

Optamos por apresentar esta tese de uma maneira híbrida com dois capítulos (5 e 7) em formato de artigo e os demais no formato monográfico. Esta opção se apoia na defesa de formatos insubordinados para dissertações e teses (e. g. BARBOSA, 2015). De acordo com Barbosa (ibid), o formato de coleções de artigos permite o desenvolvimento de competências próprias da pesquisa, como por exemplo, capacidade de síntese sem perda de consistência. Acreditamos que isso acaba se configurando como uma oportunidade de desenvolver tais habilidades durante a formação como pesquisador. Além disso, “Pela publicação de seus artigos [...], espera-se que a visibilidade e a disponibilidade para outros pesquisadores sejam ampliadas.” (ibidem, p. 353-354). Optamos, portanto, por esse formato por ele potencializar tanto a divulgação das ideias desenvolvidas no processo de doutoramento quanto a formação da autora como pesquisadora. Acrescentamos a esses dois fatores a característica particular da pesquisa realizada: o aspecto intrincado da proposta de formação que aqui apresentamos nos levou a considerar a sua organização considerando a *metáfora da Babouska*.[1]

---

[1] Babouska (ou Matrioska) são aquelas bonequinhas russas que guardam dentro de si versões suas reduzidas.

Durante o estudo empírico, implementamos três rodadas das atividades problematizadoras. Com o aumento do engajamento dos professores ao longo das rodadas, percebemos que falar dos resultados obtidos em uma rodada, desconsiderando o que aconteceu nas rodadas anteriores, não fazia sentido. Em outras palavras, a experiência com a Rodada 1 marca a experiência com a Rodada 2, assim como a experiência com as duas primeiras rodadas marca a experiência com a Rodada 3. Assim, não faz sentido o relato de uma desconsiderando o que aconteceu nas rodadas anteriores. Além das questões que concernem a experiência com as rodadas, destaca-se também a combinação e articulação das tarefas docentes que utilizamos. Assim, organizamos a parte que descreve o estudo empírico neste texto de modo a: primeiramente, descrever a proposta de formação elaborada, usando para isso o exemplo da Rodada 1; em seguida nos debruçarmos nas tarefas docentes históricas e na abordagem que propomos para a sua implementação, tendo a Rodada 2 como exemplo; e, finalmente, discutirmos as mudanças discursivas observadas e selecionadas à luz do que aconteceu na última rodada e também considerando a experiência como um todo. Ficaram, portanto, bem delimitados três momentos, dois dos quais apresentamos em formato de artigo. Assim, os capítulos que descrevem a proposta de formação criada (Capítulo 5) e uma análise dos dados produzidos (Capítulo 7) apresentam-se em língua inglesa em formato de artigo, com vistas à publicação em veículos internacionais. O artigo correspondente ao Capítulo 7 já foi submetido e está em processo de revisão.

A fundamentação teórica está organizada nos três eixos, que sustentam a nossa proposta, a saber: Formação de Professores, *Commognition* e História da Matemática. A discussão sobre esses três eixos visa a esclarecer como ideias de diferentes autores em diferentes perspectivas epistêmicas foram articuladas para compor a postura problematizadora que propomos.

No Capítulo 1, começamos apresentando nossa posição sobre o que é problematizar, a partir das ideias de educação problematizadora de Paulo Freire. Estabelecemos assim o nosso entendimento do que é escola como pressuposto político que sustenta nossa argumentação.

No Capítulo 2, elaboramos nossas ideias sobre o eixo teórico da Formação de Professores. Começamos discutindo sobre a necessidade de afirmar a docência como profissão, considerando as especificidades dos saberes docentes e como estes constituem uma epistemologia própria. Identificamos a necessidade de uma formação construída dentro da profissão, em que os professores ganham papel de centralidade. Trazemos a noção de *investigação como postura* de Marilyn Cochran-Smith e Susan Lytle, que reconhece a força que teoria e prática têm quando entendidas de forma indissociável – sobretudo em espaços coletivos em que os professores investigam intencionalmente a sua própria prática, com vistas a ações de transformação social. Os professores são apresentados como produtores de possibilidades matemáticas, e como Brent Davis e seus colaboradores apontam os saberes docentes são dinâmicos e emergentes, constituídos a partir da constante reinterpretação e reconfiguração de saberes já existentes. Nessa perspectiva, as categorias dinâmicas e estáveis do conhecimento matemático são indissociáveis. Assim, ao reconhecer que os saberes acadêmicos não são o único saber de referência para a docência, é possível superar as perspectivas negativas (e. g. GIRALDO; QUINTANEIRO; MOUSTAPHA; MATOS *et al.*, 2018), que relegam os cursos de formação de professores a um lugar de "bacharelados mutilados", de acordo com as quais a formação de professores durante muito tempo se estruturou. Por fim, discutimos como um tipo especial de tarefas docentes – proposto por Irene Biza, Elena Nardi e colaboradores –, que mobiliza experiências da prática em atividades de formação, pode contribuir para superar a dicotomia entre teoria e prática e para o estabelecimento de uma postura proativa e reflexiva nos professores.

No Capítulo 3, apresentamos a teoria da *Commognition*, proposta por Anna Sfard, de acordo com a qual pensamento e comunicação são duas facetas de um mesmo fenômeno. Discutimos como a visão participacionista da teoria nos leva a entender a aprendizagem como participação em um discurso. Chamamos atenção também da necessidade de ser cuidadoso com o que se fala, pois, de acordo com a *Commognition*, o que se fala é a matemática. Discutimos o papel dos conflitos gerados pela comunicação na docência e na pesquisa e indicamos quão importante é o acordo entre os participantes do discurso, bem como a dedicação dos novos participantes ao se engajarem em novas atividades discursivas.

No Capítulo 4, apresentamos duas interpretações para a matemática do passado (*história* e *herança*), e argumentamos quão importante é a clareza sobre a que perspectiva histórica estão submetidas as fontes utilizadas no ensino, pois essas carregam consigo implicitamente uma concepção sobre ciência (e consequentemente sobre matemática). Apresentamos, em seguida, três maneiras de usar a história que nos inspiraram. Na primeira, mostramos como a história pode ser usada para sensibilizar professores e estudantes sobre os pressupostos que a formalização matemática pode dissimular. A segunda está baseada em um argumento que preconiza que o engajamento com fontes históricas primárias com vistas a sua interpretação pode ajudar na valorização por parte dos professores da produção dos estudantes. A terceira articula a história da matemática e a *Commognition*, indicando que situações de ensino e aprendizagem que utilizam fontes históricas permitem que metarregras do discurso matemático sejam objetos explícitos de reflexão. Por fim, indicamos de que maneira a discussão histórica se articula com a educação problematizadora com que nos identificamos, e ratificamos nosso entendimento de matemática como um conjunto de práticas culturalmente situadas que podem ser produzidas por todos.

No Capítulo 5 apresentamos as atividades problematizadoras, destacando de que maneira utilizamos referenciais que compõem a discussão teórica apresentada na primeira parte desta tese para desenhar uma proposta de formação docente, com três etapas especifica e objetivamente projetadas; que utiliza dois tipos especiais de tarefas; e que considera tarefas avaliativas fundamentadas em reflexão sobre e no compartilhamento de práticas pelos participantes. Apresentamos também parte das atividades implementadas no estudo empírico com foco especial na primeira rodada de tarefas, que abordou equações lineares e o método da falsa posição egípcio.

No Capítulo 6, mostramos de que maneira a abordagem de *zoom in* e *zoom out* histórico foi desenhada ancorada em um método hermenêutico e na promoção de *commognitive conflicts* entre práticas matemáticas governadas por diferentes metarregras. Visamos ao desenvolvimento de uma escuta intencional nos professores a partir da qual os professores deixam de observar a produção de seus estudantes exclusivamente segundo o paradigma do "certo" e "errado", o que pode levar, entre outras coisas, à problematização de como a matemática se desenvolve e, consequentemente, da própria matemática. Também apresentamos parte das atividades implementadas no estudo empírico, com foco na segunda rodada de tarefas, sobre o ensino de áreas e do teorema de Pitágoras e os Livros I e II de *Os Elementos* de Euclides.

Finalmente, no Capítulo 7, apresentamos parte das atividades implementadas no estudo empírico, com foco na terceira rodada de tarefas, sobre funções, que utilizam as definições de Euler e de Dirichlet, propostas nos séculos XVIII e XIX, assim como uma proposição de Galileu sobre movimento uniformemente acelerado do século XVII. Apresentamos também, através das lentes da *Commognition*, *uma* análise dos dados produzidos, destacando algumas mudanças discursivas experienciadas pelos participantes ao fim do conjunto das três rodadas, tanto no nível de objeto quanto em metanível. Descrevemos cinco episódios em que se observa como o engajamento com as atividades levou os professores a: i) problematizarem o que é função e os papeis desempenhados pela representação simbólica "x", assim como a postura do professor em responsabilizar os estudantes pelo não entendimento ou entendimento equivocado do conteúdo; ii) problematizarem seus entendimentos sobre a própria matemática, passando a não mais encará-la como uma ciência que nunca muda; iii) reverem suas posturas frente ao erro, especialmente com respeito a cometer erros sobre o conteúdo ensinado; iv) ouvirem mais seus próprios estudantes; e v) problematizarem suas formas de avaliação dos estudantes.

Por fim, na terceira e última parte, retomamos e articulamos o que foi apresentado nesta tese, discutindo suas contribuições para a área de Formação de Professores em matemática, para as articulações entre a História da Matemática e a Educação Matemática, bem como para a *Commognition*. Ainda discorremos sobre os desafios enfrentados durante a condução da pesquisa, bem como elencamos algumas de suas potencialidades, limitações, e seus possíveis desdobramentos.

Nos Apêndices, disponibilizamos todas as tarefas utilizadas no estudo empírico; o planejamento e as apresentações utilizadas em cada um dos 13 encontros; uma cópia do questionário on line respondido pelos participantes ao final do processo; o roteiro utilizado nas entrevistas semiestruturadas; e uma cópia do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido utilizado.

PARTE I

DISCUSSÃO TEÓRICA: A POSTURA PROBLEMATIZADORA

CAPÍTULO 1.

O QUE É PROBLEMATIZAR?

"[Na educação bancária] não pode haver conhecimento pois os educandos não são chamados a conhecer, mas a memorizar o conteúdo narrado pelo educador. [...] [Já no paradigma da educação problematizadora] Estes [os educandos], em lugar de serem recipientes dóceis de depósitos, são agora investigadores críticos, em diálogo com o educador, investigador crítico também."

(FREIRE, 2016, p. 121)

O termo *problematizar* é polissêmico, aparece em variados contextos e vem sendo usado consideravelmente nas pesquisas no campo da Educação Matemática. Contudo, nem sempre seu sentido é explicitamente esclarecido. Afinal... o que é problematizar?

> **Problematizar** v (1836) **1** t.*d.* dar caráter ou feição de problema a<*p uma questão insignificante*> **2** t.*d.* tornar problemático, complicado, difícil <*não quer p. sua vida com a construção de uma casa*> **3** t.*d.* pôr em dúvida; questionar <*p. a existência da* alma>[2]

Problematizar pode remeter, portanto, a dificuldade, complicação. Contudo, ainda que a definição acima indique os significados 1 e 2, o sentido do termo problematizar que nos interessa aqui está mais relacionado com o significado 3. Ou seja, neste trabalho, *problematizar* tem um sentido de *questionar*.

Em geral, problematizamos aquilo que é tomado como dado, ou seja, aquilo a respeito de que, no senso comum, em alguma medida ou em algum contexto, não são levantadas dúvidas. *A educação é para todos*. *A matemática é uma linguagem universal*. *Todos são iguais perante a lei*. Esses são alguns exemplos de afirmações que parecem ser tomadas como verdadeiras em certos contextos e por certos grupos – sobretudo por indivíduos que se encontram em alguma posição de privilégio – nesses caso, por quem tem acesso à educação formal, por quem não tem a matemática escolar como uma dificuldade ou barreira, e por quem não é rotulado *a priori*, pela raça, gênero, origem social. Então: Por que questionar? A quem cabe questionar? Para quem questionar? Em que situações questionar? Como questionar?

---

[2] Verbete retirado de Dictionary by Apple.

Para refletir sobre essas perguntas, vamos ao encontro do patrono da educação brasileira: Paulo Freire. Em *Pedagogia do Oprimido* (2016), Freire propõe a educação problematizadora como uma alternativa ao paradigma da *educação bancária*, criticado em sua obra e particularmente nesse livro. Freire lança mão da metáfora "educação bancária" para destacar o paradigma em que o professor é entendido como único detentor do conhecimento, sendo responsável por *depositá-lo* nos estudantes, que, por sua vez, são considerados "recipientes vazios", sem qualquer conhecimento sobre o que está sendo neles depositado.

> Em lugar de comunicar-se, o educador faz 'comunicados' e depósitos que os educandos, meras incidências, recebem pacientemente, memorizam e repetem. Eis aí a concepção 'bancária' da educação, em que a única margem de ação que se oferece aos educandos é a de receberem os depósitos, guarda-los e arquivá-los. (FREIRE, 2016, p. 104-105).

Para Freire, no paradigma da educação bancária, espera-se que os conteúdos sejam memorizados mecanicamente, sem muita preocupação com a produção de significados pelos estudantes. A educação bancária pode ser entendida como uma pedagogia da resposta, em que os estudantes não participam da construção do conhecimento durante o processo educativo, dado que as respostas são a eles entregues, sem possibilidades de questionamentos. Ela serve à dominação e estabelece uma contradição educador-educando, segundo a qual

> o educador é o que sabe; os educandos, os que não sabem; [...] o educador é o que diz a palavra; os educandos, os que a escutam docilmente; [...] o educador é o que atua; os educandos, os que têm a ilusão de que atuam, na atuação do educador; [...] o educador escolhe o conteúdo programático; os educandos, jamais ouvidos nesta escolha, se acomodam a ele; [...] o educador identifica a autoridade do saber com sua autoridade funcional, que opõe antagonicamente à liberdade dos educandos; estes devem adaptar-se às determinações daquele. (FREIRE, 2016, p. 106-107)

Fica evidente, assim, a passividade a que os estudantes estão subordinados nesse paradigma de educação. O educador como detentor do conhecimento e de todo o processo é quem escolhe o que será depositado, restando aos educandos aceitar tais escolhas e tal condição. É nesse sentido que Freire chama atenção da necessidade de tomar consciência do tipo de educação a que estamos subordinados, pois a educação bancária pode ofuscar sua própria força desumanizadora. Portanto, nesse paradigma de educação é muito difícil que posições de oprimido sejam ultrapassadas a partir do processo educativo formal. Freire (2016, p. 118, ênfase no original) considera que a "libertação autêntica, que é humanização em processo, não é uma *coisa* que se deposita nos homens. Não é uma palavra a mais, oca, mitificante. É práxis, que implica a ação e a reflexão dos homens sobre o mundo para transformá-lo". Para o autor, a consciência, isto é o pensamento, deve ser regada de *intencionalidade*, sendo necessário problematizar, isto é questionar, a relação dos homens com o mundo. É nesse sentido que Freire traz a educação problematizadora como aquela que liberta a partir do que pode ser conhecido.

> Neste sentido, a educação libertadora, problematizadora, já não pode ser o ato de depositar, de narrar, ou de transferir, ou de transmitir 'conhecimentos' e valores aos educandos, meros pacientes, à maneira da educação 'bancária', mas um ato cognoscente. Como situação gnosiológica, em que o objeto cognoscente, em lugar de ser o término do ato cognoscente de um sujeito, é o mediatizador de sujeitos cognoscentes, educador, de um lado, educandos, de outro, a educação problematizadora coloca, desde logo, a exigência da superação da contradição educador-educando. Sem esta, não é possível a relação dialógica, indispensável à cognoscibilidade dos sujeitos cognoscentes, em torno do mesmo objeto cognoscível. (FREIRE, 2016, p. 119)

Para Freire, durante o processo educativo, é fundamental que se contemple o conhecimento e as aprendizagens dos próprios estudantes. Assim, no lugar de meros receptores dos depósitos, os estudantes devem ser colocados efetivamente no centro do processo educativo, de modo que a sua educação considere e legitime o que eles já conhecem e como eles aprendem. Isso está explícito, por exemplo, no método de alfabetização freiriano que se dá a partir das palavras geradoras. É nesse sentido que a pedagogia freiriana é dialógica, ou seja, se dá no diálogo entre os diversos atores do processo educativo ao qual a sociedade está subordinada.

Propondo uma quebra de dicotomias que enfraquecem a discussão consciente e intencional sobre o mundo, Freire coloca o professor como educador-educando e o estudante como educando-educador, pois para ele no diálogo da educação *ambos* se educam. A relação educador-educando se torna mais horizontal, uma vez que ambos se apresentam como aprendizes – o que não implica que as diferenças entre seus papéis sejam desconsideradas. A ideia de transmissão de conhecimento não cabe mais, pois, como Freire nos mostra, o conhecimento não é mais o fim, mas o meio em que se educa com vistas à consciência crítica.

Segundo Freire, somente a educação dialógica, aquela que trabalha a partir de perguntas e não mais buscando apresentar respostas, é capaz de superar a relação opressora educador-educando. Tal superação é mediada pelo diálogo entre os conhecimentos do educador e do educando, quando eles se educam reciprocamente. Assim, se a educação bancária serve à dominação, à manutenção da contradição educador-educando, a educação problematizadora visa à libertação, à superação de tal contradição. Estando inserido em uma epistemologia política – e, portanto, longe de ser neutra – Freire congrega os conceitos de diálogo, liberdade, conscientização, problematização (SCOCUGLIA, 2016). Com sua educação problematizadora, Freire busca mais por perguntas do que por respostas. É nesse sentido que para ele o professor deve juntamente com os estudantes questionar o que está posto, ou nos termos que aqui propomos, *problematizar*. A educação problematizadora de Freire parte sempre de um problema, buscando desvendar certa realidade relacionada com o conteúdo programático (ibid.).

Afiliamo-nos à concepção freiriana de educação problematizadora e, com base nessa posição epistemológica e política, afirmamos nossa opção e intenção em *questionar o que está posto*. Para nós, uma escola baseada apenas na exposição de conhecimentos e fatos estabelecidos

> necessariamente visa formar grupos para exercer funções profissionais ou sociais que não são escolhidas por seus membros e das quais, em geral, estes nem mesmo são conscientes [...]. Para que tal modelo de escola seja "eficiente" para os seus objetivos, é preciso que não ofereça rigorosamente nada além de uma lista prescrita de conteúdos, de forma a não possibilitar qualquer opção de mobilidade profissional ou social, e nem mesmo estimule qualquer reflexão dos sujeitos sobre a própria condição. (GIRALDO; QUINTANEIRO; MOUSTAPHA; MATOS *et al.*, 2018, p. 196).

Alinhados com a perspectiva freiriana, defendemos justamente o contrário, ou seja, uma escola construída a partir da diversidade de saberes, de corpos, de formas de aprender e de estar no mundo que atravessam seus espaços e tempos, em que os estudantes tenham um papel consciente e ativo nas escolhas sobre o que é ou não estudado. Assim, nessa perspectiva de educação, uma primeira problematização necessária diz respeito à própria noção de *escola*. Esta noção é tão arraigada em nossa sociedade que a *naturalizamos*, como se houvesse um significado único e universal, do qual todos tivessem certeza e sobre o qual não coubesse discussão. É nesse sentido que não buscamos respostas que se encerrem em si, mas sim uma ***postura problematizadora*** com respeito à educação, abarcando desde os conteúdos estudados até os próprios sentidos e funções sociais da escola.

Neste trabalho, defendemos duas dimensões de problematização em educação entrelaçadas e interdependentes: por um lado uma *educação problematizadora* em seus objetivos, que seja orientada por uma intencionalidade em provocar nos estudantes um questionamento sobre suas relações com o mundo, e que busque tensionar a relação educador-educando; sendo para isso necessário, por outro lado, o desenvolvimento de uma *postura problematizadora em relação à educação* por parte dos professores, isto é, uma atitude permanente situada na desnaturalização dos sentidos de escola, de ensino, de disciplina escolar, das áreas científicas correspondentes e das formas históricas e subjetivas de produção de conhecimento.

É com esse espírito que acreditamos que devem ser feitas constantemente perguntas como: *Para quais objetivos a escola serve? Quais são seus papéis e suas funções sociais? De quem é e para quem é essa escola?* É preciso, portanto, estar consciente da intencionalidade política das ações realizadas nos espaços e tempos da escola, sobretudo para professores, gestores e outros profissionais da educação. Mas para isso, a formação de professores precisa se constituir em si em um ambiente problematizador, que provoque os professores em formação a ultrapassarem as fronteiras construídas por suas próprias histórias e experiências, especialmente aquelas relacionadas aos contextos educacionais.

É a partir desse paradigma que nos questionamos: *Tem-se mesmo hoje uma educação para todos?* Que sujeitos, que formas de aprender e de estar no mundo são excluídos da educação formal institucionalizada? *A matemática é mesmo uma linguagem universal?* Se sim, quem determina o que está e o que não está nesse universo, o que pode e o que não pode ser dito com essa linguagem? Não pretendemos responder explicitamente tais questionamentos (nem por que, quando, quem, para quem e como questioná-los), mas esperamos que as reflexões suscitadas pela leitura desta tese ajudem a apontar caminhos para refletir sobre eles. Ao longo dos próximos capítulos, procuramos aprofundar e fundamentar a proposição da postura problematizadora, discutindo seus diferentes aspectos.

CAPÍTULO 2.

EIXO TEÓRICO 1: FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Ser professor não é apenas lidar com o conhecimento, é lidar com o conhecimento em situações de relação humana. Para ser professor não basta conhecer as disciplinas, mais a pedagogia. É preciso adquirir e trabalhar um conhecimento que se encontra no patrimônio da profissão e que necessita de ser valorizado no campo da formação de professores.
(NÓVOA; VIEIRA, 2017, p. 36)

Em consonância com a discussão sobre educação problematizadora, reafirmamos nosso compromisso com um entendimento de escola como espaço inclusivo, democrático e diverso. Ao afirmar que educar "é conseguir que a criança ultrapasse as fronteiras que, tantas vezes, lhe foram traçadas como destino pelo nascimento, pela família ou pela sociedade", Nóvoa (2009, p. 31) evidencia os papéis e funções sociais da escola. Os espaços de formação (inicial e continuada) de professores devem, portanto, também ser orientados por esse compromisso, com vistas a uma educação problematizadora e a uma constante postura problematizadora em relação à educação. É nesse sentido que entendemos que o processo de formação deve visar a uma emancipação cultural e profissional, na qual o professor não só seja capaz, mas, de fato, promova uma educação problematizadora, desenvolvendo uma permanente postura problematizadora em relação a sua própria formação e suas próprias práticas.

Advogamos, assim, uma ***postura problematizadora*** que coloca o professor em permanente posição de questionamento. Tal postura procura articular ideias de diferentes autores em diferentes perspectivas epistêmicas. Neste capítulo apresentamos uma discussão teórica sobre a formação de professores com vistas a esclarecer como a *investigação como postura* de Marilyn Cochran-Smith e Susan Lytle, assim como a indissociabilidade entre as *categorias dinâmicas e estáveis* do conhecimento matemático e a sua constante reinterpretação, enquanto usa de Brent Davis e seus colaboradores, compõem a postura problematizadora que nesta tese propomos.

2.1. Ser Professor é uma Profissão

Ser professor é uma profissão. De certo ponto de vista, essa afirmação pode parecer óbvia. Contudo, nela se encerra uma ampla discussão teórica e política, a começar pela própria necessidade de enunciá-la. Aqueles que tiveram acesso ao Ensino Fundamental têm contato com professores durante, pelo menos, 9 anos de suas vidas. Isso acrescenta à docência um componente muito particular: as pessoas têm um envolvimento com os fazeres e as práticas da profissão, de uma perspectiva regular e interna, sem que se opte por ela ou se inicie sua formação. Esse envolvimento gera familiaridade e toda sorte de afetos, levando as pessoas a se sentirem à vontade para opinarem a partir dessas vivências. Além disso, parece haver uma concepção tácita, porém amplamente disseminada, da docência como algo que "qualquer um pode fazer", que não demanda formação específica; ou ainda de que ter certo "dom", conhecer o conteúdo e ter um exemplo a seguir são atributos suficientes para exercer a docência.

Como Tardif (2013) observa, os primeiros registros de professores são aqueles vocacionados, sem, portanto, a necessidade de qualquer preparação formal para o seu ofício. A crença de que para dar aula de algo, basta sabê-lo, em particular sem que se especifique o que significa esse saber, é questionada, por exemplo, pelo trabalho de Shulman (1986), que propõe a noção de *conhecimento pedagógico de conteúdo* (PCK), como um amálgama entre conteúdo e pedagogia. Como argumentam Cochran-Simth e Lytle (2009; 1999), apesar de ser importante reconhecer a centralidade dos professores – sobretudo os mais experientes – ao longo da atuação profissional docente, é igualmente importante reconhecer e problematizar a prática, de modo que não seja meramente "aprendida por repetição". Como as autoras defendem, ao se constituir como objeto de investigação intencional, os conhecimentos práticos devem ser articulados e formulados teoricamente.

O trabalho de Tardif e seus colaboradores é reconhecido como uma contribuição central para o debate sobre profissionalização docente no campo da Educação. Tardif, Lessard e Lahaye (1991) apontam a desvalorização social da docência observando que, por um lado, "professores ocupam uma posição estratégica no interior das relações complexas que unem as sociedades contemporâneas aos saberes que elas produzem e mobilizam para diversos fins" (p. 216); mas por outro lado, "na medida em que a produção de novos conhecimentos tende a se impor como um fim em si mesmo [...], as atividades de formação e de educação parecem passar, progressivamente, para o segundo plano" (p. 217). Os autores relacionam essa desvalorização social com uma crescente separação entre cientistas e educadores em dois grupos cada vez mais distintos, cujas funções seriam, respectivamente, a produção e a transmissão de saberes. Assim, os professores lidariam em suas práticas com uma categoria de saberes – os saberes científicos – de cuja produção eles próprios não participam. Sua função seria reduzida à transmissão de saberes produzidos por outros grupos. Nesse sentido, se examinamos a docência apenas da perspectiva epistemológica das disciplinas acadêmicas de referência, ela poderia se reduzir a uma dimensão meramente tecnicista, desprovida de saberes próprios.

Entretanto, Tardif, Lessard e Lahaye (1991) destacam a complexidade dos saberes envolvidos na atividade docente, que não se reduzem àqueles produzidos interiormente nas ciências de referência, incluindo ainda saberes da formação profissional, das disciplinas, curriculares e da experiência. Para os autores, o professor deve saber mais do que sua disciplina e seu programa, mas também possuir saberes pedagógicos, e desenvolver um saber prático baseado em sua experiência cotidiana com os estudantes. Em particular, Tardiff e seus colaboradores caracterizam os saberes da experiência como aqueles que brotam da experiência e são por ela validados, incorporam-se à vivência individual e coletiva sob a forma de *habitus* e de habilidades de saber fazer e de saber ser. Para os autores,

> Os saberes da experiência surgem como núcleo vital do saber docente, a partir do qual o(a)s professore(a)s tentam transformar suas relações de exterioridade com os saberes em relações de interioridade com sua própria prática. Nesse sentido, os saberes da experiência não são saberes como os demais, eles são, ao contrário, formados de todos os demais, porém retraduzidos, 'polidos' e submetidos às certezas construídas na prática e no vivido. (TARDIF; LESSARD; LAHAYE, 1991, p. 232).

Assim, Tardif, Lessard e Lahaye (1991) consideram o reconhecimento dos saberes da experiência como uma condição básica para a caracterização da docência como uma *profissão*, distinguindo-a de outras profissões, ofícios e ocupações. Para os autores, os saberes da experiência caracterizam, ainda, uma *epistemologia própria* da profissão docente.

Nessa direção, Nóvoa (2009) resgata a contribuição de Shulman (1986) indicando que é preciso compreender um conhecimento em todas as suas dimensões, não bastando o domínio do conteúdo *per se*. Nóvoa (2009, p. 35) ainda afirma que "o trabalho docente não se traduz numa mera transposição, pois supõe uma transformação dos saberes, e obriga a uma deliberação, isto é, a uma resposta a dilemas pessoais, sociais e culturais".

Gatti e Nunes (2009) denunciam, por outro lado, a desvalorização no meio universitário, das atividades de formação, em especial dos cursos de licenciatura. As autoras observam que

> a formação de professores é considerada atividade de menor categoria e quem a ela se dedica é pouco valorizado. Decorre daí uma ordem hierárquica na academia universitária, as atividades de pesquisa e de pós-graduação possuem reconhecimento e ênfase, a dedicação ao ensino e à formação de professores supõe perda de prestígio acadêmico. (GATTI; NUNES, 2009, p. 111).

Consideramos que esse entendimento sobre os cursos de licenciatura está fortemente relacionado com a desqualificação da docência na educação básica como uma profissão. É assim que entendemos que o reconhecimento profissional da docência deve passar por uma discussão sobre o lugar das licenciaturas na universidade. Na próxima seção, discutimos em mais profundidade as relações entre o reconhecimento da docência como uma profissão e as concepções de formação de professores. Antes, porém, chamamos atenção de que reconhecer que a docência é uma profissão implica em reconhecer que

> estamos saindo do improviso, da ideia do professor missionário, do professor quebra-galho, do professor artesão, ou tutor, do professor meramente técnico, para adentrar a concepção de um profissional que tem condições de confrontar-se com problemas complexos e variados, estando capacitado para construir soluções em sua ação, mobilizando seus recursos cognitivos e afetivos. (GATTI, 2010, p. 1360).

E assim reforçamos nosso entendimento da *docência como uma profissão* como um pressuposto epistemológico e político, que implica na sua valorização.

2.2. Por uma Formação Construída dentro da Profissão

As discussões feitas na seção anterior sugerem que os programas de formação inicial de professores precisam sustentar seus projetos políticos pedagógicos em um debate aprofundado sobre as relações entre formação e profissionalização docente. Em comparação com outras licenciaturas analisadas, Gatti (2010) afirma que, no caso específico das licenciatura em matemática, há um equilíbrio maior entre as disciplinas de conhecimentos específicos e de conhecimentos para a docência. Entretanto, Gatti e Nunes (2009) afirmam que essa integração ainda deixa a desejar, faltando integração entre essas duas importantes frentes da formação do professor de matemática. As autoras também enfatizam “o fosso entre a formação teórica dos professores da universidade e o exercício do ofício no terreno da escola” (GATTI; NUNES, 2009, p. 111) – que também é considerado por Nóvoa (2017) e que pode ser identificado com a *dupla descontinuidade* denunciada por Felix Klein no início do século XX (KILPATRICK, 2008; SCHUBRING, 2014). As autoras apontam ainda que uma parcela dos cursos de licenciatura em matemática analisados valoriza mais as disciplinas de conteúdo matemático, aproximando-se, assim, dos cursos de bacharelado (GATTI; NUNES, 2009).

O que nos diz a literatura brasileira e a possibilidade de superação da perspectiva negativa nos currículos das licenciaturas em matemática

A comunidade brasileira de pesquisa em educação matemática, nas últimas décadas, tem debatido intensamente os modelos de cursos de formação inicial de professores de matemática no Brasil. Por exemplo, na 35ª Reunião Nacional da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPEd), o GT19 – Educação Matemática elegeu o tema “*O lugar da matemática na licenciatura em matemática*” para o trabalho encomendado, que foi produzido pelos pesquisadores convidados Plínio Cavalcanti Moreira e Ana Cristina Ferreira, da Universidade Federal de Ouro Preto. Nesse texto, Moreira e Ferreira (2013) discutem vertentes da abordagem da matemática em cursos de licenciatura em matemática no Brasil, bem como suas possíveis articulações com outros saberes docentes na formação inicial do professor de matemática. Os autores apresentam ainda um quadro de referência para organizar o debate sobre o tema e algumas perspectivas advindas dos artigos sintetizados por eles nesse trabalho encomendado.

Moreira e Ferreira defendem que os futuros professores sejam levados a analisar e vivenciar práticas de formação que envolvam os saberes específicos associados à docência escolar em matemática, ou seja, que é preciso "repensar a formação do professor de matemática, mais especificamente, sua formação matemática, à luz das demandas próprias dessa profissão, isto é, a partir do reconhecimento de uma identidade profissional do professor de matemática." (MOREIRA; FERREIRA, 2013, p. 995). Essa posição está em consonância com os trabalhos de diversos pesquisadores internacionais, como por exemplo os grupos liderados por Deborah Ball, nos EUA, e por Brent Davis, no Canadá, que advogam que o conhecimento matemático a ser produzido e mobilizado no âmbito dos cursos de formação inicial de professores de matemática deve ser situado em uma teoria baseada na prática docente (e. g. BALL; THAMES; PHELPS, 2008; DAVIS; RENERT, 2013). Nesse sentido, a reflexão sobre o lugar da matemática na licenciatura em matemática não deve se dar de forma isolada da discussão sobre saberes de outras naturezas. Entendemos que a escolha dos componentes curriculares nos projetos pedagógicos dos cursos de licenciatura guardam orientações políticas. Por isso, acreditamos ser fundamental jogar luz nesse aspecto: *ainda que não explicitada, toda escolha é política*. Essas escolhas estão, portanto, associadas a uma orientação política sobre qual professor está sendo formado.

Moreira e Ferreira (2013) reconhecem a contribuição da proposição do PCK de Shulman (1986), como uma maneira de se pensar o lugar da matemática na licenciatura em matemática. Para eles, o PCK trouxe para o debate uma visão positiva das potencialidades da prática docente escolar como produtora de saber profissional. Até então, era pouco problematizada a produção dos saberes necessários para ensinar na escola básica, permanecendo a ideia de que tais saberes seriam produzidos exclusivamente na academia e levados para a prática por quem fora bem formado. Nesse sentido, o PCK é tido, por esses autores, como um ponto de inflexão para as visões referentes ao conhecimento matemático do professor e ao lugar da matemática em sua formação inicial, a partir do qual, os autores apresentam duas grandes vertentes para as visões a esse respeito. A primeira vertente está associada ao entendimento do conhecimento matemático relevante para a docência em termos das especificidades dadas pela prática docente escolar e não pela disciplina acadêmica em si. Em contrapartida, a outra vertente alicerça a formação docente a partir do conteúdo, referenciado no conhecimento acadêmico.

Temos, portanto, duas reflexões a serem feitas. A primeira sobre a falta de integração entre a formação teórica dos professores e o exercício do ofício no terreno da escola (GATTI; NUNES, 2009). E a outra sobre o lugar da matemática nas licenciaturas (MOREIRA; FERREIRA, 2013), que nos leva a problematizar o saber de conteúdo acadêmico como o único saber de referência para a docência. Reverberando as discussões em âmbito internacional, ambas as reflexões voltam nossas atenções para o próprio lugar das licenciaturas na universidade, e consequentemente, sobre o tipo de formação que está sendo oferecida aos futuros professores. Como observamos em Giraldo *et al.* (2018), consideramos ser preciso superar uma perspectiva negativa, segundo a qual se pensa a formação de professores a partir daquilo que o professor *não* precisa saber, e promover movimentos em direção a uma perspectiva afirmativa. Queremos dizer que

> A formação de professores não pode ser pensada a partir das ciências e seus diversos campos disciplinares, como adendo destas áreas, mas a partir da função social própria à escolarização [...].
> […] A formação de professores profissionais para a educação básica tem que partir de seu campo de prática e agregar a este os conhecimentos necessários selecionados como valorosos, em seus fundamentos e com as mediações didáticas necessárias. (GATTI, 2010, p. 1375).

Corroboramos, portanto, com a defesa de Nóvoa por "**uma formação de professores construída dentro da profissão**, isto é, baseada numa combinação complexa de contributos científicos, pedagógicos e técnicos, mas que tem como âncora os próprios professores, sobretudo os professores mais experientes e reconhecidos." (2009, p. 44-45, grifo nosso). Ou seja, advogamos uma formação de professores que pense seu projeto político pedagógico a partir das demandas da profissão docente.

A escola como espaço de formação profissional e a superação da dicotomia teoria *vs* prática

O reconhecimento de saberes docentes emergentes da prática profissional, a legitimação desses como componentes do corpo de saberes necessários à formação docente (assim como saberes disciplinares e das ciências da educação produzidos na academia) e a defesa de uma formação construída dentro da profissão provocam uma reflexão sobre o *locus* da formação do professor. Isto é, o reconhecimento e a legitimação de saberes profissionais docentes produzidos na escola não são compatíveis com um entendimento de escola como lugar de aplicação (ou de depósito) de saberes produzidos na academia. Ao contrário, a escola passa a ser vista como espaço de formação profissional em si e os professores que nela trabalham ganham protagonismo. Nesse sentido, nos alinhamos com Nóvoa (2009), na defesa de uma formação cujo *locus* seja situado na construção de parcerias entre escola e universidade. Contudo,

> Em muitos discursos sobre a formação de professores há uma oposição entre as universidades e as escolas. Às universidades atribui-se uma capacidade de conhecimento cultural e científico, intelectual, de proximidade com a pesquisa e com o pensamento crítico. Mas esquecemo-nos de que, por vezes, é apenas um conhecimento vazio, sem capacidade de interrogação e de criação. Às escolas atribui-se uma ligação à prática, às coisas concretas da profissão, a tudo aquilo que, "verdadeiramente", nos faria professores. Mas esquecemo-nos de que, tantas vezes, esta prática é rotineira, medíocre, sem capacidade de inovação e, muito menos, de formação dos novos profissionais.
> Para escapar a esta oposição inútil e improdutiva, precisamos de encontrar um terceiro termo, a *profissão*, e perceber que é nele que está o potencial formador, desde que haja uma relação fecunda entre os três vértices do triângulo. É neste entrelaçamento que ganha sentido uma *formação profissional universitária*, no sentido mais amplo do termo, a formação para uma profissão. (NÓVOA; VIEIRA, 2017, p. 26, itálicos no original).

A sugestão de Nóvoa e Vieira de formação para uma profissão está alinhada à noção de profissionalidade proposta por Gatti (2010), qual seja a reunião da racionalização dos conhecimentos e das habilidades necessárias ao exercício profissional. Para a autora, a profissionalização pressupõe um espaço autônomo, reconhecido pela sociedade para desenvolver a profissionalidade.

Como sugere o trabalho de Tardif, Lessard e Lahaye (1991), se a atividade docente é pensada exclusivamente através das lentes epistemológicas das áreas acadêmicas associadas às disciplinas escolares (matemática, por exemplo), o trabalho do professor pode se resumir à transmissão de um conhecimento de cuja produção ele não participa – implicando em uma redução da própria docência a uma atividade técnica. A afirmação da docência como uma profissão, defendida por autores como Maurice Tardif e António Nóvoa, que se sustenta no reconhecimento de saberes profissionais produzidos a partir da prática profissional, desconstrói a visão de professores como meros transmissores de conhecimentos prontos, conferindo-lhes uma posição de produtores de conhecimento.

Por outro lado, como Nóvoa e Vieira (2017) chamam atenção, o foco na prática profissional também pode implicar em uma redução do papel dos professores: os professores novatos estariam apenas reproduzindo o que os mais experientes já fazem – o que também implicaria em uma redução da docência a uma atividade técnica. Nesse sentido, como Nóvoa (2009, p. 33) afirma, as práticas devem ser "investidas do ponto de vista teórico e metodológico, dando origem à construção de um conhecimento profissional docente".

Essas reflexões têm paralelos com o trabalho de Cochran-Smith e Lytle (e. g. 1999; 2009), que defendem que a prática não pode ser dissociada da teoria, pois tal dicotomia não é capaz de expressar toda complexidade e especificidade dos saberes docentes. As autoras distinguem três concepções de aprendizagem docente, que identificam como: *conhecimento-para-prática*; *conhecimento-na-prática*; e *conhecimento-da-prática*. A partir dessa distinção, discutem relações possíveis ou necessárias entre conhecimento e prática e suas repercussões em modelos de formação docente. A discussão proposta por essas pesquisadoras é pautada no argumento de que há relações, nem sempre explícitas, entre aprendizagem e desenvolvimento professional docente – bem como entre mudanças escolares e curriculares e avaliações dos professores. As autoras procuram entender como se dá a aprendizagem docente, bem como o papel das instituições formadoras (universidades e outras agências educacionais), discutindo relações entre conhecimento e prática.

Relações entre conhecimento e prática e suas implicações para a formação docente

De acordo com as autoras, a concepção de conhecimento-*para*-prática se fundamenta na premissa de que "saber mais" implica em práticas mais eficazes. Esse "saber mais" diria respeito a um conhecimento profundo tanto da sua área de conhecimento (matemática, por exemplo) quanto de estratégias de ensino efetivas com vistas à aprendizagem dos estudantes. Contudo, o que é mais representativo deste conhecimento é que para "melhorar o ensino, os professores precisam implementar, traduzir ou colocar em prática o conhecimento que adquirem de especialistas **fora** da sala de aula." (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999, p. 255, tradução e grifo nossos)[3]. Em outras palavras, "pesquisadores baseados em universidades geram o que é comumente chamado de conhecimento e teoria formais (incluindo codificações da chamada sabedoria da prática) *para* os professores usarem para melhorar a prática." (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999, p. 250, tradução nossa, ênfase no original)[4]. Assim, a concepção de conhecimento-*para*-prática tem o conhecimento acadêmico como saber referência para a docência e o papel do professor se reduz a transmitir esse conhecimento. Essa concepção apresenta, portanto, paralelos com a visão, denunciada por Tardif, Lessard e Lahaye (1991), que reduz o trabalho de professores à transmissão de um conhecimento de cuja produção eles não têm interferência, desqualificando a docência como profissão.

---

[3] No original, "To improve teaching, then, teachers need to implement, translate, or otherwise put into practice the knowledge they acquire from experts outside the classroom."

[4] No original, "Here it is assumed that university-based researchers generate what is commonly referred to as formal knowledge and theory (including codifications of the so-called wisdom of practice) *for* teachers to use in order to improve practice."

Já na concepção de conhecimento-*na*-prática, o conhecimento necessário para ensinar bem é adquirido por meio da experiência, e também pela reflexão sobre a experiência. Os professores experientes ganham protagonismo como detentores do conhecimento produzido na prática. Implícita a essa concepção está a "suposição básica de que o ensino é, em grande parte, um ofício incerto e espontâneo situado e construído em resposta às particularidades da vida cotidiana nas escolas e nas salas de aula" (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999, p. 262, tradução nossa)[5]. Assim,

> supõe-se que os professores aprendam quando têm oportunidades de examinar o conhecimento incorporado *no* trabalho de professores experientes e/ou aprofundar seu próprio conhecimento e expertise como criadores de julgamentos sábios e projetistas de ricas interações de aprendizado na sala de aula. (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999, p. 250, tradução nossa, ênfase no original)[6].

Porém, como chamam atenção Fiorentini e Creci (2016),

> esse conhecimento prático que produzem os professores, por estar situado em contextos locais e isolados, pode, com o tempo, tornar-se rotineiro, naturalizado e reprodutivo de relações e práticas, impedindo que o professor e sua docência possam se desenvolver e se transformar continuamente. (FIORENTINI; CRECCI, 2016, p. 511).

Desta forma, na concepção de conhecimento-*na*-prática, os professores novatos podem apenas reproduzir tacitamente o que os mais experientes fazem. O conhecimento pode se tornar, então, naturalizado, repetitivo e reprodutivo, impedindo que o professor e suas práticas possam se desenvolver e se transformar continuamente. As práticas docentes podem, com o tempo, se cristalizar em conjuntos de "métodos" ou "técnicas" para ensinar cada tópico curricular, que levam em conta apenas os próprios tópicos e se tornam progressivamente menos sensíveis às particularidades e diferenças dos diferentes contextos escolares. Assim, como as preocupações destacadas por Nóvoa e Vieira (2017, p. 26), nessa concepção, a prática pode ser tornar rotineira e o conhecimento, "vazio, sem capacidade de interrogação e de criação".

Com vistas a promover a transformação contínua da prática docente, Cochran-Smith e Lytle (1999) chamam atenção para a necessidade de problematizar tanto o conhecimento produzido na academia quanto aquele produzido na prática docente pelos próprios professores. A partir dessa perspectiva, as autoras destacam a concepção que chamam de conhecimento-*da*-

---

[5] No original, "A basic assumption here is that teaching is, to a great extent, an uncertain and spontaneous craft situated and constructed in response to the particularities of everyday life in schools and classrooms."

[6] No original, "Here it is assumed that teachers learn when they have opportunities to probe the knowledge embedded *in* the work of expert teachers and/or to deepen their own knowledge and expertise as makers of wise judgments and designers of rich learning interactions in the classroom."

prática. Nessa concepção, o conhecimento não é visto como dissociado entre *teórico* e *prático*. Tal perspectiva de indissociabilidade entre teoria e prática dialoga com o trabalho de António Nóvoa, que costuma ilustrar como esse entrelaçamento pode se dar baseando-se na formação médica, a partir de estudos de casos. Para Nóvoa (2009, p. 34), esses casos "são 'práticos', mas só podem ser resolvidos através de uma análise que, partindo deles, mobiliza conhecimentos teóricos." Assim, o professor demanda um saber que vai além da aplicação da teoria na prática, ou da justaposição entre teoria e prática.

Na concepção de conhecimento-*da*-prática, o conhecimento que os professores desenvolvem ao longo da vida profissional tem não só um papel central (como também é o caso da concepção de conhecimento-*na*-prática), mas também um papel crítico. Nesse sentido, as autoras advogam uma *intencionalidade* da reflexão por professores em relação tanto à própria prática quanto aos conhecimentos e teorias produzidos por outros – por exemplo, na academia. Para isso, é importante observar que

> Também não é assumido aqui que, usando aproximadamente as mesmas estratégias dos pesquisadores universitários, os pesquisadores de escolas acrescentem à base de conhecimento um novo corpo de generalizações com base em suas perspectivas de dentro das escolas e das salas de aula. [...] Em vez disso, [a concepção de conhecimento-*da*-prática] baseia-se em ideias fundamentalmente diferentes: a prática é mais do que prática, a investigação é mais que uma representação artística do conhecimento prático dos professores e **entender as necessidades de conhecimento do ensino significa transcender a ideia de que a distinção formal-prática captura o universo dos tipos de conhecimento.** (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999, p. 273-274, tradução e grifo nossos).[7]

Na concepção de conhecimento-*da*-prática, a coletividade ganha centralidade, pois, para as autoras, só é possível que professores problematizem suas próprias práticas, em uma perspectiva profissional, se essas são situadas em uma cultura profissional docente. Assim, os professores produzem o conhecimento no *locus* da prática, trabalhando em *comunidades de investigação*, em que teorizam a partir da prática, e praticam essas teorias. Nessas comunidades, professores novatos e experientes, e possivelmente também atores cujas atuações se situam fora da escola (por exemplo, pesquisadores da universidade), trabalham conjuntamente, flexibilizando hierarquias entre os mais e menos experientes. Para Cochran-Smith e Lytle, o

[7] No original, "Nor is it assumed here that using roughly the same strategies as university-based researchers, school-based teacher researchers add to the knowledge base a new body of generalizations based on their perspectives inside schools and classrooms. [...] Rather, it is based on fundamentally different ideas: that practice is more than practical, that inquiry is more than an artful rendering of teachers' practical knowledge, and that understanding the knowledge needs of teaching means transcending the idea that the formal-practical distinction captures the universe of knowledge types."

conhecimento se dá na coletividade ao se tentar teorizar e construir o trabalho docente escolar, conectando-o com questões sociais, culturais e políticas mais gerais:

> Quando o trabalho nas comunidades é baseado no conhecimento-da-prática [...] o objetivo não é fazer pesquisa ou produzir "descobertas", como costuma ser o caso de pesquisadores universitários. Em vez disso, o objetivo é entender, articular e, finalmente, alterar as práticas e as relações sociais, a fim de trazer mudanças fundamentais nas salas de aula, escolas, distritos, programas e organizações profissionais. (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999, p. 279, tradução nossa).[8]

Nesse sentido, o conhecimento docente é entendido como mais do que um instrumento a ser usado nas aulas, podendo também moldar as estruturas conceituais e interpretativas desenvolvidas pelos professores ao buscar conectar as ações da prática, as implicações para outras questões sociais e políticas e o trabalho de outros atores – sejam professores, pesquisadores ou a comunidade.

Embora Cochran-Smith e Lytle (1999) se posicionem explicitamente na defesa da concepção de conhecimento-*da*-prática, elas destacam que não há um modelo de formação de professores diretamente relacionado com cada uma das três concepções –as fronteiras que as dividem podem ser tênues.

A investigação como postura e o papel dos coletivos docentes

Cochran-Smith e Lytle (2009) introduzem a *investigação como postura*, definida como ter a prática como objeto intencional de investigação, como um elemento central da concepção de conhecimento-*da*-prática. As autoras afirmam que esse construto "permite um entendimento mais próximo das relações entre conhecimento e prática, bem como como a investigação produz conhecimento, como a investigação se relaciona com a prática e o que os professores aprendem com a investigação nas comunidades" (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999, p. 250, tradução nossa)[9]. As autoras indicam que essa deve ser uma postura coletiva e não individual, desenvolvida continuamente ao longo de toda a prática profissional, não se restringindo a nenhum espaço de educação particular, ou tampouco a qualquer sujeito específico cuja atuação tenha alguma relação com os processos educacionais de ensino e aprendizagem.

---

[8] No original, "When work in communities is based on knowledge-o/-practice—whether that work is referred to as teacher research, action research, or practitioner inquiry—the goal is not to do research or to produce "find-ings," as is often the case for university researchers. Rather, the goal is understanding, articulating, and ulti-mately altering practice and social relationships in order to bring about fundamental change in classrooms, schools, districts, programs, and professional organizations."

[9] No original, "permits closer understanding of knowledge-practice relationships as well as how inquiry produces knowledge, how inquiry relates to practice, and what teachers learn from inquiry within communities."

A investigação como postura deve ser um "hábito mental crítico que sustenta o trabalho profissional em todos os seus aspectos" (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 2009, p. 121, tradução nossa)[10], não se reduzindo nem a um projeto de pesquisa imposto por outros, nem a uma sequência de métodos e passos a serem seguidos pelos professores. Também não se deve confundir a investigação como postura com "ser reflexivo ou com desenvolver um ponto de vista intelectual aberto e questionador sobre a prática" (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 2009, p. 121, tradução nossa)[11]. As autoras chamam atenção ainda para o fato de a investigação como postura não ser simplesmente instrumental, devendo também considerar aspectos sociais e políticos, engajando-se, individual e coletivamente, na mudança educacional e social.

> A investigação como postura não é nem uma teoria da ação imposta de cima para baixo, nem de baixo para cima, mas uma teoria orgânica e democrática que posiciona os praticantes da educação[12], o seu conhecimento e suas interações com os estudantes e outros interessados no centro das transformações educacionais. (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 2009, p. 123-124, tradução nossa)[13].

Nesse sentido, entendemos que a investigação como postura pode ser associada à educação problematizadora, defendida por Freire (2016), a qual nós nos afiliamos.

As autoras reconhecem a capacidade intelectual coletiva dos profissionais que praticam a educação e colocam tal conhecimento coletivo no centro da transformação educacional. Consideramos que o trabalho em comunidades orientadas pela investigação como postura pode atingir a perspectiva para coletivos docentes que Giraldo e Fernandes (2019) denominam *político-cultural*.

> Coletivos docentes podem não ultrapassar uma perspectiva essencialmente *cooperativa*, em que o foco permanece em como a vivência no grupo contribui para o desenvolvimento de saberes docentes de cada participante individualmente. Coletivos docentes podem avançar para uma perspectiva *colaborativa*, quando o foco abrange as formas como estes se constituem como coletivos e a construção de saberes e de posturas didáticas compartilhadas por seus participantes. O trabalho em coletivos docentes pode ainda atingir uma perspectiva *político-cultural*, em que cada participante passa a entender a si próprio e suas ações, escolhas e posturas, como sujeito e como profissional, em contextos mais amplos de culturas profissionais

[10] No original, "Neither of these conveys the idea of inquiry as a critical habit of mind that informs professional works in all aspects."

[11] No original, "On the other hand, our use of the language of 'stance' and 'perspective' should not be equated simply with being reflective or with developing an open and questioning intellectual viewpoint about practice"

[12] Optamos por usar "praticantes da educação" como tradução para a expressão "practitioner" por entendermos que a expressão não se restringe a professores em exercício, podendo abarcar outros atores que trabalham no ambiente escolar.

[13] No original, "inquiry as stance is neither a top-down nor a bottom-up theory of action, but an organic and democratic one that positions practitioners' knowledge, practitioners, and their interactions with students and other stakeholders at the center of educational transformation."

> docentes, em uma dimensão política que situa essas ações, escolhas e posturas nas funções sociais de seu trabalho. (GIRALDO; FERNANDES, 2019, p. 481)

Em suma, um aspecto fundamental preconizado na concepção de conhecimento-*da*-prática de Cochran-Smith e Lytle é o trabalho em comunidades de investigação, que envolvem professores e outros atores, particularmente pesquisadores da universidade, mas que são referenciadas na prática profissional docente, ultrapassando os fazeres interiores à sala de aula e atingindo uma dimensão social e política ampla de transformação educacional. Essa perspectiva está reverberada na parceria entre escola e universidade preconizada por Nóvoa (2009) como *locus* da formação docente.

Formação no *locus* da prática profissional: para além da formação inicial

Dentre os deslocamentos apontados por Nóvoa (2017) como necessários para uma formação de professores no paradigma da profissão está a continuidade da formação. Para este autor a formação inicial, a indução profissional[14] e a formação continuada devem estar entrelaçadas. Para tanto, consideramos que os professores, sobretudo os mais experientes, ganham protagonismo, assumindo uma posição de autores da própria formação, propiciado pelas comunidades de investigação preconizadas por Cochran-Smith e Lytle (*investigação como postura*). Com isso, não sugerimos reforçar dicotomias entre universidade e escola. Ao contrário, de acordo com a concepção de conhecimento-*da*-prática indicada por essas autoras, entendemos que a prática docente, intencionalmente problematizada, produz sua própria teoria – para o que a parceria entre universidade e escola mostra-se essencial. Nesse sentido, corroboramos com a defesa de Nóvoa de uma formação docente construída dentro da profissão.

Além disso, a parceria entre escola e universidade defendida por Nóvoa justifica por que a discussão sobre a formação inicial não se encerra nela mesma. Para nós, a formação de professores deve se apoiar mais fortemente na concepção de conhecimento-*da*-prática, a partir da colaboração entre universidade e escola, entre professores universitários e professores da escola, entre pesquisadores e profissionais; do entrelaçamento entre teoria e prática, entre formação inicial, a indução profissional e a formação continuada.

Por sua dimensão coletiva, a investigação como postura congrega diferentes atores: professores, pesquisadores e estudantes, por exemplo. Além disso, por ser um hábito mental crítico e uma capacidade intelectual coletiva desenvolvidos ao longo de toda a atuação

[14] Ao utilizar a expressão "indução profissional", Nóvoa se refere aos primeiros anos de profissão após a formação inicial.

profissional, articula os diversos atores em diferentes momentos da sua atuação e formação. Os aspectos destacados anteriormente sobre o lugar da matemática nas licenciaturas em matemática – especificidade dos saberes docentes – e o lugar das licenciaturas nas universidades – docência como profissão – não se limitam à formação inicial: não cabe mais a professores experientes em formação continuada (como, por exemplo, nos mestrados profissionais) uma postura passiva, em que se recebe o conhecimento depositado pelos experts da academia. Na verdade, esses professores podem contribuir para a formação trazendo as suas experiências práticas para serem discutidas e também problematizadas. Em comunidades que preconizam a investigação como postura, as hierarquias são flexibilizadas e o conhecimento é construído coletivamente a partir da participação dos diversos atores.

À luz das reflexões teóricas que discutimos até aqui, reforçamos a nossa defesa por uma formação de professores construída dentro da profissão (NÓVOA, 2009), em coletivos docentes orientados pela educação problematizadora (FREIRE, 2016) e pela investigação como postura (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 2009). Nesses coletivos, os professores se reconhecem como protagonistas da própria formação, construindo seus saberes (ou participando do discurso como discutimos no Capítulo 3.), convertendo-os em ações efetivas de transformação social. Na seção a seguir, discutimos a construção de saberes especificamente em matemática.

2.3. Saberes Docente em Matemática

Como Davis e seus colaboradores observam (e.g. DAVIS; SIMMT, 2006; RENERT; DAVIS, 2010), não há evidências de correlações diretas entre a quantidade de horas cursadas por professores durante a formação inicial e o desempenho de seus estudantes. Mesmo assim, grande parte dos currículos dos cursos de licenciatura em matemática no Brasil nas últimas décadas parecem ter sido estruturados com base na suposição tácita de quanto mais disciplinas de matemática pura o licenciando cursar, mais bem formado será o professor. Nesse sentido, Moreira e Ferreira (2013) observam que, embora se defenda uma formação sólida em matemática para o futuro professor, na maioria das vezes, não se explicita o que efetivamente constituiria essa tal solidez ou se discute o impacto efetivo de tal formação sólida na prática profissional do professor.

Pesquisas recentes sobre os saberes matemáticos necessários para o ensino nos indicam uma diversidade de saberes que devem ser considerados na formação, na medida em que são mobilizados e produzidos a partir da prática do professor. Conhecimento pedagógico de conteúdo, conhecimento curricular e conhecimento específico do conteúdo, propostos por Shulman (1986); o quadro teórico do conhecimento matemático para o ensino (MKT) de

Deborah Ball e colaboradores e seus seis subdomínios (e.g., BALL; THAMES; PHELPS, 2008); o conhecimento especializado de professores de matemática (MTKS) (e.g, CARILLO et al, 2013, FLORES-MEDRANO et al, 2016); o modelo proposto por Bednarz e Proulx (2009); a reinterpretação do quadro teórico do MKT apresentada por Fernánez e Figueiras (2014); a matemática para o ensino (M_4T) de Davis e Renert (e.g. DAVIS; RENERT, 2009; 2014); entre outros construtos teóricos são modos de reconhecer a especificidade do saber matemático necessário para o ensino.

Ainda que reconheçamos que aspectos curriculares e pedagógicos também devam ser considerados na formação, neste trabalho nos interessa a especificidade dos saberes de matemática para ensinar a disciplina na escola básica. Muitos trabalhos abordam essa temática e buscam detalhar os modelos propostos, por exemplo, pelos pesquisadores supracitados, seja criticando, seja reelaborando. Neste trabalho, entretanto, não pretendemos fazer isso, nem tampouco apresentar um novo modelo. Para nós, esses trabalhos são importantes especialmente por sinalizarem que o professor tem um saber que lhe é próprio e que, portanto, ao discutir a formação de professores, devemos olhar para a matemática sob um ponto de vista específico.

Queremos dizer, por exemplo, que, em formação de professores, ao fazer a discussão matemática de que "$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado completo" consideramos importante que a discussão não se encerre no significado matemático formal desse enunciado. Na verdade, queremos reforçar que a simples enunciação dessa frase não é suficiente para colocar as propriedades dos números reais em uma perspectiva problematizada, pois seus sentidos e suas articulações com o ensino não são trazidos à tona. Assim, a discussão deve levantar aspectos dos números reais que são relevantes para ensinar na educação básica. Para o professor que ensina matemática na educação básica, consideramos fundamental, por exemplo, o entendimento da densidade e da completude dos números na reta, pois a primeira é uma característica comum de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, enquanto que a segunda diferencia $\mathbb{R}$ em relação a $\mathbb{Q}$ e a outros corpos ordenados intermediários. Um entendimento conceitual e significativo da completude de $\mathbb{R}$ é fundamental também para que o professor reconheça apresentações circulares[15] dos números em livros didáticos e que entenda os ganhos que a apresentação dos números como medida tem em relação à sua apresentação (restrita) como contagem.

[15] Entendemos como apresentações circulares aquelas que, durante a apresentação dos números irracionais os identifica como os números decimais que não podem ser escritos na forma fracionária, e que apresentam $\mathbb{R}$ como a união dos números racionais e irracionais.

Outro exemplo diz respeito à diferenciação entre variável, incógnita e coeficiente. Para o professor de matemática, é fundamental entender como as abordagens dessas noções, na introdução à simbologia algébrica, podem ter consequências na aprendizagem dos conceitos de equação e de função. (Abordamos essa questão na última etapa do estudo de campo – Rodada 3 – mais sobre isso pode ser consultado em Biza, Kayali, Moustapha-Corrêa, Nardi e Thoma (no prelo)).

Nesse sentido, entendemos que as discussões sobre os saberes docentes na literatura da pesquisa em Educação Matemática são importantes não pelas taxonomias que propõem ou por estabelecer fronteiras bem definidas entre categorias de conhecimento, mas, sobretudo, pela diversidade e pela especificidade dos saberes matemáticos necessários, produzidos e mobilizados na profissão docente que evidenciam. Além disso, como destaca o trabalho de Tardif e seus colaboradores (e.g. TARDIF; LESSARD; LAHAYE, 1991), esses saberes constituem uma epistemologia própria, distinta e não subordinada à matemática acadêmica, mas que nem por isso perde o caráter matemático. Ou seja, como observam Davis e Simmt (2006), o conhecimento de matemática para o ensino não é uma versão diluída ou diminuição da matemática formal.

Brent Davis e seus colaboradores aprofundam a discussão sobre conhecimento matemático necessário para o ensino, propondo a noção de *matemática para o ensino* (M_4T) (e.g. DAVIS; SIMMT, 2006), pautados em duas críticas sobre a forma como as pesquisas sobre saberes docentes em Educação Matemática vinham sendo conduzidas. A primeira diz respeito ao estabelecimento de categorias sobre o que professor deve ou não saber. Para os autores, saberes docentes são dinâmicos e emergentes, produzidos a partir da prática, não podendo, portanto, ser abarcados por listas prescritivas de categorias de conhecimentos estabelecidas *a priori*. O estabelecimento de tais listas corresponderia a entender os saberes do professor por meio um prisma de *deficiência*, isto é, como se a questão fosse determinar *o que falta* a um professor para atingir determinado conjunto de conhecimentos pré-fixados. Identificamos essa posição com nossa defesa da passagem de uma perspectiva negativa para uma perspectiva afirmativa para a formação de professores (GIRALDO; QUINTANEIRO; MOUSTAPHA; MATOS *et al.*, 2018). A segunda crítica se refere a um excesso de foco em aspectos individuais em detrimento das relações entre o indivíduo e o coletivo, como se o objetivo da pesquisa em formação de professores estivesse na determinação do que um professor individualmente sabe (ou do que lhe “falta” saber). Para esse autores (e.g. DAVIS; RENERT, 2009), professores não são agentes periféricos cuja função é transmitir passivamente uma matemática. Ao contrário, são participantes centrais na produção de possibilidades matemáticas, que dão forma e substância a não apenas à matemática formal, mas à diversidade de práticas, perspectivas e aplicações culturalmente situadas. Assim, esses autores defendem um foco nos processos de produção em coletivos docentes a partir de experiências da própria prática profissional – o que identificamos com a posição de Nóvoa (2009) de que formar um professor é introduzir alguém em uma cultura profissional docente. Nesse contexto, Davis e Simmt dão luz ao papel de professores mais experientes, na medida em que pautam seu argumento

> Na premissa de que professores de matemática mais experientes têm conhecimento matemático suficiente para ensinar bem o conteúdo, embora muito desse *know how* nunca tenha sido aspecto explícito de sua educação – e, de fato, pode não ser popularmente reconhecido como parte do corpo disciplinar formal de conhecimento. (DAVIS; SIMMT, 2006, p. 298, tradução nossa)[16].

À luz das discussões nesta seção e nas anteriores, consideramos decisivo deixar de lado a perspectiva de deficiência, em que se aponta aquilo que falta ao professor saber. Em contrapartida, numa perspectiva afirmativa, busca-se reconhecer e legitimar a matemática produzida e mobilizada a partir da prática docente, em uma dimensão que ultrapasse o individual e se situe no contexto de uma cultura profissional docente. Por considerar esses aspectos como cruciais, sustentamos nosso alinhamento teórico sobre saberes docentes nos trabalhos de Brent Davis e colaboradores (e.g. DAVIS; RENERT, 2009; 2014; DAVIS; SIMMT, 2006; RENERT; DAVIS, 2010), por trazerem uma perspectiva mais holística de tais saberes (no sentido que discutiremos a seguir). Nas próximas seções, discutimos os aspectos do trabalho desses autores que consideramos relevantes para esta tese.

Conhecimento estabelecido e conhecimento dinâmico

Davis e Simmt (2006) discutem quatro aspectos entrelaçados da matemática para o ensino, a saber: os objetos matemáticos; as estruturas curriculares; a coletividade da sala de aula; o entendimento subjetivo (Figura 1). Os autores defendem a integração de questões que, em geral, são tratadas separadamente e que tal distinção pode reduzir seu entendimento. Eles se referem especificamente às distinções entre *conhecimento estabelecido* e *conhecimento dinâmico*, e entre coletividade e individualidade. Para entender por que tal distinção pode reduzir o

[16] No original, "This work is anchored in the assumption that most experienced mathematics teachers have sufficient mathematical knowledge to teach the subject well, although much of this know-how may never have been an explicit aspect of their educations – and, indeed, may not be popularly recognized as part of the formal disciplinary body of knowledge."

entendimento, é preciso entender a visão desses autores sobre os conhecimentos docentes. Eles ancoram sua abordagem na noção de *ciência da complexidade*.

> A ciência da complexidade considera vários níveis dinâmicos, co-implicados e integrados [...] ao invés de fenômenos isolados. Este ponto é fundamental para entender por que recusamos uma distinção rígida entre o coletivo e o individual em nossa pesquisa. Como tentamos ilustrar na Figura 1 o entendimento individual deve ser visto como envolvido e se desenrolando do fenômeno mais amplo da dinâmica coletiva […]. Em termos de projeto de escolaridade formal, esse tipo de coletividade é similarmente embutida nas estruturas curriculares, que estão aninhadas na matemática formal.(DAVIS; SIMMT, 2006, p. 296, tradução nossa)[17].

Figura 1 – O entendimento entrelaçado dos quatro aspectos da matemática para o ensino.

Fonte – Davis e Simmt (2006, p. 296).

Como ilustra a Figura 1, as categorias mais *estáveis* correspondem à matemática estabelecida cientificamente (os objetos matemáticos) e às estruturas curriculares, enquanto as que as categorias mais *dinâmicas* compreendem à coletividade da sala de aula e o entendimento subjetivo. Essa figura ilustra ainda que esses quatro aspectos da matemática para o ensino estão

[17] No original, "Complexity science prompts attentions toward several dynamic, co-implicated, and integrated levels – including the neurological, the experiential, the contextual/material, the social, the symbolic, the cultural, and the ecological – rather than isolated phenomena. This point is critical to understanding why we refuse a rigid distinction between collective and individual in our research. As we attempt to illustrate in Figure 1, individual understanding might be seen as enfolded in and unfolding from the broader phenomenon of collective dynamics through which, for example, standards of acceptable argument and topics of shared interest might be defined. In terms of the project of formal schooling, this sort of collectivity is similarly embedded in curriculum structures, which themselves are nested in formal mathematics."

aninhados, assim, envolvem-se e se desenrolam entre si. Segundo a visão holística de Davis e seus colaboradores, as categorias estáveis e dinâmicas devem ser consideradas mutuamente na seara da matemática para o ensino.

O reconhecimento de dualidades como tensões produtivas para o conhecimento matemático para o ensino está no cerne da visão holística de Brent Davis e seus colaboradores. Assim, identificamos na perspectiva dos autores uma marcada posição epistemológica de *não dicotomização*. Em lugar de considerar separadamente as categorias estáveis e dinâmicas, os autores as apresentam como aspectos indissociáveis, interconectando os quatro aspectos que caracterizam a matemática para o ensino – os objetos matemáticos, as estruturas curriculares, a coletividade da sala de aula e o entendimento subjetivo. A relação entre tais categorias é o mais importante, pois obedecem a dinâmicas similares: "*para professores*, o conhecimento da matemática estabelecida é inseparável do conhecimento de como a matemática é estabelecia" (DAVIS; SIMMT, 2006, p. 297, ênfase no original, tradução nossa)[18]. Assim, os autores defendem que o conhecimento do professor deve ser plural e holístico, abarcando, entre outros aspectos, conhecimentos históricos sobre os conceitos matemáticos, o modo como os diferentes tópicos se relacionam, além de diversas formas de entender, representar e conectar os conteúdos, seja a partir da história, seja a partir da sala de aula.

Nesse sentido, esses autores enfatizam que a chave para o entendimento da matemática para o ensino não está na distinção (ou na dicotomização) entre processo e produto. Para eles, o conhecimento matemático para o ensino não se reduz apenas ao produto, isto é, à matemática estabelecida (matemática tal como a conhecemos hoje), mas precisa abarcar também seus processos de produção. Esses aspectos são, portanto, indissociáveis.

Dimensões subjetiva, objetiva, intersubjetiva e interobjetiva

Considerando a evolução da pesquisa com foco no conhecimento matemático para o ensino, Renert e Davis (2010) destacam as perguntas: *Que matemática os professores precisam saber para ensinar matemática?*; *Que matemática especializada os professores precisam saber para ensinar matemática?*; e *Que conhecimento matemático está envolvido no trabalho de ensinar matemática?* Davis e colaboradores indicam quatro respostas chaves.

---

[18] No original, "we argue that, for teachers, knowledge of established mathematics is inseparable from knowledge of how mathematics is established."

1. professores precisam saber uma matemática mais avançada do que a matemática que ensinam;
2. professores precisam saber uma matemática especializada (i.e., PCK [referindo-se ao conhecimento pedagógico de conteúdo de Shulman]);
3. o conhecimento matemático de professores é promulgado no seu trabalho cotidiano e deve ser descompactado; e
4. o conhecimento matemático de professores é corporificado em sistemas múltiplos, aninhados, co-implicados de matemática cultural, educação institucionalizada e aprendizado pessoal. (RENERT; DAVIS, 2010, p. 195, tradução nossa)[19].

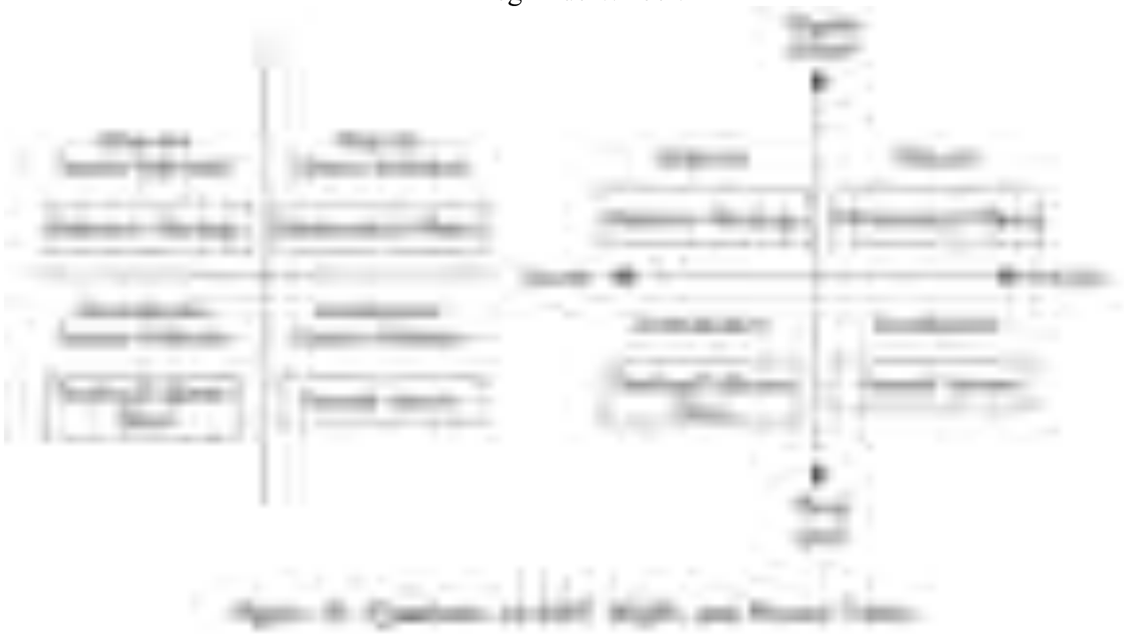
De acordo Renert e Davis (2010), a partir do exame de tais respostas, podemos interpretar de forma mais abrangente o conhecimento matemático, de modo que o conhecimento estático passa a ser visto como dinâmico; o conhecimento platônico, como conhecimento corporificado; e o conhecimento pré-estabelecido, como emergente. Perceber e reconhecer tais transformações pode fazer com que, como professores, entendamos que o conhecimento matemático, entendido como ferramenta de trabalho, está em constante modificação. Ancorados nas lentes da *filosofia integral,* além da *ciência da complexidade,* Renert e Davis (2010) enfocam em quatro dimensões irredutíveis do ser: a *subjetiva*, a *objetiva*, a *intersubjetiva*, e a *interobjetiva*. Esse aspecto configura uma das características da perspectiva holística da abordagem de Brent Davis e colaboradores, segundo a qual o conhecimento matemático é considerado sob dimensões diferentes e complementares, que contemplam o interior e o exterior de experiências individuais e coletivas.

> A dimensão objetiva (exterior-singular) lida principalmente com os objetos da matemática. A dimensão subjetiva (interior-singular) lida com significados pessoais, emoções e atitudes associadas ao ensino da matemática. A dimensão intersubjetiva (interior-plural) lida com significados e valores compartilhados. E a dimensão interobjetiva (exterior-plural) lida com sistemas externos que envolvem e estão envolvidos na matemática e no ensino. (RENERT; DAVIS, 2010, p. 199-200, tradução nossa)[20].

[19] No original, "1. teachers need to know more advanced math than the math they are teaching; 2. teachers need to know specialized mathematics (i.e., PCK); 3. teachers' mathematical knowledge is enacted in their daily work and must be unpacked; and 4. teachers' mathematical knowledge is embodied in multiple, nested, co-implicated systems of cultural mathematics, institutionalized education, and personal learning."

[20] No original, "The objective (exterior-singular) dimension deals primarily with the objects of mathematics. The subjective (interior-singular) dimension deals with personal meanings, emotions, and attitudes associated with the teaching of mathematics. The intersubjective (interior-plural) dimension deals with shared meanings and values. And the interobjective (exterior-plural) dimension deals with external systems that enfold and are enfolded in mathematics and teaching."

Figura 2 – Quadrantes da matemática para o ensino, segundo a releitura de Renert e Davis da teoria integral de Wilber.



Fonte – Renert e Davis (2010, p. 197).

Na Figura 2, os quadrantes associados às quatro dimensões representam as estruturas complexas, em evolução, e se configuram a partir de tensões dinâmicas entre o singular e o plural, entre o interior e exterior. Não visamos, nesse trabalho, ao exame meticuloso de cada uma das dimensões quando se pensa na matemática para o ensino. Contudo, como os autores chamam atenção, estar a par das quatro dimensões e, sempre que possível, levá-las em conta pode abrir caminhos para o envolvimento com a tarefa de ensinar matemática com vistas ao engajamento e ao aprendizado dos estudantes. É preciso, portanto, buscar entrelaçamentos entre tais dimensões, uma vez que entendemos que o estabelecimento de separações estritas como estas tem pouco a contribuir com a prática profissional e com a pesquisa nesse campo.

Renert e Davis (2010) argumentam que o professor precisa ter uma postura aberta e manter-se curioso sobre como a matemática se conecta com a experiência humana.

> Estar ciente das múltiplas evoluções que fundamentam a Educação Matemática pode capacitar os professores a participarem nelas de uma maneira muito pensativa. Reconhecer que as dualidades aparentemente irreconciliáveis na Educação Matemática são, de fato, tensões evolutivas produtivas pode encorajar os professores a se tornarem menos comprometidos com perspectivas monológicas. Por exemplo, uma vez que uma professora reconheça que a matemática é simultaneamente estável e emergente, ela não precisa mais se comprometer com uma única perspectiva. Ao dar este passo, ela estaria mais livre para explorar a interação viva entre estabilidade e

> novidade em sua aula de matemática. (RENERT; DAVIS, 2010, p. 212, tradução nossa).[21]

Inspirados na *filosofia integral*, Renert e Davis (2010) apresentam uma estrutura, organizada em estágios (Figura 3) para visão de mundo, matemática, ensino, cognição e matemática para o ensino. Tais estágios se relacionam com ondas de consciência, que se fundamentam na ideia de que "cada estágio da consciência é um sistema coerente para a construção de sentido, uma epistemologia natural que surge da necessidade de sociedades e de indivíduos responderem às condições de vida externas em um período específico." (RENERT; DAVIS, 2010, p. 202-203, tradução nossa)[22]. A escolha pelo termo "onda" se deve à fluidez e à sobreposição dos estágios de consciência. Apesar de não ser nossa intenção nos aprofundarmos na evolução de tais estágios, julgamos relevante a correlação feita por esses autores entre as ondas de visão de mundo com as ondas de ensino e da matemática para o ensino. Isso pode ampliar o nosso entendimento sobre como esses aspectos se relacionam, ou seja, sobre como a matemática para o ensino se situa em visões de mundo de forma mais ampla.

Os autores discutem como é possível analisar visões de mundo a partir de três ondas de consciência – *tradicional*, *moderna* e *pós-moderna*. Com base nessa discussão, destacam possíveis comportamentos de professores e que tipos de conhecimentos são promovidos por eles. Na *tradicional*, os professores são exímios transmissores de verdades incontestáveis. A matemática ensinada por eles é entendida como um conhecimento estabelecido. Os professores precisam saber muita matemática de modo a transferir esses conhecimentos aos estudantes, ou, como dizem os autores, a doutrinar os estudantes. Essa é uma onda etnocêntrica e conformista. Já na onda *moderna*, caracterizada pela racionalidade e pela individualidade, os professores devem ser capazes de fornecer instruções claras. Assim, além de serem versados nos temas matemáticos, os professores também devem conhecer maneiras de levar os estudantes a pensarem matematicamente e a resolverem problemas. A onda *pós-moderna*, por sua vez, é pluralista e inclusiva. Nela "o que mais importa não é se 2 + 2 é igual a 4, mas sim a constelação

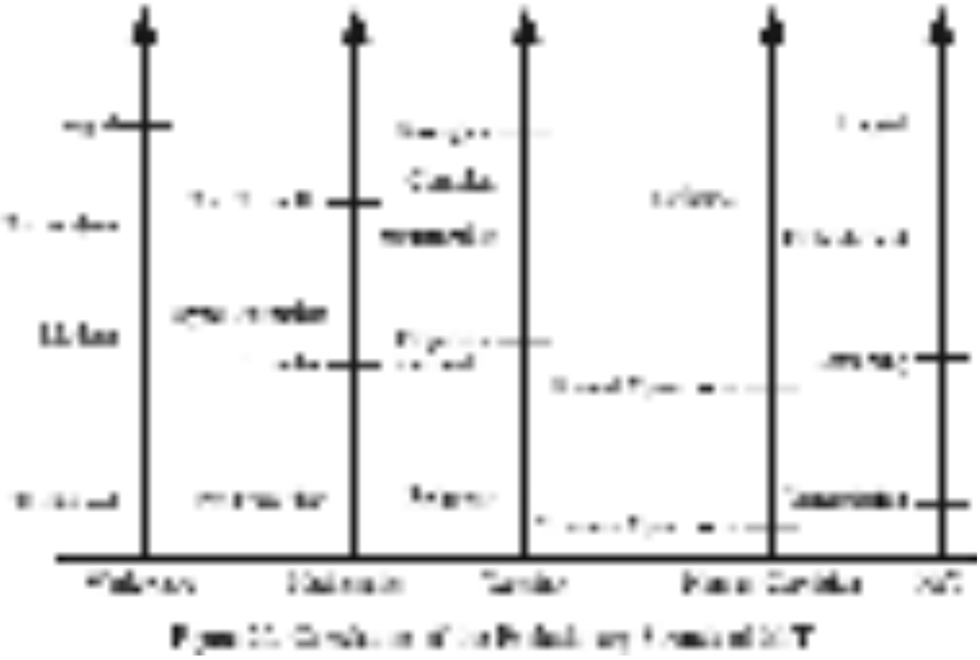
---

[21] No original, "Being aware of the manifold evolutions that underlie mathematics education can empower teachers to participate in them in a very thoughtful way. Recognizing that apparently irreconcilable dualities in mathematics education are in fact productive evolutionary tensions can encourage teachers to become less committed to monological perspectives. For example, once a teacher recognizes that mathematics is simultaneously stable and emergent, she no longer needs to commit to a single perspective. By taking this step, she would be freer to explore the lively interplay between stability and novelty in her mathematics classroom."

[22] No original, "Each stage of consciousness is a coherent system for sense-making, a natural epistemology that arises from the need of societies and individuals to respond to external life conditions in a specific period."

de contextos, usos e convenções discursivas que trazem e perpetuam tais ‘verdades’.” (RENERT; DAVIS, 2010, p. 205, tradução nossa)[23]. O conhecimento matemático é, dessa forma, habilitado pela biologia, condicionado pela cultura e situado na experiência social. Além da dimensão coletiva da produção do conhecimento matemático, os professores também devem considerar, para a sua atuação docente, atividades humanas como a psicologia, a sociologia, a história, a filosofia. Além dessas três ondas, apontam uma quarta onda – a *integral*, procurando prever o que pode vir a acontecer.

Figura 3 – As estruturas de visão de mundo, matemática, ensino, cognição e matemática para o ensino advindas da filosofia integral.



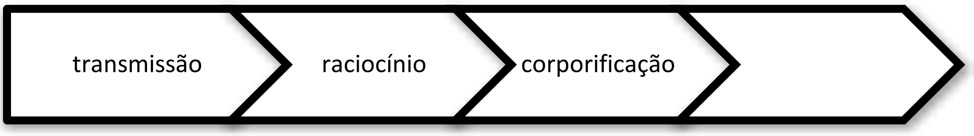
Fonte – Renert e Davis (2010, p. 202).

Percebe-se assim um deslocamento da matemática para o ensino do paradigma da transmissão, passando pelo do raciocínio, em direção ao paradigma da corporificação. Nesse último estágio não cabe mais considerar apenas o domínio da matemática e/ou de “técnicas” para melhorar a aprendizagem quando se pensa nos aspectos que caracterizam a ação docente. É preciso incorporar aspectos plurais e inclusivos para além da rigidez com que a matemática é vista. Nesse processo de mudança de visão sobre a matemática, é crucial o entendimento de

[23] No original, “So, in the postmodern view, what matters most is not whether 2+2 equals 4, but rather the constellation of contexts, uses, and discursive conventions that bring forth and perpetuate such ‘truths.’”

que o conhecimento matemático, assim como qualquer outro, é uma construção humana. Nesse sentido, o conhecimento, entendido como estático, passa a ser visto como dinâmico; o platônico como corporificado; e o pré-estabelecido como emergente.

Figura 4 – Paradigmas em que a matemática para o ensino passou.



Fonte – A autora.

Ao evidenciar as mudanças pelas quais as visões de mudam passam, é possível refletir sobre as concepções dos sujeitos, sobretudo dos professores, com relação à matemática e ao seu ensino. Assim, observar tais ondas pode nos fazer mais conscientes do nosso papel como professores e como pesquisadores em Educação, na medida em que nos possibilita nos posicionarmos em relação a eles. Nesse sentido, entendemos que a consideração desses aspectos situa o conhecimento matemático para o ensino em um quadro mais amplo. Considerando que a pesquisa impacta a prática, o que pode expandir o alcance de teorizações sobre saberes docentes, uma vez que pode mudar qualitativamente a atuação de professores.

Matemáticas emergentes e a noção de *substructing*

Como, para Brent Davis e seus colaboradores, os saberes de matemática para o ensino são dinâmicos e emergentes, esses não podem ser abarcados por nenhuma lista prescritiva de conhecimentos, ou de categorias de conhecimentos. Seu desenvolvimento se dá a partir da participação na matemática cultural, isto é,

> toda e qualquer matemática que se estenda à *matemática formal*. Para ser mais preciso, vemos a matemática formal como a matemática dos matemáticos – o cânone dos resultados matemáticos, desenvolvido ao longo de milhares de anos, que é claramente resumido nos livros didáticos escolares de matemática. A matemática cultural é tudo o que reside fora disso. São as analogias, metáforas, aplicações, sistemas, discursos e práticas que se relacionam com a matemática, mas não são tradicionalmente vistas como matemática formal.
> [...]
> Mas como um professor pode *saber* tanto? Felizmente, [...], a matemática cultural é emergente. Embora possa fazer uso de alguns resultados pré-estabelecidos, ela surge no momento e é muito dependente do contexto. Não há duas turmas que deem origem à mesma matemática cultural. Acreditamos que a matemática para o ensino é mais uma disposição aberta à matemática emergente do que o domínio de qualquer corpo

> específico de conhecimento. (DAVIS; RENERT, 2014, p. 105-106, tradução nossa, itálicos no original)[24].

A matemática cultural não está definida *a priori*, ela reside nos quatro quadrantes da matemática para o ensino (Figura 2). Podemos dizer que ela está à espera dos professores para ser explorada com o coletivo da sala de aula. Para tanto, os professores devem estar abertos aos acontecimentos da sala de aula. Essa abertura, entretanto, não implica numa falta de comprometimento. Ao contrário, para lidar com o inesperado o professor precisa ter domínio do conteúdo, de modo que permaneça responsável pela condução de discussões suscitadas por acontecimentos inesperados. Nesse sentido, Davis e Renert (2009) consideram os professores como *criadores de possibilidades matemáticas*, e não como meros transmissores de conhecimentos prontos.

Como Davis e Renert enfatizam "a M4T é mais bem interpretada como uma disposição aberta em relação à matemática em contextos educacionais do que como um conjunto especificável de habilidades ou competências" (DAVIS; RENERT, 2014, p. 35, tradução nossa)[25]. Além da disposição aberta, os autores também identificam o *substructing* e a matemática emergente como duas características essenciais a serem consideradas em sua proposta de encontros formativos de professores (os *concept studies*).

> "*Substructing* suger[e] uma sensação de desmontagem e reconstrução. [...] [D]estac[a] as dimensões criativas que estão presentes no processo de retrabalho e as distingue das ênfases meramente descritivas/interpretativas do *unpacking*.
> [...] [Durante o substructing,] os professores refazem conceitos matemáticos, às vezes radicalmente, enquanto continuam usando-nos no ensino quase sem interrupção." (DAVIS; RENERT, 2014, p. 43, tradução nossa)[26].

---

[24] No original, "We use the term to refer to any and all mathematics that extends formal mathematics. To be precise, we view formal mathematics as mathematicians' mathematics – the canon of mathematical results, developed over thousands of years, which is neatly summarized in school mathematics textbooks. Cultural mathematics is all that resides outside of that. It is the analogies, metaphors, applications, systems, discourses, and practices that relate to mathematics but are not traditionally seen as formal mathematics. [...] But how can any teacher know so much? Luckily, as the episodes from the concept study on circles illustrate, cultural mathematics is emergent. While it may make use of some pre-established results, it arises in the moment and is very context-dependent. No two classes give rise to the same cultural mathematics. We believe that mathematics-for-teaching is more about an open disposition to emergent mathematics than it is about mastery of any specific body of knowledge."

[25] No original, "In the process, we further develop the suggestion that M4T is better construed as an open disposition towards mathematics in educational settings than a specifiable collection of skills or competencies."

[26] No original, "And this is precisely the sense intended by the teacher who offered the term; for him, substructing suggested a sense of dismantling and rebuilding. For him (and, very quickly, for the group), it highlighted the creative dimensions that inhere in the reworking process and distinguish them from the merely descriptive/interpretive emphases of unpacking. [...] Likewise, in our concept studies, teachers rework mathematical concepts, sometimes radically, while using them almost without interruption in their teaching."

Para os autores, a noção de *substructing* vai além da noção de descompactar. Isto é, não basta simplesmente descompactar o que os matemáticos compactam na criação dos conceitos matemáticos. É preciso entender o conceito profundamente, examinando não só como suas partes o constituem, mas também como elas se separam em diferentes contextos e circunstancias. Para exemplificar, consideremos a discussão sobre o fato de o número 1 ser ou não primo, trazida pelos autores. Um número é primo se é divisível apenas por 1 e por ele mesmo. Na verdade, é preciso considerar os números naturais diferentes de 1. Isso seria suficiente para os matemáticos afirmarem que 1 não é primo. Porém, como podemos observar na Figura 5, é possível chegar à conclusão de que 1 é primo, considerando-se a interpretação da multiplicação como organização retangular. A tabela disposta nessa figura foi elaborada a partir de um encontro formativo conduzido por Brent Davis em que se discutiu "o que é multiplicação?" com professores abrangendo todo o K12[27], em que um dos professores questionou o grupo se "1 é primo?".

Figura 5 – Tabela sobre o que é multiplicação e suas implicações para o fato de 1 ser ou não primo.

Fonte – Davis e Renert (2014, p. 37).

Nesse sentido, os autores propõem a noção de *substructing* de modo a enfatizar quão importante é para professores "reinterpretar, reconfigurar, re-saber o que se supõe já ser conhecido." (DAVIS; RENERT, 2014, p. 44, tradução nossa)[28]. Dessa forma, a noção de *substructing* operacionaliza a matemática emergente destacando tanto como a própria matemática se desenvolve, quanto como um estudo coletivo pode influenciar a aprendizagem individual dos professores.

> Descrever um fenômeno como emergente equivale a dizer que ele manifesta propriedades que não existem entre seus componentes separados [...]. Acreditamos

[27] K12 é como se referencia os sistemas de ensino básico estadunidense e canadense, o que equivalaria à toda educação básica brasileira.

[28] No original, "Rather, it is more about re-interpreting, reconfiguring, reknowing what is assumed to be known already."

> que a noção de emergência pode ser aplicada efetivamente a uma descrição da matemática para o ensino. A concepção de M4T como um fenômeno emergente destaca não apenas seleções e adaptações específicas da situação, mas também o caráter sistêmico, distribuído e auto organizador do conhecimento de conteúdo dos professores. (DAVIS; RENERT, 2014, p. 45, tradução nossa)[29].

Saberes docentes e história da matemática

A perspectiva de Davis e seus colaboradores para matemática para o ensino, segundo a qual professores devem entender a matemática estabelecida de forma indissociável dos processos por meio dos quais a matemática é produzida (DAVIS; SIMMT, 2006), pode iluminar a relevância da história da matemática como parte dos saberes docentes referentes à disciplina – o que constitui um aspecto central deste trabalho. Mais especificamente, a história da matemática pode ter um papel decisivo nesses saberes, na medida em que a matemática é entendida como estando em um contínuo processo de transformação, não cabendo considerar a matemática contemporânea como mais evoluída que a matemática do passado, nem tampouco que é a única culminância possível de um processo histórico linear.

Para exemplificar o papel da história da matemática nos saberes docentes, consideremos como as práticas matemáticas se entrelaçam nas teias da história e da sala de aula. No decurso da história, a operação de multiplicação passou por ressignificações, envolvendo a aceitação do conceito de número negativo e também diferentes formas de entendê-lo. Assim, o caso da multiplicação de números negativos é emblemático. Hoje temos a regra dos sinais para a multiplicação de números inteiros como dada, mas regras como essa nem sempre foram consenso entre os matemáticos, especialmente o caso “menos vezes menos dá mais”. Matemáticos como o italiano Girolamo Cardano (1501-1576) e como o francês Lazare Carnot (1753-1823), por exemplo, argumentaram contra esse resultado (SCHUBRING, 2005). Porém, foi uma contribuição do suíço Jean-Robert Argand (1768-1822) que trouxe um sentido decisivo para a regra para a multiplicação de dois negativos e, portanto, ajudou a endossar a regra. Argand reinterpretou as quantidades negativas, por meio das noções de quantidade absoluta e orientação, amparado num esquema de representação com uma balança de dois pratos

[29] No original, “Describing a phenomenon as emergent is tantamount to saying that it manifests properties that do not exist among its separated components – that, in effect, a tree is more than a bunch of connected sticks. We believe that the notion of emergence can be applied effectively to a description of mathematics for teaching. Conceiving of M4T in as an emergent phenomenon highlights not only situation-specific selections and adaptations, but also the systemic, distributed, and self-organizing character of teachers’ content knowledge.”

(ROQUE, 2012). Na mesma ocasião, Argand apresentou a multiplicação por -1 como uma reflexão em relação à origem, o que forneceu um sentido geométrico à identidade aritmética $(-1) \times (-1) = +1$. Na sala de aula a multiplicação também passa por ressignificações: em geral, a operação é apresentada como nada mais do que uma soma de parcelas iguais. Ou seja, no campo dos números naturais, a multiplicação está associada a uma ideia de ampliação. Contudo, no campo dos inteiros, além da ideia de ampliação, a multiplicação também está associada a um sentido de reflexão.

O conhecimento sobre como a matemática se constitui historicamente, bem como sobre as dificuldades e especificidades relacionadas ao seu ensino e à sua aprendizagem modificam a maneira de entender o próprio conteúdo. É neste sentido que para Brent Davis e seus colaboradores a matemática para o ensino deve considerar de forma indissociável o conhecimento sobre a matemática estabelecida e o conhecimento sobre seus processos de produção. Trazer essa discussão para o nosso referencial é uma maneira de perceber como o próprio entendimento sobre o que é matemática e sobre como se ensina está situado no tempo e no espaço. Não é nossa intenção fazer classificações dicotômicas a fim de rotular as ações que envolvem o ensino e a aprendizagem de matemática. O nosso objetivo é refletir sobre como o nosso entendimento sobre tais temas também se transforma e como ter consciência sobre isso pode modificar a nossa postura com relação à matemática e ao seu ensino.

2.4. Tarefas

A interação entre os discursos sobre a prática e o teórico, tão presente na formação de professores e nos programas de desenvolvimento profissional, é um elemento crítico do engajamento de professores em reflexões sobre a sua própria prática (e. g. BIZA; NARDI, 2019; BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2007; 2018). Para atender a essa demanda, as pesquisadoras Irene Biza e Elena Nardi desenvolveram e mantêm o programa MathTASK[30], em que se elaboram tarefas (*mathtasks*) com vistas à promoção de uma atividade proativa reflexiva com os professores em formação e em serviço. As *mathtasks* são desenhadas de forma que o conteúdo matemático, assim como o seu ensino sejam considerados em situações altamente representativas da sala de aula real. No centro do programa está o desenvolvimento de *mathtasks* que engajam os professores em reflexões sobre o ensino de matemática tanto a partir

[30] Para mais informações sobre o projeto acesse o site https://www.uea.ac.uk/education/mathtask.

da problematização de práticas docentes de outros professores (descritas no contexto das *mathtasks*), quanto de suas próprias práticas (a partir do envolvimento na dinâmica de aplicação da *mathtask*).

Biza, Nardi e Zachariades (2018) defendem que o desenho e o uso de tarefas matemáticas estejam no cerne da formação de professores de matemática e da pesquisa em Educação Matemática, pois as tarefas – mesmo considerando a sua variedade de usos na literatura – podem ser encaradas como ferramentas mediadoras para o ensino e aprendizagem. De acordo com esses autores, na formação de professores, uma tarefa pode ser usada para desencadear reflexões nos professores e para explorar seu conhecimento matemático para o ensino, bem como suas percepções e crenças epistemológicas e pedagógicas. Se planejadas adequadamente, as tarefas podem proporcionar oportunidades para engajar os professores em aspectos matemáticos, estratégias didáticas, teorias pedagógicas e crenças epistemológicas (BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2018). Os autores acreditam que trabalhar esses aspectos com professores é crucial para o desenvolvimento de habilidades para lidar com situações inesperadas que demandam reações imediatas em sala de aula.

> As tarefas oferecem uma oportunidade para explorar e desenvolver a sensibilidade dos professores com relação à dificuldade e às necessidades dos estudantes (Jaworski, 1994) e também uma habilidade de fornecer feedback adequado (pedagogicamente sensível e matematicamente preciso) aos estudantes. (BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2007, p. 303, tradução nossa)[31].

Ainda que não seja nossa intenção nos aprofundarmos na discussão que a literatura faz sobre tarefas, cumpre lembrar que a integração de tarefas nos processos de formação de professores tem ganhado foco. Sobre isso podemos citar a parte do *Handbook of Mathematics Teacher Education*[32], a edição especial *The Nature and Role of Tasks in Mathematics Teachers' Education*[33] do *Journal of Mathematics Teacher Education* e o livro *Constructing Knowledge*

---

[31] No original, "In sum the tasks offer an opportunity to explore and develop teachers' sensitivity to student difficulty and needs (Jaworski, 1994) as well as an ability to provide adequate (pedagogically sensitive and mathematically precise) feedback to the student."

[32] Tirosh, D., & Wood, T. (Eds.). The international handbook of mathematics teacher education (Vol. 2). Rotterdam, The Netherlands: Sense publishers, 2009.

[33] Zaslavsky, O., Watson, A., & Mason, J. (Eds.). Special issue: The nature and role of tasks in mathematics teachers' education. Journal of Mathematics Teacher Education, 10(4–6), 201–440. 2007.

for Teaching: Secondary Mathematics Tasks to Enhace Prospective and Practicing Teacher Learning[34].

O programa MathTASK tem como princípio fundamental engajar os professores com situações específicas e especialmente preparadas antes que tais situações de fato sejam enfrentadas na sala de aula por eles. O objetivo inicial do programa é desenvolver tarefas baseadas em situações específicas para professores e depois engajá-los nessas tarefas. De acordo com as autoras,

> Em vez de discutir as práticas e experiências docentes com os professores em abstrato, fazemos isso partindo de situações específicas da sala de aula que podem fornecer um gatilho para as trocas e para criar ideias compartilhadas entre pesquisadores e professores.
> [...]
> Pretendemos que a exposição dos futuros professores às referidas questões os prepare para abordá-las quando as enfrentarem na prática real de ensino. (BIZA; NARDI, 2019, tradução nossa)[35].

Ou seja, as *mathtasks* permitem abordar mais realisticamente questões que muito provavelmente são ou serão enfrentadas em sala de aula. Nesse sentido, a ideia central do programa é desenvolver nos professores confiança e segurança para abordar diferentes tipos de respostas e raciocínios matemáticos trazidos pelos estudantes.

O engajamento com as *maththtasks* prevê o registro escrito de respostas para as questões apresentadas e discussões coletivas sobre tais respostas. Nas *mathtasks* as reflexões são suscitadas por incidentes críticos da sala de aula de matemática, que são, em geral, fictícios, porém sustentados pela literatura de pesquisa e prováveis de acontecer em situações reais. Assim, cada *mathtask*, em geral, apresenta uma pequena narrativa com a descrição de uma situação de sala de aula em torno de um problema matemático com o qual um professor e seus estudantes lidam. Em seguida, um dilema é suscitado pela sua resolução. O dilema pode envolver os estudantes e suas diferentes estratégias para resolver o problema, pode também envolver o gerenciamento de tensões entre os estudantes, ou pode se relacionar com o uso de recursos digitais. Descritos o problema e o dilema, questões são apresentadas de modo que o respondente assuma o papel do professor daquela situação para apresentar como lidaria com o

---

[34] Zaslavsky, O., & Sullivan, P. (Eds.). Constructing knowledge for teaching: Secondary mathematics tasks to enhance prospective and practicing teacher learning. New York, NY: Springer. 2011.

[35] No original, "Instead of discussing teaching practices and experiences with teachers in the abstract, we do so by starting from specific classroom situations that can provide a trigger for exchanges and for building shared insights between researchers and teachers. [...] We intend that the exposure of student teachers to said issues prepares them for addressing these issues when they face them in actual teaching practice."

dilema, por exemplo, indicando que tipo de *feedback* daria aos estudantes. Na Figura 6 encontra-se um exemplo de mathtask com cada uma dessas etapas indicadas.

Figura 6 – Um exemplo de mathtask com suas partes evidenciadas.

Fonte – Biza et al (no prelo).

O registro por escrito mostra-se potencialmente importante pois ao fazê-lo, é necessário que o professor-participante não só explicite suas próprias ideias, como também estabeleça um entendimento claro quanto as suas opiniões. Nesse sentido, o registro por escrito ajuda a clarificar as ideias. Para além de expor suas respostas e opiniões, a discussão coletiva também é um momento para ouvir o colega e refletir sobre os seus pontos de vistas. Assim, a dinâmica das *mathtasks* também contempla a dimensão coletiva da produção de saberes docentes, defendida por Davis e seus colaboradores.

Para além das questões abordadas nas *mathtasks*, ao se engajar com tais tarefas, o professor acaba desenvolvendo uma *postura reflexiva proativa* (BIZA; NARDI, 2019) que estende o conhecimento adquirido para além dos conteúdos e questões abordados na *mathtask*. Além disso, as pesquisadoras também fundamentam as atividades de formação propiciada pelo trabalho com as *mathtasks* no *discurso matemático para o ensino* de Jason Cooper (COOPER, 2014), na noção de *foundation* do *knowledge quartet* de Tim Rowland e colaboradores (TURNER; ROWLAND, 2011), e a noção de *conhecimento de conteúdo de horizonte* de Deborah Ball e colaboradores (e. g. BALL; THAMES; PHELPS, 2008). No desenho das *mathtasks*, as pesquisadoras consideram i) a sutileza ou a dificuldade de determinado conteúdo matemático; ii) a capacidade dos professores refletirem sobre e demonstrarem maneiras de abordar as sutilezas ou dificuldades dos estudantes; iii) a sutileza ou o desafio de abordagens pedagógicas dos professores considerando questões matemáticas, pedagógicas e epistemológicas; iv) a possibilidade de evidenciar o discurso matemático para o ensino dos professores em relação aos conhecimentos, crenças e práticas intencionadas dos professores a partir do conteúdo matemático e das respostas; e v) a contextualização do conteúdo matemático e das ações e das interações dos professores no currículo e no contexto educacional, com os quais os professores são tão familiarizados.

Com relação ao item iv) (possibilidade de evidenciar o discurso matemático para o ensino), as pesquisadoras se baseiam na teoria da *Commognition* (SFARD, 2008) (discutida no capítulo a seguir), segundo a qual, a matemática é entendida como um discurso – caracterizado pelas palavras chaves, mediadores visuais, narrativas e rotinas – e aprendê-la é equivalente a participar desse discurso. O engajamento com as *mathtasks* permite tanto aos professores participarem do discurso (matemático e também sobre o ensino de matemática), como também dá acesso ao discurso dos professores, seja pelo registro das respostas, seja através das discussões coletivas.

As *mathtasks* têm, portanto, potencial tanto para a formação de professores quanto para a pesquisa. Inspiramo-nos nas *mathtasks* propostas por Irene Biza e Elena Nardi em seu programa para desenvolver as tarefas que utilizamos com os professores em nosso estudo de campo. Neste trabalho, as tarefas visam incentivar os professores a reconhecer e a valorizar produções discentes durante as aulas de matemática, apreciando potencialidades e limitações dessas produções, bem como a estarem preparados para enfrentar situações corriqueiras de sala de aula e a pensarem em abordagens de ensino diferentes das usuais, além de problematizarem e reconstruírem seus próprios conhecimentos sobre conteúdos matemáticos e sobre o seu ensino.

Devido à estreita relação com as *mathtasks* propostas por Irene Biza e Elena Nardi, nos apropriamos desse termo para as tarefas que desenvolvemos neste trabalho. Contudo, nossas tarefas guardam diferenças em relação à proposta destas pesquisadoras, na medida em que expandimos o tipo de narrativa apresentada como desencadeadora da tarefa. Assim, para além de uma situação da sala de aula envolvendo um problema matemático, desenhamos tarefas em que o contexto da narrativa é: a) uma conversa entre um menino e seus pais sobre um problema matemático a qual leva o menino a questionar a sua professora de matemática – *mathtask* de reflexões de práticas docentes da Rodada 1 (Apêndice C); b) uma reunião de planejamento entre professores, em que se apresentam duas propostas de ensino – *mathtask* disparadora da Rodada 2 (Apêndice D); c) uma aula de uma disciplina da licenciatura em matemática sobre ensino de geometria em que se discute duas proposta de ensino – *mathtask* de reflexões de práticas docentes da Rodada 2 (Apêndice H); d) descrição de uma situação de sala de aula, seguida de uma reflexão de um professor – *mathtask* disparadora da Rodada 3 (Apêndice I); e) reflexão de um professor recém chegado a uma escola sobre três exercícios encontrados sobre a mesa da sala de matemática – *mathtask* de reflexões de práticas docentes da Rodada 3 (Apêndice K); f) uma entrevista realizada por uma *youtuber* com dois laureados com a medalha Fields – *mathtask* invenção ou descoberta (Apêndice L).

Recentemente o programa MathTASK tem endossado perspectivas mais atuais sobre práticas docentes, além da manifestação de tipos de conhecimento, tais como o engajamento com certos discursos profissionais e acadêmicos. Assim, no lugar de considerar mais exclusivamente o conhecimento, o programa expandiu seus objetivos passando a considerar outros aspectos envolvidos com o ato de ensinar – aproximando-se mais das perspectivas dialógicas e participacionistas. Essa virada teórica do programa está fortemente relacionada com a teoria da *Commognition* de Anna Sfard (2008), que apresentamos e discutimos na sequência.

CAPÍTULO 3.

EIXO TEÓRICO 2: *COMMOGNITION*: UMA TEORIA SOBRE ENSINO E APRENDIZAGEM

There are many types of dialogue but in a dialogue that aims to be creative in the sense of extending understandings nothing is more helpful and constructive than a friendly but critical ear.
Paul Ernst to Anna Sfard in Dialogue on Dialogue (POME, 2018)

Commognition é o termo cunhado por Anna Sfard para aglutinar em uma única palavra as ideias de comunicação e de cognição, que tem sido identificado a uma teoria sobre ensino e aprendizagem. Essa teoria é fruto de pesquisa teórica e empírica que culminou no livro *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing* (SFARD, 2008). Desde então tal referencial teórico vem se desenvolvendo, tanto pela própria autora, quanto por outros pesquisadores. (e.g. BERNARDES; ROQUE, 2018; COOPER, 2014; KJELDSEN, 2011; KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014; LAVIE; STEINER; SFARD, 2019; NARDI; RYVE; STADLER; VIIRMAN, 2014; SFARD, 2012; 2014).

Anna Sfard se dedica a entender o pensamento humano de modo a enfrentar o desafio da aprendizagem de matemática. A pesquisadora defende que aprender é participar de um discurso e define discurso como um "tipo especial de comunicação que se distingue pelo seu repertório de ações admissíveis e pela maneira como essas ações são emparelhadas com re-ações" (SFARD, 2008, p. 297, tradução nossa)[36].

> Segundo a teoria da *Commognition*, o discurso de uma pessoa não revela apenas o que ela sabe. A *Commognition* se beneficia da metáfora participacionista da aprendizagem (Sfard, 1998) e vê o conhecimento – a capacidade de participar do discurso de uma comunidade – como *constituído* na comunicação e o processo de aprendizagem como constituído nas mudanças nos padrões de comunicação de uma pessoa. (COOPER, 2016, p. 19, tradução nossa)[37].

---

[36] No original, "special type of communication made distinct by its repertoire of admissible actions and the way these actions are paired with re-actions."

[37] No original, "According to Commognitive theory, one's discourse does not merely *reveal* what one knows. Commognition favors a participationist metaphor of learning (Sfard, 1998), and views knowing - the ability to

Os aspectos que caracterizam um discurso são as palavras chave, os mediadores visuais, as rotinas e as narrativas. Ao encarar a Matemática como um discurso, é preciso identificar tais aspectos. As palavras chave do discurso matemático são as usadas para indicar os números, as formas geométricas e demais objetos matemáticos – três, triângulo, função, conjunto. Os mediadores visuais são percepções visuais do objeto do discurso, por exemplo os numerais, os símbolos algébricos, os gráficos. As rotinas são os modos padronizados que definem um padrão discursivo, o qual se repete em certos tipos de situações. No caso da matemática, podemos ver as rotinas sendo evocadas, por exemplo, quando uma definição é formulada, quando uma demonstração é construída e validada. Narrativas são conjuntos de enunciados, falados ou escritos, que são endossados pela comunidade, ou seja, por todos que são reconhecidamente participantes de tal discurso; no caso da matemática, teoremas e definições, por exemplo (e. g. SFARD, 2008; 2012).

Sfard (2008) observa que afirmar que a matemática é um discurso não é o mesmo que considerá-la uma linguagem. Na consideração da matemática como linguagem, estaria implícito que os objetos matemáticos preexistem à fala sobre eles. Já o discurso é muito mais do que um vocabulário e regras gramaticais, pois inclui numerosas formas de comunicação, não se restringindo à comunicação verbal. Os discursos podem diferir em seus vocabulários (inglês e português, por exemplo) e ainda assim serem considerados os mesmos. Portanto, discurso é uma atividade humana, enquanto linguagem é um sistema simbólico e, nesse sentido, pertencem a categorias ontológicas distintas.

A teoria da *Commognition* propõe um entendimento da comunicação e do pensamento como duas facetas do mesmo fenômeno. O primeiro diz respeito à manifestação interpessoal (perspectiva coletiva), enquanto o segundo, à manifestação intrapessoal (perspectiva individual). Assim, o termo COMMOGNITION foi cunhado por essa autora, a partir da combinação das palavras COMMUNICATION e COGNITION para identificar a unidade desses dois processos. Ao usar o termo *Commognition* estamos considerando o pensamento como a comunicação consigo próprio.

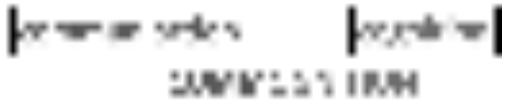
> A impressão de que a matemática tem pouco a ver com a comunicação é fácil de ser superada, desde que você comece a considerar o *pensamento* como um discurso. Essa definição torna imediatamente óbvio que os lugares onde as pessoas lidam com ideias matemáticas estão, de fato, cheios de vozes, e que isso é verdade mesmo quando a característica mais visível da situação é o silêncio. **Basta pensar no que você faz ao**

---

participate in a community's Discourse - as being *constituted* in communication, and the process of learning as being constituted in changes in one's patterns of communication."

tentar entender uma demonstração ou resolver um problema matemático, e você verá que *matematizar*[38] significa fazer todas aquelas coisas que as pessoas fazem enquanto se engajam em um discurso – fazer perguntas, questionar as respostas que estão sendo propostas, repreender quem resolver pelos erros e elogiar soluções inteligentes – exceto que agora elas são endereçadas a você mesmo e não a outra pessoa. Esse insight sobre o pensamento como auto comunicação, poderosamente reforçado pelos ensinamentos de Wittgenstein e Vygotsky, nos faz perceber que o silencioso solucionador de problemas está, de certo modo, fazendo muito barulho! (SFARD, 2014, p. 200, tradução e negrito nossos e itálico no original)[39].

Figura 7 – Comunicação interpessoal e pensamento individual são duas facetas do mesmo fenômeno, a comunicação.



Fonte – A autora.

Os objetos matemáticos são, nesta perspectiva, construções discursivas. No caso da biologia, por exemplo, os objetos são objetos da natureza – os felinos existem e os biólogos os estudam apresentando classificações e propriedades. Já no caso da matemática, quando consideramos, por exemplo, um triângulo, ele passa a existir na medida em que se fala sobre ele. Quando a palavra triângulo é enunciada, as pessoas que compartilham desse discurso reconhecem a forma a partir das propriedades que a definem, mesmo sem que se enuncie a sua definição. O mesmo acontece com o termo espaço vetorial, por exemplo. A partir de seu uso os participantes do discurso identificam indistintamente o objeto matemático e as oito propriedades que o definem. Nesse sentido, para Sfard, a construção de objetos matemáticos é a maneira discursiva de **dizer mais com menos** (e. g. SFARD, 2012).

O discurso matemático, isto é, a matemática, é uma estrutura de muitos níveis em que cada camada se torna objeto ao dar origem a outra camada discursiva. Então, por exemplo,

[38] Como característica da sua obra, Anna Sfard cria muitos neologismos. No seu livro, *mathematize*, que traduzimos como matematizar, indica a fala sobre objetos matemáticos.

[39] No original, “The impression that mathematics has little to do with communication is easy to overcome once you start looking at *thinking* as discourse. This definition makes it immediately obvious that the places where people grapple with mathematical ideas are, in fact, brimming with voices, and that this is true even when the most conspicuous feature of the situation is silence. Just think about what you are doing while trying to understand a proof or solving a mathematical problem, and you will see that mathematising means doing all those things that people do while engaging in discourse – asking questions, questioning answers that are being proposed, reproaching the solver for mistakes and giving praise for clever solutions – except that they are now addressed at yourself rather than at another person. This insight about thinking-as-selfcommunication, powerfully reinforced by the teachings of Wittgenstein and Vygotsky, makes us realise that the silent problem solver is, in a sense, making a lot of noise!”

funções é uma camada e ela vira um objeto no estudo de derivadas. Ao observar como um estudante ou uma criança está aprendendo, é preciso ter consciência de que algumas camadas de discurso podem separá-los de um participante do discurso que tem outras experiências – um professor, por exemplo.

Durante esta pesquisa convidamos um menino de 12 anos, iniciando o 6º ano do Ensino Fundamental, a resolver o seguinte problema "Uma quantidade e sua metade somadas fazem 16. Qual a quantidade?". A sua estratégia de resolução foi por tentativa: primeiro ele testou os números naturais e argumentou que não havia solução; depois passou a considerar números racionais na forma decimal, chegando ao resultado. Seu pai, um participante mais experiente de discursos matemáticos, especialmente no que diz respeito à álgebra escolar, ao vê-lo resolver o problema, o levou a expressar uma equação. Ao refletir sobre esse diálogo, percebemos que o pai não entendia por que o filho não reconhecia o potencial que a equação representa, compactando, de certo modo, o esforço do filho ao resolver por tentativa. Nessa situação, claramente pai e filho estão em camadas discursivas distintas. O pai, por sua vez, esquece como é estar no nível do filho e insiste na praticidade e agilidade que a equação confere à resolução do problema.[40]

A imersão no discurso canônico atual (isto é, aquele repleto de camadas, em que uma camada é o metadiscurso da camada que a precede) pode nos fazer insensíveis a outras formas desse mesmo discurso (SFARD, 2012). Assim, estar ciente da possibilidade dessa dissonância pode contribuir para enfrentar o desafio de promover a aprendizagem matemática, ou seja, de ensinar matemática. É preciso desfazer-se dos próprios hábitos discursivos para conseguir acessar outras formas de discurso e, consequentemente, comunicar-se melhor. Esse é, portanto, um desafio de professores e pesquisadores. Sfard reparou que, como a comunicação se dá a partir de palavras, as "falhas" na comunicação ocorrem devido a diferentes usos de uma mesma palavra pelos participantes do discurso. Por isso, é preciso atenção a como as palavras são usadas pelos interlocutores, sobretudo nos ambientes escolares e acadêmicos.

No contexto da *Commognition*, a aprendizagem refere-se a uma transformação no discurso – diferentemente, por exemplo, da psicologia, em que aprendizagem está relacionada a uma mudança no sujeito. Por isso, é preciso entender como o discurso se desenvolve. Sfard

[40] Esta situação inspirou a criação de uma *mathtask* que usamos no final da primeira rodada do estudo empírico (Apêndice C).

(e. g. 2008; 2012) considera dois tipos de desenvolvimento, o histórico e o ontogenético. O primeiro é por ela indicado como produtivo, enquanto o segundo, como reprodutivo. Ainda que não faça sentido olhar para o que aconteceu na história e querer reproduzir isso com as pessoas, por exemplo, com os estudantes, para a pesquisadora ambos os desenvolvimentos compartilham os mesmos mecanismos.

Nesse ponto, divergimos da pesquisadora. Para nós, a matemática é uma construção social coletiva, que busca atender a determinadas demandas situadas no tempo e no espaço. Sendo uma produção humana, não faz sentido considerar o seu *desenvolvimento* no sentido do que vem depois ser uma *evolução* do que veio antes. Tal entendimento pode se configurar como uma postura anacrônica em que se busca entender o passado com os olhos do presente (e. g. GRATTAN-GUINNESS, 2004b; SAITO, 2018). Como discutimos no capítulo a seguir, seguimos as tendências historiográficas mais atualizadas a partir das quais a matemática não é entendida como única e universal e cujo desenvolvimento não se dá de modo linear ao longo do tempo. Muito pelo contrário, a entendemos como uma rede de conhecimentos, ou, nos termos sfardianos, de discursos, que congrega contribuições de diferentes momentos históricos e de diferentes culturas.

Entretanto, acreditamos ser possível conciliar as tendências historiográficas mais atuais com o entendimento da matemática como um discurso. Os discursos são moldados por metarregras, um tipo especial de regras que mudam ao longo da história. Nesse sentido, as diferentes práticas matemáticas podem ser vistas como discursos regidos por regras distintas. Assim, o que chamamos de matemática, é composto pelo conjunto de todos esses discursos. Olhar a matemática do passado dentro dos seus próprios contextos permite que as diferenças entre os discursos sejam ressaltadas. Porém, consideramos que o modelo de camadas em que a *Commognition* caracteriza os discursos não é adequado para representar o desenvolvimento histórico da matemática, porque o mesmo não se dá apenas por demandas internas à própria matemática, tampouco segue uma ordem lógica.

Uma vez que aprender configura-se numa mudança de discurso, é preciso entender como se dá essa mudança. De acordo com Sfard (e. g. 2008), uma tal mudança pode ocorrer tanto no nível do objeto quanto no metanível. No *nível do objeto* expande-se o que é conhecido sobre o universo já existente de objetos matemáticos, formula-se e endossa-se novas narrativas sobre o objeto, em um crescimento acumulativo. Já no *metanível*, há expansão do discurso e aumento da complexidade. O aprendizado é expresso na mudança das regras – chamadas *regras metadiscursivas* ou *metarregras* –, que, em geral, configura-se numa transição para um discurso incomensurável, ou seja, para um uso diferente das palavras, mediadores e rotinas.

Por exemplo, no contexto dos números naturais, tradicionalmente a primeira ideia associada à multiplicação é a de soma de parcelas iguais. Nesse universo, a multiplicação sempre determina valores maiores do que as partes envolvidas. Já no universo dos inteiros, essa verdade deixa de ser absoluta: o resultado de uma multiplicação pode não ser maior do que seus fatores. A orientação que caracteriza os números inteiros interfere na definição das operações nesse conjunto, em particular na multiplicação, que ganha um sentido de composição de duas transformações: ampliação e reflexão em relação a origem. Assim, multiplicar também pode mudar o sentido. Nesse sentido, podemos dizer que há uma mudança de regra. O mesmo tipo de mudança ocorre quando passamos para o universo dos racionais e para o dos reais.

Figura 8 – Regras e metarregras relacionadas à multiplicação no universo dos números naturais, inteiros e racionais.

Fonte – A autora.

Nos desenvolvimentos em metaníveis, as mudanças se originam em uma reflexão sobre o discurso existente em sua totalidade. Sendo governado por diferentes metarregras, o novo discurso é incomensurável com o precedente. O antigo discurso passa a estar sujeito às novas regras e novos objetos matemáticos passam a ser necessários. Por exemplo, considerando a propriedade distributiva, quando se trabalha apenas com números, alguns padrões são observados e é possível generalizar. Essa generalização é uma metarregra da aritmética. Mas quando escrevemos $a(b + c) = ab + ac$ e consideramos isso como uma relação entre três objetos algébricos (a, b e c) temos uma regra de nível de objeto interna à álgebra. Assim, a metarregra da aritmética é uma regra de nível de objeto da álgebra.

Figura 9 – Metarregra da aritmética e regra da álgebra.

Fonte – A autora.

Ao considerar a álgebra como um metadiscurso da aritmética, não faz sentido não respeitar essa ordem, assim, para estudar álgebra é preciso passar pela aritmética. Dito de outra forma, não seguir essa ordem é violar o princípio de construir novo conhecimento (discurso) a partir de conhecimentos (discursos) antigos, pois, caso contrário, as coisas podem ficar sem significado.

Por um lado, a aprendizagem no nível do objeto corresponde à produção de narrativas que derivam logicamente de narrativas anteriormente endossadas. Por outro lado, a aprendizagem em metanível leva a uma mudança que não pode ser alcançada por pura dedução. Historicamente, as decisões em metanível foram difíceis e demoradas. Quando feitas foram fundamentadas nas fortes intuições dos matemáticos com respeito às suas vantagens em potencial. As intuições são subprodutos da experiência discursiva. Além disso, na matemática há um esforço em dizer mais com menos: “A maioria dos desenvolvimentos duráveis que ocorreram no discurso matemático ao longo da história foi resultado da busca desesperada dos matemáticos após o santo graal da comunicação perfeita, aquela que nunca falha e que permite dizer o máximo possível com o mínimo de palavras.” (SFARD, 2012, p. 4, tradução nossa)[41].

No metanível, é praticamente impossível perceber as vantagens em potencial das inovações aparentemente improváveis, e também descobrir *sozinho* as metarregras. Por exemplo, estando no universo dos números naturais é praticamente impossível entender que a multiplicação pode mudar o sentido, pois essa regra se situa no universo dos números inteiros (Figura 8). Essa impossibilidade se dá pois as metarregras são, geralmente, contra intuitivas. Por isso, o papel do expert é essencial. Nesse sentido, para Sfard (e.g. 2008) a aprendizagem

---

[41] No original, “This said, most of the durable developments that took place in mathematical discourse along history were outcomes of mathematicians’ desperate quest after the holy grail of perfect communication, one that never fails and that allows to say as much as possible in as little words as possible.”

em metanível só acontece num ambiente escolar. Em nossa interpretação, o ambiente escolar mencionado por Sfard pode ser expandido para qualquer ambiente em que há intencionalidade relacionada à aprendizagem.

Se para participar de um discurso é preciso conhecer esse discurso, mas para isso é preciso participar dele, como então participar desse discurso? Para Sfard, a participação começa com uma imitação, que deve ser permeada de reflexão e acompanhada por um esforço constante para entender as razões da ação do expert. Nesse sentido, "nos primeiros contatos com o novo discurso, os aprendizes só podem participar desse discurso de maneira ritualizada. No aprendizado posterior, espera-se que as rotinas sofram uma desritualização gradual até que eventualmente se transformem em explorações completas". (LAVIE; STEINER; SFARD, 2019, p. 154, tradução nossa)[42].

Fazer matemática, entendido como participar de um discurso matemático, é estar comprometido com a reflexão sobre o que se fala, pois **o que se fala é a matemática**. Assim, o grande desafio de professores e pesquisadores é estar atento a possíveis conflitos gerados pela comunicação. De acordo com Sfard (2008, p. 296, tradução nossa), um *commognitive conflict* é uma "situação que surge quando a comunicação ocorre através de discursos incomensuráveis [...]."[43] Os discursos incomensuráveis podem acontecer tanto pela diferença no uso de palavras chave e mediadores como na implementação das rotinas. Nesse último caso, realiza-se a mesma tarefa matemática de acordo com diferentes regras. Em geral, a aprendizagem em metanível acontece através dos *commognitive conflicts*. Contudo, os *commognitive conflicts* estão longe de serem barreiras para se acessar novos níveis do discurso em questão. Na verdade, a ideia desses conflitos é que eles sejam um gatilho para que um participante "novato" esteja apto a lidar com as novas regras. Para tanto, é essencial que um participante "experiente" auxilie nesse processo. Nesse sentido, para Sfard (2008), uma condição necessária para o processo de ensino e aprendizagem é o que ela chama de *acordo de ensino-aprendizagem*. Para atingir os objetivos de aprendizagem, os participantes do discurso precisam concordar, ainda que tacitamente, sobre três aspectos: i) o discurso principal; ii) os papeis dos participantes; e iii) a natureza esperada da mudança.

[42] No original, "The claim is made that in initial encounters with a new discourse, the learners can only participate in this discourse in ritualized ways. In further learning, their routines are expected to undergo gradual de-ritualization until they eventually turn into full-fledged explorations."

[43] No original, "situation that arises when communication occurs across incommensurable discourses"

Sfard chama atenção de que

> os líderes devem ser aceitos e compreendidos, não apenas cegamente obedecidos; eles devem ser escolhidos, não impostos. Para manter seu papel de liderança sem comprometer a agência de outros participantes, os líderes precisam ser confiáveis e a participação em sua comunidade de discursos deve ser valorizada e desejada. (SFARD, 2008, p. 284, tradução nossa)[44].

Na relação estabelecida entre os participantes precisa ficar claro quem assume o papel de professor e quem assume o papel de aprendiz. O professor passa, assim, a ser responsável pela mudança nos aprendizes. Esses, por sua vez, devem ter confiança e desejo em aprender, seguindo os passos do participante mais experiente – o que não quer dizer que deva haver uma imitação acrítica. Apesar de não haver necessidade de formalidade, o estabelecimento desses papeis precisa estar claro para ambas as partes.

No processo de participação em um discurso, esse deve deixar de ser o discurso dos outros, passando a ser o seu próprio discurso. Para tanto é fundamental que todos os participantes estejam engajados no processo de aprendizagem. Em geral, esse processo começa a partir da participação ritualística e se desenvolve para uma participação exploratória. Assim, quem assume o papel de professor deve aceitar a imitação dos aprendizes. Em contrapartida, os aprendizes devem se comprometer buscando entender as razões que sustentam o novo discurso.

À primeira vista, o modo com que Sfard diferencia os novatos dos experientes no discurso pode parecer rígido demais, sobretudo considerando nossa afiliação com as perspectivas freirianas. De acordo com essa autora, a aprendizagem, ou melhor, o acesso a um discurso, no lugar de ser pensado a partir de interações com pessoas que já dominam tal discurso, pode ser reformulado da seguinte maneira

> Que tipos de relacionamento e que tipos de interação entre novatos e veteranos são mais propícios ao aprendizado? Observe que o termo *novato* é muito amplo e inclui, entre outros, estudantes em estabelecimentos de ensino formais e informais, estagiários, iniciantes em uma profissão ou ofício, imigrantes cujo futuro depende de sua capacidade de ingressar nos discursos dominantes de seu novo país, e aqueles que sobem ou descem a escada social. Dependendo do contexto, o termo *veterano* pode se referir a um professor ou aluno competente, a um profissional altamente qualificado, a um membro reconhecido de uma comunidade artística, a um nativo de um determinado país ou a uma pessoa que é uma representante típica da sua classe social. (SFARD, 2008, p. 282, tradução nossa itálicos no original)[45].

---

[44] No original, “In other words, the leaders should be accepted and understood, not just mindlessly obeyed; they should be chosen, not imposed. To retain their leading role without compromising other participants’ agency, the leaders need to be trusted and the membership in their discourse community must be valued and desired.”

[45] No original, “What kinds of relationship and what kinds of interaction between newcomers and oldtimers are most conducive to learning? Note that the term *newcomer* is very broad, and it includes, among others, students

A observação que Sfard faz sobre novatos e veteranos no discurso nos parece uma maneira muito rígida de marcar a posição de quem é professor e de quem é aprendiz. Esse modo de entender a relação professor/aprendiz, quase como quem sabe e detém o conhecimento para quem o recebe, pode ser contraditória com o tesnionamento da dicotomia educador/educando, o qual acreditamos, inspirados em Paulo Freire. Diante da nossa perspectiva freiriana sobre educação, problematizamos a posição de novatos e veteranos (ou experientes) apresentada por Sfard, reforçando que para nós tais posições são *flutuantes*. Ou seja, assim como indicamos na seção 2.2, entendemos as hierarquias, sobretudo em comunidade que preconizam a investigação como postura, de modo flutuante, sem que seja delimitado *a priori* o papel que cada participante assume. Na verdade, a própria Sfard parece concordar com essa não rigidez, como explicitado anteriormente sobre a não obediência cega a quem lidera o discurso e também quando ela afirma "o consentimento para atuar como professor ou aprendiz nunca pode ser dado como garantido, nem mesmo nas situações aparentemente mais favoráveis, quando não há discordância visível sobre qual discurso deve ser líder." (SFARD, 2008, p. 284, tradução nossa)[46].

Nesse sentido, as características do acordo de ensino-aprendizagem mostram-se consoantes com a nossa postura problematizadora dado que ambas as partes do processo de ensino aprendizagem se engajam no discurso matemático. Ainda que o participante mais experiente do discurso tenha uma responsabilidade maior, não se espera que ele imponha o discurso ao participante novato. É fundamental que o novato também esteja engajado procurando não apenas imitar, mas também buscando os motivos e a lógica por trás do novo discurso que ele mesmo almeja participar.

Reforçamos, portanto, que no que diz respeito ao acordo de ensino-aprendizagem, a maneira com que nos apropriamos da teoria da *Commognition* entende as posições de novato e experiente como flutuantes dentro das comunidades dos discursos. Essa apropriação é consistente com a nossa perspectiva freiriana que tem como prerrogativa um tensionamento da dicotomia educador/educando. Além disso, no caso específico desta pesquisa, em que

in formal and informal educational establishments, interns, novices to a profession or craft, immigrants whose future depends on their ability to enter dominant discourses of their new country, and those who climb or descend the social ladder. Depending on context, the term *oldtimer* may refer to a teacher or a competent student, to a highly skilled professional, to a recognized member of an artistic community, to a native of a given country, or to a person who is a typical representative of her social class."

[46] No original, "It is also important to remember that the consent to act as teacher or as learner can never be taken for granted, not even in seemingly the most favorable of situations, when there is no visible dissent about whose discourse should be given the lead."

trabalhamos com a formação de professores em exercício, promovemos situações de ensino em que os professores em formação (que no caso assumiriam um papel de estudantes) não deixem de assumir o papel de professores, compartilhando a condução da sua própria formação com os formadores (que estariam no papel de professores). Nesse sentido, a autoridade sobre os saberes ao longo do estudo empírico realizado também é flutuante. Isso acontece especialmente quando os professores participantes compartilham sua prática, momento em que eles são os experts, permitindo, por exemplo, que um aprenda a partir da experiência do outro.

A teoria da *Commognition* compõe, assim, a nossa perspectiva teórica, tendo fundamentado o desenho das *atividades problematizadoras* – descritas no Capítulo 5. –, bem como a análise dos dados produzidos a partir da sua implementação.

CAPÍTULO 4.

EIXO TEÓRICO 3: HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

"not being a natural science, but a formal science closer to logic—hence to philosophy—mathematics has the ability inherent in itself to connect the humanities with the sciences."
(CLARK; KJELDSEN; SCHORCHT; TZANAKIS, 2018)

As potencialidades e aplicações da história da matemática no ensino da disciplina têm sido discutidas na literatura de pesquisa recente. Para Clark; Kjeldsen; Schorcht; Tzanakis (2018), o estudo da história da matemática pode permitir um entendimento diferenciado, ou nos nossos termos, problematizado de conteúdos matemáticos específicos, bem como, da própria matemática como área de conhecimento. Nesse sentido, a história da matemática pode funcionar como um meio para ensinar e aprender matemática que se estende para além da mera "motivação" (KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012). Mais especificamente, como observa Saito (2016b), a história da matemática pode contribuir na formação de professores, por meio da promoção de uma visão crítica sobre a matemática e também sobre a construção do conhecimento matemático. A história pode ser usada para sensibilizar tanto estudantes quanto professores sobre os pressupostos que a formalização matemática dissimula (ROQUE, 2014). Mas será que há um entendimento único e absoluto sobre *o que é* história da matemática?

4.1. Que História?

Como Saito observa (e. g. 2016a; 2018) *nenhuma narrativa histórica é neutra*, por serem historiograficamente orientadas e, portanto, influenciadas pela concepção de ciência a qual estão submetidas. Assim, as opções historiográficas podem nos revelar os pressupostos das ações articuladoras entre história e ensino. Queremos dizer, por exemplo, que a escolha das fontes históricas usadas em uma intervenção didática pode nos revelar pelo menos parte das suposições relacionadas à concepção de educação – e também da matemática – de quem a realiza. Antes de ilustrar o que queremos dizer, observemos de que maneira a história da matemática pode ser interpretada.

Saito (2018, p. 607) afirma que "a história não está pronta e acabada. Não porque novas frentes de investigação de pesquisa em matemática venham se desenvolvendo ano a ano, mas porque ela própria é reinterpretada e reescrita de tempos em tempos." Assim, o autor nos chama atenção de que além de novas fontes poderem ser descobertas (por exemplo, compêndios até então não disponíveis passam a ser considerados, novas traduções de livros antigos são publicadas, etc.) – o que por si só já faria rever as interpretações existentes – a própria maneira por meio da qual a história é encarada pela comunidade se modifica. Saito (e.g. SAITO, 2016a; SAITO, 2016b; SAITO, 2018; SAITO; DA SILVA DIAS, 2013), ao fazer uma história da história da matemática, nos mostra como esta se transformou ao longo do desenvolvimento do que hoje conhecemos por ciência – e, consequentemente, também, por matemática. O autor faz isso para contrapor duas perspectivas historiográficas por ele identificadas por *tradicional* e *atualizada*. Ainda que uma tal história da história seja interessante e formativa, julgamos não ser o caso de nos aprofundarmos nela aqui neste texto. A seguir, nos debruçamos sobre diferentes abordagens historiográficas, considerando não só as perspectivas tradicional e atualizada apontadas Fumikazu Saito, como também outras contribuições no contexto internacional, especialmente as de Ivor Grattan-Guinness.

Grattan-Guinness (2004b) destaca duas formas diferentes de interpretar uma teoria matemática, as quais são identificadas por *história* e *herança*. De acordo com esse autor, a história procura responder a duas questões "o que aconteceu no passado?" e "por que aconteceu?" e também às suas questões correlatas "o que não aconteceu no passado?" e "por que não?". Assim, historiadores – pesquisadores que consideram a interpretação da matemática do passado como *história* – não estão interessados apenas no sucesso, eles também estão interessados "nos 'becos sem saída' dos matemáticos e nos erros que cometem, pois esses são os tipos de coisas que revelam a peculiaridade do pensamento da pessoa; essas são as coisas que revelam o caráter humano de se fazer matemática." (FRIED, 2001, p. 400-401, tradução nossa)[47]. Ou seja, nessa interpretação não se consideram apenas os grandes heróis. Procura-se pelas cronologias das transformações da noção sob escrutínio, pelo seu impacto e pelas suas aplicações dentro e fora da matemática. De acordo com Grattan-Guiness (2004b), a noção em questão pode ser uma definição, uma técnica, um método de prova, um algoritmo, uma notação, ou até mesmo uma teoria ou um ramo da matemática. Então, produzem-se descrições e explicações para a noção e também se consideram diferenças entre a noção e as noções modernas e contemporâneas com as quais identificamos relações. Para se fazer isso é preciso

[47] No original, "This is why the historian is particularly interested in the "dead ends" mathematicians come to and the mistakes they make, for these are the kinds of things that reveal the peculiarity of the person's thought; these are the things that reveal the human character of doing mathematics."

considerar não apenas os aspectos matemáticos, mas também os contextos histórico, social, cultural, temporal, político nos quais a noção está localizada.

A interpretação como herança (ou legado como Saito se refere), por outro lado, lida com a pergunta "como chegamos até aqui?". Nesse sentido, podemos dizer que os herdeiros – pesquisadores que consideram a interpretação da matemática do passado como *herança* – procuram por semelhanças entre a noção e as noções mais modernas. Como Grattan-Guinness afirma "o presente é *fotocopiado* no passado" (2004b, p. 165, ênfase no original, tradução nossa)[48], de modo que as noções do presente são entendidas como versões "mais avançadas" das versões do passado, e as relações matemáticas entre essas são enfatizadas. É o caso quando, por exemplo, afirma-se que os árabes resolviam equações do 2º grau, apesar de não terem chegado a uma fórmula resolutiva genérica, no sentido da matemática contemporânea.

Em estudos de história da matemática é comum encontrarmos o termo Whig (cunhado pelo historiador britânico Herbet Butterfield (FRIED, 2001)), referindo-se à história que celebra o sucesso, ou seja, a história dos vencedores, focando nas semelhanças entre passado e presente. Para Saito (2018) "A história *whig* parte do pressuposto de que o passado da ciência é considerado o início de uma marcha progressiva à iluminação." (p. 608, ênfase no original). Contudo, como Fried afirma "o historiador Whig produz o que *parece* ser uma imagem clara e certa do passado, mas, *na verdade*, o que é produzido é uma distorção." (2001, p. 395, ênfases no original, tradução nossa)[49]. Assim, como o próprio Grattan-Guinness (2004b) observou, a interpretação como herança pode se assemelhar à história Whig.

Grattan-Guinness afirma que ambas as interpretações são legítimas, mas o que não é legítimo é considerar a herança como história ou vice-versa, porque essas confusões podem embaraçar as duas categorias. Além disso, não se deve considerar que uma interpretação é subordinada à outra. O autor também afirma que "os matemáticos normalmente leem o passado em um espírito de herança" (GRATTAN-GUINNESS, 2004a, p. 5, tradução nossa)[50], e que uma razão para isso pode ser porque uma "diferença filosófica é que os herdeiros tendem a se concentrar apenas no conhecimento (teoremas por exemplo), enquanto os historiadores também

---

[48] No original, "the present is *photocopied* onto the past."

[49] No original, "the Whig historian produces what *appears* to be a clear and certain picture of the past, but *in fact* what is produced is a distortion."

[50] No original, "mathematicians normally read the past in a heritage spirit."

buscam motivações, causas e a compreensão em um sentido mais geral." (GRATTAN-GUINNESS, 2004b, p. 165, tradução nossa)[51].

Para Saito (2016b), as narrativas históricas tradicionais são presentistas, por privilegiarem aspectos internos da própria matemática, encadeando linear e progressivamente as diversas etapas e descobertas. Esse modo de apresentar a matemática considera implicitamente que os protagonistas da história estavam conscientes de um suposto processo de encadeamento lógico e cronológico dos conceitos matemáticos – o que sabemos não ser verdade. Em outras palavras, nem sempre os estudiosos sabem onde chegarão ao desenvolver seus estudos – o caso das geometrias não euclidianas já é clássico, porém esclarece o que queremos dizer aqui: ao problematizar o V Postulado não se sabia *a priori* que se chegaria (séculos depois) às hoje chamadas geometrias não euclidianas. Ademais, nas narrativas presentistas, o contexto e a contingência histórica são ignorados. Isso acontece uma vez que "a perspectiva historiográfica tradicional enfatiza apenas a coerência interna do discurso matemático, tendo como ponto de partida o que nós entendemos por matemática nos dias de hoje" (SAITO, 2018, p. 608).

Para Roque (2012), a história da matemática tradicional tem três aspectos chave que implicitamente reforçam a imagem da matemática como um saber superior, que corresponde a uma produção individual de gênios.

> [1.] A matemática é um saber operacional, de tipo algébrico, e tem como um de seus principais objetivos a aplicação de fórmulas prontas a problemas [...];
> [2.] A matemática é uma disciplina formal e abstrata, por natureza, que ajuda a desenvolver o raciocínio, mas é destinada a poucos gênios, a quem agradecemos por nos terem legado um saber unificado e rigoroso [...];
> [3.] Ainda que possua aplicações a problemas concretos, a matemática é um saber eminentemente teórico. Parte-se, algumas vezes, de dados da experiência, mas para elaborar enunciados que os purifiquem e traduzam sua essência. (ROQUE, 2012, p. 16-17).

Os três aspectos ou concepções acima materializam-se nas interpretações históricas sempre que as lentes do presente são usadas para olhar o passado. Um exemplo apresentado por Roque (2012) é o das práticas matemáticas babilônicas (que datam de em torno do ano 1700 a.E.C.), quando essas são interpretadas pelas lentes da álgebra contemporânea. A contradição é revelada quando lembramos que o simbolismo foi explicitamente introduzido apenas no final do século XVI, pelo matemático francês François Viète.

---

[51] No original, "A philosophical difference is that inheritors tend to focus upon knowledge alone (theorems as such, and so on), while historians also seek motivations, causes, and understanding in a more general sense."

Uma vertente mais atualizada de história temporaliza e contextualiza os objetos matemáticos, buscando "compreender o desenvolvimento do conhecimento matemático como processo e não como encadeamento de resultados (Saito, Dias, 2011)" (SAITO, 2016b, p. 260). Assim, considera-se, para além do conteúdo [atual] matemático em si, os contextos de elaboração, transformação, transmissão e disseminação do conhecimento matemático em diferentes épocas e culturas.

> Ao darem ênfase nos processos da construção do saber matemático, inserindo-o em malhas contextuais mais amplas, de modo a dar significado ao fazer matemático de diferentes épocas e culturas, tais narrativas propuseram compreender as "matemáticas" do passado tais como elas eram vistas no passado, e não como elas deveriam ser vistas segundo uma perspectiva filosófica ou matemática pré-concebida. (SAITO, 2018, p. 614-615).

Implícito a isso está o entendimento da "construção de conhecimento [como estando] mais relacionada ao processo de apropriação (que implica em escolhas) do que de transmissão dos conteúdos." (SAITO, 2016b, p. 275).

Assumir uma ou outra interpretação sobre a matemática do passado revela os pressupostos que sustentam o uso que é feito da história. Assim, se estamos mais preocupados com a matemática do presente, pode ser justificado o uso de uma história presentista. Por outro lado, se estamos interessados em entender as práticas matemáticas do passado, uma historiografia mais atualizada pode ser mais adequada. De qualquer maneira, ao reconhecer a não neutralidade da história (e também da historiografia), para além de refletir sobre a própria história da matemática, é também importante refletir sobre as implicações de cada interpretação historiográfica para o ensino. É o que procuramos fazer a seguir.

Potencialidades e desafios das interpretações historiográficas para o ensino de matemática

As narrativas históricas tradicionais, em geral, referem-se apenas ao que deu certo, consequentemente acabam por legitimar que há um único caminho a ser seguido, linear e universal, no desenvolvimento da matemática. Mais do que isso. Ao interpretar o passado à luz do presente, uma linha causal se estabelece entre passado e presente, deixando de lado tudo que não é familiar: "Por serem incompreensíveis do ponto de vista presente, muitos desses desdobramentos que, na realidade foram significativos e representativos no desenvolvimento da ciência moderna, são considerados erros que deveriam ser descartados." (SAITO, 2018, p. 609). Ao privilegiar os sucessos do desenvolvimento da matemática – deixando de lado erros e abordagens que não levam às soluções mais enxutas dos problemas, entre outros – fica endossada uma imagem de perfeição da matemática. Tal imagem desvaloriza o erro como ferramenta pedagógica para a aprendizagem. Além disso, interpretações históricas com vieses presentistas costumam privilegiar também matemáticos famosos da história, alçando-os a posições heroicas – o que legitima uma imagem de que a matemática é apenas para gênios. Outro ponto a se considerar é que narrativas da história tradicional muitas vezes endossam o eurocentrismo, promovendo imagens equivocadas – no entanto, naturalizadas – de que, por exemplo, a Europa é a protagonista de todas as histórias, é o berço da matemática, é o centro da cultura do mundo.

Para Saito (2018, p. 614) "essa forma de história se tornou interessante do ponto de vista didático e/ou pedagógico porque possibilitava ao professor buscar nela o passado de um conceito matemático, presumindo-se que a sua construção pudesse ser, de alguma maneira, replicada de modo a reconstruí-lo racionalmente." O autor parece afirmar que o modo mais fácil e rápido de se inserir a história da matemática no ensino de matemática é por meio do paradigma tradicional: "A ideia de que é possível sobrepor temas da história aos propósitos do ensino de matemática parte, em geral, de um pressuposto historiográfico 'presentista'." (SAITO, 2018, p. 609). Cumpre observar que as nuances que permeiam os acontecimentos lhes conferem significado e ignorá-las é também uma maneira de reduzir o seu valor. Assim, ao utilizar perspectivas históricas tradicionais, as questões epistemológicas ligadas à construção do conhecimento não são colocadas, o que acaba não favorecendo ao ensino e à aprendizagem matemática (SAITO, 2016b, p. 259). Alinhamo-nos com Saito na posição de que essas perspectivas não favorecem a aprendizagem matemática, no sentido da educação problematizadora freiriana, especialmente pois as perspectivas tradicionais privilegiam os resultados, como se a única possibilidade de transformação da prática do passado fosse a matemática atual, o que pode levar ao entendimento de que a matemática é para poucos.

Uma das potencialidades de se utilizar abordagens historiográficas mais atualizadas é a possibilidade de considerar novas questões epistemológicas emergentes do processo histórico estudado (SAITO, 2016b). Nesse sentido, o mesmo objeto matemático pode ser estudado sob diferentes perspectivas. Saito (2016b) salienta ainda que tal estudo permite que se diferencie o que é histórico do que é lógico. Assim, sob perspectivas historiográficas mais atualizadas, é possível contrapor a ordem da invenção e a ordem da exposição. Sobre essa diferença, Roque explica que:

> A diferença entre o modo de fazer e de escrever está muito presente na matemática, que parece ser escrita de trás para frente. As definições que precedem as conclusões sobre os objetos de que se está tratando explicitam, na verdade, os requisitos para que um enunciado seja verdadeiro, requisitos que foram descobertos por último, em geral, no trabalho efetivo do matemático. E esse encadeamento lógico na apresentação dos

> enunciados torna a matemática transcendente e desconectada de seu contexto de descoberta. (ROQUE, 2012, p. 30).

A história mostra-se, portanto, importante por nos permitir resgatar a ordem da invenção em contrapartida com a ordem da exposição. Tal contraposição – e, consequentemente, tal resgate – só pode ser feita se sob perspectivas historiográficas mais atualizadas, uma vez que a perspectiva tradicional presentista tenta justamente ocultar essa diferença como se o que aconteceu depois fosse uma consequência do que veio antes.

A utilização das narrativas históricas mais atualizadas também impõe alguns desafios. É muito importante perceber que não basta a substituição de uma narrativa histórica pela outra. Afinal, a perspectiva mais atualizada traz consigo outras questões para além das colocadas pela matemática do presente, como por exemplo questões culturais e sociais – o que pode estar fora do previsto nos currículos prescritos. Assim, considerar essas novas questões pode deslocar o foco do estudo, principalmente quando se está sujeito às amarras dos sistemas de ensino. A potencialidade pode, assim, ser encarada como um obstáculo.

Grattan-Guinness (2004b, p. 175) também reconhece os dois lados de uma mesma moeda, quando, ao perguntar "onde se localiza a educação matemática entre a história e a herança?", responde, "exatamente lá"[52]. Assim, dependendo dos objetivos, os educadores podem usar uma ou outra interpretação. O autor pondera alguns pontos (já considerados anteriormente): a) uma abordagem de história pode descaracterizar os objetos matemáticos tal como os conhecemos hoje em dia, dado que a linguagem, a notação e os métodos de demonstração, por exemplo, são muito diferentes, o que demandaria tempo extra para considerar a matemática contemporânea e também outras questões; por outro lado b) buscar no passado os conteúdos do presente, pode nos levar aos anacronismos tão criticados recentemente e, mais ainda c) uma abordagem de herança pode levar a uma visão da matemática como "perfeita", afastando os estudantes, uma vez que as " teorias matemáticas aparecem como todas as respostas, mas sem perguntas, todas as soluções, mas sem problemas - e apenas os estudantes mais inteligentes possuem inteligência suficiente para entendê-la." (GRATTAN-GUINNESS, 2004b, p. 174)[53]. Ponderações semelhantes também são apontadas por Fried que as apresenta como um dilema:

---

[52] No original, "Where does mathematical education lie in between history and heritage? My answer is: exactly there, and a very nice place it is."

[53] No original, "Mathematical theories come over as all answers but no questions, all solutions but no problems—and only the cleverest students possess enough intelligence to understand it."

> (1) permanecer fiel ao seu compromisso com a matemática moderna e com as técnicas modernas e correr o risco de ser Whiggish, isto é, considerar uma abordagem não histórica ou, na melhor das hipóteses, banalizar a história ou (2) adotar uma abordagem genuinamente histórica da história da matemática e correr o risco de gastar tempo com coisas irrelevantes para a matemática que se *tem* que ensinar. (FRIED, 2001, p. 397-398, ênfase no original, tradução nossa)[54].

Professores de matemática da escola básica ou pesquisadores em Educação Matemática – que usam a história da matemática em suas práticas – não têm os mesmos compromissos dos historiadores e, portanto, poderiam usar interpretações desatualizadas da história para fins educacionais. Adentrar em questões da historiografia, no lugar de encorajar os estudantes pode confundi-los, dificultando que os objetivos de ensino sejam alcançados. Fried encoraja, portanto, o uso de abordagens historiográficas tradicionais, que podem se justificar considerando os três grandes temas propostos por ele para agrupar os muitos motivos que levam os pesquisadores em Educação Matemática a se interessarem pela história da matemática: i) humanizar a matemática; ii) tornar a matemática mais interessante, mais compreensível e mais acessível; e iii) fornecer *insights* sobre os conceitos, problemas e resoluções de problemas.

Para Fried, a humanização da matemática passa pela consideração das idiossincrasias de quem a faz, por isso é tão importante “ler *seus* textos, como *eles* os escreveram” (FRIED, 2001, p. 401, ênfases no original, tradução nossa)[55], referindo-se aos textos do passado. Para ele esta é uma estratégia de *acomodação radical*, em que se busca incorporar às aulas as abordagens históricas. Cumpre observar que tal incorporação demanda tempo para a sua aplicação e quiçá uma mudança profunda no currículo, sobretudo no que diz respeito ao currículo entendido como uma lista pré-determinada de itens a serem cumpridos.

Não é nossa intenção aqui neste texto esgotar a discussão sobre diferentes abordagens historiográficas e suas implicações, especialmente para o ensino. Asseveramos, de qualquer maneira, que uma postura crítica diante das escolhas se mostra essencial. A seguir, descrevemos três maneiras de se usar a história com vistas ao ensino.

4.2 No Paradigma Atualizado da Historiografia

---

[54] No original, “So, if one is a mathematics educator, one must choose: either (1) remain true to one’s commitment to modern mathematics and modern techniques and risk beingWhiggish, i.e., unhistorical in one’s approach, or, at best, trivializing history, or (2) take a genuinely historical approach to the history of mathematics and risk spending time on things irrelevant to the mathematics one *has* to teach.”

[55] No original, “From the discussion above, to humanize mathematics one must look at it through the eyes and works of its practitioners, with all their idiosyncrasies; one must, as far as possible, read *their* texts as *they* wrote them.”

Trazemos nesta seção alguns exemplos de usos da história da matemática no ensino que nos inspiraram. Primeiramente, discutimos a concepção de história de Tatiana Roque, segundo a qual a matemática é entendida de uma perspectiva *problematizada*, a partir da consideração explícita de seus problemas motrizes. Em seguida, apresentamos como Abraham Arcavi e Masami Isoda utilizam um método histórico hermenêutico para desenvolver a escuta intencional em professores. Finalmente, pautados no argumento teórico de Tinne Kjeldsen e seus colaboradores, discutimos como a história pode ser entendida como uma fonte de discursos governados por diferentes metarregras, o que pode promover *commognitive conflicts* e, consequentemente, a problematização da matemática e de seu ensino.

A Matemática problematizada: uma concepção histórica

Ao trazer luz para a diferença entre a ordem lógica e a ordem histórica, Roque (2012) chama atenção que a matemática acaba se tornando abstrata ao fazer uso da ordem da exposição presente nos textos matemáticos.

> Um dos fatores que contribuem para que a matemática seja considerada abstrata reside na forma como a disciplina é ensinada, fazendo-se uso, muitas vezes, da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos. Ou seja, em vez de partirmos do modo como um conceito matemático foi desenvolvido, mostrando as perguntas às quais ele responde, tomamos esse conceito como algo pronto. (ROQUE, 2012, p. 30).

Ou seja, a autora usa "abstrato" no sentido de ocultar as relações intrínsecas do desenvolvimento do conceito matemático, sem explicitar as perguntas as quais ele responde, perguntas essas que podem ou não estarem relacionadas ao cotidiano.

Nesse sentido, na busca por tornar a matemática menos abstrata, a autora propõe que esta seja *problematizada*. A problematização proposta pela autora se pauta numa "história da matemática profundamente contextualizada nas *práticas* que caracterizam o fazer matemático." como Gert Schubring enaltece no Prefácio de seu livro (ROQUE, 2012). Para ela, é preciso reinventar o ambiente problemático no qual os conceitos foram criados, a partir de uma referência cotidiana, filosófica ou matemática.

> O estudo dos problemas da história da matemática pode fornecer o lado "concreto" da atividade matemática que tanto buscamos. Tornar a matemática mais concreta não precisa passar, necessariamente, por aproximá-la de atividades cotidianas como ir ao mercado, interpretar um gráfico no jornal ou analisar as formas geométricas na natureza. A matemática evolui, muitas vezes, por demandas internas, que não possuem nenhuma relação com o senso comum ou com os fenômenos naturais. É claro que o trabalho matemático está sempre inserido em um campo cultural e sofre influências de fatores externos (sejam estes sociais, políticos ou outros) [...] Encarando a noção de problema neste sentido amplo, e não somente identificando-a a exercícios usados no aprendizado de certo conteúdo, podemos afirmar que a matemática se constituiu, e continua a se desenvolver, a partir de problemas. (GIRALDO; ROQUE, 2014, p. 21).

Tatiana Roque pauta sua perspectiva problematizada na consideração da noção de problema como uma categoria central para o desenvolvimento da matemática. A autora problematiza a própria noção de problema, para tanto, parte da noção de problema em Platão[56] para defender a sua perspectiva. A lógica platônica entre os mundos sensível e inteligível pode ser ilustrada pelo estudo da geometria. Por exemplo, se quisermos determinar a medida da altura de um triângulo equilátero em função de seu lado, desenharemos um triângulo e utilizaremos esse desenho para pensar sobre o problema posto. Entretanto, não é do triângulo desenhado que desejamos obter a medida. Esse é uma cópia do triângulo ideal, que nos auxilia na determinação do desejado. Ou seja, utilizamos uma forma visível para investigar o absoluto que ela encerra (ROQUE, 2010). Nessa perspectiva, a geometria (e também a matemática) existe(m) *a priori* no mundo das ideias e cabe a nós seres humanos, seres do mundo sensível, descobri-la. Na tradição platônica, problemas e teoremas[57] incorporam algo que já existe no mundo das ideias. Nesse sentido, pode-se entender um problema como uma ignorância passageira, como um obstáculo a ser vencido (GIRALDO; ROQUE, 2014; ROQUE, 2010). E assim entendemos que a concepção platônica enfatiza uma matemática pronta, um saber acabado, que (apenas) os gênios são capazes de acessar, ao transcenderem o sensível e tangenciarem o inteligível.

Roque nos leva a entender que reinterpretar a noção de problema pode nos levar a uma matemática mais humanizada, sem abdicar de seu valor. Para a autora, "um problema não é uma falta que virá a ser preenchida pelo conhecimento da solução preexistente, mas é uma criação, uma novidade, um vir-a-ser que traz à realidade algo que nunca existiu." (ROQUE, 2010, p. 141). Nesse sentido, a autora considera que a existência de um problema prescinde de sua solução. Tatiana Roque traz essa perspectiva de problema para o seu modo de fazer história da matemática – "desfazendo mitos e lendas", como o título do seu livro ratifica. Para ela, os problemas são os motores da matemática, o que tira o foco dos resultados como categoria central em matemática. Ou seja, os resultados perdem destaque: "não é a solução que determina o problema, e sim o problema que engendra a sua solução como um dos casos possíveis." (ROQUE, 2010, p. 143).

[56] Platão considerava o mundo dividido entre o sensível e o inteligível. No mundo inteligível, ou mundo das ideias, as ideias existem e são refletidas no mundo sensível a partir de cópias e simulacros (cópias malfeitas). O homem vive no mundo sensível e no mundo das ideias estão as ciências hipotéticas e a dialética. A geometria é o exemplo, usado por Platão, de ciência hipotética.

[57] Os problemas são mais práticos e concernem às transformações dos seres geométricos; já os teoremas se aproximam da perfeição por enunciarem e demonstrarem propriedades inerentes desses seres. (ROQUE, 2010).

Roque destaca ainda que “para Foucault, a razão de existir dos objetos matemáticos é esconder os processos da prática histórica que levaram até a sua constituição como objetos.” (ROQUE, 2014, p. 170). O seu argumento é que o simbolismo, evidente na forma moderna de representar a equação quadrática, mascara as ideias matemáticas que levaram a esse tipo de representação. Diante desse entendimento para os objetos matemáticos, ela defende que a história pode ser usada para sensibilizar tanto estudantes quanto professores sobre os pressupostos que a formalização matemática dissimula.

Tanto na perspectiva platônica, em que a matemática é dada *a priori*, quanto naquela criticada por Foucault, na qual considera-se que os objetos matemáticos escodem seus processos constituintes, identificamos uma *naturalização* dos conceitos matemáticos. A ideia de naturalização foi apresentada por Giraldo e Roque (2014), a seguir buscamos elaborá-la. Naturalizar um conceito é tomá-lo como dado, desconsiderando as sutilezas epistemológicas inerentes a sua gênese. Nos termos de Giraldo e Roque (2014, p. 14) quando um conceito matemático é apresentado de modo naturalizado “sua existência, sua importância e seu papel na matemática contemporânea são assumidos como dados arbitrariamente, sem que sejam levadas em conta as demandas e tensões que impulsionaram a sua gênese.”

Nesse sentido, no processo de ensino, por exemplo, podemos associar a dificuldade que os estudantes enfrentam em determinados conteúdos com a sua apresentação de modo naturalizado. Para ilustrar o que queremos dizer com essa associação, consideremos a passagem do estudo das equações quadráticas para o estudo das funções quadráticas. Durante o 9º ano do Ensino Fundamental, os estudantes são conduzidos ao estudo das equações quadráticas. Assim, o professor escreve

$$ax^2 + bx + c = 0$$

definindo-a como uma equação do segundo grau, em que a, b e c são números reais. Em geral, boa parte do ano letivo é dedicada ao estudo de modos de resolver essa equação. Na grande maioria das aulas (ao menos no contexto brasileiro), geralmente, chega-se à formula de resolução

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nessa fórmula, assim como na expressão genérica da equação, aparecem representadas grandezas desconhecidas de dois tipos: a *incógnita* x e os *coeficientes* a, b e c.

Um novo tipo de desconhecido é introduzido na série seguinte, quando do estudo das funções quadráticas: a *variável*, quase sempre, também representada por x. Então, o professor define as funções quadráticas, como sendo aquelas funções reais da variável real, cuja expressão é da seguinte forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Nesse momento, não é incomum que professores se surpreendam com o fato de os estudantes tentarem "resolver a função"[58]. O professor, em algumas situações, parece desconsiderar a diferença de natureza entre incógnita e variável – que, inclusive, são representadas pelo mesmo símbolo – e acaba por apresentar os conceitos de equação e de função de modo que eles são tomados como certos, ou seja, como se fosse "natural" ou evidente a diferença entre um e outro. Em nossa interpretação, isso acontece porque os significados de incógnita e de variável carecem de problematização no ensino de matemática na educação básica brasileira.

Giraldo e Roque (2014) argumentam que para recuperar as sutilezas genéticas dos conceitos matemáticos, com vistas à sua articulação com o ensino é preciso *recontextualizá-los*. Para os autores, os processos de formalização matemática dos conceitos os descontextualizam de seus ambientes originais de invenção. Assim, o professor deve ser capaz de resgatar os aspetos essenciais da sua criação. A defesa desses autores – com a qual nos alinhamos – é de que esse resgate seja feito a partir da história da matemática. Precisamos, portanto, olhar para os problemas que engendraram os conceitos de modo a compreender por que razão foram assim formalizados. E é nesse sentido que Giraldo e Roque (2014) entendem a contextualização, isto é, no sentido de explicitar as origens.

A escuta intencional a partir do método hermenêutico

Learning to read and understand certain primary sources may result in learning the skills and the tools necessary for learning to listen to students. (ARCAVI; ISODA, 2007, p. 116)

Arcavi e Isoda (2007) apresentam o que chamamos neste trabalho de *método hermenêutico* fundamentado na ideia de que a escuta comprometida com a reflexão é uma condição necessária para o engajamento com a profissão docente, sobretudo sob o paradigma da educação problematizadora. Para esses autores, escutar é "prestar atenção cuidadosa ao ouvir o que os

[58] Abordamos essa questão durante a última etapa do estudo empírico a partir de uma *mathtask* (Apêndice I). Em Biza *et al.* (no prelo) há uma discussão sobre essa *mathtask*.

estudantes dizem (e ao ver o que fazem), tentando entendê-lo e suas possíveis origens e desdobramentos" (ARCAVI; ISODA, 2007, p. 112, traução nossa)[59]. Considerando que escutar não é uma tarefa passiva, os autores indicam que é preciso: a) criar oportunidades para que os estudantes expressem livremente suas ideias matemáticas; b) questionar os estudantes para entender a essência e as origens das suas ideias; c) analisar o que se escuta tentando adotar a perspectiva do outro; e d) decidir de que maneira integrar as ideias dos estudantes à aula.

Arcavi e Isoda (ibid) ainda chamam atenção de que ao escutar seus estudantes, o professor demonstra respeito e os valoriza. Também indicam que nos colocarmos no lugar dos outros, ao tentar entender o que escutamos deles, permite-nos refletir sobre a nossa própria relação com a matemática. Os autores defendem que a escuta, com vistas ao ensino, deve ser aprendida e continuamente estimulada e que, como todo aspecto da atuação docente, tem desafios a serem considerados, como: i) a necessidade de rever os conhecimentos reificados – o que pode ajudar a entender a perspectiva de quem está aprendendo; ii) capacidade de adotar a perspectiva do outro e toda a idiossincrasia por ela carregada; iii) reconhecimento da diversidade de maneiras como se pode escutar; iv) evitação de vieses e preconceitos; e v) demanda de tempo e, às vezes, até dificuldade de acontecer em tempo real.

Reconhecendo como a escuta pode contribuir para o professor de matemática, esses autores apresentam uma abordagem que visa entender e desvelar uma fonte histórica primária. A história da matemática é encarada como fonte de abordagens diferentes daquelas com que estamos acostumados hoje em dia. Para esses autores,

> (a) Para entender completamente as ideias por trás de uma fonte histórica (matemática), precisamos de um tipo de descentralização semelhante ao necessário para escutar os estudantes;
> (b) Tal descentralização pode ser aprendida; e
> (c) Os ambientes de aprendizado para apoiar esse aprendizado podem e devem ser projetados. (ARCAVI; ISODA, 2007, p. 115, tradução nossa)[60].

Eles destacam que o engajamento com a tarefa de tentar entender uma fonte primária histórica tem semelhanças com a escuta aos estudantes e pode ajudar nesse processo. Porém, isso não implica na consideração de paralelos entre o desenvolvimento histórico da matemática e a sua aprendizagem.

---

[59] No original, "giving careful attention to hearing what students say (and to see what they do), trying to understand it and its possible sources and entailments"

[60] No original, "(a) In order to fully understand the ideas behind a historical (mathematical) source, we need a similar kind of decentering to that needed for listening to students; (b) Such a decentering can be learned; and (c) Learning environments to support this learning can and should be designed."

Para Arcavi e Isoda (ibid) muitas soluções e raciocínios diferentes apresentados pelos estudantes são desconsiderados pelo professor, com base na dicotomia do "certo" e "errado". Contudo, é de se esperar que esses não desconsiderem fontes históricas da mesma forma, sobretudo considerando quem a produziu –consideradas as melhores mentes de seu tempo e cultura, como colocam os autores. Os autores argumentam que o estudo de fontes históricas primárias pode sensibilizar os professores de modo a problematizarem o descarte da produção dos estudantes.

Estando situadas cultural e temporalmente, as fontes históricas podem parecer enigmáticas aos olhos do leitor dos dias atuais, carecendo de *interpretação*. Nesse sentido, Arcavi e Isoda defendem uma *prática hermenêutica*, de modo a "analisar a fonte, fazer perguntas a si próprios (ou a colegas) sobre esta, parafrasear partes do texto em nossas palavras e notações, resumir entendimentos parciais, localizar e verbalizar o que ainda precisa ser esclarecido e contrastar diferentes partes em busca de coerência." (ARCAVI; ISODA, 2007, p. 116, tradução nossa)[61].

Os autores enfatizam a importância de se buscar adotar a perspectiva do escritor e propõem que o uso de tais ferramentas e de processos hermenêuticos pode ajudar os professores na tentativa de entender as ideias dos estudantes. Ao se depararem com as fontes históricas, os professores devem investigar profundamente a natureza do texto, tentando evitar projetar seus conhecimentos e entendimentos, uma vez que tais fontes são regidas por diferentes metarregras, como discutimos a seguir.

Arcavi e Isoda (ibid) apresentam uma sequência de atividades em que implementam o método hermenêutico para decifrar a matemática presente no Papiro de Ahmes, especialmente nos problemas de *Aha* 24 e 25. As atividades convidam os participantes a fazerem uma análise detalhada do problema 24 e de suas partes, intercalando com a contextualização histórica da fonte. No exemplo apresentado, os autores propõem a criação de um dicionário para os símbolos egípcios. Também são propostos outros exercícios mais diretos visando entender a multiplicação e a divisão egípcias.

---

[61] No original, "The main tools may consist of: parsing the source, posing questions to oneself (or to a peer) around it, paraphrasing parts of the text in our words and notations, summarizing partial understandings, locating and verbalizing what is still to be clarified, and contrasting different pieces for coherence."

Tais atividades tal como propostas por esses autores (Capítulo 5. e Apêndice B) foram usadas na primeira parte de nosso estudo empírico e inspiraram a proposta de tarefas históricas implementada nas outras duas partes deste estudo (Capítulo 6.).

História e *Commognition*: o que esse encontro pode trazer para a apropriação do discurso matemático

A *Commognition*, a abordagem discursiva com que nos alinhamos, considera que aprender é participar de um discurso – no nosso caso, um discurso matemático. Uma vez que discursos são modelados por metarregras – regras sobre as ações comunicativas implicitamente presentes na ação discursiva – os padrões discursivos resultam de tais processos governados por essas regras. Considerando que a história é composta por diferentes matemáticas, temporal e culturalmente situadas, ela proporciona uma maneira de observar as mudanças nas metarregras através do tempo e de contextos. As metarregras do discurso matemático são contingentes e historicamente dadas. Kjeldsen e colaboradores (e.g. KJELDSEN, 2011; KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014) apresentam um argumento teórico, baseado na *Commognition*, segundo o qual

> a história pode ser usada na educação matemática para revelar regras meta-discursivas e fazê-las objetos explícitos de reflexão e – em última instância – provocar *commognitive conflicts*. Um pré-requisito para que isso aconteça é a implementação de uma abordagem genuína da história. (KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012, p. 330, tradução nossa)[62].

A “abordagem genuína da história”, defendida por esses autores, está alinhada com a interpretação atualizada de história, discutida anteriormente. Para eles, as metarregras do discurso matemático do passado são regras do nível do objeto do discurso histórico, e é assim que elas se tornam objeto explícito de reflexão. Consequentemente, os estudantes que estejam estudando história da matemática, de acordo com perspectivas historiográficas atualizadas, podem ficar cientes de suas próprias metarregras, podendo modificá-las.

Sfard (2008) chama atenção para o fato de a aprendizagem em meta nível ser difícil de ser atingida sem ajuda externa, o que não acontece com a aprendizagem no nível do objeto, em que é possível deduzir sozinho a partir do que já é conhecido. A aprendizagem em meta nível

[62] No original, “According to our argument history can be used in mathematics education to reveal metadiscursive rules and make them explicit objects of reflection and—ultimately—to provoke commognitive conflicts. A prerequisite for this to happen is to implement a genuine approach to history.”

pode acontecer através de *commognitive conflicts*. Tais conflitos podem ser promovidos quando discursos governados por diferentes metarregras são experienciados simultaneamente. No cerne da abordagem de Kjeldsen e seus colaboradores está o desenho de situações de ensino e aprendizagem em que as fontes históricas apresentadas aos estudantes evidenciam um discurso matemático governado por metarregras diferentes das que eles estão acostumados: "Ao fazer com que os estudantes investiguem questões históricas sobre o desenvolvimento de práticas da matemática, usando as ferramentas dos historiadores, as metarregras podem ser exibidas como objetos explícitos de reflexão." (KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012, p. 330, tradução nossa)[63].

A interpretação de herança, ao possivelmente distorcer a matemática do passado à luz do presente, pode não permitir que aconteçam os *commognitive conflicts*, uma vez que, para que ocorram tais conflitos, é necessário que discursos diferentes sejam evidenciados. Se a matemática do passado for apresentada com notações e conceitos atuais, as diferenças serão camufladas. É, portanto, na vertente atualizada da história que é possível seguir a abordagem projetada por Kjeldsen e seus colaboradores.

Kjeldsen e Petersen (2014) descrevem uma aplicação do argumento teórico em um curso experimental sobre a história do conceito de função em uma turma de Ensino Médio na Dinamarca[64] para estudantes que já tinham estudado o conceito de função. O estudo contrapôs a concepção contemporânea de função com três definições históricas – duas de Euler e uma de Dirichlet. O objetivo das autoras foi desenvolver a consciência histórica dos estudantes a partir da revelação de e da reflexão sobre regras meta discursivas. O curso se organizou em duas partes. Na primeira a turma se dividiu em quatro grupos: o primeiro grupo estudou as definições históricas de função; o segundo, o debate sobre as cordas vibrantes; o terceiro pesquisou sobre Euler, Dirichlet e a sociedade em que viveram; e o quarto, o conceito moderno de função. Os grupos foram misturados e na segunda parte escreveram um artigo para contribuir com o debate fictício entre dois grupos de matemáticos sobre como um conceito matemático emerge e o que está por trás do seu desenvolvimento. Um dos resultados apresentados pelas autoras é que as tarefas históricas levaram alguns estudantes a explicitarem suas próprias metarregras.

Como estamos alinhados com uma abordagem genuína da história, propomos o estudo e a análise de fontes primárias de modo a observar e a comparar as diferentes metarregras do

---

[63] No original, "By having students ask and investigate historical questions about the development of practices of mathematics, using historians' tools, meta-rules can be exhibited as explicit objects of reflection."

[64] A história da matemática faz parte do currículo escolar dinamarquês.

discurso matemático. Para tanto, desenvolvemos e aplicamos no estudo empírico realizado para esta pesquisa tarefas históricas inspiradas no argumento teórico de Kjledsen e seus colaboradores. Visamos à apresentação de momentos históricos em que uma prática matemática consolidada não é mais comum (Rodada 1) e também de situações em que o discurso matemático estava mudando e novas metarregras estavam prestes a emergir e a serem negociadas (Rodadas 2 e 3).

4.3 Perspectiva Atualizada da História e a Educação Problematizadora

Concordamos com Saito (2016b, p. 276) e vemos

> A articulação entre ensino de matemática e a história da matemática, baseada em tendências historiográficas atualizadas, [contribuindo] para a formação mais crítica do professor de matemática, uma vez que a história compreendida nesses termos, dá acesso ao processo de construção do conhecimento e desmistifica uma visão linear e progressista de conhecimento.

Para nós, a abordagem de herança, história Whig, ou história presentista, endossam a imagem de que a matemática é apenas para gênios, como se nenhum erro tivesse sido cometido durante os processos históricos de produção matemática. Isso vai de encontro com o nosso entendimento de educação, bem como com o objetivo central desta tese de promover uma postura problematizadora nos professores ao longo de toda a sua formação. Na verdade, queremos desconstruir a imagem de matemática única, com um desenvolvimento universal, linear, acumulativo e progressista. A nossa hipótese é que apresentando as dificuldades e descontinuidades que permearam a produção matemática ao longo do tempo e em diferentes culturas, podemos criar um ambiente em que todos se apropriem do fazer matemática. Acreditamos ainda que fazer história, considerando os paradigmas mais atualizados da historiografia, pode ajudar os estudantes a entenderem a matemática como uma atividade humana (e. g. PEJLARE; BRÅTING, 2019), ou seja, é uma maneira de mostrar que a matemática é produzida por pessoas ao participarem do seu discurso – discurso matemático aqui entendido nos termos sfardianos (SFARD, 2008).

É preciso, portanto, estar sempre alerta sobre as escolhas que são feitas durante a prática docente, pois, por mais corriqueira que possam parecer, nossas ações sempre revelam os pressupostos aos quais estamos subordinados. Queremos aqui lembrar das ideias freirianas.

> A concepção e a prática "bancárias", imobilistas, "fixistas", terminam por desconhecer os homens como seres históricos, enquanto a problematizadora parte exatamente do caráter histórico e da historicidade dos homens. Por isto mesmo é que os reconhece como seres que *estão sendo*, como seres inacabados, inconclusos *em* e

> *com* uma realidade que, sendo histórica também, é igualmente inacabada. (FREIRE, 2016, p. 126).

Assim, se nos afiliamos ao paradigma da educação problematizadora é natural também nos afiliarmos a uma perspectiva histórica que reconhece as práticas matemáticas em seus verdadeiros contextos, em que seu estudo faz emergir as suas idiossincrasias. Nesse sentido, entendemos que as escolhas históricas não são neutras e, portanto, um olhar crítico para as fontes históricas usadas é crucial.

Diante do exposto, destacamos duas ideias que precisam ser desconstruídas: a da *linearidade* e a da *universalidade*. A linearidade está relacionada à ideia da matemática tendo suas lacunas preenchidas, como se tudo já existisse e nós simplesmente descobríssemos e alocássemos em locais pré-determinados (por um ente eterno e até divino). A história da matemática, no paradigma presentista ou de herança, acaba sendo uma maneira de contar essa *estória*. Mas não é exatamente assim. Não existe uma única história da matemática em que tudo converge para um único local. De fato, há várias histórias que se entrelaçam.

Em relação à universalidade, às vezes se argumenta que a matemática é uma linguagem universal e que, por isso, deve ser ensinada. Se defendemos desconstruir a ideia de uma matemática única, muito menos pode haver uma matemática universal. Assim, da mesma forma que não devemos olhar para o passado com as lentes atuais, também não devemos olhar para outras culturas com a lente de uma cultura de referência específica (geralmente a eurocêntrica). Afirmamos, assim, a nossa posição de considerar a produção matemática de diversas culturas seja através do tempo, seja através do espaço. Consequentemente, para nós, a própria matemática não é absoluta. É nesse sentido que propomos a ideia de *redes de conhecimento* para representar a nossa concepção de matemática.

Tal como a malha para Saito (e.g. 2018), o conceito de rede de conhecimento congrega duas grandes ideias: a) o desenvolvimento da matemática não se dá apenas pelo sucesso e, consequentemente, a sua história descreve o percurso sinuoso e plural ao qual esteve submetido; e b) culturas diferentes produzem diferentes matemáticas. Uma consequência disso é que ao nos apropriarmos deste conceito, passa-se a entender a produção matemática como podendo ser apropriada por qualquer pessoa. Com isso em mente, é possível criar um ambiente mais democrático na sala de aula, em que todos possam participar do discurso matemático (cf. SFARD, 2008); em que participar do discurso é uma maneira de aprender o que já existe, mas também pode permitir novas formas – ou seja, a participação de uma pessoa na comunidade também pode modificar o próprio discurso.

APONTAMENTOS FINAIS DA DISCUSSÃO TEÓRICA

RUMO A SENTIDOS DE PRÁTICA...

Nesta tese, lançamos mão do termo *prática* em diferentes contextos, desde o próprio título. Por isso – e levando em conta que esse é um termo polissêmico e corriqueiramente utilizado –, consideramos ser necessário explicitar nossos entendimentos sobre os sentidos deste termo nos diferentes contextos em que ele aparece na tese, particularmente, *prática histórica* e *prática de sala de aula* (ou *prática docente*). Partamos de uma definição de prática disponível em um dicionário.

> **Prática** *s.f.* (sXV) **1** ato ou efeito de praticar **1.1** ação, execução, realização, exercício <*passar da teoria à p.*> <*a p. da razão*> **1.2** execução (de algo que se planejou); aplicação (de teoria, fundamento etc.) **2** o que é real, não é teórico; realidade <*as coisas na p. não são assim*> **3** m.q. *práxis* **4** execução rotineira (de alguma atividade) <*p. de esportes*> **5** capacidade, advinda da experiência; técnica, treinamento <*não tem p. em dirigir caminhão*> **6** maneira usual de fazer ou de agir; hábito <*o fisiologismo é uma p. de políticos*> **7** uso, costume, convenção **8** período preparatório; estágio **9** palestra, conferência, fala **10** mar permissão aos navegantes para que se comuniquem com um porto ou uma cidade[65]

Prática tem a ver, portanto, com adquirir uma habilidade, realizar, executar rotineiramente. É uma ação, em geral, relacionada ao desenvolvimento de uma capacidade a partir da experiência, podendo se transformar em um hábito, costume ou uma convenção. Nesse sentido, poderíamos dizer, a princípio, que práticas históricas são ações, maneiras usuais de se realizar algo, ou de buscar alcançar um objetivo comum em um determinado momento por uma pessoa, ou por um grupo de pessoas. Já práticas de sala de aula, ou práticas docentes, poderiam ser encaradas como aquilo que é comum de ser feito no cotidiano e no ambiente escolares – podendo variar temporal e espacialmente.

Nosso entendimento de *prática docente* decorre da concepção proposta por Marilyn Cochran-Smith e Susan Lytle para conhecimento-*da*-prática, no contexto da investigação como postura; sendo, portanto, uma prática indissociável de teoria. De acordo com as concepções sobre as relações entre conhecimentos e prática identificadas pelas autoras, a prática pode ser: referenciada pelo saber acadêmico (conhecimento-*para*-prática); pode se restringir à repetição a partir da experiência, sem necessariamente, reflexões associadas (conhecimento-*na*-prática); ou pode se constituir de experiências, de acordo com as suas próprias idiossincrasias,

[65] Verbete retirado de Dictionary by Apple.

problematizadas continuamente como objetos intencionais de investigação e, nesse sentido, não podendo ser entendida de forma separada da teoria (conhecimento-*da*-prática). Na concepção de conhecimento-*da*-prática, as experiências rotineiras ou as aquisições de habilidades articulam e incorporam os saberes da experiência (advindos do "chão da sala de aula") e os saberes teóricos (advindos da "academia").

Com relação às práticas históricas, apoiamo-nos em Roque que afirma que "Quando encarado como uma prática múltipla e diversa, esse conhecimento se apresenta composto por ferramentas, técnicas e resultados desenvolvidos por pessoas em momentos e contextos específicos, com suas próprias razões para *fazer matemática* e com ideias singulares sobre o que isso significa." (ROQUE, 2012, p. 16, ênfase no original). As práticas históricas são, assim, conhecimentos em ação, compostos por mecanismos, conjuntos de procedimentos, produtos ou consequências de atos ou fatos exercidos por uma pessoa ou por um grupo com finalidades especificas durante determinado período. Além disso, podem ou não ser mais exercidas atualmente, por terem sido substituídas, por fazerem parte de uma cultura especifica ou devido a transformações próprias da matemática.

A POSTURA PROBLEMATIZADORA *IN A NUTSHELL*

Retomando as principais ideias discutidas nos capítulos que compõem a nossa discussão teórica, reforçamos que a ***postura problematizadora*** que propomos nesta tese congrega algumas ideias apresentadas por diferentes autores, em diferentes momentos e em diferentes contextos e perspectivas teóricas.

Partimos da *educação problematizadora* de Paulo Freire, entendida pelo autor como a maneira pela qual os educandos são chamados a conhecer, por meio da investigação crítica e dialógica com o educador. Neste paradigma de educação, em oposição ao paradigma da educação bancária, busca-se pelo tensionamento da dicotomia educador/educando e o conhecimento deixa de ser o fim, passando a ser o meio em que se educa com vistas à consciência crítica. Assim, os estudantes desempenham um papel proativo e os professores buscam organizar as atividades a partir do e com vistas ao conhecimento dos estudantes.

Situando nosso posicionamento político e teórico com respeito à formação docente nessa perspectiva de educação problematizadora, o referencial teórico deste trabalho se sustenta em alguns pressupostos centrais (que se interconectam): a afirmação da docência como uma profissão, com práticas e saberes próprios; o reconhecimento do professor como autor e protagonista da própria formação; o entendimento de saberes docentes no contexto de culturas profissionais, e não naquilo que um professor individualmente sabe (ou não sabe); o entendimento de saberes docentes como sendo dinâmicos e emergentes da própria prática, não podendo ser contidos em categorias fixadas *a priori*. Como Maurice Tardif e seus colaboradores indicam, a partir da afirmação da docência como uma profissão, os saberes docentes constituem-se numa epistemologia própria, que, embora se articule com a matemática acadêmica, não podem ser reduzidos ou subordinados a essa. Se buscássemos pelo estabelecimento de categorias pré-definidas de saberes, correríamos o risco de considerá-los sob um prisma da deficiência, deixando de levar em conta as especificidades da profissão e de seus saberes. Em particular, isso poderia nos levar a deixar de considerar os saberes docentes como dinâmicos e emergentes, produzidos a partir de práticas mobilizadas por matemáticos e outros atores em contextos acadêmicos e por professores e estudantes em contextos escolares. Nesse sentido, não consideramos que "formar um professor" corresponda a transmitir a um indivíduo um conjunto de saberes pré-determinados, mas sim, como defende António Nóvoa, introduzir alguém na cultura da profissão – de forma que esse professor possa entender a si próprio como um profissional capaz de investigar e problematizar saberes e práticas situados em tais culturas.

Dentre os trabalhos de autores com os quais nos alinhamos nesse posicionamento, a noção de *investigação como postura*, proposta por Marilyn Cochran-Smith e Susan Lytle, joga luz para espaços de formação docente em que as hierarquias entre a academia e a escola e seus atores são relativizadas, buscando-se a não dicotomização entre teoria e prática. Nesses espaços, espera-se que os professores, trabalhando coletivamente, investiguem intencionalmente suas próprias práticas. Ao reconhecerem-se como protagonistas da sua própria formação, os professores podem perceber como eles e outros profissionais da educação são capazes de converter o conhecimento produzido na interação com diversos atores (estudantes e pesquisadores, por exemplo) em ações efetivas de transformação social.

Especificamente no campo da Educação Matemática, Brent Davis e seus colaboradores enfatizam que os saberes de matemática para o ensino constituem-se a partir da constante reinterpretação e reconfiguração dos saberes já existentes e mobilizados na prática docente (*substructing*). Para esses autores, o foco nos saberes próprios da profissão é propiciado pelo reconhecimento de que tais saberes articulam entendimentos sobre a matemática estabelecida e sobre como o conhecimento matemático é produzido. No âmbito escolar, a produção do conhecimento matemático pode se dar em coletivos docentes, a partir da discussão e do compartilhamento da prática profissional. Nesse sentido, os professores devem ser reconhecidos como agentes centrais (nada periféricos!) na produção de possibilidades matemáticas. Além disso, o foco em relações entre o indivíduo e o coletivo em detrimento de aspectos individuais completa a virada teórica em que Brent Davis e seus colaboradores fundamentam sua concepção de saberes docentes.

Assim, apoiamo-nos tanto no trabalho de Marilyn Cochran-Smith e Susan Lytle como no de Brent Davis para propor o desenvolvimento de uma *postura problematizadora* pelos professores, segundo a qual eles investigam coletivamente suas próprias práticas e (re)constroem saberes a partir dessas investigações.

No exercício da formação docente, uma possível ferramenta para discutir teoria e prática de forma articulada constitui-se das *mathtasks*, tarefas essas fundamentadas em questões de ensino e aprendizagem apontadas como seminais por pesquisas anteriores e pela experiência, como Irene Biza e Elena Nardi propõem. O engajamento com essas *mathtasks* pode ajudar os professores a desenvolverem uma postura proativa e reflexiva em que se discutem coletivamente percepções pedagógicas e epistemológicas.

Nosso posicionamento teórico sobre formação de professores não poderia ser compatível com uma perspectiva sobre aprendizagem que não fosse *participacionista* – presente tanto na educação problematizadora de Paulo Freire quanto na investigação como postura proposta por Marilyn Cochran-Smith e Susan Lytle ou nos coletivos docentes com vistas à reinterpretação dos saberes docentes defendidos por Brent Davis e seus colaboradores. Considerando que neste trabalho propomos o desenvolvimento de uma postura problematizadora por professores, não apenas sobre suas próprias práticas, mas também em relação aos processos de produção de conhecimento matemático, nos baseamos, para o desenho da investigação empírica e para análise de seus resultados, na teoria de *Commognition* de Anna Sfard, uma vez que essa fornece uma ferramenta analítica que permite jogar luz em discursos baseados em metarregras muito diferentes – tanto aqueles situados em práticas escolares, como aqueles provenientes de contextos históricos e de outras culturas. A *Commognition* também fundamenta a apresentação da matemática como um discurso e, consequentemente, de seu aprendizado como participação nesse discurso – o que se dá, em geral, a partir de um acordo em que se estabelece, ainda que tacitamente, o discurso principal, os papeis dos participantes e como se espera que a mudança discursiva ocorra. Assim, ao ingressar em uma comunidade de discurso, o participante novato imita o participante experiente de modo a fazer com que a sua participação ritualística evolua para uma participação exploratória.

Em se tratando do discurso histórico, seu acesso se dá a partir dos registros históricos. Contudo, observar os processos históricos com os olhos do presente pode restringir o entendimento daquelas práticas matemáticas. Além disso, uma visão desatualizada de história (mais próxima de herança), assim como uma concepção de matemática, que foca nos resultados em detrimento dos problemas motrizes, pode reforçar que a matemática é produzida e acessada exclusivamente por gênios inatos. Em contrapartida, quando buscamos olhar para as práticas matemáticas tal como elas se apresentaram, percebemos que esses processos se dão geralmente por meio de idas e vindas: observar a não linearidade desses processos, de certa forma, pode lhes conferir humanidade. Tatiana Roque propõe uma perspectiva problematizada da matemática em que o problema, e não mais a sua solução, é o que deveria dar vida e acesso à matemática. Se não percebemos que a formalização matemática dissimula os processos de constituição dos objetos matemáticos (o dizer mais com menos), acabamos por naturaliza-los. Uma maneira de abordar tal naturalização é contextualizando a matemática nas suas práticas genéticas culturais, filosóficas e matemáticas e não meramente em contextos cotidianos simplistas. A história da matemática, segundo os paradigmas mais atualizados da historiografia, possibilita o resgate dessas gêneses.

O uso de fontes históricas primárias pode contribuir para a formação de professores pelo menos de duas maneiras. O seu estudo pode desenvolver uma escuta intencional nos professores: como Abraham Arcavi e Masami Isoda defendem, o esforço pelo entendimento de uma fonte, pode implicar na busca pelo entendimento de outras produções, por exemplo, a dos estudantes. Ademais, como as metarregras do discurso matemático são contingentes e historicamente dadas, através do estudo de práticas matemáticas governadas por diferentes metarregras (por exemplo, as práticas históricas), tais regras podem ser explicitadas e analisadas, como Tinne Kjeldsen e seus colaboradores propõem. O confronto (*commognitive conflicts*) entre práticas governadas por diferentes metarregras pode levar a um aprendizado em metanível, ou seja, uma mudança discursiva, em que o sujeito passa a entender suas próprias rotinas de modo diferente.

Como Fumikazu Saito nos chama atenção, as narrativas históricas, bem como a interpretação que fazemos delas, não são neutras, ou seja, representam os anseios e desejos de determinada época e das pessoas que a propuseram. Isso nos leva a refletir que a escolha das fontes históricas deve ser crítica e consciente, dado que tal escolha tem implicações na formação ofertada. Afinal, a visão que temos sobre a matemática tem relação explícita com o que almejamos com o seu ensino.

Advogamos uma participação nas práticas sociais matemáticas visando à produção de sentidos e de afetos para o conteúdo pelos aprendizes em detrimento da exposição de fatos e procedimentos estabelecidos *a priori*. Assim, se buscamos por uma educação democrática e inclusiva, precisamos rever o próprio entendimento da matemática, por exemplo, como uma ciência neutra e isenta de política. Neste trabalho, procuramos provocar nos professores o desenvolvimento de uma postura problematizadora, segundo a qual, a partir do entendimento dos processos históricos de produção de conhecimento e não mais simplesmente de seus resultados, eles possam também entender dessa perspectiva as produções de seus estudantes e, consequentemente, problematizar permanentemente suas próprias práticas. Nesse sentido, o próprio professor deve ser crítico sobre a sua própria prática, o que o afasta do paradigma da colonização – como pode ser entendido, por exemplo, o conhecimento-*para*-prática, tal como apresentado por Marilyn Cochran-Smith e Susan Lytle. A postura problematizadora aqui proposta vai além da mera substituição de uma opinião, posição, ou concepção por outra. A partir do desenvolvimento de uma postura problematizadora, esperamos que o professor assuma uma posição de autonomia, autoridade e autoria em relação a suas próprias ações docentes, que seja situada em uma cultura profissional docente e, ao mesmo tempo, dialogue com atores externos a essa cultura sem a necessidade de se apoiar neles para legitimar suas práticas.

PARTE II

O ESTUDO EMPÍRICO E *UMA* ANÁLISE DOS DADOS PRODUZIDOS

O ESTUDO EMPÍRICO

A postura problematizadora apresentada na discussão teórica é a maneira a partir da qual acreditamos ser possível promover uma educação democrática e inclusiva. Nesse sentido, defendemos o desenvolvimento dessa postura por professores ao longo de suas formações e atuações profissionais, de modo que eles sejam formados e estejam preparados para praticar uma educação problematizadora, no sentido freiriano. Para tanto, desenhamos e implementamos ***atividades problematizadoras***. Tais atividades estão organizadas em três *etapas* especifica e objetivamente projetadas, compostas por dois *tipos* especiais *de tarefas*. Com vistas a sua implementação, consideram-se *tarefas avaliativas* fundamentadas em reflexão sobre e no compartilhamento de práticas. Nesta Parte II da tese passamos a relatá-las, explicitando de que maneira elas se fundamentam nas discussões apresentadas pela pesquisa em Educação, mais especificamente em Formação de Professores, e em História da Matemática, sobretudo nos seus usos na Educação Matemática. Apresentamos também uma análise dos dados produzidos durante a sua implementação. Gostaríamos de reforçar que as atividades problematizadoras são apenas *uma* forma possível – aquela que escolhemos – para desenvolver a postura problematizadora. Da mesma forma, a análise apresentada é *uma* análise possível, de acordo com a qual julgamos representar nossos objetivos com as atividades, qual seja, problematizar os modos como os professores participantes entendem o que é matemática e como ela é (ou deve ser) ensinada.

As atividades problematizadoras foram implementadas em uma disciplina de História da Matemática de um mestrado profissional em rede nacional para professores de Matemática, durante o segundo semestre de 2018. A disciplina é parte integrante do conjunto de disciplinas eletivas do programa e estava sob responsabilidade da Aline. Apresentamos nossa proposta ao colegiado do curso, que concordou com a implementação do estudo na referida disciplina. O argumento utilizado para a realização do estudo empírico na disciplina se pautou tanto na característica do curso quanto na especificidade da nossa proposta. Sendo assim, na primeira aula da disciplina apresentamos a nossa proposta (Apêndices M e N) aos professores – inscritos na referida disciplina – e todos concordaram em participar, mediante assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice AL). Todas as aulas tiveram a condução compartilhada da Bruna e da Aline – Victor participou do primeiro e do último encontros. Foram 13 encontros no total, cada um dos quais com duração média de 3 horas. Os encontros foram organizados em três momentos, seguido da avaliação do processo.

Participaram do estudo 12 professores que cursavam a disciplina como parte dos créditos necessários para a obtenção do grau de mestre. Na Tabela 1, encontra-se uma breve caracterização dos participantes, indicados por nomes fictícios. Os professores atuavam em escolas públicas e/ou privadas na cidade ou na região metropolitana do Rio de Janeiro (sendo que: Guilherme também lecionou no Ensino Superior, mas naquele momento estava aposentado; Leticia não lecionava mais; e Luciane também atuava como coordenadora pedagógica quando o estudo foi realizado).

Tabela 1 – Perfil dos participantes.

Participante	**Experiência de ensino no**			**Anos de experiência em sala de aula**	**Diploma de graduação em**	
	EFI	EFII	EM		Matemática	Física
Apolo	x	x	x	10	x	
Cleber		x	x	12	x	
Gabiangela		x		11	x	
Gladson		x	x	6	x	
Guilherme		x	x	50	x	
Leticia				5	x	
Luciane		x	x	7	x	
Michel		x	x	8	x	
Naylor		x	x		x	
Silvio		x	x	7	x	
Ulisses		x		40		x
Vinicius		x	x	3	x	

Fonte – A autora.

A disciplina ficou organizada em três partes. As duas primeiras partes correspondem a *rodadas de tarefas* e foram decididas previamente como parte da nossa proposta, em que, com vistas ao desenvolvimento de uma postura problematizadora em relação à matemática e aos modos como costuma ser ensinada, articulamos práticas históricas e de sala de aula. Para a última parte do curso, convidamos os professores participantes a decidirem entre uma terceira rodada de tarefas ou uma discussão histórica de um tema escolhido a partir de uma lista pré-definida. Eles optaram por mais uma rodada de tarefas, sobre o tema funções. A primeira Rodada de tarefas, sobre resolução de equações lineares, durou cerca de 2 encontros e meio; a segunda Rodada, sobre áreas e teorema de Pitágoras, 4 encontros e meio; e a terceira Rodada, 3 encontros e meio. Os dois últimos encontros foram dedicados à avaliação do processo, com a apresentação pelos participantes das propostas de abordagem e dos portfólios. A Tabela 2 e as Figura 10, Figura 11, Figura 12, Figura 13 a seguir ilustram a organização dos treze encontros e das três rodadas. As etapas que compõem cada rodada, bem como os dois tipos de tarefas e as tarefas avaliativas utilizadas são descritas detalhadamente no Capítulo 5. As Rodadas 1, 2 e 3 são representadas, respectivamente, nas cores pastéis laranja, cinza e amarelo.

Tabela 2 - Organização dos encontros.

Encontro			
1	apresentação da proposta história x herança termos de consentimento	Discussão Disparadora	
2	*Zoom in* e *Zoom out* Histórico		
3	*Zoom in* e *Zoom out* Histórico	Reflexões de Práticas Docentes	Decisão sobre a terceira parte
4	Discussão Disparadora		
5	*Zoom in* e *Zoom out* Histórico		
6	*Zoom in* e *Zoom out* Histórico		
7	Reflexões de Práticas Docentes		
8	Reflexões de Práticas Docentes	Discussão Disparadora	
9	Discussão Disparadora	*Zoom in* e *Zoom out* Histórico	
10	*Zoom in* e *Zoom out* Histórico		
11	*Zoom in* e *Zoom out* Histórico	Reflexões de Práticas Docentes	
12	Propostas de Abordagem		
13	Portfólios		

Fonte – A autora.

Figura 10 – Organização do estudo empírico.

Fonte – A autora.

Figura 11 – Rodada 1.

Fonte – A autora.

Figura 12 - Rodada 2.

Fonte – A autora.

Figura 13 – Rodada 3.

Fonte – A autora.

Os dados produzidos no estudo de campo incluem gravações em vídeo e em áudio dos 13 encontros; registros escritos das tarefas realizadas; diários reflexivos; propostas de abordagem; portfólios; respostas individuais ao questionário *on line*, com 42 perguntas abertas e fechadas (Apêndice AJ); e entrevistas individuais semiestruturadas (Apêndice AK), com duração entre 40 e 60 minutos, realizadas ao fim do processo. O questionário foi disponibilizado para os professores após a conclusão do estudo. Dos 12 professores participantes, apenas Naylor não respondeu ao questionário. As entrevistas também aconteceram depois da conclusão do estudo e foram realizadas presencialmente pela Bruna com a gravação em áudio. Nosso objetivo foi de coletar algumas impressões – explícitas, já que os outros dados apresentam impressões muitas vezes implícitas – dos participantes a respeito da experiência com a proposta aplicada. Todos os professores foram convidados a participar, contudo, apenas Silvio, Vinicius, Apolo, Cleber, Guilherme e Ulisses atenderam ao nosso pedido. Como preparação para a entrevista, procuramos olhar previamente as tarefas realizadas pelos professores.

Para nos referirmos aos dados, utilizamos o seguinte código:

- M[número do encontro] para os encontros (1 a 13), por exemplo: M7 para o 7º encontro;
- R[número da rodada] para as rodadas (1, 2, 3), por exemplo: R2 para a 2ª rodada;
- [número do encontro]R[número da rodada] para os encontros posicionados dentro das rodadas, por exemplo: 6R2 para o 6º encontro, que foi parte da 2ª rodada;
- PP para a apresentação dos portfólios;
- TA para proposta de abordagem;
- I[duas primeiras letras do participante] para as entrevistas, por exemplo: IVI para a entrevista do **Vi**nicius;
- RD[número do encontro][duas primeiras letras do participante] para os diários reflexivos, por exemplo: RD2AP para o diário reflexivo do **Ap**olo sobre o 2º encontro.

Como argumentamos nos capítulos a seguir, a partir da Rodada 1, as discussões nas rodadas seguintes foram fortemente influenciadas pelas rodadas anteriores. Sendo assim, entendemos que faz mais sentido considerar as três rodadas de forma articulada. Da mesma forma, consideramos a combinação dos diferentes tipos de tarefas como um dos diferenciais da nossa proposta. Assim, o aspecto intricado tanto das rodadas quanto dos tipos de tarefas utilizadas justifica que essas partes não sejam tratadas separadamente. Para que a complexidade da estrutura das atividades problematizadoras possa ser apreciada, os três capítulos a seguir estão organizados segundo o que chamamos de *metáfora da Babouska* (ou Matrioska), de modo que o que é discutido no Capítulo 7 (bonequinha maior) contém o que é discutido no Capítulo 6 (bonequinha do meio), que por sua vez contém o que é discutido no Capítulo 5 (bonequinha menor). A discussão do estudo empírico está organizada, portanto, em três momentos, que passamos a apresentar.

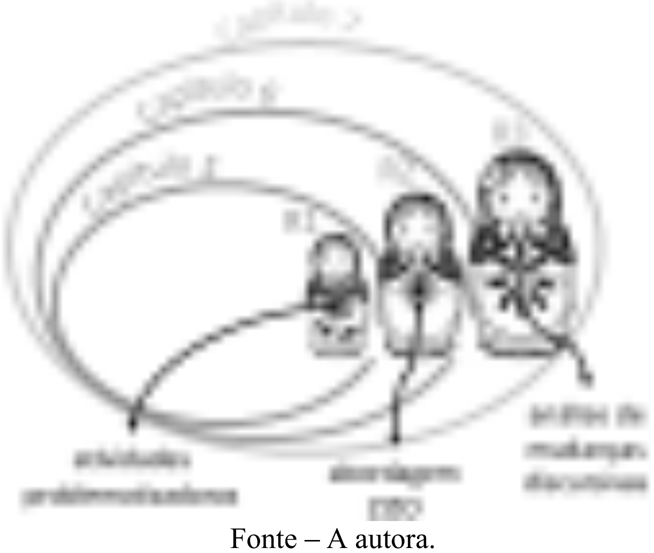
No primeiro momento (Capítulo 5.), descrevemos como desenhamos as atividades problematizadoras, explicitando como as tarefas propostas se articulam e se sustentam na discussão teórica apresentada na Parte I desta tese. Procuramos, ainda, argumentar como as reflexões a partir desse desenho metodológico podem contribuir com essa discussão teórica. Para exemplificar essa argumentação, usamos a Rodada 1.

No segundo momento (Capítulo 6.), focamos na parte histórica das rodadas, mostrando como usamos atividades encontradas na literatura para desenhar a nossa abordagem. Para exemplificar, usamos a Rodada 2.

Finalmente, o terceiro momento (Capítulo 7.) apresenta uma análise de algumas mudanças discursivas observadas nos participantes. Usamos a Rodada 3 para exemplificar.

O primeiro (Capítulo 5.) e o terceiro (Capítulo 7.) momentos são apresentados no formato de artigos escritos na língua inglesa. O artigo correspondente ao Capítulo 7 foi submetido para a Edição Especial *Advances in Commognitive Research* da revista *Journal of Mathematical Behavior*.

Figura 14 – Organização da apresentação do estudo empírico.



Fonte – A autora.

CAPÍTULO 5.

PAPER A – PROBLEMATIZING ACTIVITIES: A PERSPECTIVE FOR TEACHER EDUCATION

Bruna Moustapha-Corrêa, Victor Giraldo, Aline Bernardes

1. Introduction

Teaching is often embedded in an acquisitionist perspective, according to which teachers retain knowledge and are responsible for *depositing* it in the students, who are regarded as “empty vessels” – which Paulo Freire (2016) has referred to as *banking education*. With respect to teacher education, this perspective may be noticed in in-service professional development programs that follow a model based on the presentation of full packages of content knowledge and/or pedagogical procedures for teachers to comply with – therefore, disregarding teachers experiences and knowledge built from practice. Specifically in the case of mathematics, a banking education perspective may be reinforced when the discipline is presented at school thorough a *non-problematized* view (Giraldo, 2019), that is, as a ready-made body of knowledge, that has always been and will always be the way it is today, or that evolves linearly and universally through the sole work of innate geniuses. In particular, such view may shape and spread an idea that mathematics is for “a few gifted ones”.

Such perspective can be put into question if the ways through which mathematical knowledge is historically produced are taken into account in teaching. This can be achieved within the understanding that history is not done and ready, not because new frontiers of mathematical research are pushed outwards every year, but because history itself is reinterpreted and rewritten over time (e. g. Saito 2018). For instance, Grattan-Guinness (2004b) distinguishes a *history interpretation* in opposition to a *heritage interpretation*. The former seeks to answer the questions “what happened in the past?” and “why it happend”; whilst the later tries to answer “how did we get here?”, searching for similarities between notions from the past and more modern ones. The history interpretation challenges a view that seeks to rationally reconstruct the past in the light of present mathematical and philosophical notions.

Likewise, Freire (2016) proposes *problematizing education* as a counterpoint to banking education. For the author, problematizing education leads to uttermost freedom, through coming to know in communion, and overcoming the dominant dichotomy between "those who know and transmit" and "those who receive" knowledge. We find echoes of a problematizing education in more recent perspectives for teacher education. For instance, Cochran-Smith and Lytle (2009) propose the notion of *inquiry as stance*, which they define as teachers intentionally regarding their own practices as objects of inquiry, working together in communities. Specifically in mathematics teacher education, Davis and Renert (2014) consider that mathematical knowledge for teaching "is more about re-interpreting, reconfiguring, reknowing what is assumed to be known already" (Davis & Renert, 2014, p. 44), what emphasizes the dynamic aspect of teachers' knowledge, as a permanent, ongoing construction. These authors also highlight the collective dimension of teachers' knowledge, as they advocate study groups, in which teachers (re)construct their mathematical knowledge for teaching by sharing their own experiences from practice.

Inspired by the perspectives – on education, teacher education and history of mathematics – of the authors briefly quoted in the previous paragraphs, we designed a proposal for in-service teacher education – *problematizing activities* – through which we aim to put forward a *problematizing stance* (to be described in the next section). To achieve this goal, we combine specific type of tasks – *mathtasks*; *history-focused tasks* – three stages – *triggering discussions*; *historical zoom in and zoom out*; *reflection of teaching practices* – as well as specific assignments – *reflective diary*, *portfolios* and *teaching approach*. We acknowledge that the theme task is broadly addressed in recent research in Mathematics Education (e. g. Watson, Ohtani, & Ainley, 2015). For our purposes, we draw upon the *mathtasks* proposed by Biza and colleagues (e. g. Biza, Nardi, & Zachariades, 2007, 2018); and, inspired by the literature, in particular Kjeldsen and colleagues (e. g. Kjeldsen & Blomhøj, 2012) and Arcavi and Isoda (2007), we propose history-focused tasks – which we present in this paper. The combination of *mathtask* and history-focused tasks encourage a rich learning environment in which teachers may develop a problematizing stance on mathematics and its teaching, whereas the assignments enable teachers to keep reflecting through the whole process.The problematizing activities also resonate the development of *listening capabilities* as Arcavi and Isoda (2007) posit, and the perspective of *learning as participating in a discourse* according to commognition theory (Sfard, 2008).

Recent international literature has denounced a lack of empirical studies discussing how history of mathematics may contribute to mathematics' teaching both along school education and along pre-service and in-service teacher education (e. g. Jankvist (2009); Saito (2016; 2018); Fauvel and van Maanen (2000)). In the last years this trend has been turning around, as a number of teaching proposals considering historical approaches has been brought about (Clark, 2014; Clark, Kjeldsen, Schorcht, & Tzanakis, 2018) show us. However, as Saito (2018) points out, although there are some promising initiatives integrating history of mathematics and mathematics' teaching, many of those are reports of experiences, lacking theoretical foundations, especially concerning the articulation of history and education. According to this author, since history of mathematics and mathematics education are two consolidated research fields, in order to integrate them, it is important to consider their specificities, namely, their theoretical and methodological paradigms. Saito (2018) also criticises most of such initiatives for being centred in mathematical content and for being based on presentist historiographical assumptions (or in heritage interpretations, in the terms of Grattan-Guinness).

On the other hand, the literature in mathematics education, especially in teacher education, has been acknowledging the specificity of knowledge for teaching (e. g. Ball, Thames, & Phelps, 2008; Davis & Renert, 2013; Shulman, 1986), as well as the authority of school teacher over this knowledge (e.g. Cochran-Smith & Lytle, 1999, 2009; Nóvoa, 2009; Tardif, 2000; Tardif, Lessard, & Lahaye, 1991). Moreover, literature highlights the importance of communicating, working together, discussing, reflecting and sharing practices within communities, as an intentional way for teachers to conduct their own professional development (e. g. Cochran-Smith & Lytle, 1999; Davis & Renert, 2013). As teachers' perspectives on mathematics teaching are often complex, evolving and tacit (Davis & Renert, 2013), we believe that encouraging the communication between them in in-service education is a way of making the aspects regarding mathematics for teaching more explicit. Further, it is also a way of making the teachers more aware of their own process of leaning.

Taking these broad issues into consideration, the research reported in this paper aims to contribute with the discussion on the uses of history in mathematics education, by presenting a *problematizing activities* (PA) proposal that builds upon interfaces between history and mathematics education (e. g. Saito, 2016; Saito & Dias, 2013). The role of history of mathematics in our proposal goes beyond the reference for stablished mathematical content. Rather, we use the history to take teachers out of their comfort zone, by putting them in contact with mathematical practices that they are (most likely) not acquainted with, as Kjeldsen and colleagues (e. g. Kjeldsen & Blomhøj, 2012) has proposed. Our approach also aims to surpass the barriers between theory and practice, and we do so by drawing upon Biza and Nardi's *mathtasks* (e. g. Biza et al., 2007, 2018). Our PA address the differences between mathematical practices from the past (through history) and from the classroom (through *mathtasks*), by problematizing and situating them in their respective contexts. Moreover, we see the PA as a means of letting *teachers in the role of teachers in their own in-service education*, that is, a proposal of in-service teacher education which builds upon participants' experiences from practice, and whose developments are largely led by the participants themselves.

An experience with the PA proposal was conducted as part of the doctoral research of the first author jointly supervised by the other two authors. The aim of this paper is to describe and sustain how we use a combination of three theoretical axes – teacher education; use of history in mathematics education; commognition – to design the PA proposal for mathematics teachers' in-service education, underpinned by conceptual assumptions and political stances articulating these axes. This discussion is illustrated and supported by empirical data from the experience we conducted. Our proposal is designed to lead the participants to develop a problematizing stance and possibly shift their discursive activities in mathematics and mathematics teaching. We do not intend to suggest that the proposal we propose is *the only* way to achieve these goals – but *one possible way*. That is, in this paper, we wish to put forward how we articulated different theoretical perspectives to draw one possible way aiming at these goals. In particular, we expect to contribute with the discussions on the use of history in mathematics education and on the conception of teacher education programs.

2. The Problematizing Stance and its Foundations

We propose a notion of *problematizing stance* for teacher education, grounded on different theoretical constructs. We start from the landmark work of Paulo Freire (2016) in which he denounces the *banking education*, according to which students are regarded as empty vessels to be filled with knowledge. The author argues that education should instead see the learner as co-creators of knowledge. To Freire, education is the authentic freedom, a "praxis which implies the action and reflection of people over the world to transform it" (Freire, 2016, p.118) – that is, the *problematizing education* perspective. Such reflection must be pervaded of intentionality, which demands problematizing relations of people with the world. Inspired by Freirean perspective, in our work, by problematize we mean specifically *to put into question what is usually taken for granted*, aiming to consider different perspectives on mathematics, as well as on its teaching and learning. Problematization is, therefore, *an epistemological and political stance towards mathematics teaching practices*, according to which the focus should be more on the social, historical and subjective processes that engender mathematical knowledge production, than on the mere exposition of facts and procedures.

On the side of the teacher education, we draw on Cochran-Smith and Lytle (2009)'s *inquiry as stance*. When discussing relationships between knowledge need for teaching and professional practice and its implications for teachers education, these authors advocate that theory and practice cannot be dichotomized: “understanding the knowledge needs of teaching means transcending the idea that the formal-practical distinction captures the universe of knowledge types.” (Cochran-Smith & Lytle, 1999, p. 274). The authors define inquiry as stance as teachers taking their own practice as intentional objects of investigation, in communities of inquiry, where hierarchies are made more flexible and knowledge is collectively constructed. “[...] inquiry as stance is neither a top-down nor a bottom-up theory of action, but an organic and democratic one that positions practitioners’ knowledge, practitioners, and their interactions with students and other stakeholders at the center of educational transformation.” (Cochran-Smith & Lytle, 2009, pp. 123-124).

To reflect on a proposal for teachers’ education that draws upon the inseparability of theory and practice, we get inspired on Biza and Nardi (2019) framework of *mathtasks*, in which they aim to encourage teachers to develop a proactive reflective attitude, while engaging with tasks. As they posit, tasks may be considered as mediating tools for teaching and learning mathematics (Biza et al., 2018). *Mathtasks* is a specific type of task, designed to engage teachers with (fictional but likely to occur) classroom scenarios, informed by learning and teaching issues that previous research and experience have highlighted as seminal. In engaging with *mathtasks* teachers may problematize their own opinion regarding mathematical knowledge and epistemological and pedagogical beliefs and perceptions.

Thus, our problematizing stance on teacher education lies on the assumption that teachers should play the role of authors of their own in-service education (Nóvoa, 2009), and not as passive actors who only receive ready content knowledge or pedagogical instructions. Since we align with a participationist perspective (in opposition to an acquisitionist one), the teachers’ communities advocated by Cochran-Smith & Lytle (e. g. 2009) are promising environments to discuss and reconstruct knowledge for teaching. The defence of in-service education in teachers’ collectives is shared by Davis and colleagues, with specific focus on mathematical knowledge for teaching. For these authors: (1) the inseparability between established mathematics and how mathematical knowledge is produced is crucial for teaching (Davis; Simmt, 2006); (2) rather than peripheric actors, teachers are acknowledged as key agents on the production of a range of mathematical possibilities, i.e. cultural mathematics situated in different social contexts (Davis; Renert, 2009); (3) research on teachers’ professional development should focus more on the relationships between individual and collective aspects, than on what an individual teacher knows or doesn’t know (Davis; Simmt, 2006).

The participacionist perspectives on learning – present in Freirean problematizing education, and in approaches for teacher education put forward by authors as Cochran-Smith & Lytle and Davis – is also consonant with the understanding of mathematics as a discourse. Theory of commognition (Sfard, 2008) considers learning as becoming participant in a discourse – mathematics, in our case. Since discourse is shaped by metarules – rules about communicative actions, implicitly present in discursive actions – discursive patterns result from such rule-governed processes. In this vein, the development of mathematics can be understood as the changing of metarules across time and contexts. The metarules of mathematical discourse are, therefore, contingent and historically given. If the participants of a discourse are acting according to different metarules, commognitive conflicts may emerge, which are defined as conflicts in communication across incommensurable discourses ("discourses that differ in their use of words and mediators or in their routines" (Sfard, 2008, p. 299)). In educational context, having, albeit tacitly, a learning-teaching agreement may help address the commognitive conflicts. According to Sfard (ibid), at least three basic aspects of the communicational process might be agreeded between the participants: the leading discourse, roles of the participants, as well as the nature of the expected changes.

Furthermore, participacionist perspectives focus *on how knowledge is produced* (rather than on mapping out stablished knowledge to be acquired). Therefore, from this perspective, history of mathematics should be considered as a key aspect of knowledge need for teaching the discipline. More specifically, if we are aligned with a perspective according to which teaching should focus more on knowledge construction and sharing than on presentation of stablished facts, then we must also advocate that teachers must develop a deep and broad understanding on how mathematical knowledge production is historically and socially situated, and that mathematics is not a time-static set of facts. This demands not only knowledge on history, but a *specific take on history of mathematics*.

In this sense, Grattan-Guinness's (2004b) distinguishes two different ways of interpreting the mathematics of the past, *history* and *heritage*. Historians are not interested only in heroic successes, but also in what *did not* work out. They look for the chronology of mathematical ideas under scrutiny, considering impacts of these ideas in and/or outside mathematics, as well as differences between them and more modern ones. Historians consider not only the mathematical aspects, but also social and cultural contexts in which they are situated. Heritage, on the other hand, addresses the question "how did we get here?", as if the present could be "*photocopied* onto the past" (Grattan-Guinness, 2004b, p. 165, emphasis in the original). Grattan-Guinness states that "mathematicians normally read the past in a heritage spirit" (2004a, p. 5), since a "philosophical difference is that inheritors tend to focus upon knowledge alone (theorems as such, and so on), while historians also seek motivations, causes, and understanding in a more general sense." (2004b, p. 165).

Our perspective is aligned with Grattan-Guinness's interpretation of the mathematics of the past as *history*. Thus, the problematizing stance we propose aims to promote an understanding of mathematics which is in opposition to a view of mathematical knowledge production as a linear, cumulative and progressive development. We conjecture that presenting discontinuities and difficulties that pervade over time and across different cultures opens up possibilities for creating learning environments which may give mathematics a more human face – and, thus, leading both students and teachers to nurture confidence and authority to do mathematics.

Drawing on commognitive theory, Kjeldsen and colleagues argue that "history can be used in mathematics education to reveal metadiscursive rules and make them explicit objects of reflection and – ultimately – to provoke commognitive conflicts" (Kjeldsen & Blomhøj, 2012, p. 330). For these authors by "having students ask and investigate historical questions about the development of practices of mathematics, using historians' tools, meta-rules can be exhibited as explicit objects of reflection" (p. 330). With this spirit, Kjeldsen and colleagues design teaching and learning situations in which historical sources present to students mathematical discourses governed by metarules they are not acquainted with.

We consider that the heritage interpretation to the mathematics of the past, besides perpetuating a view of mathematics as produced exclusively by innate geniuses, may not allow commognitive conflicts where tangible differences in discourse are necessary. It is, therefore, the history interpretation that can underpin Kjeldsen and colleagues' approach. In this interpretation, primary sources are studied and past episodes are placed in their contexts, enabling differences to emerge. We are also inspired by Arcavi and Isoda's (2007) listening approach, according to which teachers should try to understand their students' productions after engaging in historical tasks through *listening*, that is "giving careful attention to hearing what students say (and to see what they do), trying to understand it and its possible sources and entailments." (p. 112).

In summary, the *problematizing stance* we propose for mathematics education underlies a view on history of mathematics and on mathematics itself. Having this stance as a groundwork, we design *problematizing activities* (PA) for mathematical teachers' in-service education (to be described in the following section). These activities are organized in three stages – *triggering discussion*, *historical zoom in and zoom out*, and *reflections of teaching practices* – which, on their turn, are built upon two types of tasks – *mathtasks* and the *history-focused tasks* – and on assignments that promote reflection and that encourage the incorporation of the problematization in teachers' practice. Thus, accordingly to our problematizing stance, the classroom situations for the *mathtasks* as well as the historical sources for the history-focused tasks must be consciously and carefully chosen – since such choices have critical implications for education. We advocate participation in mathematical social practices aiming at the production of meanings and affects for content by learners, in opposition of exposing pre-established facts and procedures. Thus, if we are aligned to democratic and inclusive education as a principle, we must review the understanding of mathematics, for example, as a politically neutral science. Our PA aim to address these issues.

Following, we describe and theoretically support the design of the *mathtasks* and the *history-focused tasks* used in our problematizing activities, we also describe the stages in which we organize these activities, as well as the assignments we propose to be used when they are implemented.

3. The Problematizing Activities and their Design

The *problematizing activities* (PA) proposal was designed to stimulate teachers to develop a *problematizing stance* towards mathematical knowledge production and mathematics teaching, and, thus, to problematize the ways they deal with their students' production. We do this by combining *history-focused tasks* (inspired by the work of Kjeldsen and colleagues (e. g. Kjeldsen, 2011)) and *mathtasks* (e. g. Biza et al., 2007, 2018)). Either by bringing historical excerpts, or by using *mathtasks* we try to promote commognitive conflicts (Sfard, 2008). Our goal is to encourage the participants to reflect and discuss on: i) their own *routines* regarding their teaching or mathematics practices; ii) how they understand mathematics, and also iii) the criteria they apply when judging their students' mathematical reasonings and productions.

The PA we propose and describe here are organized in *tasks rounds*, consisting of three stages: *triggering discussion*, *historical zoom in and zoom out*, and *reflections of teaching practices* (Figure 1). In each round, we amalgamated history-focused tasks, *mathtasks*, and reflective assignments in which the teachers write about what happened and/or share their thoughts with the group.

Figure 1 – Rounds' structure.

Source – Developed by the authors.

3.1. The Two Types of Tasks and their Roles Within Problematization

3.1.1. *Mathtasks*

In general, *mathtasks* describe teaching situations – for example, a mathematical problem and a conundrum triggered by different solutions – and posit some questions about it – for example, how would teachers react to the conundrum, and what kind of feedback they would give to students (e. g. Biza et al., 2007, 2018). These situations are usually fictional, but informed by recent research, and likely to occur in actual classroom contexts. *Mathtasks* are seen both as activities for in-service teacher education, and as data production tools for research on teachers' knowledge and practices (e. g. Biza, Kayali, Moustapha-Corrêa, Nardi, Thoma, in press). Usually, the application of *mathtasks* with groups of teachers takes place according to the following structure: firstly, participants are asked to solve the mathematical problem; secondly, read the given situation and individually register their written responses to the questions; and finally, a plenary discussion takes place. In the context of research, data collection may include participants' written responses, audio or video recording, and researchers' protocols.

Mathtasks may provide environments where participant teachers are invited to take the role of teachers in their own in-service education. In other words, *mathtasks* are intentionally designed to bring practice into teachers' education, that is, to create an environment where discussions aiming at in-service education are situated in school practice – instead of discussing knowledge for teaching "abstractly" (e. g. Biza & Nardi, 2019, Biza, Kayali, Moustapha-Corrêa, Nardi, Thoma, in press). For that purpose, participants are invited to reflect on feedbacks they would give to students in specific situations. Moreover, it also nurtures the sharing practices between the participants, leading them to reflect on their own practices and to problematize these practices within an environment situated in collective professional contexts.

The *mathtasks* we use in this research are specially designed for our proposes. Thus, considering our goal to promote a problematizing stance, we intentionally seek for situations in which: (1) teachers are confronted to solutions or approaches that are likely to *differ* from the ones they are used to deal within their practices – for example, solutions by trials for problems modelled by linear equations, or approaches for proving the Pythagoras' theorem through a puzzle; or (2) they are invited to reflect on and to problematize deeply rooted routines – such as the ones in which students' mistakes are assigned only to their alleged conceptual or cognitive flaws, regardless of any reflection on teaching choices or other factors. In both cases, it is possible to foster commognitive conflicts (Sfard, 2008), since the situations used in ours *mathtasks* are designed to show different strategies or approaches, aiming to lead the teacher to reflect on classroom episodes usually taking for granted. In our PA, the *mathtasks* may be situated in classroom situations or encompass the preparation of the lessons.

3.1.2. Histotry-focused Tasks

In recent research literature in Mathematics Education, the term *task* has been used to describe different structured situations for teachers' education (e. g. Watson et al., 2015). The *mathtasks* proposed by Biza and colleagues (e.g. Biza et al., 2007, 2018), that we use as part of our PA proposal, is an example of such situations. In this work, we use the term *history-focused tasks* to refer another component of our PA proposal: situations in which teachers explore historical sources and engage in collective discussions on the sources and its contexts. The history-focused tasks were intentionally designed to foster commognitive conflicts, in the sense of Sfard (2008). With this aim, we draw on Kjeldsen and colleagues' (e. g. Kjeldsen, 2011; Kjeldsen & Blomhøj, 2012; Kjeldsen & Petersen, 2014) approach, according to which history of mathematics is a source of discourse governed by different metarules. Thus, we seek to contrast practices from the past and practices teachers are expected to be familiar with – either in their classes, or in their experiences as students. With these tasks, we aim to create moments for teachers to problematize their understanding on mathematics and on its teaching. We distinguish two types of history-focused tasks, which we call *immersion* and *overlook*.

Immersion task. In immersion tasks, teachers are invited to explore a historical source in depth. We do that by presenting them to historical excerpts as similar to the original as possible. Our goal is to shake participants' comfort zones constituted by the kind of discourses they are familiar with. Since original historical discourses are rather different from those teachers are usually acquainted with, as for example the ones present in classrooms (Kjeldsen & Petersen, 2014), the use of primary sources may put these different discourses in contrast and make such confrontation an explicit object of reflection. In the terms of our theoretical framework, our intention is to promote commognitive conflicts (Sfard, 2008). Besides that, we aim to encourage teachers to develop intentional listening capabilities, as proposed by Arcavi and Isoda (2007). As these authors posit, “the linkage between interpreting texts and interpreting students is promising” (2007, p. 125).

Just to allow reading by the participants, the tasks present Portuguese translations of the historical sources, since we did not want to add a difficulty with the language, but to focus on the contrast of different mathematical discourses. Teachers are firstly invited to highlight the issues they had difficulties with, and to formulate questions they consider would be helpful to understand the content of the source. According to Arcavi and Isoda (2007), engaging in tasks whose understand is not straightforward may help teachers to understand students’ productions which differ from usual or expected ones. We also present some questions intended to guide the understanding of the source. Our aim with such task structure is to lead teachers to unveil the source.

For the choice of sources, we took into account: a) the availability of primary and secondary historical sources for a given mathematical topic that we had selected to study; b) differences between the mathematical practice of the sources and current practices – that is, practices shaped by different metarules. Our main option is to use primary sources. However, secondary sources may help to better understand the practices, or, may provide to us a translation to a language that we understand.

Overlook task. Overlook tasks aim to situate the discussion in the mathematical practices associated with the social and cultural context in which the source was produced. Thus, we discuss the mathematical discourses of specific periods and cultures, and, on doing so, we aim to shake the sovereignty of the contemporary mathematics over the past mathematics. In other words, we seek to study the mathematics done by a specific culture in a specific period, within its own references, avoiding to frame it in the mathematics we are familiar with.

For overlook tasks, firstly the teachers are invited to study references (usually textbooks and videos) about the topic of study; then a plenary discussion takes place, aiming to deepen the study of these references, as well as to bring about further aspects of the mathematical practices (e.g. objectives and structure of the source, techniques used to solve the problems, social and cultural aspects and so on).

In summary, with the history-focused tasks we seek both to immerge in and to provide historical overlooks of the sources, aiming to draw teachers' attention to the diversity of ways through which mathematics can be produced. We end up also problematizing possible understanding of what mathematics is (or may be), since it is possible, through the study of primary historical sources, to show time and space situated (mathematical) practices.

To achieve these goals, it is important to carefully select historical excerpts – the ones which are more likely to foster commognitive conflicts, and allow different interpretation for them – and the references used in historical overlooks – which allow to situate the historical and social context, the associated mathematical practices and to understand their idiosyncrasies. Anachronistic approaches may impede commognitive conflicts to occur. The presentation of historical practices with modern notation and arguments may hinder differences with contemporary mathematics and understandings of "how the actors thought".

3.2. The Three Stages of the Problematizing Activities

3.2.1. Triggering Discussion

Since our goal is to develop a problematizing stance, we consider important that participant teachers' views on mathematics and its teaching is explicitly brought to surface in advance. So, during the first stage we developed *mathtasks* in which the teachers are invited to begin the reflection about the topic of the round. We use Biza and colleague's *mathtasks* (e. g. Biza et al., 2007, 2018), in order to put into question the ways teachers deal with their ordinary teaching activities. Our aim is to invite teachers to reflect on situations that could actually happen in the classroom. On the other hand, we draw on the assumption that, the more familiar such situations are for the teachers, the less likely to provoke reflection they are. Thus, to trigger each round of our PA, we use a mathtask carefully designed to balance familiarity and likelihood to occur in an actual classroom context with unexpectedness and likelihood to move teachers out of their usual comfort zones.

3.2.2. Historical Zoon In and Zoon Out

This stage is compound of zoom in and zoom out movements: an *immersion* in original sources, a historical *overlook*, and *unveiling* the source. As Figure 2 suggests, these three moments are interconnected in a way that it is difficult to tell them apart.

Figure 2 - History-focused task: its three components.

Source – Developed by the authors.

This stage begins with the immersion task in order to shake teachers' comfort zones. Overlook tasks are developed to contextualize the practices. Finally, we propose to return to the source with the aim of unveiling it.

3.2.3. Reflection of Teaching Practices

The final stage of each task round is the *reflections of teaching practices*, in which the teachers are again presented to hypothetical classroom situations within a *mathtask*, but now also taking into consideration the historical context and the excerpt previously discussed. The idea is to summarize and to consolidate the discussions of the round linking them with the participants' practices, and to invite the teachers to reflect on different strategies and approaches.

The task round seeks to lead teachers to develop a problematizing stance towards ordinary classroom situations, involving a specific mathematical content, and to question not only *how* to teach but also *what* to teach; and also, towards mathematics itself, especially regarding its understanding as an ever-changing discipline.

Beyond the structure of the rounds, there are also the assignments used in the PA, according to which we aim to keep the participants involved during the process of developing a problematizing stance. Following we describe our assignments choices.

3.3. Assignments Choices

Robutti et al (2016, p. 664) points out some characteristics shared by the tasks performed in collaboratives contexts, among which we highlight the *cycles of activities* and *activities that promote awareness about reflection*. By *cycles of activities* they refer to the study of specific materials anchored in the research literature; design of activities for the classroom; implementation; analysis of implementation and the consequent redesign and re-implementation. Even though we recognize the value of implementing the activities in the teachers' classroom, this type of activity was not included in the assignments tasks, because we had a limit time to implement and analyze the PA. The *activities that promote awareness* advocated by the authors regard teachers' awareness on their own reflection of what is to be considered within the process and of the intentions that underpins it. In this sense, the authors suggest shared discussion in collaborative works and written production as ways of promoting awareness about the reflection. For this purpose, we propose *reflective diaries*, *report of the meeting* and *portfolios* as assignments, based on the elaboration of narratives.

- *reflective diary* – free-form personal narrative about what happens in each meeting of the PA, trying to connect what was discussed during the meeting and the own experiences of the participants;
- *report of the meeting* – at each meeting of the PA, two participants (voluntarily selected) might be responsible for preparing a report on the main points of that meeting, to be shared at the beginning of the following one (each participant might be responsible for at least one of these reports);
- *portfolio* – a set of materials and reflections produced throughout the PA, prepared jointly by pairs of participants, and presented to the whole group at the end of the process, in order to share their experiences developed during the PA.

As Robutti et al (2016) remark, written records of both personal and professional experiences are important for the teachers to increase their awareness about their practices. Furthermore, Nóvoa (2009) stresses that pre-service and in-service teacher education must contribute to creating habits of reflection and self-reflection. For this author, theses habits are essential in a profession that is not fully prepared or graduated in scientific or even pedagogical matrices, and that is inevitably defined by personal references. Inspired by these ideas, we proposed the three assignments described above aiming to prompt a reflection process by the teachers.

Beyond the elaboration of those narratives, we also suggest as assignment the proposition of *teaching approaches* of a topic of the participant's choice, that can be applied in one of their own classes. The idea is to encourage the teachers to choose topics different from those covered in the PA, so that they can effectively think on how to extrapolate the PA's discussions to incorporate a problematizing stance into their own practice. The teachers might also try to incorporate their experiences during the PA in their proposals: for example, they can use history directly, or be inspired by history; or they can consider the structure of the lessons – triggering, immersion, reflection; or even just implement the reflection process.

Aiming to encourage creativity and autonomy by the participant teachers, we did not provide pre-determined templates for any of the four assignments. Although this may constitute difficulties, especially for those less used to writing, it gives teachers freedom to express their reflections and productions using their creativity and knowledge.

Together with the tasks used in the round, these assignments helped us to observe teachers' discourses on teaching and mathematical practices. In this sense we used the commognition theory in the design of our PA and in the data analysis of its application. This end up allowing us to observe and assess the discursive shifts the teachers experienced through the participation on the PA, as we report in Moustapha-Corrêa, Bernardes, Giraldo, Biza and Nardi (in review).

4. Describing One Application of the Problematizing Activities

In this section, we describe *one* application of the PA, in which we used three tasks rounds and the tasks assignments presented above. We do not claim that this is *the only way* of materializing our PA structure, but *one possible way* to do so. Therefore, in this section, we report the design and some reflections on one application of the PA we propose, as a means of illustrating its structure and sought to fulfil its features. Thus, we first describe the context of the implementation, the characteristics of the participants and the data production. Then, we briefly present the theme and the intentions of each round. Finally, we describe in details the first task round and its stages.

4.1. Context, Participants and Production of Data

A first PA was conducted in a module on History of Mathematics in a professional masters' program, at a public university of Rio de Janeiro, Brazil, during the second academic term of 2018 (from August to December). More specifically, that is a masters' program in national network, directed to mathematics school teachers. The module was distributed in 13 three-hour weekly sessions, and were part of the participants degree. In Brazil, certification to teach at school level is granted by a specific undergraduate degree. Thus, masters' programs for teachers are usually regarded as professional development (but not as legal requirements), and may also have an impact on incomes. The participants were 12 teachers, whose ages ranged between 29 and 73 years old, and whose teaching experiences ranged between 3 and 50 years. Table 1 summarizes this information. Participants are identified by pseudonymous.

Table 1 – Participants.

Participant	Years of teaching experience	Lower secondary school teaching experience	Upper secondary school teaching experience	University teaching experience	Mathematics	Physics
		At the time of study			Degree	
Apolo	10		Also Primary School			
Cleber	12					
Gabiangela	11					
Gladson	6					
Guilherme	50			(retired)		
Leticia	5	(no longer teaches)				
Luciane	7					
Michel	8					
Naylor						
Silvio	7					
Ulisses	40					
Vinicius	3					

Source – Developed by the authors.

The application of the PA took place across the whole academic term, encompassing all its 13 sessions. The first and the third authors conducted the sessions, and the second author was present in the first and the last meeting. The first meeting was a presentation of the proposal's structure, in which all the teachers formally agreed of participating in the study. They were told that, by the end of the first round, they would be asked to decide whether or not they would like to have another round, and if so to choose this third-round's theme. By the end of the first meeting we began the first round, which continued over two more sessions. The second round began in session 4, and continued over four more sessions. Thus, by the end of session 8, we invited the teachers to join the triggering *mathtask* of the third round, and, during the following three meetings the third round was developed. Session 12 was dedicated to the presentation of the Teaching Approaches prepared by the participants. In session 13, the Portfolios were presented, and a final evaluation of the experience of the PA's application was done by all the participants, including the two lectures.

Table 2 - Meetings.

Meeting	Content		
1	Presentation and signing the consent term	R1 – Triggering-mathtask	
2	R1 – History task		
3	R1 – History focused task	R1 – Reflection of teaching mathtask	Decision about R3
4	R2 – Triggering-mathtask		
5	R2 – History focused task		
6	R2 – History focused task		
7	R2 – Reflection of teaching mathtask		
8	R2 – Reflection of teaching mathtask	R3 – Triggering mathtask	
9	R3 – Triggering mathtask	R3 – History focused task	
10	R3 – History focused task		
11	R3 – History focused task	R3 – Reflection of teaching mathtask	
12	TA		
13	PP		

Source – Developed by the authors.

The data produced includes audio and video recordings of the 13 sessions; individual reflective diaries (written weekly by the participants); individual responses to the tasks discussed in the meetings; teaching approaches and portfolios, both produced and presented in pairs. There are also individual responses to an online questionnaire, with 42 open and closed questions, and individual semi-structured interviews lasting from 40 to 60 minutes.

We use the following codes to refer to the data:

- numbers for the meetings (1-13), as in M7 or 7 for the seventh meeting;
- number for the rounds (1, 2, 3), as in R2 for the second round and 6R2 for sixth meeting, which was part of the second round;
- PP: portfolio presentation;
- TA: teaching approach;
- I[first 2 letters of participant name]: for interview excerpt (e.g. IVI designates excerpt from **Vi**nicius' interview);
- RD[Meeting Number] [first 2 letters of participant name]: for reflective diaries (e.g. RD2AP designates excerpt from **Ap**olo' reflective diary of the second meeting).

4.2. Themes and Intentions of Each Round

The application of the PA that we report in this paper was organized in three task rounds. In each one of the three rounds, we focused mainly in developing a problematizing stance toward, respectively: strategies of solutions for a problem, teaching approaches, and the development of a concept (Figure 3). For the choice of each task round's topic we took into account: (1) availability of primary and secondary historical sources; (2) potential to allow different strategies, approaches or interpretations; and (3) expected relevance to the participants' practices.

Figure 3 - The problematizations of this PA.

Source – Developed by the authors.

The aim of the first round is to problematize the possible strategies for solving problems nowadays modeled by linear equations, by presenting strategies that teachers are less likely to be familiar with. Our intention is to see to which extent teachers are open to strategies different from those they present to their students. The *Aha* problems from Ahmes' Papyrus inspired us to create the situations to be discussed with the participants. From a broader perspective, our main goal in this round is to problematize the role of algebra in school mathematics, at least in the Brazilian context.

The aim of the second round is to problematize teaching approaches on areas and on Pythagoras' theorem. The historical excerpts are chosen from Euclid's *Elements*, Books I and

II. We unveil propositions II.14[66] and I.47[67] in order to show how the Pythagoras' theorem (proposition I.47) is used, and how is the area approach adopted by Euclid (quadrature problems). Our main intentions are to lead teachers to reflect on the role of formulas in the teaching of areas, and to which extent the concept of area as a geometrical magnitude is explored in a teaching approach with main focus on the presentation of formulas; to discuss the role of Pythagoras' theorem in the *Elements*, as a counterpoint to its common uses in school mathematics; and, thus, to lead teachers to reflect on possibilities of different ways of teaching areas.

In the third round, we aim to problematize teaching of functions, and to foster reflections on an understanding of mathematics as ever-changing field of knowledge, subject to revisions and changes in its own objects. We discussed with the teachers epistemological differences between variable and unknown. For the historical zoom in, we selected excerpts from Galilei, Euler and Dirichlet and during the discussion we also approach Bourbaki set theory definition. Our intentions in this round are to lead teachers to reflect on the different uses of symbols in school algebra (such as letter to represent variables and unknowns), on their own conceptions of function, and on the relationships between their understandings on the development of mathematics and their teaching practices at school. In Moustapha-Corrêa *et al.* (in review), we use the third round to exemplify the PA in order to discuss some discursive shifts of the participants during its application.

In order to better illustrate how we developed and implemented the PA, we describe in details Round 1, on linear equations and the Egyptian simple false position rule (which solve some of the *Aha* problems of the Ahmes' Papyrus), and the use we propose for the reflective diaries. It is not our aim in this research, and particularly in this paper, to analyze or assess teachers' knowledge or practices. Rather, we use empirical data to illustrate and support our theoretical and methodological choices in the design of this application of the PA.

---

[66] "In right-angled triangles the square on the side opposite the right angle equals the sum of the squares on the sides containing the right angle." (available on https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/bookI/bookI.html, at May, 1st, 2020). In the PA we used the translation to Portuguese published by Irineu Bicudo (EUCLIDES, 2009).

[67] "To construct a square equal to a given rectilinear figure" (available on https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/bookII/bookII.html, at May, 1st, 2020). In the PA we used the translation to Portuguese published by Irineu Bicudo (EUCLIDES, 2009).

4.3. The First Task Round: Solutions of Linear Equations and the Egyptian False Position Rule

We choose the context of the ancient Egyptian *Aha* problems (e. g. Roque, 2012; Chace, Manning, Archibald, 1927) from Ahmes' Papyrus to explore different solutions to problems that today are modelled by linear equations, as a potential way to trigger commognitive conflicts. The *Aha* problems, which are part of the Ahmes' Papyrus, consist of finding out an unknown quantity (the *Aha*), which, when added to one or more fractions of itself, results in a given quantity (Miatelo, 2008). The simple false position rule is used in the Ahmes' Papyrus to solve some *Aha* problems. Our first task round was built around this rule, according to which the solution of a specific kind of problem (that now can be described by a linear equation) is reached by using an "experimental number" – the false position – which is then adjusted by a factor. Thus, the process of finding the solution is not based on a symbolic representation for the solution, as in the case of the contemporary algebraic methods. In the routine used in the present mathematics to solve algebraically linear problems we identify the following metarules:

i. to represent the unknown quantity by a letter;
ii. to stablish a relationship with known and unknown quantities of the problem, represented by an equation; and
iii. to operate the terms involving the unknown quantity obeying the same properties applied to known numbers.

Within the Ahmes Papyrus' discourse, we could consider several metarules, such as the ones related to the Egyptian symbols and operations; the structure of the *Aha* problems; the Egyptian mathematical practices. To design our tasks, we focus on the metarules, identified by us, related to *the assumption of an "experimental number" to start the Aha problem*, and *the determination and use of an adjusting factor to find the solution*, since they contrast with the ones that fashion the routine of an algebraic solution. Our aim is to expose the teachers to Egyptian mathematical metarules and, therefore, to contrast different mathematical practices. It is in this sense that we can say that *we use the simple false position rule as a means of problematizing algebraic strategies for solving problems commonly used at school*. This choice is also justified by the fact that the simple false position rule is grounded in the notion of proportionality – a key concept in school mathematics, sometimes underestimated in teachers' in-service education programs (at least in the Brazilian context).

4.3.1. Triggering Discussion: Beyond Algebraic Strategies

The whole first task round involves *Aha* problems, referring or not to the Papyrus on its original form. Thus, the triggering task in this round consists of a *mathtask* with two hypothetical solutions to the following problem:

> Marina likes to make problems for her father inspired from what she learns at school. One night she said: "Dad, find out how many Reais[68] I have! The tip is: if I add a quarter of what I have to what I have, I'll get R$15,00."

As a first part of the *mathtask* (Figure 4), teachers were asked to solve the problem. Ten participants attended this session, all of which presented algebraic solutions, as we expected. By algebraic solutions we mean the ones based on the metarules associated with contemporary mathematics (as those listed above). The *mathtask's* context was an introductory lecture on algebra at lower secondary school for 12/13 years old students. The first solution uses a diagram to split the whole in 4 parts, and then add a fourth one. So, 15 is divided by 5, and the result is multiplied by 4 (Figure 5). The second solution uses a "trial and error" strategy (Figure 6).

[68] Brazilian currency.

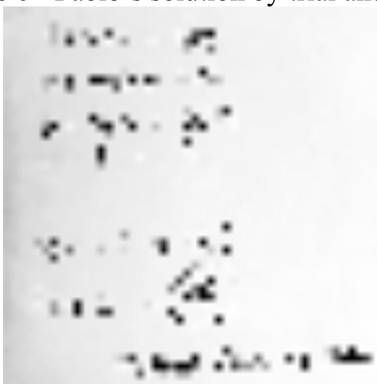
Figure 4 - Triggering *mathtask*.

Source – Developed by the authors.

Figure 5 - Rodolfo’s solution using fractions bars.

Source – Developed by the authors.

Figure 6 - Fábio’s solution by trial and error.



Source – Developed by the authors.

Aiming to trigger commognitive conflicts, both fictional solutions in the *mathtasks* were designed considering routines different from the usual algebraic strategies. The metarules behind the first solution’s routine are related to the use of fraction bars, whilst the ones in the second solution routine are related to the use of a trial and error strategy. The questions posed to the teachers were:

a. What is behind Rodolfo’s solution?
b. What is behind Fábio’s solution?
As a teacher, how
c. would you use the student’s solutions to continue the lesson?
d. do you use to work with problem solving?
e. do you use to introduce algebra to your students?

The continuation of the *mathtask* was presented to the group by the end of the first meeting, after they had solved the problem. We noticed that Fábio’s solution, using a trial and error strategy, was not so well accepted as Rodolfo’s solution, using fractions bar. So, in the second meeting, we presented to the participants another way to register a solution by trial and error (Figure 7), in order to engage them in a discussion on how likely to occur in actual classrooms of the solutions presented in the *mathtask* were.

Figure 7 - New way of presenting a trial and error strategy for solving the problem.

Source – Developed by the authors.

Starting the plenary discussion, Bruna asked the teachers if the newly presented kind of solution could appear in an actual classroom. Ulisses shared with the group his thoughts on what would be more likely to happen in classroom, as it can be observed in the transcription below.

> Bruna: (Referindo-se a uma nova maneira de registrar a solução por tentativa) Isso vocês acham que pode aparecer? Ou também não? Pode dizer que não.
> Ulisses: Eu acho que poderia aparecer, mas não dessa forma aí.
> Bruna: Como?
> Ulisses: Eu acho que poderia aparecer assim. Como vale um quarto, primeiro acho que o aluno tentaria com números inteiros. Se eu tenho quatro reais e eu coloco mais um quarto, então cinco (move as mãos como se representasse as duas partes juntando-as quando fala cinco). Se eu tenho oito reais e coloca mais um quarto, dois. Vai dar dez. (segue fazendo o mesmo movimento com as mãos). Se eu tenho doze reais e eu coloco mais um quarto que é três, dá quinze. Se por acaso fosse dezessete reais para sair um pouquinho. Se eu tenho .... é.... Falei doze, né?
> Bruna: Doze já deu.
> Ulisses: Doze já deu, ok. Se eu tenho 16 reais e coloco mais um quarto que é quatro, são vinte. Passou. Então estaria entre o doze e o quinze. Então eu vou separar o doze aqui. Agora eu vou quebrar esses daqui. Como se fosse um número misto. Eu acho que. É uma maneira boa.
> Bruna: Ou seja, na escola os alunos fazem por tentativa?
> Michel, Cleber e Ulisses concordam.
> (M2 – triggering discussion)

Following this discussion, Ulisses went to the board and presented an explanation using diagrams, as it appears in Figure 8.

Figure 8 – Ulisses' register on the board.

Source – Developed by the authors.

While registering this solution, he emphasized that students would use multiples of four, since the problem posits a fourth of the quantity. And he concludes:

> Só que tem o seguinte. Sempre colocando número inteiro. Depois, se não der certo no inteiro, aí sim você pula para 25 centavos, 50 centavos. O que você achar melhor. (Ulisses, M2 – triggering discussion)

In this sharing moment, Ulisses mobilizes his own knowledge, especially regarding both solutions presented in the *mathtask*. He combined both strategies to present a solution that is more representative of the actual classrooms, based on what he considered that would happen in the classroom.

The discussion with the group went on, with focus on how likely to appear in their own classrooms the teachers thought the solutions were, especially the non-algebraic ones – for instance, presented by their students. We end up also problematizing the *mathtask* itself. We mean that we discussed with the teachers to which extent the fictional solutions presented in the *mathtask* reflect the actual mathematical classrooms. Fábio's solution, based on a trial and error strategy, raised more attention (and controversy). In our interpretation, one of the reasons that is the way the trial and error strategy is registered in Fábio's solution, which may be less usual in Brazilian classroom contexts. This can be observed in the dialogue bellow, in which Bruna tried to catch Silvio's attention for the jump denoted by "dot, dot" (⁝) in Fábio's solution. According to this group, the trial and error strategy may take way too long, depending on the size of the numbers. The following dialogue represents the kind of discussions around the arguments presented by the teachers to justify why they do not prefer this strategy.

> Silvio: O que eu pensei.... eu aproveitaria, no meu caso, a solução do Fábio para tentar generalizar e introduzir a parte algébrica. Por quê? Eu ia propor "e se você fosse resolver isso prun número tipo dez mil e cinquenta e não sei quanto? [...] Ok. Sua solução está certa, legal. Mas e se esse valor fosse um valor maior?
> Bruna: e o que você espera que ele falasse? (vários falam ao mesmo tempo, brincando sobre possíveis respostas, por exemplo, referindo-se às turmas do Silvio) Porque, olha só, gente, tanto o Silvio quanto o Vinicius quando relataram aqui falaram o seguinte [...] foi palpável para isso, porque era um número pequeno, que seria difícil se fosse um número maior. Mas na minha cabeça, aí não sei se eu estou muito longe da escola

> pra saber, quero saber a opinião de vocês. Se fosse um número muito grande, ele ia tentar com alguns pequenos, mas ele ia dar uns saltos maiores.
> Silvio: Não sei.
> Bruna: Essa é a minha... Será que ele teria essa sacada?
> Silvio: Sabe por que eu não sei?
> Bruna: Tipo, eu tentei com 1 aí deu só 1 e 25. Tentei com 10, deu 12 e 50. Mas se eu tivesse que pegar (a turma se agita, engajando-se na discussão).
> Luciane: De repente, um ou outro até faria, mas a maioria, não. (continua falando com o seu grupo)
> Silvio: Por que eu acho que ele não faria isso? Se ele percebesse isso, ele já tinha feito ali, porque ali ele não fez saltos.
> Bruna: Ele fez, do 4 foi pro 10.
> Silvio: Não. Bom, eu entendi... (olha para a solução projetada no quadro) Ah tem o pontinho, potinho ali. O que parece aquele pontinho, pontinho ali é que ele sabia o que tinha que colocar ali e não colocou.
> Bruna: Ah... tá.
> Silvio: O que dá para entender é: ele sabia que o 5 era não sei quanto, mas ele preferiu andar mais botou o pontinho, pontinho. Foi o que eu entendi. Eu não consegui ver o salto (aponta os dedos para a cabeça) eu não consegui ver que aquilo ali foi um salto que ele deu.
> Bruna: Tá.
> (M2 – triggering discussion)

Silvio focused his comments on the fact that if the numbers were bigger, they would have spent much more time to reach the solution. The rest of the group seemed to agree with Silvio's argument. However, not only the argument based on the necessity of testing too many numbers that caught our attention. In this dialogue, issues concerning the register of the strategy were also raised, since Silvio's understanding of the "dot, dot" (⁝) is different from the one that we intend when we designed the solution. We consider that the solution proposed by Ulisses is also based on trial and error, but it differs from Fábio's strategy insofar as the former was presented orally, whilst the latter as a written register. We noticed that Ulisses' solution was more easily accepted than Fábio's, and the reason for this may be the way registering, since we had to explain what was mean by the "dot, dot" (⁝), and this visual mediator was not self-evident.

Still regarding teachers' interpretation and acceptance of trial and error strategies, we highlight Cleber's statement: for him Fábio does not master the content. Thus, it seems that, for Cleber, a solution by trial and error does not evidence mathematical knowledge, albeit the problem had been solved.

> A [questão] *b* a gente achou, na verdade, concordando (aponta para Silvio) que é um domínio um pouco menor, mas importante essa forma do Fábio fazer, porque, assim, mesmo sem o domínio, ele se vira. (Cleber, M2 – triggering discussion)

Either following Silvio's or Cleber's argument, the teachers present in the second meeting (except Ulisses, as we will discuss in section 4.3.3) did not seem to consider that experimenting with some examples could help at all the understanding of the problem. In other words, they did not consider, for example, that testing several numbers would be helpful while investigating conjectures to prove mathematical facts. That is, they did not seem to consider the potential of investigating and exploring more intuitive strategies. They reaffirmed their preference and emphasized the algebraic solution.

Regarding this problematization of the mathtask itself, we consider that our question on how likely to appear in actual classrooms the strategies were created opportunities for the teachers to share experiences from their practices. The dialogues transcribed above illustrate how the discussion on *mathtask* can stablish an environment which teachers are led to share, problematize and revisit their own practices. In particular, the episode protagonized by Ulisses suggests that he took the lead in his own in-service education, rather than assuming a passive role, for example expecting to be told what he should or should not do as teacher.

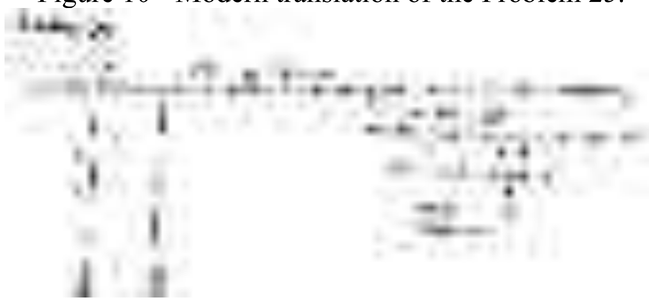
4.3.2. Historical Zoom In and Zoom Out: Immersion on Aha Problems, Overlook, and Unveiling the Egyptian Simple False Position Rule

We begin the historical zoom in and zoom out presenting the participant teachers to the Problem 25 of the Ahmes' Papyrus, which states: "A quantity whose half is added to it becomes 16." Firstly, we invited them to analyse Problem 25 in Hieratic and Hieroglyphic as it appears in the Ahmes' Papyrus (Figure 9). Next, they were presented to Problem 25, as it appears in Figure 10, with translation to English and our translation to Portuguese.

Figure 9 - Hieratic and hieroglyphic solutions of Problem 25.

Source – Chace, Manning, Archibald (1927)

Figure 10 - Modern translation of the Problem 25.



Source – Chace, Manning, Archibald (1929)

Soon after, we presented a brief oral contextualization on Ancient Egypt on the role of the scribes in those societies' organization, and on what Ahmes' Papyrus (particularly, the *Aha* problems) is about. Then, we presented Problem 25 again as it appears in Figure 10, and invited participants to explore it. Even with the translation of the excerpt into Portuguese, the participants were unable to decipher its content.

With the aim of using the hermeneutic method, we then proposed tasks from Arcavi and Isoda's (2007) work, which we translated to Portuguese, including: the elaboration of a dictionary of Egyptian symbols, especially numbers; a problem with Egyptian multiplication; and a set of tasks exploring Problem 24 in stages (Figure 11). Problem 24, which states "A quantity whose seventh is added to it becomes 19.", is quite similar to Problem 25, and uses the same solution's strategy. In this way, our aim is to lead the participants to understand the stages of the solution. We noticed that, even though they showed evidences in understanding each stage, they still had difficulties to understand the solution as a whole.

After this immersion, we discussed aspects of Ancient Egyptian mathematics, especially number system, fractions and operations, using Brazilian textbooks (Carvalho & Roque, 2012; Roque, 2012) as the main references. First, the teachers were asked to read these books and to watch the videos we recommended. In the following meeting, we did a plenary discussion, when they shared their questions and doubts, and we explained some idiosyncrasies of the Egyptian mathematical practices.

Among the metarules that fashioned the Ahmes' Papyrus and the Egyptian mathematics, the one related to the use of successive duplication to multiply (and divide) numbers caught the attention of the participants. Ulisses reported that, as his students were facing difficulties with the standard multiplication algorithm, he decided to use Ancient Egyptian multiplication method in his classroom. He reported that the students understood it and considered it easier.

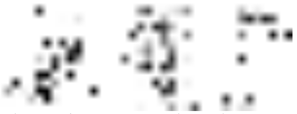
> Ulisses: Tem uma coisa também. Hein, Bruna? Eu sei que está meio corrido. Mas uma coisa interessante é que essa semana, na sala de aula, os alunos que têm dificuldade de fazer conta de multiplicar
> Bruna: Você usou o método?!?
> Ulisses: Eu usei o método e eles acharam maravilhoso, eles adoraram. (Bruna faz um som de surpresa e admiração)
> Bruna: Ulisses, isso não é perda de tempo, isso é muito importante!
> Ulisses: Só precisa saber a tabuada de dois, mais nada. E saber somar. [...] muitos pegaram e aí e fizeram mesmo. Aprenderam. "assim não é mais fácil? Basta saber a tabuada de 2." Aí, mostrei pra eles. Eles fizeram e gostaram. No nono ano.
> [...]
> Ulisses: E eles gostaram muito mais do que o método tradicional.
> Bruna: E você gostou?
> Ulisses: Eu adorei, porque eles aprenderam, né? Pra mim, foi maravilhoso, né?
> (M3 – historical zoom in and zoom out)

Figure 11 - Immersion history-focused task.

A Matemática no Antigo Egito

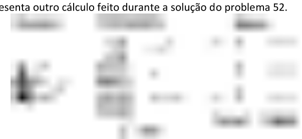
Tarefa inspirada no texto
ARCAVI, A.; ISODA, M. Learning to Listen: From Historical Sources to Classroom Practice. *Educational Studies in Mathematics.* Special issue on the history of mathematics in mathematics education, V. *66*, pp. 111–129, 2007.

1ª etapa
A figura a seguir, retirada do Papiro de Ahmes, apresenta um cálculo em hierático e hieróglifo feito na solução do problema 74.



1. Com base na tradução inicial para a notação moderna, indique o que cada um dos símbolos hieroglíficos significa.
2. Complete os espaços em branco.
3. Explique qual cálculo foi efetuado nesse excerto.

2ª etapa
A figura a seguir apresenta outro cálculo feito durante a solução do problema 52.



1. De acordo com a experiência adquirida na etapa anterior, o que você se perguntaria para tentar entender esse novo texto?
[Compartilhe com os colegas]

2. Considerando a tradução inicial do hieróglifo para a notação moderna, indique o que cada um dos símbolos pode significar.
3. Complete os espaços em branco.
4. Explique quais cálculos foram efetuados nesse caso e qual é o significado das barras.

5. Calcule 13×27 pelo método egípcio.

6. Qualquer par de números pode ser multiplicado por esse método? Explique.

3ª etapa
A figura a seguir a presenta a solução do problema 24. A tradução para o inglês apresenta algumas omissões para o propósito desta tarefa.

1. Crie questões cujas respostas ajudariam você a entender o processo de solução de uma equação linear. [Compartilhe com os colegas]

2. Escreva, em notação moderna, a equação correspondente à primeira sentença, e resolva-a.

3. Observe o primeiro passo.

$$\begin{array}{ll} /\,1 & 7 \\ /\,\frac{1}{7} & \_\_ \end{array}$$

   Aparentemente os egípcios abordaram o problema substituindo um número experimental e vendo o que acontece.
   a. Qual número eles experimentaram?
   b. Complete o espaço em branco.
   c. Qual resultado foi obtido?
   d. Por que você acha que eles escolheram esse número?

4. Observe o segundo passo.

$$\begin{array}{ll} 1 & 8 \\ /\,2 & \_\_ \\ \frac{1}{2} & \_\_ \\ /\,\frac{1}{4} & \_\_ \\ /\,\frac{1}{8} & \_\_ \end{array}$$

   a. Complete os espaços em branco.
   b. Quais cálculos foram efetuados e qual é o resultado?

5. Observe o terceiro passo.

$$\begin{array}{ll} /\,1 & 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \\ /\,2 & \_\_\_\_\_\_ \\ /\,4 & \_\_\_\_\_\_ \end{array}$$

   a. Complete os espaços em branco.
   b. Quais cálculos foram efetuados e qual é o resultado?

6. Observe o passo final.

   O fazer como
   ocorre: – A quantidade é $16\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$
   um sétimo é _______
   Total _______

   Complete os espaços em branco e explique o que foi alcançado nesse passo.

7. Reproduza e resuma o método de solução e explique-o.

8. Escreva a solução para o problema, como apareceria no Papiro (mas com notação moderna), se o número experimental fosse 14 no lugar de 7.

9. O problema 25 do Papiro é "Uma quantidade cuja metade é adicionada a ela resulta em 16.". Resolva-o como você faria atualmente e utilizando o método egípcio (como você acha que apareceria no Papiro, mas usando notação moderna).

4ª etapa
Lucíola, uma professora do quinto ano, queria avaliar se seus estudantes sabiam como encontrar o todo quando uma parte é dada.
Ela fez com seus estudantes um teste que incluía a seguinte questão.

"$\frac{3}{5}$de um número é 12. Qual é esse número? Explique sua solução."

Veja o que Luís Filipe escreveu

$$12 \cdot 2 = 24$$
$$24 \div 6 = 4$$
$$24 - 4 = 20$$

A solução de Luís Filipe está correta?
Se você fosse o professor de Luís Filipe, qual seria a sua avaliação sobre o conhecimento de Luís Filipe?

Source – Arcavi and Isoda (2007).

We remark that we did not suggest the participants to apply specific approaches in their classrooms, and Ulisses did so by his own initiative. His initiative highlights two issues: a moment in which he shares with the group an experience from his own practice, and, therefore, illustrates our stance towards acknowledging teachers' authority over school practice knowledge; and the acknowledgment, at least by Ulisses, of the didactic potential of an historical practice.

After the historical overlook – zoom out – about the Egyptian's mathematics, when we discussed the operations and some notations, we resumed Problem 24's solution and encouraged the participants to explore it as a whole. We observed that the explanations about the operations helped the teachers stablish connections between the parts of the solution and to understand its structure as a whole, as the following dialog suggests.

> Bruna: Então, alguém quer falar mais alguma coisa sobre a leitura que vocês fizeram? Olha a cara da Luciane, gente. Acho que ela tá doida pra .... ela tá colocando a mão na cabeça assim "eu quero entender isso aqui e elas [Bruna e Aline] não falam".
> Luciane: É.... (alguns riem) Não, eu entendi agora. Porque tem um 3 com um pontinho. Aí eu já vi que tem um negócio com o pontinho aqui.
> Bruna: Tá. Então, vocês leram alguma coisa sobre o problema? Leram? (a turma fica meio muda, Silvio mostra o Problema 25 com a tradução). Então, tá ótimo. Beleza. Será.... Ô, Luciane? O fato de você entender essa notação, que a gente ainda não tinha falado do pontinho, isso fez você entender mais desse ...
> Luciane: Sim.
> Bruna: E o que você entendeu que você não tinha entendido?
> Luciane: Porque aqui no final, eu não tinha entendido o que era isso. (aponta para o papel mostrando) eu não consegui... Parecia um símbolo estranho, né? No finalzinho, que tem aí 1, aí tá 5 e só que é 3 com um pontinho. Eu não tava entendendo o que era isso, da onde tinha surgido isso. Aí eu entendi que é 5 mais 1/3. Aí depois ele acha o dobro e aí tem 10 mais 2/3.
> Bruna: Tá. E você entendeu essa solução?
> Luciane: Entendi.
> (M3 – historical zoom in and zoom out)

The dot Luciane mentioned is used to denote fractions. In general, Egyptians representation for fractions can be associated with what in contemporary mathematics would be called unit fractions (with an exception for the fraction $\frac{2}{3}$). Thus, 3 with a dot on the top $(\dot{3})$ is the notation for $\frac{1}{3}$. Luciane's efforts to understand the solution to Problem 25 so far (zoom in) appeared to have not been enough. The discussion on operations and notations (zoom out) seemed to have contributed to deepen her own understanding of the solution. This episode illustrates how our zoom in and zoom out approach, in which a combination of immersion and overlook tasks played a role on the participant teachers' understands for both the excerpt used for the immersion, and also the mathematical practices, in this case, of the Ancient Egypt.

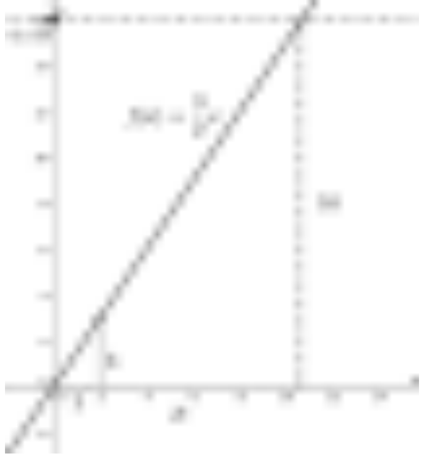
During the application, we noticed that, even though they understood the steps of the solution, they still faced difficulties to cope with the solution as a whole. That is, our data suggests that the set of tasks presented by Arcavi and Isoda (2007) helped the participants to understand each step of the solution. However, further developments seem to be needed towards an understanding of the solution as whole. In our interpretation, this situation may constitute a commognitive conflict, associated with the fact that the metarules related to the determination and use of the adjustment factor (that is, how this factor is chosen and used to correct the wrong solution obtained with the experimental number) are rather tacit. Although the participants showed confidence about their understanding on which operation was being computed in each step of the solution, they did not grasp by themselves the role of each step and its partial result in the solution as a whole.

As Arcavi and Isoda suggest, we asked them to try to present a solution using a different experimental number. Moreover, we invited them to try to compare the solutions for Problems 24 and 25, written in modern terms, and the expression "false position rule" was presented. Finally, inspired by Winicki (2000), we posed the following questions to guide the discussion:

1. In modern terms, to which kind of equations do the *Aha* problems correspond?
2. Present a justification for the false position rule.
3. In the false position rule, does the result depend on the experimental number?
4. Does the false position rule work for all kinds of *Aha* problems? Why?
5. Why do you think such a rule was invented?
6. Why is it anachronic to claim that the Egyptian "solved equations"?

To conclude the historical part, we asked the teachers about a simple false-position-rule rationale, that is, to explain why the method is valid. After a brief discussion (due to time restrictions), we presented a modern justification, using a linear function's graph, in order to show the proportionality between the experimental number (false position) and the solution (Figure 12).

Figure 12 - Proportionality of linear function.



Source – Developed by the authors.

According to Arcavi and Isoda's (2007) hermeneutic method, while parsing a historical source, teachers may highlight pieces of the sources that were not clear for them, and also formulate questions whose answers would help them to understand that mathematical practice. Due to time limitations, we could not explore these issues as Arcavi and Isoda suggest. Besides that, we did not have time to explore their possible explanations for the false position rule. In our interpretation, this happened for two main reasons. Firstly, because it was the first task round and the teachers were not yet comfortable enough in sharing their opinions, thoughts and reflections. Secondly, as it was the first time that we were implementing the PA, we were also still getting used to it.

4.3.3. Reflection of Teaching Practices: Problematizing the Sovereignty of School Algebra and Deeply Rooted Teaching Stances and Attitudes

This stage was structured around a *mathtask* (Figure 13) presenting a situation in which a 12-year-old boy who has not had formal contact with school algebra, but yet solves Problem 25 by trial. His father, an experienced participant of mathematical discourses, wants to convince him that "the easiest way" to solve the problem would be through an equation. The boy then tells the story to his teacher and asks her why does his dad insist on the use of an equation. The participants were asked to explain how they would answer the boy, if they were in the position of his teacher, as well as other issues involved in this situation, especially why does the father insist in the use of the equation.

Figure 13 - Reflection of teaching practices' *mathtask*.

Source – Developed by the authors.

Some teachers highlighted that João's solution could take too long if the numbers were bigger, and also that the algebraic solution makes the solution faster. This position is consistent with what they expressed during the triggering discussion.

> Bruna: Calma. Deixa Guilherme falar. Desculpa, Guilherme.
> Guilherme: Não. Foi exatamente o que o Vinicius, aliás todos aqui já disseram. Eu coloquei aqui (lendo sua resposta) João ainda não domina a representação de símbolos algébricos e tal, enquanto que seu pai, de alguma forma, já tem esse tipo de ideia operatória, de equacionar e tal. E... então, eu acho que é isso.
> Bruna: Tá. Você colocou mais alguma coisa para a pergunta b, por que o pai insiste com a equação?
> Guilherme: (lendo suas anotações) ah...
> Bruna: colocou alguma coisa diferente?
> Guilherme: Não, nada diferente. Pelo fato de saber mesmo equacionar ... muito mais fácil, mais rápido.
> (M3 – reflection of teaching practices)

When asked about which feedback they would give to João, in the position of the teacher, Ulisses stressed that he used to consider any kind of solution brought by his students.

> Bruna: E se vocês fossem a professora?
> Ulisses: Se eu fosse o professor (enfatiza o masculino) eu não ligaria [...]. "Eu não quero saber como vocês vão fazer, desde que vocês façam certo". Cada um pode ter seu método. Que às vezes [...] o pai ajuda, ou a outra professora ajuda, ou a namorada, o irmão ajuda. Então, se cada um vier com uma solução, mas se todas estiverem corretas, eu vou dar certo na questão.
> Guilherme: A maneira que ele fez, ele colocou aqui, foi de um até onze, né? Eu coloquei ... Bom, não está errado o seu método, porém, se o número fosse muito grande esse seu método seria muito mais trabalhoso. Daria muito mais trabalho, né? Foi de um a onze. Já pensou se fosse de um a onze mil. Sei lá. Entende? (Bruna faz som de concordar) Pela idade dele, né? Começou assim com um, depois com o dois, depois com o três. Ele ia continuar experimentando assim (Bruna faz som de concordar) e isso dá muito mais trabalho.
> Bruna: Sim.
> Ulisses: Mas se ele estivesse acertado, mesmo assim, eu daria certo.
> Guilherme: Não... exatamente (lendo) a questão não está errada.
> Ulisses: Porque [...] uma questão desse jeito, testando, testando... (Tocando em Guilherme) Equações Diofantinas, o que a gente fazia?
> Guilherme: Por isso que eu disse, Ulisses, (lendo) não está errado.
> Ulisses: É.
> (M3 – reflection of teaching practices)

As we can observe from Guilherme's utterance, most of the group seemed to recognize the trial and error solution as "correct", but not as a "good" one, since it could take too long. However, as Ulisses seemed to highlight, this kind of solution is closer to the mathematical practices in which we test some values, when we are not sure about what to do.

Even though the teachers kept pursuing the algebraic solution, some of them declared that students often use others strategies for solving, even when they have been already presented to algebraic reasoning. The justification they presented for the emphasis on the algebraic solution was that for the external examinations it would be important to solve faster, as the following dialogue shows.

> Bruna: Mas se ele (referindo-se a João, o menino da *mathtask*) já tivesse aprendido equação e ele viesse com uma solução como essa. Como que a professora ia falar?
> Naylor (que até então estava atento, mas sem se pronunciar): Tudo na vida é equação. (Bruna faz som de surpresa)
> Gabiangela: É o que que ele falou?
> Bruna: Tudo na vida é equação.
> Gabiangela: Vai vir o ENEM e você precisa de tempo (Gladson fala junto tempo). Acabou.
> Aline: Como é que é?
> Gabiangela: Vai vir o ENEM e você precisa de tempo e a equação faz mais rápido.
> Vinicius: É verdade.
> Guilherme: Prática, né?
> Gabiangela: a solução é mais fácil.
> (M3 – reflection of teaching practices)

By the end of the task round, we had five different types of strategies for a linear equation (including the ones from the mathtasks, presented by the participants, and from the historical sources): i) algebraic one, ii) using diagrams (fraction bars), iii) trial and error, iv) simple false position, and v) another one by trial presented by the boy (i.e., 3 solutions by trial). We invited the participants to compare these solutions. As we can observe from the following dialogue, there is almost a consensus among the teachers that the algebraic strategy is "more beautiful", "cleaner", "simpler", as they stated.

> Bruna: Luciane falou "a equação é muito mais bonita"
> (Luciane sorri, Guilherme vira pra trás e balança a cabeça concordando)
> Luciane: Né, não? Pequenininha. Não é?
> Vinicius: Muito mais limpa.
> (M3 – reflection of teaching practices)

They stressed that a solution by trail (like Fábio's) would take longer, since for them they would need to test all numbers. They also realized that the Fábio's solution and the solution using the false position rule have some similarities. However, we had to stress that the false position rule solution is not just a matter of trying out numbers. As the following dialogue shows, it seems that they did not recognize the role of the adjustment factor of the false position rule solution.

> Gladson: Muito próxima a do João e a da falsa posição.
> Silvio: A do João e da falsa posição eu vejo muito próximas.
> Bruna (voltando para o quadro): Por que vocês veem próximas?
> Gladson: Vai tentando, vai tentando
> Bruna: Como, Gladson? Desculpa.
> Gladson: Então... o João ele dá um chute qualquer, por mais longe que seja e vai aproximando, aproximando, aproximando. [...]
> Bruna: Sim. As duas são soluções por tentativa (alguns concordam falando sim) Só que a do João, ele precisa tentar tipo tudo, que foi o que Guilherme falou (alguns concordam falando sim) "você vai se dar mal se número for muito grande, se você começou do um". Mas e aqui? É qualquer tentativa?
> Silvio: Não. É pela esperteza.
> Bruna: Qual é a esperteza?
> Silvio: Ah... assim, eu acho que, dependendo do que o problema propõe como pergunta e tal, ele se aproveita daquilo que o problema já te dá como informação e ele parte do chute dele experimental daquela coisa experimental dali. Por isso que aquela hora de um sétimo, ele tentou o sete. Mas tentar o quatorze também é bom, porque o quatorze é múltiplo de sete.
> (M3 – reflection of teaching practices)

By that moment, Silvio recognizes that the starting point in the simple false position rule cannot be any number, as it is the case in João's solution. However, he does not say anything about the adjustment factor, which is the key point for solution via the false position rule. Thus, Bruna tried to draw the teacher's attention to this factor, avoiding excessive impositions on how they should explore the problem.

> Bruna: sim. Mas olha só, Silvio, num.. é que... a gente tá pensando só no chute, que o chute do João, ele começou com o chute um; aqui eu penso num chute que vai me tirar a fração. Mas aqui não tem um pulo do gato?
> Silvio: Tem.
> Bruna: Qual é o pulo do gato que tem aqui?

> Bruna: O pulo do gato tá aqui, né?
> Silvio: No finalzinho ali
> Bruna: O pulo do gato
> Silvio: ele acha o, ele acha a quantidade que ele quer e multiplica pelo
> Ulisses: Ele usou o três
> Bruna: É a proporção
> Ulisses: Primeiro ele achou uma unidade, né? E vê quantas vezes essa unidade que é o três cabe dentro do dezesseis. Eu achei essa resolução mais bonita das três.
> (M3 – reflection of teaching practices)

According to Ulisses' last statement, despite his colleagues' preference for the algebraic solution, he chose the solution via false position rule. After a joke between Ulisses and Luciane, who had not agreed with his preferred solution, Guilherme tried to convince Ulisses about the simplicity of the algebraic solution.

> Guilherme: Não, é porque (virando para o Ulisses) eu vou defender você, Ulisses. Não, não, eu não vou te defender, não... (vira para trás, olhando para Luciane). Tudo que é simples, é melhor. A simplicidade, Ulisses.
> Ulisses: Só pra dizer que Luciane tá certa.
> Guilherme: (dá uma risada) Mas ela está. Você não gosta da simplicidade?
> Ulisses: Não. Eu acho que eu achei bonito a novidade. Eu achei legal.
> Guilherme: Ah bom... bonito, é...
> (M3 – reflection of teaching practices)

Finally, both Ulisses and Guilherme agreed that the solution via false position rule was "beautiful". To close the discussion, and to make sure that everybody had taken into account mathematical aspect of the strategies, we asked the group if they considered one of them more mathematically correct than the others. They seemed to agree that all involved a lot of mathematics, and that none was more correct than the others. We asked if they thought that there is more mathematics in the algebraic one, and Luciane answered:

> Não. Eu só acho mais limpo. Igual Vinicius falou eu acho mais simples, né? (Luciane, M3 – reflection of teaching practices)

During these discussions, the teachers shared their opinions, presenting arguments based on their experiences from practice. In this sense, we consider that we achieved our aim with this stage, namely, to invite the participants to reflect on their own stances on mathematics teaching and their attitudes as teachers. The discussions that took place during the previous stages suggests that some of these stances and attitudes were largely taken for granted. We seek to encourage teachers to reflect about the way they deal with their students' different solutions and reasonings, and also to stimulate them to develop a problematizing stance toward the sovereignty of algebra in school mathematics. The results we report in this paper may show that the participants keep pursuing algebraic solutions as "the best" or "most efficient" ones – which may seem to be pointing towards a direction opposite to the one we aim for. However, these results also suggest that (at least) some of participants gradually started to consider other solution strategies as admissible, and even to acknowledge some advantages in them. Since this was the first round, and therefore their first experiences with our PA proposal, this is somewhat expected. In fact, we aimed to provoke a *problematizing stance*, which we expect to be a construction, rather than an imposition.

4.4. Some Reflections on the Use of Reflective Diaries

Due to limitation of space we decided to focus in this paper on the reflective diaries (RD). We consider that the RD's give a broad idea of the participants' views, as these assignments were produced by all the teachers throughout the whole study, and also due to the RDs specificity. In section 4.3, we deepen in Round 1However, in this section, we bring some evidences from the use of the RD that are not restricted to Round 1, in order to show the role of these assignments in the application of the PA.

As we predicted, since we did not prescribe any model to follow, the teachers had some difficulties to understand what was expected from them in the development of the RDs. However, (with our orientation) all of the participants accomplished the assignment, and expressed insights that contributed to our understanding of the PA's application. For example, in her first RD, Leticia shared difficulties to start writing; and in the last one she mentioned that would miss writing. Besides the personal notes, Leticia also shares reflections about the discussions in her RDs. For example:

> Logo, de cara pensei em utilizar uma equação para resolver e assim resolvi, mas depois de feito fiquei pensando que meu filho do sétimo ano resolveria usando fração. (RD1LE).
>
> Falamos ainda, sobre a dificuldade de o aluno entender a linguagem matemática (utilização de "x", por exemplo), e que, às vezes, se colocarmos o valor desconhecido como um "quadradinho", faz toda a diferença e ele consegue resolver a questão. (RD2LE).
>
> Ao tentarmos entender os cálculos efetuados no sistema egípcio, observamos que este sistema era aditivo e que as barrinhas, quando utilizadas, informavam quais valores deveriam ser somados. Os valores utilizados eram sempre baseados em valores relacionados ao dobro do número anterior, 1, 2, 4, 8, ... e assim sucessivamente.
> Das observações, vimos que o sistema egípcio não é como o nosso sistema decimal que é posicional, pois o deles tem valores fixos para cada representação simbólica.
> No final da atividade, a prof. Bruna pediu para pensarmos se o método de multiplicação egípcio funciona sempre? Se todo número pode ser escrito como soma de potências de 2? Perguntou se 1+2.2 podia ser escrito em potências de 2. Acho que, neste caso, pode ser escrito dessa forma, 20+22, mas não entendi muito bem a pergunta para uma forma mais geral, acredito, como falei na aula, que todos os números podem ser escritos como soma de potências de 2, sendo assim o método de multiplicação egípcio funciona sempre. (RD2LE)

As these excerpts from Leticia's RDs suggest, this kind of assignment can provide a way for the participants to keep a record about their own reflections on the content discussed during the sessions, and about connections with other issues, inside or outside the school context. For instance, Leticia comments how her son would solve the problem of the triggering *mathtask*, what her group had discussed about how difficult the algebraic symbolism can be, and the issues underpinning the Egyptian multiplication method.

During the interview, Apolo mentioned that the commitment in writing the RD every week made him more aware of his own reflection process. He also said that, for him, there would make no sense if we asked them to finish and hand in the RD in the same meeting which were focus of these assignments:

> E não faria sentido o diário, se tivesse que entregar na aula por exemplo. Não faria menor sentido. Mas como era uma coisa mais espaçada, de semana, aí fazia todo sentido." (IAP).

Thus, he used to take notes during the meetings; and, along the week, he used such notes to organize his reflections on his RD. He also mentioned that the teachers used to share their RDs among them. Besides, we also find this kind of reflection on the RD:

> Num momento posterior o aluno Ulisses compartilhou que estaria trabalhando com os alunos do 9º ano o método de multiplicação egípcio, ele alegou inclusive que os alunos encontraram facilidade para entender o método e ainda alegaram ser mais fácil que o método tradicional que tinham aprendido até o momento. Essa experiência, certamente, será aproveitada nas minhas aulas. Tão logo possível, apresentarei o método aos meus alunos. (RD3VI)

Both Apolo's remark on the RD's sharing between them and Vinicius RD's excerpt are good examples of how the PA fostered the sharing of practices among the participants. Furthermore, it shows how the teachers learn also among them, evidencing the importance of creating moments for sharing practices in in-service teachers education.

Although not all the participants teachers have written RDs for all meetings they took part, we believe we have achieved our goal with this assignment. Leticia's RDs' excerpts show how she reflected on the content. Vinicius' RDs reveal that he reflected on the experience shared by his colleagues. Apolo's testimony draws attention to the fact that the weekly format favored continuing reflections. That is, we achieved our goal of promoting awareness about reflection. Moreover, the environment we created during the application of the PA, encouraging the teachers to share their thoughts and practices during the meetings, allowed the teachers themselves to learn from each other.

5. Some Reflections on Problematizing Activities and its Foundations

5.1. Learning from the application of PA

We consider that, in general, the participants engaged with the tasks and discussions conducted in the first task round. Our data indicate that, along the three stages, the participant teachers specially enjoyed the moments when they shared their experiences from practice, like the one triggered by Ulisses' account on his experience with the Egyptian multiplication algorithm with his student. In these moments, it was possible to observe knowledge from experience being mobilized. As lecturers responsible for the conduction of the discussions, we intentionally sought to create a friendly environment for this – for example, when Bruna said: "Ulisses, isso não é perda de tempo, isso é muito importante!" (M3 – historical zoom in and zoom out). Our aim was to legitimate knowledge from practice as a key component of teachers education, to acknowledge teacher's authority over this kind of knowledge, and to legitimate teachers' role as authors of their own in-service education (e. g. Davis & Renert, 2013; Nóvoa, 2009).

The discussions on how likely to appear in actual classrooms the strategies of solutions were, on the comparison between the different solution strategies, and on which strategies would be more mathematically correct may be understood as a means of re-interpreting, reconfiguring and rebuilding knowledge that was often taken for granted by the participants. We associate this with the notion of *substruct*, proposed by Davis and Renert (2014), which refers to the dynamic and emergent aspects of the mathematical knowledge for teaching, emphasizes how this knowledge can be reconstructed at the same time it is used in practice and, more specifically, how this reconstruction is nourished by such use.

Throughout Round 1, we extensively discussed the approaches to equations and algebra the participants used in classroom. The solutions using a trial and error strategy bothered the teachers in a way that led us to conjecture that they could not recognize this kind of solution as a legitimate mathematical practice. In Sfard's terms, they endorsed solution through algebraic symbolism, in detriment of solutions based on trial and error metarules. None of the participants (possibly except Ulisses) seemed to consider, for example, that experimenting with some examples could strengthen their students' intuitions or understandings on the problem.

At the beginning of the round, most of the participants claimed that they acknowledge unusual solutions formulated by their students, eventually sharing them with the rest of the class. However, despite of our attempts to shake their views on the supremacy of algebraic symbolism over other possible approaches and strategies, their discourses suggest that they consider the development of students' algebraic writing and syntax as a goal for mathematics teaching that is placed in a higher, priority level – which may obliterate other ways through which students may learn and elaborate their reasonings. That is, even though they recognized some value on other approaches, they kept pursuing what they consider to be their main goal, namely to lead students to algebraic discourse, because it would make solutions "faster" or "more efficient". This resonates with Arcavi and Isoda (2007, p. 125) remark

> the intention to nurture attentive listening by creating a gap between our method and the Egyptian had a slightly counterproductive effect for some: the symbolic method is so powerful and efficient why bother to even consider a complicated alternative so difficult to understand.

We conjecture that teachers' pursuit of algebraic symbolism in classrooms may related with two main reasons. Firstly, Brazilian school syllabuses assign to it a prominent position. Secondly, as the participant mentioned, it has central importance in external large-scale assessments have in Brazil, sometimes guiding syllabuses, and, in some cases even having an impact in teachers' incomes.

During the whole first task round, we intentionally aimed to promote commognitive conflicts – using for that purpose the fact that the discourses in the historical Egyptian sources, and in the solutions presented in the *mathtasks* are modelled by metarules (Sfard, 2008; Kjeldsen & Petersen, 2014) that are different among each other, and also different from ones present in mathematical discourses teachers are (supposedly) familiar with. We noticed a possible commognitive conflict during the exploration of the *Aha* Problems, related to the tacitness of the metarule regarding the adjustment factor. In the episode in which Bruna tried to catch Silvio's attention to the adjustment factor of the simple false position rule, this metarule remained tacit. Moreover, metarules related to more basic issues, like notations and operations, particularly caught participants' attention – as in the episode in which Luciane tries to understand the Problem 25's solution as a whole, and the reflections raised by the Egyptian multiplication. Nevertheless, since the discourses associated with Egyptian practices are so different from the contemporary ones, we consider that we achieved our goal of contrasting different practices.

Data from the historical zoom in and zoom out suggest that the translation to Portuguese of the source and the tasks designed to guide the understanding of each step of the simple false position solution were not enough to provide the participants sound confidence of the strategy as a whole. In our interpretation, this regards the substantial difference between the source's discourse and the discourse teachers are used to. We highlight the role of the combination of zoom in and zoom out moments plays in our approach: as the episodes described in the second stage of our PA show, it was thanks to this combination that the teachers expressed understanding of the solution of the 24 and 25 Problems.

Still regarding the second stage, the teachers seemed to recognize the power of the historical approaches to be used in the actual classroom, as the episode with Ulisses using the Egyptian multiplication in his lesson suggests. Vinicius also used a historical practice in his lesson, as the following dialogue describes.

> Vinicius: [...] Eu sempre falei alguma coisa de história, mesmo sem ter muita propriedade, né? Eu lia e passava alguma, contava alguma coisa. Essa semana eu, eu, consegui falar um pouco mais, né?. Eu voltei obviamente no papiro de Ahmes, que é o que a gente trabalhou aqui. E aí eu contei um pouco pra eles e aquele problema de quantidade eu coloquei pra eles
> Bruna: Qual?
> Vinicius: pra ver o que ia acontecer. O do ¼, soma ¼ e dá 15, né? (Bruna confirma com a cabeça) É. Que o resultado é 12. Aí, eu coloquei esse problema no quadro. Aí, naturalmente, todos eles tentaram equacionar, eles começaram a tentar equacionar. E eles não conseguiam resolver. Né? Aí, eu peguei e usei aquela estratégia do quadradinho (referindo-se à estratégia compartilhada por Ulisses). Aí, eu falei, olha só, eu quero adicionar ¼ ao que eu já tenho. Então, o que eu já tenho, botei um quadrado assim, isso é o que eu já tenho, um retangulozinho assim. Então, como eu quero ¼ disso daqui a mais, eu vou dividir em 4 pedacinhos. Aí eu peguei e coloquei aqui 1 quadradinho do lado. Então a gora eu tenho quantos quadradinhos? 5. Mas isso tudo dá quanto? Tinha 5, não, tinha 4, né? Quantos?
> Bruna: Tinha 5.
> Vinicius: 5 mesmo, né? 5 mesmo. Isso tudo dá quanto? Dá 15. Né? Eu falei "então, cada quadradinho vale quanto?" O pessoal, "então, vale 3". Eles responderam de imediato. Aí eu falei e o que eu tinha no início? "12." Aí, ficou claro para todo mundo. Aí, eu fui e falei, "então, agora a gente vai tentar passar isso daí pra linguagem algébrica." Né? E aí eu comecei a trabalhar com eles, a linguagem matemática, eu falei o que a gente não tem a gente vai chamar de x. Né? Mas eles gostaram, foi muito rápido a saída.
> Bruna: Então, você levou o Ulisses pra sua sala.
> Vinicius: Mais ou menos.
> Bruna: Ele que fez,
> Vinicius: Aquela, estratégia, né? Foi isso
> Bruna: foi no quadro
> Vinicius: dos quadradinhos. Exatamente.
> (M3 – historical zoom in and zoom out)

His report shows the connection we intend with the PA: he shared his experience from practices with the group, showing how he used history inspired examples, and also he tried to incorporate in his practices an experience from a colleague's practice that emerged from the discussion of the triggering *mathtask*. These episodes illustrate the use of history in the participants' practices, as well as the role the sharing practices among the participants can play in teacher education – that is, how they can learn from each other.

Regarding the RD, even though the participants showed slight discomfort with tasks involving written records on their opinions and reflections, they got engaged and the result was substantial. The dedication to accomplish the assignments evidences that, to some extent, the participants got engaged with the teaching approaches discussed during the PA, which, in general, were rather unusual for them – even considering that this result may be, at least partially, due to the fact that the module was part of their degree. Besides that, the engagement of the participants through the meeting was essential to the success of this PA application, as we can observe in Table 3 in which we show the RD prepared by the participants throughout the PA.

Table 3 - Reflective diaries per meeting.

	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13	
	PR	RD	PR	RD	PR	RD	PR	RD	PR	RD	PR	RD	PR	RD	PR	RD	PR	RD	PR	RD	PR	RD	PR	RD	PR	RD
Apolo	x		x										x						x				x		x	
Cleber	x	x	x	x			x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x		x	x	x	
Gabian-gela	x	x			x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x					x		x		x	
Gladson					x	x			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			x	x	x	
Gui-lherme	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x		x	
Leticia	x	x	x	x			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	
Luciane	x		x		x		x	x	x	x		x	x	x	x		x	x	x		x		x		x	
Michel	x	x	x				x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x		x	x	x	x	x	x	
Naylor	x	x			x	x			x	x	x	x	x	x	x		x		x	x	x		x	x	x	
Silvio	x	x	x	x	x	x	x	x		x			x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
Ulisses	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x		x		x		x		x		x	
Vinicius			x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x					x			x	x	x	x	

Source – Developed by the authors.

The environment that we created during the application of the PA, encouraging the participants to share their thoughts and practices during the meetings, allowed the teachers themselves to learn from each other. The problematization of the mathtask itself – that took place during the triggering discussion – implicitly showed the teachers how a problematization process may take place. We mean that, even though we did not explicitly approached this discussion, they experienced a situation in which we, lecturers responsible for the conduction of the module, put into question our own task design – that is, we openly problematized our own lesson planning.

With this application of the PA, specially through the discussions on the algebraic solutions and on trial and error strategies, we noticed how important it is to promote moments in which teachers may problematize their own practices. Some routines and procedures are so naturalized for them, that is difficult to raise teachers' awareness for other possibilities or even for the possible weaknesses of the ones they are used to.

Although we recognize that this was only the first application PA, we consider that each one of its components achieved their goals, namely: the *mathtask* – to lead the teacher in the role of the teacher; the history-focused tasks – to shake participants comfort zones; and the assignments – to promote reflection. Moreover, we consider that we accomplished what we had planned for each stage of the PA.

5.2. Further Reflections Towards a Problematizing Stance

The combination of different aspects of this PA application – the set of the three rounds, the amalgamated use of history-focused tasks and *mathtasks*, the reflective assignments, as well as the shared conduction of the meetings – constituted a way to provoke the *problematizing stance* – as the commognitive analysis (Sfard, 2008) we report in Moustapha-Corrêa *et al*. (in review) shows.

The PA proposal we present is not fixed and rigid, that is, we do not imply it must follow exactly the same three rounds structure as we did in this application, neither to use the same tasks or even the same themes. Even though the set of tasks can be implemented in other contexts, it is important to be aware of the intentions of each one and, if necessary, to adapt them. The themes as well as the tasks used should make sense to the group. We mean that, beyond bringing situations in which the teachers, are somehow familiar with, it is important to choose tasks that can (at least potentially) shake their comfort zones. In order to do so, it is essential to consider the specificities of the group and of the contexts in which they teach.

Furthermore, we believe that if each round is considered separately, the problematization may be constrained to the round's topic – for example, linear equations. However, we believe that the articulation of different rounds –constituting a whole which is greater than the sum of its parts – has more potential to foster teachers to develop a *problematizing stance*, which is not restricted to the specific topics studied, but encompasses their teaching practices more broadly. In other words, we expect the participant to go beyond what we propose.

Besides that, we did not expect the participants to reproduce in their own classrooms what we did with them. Rather, we expect they to develop a *problematizing stance* towards their teaching practices in a broader sense. Moreover, we expect that the tasks used in the PA may serve as an inspiration for them to create new mathematical possibilities for their students. We also did not expect to see radical and profound shifts in their attitudes and discourses. In fact, if this would have happened, doubts should have raised about the results as, after all, we aim to problematize deeply rooted attitudes and stances. To do that, aligned with Davis and colleagues' views of teachers education (e. g. Davis & Renert, 2013), we believe that the knowledge for teaching is produced through reflections from practice, with teachers working in groups, in which they collectively and permanently (re)construct their own knowledges – as the PA seems to be an example of.

Our PA resonates the literature that claims for the centrality of teachers in their own education. Furthermore, this PA structure is also an example of an interface between history and mathematics education (e. g. Saito, 2016; Saito & Dias, 2013) – since it is not only a matter of using episodes of history of mathematics to make its teaching more interesting. Rather, we propose to use reflections from how mathematical knowledge is historically and socially situated to change consensual understandings of mathematics teaching itself – that is, to foster a *problematizing stance* towards mathematics and its teaching.

Thus, in this paper, instead of merely reporting a teaching experiment using history of mathematics, we considered different issues associated with the articulation between two well established research fields. The *problematizing stance*, which constitutes the political and epistemological groundwork for our approach, brings together and articulates different ideas from different epistemic perspectives. The design of our PA is deeply rooted in the ideas of this *problematizing stance*. Therefore, we expect our approach to contribute with the discussions on teacher education highlighted by the literature. Instead of offering more and more content, the PA proposal is a way of shifting teachers' stance toward teaching and toward their roles in their own professional development. We recognize that the implementation of more versions of the PA is needed. However, the application we report here shows the potential of our proposal in problematizing teaching practices through the combination of historical practices and *mathtasks* and in setting up an environment where teachers feel free to share their practices and learn from each other, that is, where teachers are protagonist of their own education and professional development.

Acknowledgments:

We acknowledge CAPES (Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior – 88881.133350/2016-01) for support to the doctoral study of the first author through a scholarship for an internship at Rutgers University (New Jersey, USA) during which the PA was designed. This paper draws on data that are part of this doctoral study (Moustapha-Corrêa, Bernardes, Giraldo, in press). We thank the twelve participating teachers for their unwavering commitment to the project. And we also thank the Cerme's Thematic Working Group 12 for the discussion on the paper "Historical tasks to foster problematization", in which we drawn on on this paper.

References

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: From historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 111-129.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407.

Biza, I., Kayali, L., Moustapha-Corrêa, B., Nardi, E; & Thoma, A. (in press). Aguçando o foco na matemática: projetando, implementando e avaliando as atividades de MathTASK para a formaçao de professores de matemática. In: H.R. Elias, J. Viola & V. Giraldo

(Eds) *A Formação Matemática na Licenciatura em Matemática: Problematizando Conteúdos e Práticas*. [título provisório]. SBEM: Brasil.

Biza, I., & Nardi, E. (2019). Scripting the experience of mathematics teaching: The value of student teacher participation in identifying and reflecting on critical classroom incidents. *International Journal for Lesson and Learning Studies*.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4-6), 301-309.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2018). Competences of mathematics teachers in diagnosing teaching situations and offering feedback to students: Specificity, consistency and reification of pedagogical and mathematical discourses. In *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers* (pp. 55-78): Springer.

Carvalho, J. d., & Roque, T. M. (2012). Tópicos de História da Matemática. *Rio de Janeiro: SBM*.

Chace, A.B., Manning, H.P., & Archibald, R.C. (1927). The Rhind Mathematical Papyrus: British Museum 10057 and 10058 (Vol. 1). Oberlin, OH: Mathematical Association of America.

Chace, A.B., Bull, L., Manning, H.P., & Archibald, R.C. (1929). The Rhind Mathematical Papyrus: British Museum 10057 and 10058 (Vol. 2). Oberlin, OH: Mathematical Association of America.

Clark, K. M. (2014). History of mathematics in mathematics teacher education. In *International handbook of research in history, philosophy and science teaching* (pp. 755-791): Springer.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., & Tzanakis, C. (2018). Introduction: Integrating History and Epistemology of Mathematics in Mathematics Education. In *Mathematics, Education and History* (pp. 1-23): Springer.

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. (2009). Inquiry as stance: Ways forward. In *Inquiry as stance: Practitioner research for the next generation* (pp. 118-165): Teachers College Press.

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. L. (1999). Chapter 8: Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. *Review of research in education, 24*(1), 249-305.

Davis, B., & Renert, M. (2009). Mathematics-for-teaching as shared dynamic participation. *For the learning of mathematics, 29*(3), 37-43.

Davis, B., & Renert, M. (2013). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 245-265.

Davis, B., & Renert, M. (2014). *The Math Teachers Know: Profound Understanding of Emergent Mathematics*. New York: Routledge.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-Teaching: an Ongoing Investigation of the Mathematics that Teachers (Need to) Know. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 293-319. doi:10.1007/s10649-006-2372-4

Euclides. (2009). *Os Elementos*. São Paulo: Editora UNESP.

Fauvel, J.; Maanen, J. van. History in Mathematics Education - The ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

Freire, P. (2016). *Pedagogia do Oprimido* (60a edição ed.). Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Giraldo, V. (2019). *Que Matemática para a Formação de Professores? Por uma Matemática Problematizada.* Paper presented at the XIII ENEM, Cuiabá.

Grattan-Guinness, I. (2004a). History or heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education. *The American Mathematical Monthly, 111*(1), 1-12.

Grattan-Guinness, I. (2004b). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. *Historia mathematica, 31*(2), 163-185.

Jankvist, U. T. (2009). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 12*(1), 67-101.
Kjeldsen, T. H. (2011). Does history have a significant role to play for the learning of mathematics?: Multiple perspective approach to history, and the learning of meta level rules of mathematical discourse. In *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the 6th European Summer University.* (pp. 51-61): Verlag Holzhausen GmbH.
Kjeldsen, T. H., & Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 327-349.
Kjeldsen, T. H., & Petersen, P. H. (2014). Bridging history of the concept of function with learning of mathematics: Students' meta-discursive rules, concept formation and historical awareness. *Science & Education, 23*(1), 29-45.
Miatelo, L. (2008). The Difference 5 ½ in a Problem of Rations from the Rhind Mathematical Papyrus. *Historia mathematica, 35*(4), 277-284.
Moustapha-Corrêa, B., Bernardes, A., Giraldo, V., Biza, I., & Nardi, E. (in review). Problematizing mathematics and its pedagogy: Teachers' discursive shifts through history-focussed and classroom situation-specific tasks Journal of Mathematical Behavior (Special Issue: Advances in Commognitive Research).
Nóvoa, A. (2009). Para uma formação de professores construída dentro da profissão. In *Professores: Imagens do Futuro Presente*. Lisboa: EDUCA.
Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., . . . Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration: June 2016. *ZDM, 48*(5), 651-690.
Roque, T. (2012). *História da matemática*: Zahar.
Saito, F. (2016). Construindo interfaces entre história e ensino da matemática. *Ensino da Matemática em Debate (ISSN 2358-4122), 3*(1).
Saito, F. (2018). A pesquisa histórica e filosófica na educação matemática. *Eventos Pedagógicos, 9*(2), 604-618.
Saito, F., & da Silva Dias, M. (2013). Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. *Ciência & Educação, 19*(1), 89-111.
Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating : human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14.
Tardif, M. (2000). Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários
Elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas conseqüências em relação à formação para o magistério. *Revista Brasileira de Educação*.
Tardif, M., Lessard, C., & Lahaye, L. (1991). Os professores face ao saber: esboço de uma problemática do saber docente. *Teoria e educação, 4*, 215-233.
Watson, A., Ohtani, M., & Ainley, J. (2015). Task design in mathematics education. *Proceedings of ICMI Study, 22*, 9-16.
Winicki, G. (2000). The analysis of regula falsi as an instance for professional development of elementary school teachers. In V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics—an international perspective* (Vol. 6, pp. 129-134). Washington, DC: Mathematical Association of America.

CAPÍTULO 6.

A ABORDAGEM ZIZO E A RODADA 2

Neste capítulo, nos debruçamos na etapa de *zoom in* e *zoom out* histórico das atividades problematizadoras – que chamamos abreviadamente de abordagem ZIZO. Articulando com a literatura em história que discutimos no *Eixo Teórico 3: História da Matemática*, descrevemos de que maneira desenhamos essa etapa e usamos a Rodada 2 para exemplificar como aplicamos nossas ideias no estudo empírico. Os recortes de dados empíricos apresentados têm o papel de ilustrar o desenho metodológico da abordagem ZIZO e sua fundamentação na literatura de pesquisa. Não procedemos uma análise de dados com vistas a avaliar o desenvolvimento individual dos participantes, uma vez que não é esse nosso objetivo nesta tese. Nosso objetivo é avaliar a própria proposta de atividades problematizadoras, sua fundamentação teórica e seu desenho metodológico, a partir de sua aplicação com um grupo de participantes.

6.1 A Abordagem ZIZO

Na parte histórica da Rodada 1 utilizamos as atividades propostas por Arcavi e Isoda (2007), que foram elaboradas com base no método hermenêutico. Esses autores pautam suas atividades históricas num método interpretativo, com base na ideia de que é possível provocar nos professores uma escuta intencional de seus estudantes a partir da realização de atividades históricas com fontes primárias. De acordo com Arcavi e Isoda, na medida em que os professores se engajam na interpretação de textos históricos, eles podem modificar sua atitude perante seus próprios estudantes, passando a observar com mais atenção o que eles produzem – e não simplesmente considerando a produção discente sob o paradigma do "certo" *versus* "errado". Além disso, de acordo com Kjeldsen e seus colaboradores (e.g. KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014), como a história é uma fonte de discursos governados por diferentes metarregras, as práticas matemáticas do passado fornecem maneiras de abordar os problemas e as suas soluções diferentes das atuais. Assim, à luz dessas premissas, elaboramos uma estrutura para a realização do estudo histórico das demais rodadas, como descrevemos a seguir.

Para tanto, a etapa histórica se estrutura em três outras partes, a saber, *imersão na fonte*, *panorama histórico* e *desvelamento da fonte*. Na primeira parte, convidamos os professores participantes a analisar uma fonte histórica primária – *tarefa de imersão* tal como descrito no capítulo anterior. A seleção dessas fontes baseia-se no argumento teórico de Kjeldsen e seus colaboradores (e. g. KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012): usar fontes históricas para promover *commognitive conflicts*. Desse modo, as fontes primárias foram intencionalmente escolhidas visando práticas notadamente distintas das atuais. Por exemplo, em *Os Elementos*, o teorema que hoje conhecemos como de Pitágoras se prestava, essencialmente, a somar quadrados, sem o uso de medidas numéricas de áreas. Atualmente, porém, tal teorema é usado algebricamente como uma fórmula para determinar a medida linear de um dos lados de um triângulo retângulo conhecendo-se os outros dois. Nos termos sfardianos, a fim de promover *commognitive conflicts*, buscamos práticas moldadas por metarregras distintas das atuais.

Figura 15 – A estrutura da parte histórica.

Fonte – A autora.

Nesse sentido, em parte da imersão na fonte, procuramos promover um desconforto nos professores, gerado pela dificuldade em entender o conteúdo da fonte. No caso, das atividades propostas por Arcavi e Isoda (2007) e utilizadas na Rodada 1, como argumentamos no Capítulo 5 (Paper A), o desconforto se deu primeiramente devido à simbologia egípcia e também devido às práticas (matemáticas) da cultura egípcias, ou seja, devido às metarregras distintas implícitas nas práticas daquela cultura. Já no caso das duas outras Rodadas, procuramos apresentar aos professores traduções para o português das fontes utilizadas. Isso, contudo, não reduz o estranhamento gerado pelas diferenças nas práticas da fonte. Muito mais retórico e praticamente sem representação simbólica, o texto de *Os Elementos* de Euclides (EUCLIDES, 2009), (usado na Rodada 2), mesmo escrito em português e referindo-se a um conteúdo conhecido pelos professores, causa bastante estranhamento devido ao seu formato e à sua linguagem. Ao propor a análise de uma fonte primária aos professores, como parte do método hermenêutico, eles são estimulados a destacar partes do texto que não tenham compreendido e a formular questões com vistas à compreensão do conteúdo da fonte.

Visando a promover uma compreensão da fonte dentro de uma perspectiva histórica atualizada – no sentido de Grattan-Guinness (2004b) e Saito (2018) – consideramos que é preciso entender as particularidades do tipo de matemática que era praticada naquele momento histórico e naquela cultura. Desse modo, intercalamos o estudo da fonte com o contexto histórico – *tarefa de panorama* tal como descrito no capítulo anterior.

Além de localizar historicamente, a contextualização que propomos também busca destacar as particularidades das práticas matemáticas associadas à fonte primária em questão. Consoantes com o paradigma atualizado da historiografia (e. g. GRATTAN-GUINNESS, 2004b; SAITO, 2018), acreditamos que não há necessidade de hierarquizar as práticas matemáticas atual e da fonte histórica. Muito pelo contrário, entender a diversidade de práticas matemáticas faz parte do desenvolvimento da postura problematizadora que defendemos e permite que o professor tenha um novo olhar para a produção dos seus estudantes, na medida em que entende que diferentes práticas matemáticas podem coexistir. A contextualização histórica que fizemos se baseou na leitura de trechos de Roque e Carvalho (CARVALHO; ROQUE, 2012; ROQUE, 2012), bem como dos vídeos organizados pelos dois autores disponibilizados *online*[69] e também nas discussões plenárias feitas com os participantes durante os encontros. Durante essas plenárias, aprofundamos a discussão realizada nos livros e vídeos, detalhando mais algumas práticas – pautados ainda em outras referências tais como Imhausen (2007) e Miatelo (2008) na Rodada 1, Lützen (2002), na Rodada 3, Katz (2009) em todas as Rodadas.

O panorama histórico se baseia, assim, tanto em historiografias mais atualizadas quanto na perspectiva de matemática problematizada de Roque (e. g. 2012), cujo foco se desloca do resultado para o problema motriz. Assim, procuramos não tomar a matemática do presente como guia para olharmos para a matemática do passado, além disso, consideramos o processo de constituição dos conceitos em detrimento dos resultados *per se*. Na verdade, acreditamos que o estudo contextualizado de práticas matemáticas do passado pode ajudar os professores a entenderem como alguns objetos matemáticos são naturalizados, como discutimos na seção <A Matemática problematizada: uma concepção histórica>.

Com a prática matemática entendida e contextualizada, voltamos para a fonte para desvelá-la, isto é, para interpretá-la, caracterizando o uso que propomos do método hermenêutico. Nessa busca pelo desvelamento, procuramos reunir os entendimentos parciais da fonte primária, visando à sua compreensão como um todo.

---

[69] Neste site < http://www.profmat-sbm.org.br/ma31/> encontram-se todos os links das vídeo aulas de História da Matemática.

Como indicado na Figura 15, as três partes que formam a tarefa histórica não são estanques ou disjuntas. Elas se articulam entre si de tal forma que, ao mergulhar numa fonte histórica, estuda-se a prática matemática da época e ao estudar a prática matemática da época, entende-se melhor a fonte. Isso fica evidente, por exemplo, na Rodada 2 quando nos debruçamos no procedimento euclidiano de quadratura e no estudo das práticas matemáticas presentes nos dois primeiros livros de *Os Elementos*. O entendimento mais global da obra ajuda no entendimento mais específico das proposições. Ao mesmo tempo, observar passo a passo a demonstração de uma proposição ajuda a entender como *Os Elementos* se estruturam. Por exemplo, para indicarmos as *noções comuns*, os *postulados* e as *proposições* utilizadas na demonstração da Proposição II.14 primeiro imergimos na fonte, por meio da leitura da Proposição e de sua demonstração e no traçado de uma estratégia para entendê-las. Em seguida, realizou-se um panorama sobre *Os Elementos* e finalmente voltou-se à Proposição para entender sua demonstração passo a passo, ou seja, desvelá-la (Apêndices U (condensado na Figura 16) e X).

Figura 16 – Proposição II.14 e sua demonstração com as proposições, os postulados e as noções comuns utilizadas indicadas.

Fonte – A autora.

A parte histórica é composta, portanto, por uma combinação de momentos de *zoom in* e de *zoom out*, que correspondem, respectivamente, à observação das partes detalhadamente e do todo globalmente. Essa é a nossa proposta para investigar práticas matemáticas do passado, prescindindo, tanto quanto possível, das lentes contemporâneas da nossa matemática. Devido às aproximações – promovidas pela imersão em uma ou mais fontes primárias – e aos afastamentos – promovidos pelo panorama histórico – inerentes do nosso método, batizamos a parte histórica de *zoom in* e *zoom out* histórico ou, abreviadamente, ZIZO.

A seguir, descrevemos como implementamos essas tarefas à luz do que aconteceu na segunda Rodada. Visando a um entendimento contextualizado, apresentamos toda a Rodada.

6.2 Rodada 2 – O Ensino de Áreas e do Teorema de Pitágoras e seus Papéis nos Elementos de Euclides

A segunda Rodada, que compõe as Atividades Problematizadoras, versa sobre o ensino de áreas e sobre o teorema de Pitágoras e o papel desse teorema nos livros I e II de *Os Elementos* de Euclides. A escolha desses tópicos – áreas de figuras planas e teorema de Pitágoras – se deu com o objetivo de problematizar seu ensino na educação básica, dado que, a nosso ver, sua abordagem na educação brasileira é predominantemente analítica – nossa experiência nos indica que o ensino de áreas, por exemplo, é, com frequência, marcado pela aplicação de fórmulas. Nesse tipo de abordagem são pouco explorados tanto os significados de área como grandeza geométrica ou como medida, quanto os significados para a própria noção matemática de fórmula. Já o teorema de Pitágoras acaba se reduzindo à fórmula $a^2 = b^2 + c^2$, em que a, b, e c indicam medidas lineares, respectivamente da hipotenusa e dos catetos de um triângulo retângulo. São pouco explorados, assim, os significados geométricos para o teorema, por exemplo, como relação entre áreas.

Nos dois primeiros livros de *Os Elementos*, Euclides (2009) apresenta seu tratamento de áreas por quadratura: a determinação da área de um polígono passa pela construção de um quadrado com a mesma área. Para isso, Euclides lança mão de procedimentos que envolvem equivalência de e operações com áreas, os quais são realizados sem atribuir números às medidas. O teorema de Pitágoras, por sua vez, é utilizado em *Os Elementos* como uma ferramenta para somar quadrados geométricos, isto é, sem indicar as medidas por números – por exemplo, na demonstração da Proposição II.14 – "Construir um quadrado igual a retilínea dada." – (parte d)o teorema de Pitágoras (Proposição I.47) é usado para observar que um quadrado é a soma de outros dois.

Para elaborar as tarefas desta Rodada, como contraponto às abordagens de áreas e do teorema de Pitágoras restritas à aplicação de fórmulas, consideramos os dois primeiros livros de *Os Elementos*, com destaque para as proposições II.14 e I.47. Esse contraponto intencional fundamenta-se na noção de *commognitive conflict*, o qual, por sua vez, foi planejado com base: i) nas metarregras relacionadas à linguagem (e.g. em *Os Elementos*, um quadrilátero é referenciado por meio dos pontos que determinam uma de suas diagonais; *retilínea* é o termo utilizado para indicar um polígono); e ii) na metarregra enunciada por nós como “cálculo de áreas por meio de equivalência de áreas e de operações geométricas com áreas sem o uso de medidas numéricas”. Enunciamos essa última metarregra com base na leitura e interpretação histórica de *Os Elementos* apresentada por Roque (2012), bem como em nossa análise da tradução de Irineu Bicudo (EUCLIDES, 2009). O uso geométrico do teorema de Pitágoras para de fato somar quadrados é consequência da prática euclidiana denominada por Roque (2012) como “cálculo de áreas”.

Nossa intenção com esta Rodada é, portanto, de apresentar a abordagem euclidiana para áreas e para o uso do teorema de Pitágoras e levar os professores a problematizarem suas práticas de ensino com relação a esses dois tópicos. Para tanto, passamos pela problematização de seus próprios entendimentos sobre esses tópicos. Com isso, queremos dizer que, para além de problematizarem como ensinam áreas e o teorema de Pitágoras, procuramos levar os professores a também problematizarem suas próprias formas de entender tais tópicos. Isto é, tal problematização pode levar uma reinterpretação e reconfiguração dos seus próprios saberes docentes.

Como para problematizar é preciso ter refletido antes sobre o tema, a Rodada 2 se iniciou com a divisão da turma em dois grupos, aos quais foi proposta a produção de mapas de ideias, respectivamente sobre os temas: áreas e teorema de Pitágoras. Os professores participantes foram orientados a registrar nos mapas tudo o que pensavam e relacionavam ao tema designado ao seu grupo. Depois da discussão nos pequenos grupos e do registro das ideias em cartazes (Figura 17 e Figura 18), os grupos apresentaram essas ideias para a turma. Alguns professores participantes relataram que aprenderam coisas novas com os colegas. Os mapas apresentados refletem, portanto, o conhecimento mobilizado por aquele grupo durante a sua elaboração, a partir da discussão coletiva. Em nossa interpretação, isso reforça a importância de promover momentos coletivos de discussão que propiciam o compartilhamento de práticas. Essa observação é consistente com as tendências da literatura de pesquisa que advogam coletivos docentes em que os professores podem intencionalmente reinterpretar seus próprios saberes a partir das vivências com o grupo, tal como sugere a noção de *substruct* proposta por Davis e colaboradores (e. g. DAVIS; RENERT, 2014), ou a investigação como postura de Cochran-Smith e Lytle (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 2009).

Figura 17 – Mapa criado pelo grupo responsável pelo tema teorema de Pitágoras.

Fonte – A autora.

Figura 18 – Mapa criado pelo grupo responsável pelo tema áreas.

Fonte – A autora.

Dando continuidade à etapa *disparando a discussão*, os professores foram apresentados a uma *mathtask* com vistas a identificar de que maneira diferentes tipos de demonstrações ou justificativas para o teorema de Pitágoras são, por eles, validado(a)s. O contexto (fictício) da *mathtask* é uma reunião de professores em que dois professores, Diego e Paula, apresentam propostas diferentes para o ensino do teorema de Pitágoras (Figura 19; Apêndice D): uma pautada em uma demonstração geométrica do teorema, e a outra, em semelhança de triângulos de forma algébrica. Ambas as abordagens foram retiradas de Wagner (2006) e foram escolhidas por serem, na nossa experiência, representativas de abordagens comuns nas salas de aula brasileiras. Os questionamentos feitos pela tarefa são:

> Considerando as propostas da Professora Paula e do Professor Diego, responda.
> a) Qual você considera mais matematicamente rigorosa? Por quê?
> b) Qual você usaria na Educação Básica? Por quê?
> Indique
> bi) a série e o momento que usaria – por exemplo, para introduzir, para concluir, como aplicação.;
> bii) os tipos de problemas e exercícios que você proporia à turma. Se possível, anexe os enunciados.

Acompanhou a folha da tarefa (Figura 19; Apêndice D) um quebra-cabeça feito com cartolina colorida com as peças descritas na tarefa.

Figura 19 – *Mathtask* disparadora da Rodada 2: Refletindo sobre a demonstração do teorema de Pitágoras.

Fonte – A autora.

Nosso objetivo com essa tarefa era, portanto, identificar de que maneira os professores validam demonstrações baseadas em diferentes metarregras. Os dados nos revelam que, ainda que reconheçam a demonstração geométrica e o potencial pedagógico do quebra cabeça, a maioria dos professores elegem a demonstração por semelhança como mais rigorosa. Seus relatos nos dizem que usariam o quebra-cabeças e a demonstração geométrica para a introdução do teorema de Pitágoras, contudo, não abririam mão da demonstração algébrica por semelhança como fechamento.

Além disso, Vinicius relatou que usaria a proposta geométrica em turmas mais "fracas". Parece, portanto, haver entre o grupo, uma valorização da demonstração algébrica em detrimento da geométrica, o que indica que eles recorrem à álgebra para endossar uma demonstração, mesmo sendo uma demonstração de um fato geométrico. Visando ao engajamento dos professores com a reflexão sobre o tipo de demonstração a ser apresentada, solicitamos como tarefa de casa:

> Selecione uma demonstração para o teorema de Pitágoras diferente das vistas no encontro de hoje.
>
> 1. Forneça uma apresentação dessa demonstração para uma turma da Educação Básica, indicando

a. a série;
b. como você a faria em sala;
c. em que momento essa apresentação seria feita (para apresentar o conteúdo? como fixação?);
d. o que os estudantes deveriam saber para entendê-la;
e. por que é importante aprendê-la.

2. Justifique a sua escolha.

De modo geral, as demonstrações selecionadas pelos professores envolviam de alguma maneira a simbologia algébrica, o que nos leva a concluir que para eles é preciso passar pela álgebra para que as narrativas sejam endossadas (*substantiate*, nos termos sfardianos).

Antes de começar a *etapa histórica*, os professores participantes, ainda que implicitamente, já tinham sido convidados a refletir sobre o papel da álgebra nas demonstrações e nas práticas de ensino. Para disparar a discussão histórica, perguntamos aos professores se eles já tinham lido *Os Elementos* de Euclides. Dos 11 professores presentes, apenas um indicou que já havia lido o livro e quatro indicaram a leitura de fragmentos, mas não do original. A *tarefa de imersão* consistiu na leitura da Proposição II.14 e de sua demonstração (Figura 20 e Apêndice E). Esta proposição encerra o Livro II e a sua demonstração ilustra o uso do teorema de Pitágoras para somar quadrados. A opção por utilizar uma fonte histórica como *Os Elementos* se deve à estranheza – e consequente dificuldade – gerada pela linguagem do texto original de *Os Elementos*. A dificuldade se deve ao fato de esse compêndio ser baseado em metarregras não familiares aos professores participantes, com uma linguagem retórica, sem a simbologia e as notações com as quais os professores estão acostumados a utilizar.

Figura 20 – Proposição II.14.

Fonte – Euclides (2009).

Feita a primeira leitura, seguindo o método hermenêutico, orientamos os professores a identificarem os "passos fundamentais", o que "está por trás" da demonstração e a destacarem dúvidas que possam ter surgido. Em seguida, solicitamos que registrassem por escrito se e como o teorema de Pitágoras é usado na demonstração. Todos os 9 professores que responderam a esse questionamento identificaram o uso do teorema de Pitágoras na demonstração. À luz desses registros, passamos a discutir a demonstração.

Alguns professores relataram dificuldade em entender o texto, mesmo estando escrito em português. O enunciado da proposição, tal como traduzido por Bicudo, é "Construir um quadrado igual à retilínea dada.". O uso da expressão "retilínea", referindo-se a um polígono, causou estranheza em alguns professores. Cleber e Apolo, por exemplo, ao apresentarem seu portfólio no último encontro, relataram a dificuldade que o termo gerou para o entendimento do próprio enunciado da proposição. Aqui observamos como um *commognitive conflict* pode ser promovido a partir do uso distinto de um significador matemático[70] – no caso, a palavra "retilínea". O esforço para entender o significado desse termo, bem como de toda a

[70] Sfard (2008) identifica o significador – *signifier* – como as palavras ou os símbolos que funcionam como substantivos em enunciados usados no discurso.

demonstração, está na base da proposta de Arcavi e Isoda (2007) e que tentamos estender para além das atividades propostas por esses autores. Assim, os professores, na tentativa de entender o diferente – no caso desta tarefa histórica de imersão, a Proposição II.14, desenvolvem o que esses autores chamam de escuta intencional, ou seja, ao se depararem com respostas inesperadas a problemas propostos ou com raciocínios diferentes dos apresentados, os professores buscam entender a produção de seus estudantes.

A discussão foi feita destacando que *noções comuns*, *postulados* ou *proposições* são usadas na demonstração (Figura 20 e Apêndice E). Isso foi feito também para iniciar o segundo momento da etapa histórica – *tarefa de panorama* – de modo que os professores percebessem como *Os Elementos* se estruturam. O *panorama histórico* dessa rodada foi feito a partir da leitura de partes selecionadas de Roque (2012) e de Carvalho e Roque (2012); e dos vídeos “Geometria Grega”[71], em que Irineu Bicudo disserta sobre a geometria grega, e “Os Elementos de Euclides: equivalência de áreas”[72], com uma vídeo-aula de João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho. Os professores foram orientados a lerem esses textos e a assistirem a esses vídeos para a realização da discussão plenária no encontro seguinte. Nessa oportunidade, foi salientada a estrutura de *Os Elementos*, tanto no que se refere ao conteúdo dos 13 livros, quanto ao método axiomático-dedutivo e ao papel das construções com régua e compasso. Ressaltamos também que as proposições podem ser de dois tipos: problema, tal como a Proposição I.10 e teorema, tal como a Proposição I.41 (Apêndice X). Como o nosso foco está no tratamento de áreas e no papel do teorema de Pitágoras, focamos a discussão no conteúdo dos dois primeiros livros.

O panorama histórico que propomos não se reduz a uma contextualização sobre o personagem em si e a sociedade na qual estava imerso, é muito mais abrangente, destacando as práticas matemáticas presentes na fonte estudada. Pretendemos, com isso, que os professores

---

[71] Disponível em <[parte 1] <https://www.youtube.com/watch?v=O3ap76TFG9k&list=PLvfVMqgQfJ_pJA_26-xXenTxch809Y6Cp&index=2>;

[parte 2] <https://www.youtube.com/watch?v=xTKu7FgaMts&list=PLvfVMqgQfJ_pJA_26-xXenTxch809Y6Cp&index=3>;

[parte 3] <https://www.youtube.com/watch?v=lu2HJBvDMUg&list=PLvfVMqgQfJ_pJA_26-xXenTxch809Y6Cp&index=4>;

[parte4] <https://www.youtube.com/watch?v=JRgabjO_YYk&list=PLvfVMqgQfJ_pJA_26-xXenTxch809Y6Cp&index=5>

[72] Disponível na página do PROFMAT < http://www.profmat-sbm.org.br/ma31/> ou no canal do Youtube <https://www.youtube.com/playlist?list=PLxEB_CPQhRLuLeD_N85EZLcSg4oO1YJqv>

observem como a própria matemática é situada temporal e culturalmente, podendo ser diferente da que estão acostumados, ou seja, as práticas do passado são usadas para problematizar as práticas atuais. Assim, é possível mostrar que a matemática do presente não é uma evolução de práticas (matemáticas) do passado, não havendo, portanto, um desenvolvimento linear e universal da matemática.

Feita essa contextualização, propusemos uma nova *imersão na fonte*, agora a partir da Proposição I.47 (Apêndice F), cujo enunciado disponível na tradução de *Os Elementos* é "Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.". Ou seja, essa proposição é parte do teorema de Pitágoras. Já tendo lido a proposição e sua demonstração, convidamos os professores a observarem um aplicativo[73] que ilustra graficamente a demonstração do teorema tal como apresentada por Euclides em *Os Elementos* (Figura 21). Percorremos a demonstração passo a passo (Apêndice X), buscando desvela-la. Voltamos, então, para a Proposição II.14, também buscando um desvelamento. Procuramos, assim, propiciar aos professores uma experiência com o método axiomático-dedutivo de *Os Elementos*. Dessa forma, compusemos movimentos de *zoom in* e de *zoom out*, buscando uma estrutura em que o todo ajuda no entendimento do particular e vice-versa.

Figura 21 - Imagem do aplicativo com a demonstração de Euclides para o teorema de Pitágoras.

Fonte – Imagem gerada a partir do site.

Para concluir a parte histórica e dar início à etapa *reflexão de práticas docentes*, orientamos os professores a refletirem sobre o tratamento de áreas apresentado nos dois primeiros livros de *Os Elementos*, como tarefa de casa (Apêndice X). Nosso objetivo era que os professores percebessem a equivalência de e as operações com áreas, e que o estudo de áreas é abordado nesse compêndio sem atribuir números às medidas.

A etapa *reflexão de práticas docentes* foi disparada com quatro questionamentos:

[73] Disponível em <https://www.geogebra.org/m/bRrZeaSV>

i) O que é área?
ii) Como você costuma ensinar áreas?
iii) Para você qual o papel das fórmulas no ensino de áreas?
iv) Na sua opinião, qual a melhor maneira de apresentar as fórmulas de áreas na Educação Básica?

Nosso intuito com esses questionamentos foi levar os professores a refletirem sobre questões familiares de suas atuações profissionais, de modo que, por meio das tarefas realizadas com a rodada eles pudessem problematizar seus entendimentos de área, de fórmula, bem como suas práticas docentes relacionadas a esses temas.

Para abordar sentidos para área partimos de uma tarefa com tangram inspirada em Kaleff, Rei e Garcia (2002), apresentada na Figura 22 (Apêndice G). Nosso objetivo foi apresentar uma tarefa didática utilizando equivalência de áreas e medida. Tentamos chamar atenção dos professores que a área das peças do tangram pode ser medida, apenas por meio de comparação entre as peças. Dessa forma, é possível explorar a ideia de área como uma comparação determinada pela escolha de uma unidade de medida, sem necessidade de recorrer às fórmulas. Chamou a nossa atenção o fato de os professores, em sua maioria, desconhecerem o potencial didático do tangram. Percebemos que, para a maioria deles, o tangram se resumia a um material lúdico com que os estudantes podem criar figuras. Ulisses compartilhou com o grupo uma atividade que costuma fazer com suas turmas utilizando o tangram (Figura 23). Contudo, essa atividade, ainda que compare a área das peças que formam o tangram, faz essa comparação a partir do cálculo da área de cada uma das peças; cálculo esse que é feito com o auxílio das fórmulas de área, de acordo com o que Ulisses relatou.

Figura 22 – Tarefa de medida de área com o tangram.

Fonte – A autora.

Figura 23 – Tarefa utilizando tangram compartilhada por Ulisses.

Fonte – Ulisses.

Dando sequência a essa discussão, questionamos os professores participantes sobre seus entendimentos do que é fórmula. Apresentamos, então, a ideia de que uma fórmula de área é uma maneira de expressar uma medida de área em função de uma medida de comprimento (Apêndices Y e AA). Aqui mais uma vez reforçamos que, para problematizar algo, é preciso ter refletido previamente sobre o tema. Por isso, antes de apresentarmos o nosso entendimento do que é uma fórmula, questionamos os professores sobre o que é uma fórmula.

Para consolidar essas reflexões, apresentamos uma *mathtask*, com duas propostas de ensino de áreas (Figura 24 e Apêndice H). O contexto dessa *mathtask* é uma turma de licenciatura em matemática que discute geometria para a educação básica. Dois professores com experiência na educação básica apresentam suas propostas. A primeira proposta, da professora Lúcia, é para o 8º ano do Ensino Fundamental e se baseia na área de retângulos: as áreas de quadrados, paralelogramos, triângulos, trapézios e losangos são obtidas a partir da decomposição ou recomposição da área de retângulos; e os exercícios propostos se resumem ao cálculo de áreas. Já a segunda proposta, do professor Luiz Felipe, começa no 7º ano com atividades com o tangram, em que são trabalhadas equivalências de áreas e a medida de áreas utilizando as próprias peças do tangram. Já no 8º ano, assim como a professora Lúcia, o professor Luiz Felipe também parte da área do retângulo para determinar as demais áreas. Contudo, os exercícios propostos, além de usar as fórmulas, também exploram a transformação de figuras. Os questionamentos levantados na *mathtask* são:

> a) Como professor, qual abordagem você está acostumado a usar para o ensino de áreas?
> b) Avalie se as abordagens dos professores Lúcia e Luiz Felipe desenvolvem os aspectos conceituais relacionados à área (significado de medir, significado de fórmula).
> c) Você identifica outros aspectos conceituais nas abordagens? Quais?
> d) Alguma das abordagens apresentadas chamou a sua atenção? Por quê?
> e) Você considera que a aula da professora Lúcia poderia ser enriquecida com o uso de materiais concretos? Em caso afirmativo, descreva que materiais concretos poderiam ser usados, como e em que pontos da aula.
> f) Após as apresentações, o estudante Flávio questionou: “Luiz Felipe, me parece que a sua abordagem não foca nas fórmulas. Como seus alunos costumam se sair em concursos de acesso como, por exemplo, os pré-militares?” Se você fosse o professor Luiz Felipe, como responderia ao Flávio.

Com essa *mathtask* pretendemos identificar de que maneira os professores validam diferentes tipos de abordagens para o ensino de área. A proposta do professor Luiz Felipe é inspirada na abordagem histórica de *Os Elementos*, na medida em que usa equivalência de áreas, e incorpora tarefas utilizando o recurso didático do tangram. Já a proposta da professora Lúcia, ainda que parta da decomposição e recomposição de figuras geométricas, tem foco no uso das fórmulas.

Figura 24 – *Mathtask* reflexões de práticas docentes: comparando propostas de ensino de áreas.

Fonte – A autora.

O relato de parte da turma nos mostrou que eles desconheciam a possibilidade de se trabalhar equivalência de áreas com o tangram. Alguns professores indicaram que propostas lúdicas com a utilização de materiais concretos (como tangram) podem ser confundidas com brincadeira pelos estudantes, fazendo com que o foco da aula seja perdido. Essa visão por parte dos professores pode estar associada com um entendimento insuficiente sobre os objetivos dos materiais e seus usos, o que pode provocar uma inversão didática, ou seja, no lugar de auxiliar o desenvolvimento de determinado tema, o material concreto adquire um fim em si próprio (e. g. NACARATO, 2005).

A apresentação da proposta didática com o tangram, articulada com a discussão sobre o tratamento por equivalência de áreas presente em *Os Elementos* de Euclides foi a maneira que propusemos para provocar nos professores uma reflexão na direção de que o estudo de práticas históricas pode ajudar a mudar as características das tarefas propostas aos estudantes. Neste caso, em lugar de apenas deixar os estudantes "brincarem" com as peças do tangram, o professor passa a perceber que seu uso, além da possibilidade de trabalhar equivalência de áreas, a partir da criação de diversas formas com as peças, permite a exploração de medidas de áreas tomando-se uma de suas peças como unidade. Assim, a área é explorada como uma grandeza geométrica que antecede a expressão de suas medidas numéricas por meio de fórmulas algébricas. Neste caso, a proposta didática se articula com o estudo histórico realizado de tal maneira que *Os Elementos* podem ser considerados como uma forma de respaldar e legitimar a proposta. Ou seja, os professores passam a não mais encarar o tangram apenas como uma "brincadeira", eles passam a perceber a potencialidade do material para trabalhar a noção matemática de área. Ainda que não seja nosso objetivo apresentar propostas de atividades que possam ser replicadas pelos professores em suas turmas sem qualquer reflexão ou adaptação, esta proposta com o tangram acaba configurando-se como um exemplo que pode ser usado nas aulas da educação básica. Queremos dizer que uma proposta lúdica, como a sugerida pela Figura 22, tem por base a equivalência de áreas, tal como a proposta de Euclides e, portanto, pode ser encarada como a concretização de abordagens inspiradas na história.

A prática euclidiana por configurar-se como uma prática bastante distinta da abordagem por fórmulas, usual na educação básica, serviu como contraponto às rotinas que os professores estão acostumados a realizar. Nesse sentido, nosso objetivo com essa tarefa foi de problematizar os entendimentos de área dos professores e os modos como esse tópico é ensinado na educação básica.

De acordo com o método hermenêutico que implementamos neste trabalho, o engajamento com fontes históricas primárias pode desenvolver a escuta intencional nos professores, possivelmente transformando a sua relação com seus estudantes. Além das tarefas históricas, propusemos as *mathtasks*, de modo a discutir mais explicitamente com os professores como o contraponto histórico – propiciado pelas fontes primárias – pode repercutir nas suas práticas docentes. A combinação de tarefas históricas e *mathtasks* é, portanto, um diferencial da nossa abordagem com vistas à promoção de mudanças discursivas nos professores. Reforçamos que nossa intenção com as Atividades Problematizadoras como um todo e com as Rodadas em particular não é de fornecer modelos a serem seguidos *ipsis litteris* pelos professores. Na verdade, o que esperamos é que os professores problematizem as suas práticas docentes de modo geral e que as tarefas utilizadas nas rodadas sirvam de inspiração para as tarefas que eles desenvolvem com seus estudantes no seu dia a dia, ou seja, que desenvolvam a postura problematizadora.

A experiência com a Rodada 2 nos mostra isso na medida em que os professores passaram a reconsiderar, por exemplo, suas opiniões sobre o tangram. Em nossa interpretação, se tivéssemos realizado apenas as tarefas com as fontes históricas primárias talvez os professores participantes não tivessem entendido como um estudo de equivalência de áreas pode ser realizado com os estudantes. Ou seja, a combinação do estudo das práticas matemáticas históricas, com exemplos de tarefas que podem efetivamente ser realizadas com os estudantes na escola básica, além da realidade que os contextos das *mathtasks* conferem às discussões, mobiliza os saberes docentes dos professores, levando-os a reinterpretarem e reconfigurarem tais saberes. Além disso o uso da fonte original – além de tirar da zona de conforto (promoção de *commognitive conflict*) – confere um significado específico e bem delimitado na nossa proposta, uma vez que, de acordo com Arcavi e Isoda (2007) o seu estudo com vistas a sua interpretação desenvolve a escuta intencional dos estudantes.

Consideramos que, para entender todo o diferencial da nossa proposta, é preciso juntar a essa combinação a reflexão propiciada pela escrita dos diários reflexivos e pela elaboração das propostas de abordagem e dos portfólios, assim como a condução compartilhada dos encontros pelas duas docentes. Entendemos que essa combinação de aspectos contribuiu para que os professores problematizassem suas práticas e a maneira com que entendem a própria matemática. Isso foi possível de ser observado a partir das mudanças discursivas experienciadas pelos professores participantes, que descrevemos no próximo capítulo.

UMA ANÁLISE DE DADOS

Os dados foram produzidos à luz da *Commognition*, ou seja, de uma teoria para a análise de discurso. Assim, ao planejar as atividades problematizadora, levamos em consideração a necessidade de acessar o discurso dos professores participantes. Por isso, todos os encontros foram vídeo e áudio gravados; além disso, acessamos o registro por escrito dos professores participantes, tanto através das tarefas quanto através dos diários reflexivos produzidos semanalmente por eles. O ambiente das atividades problematizadoras, despertado por elas próprias e também pela sua condução, permitiu que os professores participantes compartilhassem suas práticas docentes, bem como outras atividades, sobretudo as relacionadas à matemática e ao seu ensino.

No capítulo a seguir apresentamos uma análise de dados, em que evidenciamos algumas mudanças discursivas observadas nos participantes ao fim do conjunto das três rodadas. Apesar de o capítulo estar estruturado a partir da Rodada 3, os resultados que evidenciamos dizem respeito ao conjunto das três rodadas. Acreditamos que os episódios que trazemos na análise apresentada ilustram fortemente o potencial das atividades problematizadoras para desenvolver uma postura problematizadora.

CAPÍTULO 7.

PAPER B – PROBLEMATIZING MATHEMATICS AND ITS PEDAGOGY: TEACHERS' DISCURSIVE SHIFTS THROUGH HISTORY-FOCUSSED AND CLASSROOM SITUATION-SPECIFIC TASKS

Bruna Moustapha-Corrêa[1], Aline Bernardes[1], Victor Giraldo[2], Irene Biza[3], Elena Nardi[3]

[1] Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, bruna.correa@uniriotec.br, aline.bernardes@uniriotec.br

[2] Universidade Federal do Rio de Janeiro, victor.giraldo@ufrj.br

[3] University of East Anglia, i.biza@uea.ac.uk, e.nardi@uea.ac.uk

ABSTRACT: We explore the conjecture that engaging teachers with activities which consider mathematical practices from the past (*history-focussed* tasks) and in today's mathematics classrooms (*mathtasks*) have the capacity to promote teachers' meta-level learning about mathematics and its pedagogy. We present the design and implementation of a set of *problematizing activities* (PA), which combine aforementioned tasks, as well as evidence of discursive shifts observed as mathematics teachers engage with the PA. The participants, twelve experienced mathematics teachers, engaged with three rounds of triggering, history-focussed and reflection-on-teaching tasks in thirteen meetings over a four–month postgraduate course. Through a commognitive lens, we trace how the commognitive conflicts triggered by the PA resulted in discursive shifts at object and meta levels: pedagogical and epistemological narratives on mathematical objects (e.g. function); pedagogical discourses (e.g. on student assessment; on the value of student voice); and epistemological discourses (e.g. concerning the mutability of mathematics).

KEYWORDS: Teacher mathematical and pedagogical discourses; problematizing; theory of commognition; history of mathematics; mathtasks

1. Searching for means that reshape teacher pedagogical and mathematical discourses

In engaging with discussions on history of mathematics, teachers may develop problematized views on what mathematics is, how it changes, as well as how it is, or may be, learned and taught (e.g. Clark, Kjeldsen, Schorcht, & Tzanakis, 2019; Bernardes & Roque, 2018). This study investigates how such problematizations may be triggered by a combination of *history-focussed tasks* (inspired by Kjeldsen, & Petersen, 2014; Arcavi, & Isoda, 2007) and *situation-specific tasks* (thereafter *mathtasks*, as per Biza, Nardi & Zachariades, 2007; 2018). To this aim, we present evidence of discursive shifts observed as mathematics teachers, who were taking an in-service professional development programme, engaged in activities designed to combine aforementioned tasks and multiple opportunities for reflection on learning, teaching and on mathematics itself.

The construct of *problematization* is foundational to our study. In our work, this polysemic term means to put into question or to consider different perspectives – especially those usually taken for granted – on mathematics as well as its teaching and learning. Thus, problematization here is an epistemological and political stance towards mathematics teaching practices, according to which the focus should be more on the social, historical and subjective processes that engender mathematical knowledge production, than on the mere exposition of facts and procedures.

Our perspective reverberates the landmark work of Paulo Freire (2016) who advocates a problematizing education as a counterpoint to *banking pedagogy*, a metaphor for a paradigm he strongly criticizes for considering teachers as sole owners of knowledge, whose role is to *deposit* it in learners, seen as "empty vessels to be filled". Freire conceives education as the authentic freedom, a "praxis which implies the action and reflection of people over the world to transform it" (Freire, 2016, p.118). Such reflection must be pervaded of intentionality, which demands *problematizing* relations of people with the world. Thus, for Freire, problematizing education leads to uttermost freedom, through coming to know in communion, and circumventing the dominant dichotomy between "those who know and transmit" and "those who receive" knowledge.

In our study, a problematizing perspective on teaching and learning of mathematics is intertwined with a problematizing view of mathematics itself. This involves putting into question a view according to which mathematical knowledge would have always been the way it is in the present, or would develop through a linear and universal process leading from a "more primitive" to a "more advanced" state, carried out by the isolated inspiration of persons with inborn giftedness (Giraldo, 2018). Thus, mathematics teaching would be constrained to the presentation of facts and procedures, and mathematics teachers' role would be to identify "gifted" students, and segregate them from the "weak" ones. In opposition, a problematizing view of mathematics (and its teaching) focuses on socially and culturally situated contexts in which mathematical knowledge is produced, both from a historical and a subjective perspective. In this paper, we propose a set of *problematizing activities* (PA), for mathematics teachers' in-service education that problematizes mathematics and its teaching through combining history-focussed tasks and mathtasks.

Our take on history of mathematics is aligned with Grattan-Guinness's (2004b) distinction between two ways of interpreting the mathematics of the past, *history* and *heritage*. History addresses "what happened in the past?", "why did it happen?", "what did not happen?" and "why not?". Historians are not interested only in heroic successes, but also in what *did not* work out. They look for the chronology of mathematical ideas under scrutiny, considering impacts of these ideas in and/or outside mathematics, as well as differences between them and more modern ones. However, historians consider not only the mathematical aspects, but also social and cultural contexts in which they are situated. Heritage, on the other hand, addresses the question "how did we get here?", as if the present was "*photocopied* onto the past" (Grattan-Guinness, 2004b, p.165, emphasis in the original). Grattan-Guinness (ibid) notes that a heritage perspective resembles the Whig history – as coined by Herbert Butterfield in the 1960's – i.e., the history of the victors.

While Grattan-Guinness states that both takes may be legitimate, he cautions against conflating the two as potentially misleading. He also states that "mathematicians normally read the past in a heritage spirit" (2004a, p. 5), since a "philosophical difference is that inheritors tend to focus upon knowledge alone (theorems as such, and so on), while historians also seek motivations, causes, and understanding in a more general sense." (Grattan-Guinness, 2004b, p.165).

Our take on history is quite distant from a heritage perspective. Our PA aim to promote a problematized understanding of mathematics, in opposition to a view of mathematical knowledge production as a linear, cumulative and progressive development. We conjecture that presenting discontinuities and difficulties that pervade over time and across different cultures opens up possibilities for learning environments nurturing confidence and authority to do mathematics – which may give mathematics a more human face.

Aligned with our take on history of mathematics is our discursive approach to tracing and analysing evidence of our participants' engagement with the PA, the theory of commognition (Sfard, 2008), which considers learning as becoming participant in a discourse – mathematics, in our case. Since discourse is shaped by metarules – rules about communicative actions, implicitly present in discursive actions – discursive patterns result from such rule-governed processes. In this vein, the development of mathematics can be understood as the changing of metarules across time and contexts. The metarules of mathematical discourse are, therefore, contingent and historically given.

Drawing on commognitive theory, Kjeldsen and colleagues (Kjeldsen & Blomhøj, 2012; Kjeldsen & Petersen, 2014) argue that "history can be used in mathematics education to reveal metadiscursive rules and make them explicit objects of reflection and – ultimately – to provoke commognitive conflicts" (Kjeldsen & Blomhøj, 2012, p.330). Therefore, meta-level learning may happen when a discourse governed by different metarules is experienced, i.e. through a commognitive conflict. At the core of Kjeldsen and colleagues' approach is to design teaching and learning situations in which historical sources present to students mathematical discourses governed by metarules they are not acquainted with. For Kjeldsen & Blomhøj (2012), by "having students ask and investigate historical questions about the development of practices of mathematics, using historians' tools, meta-rules can be exhibited as explicit objects of reflection" (p.330).

We consider that the heritage approach to history, besides perpetuating a view of mathematics as produced exclusively by exceptional human beings, may not allow commognitive conflicts where tangible differences in discourse are necessary. It is, therefore, the history, not the heritage perspective, that can underpin Kjeldsen and colleagues' approach. We are aligned with a "genuine approach to history" (ibid, p.330), in which primary sources are studied and past episodes are placed in their contexts, enabling differences to emerge. This is precisely what history-focussed tasks in our PA aim to do.

Further, our PA draws inspiration from Arcavi and Isoda's (2007) listening approach: teachers might try to understand their students' production after engaging in historical tasks through listening, namely "giving careful attention to hearing what students say (and to see what they do), trying to understand it and its possible sources and entailments." (p.112).

The PA also draws on perspectives that see teachers' views on mathematics and its teaching as complex and dynamic, and potentially benefiting from opportunities to become explicit and debated (e.g. Davis & Renert, 2013). Moreover, our take on teachers' discourses is consonant with Davis and Renert's work (ibid) in: (1) considering that teachers need to articulate understandings on present established mathematics and on how mathematical knowledge is produced; (2) acknowledging teachers as key agents on the production of a range of mathematical possibilities, i.e. cultural mathematics situated in different social contexts; (3) focusing teachers' professional development from the perspective of relationships between individual and collective aspects, within a professional culture, rather than on what an individual knows or doesn't know. In this sense, Cochran-Smith & Lytle (1999) highlight the importance of communities of inquiry, in which teachers take their own practice as intentional objects of inquiry – a positioning they call inquiry as stance –, so that theory and practice cannot be dichotomized.

In our PA, collectivity is a paramount element, since they are designed to encourage teachers to collectively engage in reflections upon their practices to develop problematized views of mathematics, its teaching and learning. Biza et al's (2007, 2018) *situation-specific tasks* (mathtasks) engage teachers with scenarios that are likely to occur in mathematics classrooms and are informed by issues that research has highlighted as seminal. So, we see the design and implementation of mathtasks as a tool akin to our perspective on problematizing the teaching and learning of mathematics: through reflecting on situations that are likely to occur in the classroom, mathtasks are a means to bring teachers' own practices into the spotlight as an intentional object of inquiry.

In a nutshell, our study explores the conjecture that engaging teachers with problematizing activities which consider mathematical practices from the past (*history-focussed* tasks) and in today's mathematics classrooms (*mathtasks*) has the capacity to promote teachers' meta-level learning about mathematics as well as its teaching and learning.

2. Problematizing Activities: Participants, design, data collection and analysis

The PA were implemented in a module on History of Mathematics in a professional master's program, at Rio de Janeiro, Brazil, and are organized in three *task rounds*. The first two authors conducted the implementation – the third author participated in the first and the last meeting – with twelve experienced in-service mathematics teachers, as described in Table 1. Throughout the process, participants wrote *reflective diaries*. Each meeting had a participant responsible for reporting what happened in the previous one. Meetings were audio and video recorded. Individual written responses to the tasks were collected. After three task rounds, the participants shared: i) a *teaching approach*, in which they presented in pairs an approach to teaching a topic from the mathematics curriculum and in most cases chosen in the light of its treatment during one of the task rounds ii) *portfolios*, in which they report what they learned during the whole process. Finally, there are individual responses to an online questionnaire, with forty-two open and closed questions, and individual semi-structured interviews lasting forty to sixty minutes. Our analyses draw on this rich dataset collected during and shortly after the implementation of the PA which spanned a total of thirteen three-hour sessions (Table 2) and evidence the discursive shifts about mathematics and its pedagogy experienced by the participants.

Participant	Years of teaching experience	Lower secondary school teaching experience	Upper secondary school teaching experience	University teaching experience	Mathematics	Physics
		At the time of study			Degree	
Apolo	10		Also Primary School			
Cleber	12					
Gabiangela	11					
Gladson	6					
Guilherme	50			(retired)		
Leticia	5					
Luciane	7	no longer teaches)				
Michel	8					
Naylor						
Silvio	7					
Ulisses	40					
Vinicius	3					

Table 1. The participants (names are pseudonyms).

We use the following codes to refer to the data: numbers for the meetings (1-13), as in M7 or 7 for the seventh meeting; number for the rounds (1, 2, 3), as in R2 for the second round and 6R2 for sixth meeting, which was part of the second round; PP: portfolio presentation; TA: teaching approach; I[first 2 letters of participant name] for interview excerpt (e.g. IVI designates excerpt from **Vi**nicius' interview); RD[Meeting Number] [first 2 letters of participant name] for reflective diaries (e.g. RD2AP designates excerpt from **Ap**olo' reflective diary of the second meeting).

<table>
<tr><th>Meeting</th><th colspan="3">Content</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Presentation and signing the consent term</td><td>R1 - Triggering-mathtask</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">R1 – History task</td></tr>
<tr><td>3</td><td>R1 – History task</td><td>R1 – Reflection on teaching mathtask</td><td>Decision about R3</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3">R2 – Triggering-mathtask</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3">R2 – History task</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="3">R2 – History task</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="3">R2 – Reflection on teaching mathtask</td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="2">R2 – Reflection on teaching mathtask</td><td>R3 – Triggering mathtask</td></tr>
<tr><td>9</td><td>R3 – Triggering mathtask</td><td colspan="2">R3 – History task</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="3">R3 – History task</td></tr>
<tr><td>11</td><td>R3 – History task</td><td colspan="2">R3 – Reflection on teaching mathtask</td></tr>
<tr><td>12</td><td colspan="3">TA</td></tr>
<tr><td>13</td><td colspan="3">PP</td></tr>
</table>

Table 2. The thirteen PA sessions

M1 to M13 were mostly every week in between mid-August and mid-December 2018. Each round of the PA consisted of three phases: *triggering*, *historical*, and *reflections on teaching*.

In the mathtask used in the triggering and reflection-on-teaching phases, teachers are presented with hypothetical scenarios from the mathematics classroom. They are confronted with a situation and are asked to describe how they would react. As in Biza and colleagues' situation-specific tasks (e.g., Biza et al., 2007, 2018), we thus problematize how teachers may deal with ordinary teaching situations and how they reflect on these. We ask participants first to write down their response to the task and then engage in small group and then plenary discussion of their responses.

Inspired by Arcavi and Isoda's (2007) hermeneutic method, the history phase consists of three key moments: an immersion in original sources, a historical overview, and unveiling the source.

While immersing in a source, teachers are presented with historical excerpts as similar to the original as possible. The first round focussed on the Ahmes Papyrus, written in hieroglyphic, specifically the Aha problem and different approaches to solving linear equations (Arcavi & Isoda, 2007); the second focused on approaches to teaching about area and Pythagoras' Theorem, triggered by the study of the first two books of Euclid's *Elements* as in (Bicudo, 2009); and, the third focused on definitions of function proposed by Euler, Dirichlet and Galilei and provided opportunities to problematize how a mathematical object changes over time.

The historical overview encompasses a social, cultural and mathematical contextualization. We discuss the type of mathematics that was produced in that specific period, aiming to relativize the sovereignty of the contemporary mathematics over mathematics of the past. The overview is done through the reading of a textbook (e.g., Roque, 2012) and videos[74,75], culminating with a discussion in class.

Finally, we return to the original source to unveil it, namely praise past mathematical practices but not compare them with the present. Our aim is that the teachers notice the diversity of ways that mathematics can be produced. We end up also problematizing what mathematics is, since the teachers may realize, through the study of primary historical sources, that mathematics is time and space situated.

To conclude the round, we discuss with the participants pedagogical, didactical and mathematical aspects of the topic also drawing on historical facts. The reflection-on-teaching mathtask, as well as the triggering mathtask, are crucial moments, since the participants say how they would deal with the situation presented in the task. In general, teachers in in-service training courses in Brazil are regarded as mere recipients of knowledge from an external source, and thus, the opportunity to express themselves as teachers sometimes is neglected. The mathtask is, thereafter, an authentic way to discuss situations that are highly likely to arise in the classroom.

For the choice of topic in the tasks of each round we consider: potential to allow different solutions; relevance to the participants' practice; and, availability of primary and secondary historical sources. The themes of the first and second rounds were selected by the lecturers; the third one was chosen by the group.

3. The third round of the PA

In this paper, we focus mainly on the third round, in which the PA revolve around the following mathematical topics (and their teaching): (at object and meta-level) what is a function; what is

[74] Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). (2015, June 18) Os Elementos de Euclides: equivalência de áreas. Retrieved from http://www.profmat-sbm.org.br/ma31/.

[75] Irineu Bicudo. (2010, September 25) Geometria grega (parte 1, parte 2, parte 3, parte 4). Retrieved from https://www.youtube.com/user/FMBertato/videos.

the difference between a variable and an unknown; functions and variability; and (at meta-level) mathematics as an ever-changing discipline. In the triggering mathtask (Appendix 1), the classroom situation describes a student who insists on evoking the regularly enacted routine (Sfard, 2008, p.211) of solving a second-degree equation, even though this is not explicitly requested in the exercise. This mathtask was designed to: highlight different uses of letters in school algebra; problematize teachers' possible procedural stances and tendencies to blame students; and, create opportunities for the participants to share their teaching routines on functions. Our option for "solve function" is to bring the attention of using an expression that evokes solving equations, while studying functions (Biza et al, in press). A key point in the intended discussion (Kieran, 2006) is that in both quadratic equation and function the same letter is used to represent different things: in $ax^2 + bx + c = 0$, the letter x is an unknown, while in $f(x) = ax^2 + bx + c$, x is a variable. For the teacher, seeing $f(x)$ might be sufficient to evoke the meaning of x as a variable; for the students, who are newcomers to the discourse, this might not be so evident.

To invite the participants to reflect on the history of mathematics, and on mathematics as an ever-changing discipline, we asked them how they would study the history of function and whether they believe that mathematical notions change over time. In the immersion part (Appendix 2), we engaged the teachers with four excerpts:

- Galilei's (1638; 1914) proposition on uniformly accelerated motion which illustrates a mathematical practice on relations between magnitudes before the emergence of the notion of function and its first definitions;
- then, two definitions proposed by Euler: one in which function appears as an analytical expression (Euler, 1748); and, a comprehensive and updated version of this, influenced by D'Alembert's solution of the vibrating strings problem (Euler, 1755); and, finally,
- the 1837 Dirichlet's (Lejeune-Dirichlet, 1889) definition in which the scope of what is meant by "function" is broadened to include relations not expressed algebraically.

Our intention in studying these excerpts is to encourage participants to: observe different definitions and realize that there was more than one definition over time of what eventually became the object of function, even for the same mathematician; and, identify similarities and differences between these definitions.

Our choice of sources was influenced by the metarules at stake, which are different from the ones governing mathematics nowadays. For instance, Euler – and several eighteenth-century analysts – was influenced by the *generality of the variable* metarule (Kjeldsen & Petersen, 2014, p.34), according to which "a variable in a function could take on all values and could not be restricted to an interval". Dirichlet, in contrast, was not guided by this metarule. So, in realizing that there is no domain in Euler's definitions of function, we may contrast with today's definition of function and thus orchestrate a potentially productive commognitive conflict. Following the discussion of these excerpts, a vivid discussion about the historical contexts of the excerpts took place, and we concluded by sharing the set-theoretic Bourbaki definition of function.

Finally, the first of the two *reflection-on-teaching mathtasks* (Appendix 3a*, object level)*, problematizes the teaching of functions and to which extent teachers are open to different ways of teaching informed by historical sources, especially in relation to challenges regarding the variability of functions as evidenced in their graphs. The *mathtask* involves a situation in which a teacher, who arrived recently in a school, faces different approaches to problems about functions, variability and optimization. A second *reflection-on-teaching mathtask* (Appendix 3b, *meta-level*) was born out of the participants' engagement with the historical discussion of this round. The mathtask involves a debate between two teachers about whether mathematics is discovered or invented.

4. Evidence of discursive shifts during PA Round 3 and overall

Our analyses evidence substantial discursive shifts experienced by the participating teachers that vary from nuanced reflections at the object-level to the meta-level on mathematics and its pedagogy. We present these in three parts: pedagogical and epistemological discourses on function (object level, one episode, 4.1); pedagogical (potency of listening to, and debating with, one's students) and epistemological (mutability of mathematics) discourses (object/meta-level, three episodes, 4.2); and, pedagogical discourse on assessment (one episode, 4.3). The first two episodes are directly related to the third round, and the other three to the PA as a whole.

To analyse the data, we first constructed a factual narrative account summarizing each meeting. While doing so, we highlighted episodes which instantiate discursive shifts and sought further evidence in other data sources, e.g. the interviews, the written responses to the mathtasks and the reflective diaries. We count self-reporting from participants and our own observations in the participants' utterances and behaviour through the PA as evidence. Key participant utterances were then transcribed verbatim for inclusion in the accounts of the episodes. We selected five of these episodes for this paper. Data has been translated from Portuguese. We note that we have maintained the pronoun "he" when the interviewees say "ele", even though technically they mean "any student in class" (male, female or other).

4.1. What do students mean by "solving a function", and how may this impact teaching about functions?

Episode 1. "[the student] did not understand the f(x) that is there. […] x squared, from the equal sign she knows what it is. I assure you." (Silvio, 8R3) The participants related to the situation that is at the heart of the triggering *mathtask* (Appendix 1) at once, often recognizing themselves in the mathtask's teacher (e.g. Cleber in the portfolio and interview). They discussed students' references to the equation while studying functions and conjectured about what the students may mean with "solve function". Michel and Luciane, for example, suggested that a student may evoke routines related to solving second degree equations in the context of quadratic functions because of the extensive prior experience the students have of solving second degree equations: "… it has to do with the previous year, he learns a lot about working, solving the second-degree equation. He's thinking it's a second-degree equation." (Michel, 8R3); "x squared, [makes a gesture by lowering her head and writing], is already on automatic [laughs]" (Luciane, 8R3). What Luciane means is that, whenever the students encounter an x^2, they automatically start using the formula, regardless of what they are asked to do. Michel's and Luciane's utterances indicate that they see the student as not engaging with the new meaning of "x".

For Gabiangela and Ulisses, however, there are situations in which the expression "solve function" may make sense. For Gabiangela, one such situation is "every time" when we "calculate the roots" in order "to create the graph": "We equal to zero and calculate the roots to draw over there in the Cartesian plane. So, I think we think we're solving the function!" (Gabiangela, 8R3). For Ulisses, what the student in the mathtask means by "solving the function" is to calculate the value of "…1, 2, 3". He stresses that he does not see the connection to second degree equation "because at no point it says that this is an equation of the second degree". The exercise, he points out, is

> "asking to find the values, to find the image. [...]". [the teacher] asks to determine the coefficients. Without equation of the second degree or not, you can find the coefficients. And solve the function, according to the values he gave there" (Ulisses, 9R3).

For Silvio, the situation seems more centred on that "[the student] did not understand the f(x) that is there" (8R3). When asked if it was just f(x) that she doesn't understand, he replies: "x squared, from the equal sign she knows what it is. I assure you." (8R3). Silvio's statements obfuscates the fact that the x in the equation is different from the x in the function. According to him, the only difference is the f(x).

This obfuscation may be linked to the teacher's own realizations of unknowns and variables and may also be suggestive of teachers' classroom practice in analogous situations. Silvio observes exactly this in his written response to the mathtask that, instead of only blaming the students, the teacher should also think about his own way of dealing with mathematical content in lessons. "Isn't me the problem? I think he [Mr. V] didn't think about that." (Silvio, 9R3).

4.2. If mathematics is mutable, I and my teaching might be as well.

Episode 2. "That's why you said it changes. I just don't know how to thank you for the opportunity" (Guilherme, 9R3). Guilherme was the most reluctant participant in the whole group. During the first and second rounds, he kept asking us when we were going to start the history lessons, and if we could "take an *en passant* tour of the history of mathematics". (4R2). His own take on history seems to align with a heritage approach as evident in the historical anecdotes he used to tell during the meetings (as in the story about how, during the Siege of Syracuse, Archimedes destroyed enemy ships with fire, using parabolic mirrors, 6R2). Guilherme seemed also uncomfortable with the teaching approach in the PA as a whole: he was the only one who did not vote in favour of another task round, when we asked the whole class to decide. He attended all meetings nonetheless and engaged with the unusual assignments (such as writing reflective diaries after each meeting). His *agent provocateur* presence though turned helpful in one significant way: thanks to his comments, we were compelled to highlight meta-level issues, such as the mutability of mathematics, and do so explicitly. When asked, for example, whether he thinks that mathematics change over time, he responded:

> "... Mathematics is a science that it is a brick that with each new demonstration discovered, one does not remove a brick, as in Physics, to put a new one. You utilize what is there, because it ... you can't really take it off. And build one more, one more and grow on top of the other." (9R3)

When we then asked the class whether mathematics is discovered or invented, Guilherme had a firm view: "Girl, [it] was discovered by us fully, because it is already there." (9R3). When it was raised the example of Euclid's fifth postulate and the different notions of parallelism implied by accepting or rejecting it, Guilherme seemed sceptical. Later in the session, while discussing the Dirichlet excerpts in the history-focussed task, Guilherme expresses a reviewed opinion:

> "it is increasing [...]. You observe better, right? And expands what you already knew […] That's why you said it changes. I just don't know how to thank you guys for the opportunity" (9R3)

While he seems to still hold a relatively narrow developmental view of how mathematics changes over time (namely that mathematics becomes somehow better with time), what we see as significant is how the discussion has generated unprompted utterances that evidence rethinking about mathematics and its history. During the presentation of his portfolio Cleber, for example, states explicitly the difference in his views before and after the PA:

> "We had an image of ... of linear knowledge, right? As if this knowledge just came about, then someone took this book and walked a little bit more, someone else walked two more steps. […] I think most [of the class] had a linear view on history. Then we began to see how a concept evolved. Sometimes in a nonlinear way, […]." (13PP)

Both Guilherme's and Cleber's statements exemplify how the participant move from a linear and static view of the development of mathematics to a nonlinear and dynamic view. In Episode 3, this comes hand in hand with the insight that mathematics changes through collective actions in contrast to the dominant narrative of mathematics as the fruit of the efforts of a small number of isolated and infallible geniuses.

Episode 3. "math...becomes a much more palpable thing. It's not a super genius thing. [...] So, we feel safer when erring" (Apolo, IAP). In line with our endorsement of a "history" (not "heritage") approach to how mathematics changes over time, engaging participants with the history-focussed tasks aimed to problematize their teaching routines in the light of seeing the development of mathematics, and their relationship with it, differently. In this episode, we show evidence in which Apolo reviews his attitude towards error. We note that, during the historical overview moment of the history-focussed task, the participants watched videos featuring highly respected members of the Brazilian history of mathematics community. In a video about Euclid's *Elements*, Pitombeira – one of the professors – discusses the ambivalent and multiple interpretations about who Euclid may have been.

This instance makes an unprompted appearance in Apolo's interview, and, in particular, when we discussed his fear of committing mathematical errors during lessons. This fear manifested both in his lessons, and during the PA meetings, where he feels occasionally oppressed by the presence of an audio/video-recorder: “I am a mortal and failing person”, he exclaims, “my biggest fear was to say things unpleasant or not relevant to the work of Masters Aline and Bruna.” (RD2AP). During the interview, Apolo shared with us that Pitombeira’s – an “ultimate substantiator” (Sfard, 2008, p.233) of mathematics and history discourse – comfortably ambivalent account indicates that he himself does not need to be the perfect teacher, who needs to know everything: “So, we feel safer, right? It’s Pitombeira that is saying that, right? It's not me” (IAP). Apolo seems to be reconstructing his identity as the “ultimate substantiator” in his own classroom, reconsidering the infallibility of his role as a mathematics teacher and making a step towards overcoming his fear of fallibility: “I feel safer today to say [...] It's a little doubtful what Euclid was”, he states with a sense of relief (IAP). And, in doing so, new teaching routines may arise.

Episode 4 “[the PA] was so good for me that from the third, fourth class, I was changing the conception of how to behave with my students. So, I started to want to hear more from my students. I want to listen.” (Guilherme, IGU). The PA was designed to encompass Arcavi & Isoda’s (2007) careful “listening approach” (p.112): the participants were encouraged to freely share views and teaching practices. They were also invited to decide whether they wish to have another round of the PA, and, if so, on what theme. There is evidence that our practice of listening fostered appreciation for this practice. Gladson, for example, reported that, inspired by our listening practice, he now invited his students to indicate negative points in his lessons. His students, however, indicated nothing, even after he pleaded with them further – apart from a comment on his organization of the whiteboard. When we asked him if it was the first time he asked such a question, he answers “in my whole life”. By problematizing his own teaching routines, Gladson reviewed these routines (in this case, how he now adopts a listening approach when dealing with his students).

Guilherme, too – who, we note, has been teaching for fifty years and set out from a position of weariness towards the PA (Episode 2) – offered ample evidence of the impact the PA experience had on his teaching practice. Here are a few:

> “I began to realize that I was interacting with my friends and with you teachers in a way I did not expect [...]”
>
> “I thought that the student listens and [...] the teacher, the holder of the power in quotation marks, speaks. It was not like this. And I started interacting with the class, because we got into those debates, in the discussions of the things we experienced in the classroom.”

"[...] I thought the class should be [...] [with the students] quiet and the teacher talking."

"[...] I am grateful, because the vision you gave me of how [...] I might behave in the classroom, in favor of the student [, changed]."

"[…] This lesson model, it was so good for me that from the third, fourth class, I was changing the conception of how to behave with my students. So, I started to want to hear more from my students. I want to listen."

"[…] But I am already starting to hear them. The student asks me something, I ask him back. I ask him to go to the board to show what he wants to say about that. Anyway, it is a way that I hadn't used. I've never used."

"[...] [listening to the student] you see his difficulties, you realize where he is, where he is failing. What is missing for him to understand what he [...] is studying. And when only you speak, you think everyone is on the same level, on the same level. Everyone understanding and you continue the class and, in the end, on the exams you see the failure."

Intended in-lesson routines were not the only ones to shift significantly as a result of the PA though: we now sample an episode which evidences a discursive shift in relation to how we may assess mathematical learning.

4.3. If mathematics and its teaching are mutable, shouldn't we assess mathematical learning accordingly?

Episode 5 "I'm not worried here about mistakes and hits, I want you to talk, I want you to express yourself by the text [reflective diary]" (Vinicius, 13PP). The participants stated that the PA experience made them problematize the way they assess their students' mathematical learning. Approaches such as the portfolio and the reflective diaries, deployed during the PA, came across as a stark contrast to the purportedly objective testing that dominates school mathematics. Gladson for example, intimated in M9 that he is considering a review of how he assesses his students. Three meetings later, during the presentation of the portfolios, he reported that, in one of the schools that he teaches, he asked the students to "write everything that you have studied that is not in this exam […] anything that comes to mind") in one question of the final assessment. He also reported that he is considering making reflective diaries part of his assessment repertoire.

"Even if [a student] doesn't study anything, he has to at least pay attention in class, write things down, write to me. This even helps us ... imagine when preparing an assessment? See what you gave, see how much the student understood and such, go there and make the assessment. Even to get that guy who is bad, I'll try to help him, I'll see what he wrote down, what he learned, I'll put there." (13PP)

So, besides encouraging students' attentiveness in lessons, reflective diaries may also be useful in informing teacher decisions about the students' learning experiences. Gladson explicitly said that he wishes to prioritise activities that convey mathematics as less objective and activities that go beyond finding right and wrong answers. Vinicius, who was presenting the portfolio together with Gladson, reported that he had already tried the reflective diary with his students.

> "the first attempt mine wasn't very cool […] I said I wish you guys […] write about it, an essay. I said informally, I'm not worried here about mistakes and hits, I want you to talk, I want you to express yourself through the text. […] The vast majority copied the definition of logarithm and put it on paper." (Vinicius, 13PP)

Both Gladson and Vinicius shifted their way of speaking about assessment, as an (in)formative process rather than mere testing. Vinicius even shared stories of shifts in his practice. Underlying his students' resistance to engage with his innovative approach to assessment may be unfamiliarity and a commognitive conflict between what he wished the students to engage with and how they interpreted and enacted this request. For them, completing an assignment is governed by metarules that see performing tasks that require minimum levels of "agentivity" (Lavie, Steiner & Sfard, 2019, p.170). There was therefore no problem with copying and pasting the definition of logarithm from the internet. Writing a reflective diary, however, is more than just answering a question that has exclusively right-and-wrong answers. New metarules are at stake now. It is not anymore, a matter of achieving the right answer, but it is also a matter of engaging with reflection on one's own learning process. Vinicius seems to be aware of this possible commognitive conflict: "for sure, next year", he stresses, "I'll implement this at the beginning ... of course I'll have time to fix it" (Vinicius, 13PP). We see "fix it" as signaling that he may address the commognitive conflict in his lesson by highlighting the different rules that govern the game of composing a reflective diary.

5. Problematizing activities as a vehicle for discursive shifts on mathematics and its pedagogy

Our paper reports empirical research in a novel teacher professional development setting (the *problematizing activities*, PA) that encompasses contemporary trends in historiography of mathematics (e.g. Grattan-Guinness, 2004b) and deploys the commognitive lens (Sfard, 2008) to trace and evaluate discursive shifts that occur in this setting. Our aim in this study is to provide opportunities to in-service mathematics teachers to problematize mathematics teaching and learning in the light of considering historical excerpts that evidence how mathematics changes over time (history-focused tasks) and classroom situation-specific tasks (mathtasks, Biza et al, 2007). We see this amalgamated use of history-focused tasks and mathtasks as a potent cocktail that can shake longstanding discourses on mathematics and its pedagogy.

During the PA sessions, history-focused tasks played a central role in highlighting how the change of mathematics over time is socially and culturally situated, and in shaking a widespread view of mathematics as a body of facts that has always been the way it is today. Our study builds on prior works (e.g. Kjendsen & Petersen, 2014; Bernardes & Roque, 2016) that evidence how historical sources can be used in designing teaching and learning situations which present teachers with mathematical discourse of the past governed by metarules that they often have not had the opportunity to become acquainted with. In this paper, we showcased how this happened especially during the participants' engagement with the history-focused tasks of the third round. In these, we presented several milestones of how one mathematical object – eventually known as *function* – changed over time, we highlighted the mutability of mathematics and exposed the particpants to a take on history of mathematics that is distinctly different to the one they have been painstakingly been exposed to over many years of their own education. In this way, the participants experienced commognitive conflicts and compellingly and explicitly reflected on how the metarules that govern mathematical discourse change over time – see, for example, Guilherme's utterances, in Episode 2, regarding mathematics as an ever-changing discipline.

Mathtasks played a central role in engaging teachers with situations they are likely to face in the classroom and, through the discussion of said situations, provided opportunities to identify evidence of shifts in the teachers' epistemological and pedagogical discourses. Moreover, mathtasks allowed us (indirect) access to the participants' views on the teaching of discussed topics. The specificity of these views could not have emerged through direct questions (as in structured interviews, for instance) about their views on mathematics and its teaching at large – see, for example, Silvio's remarks in Episode 1 about the repercussions of not highlighting in the classroom the change of role of x in the expression $ax^2 + bx + c$ when there is a $f(x) =$ (variable) and to an equation when there is $= 0$ (unknow). Silvio's reactions show the potency of mathtasks to trigger highly situated concurrent discussions of mathematics *and* its pedagogy.

As the PA was drawing to the end of the third round, evidence of the participants' discursive shifts, including the confidence with which they provided articulate accounts of these shifts, became more and more robust. Episodes 1 and 2 originate in the sessions of the third round. In Episode 1, we see the teachers discussing equation-solving routines and sharing different interpretations of what "solve a function" may mean that we, as teachers and researchers, were not aware of. We see the participants reflecting on student-blaming narratives that dominate school discourses on learning – and we see them questioning teaching routines that emerge from these narratives. In Episode 2, we see participants' narratives on how mathematics changes over time, and what this may mean for their teaching routines, shaken quite dramatically. In addition to strictly round-three related episodes, we deliberately selected episodes (3-5) which relate to the overall experience of the PA: in these, we see how the participants problematized their relationship with error in mathematics (Episode 3), how they intend to develop their capacity to listen more in the classroom (Episode 4) and how they become more intrigued towards more open-ended, qualitative ways to assessing their students' learning (Episode 5).

The commognitive lens proved to be fit-for-purpose as a means to trace and scrutinize evidence of discursive shift. With its steer and support, from the initial phases of designing all the way to implementing and then evaluating the PA, engaging participants with the PA allowed us to identify those utterances that evidenced their questioning of what they have experienced so far as perennial narratives and metarules that govern mathematics (such as that mathematics is immutable and produced exclusively by isolated, gifted individuals) as well as narratives and routines that govern its pedagogy (such as that the teacher has an unshakeable, and overbearing, role of a classroom's "ultimate substantiator" compliantly listened to by students).

The openness of the PA also allowed participants to share their thoughts often regardless of, and beyond, what we had planned or expected. As we take stock of the outcomes of the PA implementation, we note that it was not our intention to analyze the participants individually; rather, our aim was to trace the reflexive potential of the PA, how individual experiences of the PA are informed by, and in turn influence, its components with mutuality and reciprocity.

The evidence of the discursive shifts observed in the participants as they engage with our PA illustrates the potential of this approach to in-service teacher professional development (notably in the context of a part-time masters' programme for mathematics teachers): the PA emerged as a means of putting teachers in a role of authors of their own in-service education processes. We note that this aim resonates well with the participationism of the commognitive lens – and also addresses a key need in teacher education in Brazil, and elsewhere, where such professional development is often equated with being fed readymade prescription.

While we recognize fully that a one-off application of the PA may have modest, short-term influence on teachers' mathematical and pedagogical discourses – a longer term intervention and evidence collection enterprise would certainly give more insight of its impact – we are heartened by the enthusiasm and robustness of evidence that this application generated, and propose the embedding of the PA as a component in mathematics teacher education and professional development programmes at large. Through commognitive conflict comes the shaking and re-shaping of teacher discourses on mathematics and its pedagogy. Our *problematizing activities* (PA) evidences how this is a feasible, replicable and worthy enterprise.

Acknowledgements

The collaborative work between our institutions on which we draw in this paper is facilitated through Higher Education Impact funds (HEIF) received for the MathTASK programme at UEA and a British Academy International Partnership and Mobility grant [PM160190]. We also acknowledge CAPES (Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior – 88881.133350/2016-01) for support to the doctoral study of the first author through a scholarship for an internship at Rutgers University (New Jersey, USA) during which the PA was designed. This paper draws on data that are part of this doctoral study (Moustapha-Corrêa, Bernardes, Giraldo, in press). We thank the twelve participating teachers for their unwavering commitment to the project.

References

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: From historical sources to classroom practice [Special Issue]. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 111–129.

Bernardes, A. & Roque, T. (2018). History of matrices: promoting commognitive conflicts and encouraging reflection on metadiscursive rules in prospective teachers. In: clark, K.M., Kjeldsen, T.H., Schorcht, S., Tzanakis, C. (eds.), Mathematics, Education and History: Towards a Harmonious Partnership. Springer International Publishing. p. 209-227.

Bicudo, I. (2009). Os Elementos: Euclides. São Paulo: Editora UNESP.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4–6), 301-309.

Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2018). Competences of mathematics teachers in diagnosing teaching situations and offering feedback to students: Specificity, consistency and reification of pedagogical and mathematical discourses. In T. Leuders, J. Leuders, & K.

Philipp (Eds.), Diagnostic Competence of Mathematics Teachers. Unpacking a complex construct in teacher education and teacher practice, (pp. 55-78). New York: Springer.

Biza, I., Kayali, L., Moustapha-Corrêa, B., Nardi, E. & Thoma, A. (in press). Sharpening the focus on mathematics: Designing, implementing and evaluating MathTASK activities for the preparation of mathematics teachers. In H.R. Elias, J. Viola & V. Giraldo (Eds) *Problematizações sobre Formação Matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática* [título provisório]. SBEM: Brazil.

Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., & Tzanakis, C. (2019). History of mathematics in mathematics education ‑ An overview. Mathematica Didactica, 42(1), Online First

Cochran-Smith, M. & Lytle, S. (1999). Relationships of knowledge and practice: teacher learning in communities. Review of Research in Education, 24, 249-305.

Davis, B. & Renert, M. (2013) Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, v. 82, n. 2, p. 245-265.

Euler, L. (1748) Introductio in analysin infinitorum. Lausanne: M.M. Bousquet & Soc. (in Opera omnia, sér.1, vol.VIII-XIX).

Euler, L. (1755) Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum. Acad. Imp. Sci. Petr. (in Opera omnia, sér.1, vol.X).

Freire, P. (2016). *Pedagogia do Oprimido*. 60ª edição. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Galilei, G. (1638) *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze* attenenti ala mecanica & i movimenti locali. Leiden: Louis Elsevier.

Galilei, G. (1914) *Dialogues Concerning Two New Sciences by Galileo Galilei*. Translated into English by Henry Crew and Alfonso de Salvio. New York: Macmillan.

Giraldo, V. (2018). Formação de professores de matemática: para uma abordagem problematizada. Ciência & Cultura, 70, 37-42.

Grattan-Guinness, I. (2004a). History or heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education. *The American Mathematical Monthly, 111*(1), 1-12.

Grattan-Guinness, I. (2004b). The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. *Historia mathematica, 31*(2), 163-185.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 11-49): Brill Sense.

Kjeldsen, T. H., & Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 327-349.

Kjeldsen, T. H., & Petersen, P. H. (2014). Bridging history of the concept of function with learning of mathematics: Students' meta-discursive rules, concept formation and historical awareness. *Science & Education, 23*(1), 29-45.

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics, 101*(2), 153-176.

Lejeune-Dirichlet, J.P.G. (1889) "Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen nach Sinus und Cosinusreihen", 1837. Repertorium der Physik 1, p.152-74, in Werke, Bd. I, p.133-60.

Moustapha-Correa, B., Bernardes, A., Giraldo, V. (in press) Historical Tasks to Foster Problematization. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, (pp. xxxx-yyyy). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Roque, T. (2012). *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Rio de Janeiro: Zahar.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating : human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

Appendices / Supplementary Materials

Appendix 1. The triggering *mathtask* in Round 3

In a High School Year 1 class, the teacher, Mr V, introduces the study of quadratic functions. He writes on the blackboard as below and stresses that the coefficients a, b and c take specific values.

He then gives the following exercises to the students:

Exercises:

1. Name the coefficients of the following functions.
a) $f(x) = 5x^2 + x - 7$;
b) $f(x) = 4 - x^2$;
c) $f(x) = x^2 - x$;
d) $f(x) = -4 + 2x^2 - 9x$

2. Consider $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Determine.

x	$f(x)$
1	
2	
0	
-1	
	4
	2
	0

Students A and B work together on the exercises.

B: How are we going to solve this function?
A: This question here [1] is just to indicate the coefficients.
B: Ok. But what about the other one [2]? Don't we have to solve?

Mr V was intrigued with by Student B's question about "solving functions". After the class, he meets a colleague and says the following:

Mr V: I teach for years and until now, I cannot understand why the students keep saying that they need to "solve the function".

Questions:

a. What lies behind B's request to "solve the function" and Mr V's observation?
b. As a teacher, how would you approach a student who wants to "solve the function"?

Appendix 2. The *history-focussed* task in Round 3

References

Galilei, G. (1914). Dialogues Concerning Two New Sciences. Translated from the Italian and Latin into English by Henry Crew and Alfonso de Salvio. With an Introduction by Antonio Favaro. New York: Macmillan.

Jahnke, H. N. (2003). Algebraic analysis in the 18th century. *A history of analysis*, 24, 105-136.

Lützen, J. (2003). Between Rigor and Applications. Developments in the Concept of Function in Mathematical Analysis. In *Between Rigor and Applications. Developments in the Concept of Function in Mathematical Analysis* (pp. 468-487). Cambridge University Press.

Panza, M. (2007). Euler's Introductio in analysin infinitorum and the program of algebraic analysis: quantities, functions and numerical partitions. Cet article paraîtra en un livre collectif consacré à Euler, pubblié par Kendrick Press.

Appendix 3a. The *reflection-on-teaching mathtask* in Round 3 *(object level)*

References

Antunes, G., Cambrainha, M. (2017). Introdução às Funções. In *LivroAberto de Matemática*. Retrived from https://bit.ly/2QbRYUW.

Appendix 3b. The *reflection-on-teaching mathtask* in Round 3 *(meta-level)*

Cassiano and Raphael are two undergraduate students in Mathematics.

Impressed with the International Congress of Mathematics (ICM) that took place in Rio de Janeiro in 018, they talk about what they had seen at the biggest mathematics event in the world.

Cassiano: Did you see? *Matemaníaca* was at ICM, she recorded a video with some Fields Medal winners. One of the interviewees said it was the best question he has been asked, ever!
Raphael: Yeah ... I always wonder if mathematics was invented or discovered ...
Cassiano: What are you talking about?!?!
Raphael: Wow ... that was the question she asked them!
Cassiano: No, the best question was whether zero is natural or not!

Questions

a. In your opinion, is mathematics invented or discovered? Justify.

b. In the video, the arguments used by the two interviewed mathematicians are:

Alessio Figalli: Ah… This is just a tricky question, you know…. Everyone has its own opinion. You know… Mathematics was born to model the world, was born to understand whether the earth was round or not, then the diameter, how big was the earth and the numbers in general and then mathematics after. Always with this ideal of transforming nature and the physics into numbers and transforming our world into a description that we can do with numbers. So ... to me, I think it was invented by humans to describe the world.

Akshay Venkates: I think that depends a lot on which part of the math, but in the parts of math where I've worked, it's… I certainly feel , think of it as been discovered.

i. What is your opinion about the response of each of the medal laureates?

ii. Have you ever considered these arguments before? Or rather, have you ever asked yourself this question?

a. As a teacher, do you think it is important to consider this question? If not, why? If so, how?

References

Jaccoud, J. (2018, August, 18) *FIZ A MELHOR PERGUNTA PARA O MEDALHISTA FIELDS | ICM 2018 #2 | A Matemaníaca* [Video file]. Available from https://www.youtube.com/watch?v=EjpMyyvaBlo&t=500s

PARTE III
CONECTANDO PROBLEMATIZAÇÕES

CAPÍTULO 8.

DESAFIOS, CONTRIBUIÇÕES, PERSPECTIVAS, POSSÍVEIS DESDOBRAMENTOS, ALGUMAS LIMITAÇÕES... E MAIS PROBLEMATIZAÇÕES

> *A auto avaliação foi o ponto alto desses acontecimentos importantes, pois nos proporcionou refletirmos sobre o papel de alunos. E aí está a mudança de paradigma nas nossas vidas em sala de aula. Não é mesmo? Hoje em dia, nós já pensamos e damos aos nossos alunos a palavra, o que pouco fazíamos, né? Foram tantos os aspectos e mudança que nós levaríamos muito tempo aqui [..]. Mas uma que me deixou muito.... feliz até, né? Foi o fato de verificar que a Matemática ela é mutável em seus conceitos. (Guilherme, 13PP)*

Com esta tese, objetivamos a) construir uma caracterização de postura problematizadora, voltada à formação e às práticas profissionais de professores que ensinam matemática, a partir da articulação de referenciais teóricos nos campos da Educação, Educação Matemática e História da Matemática; b) apresentar uma proposta de formação continuada de professores de matemática – as atividades problematizadoras – como *uma* possível maneira para promover o desenvolvimento dessa postura problematizadora; c) descrever uma aplicação das atividades problematizadoras; e d) apresentar *uma* análise de algumas mudanças discursivas experienciadas pelos participantes durante essa aplicação. Um dos primeiros desafios que enfrentamos durante a escrita deste texto foi a sua organização, sobretudo devido à especificidade do desenho e dos pressupostos das atividades problematizadoras (AP). Dada a característica entrelaçada das três rodadas por meio das quais as estruturamos, entendemos que não faria sentido falar separada e independentemente dessas. Da mesma forma, a combinação e a interação das tarefas históricas e das *mathtasks* presente na proposta das AP nos desafiou a pensar em como apresentá-las em um espaço limitado de um artigo. O desafio foi abraçado também considerando o aspecto formativo do processo de doutoramento e, por isso, nos propusemos a escrever alguns capítulos no formato de artigos. O texto é, portanto, apresentado em uma estrutura híbrida, combinando o formato monográfico com artigos. A fundamentação teórica é composta por três eixos – Formação de Professores, *Commognition*, e História da Matemática – os quais nos guiaram para a caracterização da postura problematizadora.

Consideramos a articulação de diferentes perspectivas teóricas como um dos diferenciais deste trabalho.

Introduzindo a segunda parte do texto, as AP são apresentadas, descrevendo o papel das *mathtasks* e das tarefas históricas, bem como das três etapas (disparando a discussão; *zoom in* e *zoom out* histórico; reflexões de práticas docentes) e das tarefas avaliativas (diários reflexivos, relatos dos encontros, propostas de abordagens e portfólios) na promoção da postura problematizadora. Em seguida, nos aprofundamos no *zoom in* e *zoom out* histórico com vistas a contribuir com uma lacuna observada na literatura de pesquisa no que diz respeito ao uso da história da matemática no ensino. Finalmente, à luz da teoria da *Commognition*, revisitamos as AP, objetivando à análise de algumas mudanças discursivas experienciadas pelos professores que participaram do estudo.

Principais Resultados e Contribuições

Articulações Teóricas

Consideramos como principal contribuição teórica desta tese a forma como articulamos, para a caracterização da postura problematizadora, referenciais situados em diferentes campos teóricos. No campo da Educação, essas articulações incluem desde a educação problematizadora de Paulo Freire; passando pela valorização dos saberes da experiência, preconizada por Maurice Tardif e colaboradores; pelo consequente reconhecimento da docência como profissão, tal como António Nóvoa defende; pelos coletivos docentes em que "prática" e "teoria" são entendidas de forma indissociável, representados pela investigação como postura de Marilyn Cochran-Smith e Susan Lytle e pelas perspectivas de formação defendidas por Brent Davis e seus colaboradores ao sustentarem a (re)interpretação e (re)elaboração do conhecimento de matemática para o ensino (*substruct*); pelas *mathtasks* propostas por Irene Biza, Elena Nardi e seus colaboradores como uma possibilidade de mobilização de experiências da prática em atividades de formação; pelo entendimento da aprendizagem (matemática) como participação no(s) discurso(s) (matemático(s)) proposto por Anna Sfard. No campo da História da Matemática e suas aplicações ao ensino, nossas referências teóricas incluem a escuta intencional, proposta por Abraham Arcavi e Masami Isoda; o argumento teórico de Tinne Kjeldsen e seus colaboradores que destaca o potencial de práticas governadas por diferentes metarregras na promoção de aprendizados – ou mudanças discursivas; até o reconhecimento, sublinhado por Fumikazu Saito, de que as narrativas históricas e suas interpretações não são neutras.

Além de congregar os diferentes referenciais teóricos, a postura problematizadora que procuramos caracterizar não ser refere à simples necessidade de realizar eventuais atos isolados de problematização. Para além da mera substituição de certas visões específicas sobre matemática ou sobre o seu ensino por outras, advogamos o desenvolvimento pelo professor de um entendimento sobre a própria matemática como algo intrinsecamente problematizado – isto é, como um campo definido não por seu estado em um dado recorte temporal e social, como se esta fosse imutável e universal, mas sim a partir de processos histórica e culturalmente situados de produção –, e, partir de tal entendimento, de uma posição em relação ao ensino de matemática como um tensionamento permanente desses processos de produção. Desta forma, defendemos uma postura de constante questionamento por parte do professor visando, assim, a uma atuação profissional pautada por um efetivo compromisso social e, consequentemente, de emancipação dos seus estudantes.

Sobre a proposta de Atividades Problematizadoras

A proposta de AP aqui apresentada foi pensada com vistas ao desenvolvimento de tal postura problematizadora, sendo pautada em uma perspectiva de participação dos professores – em lugar da aquisição (ou depósito nos termos freirianos) de saberes e conteúdos estabelecidos *a priori*. Tal perspectiva se materializa em um engajamento dos professores participantes que vai desde decisões sobre encaminhamentos e abordagens da disciplina (em que a proposta foi aplicada); até o compartilhamento de experiências de suas práticas docentes – não com um papel alegórico, e sim como parte da abordagem da disciplina e determinante para seus encaminhamentos –; e a consequente legitimação de saberes emergentes da prática e da autoridade dos professores sobre esses saberes. Para tanto, disparamos a discussão utilizando *mathtasks* de modo que os professores se envolvessem com o tema em questão começando a refletir sobre rotinas usuais – e por vezes naturalizadas – a respeito daquele tema. Em seguida, o mergulho na fonte histórica permitiu não somente a exploração e o estudo de práticas situadas em contextos diferentes dos familiares, como também a problematização de atitudes e posturas relacionadas ao ensino do tópico (a escuta intencional). Para fechar a rodada, refletindo coletivamente sobre as práticas docentes, os discursos dos professores relacionados ao tema em discussão (conteúdo e seu ensino) foram problematizados a partir da consideração, da observação e do estudo de outros discursos, geralmente, diferentes e estranhos aos professores – seja por serem situados em outros contextos históricos, seja por remeterem a práticas pouco usuais em suas salas de aula. Em termos da *Commognition*, as tarefas foram planejadas visando a promover *commgnitive conflicts*; nesse sentido, procuramos por discursos moldados por metarregras diferentes das que moldam os discursos atuais e supostamente diferentes das que moldam os discursos dos professores. Ao longo dessas três etapas, combinamos as tarefas históricas com as *mathtasks*, permitindo que os professores, para além de experienciarem outras práticas, também tivessem a oportunidade de compartilhar suas próprias práticas, apresentando argumentos baseados em suas experiências e em seus saberes profissionais. Essa estrutura – etapas + tarefas – juntamente com as tarefas avaliativas utilizadas, que visam à promoção da reflexão ao longo de todo o processo, configuram-se como uma proposta de formação potente e promissora para o desenvolvimento da postura problematizadora. Portanto, consideramos a capacidade de conectar as práticas da sala de aula com as práticas históricas – exploradas sob perspectivas mais atualizadas da histórica da matemática – como uma das grandes potencialidades da proposta de AP.

Não entendemos a proposta de AP como fixa e rígida, ou seja, não pretendemos sugerir que sua implementação deve seguir exatamente a mesma estrutura de rodadas, nem tampouco abordar os mesmos temas usados na aplicação descrita nesta tese. Os temas, assim como as tarefas usadas, devem fazer sentido para o grupo em questão. Assim, ainda que as tarefas possam ser realizadas em outros contextos, é importante considerar as intencionalidades de cada uma. Por exemplo, na Rodada 3 a discussão inicial acabou nos levando a uma discussão sobre como se dá a produção matemática. Ainda que não estivesse previsto, criamos e aplicamos uma *mathtask* (Apêndice L) para discutir explicitamente se a matemática é inventada ou descoberta. Se não tivéssemos começado a Rodada perguntando como os participantes estudariam a história do conceito de função, se não tivéssemos um participante com uma opinião consolidada sobre, por exemplo, a imutabilidade da matemática, ou se já tivéssemos falado sobre isso explicitamente antes, não faria sentido propor essa *mathtask*, na forma que ela foi apresentada.

Um dos desafios que destacamos é encontrar espaço para a aplicação das AP e grupos de professores dispostos a participar de algo tão diferente e que demanda entrega e dedicação no que diz respeito ao compartilhamento de ideias, de experiências e de práticas e, sobretudo, ao registro escrito das reflexões.

Uma leitura superficial da proposta das AP pode levar à impressão de que seu desenvolvimento demandaria um tempo excessivo para o estudo histórico, por exemplo. Entretanto, convidamos à seguinte reflexão: se acreditamos em uma educação problematizadora (tal como preconizada por Paulo Freire) por que esperar uma proposta de ensino imediatista, que tenha como parâmetro o mínimo de tempo possível de desenvolvimento? Assim, no lugar de afirmarmos para os participantes “a matemática é uma ciência em constante modificação”, procuramos leva-los a perceberem isso por eles mesmos – como evidenciado no Episódio 2 do

Capítulo 7, em que Guilherme percebe que a sua própria visão sobre o que é matemática é equivocada e conclui: "É por isso que você falou que muda...."

Nesse sentido, nossa proposta de AP não se encaixa em rótulos como capacitação ou treinamento, pois não estamos treinando os professores para a realização ou implementação de determinada ação ou modelo. Ao contrário, buscamos formá-los de modo que se tornem autônomos em suas ações docentes, praticando uma *educação problematizadora*. Assim, as AP mostram-se como uma forma de desafiar os modelos estabelecidos para os cursos de formação de professores. Nossas AP se pautam na participação e no diálogo e não na aquisição ou em monólogos ou no treinamento. É uma participação em práticas históricas, a partir das tarefas históricas de imersão e de panorama, assim como uma participação nas práticas escolares, seja pelas *mathtasks*, seja pelas discussões suscitadas pelo compartilhamento das práticas dos professores.

Outro desafio se relaciona com os temas em torno dos quais as rodadas são estruturadas. Eles precisam ser relevantes para os professores, isto é, devem contemplar questões cruciais e críticas dos currículos escolares dos locais ou instituições em que eles ensinam. Além disso, como nossa proposta se baseia na história da matemática é preciso que tenhamos acesso às fontes originais, para realizarmos a tarefa histórica de imersão; e também a fontes secundárias, para nos auxiliar no entendimento das práticas históricas. Nesse sentido, ter acesso a essas fontes é essencial. Para isso, é preciso conhecer os métodos de pesquisa histórica, com vistas à escolha de fontes que respeitem as peculiaridades das práticas históricas, com o mínimo de intervenção das práticas matemáticas mais atuais, uma vez que consideramos as perspectivas mais atualizados da pesquisa em história.

A proposta de AP que apresentamos se pauta tanto na história da matemática quanto na criação de oportunidades para que os professores possam compartilhar suas próprias práticas e também problematizar práticas docentes muitas vezes profundamente enraizadas.

Sobre uma Aplicação das Atividades Problematizadoras

No que diz respeito à aplicação das AP, de modo geral, avaliamos que obtivemos considerável sucesso, primeiramente devido ao engajamento dos professores com atividades pouco (ou nada) usuais. Isso pode estar associado (pelo menos em parte) ao fato de as AP terem sido desenvolvidas em uma disciplina, cujos créditos eram necessários para que eles completassem o curso de mestrado. Contudo, reconhecemos que o engajamento do grupo com as atividades propostas, compartilhando suas reflexões e práticas, dando, assim, forma e vida aos dados que compõem essa pesquisa, foi decisivo para o andamento da experiência. Assim, é importante destacar o papel que este grupo de professores tem sobre os resultados que relatamos nesta tese. As evidências apresentadas sugerem que as AP tiveram um papel importante nas problematizações (ou mudanças discursivas) observadas e discutidas. Entretanto, não é possível afirmar categoricamente que tais problematizações são o único fator que influenciou os professores participantes. Entendemos que outro grupo levaria a outras reflexões sobre a proposta de AP e que outros fatores também podem ter influenciado, como por exemplo, a experiência com outras disciplinas cursadas no mestrado.

Especificamente sobre a primeira Rodada, como discutimos no Capítulo 5, nosso objetivo era problematizar a supremacia de estratégias baseadas em simbolismo algébrico para resolver problemas na escola. Para tanto, procuramos engajar os professores participantes em situações envolvendo problemas que atualmente podem ser abordados por equações lineares. Utilizamos os problemas de *Aha* do Papiro de Ahmes para a realização da tarefa histórica de imersão. Ao longo dessa Rodada, os professores mobilizaram seus saberes, compartilhando suas práticas com os colegas. Para que isso acontecesse as *mathtasks* foram essenciais. O incômodo gerado pela solução por tentativa pode estar relacionado ao conflito gerado por sua forma de registro e também pelo não reconhecimento, por parte dos professores, de algumas práticas matemáticas como aquelas relacionadas com esse tipo de solução (por exemplo, o potencial de investigar de modo mais intuitivo).

A problematização da própria *mathtask* disparadora foi um momento em que os professores puderam vivenciar como as propostas usadas em sala não são absolutas. Isto é, por mais cuidadosamente elaboradas que sejam essas propostas, esse planejamento não precisa ser rígido ao ponto de fechar possibilidades de reelaboração motivadas pelas discussões emergentes nos momentos de sala de aula. Com relação à revisitação de objetivos, a experiência com esse grupo nos mostrou que as práticas egípcias de notação e operação com os números devem também ser consideradas. Alguns dos *commognitive conflicts* que observamos, contudo, não ocorreram exatamente na forma como havíamos antecipado, isto é, por meio do contraste com as metarregras pensadas *a priori*. Em nossa interpretação, esses estiveram relacionados com pelo menos dois motivos, primeiro porque a prática egípcia é tão diferente das práticas matemáticas atuais que há uma gama de metarregras distintas que podem ser usadas para contrastar os dois discursos – e não apenas as duas que consideramos no design. Por outro lado, poderia parecer uma imposição fazer os professores considerarem um aspecto específico da solução por falsa posição. Queremos dizer que, ainda que fosse importante chamar a atenção dos professores para o fator de ajuste usado na solução por falsa posição (pois essa é uma das características do método), não faria sentido impor que eles se incomodassem com isso. No caso da aplicação relatada nesta tese, o confronto entre diferentes práticas acabou acontecendo.

Dado o papel que a álgebra exerce nos currículos escolares brasileiros, é de se esperar que os professores valorizem as soluções baseadas em simbologia algébrica. Como já discutimos, a postura problematizadora que defendemos não espera que opiniões sejam substituídas por outras. Pelo contrário, o que propomos é uma mudança de atitude construída ao longo do tempo, com vistas ao desenvolvimento de uma postura de questionamento e reflexão constantes. As discussões que vimos acontecer nos encontros evidenciam o uso de argumentos pautados na experiência profissional dos professores como um aspecto determinante para sua própria formação continuada. Talvez durante a Rodada 1, tenham sido observadas poucas mudanças de posição por parte dos professores com respeito ao ensino dos tópicos em questão. Contudo, em nossa interpretação, essas discussões certamente alicerçaram o desenvolvimento pretendido da postura problematizadora. Destacamos também a iniciativa de alguns dos professores participantes em usar práticas históricas em suas próprias salas de aula como um desdobramento importante das discussões realizadas.

A combinação de momentos de *zoom in* e *zoom out* para o entendimento da prática egípcia observada na Rodada 1 – ilustrada pela situação em que Luciane interpreta a solução por falsa posição a partir do entendimento da notação egípcia de frações – foi fundamental para o design proposto para a etapa histórica (abordagem ZIZO).

Nosso objetivo com a Rodada 2 foi de problematizar propostas de abordagem sobre áreas e teorema de Pitágoras, a partir do estudo da abordagem euclidiana desses conteúdos. A última proposição do Livro II de *Os Elementos*, em que Euclides propõe um procedimento para determinar a quadratura de uma figura poligonal, foi usada para disparar a discussão histórica. Apresentamos uma proposta didática com o tangram utilizando equivalência de áreas e medida e discutimos sobre o significado de área e de fórmula. O estudo histórico das práticas euclidianas fundamentou sobremaneira a problematização das propostas de ensino de área.

Durante a criação dos mapas de ideias utilizados para disparar a Rodada 2, observamos os professores refletindo sobre os conhecimentos mobilizados, sobretudo, devido à possibilidade de aprender com colegas. Esse é mais um exemplo que evidencia a importância de, na formação de professores, criar oportunidades em que os professores possam compartilhar seus conhecimentos, além de reforçar uma dinâmica não verticalizada de aprendizagem entre professor e estudantes, de forma alinhada à perspectiva freiriana de educação problematizadora.

A demonstração geométrica para o teorema de Pitágoras, juntamente com um quebra-cabeça que a representa, foi indicada pelos professores como potencialmente interessante de ser usada para introduzir o conteúdo. Eles indicaram, porém, a necessidade de se utilizar a demonstração algébrica por semelhança para consolidar a aula sobre o teorema de Pitágoras. Assim como na Rodada 1, a álgebra continua sendo usada para endossar, no caso específico desta rodada, um fato geométrico – o que reforça o papel de centralidade que a álgebra desempenha nos currículos escolares brasileiros.

A linguagem retórica, praticamente desprovida de símbolos e de notação de *Os Elementos*, cumpriu seu papel de provocar estranhamento nos professores. A escolha da Proposição II.14 para a tarefa histórica de imersão visou a esse estranhamento, considerando-se que o cálculo de áreas por operações geométricas (ou seja, sem atribuir números às grandezas) e o uso de teorema de Pitágoras para somar quadrados, como ocorre nessa proposição em sua demonstração, não são comuns na escola básica brasileira. Porém, foi a expressão "retilínea" que gerou um desconforto não previsto nos professores. Ao propor a construção de um quadrado igual à retilínea dada, a Proposição II.14 se refere a figura poligonal de um modo desconhecido pelos professores. Como relataram Cleber e Apolo, foi preciso um esforço para que eles entendessem a que esse termo se referia.

Talvez tenha sido o papel do tangram no desenvolvimento da rodada o que mais tenha chamado nossa atenção. Nesta rodada, apresentamos uma tarefa utilizando esse recurso didático para abordar sentidos de área. Ainda que os professores conhecessem o tangram, a maioria deles não reconhecia seus potenciais didático-pedagógicos. Ainda que Ulisses tenha compartilhado com o grupo uma tarefa com o trangran que ele costuma usar com suas turmas, o recurso parece ser usado como algo alegórico, apenas para trazer ludicidade para a atividade proposta. Um dos grandes diferenciais da tarefa que propusemos usando o tangram é a possibilidade de usar as próprias peças como unidade de medida e de trabalhar equivalência de áreas. Nesse sentido, observamos a conexão entre uma atividade didática (e lúdica) com a prática histórica de *Os Elementos*, e como o estudo dessa prática fundamenta a problematização de propostas de ensino de áreas. Essa situação exemplifica, portanto, a conexão entre práticas históricas e de sala de aula pretendida nesta tese.

O nosso envolvimento com o estudo de *Os Elementos* e as discussões com os professores propiciadas pelas atividades elaboradas (além de questões externas que fizeram os encontros se espaçarem mais de uma semana) acabaram levando ao prolongamento da Rodada 2 para além do tempo previsto, que acabou configurando-se como a mais longa.

A Rodada 3 visou a atender uma demanda dos próprios professores: além de terem escolhido que a terceira parte da disciplina seria outra rodada, foram eles que escolheram o tema funções dentre as opções: "al-Khwarizmi e os problemas de segundo grau" e "o desenvolvimento do conceito de função". Nosso objetivo com a Rodada era, portanto, problematizar o desenvolvimento do conceito de função. Além de observar diferentes contextos históricos cujas práticas matemáticas podem ser associadas com o que hoje chamamos de função, nesta Rodada também procuramos levar os professores a pensar sobre a diferença entre incógnita e variável, e sobre como os exemplos e os exercícios que utilizamos no ensino de funções podem desconsiderar certos objetivos de ensino (por exemplo, trabalhar a noção de variação).

Para disparar a discussão, elaboramos uma *mathtask* em torno da expressão "resolver função". Nosso intuito com essa tarefa era levar os professores a refletirem sobre os diferentes significados que x assume – incógnita nas equações e variável nas funções. Durante as discussões alguns professores concordaram que a expressão reflete uma confusão entre equações e funções do segundo grau. Porém, outros professores argumentaram que a expressão poderia ter outros significados associados, que não necessariamente remetiam à equação quadrática. A *mathtask* fez emergir reações de reconhecimento das próprias práticas por parte dos professores, o que reforça que esse é um recurso capaz de promover discussões sobre o conteúdo matemático e sobre práticas docentes, colocando os professores na posição de professores em relação à própria formação, de modo que eles assumam um papel de centralidade nesse processo formativo. Não tínhamos previsto que o fato de o professor da situação hipotética não ser capaz de refletir sobre a sua própria prática, culpando os estudantes, chamaria tanta atenção dos professores participantes. Já que Silvio levanta essa questão – como descrito no Episódio 1 do Capítulo 7 – muito provavelmente ele mesmo foi provocado a fazer uma autorreflexão, que não podemos garantir se foi suscitada pelas AP ou se esse já era um hábito dele.

Um desafio que enfrentamos nesta rodada foi a decisão sobre o recorte histórico. Por exemplo, gostaríamos de ter trazido para a imersão a definição de Bourbaki, mas as limitações de tempo da disciplina em que as AP forma desenvolvidas não o possibilitaram. Acabamos optando por colocar na tarefa histórica de imersão uma proposição de Galileu sobre o movimento uniformemente acelerado, duas definições de função de Euler e uma definição de função de Dirichlet. Antes da realização da tarefa histórica de imersão, durante a discussão sobre como os participantes estudariam a história do conceito de função, planejamos propor a pergunta: "Vocês acreditam que as noções matemáticas podem mudar ao longo do tempo?". Contudo, as discussões nos levaram a questioná-los se a matemática é inventada ou descoberta, o que fomentou a discussão. A tarefa de imersão histórica começou e com isso os professores foram observando como as noções matemáticas vão mudando ao longo do tempo. Já na discussão sobre a definição de Dirichlet, Guilherme afirma “quer dizer, vai aumentando [...]. você observa melhor, né? e amplia aquilo que você já sabia, mas. É só uma forma melhor de dizer... por isso que você falou que muda. Eu só não sei como agradecer a vocês a oportunidade ímpar...” (9R3)).

Durante a tarefa histórica de panorama, foi preciso rever o modo como vínhamos conduzindo a discussão. Nesta Rodada separamos as seções do livro (ROQUE, 2012) relacionadas ao tema de modo que dois professores participantes ficassem responsáveis pela apresentação das principais ideias de cada seção. Tomamos essa decisão pois percebemos nas outras rodadas que os professores não vinham se engajando como esperávamos nas leituras sugeridas e também porque, para essa rodada, o volume de leitura seria muito grande.

Nesta 3ª Rodada, optamos por aprofundar na parte histórica, dado o seu potencial em enaltecer a matemática como algo em constante modificação. Assim, sobrou pouco tempo para a discussão sobre a *mathtask* da etapa reflexões de práticas docentes (Apêndice K), em que pretendíamos discutir abordagens comuns do ensino de funções, bem como relações das propostas e intenções pedagógicas dos participantes com a definição de função que utilizam com seus estudantes. Queremos dizer que não tivemos a oportunidade de problematizar com os professores a definição de função via conjuntos geralmente utilizada nas escolas e que essa problematização almejava levá-los a refletir, por exemplo, sobre os exemplos de função que utilizam e também sobre o objetivo do estudo de funções na escola.

A Rodada 3 foi integralmente planejada com estudo empírico já em curso, o que se configurou como um grande desafio, pois foi preciso desenhar as tarefas, bem como nos apropriarmos das questões que poderiam ser levantadas durante a realização das AP. A experiência da Aline com o ensino do tema funções sob a perspectiva histórica foi, portanto, fundamental.

Com a aplicação das AP observamos indícios de mudanças que podem ser associadas à participação dos professores no conjunto das três rodadas. Não podemos afirmar que as mudanças dos discursos dos participantes observadas durante o estudo estiveram associadas às transformações em suas práticas, pois nosso desenho metodológico não inclui instrumentos de observação da prática. Por isso, buscamos observar as mudanças *discursivas*, observadas a partir da nossa interpretação dos dados empíricos, em particular do auto relato dos participantes. Nesse sentido, entendemos as mudanças discursivas como indícios de mudanças mais estáveis nas posturas e práticas dos participantes.

De forma mais geral, destacamos que as evidências trazidas neste texto dizem respeito *ao que foi dito* pelos professores participantes logo após a aplicação das AP, o que ocorreu em uma disciplina em que eles estavam sendo avaliados. Não temos, nesta pesquisa, instrumentos para avaliar o efetivo impacto das AP em suas salas de aula. Para isso, outro tipo de estudo seria necessário, em que se acompanharia os professores nas suas salas de aula, durante um período prolongado. Por exemplo, não sabemos se Gladson e Vinicius continuam usando, ou se usaram durante um tempo, os diários reflexivos com suas turmas, nem tampouco se Guilherme continua ouvindo mais seus estudantes, ou se Apolo continua se permitindo errar mais. O que aqui relatamos é o que eles declararam que fariam, ou que gostariam de fazer.

Sobre o conteúdo das três rodadas, destacamos que as conclusões a que chegamos com este trabalho dizem respeito ao conjunto das três rodadas. Assim, em nossa interpretação, não seria adequado um entendimento de que a terceira rodada tenha sido a mais importante do ponto de vista da problematização da matemática como imutável. Embora tenha sido nessa rodada que os professores explicitaram mudanças de visões em direção a um entendimento da matemática como uma ciência em permanente transformação, não podemos ignorar o possível impacto das experiências vividas nas duas rodadas anteriores para essas mudanças de visão.

Nosso estudo descreve uma única aplicação das AP. A realização de outras aplicações poderia contribuir com o entendimento de potencialidades e limitações da proposta, que podem estar relacionadas tanto com o grupo de participantes em si (inclusive com os perfis das pesquisadoras e com as relações estabelecidas entre essas e os participantes), quanto em relação ao próprio conteúdo. Queremos dizer que, embora a proposta tenha sido implementado numa disciplina de história da matemática em um curso de mestrado profissional, acreditamos que esse possa ser adaptado em disciplinas “tradicionais” de conteúdo matemático (Cálculo, Álgebra, Geometria, Análise), tanto em cursos de formação inicial (licenciatura.) como na pós-graduação, incorporando discussões sobre a própria história do conteúdo lecionado ou recorrendo a outros recursos como, por exemplo, uso de tecnologias. Isso possibilitaria uma dimensão mais ampla da proposta.

Desta forma, entendemos que as AP sejam potencialmente replicáveis, sobretudo levando em conta aquilo que consideramos ser o grande diferencial da nossa proposta: ter efetivamente feito os professores participarem da sua própria formação, em posições de autoria e autoridade, tanto no que diz respeito à prática docente, quanto com relação à história da matemática. Isso está em acordo com a educação problematizadora freiriana, que preconiza o tensionamento da dicotomia dominante entre “quem conhece e transmite” e “quem recebe conhecimento”.

Embora o papel da condução compartilhada das AP pelas duas docentes (Bruna e Aline) não tenha figurado dentre nossos objetivos nesta pesquisa, nem tenha sido analisado com base nos dados empíricos produzidos, consideramos que cabem algumas observações importantes a esse respeito. A composição Bruna + Aline se configurou como uma potencialidade na aplicação. Para além da condução compartilhada, a diversidade e a complementaridade de seus saberes se evidenciaram nesta aplicação das AP também compondo o conjunto de aspectos que a caracterizam. Acreditamos que essa docência compartilhada tenha contribuído para propiciar uma quebra – ainda que implícita – da hierarquia sobre o saber (como discutimos, por exemplo, em Giraldo; Menezes; Mano; Quintaneiro *et al.* (2018) e em Giraldo; Menezes; Matos; Melo *et al.* (2018)). Assim, na medida em que as funções das duas docentes foram integradamente compartilhadas, os professores puderam vivenciar uma experiência que evidenciou que, nos processos educacionais, o conhecimento não precisa necessariamente vir de uma única fonte com vistas a sua transmissão para os estudantes. Pelo contrário, essa configuração enfatiza que o conhecimento pode ser compartilhado pelos atores da ação educativa com vistas a sua (re)elaboração por todos. Ou seja, as duas docentes, ainda que responsáveis pela condução das AP, também tiveram a oportunidade de reinterpretar e reconfigurar seus próprios saberes. Sendo assim, apontamos como possíveis desdobramentos desta pesquisa estudos com foco nas ações das docentes que conduziram as AP, de pelo menos duas perspectivas: o papel da condução compartilhada nos resultados da AP; a condução compartilhada das AP como uma experiência formativa das docentes responsáveis. No segundo caso, a pesquisa estaria inserida na área de formação de formador e demandaria referenciais teóricos e metodológicos específicos.

Podemos afirmar ainda que as AP quebram, de certa forma, paradigmas convencionais de formação docente, por exemplo, quando as docentes abriam espaço nos encontros para ouvir os relatos sobre a prática dos professores, valorizando, assim, a autoridade desses sobre o saber da prática. Fato este observado, por exemplo, no diálogo entre Bruna e Silvio, relatado no Capítulo 5 durante a descrição da discussão disparadora, quando ela comenta “não sei se eu estou muito longe da escola pra saber, quero saber a opinião de vocês.”. A disposição em ouvir os professores reforça o reconhecimento dos seus saberes. Assim, ainda que implícito, há um estabelecimento da autoridade dos professores sobre os saberes docentes, sobretudo os oriundos da prática – o que Maurice Tardif e seus colaboradores chamam de saber da experiência que, por sua vez, caracteriza epistemologia própria da profissão docente. A disposição em ouvir, nesse sentido, não é incidental, mas, na verdade, reflete uma intencionalidade calcada no nosso entendimento de formação de professores e que caracteriza a nossa postura diante desta empreitada. Não é nossa intenção aqui sugerir que nossa proposta deva ser a única que quebra os paradigmas convencionais de formação docente. Muito pelo contrário, reconhecemos iniciativas no contexto brasileiro, que consideram o professor e seus saberes em lugar de protagonismo e centralidade e/ou que se fundamentam em paradigmas colaborativos – por exemplo, as conduzidas por Dario Fiorentini, bem como as de Adair Nacarato e as de Marcia Cyrino, que, inclusive, nos inspiraram.

No Capítulo 5 tecemos alguns comentários sobre os diários reflexivos e o seu papel no engajamento dos professores no processo de reflexão. No início, os professores mostraram incompreensão sobre esta tarefa. Porém, avaliamos os resultados finais como positivos. Esses resultados podem ser ilustrados, por exemplo, observando como Leticia começa seu primeiro diário:

> Ao me deparar com esta folha em branco, fico mais ou menos uns vinte minutos pensando o que escrever.
> [...]
> Escrever de uma forma pessoal, expressando os meus sentimentos ou minha opinião e mostrando o meu olhar sobre determinado assunto, me deixa um pouco insegura, mas vamos lá. Como diriam por aí: ‘Segue o baile’. (RD1LE)

Na parte escrita do seu portfólio, ela registra

> [...] continuei escrevendo os meus diários, não foi fácil, mas aprendi muito, Aprendi sobre a História da Matemática, aprendi a refletir sobre um determinado assunto, aprendi a analisar os vários pontos de vista, aprendi a ter disciplina para escrever, aprendi a exercitar a minha memória, aprendi a ouvir as discussões e aprendi tantas coisas.
> No final, acho que vou até sentir falta do meu diário. 😉 (Letícia, na parte escrita de seu portfólio em que “apresenta” os seus diários).

Esse registro evidencia o papel dos diários reflexivos nas AP, qual seja engajar o participante em seu processo formativo.

Os relatos no início de cada encontro também foram fundamentais para o engajamento do grupo, na medida em que esses estabeleceram uma forma de conexão entre os encontros. De modo geral, nesse momento inicial, o grupo pôde refletir sobre o que havia sido feito no encontro anterior disparando as discussões do dia. Nesses momentos, os professores compartilharam suas reflexões, como podemos observar na fala de Naylor a seguir, sobre o encontro em que eles apresentaram exemplos de função

> Olha só, no início da 3ª rodada, a professora Bruna pediu para darmos três exemplos de função. Então, cada um falou. Dê três exemplos de função. Aí a gente colocou no papel. Eu escrevi assim: função afim, função quadrática, função exponencial. Aí as colegas colocaram $f(x)=3x-3$. Aí eu falei assim “pô, mas era pra fazer assim?” E uma outra amiga, que agora eu não lembro quem foi, que colocou tipo uma situação do

> táxi, que você pega um táxi. Ela colocou um exemplo prático. Poxa... como é diferente, né? Cada um pensa de um jeito... (Naylor, 9R3)

Isso indica como as AP o levaram a perceber como cada um pode ter formas diferentes de pensar, e que não há um único modo de responder a um questionamento.

Com as propostas de abordagem esperávamos que os professores incorporassem questões de ordem histórica nas discussões sobre o ensino de matemática ou que, pelo menos revisitassem suas próprias práticas a partir das discussões realizadas nos encontros. Contudo, ainda que reconheçamos que o estudo possa ter sido restrito com respeito à diversidade de temas matemáticos abordados, observamos praticamente a replicação de propostas que eles já estavam acostumados a usar.

No caso da proposta apresentada por Guilherme e Silvio, eles simplesmente justapuseram suas práticas sem sequer tentar conectá-las. Percebemos uma abordagem que pode ser descrita como expositiva convencional, seguida de uma sequência de atividades usando o *software Geogebra*, mas sem que as duas partes conversassem entre si. Já Gabiangela e Luciane apresentaram uma proposta de abordagem para o ensino de sistemas lineares para o 8º ano em que procuraram incorporar a estrutura das AP. Cleber, durante a entrevista, relatou que, para ele, elas foram as únicas que entenderam o que deveria ser feito. Esses dois casos são extremos, um que parece não ter refletido à luz do que foi discutido durante os encontros e outro em que houve uma tentativa de replicação da proposta usada por nós.

De qualquer forma, em nossa interpretação, os professores participantes se envolveram em atividades com as quais não estavam acostumados. A proposição de atividades diferenciadas em sala, visando quebrar paradigmas enraizados, demanda persistência. O caso das propostas de abordagem nos mostra que é preciso persistir mais, pois, ainda que tenhamos aberto espaço dos encontros para os professores discutirem sobre as propostas, avaliamos que ficou faltando uma orientação mais direcionada sobre as possibilidades que poderiam ser utilizadas nas mesmas. Assim, em próximas edições das AP, é preciso dar mais atenção à discussão com os professores participantes sobre suas ideias, indicando, explicitamente talvez, a necessidade de revisitar suas práticas a luz do que está sendo discutido nos encontros.

No final do processo, durante a apresentação dos portfólios, os professores nos surpreenderam, mostrando sua capacidade de criação e criatividade para relatar o que aconteceu e como experienciaram as AP. Começamos com a dupla Ulisses e Guilherme apresentando um jornal e com Ulisses lendo o poema que escreveu. Leticia, que preferiu fazer seu portfólio sozinha, relatou suas reflexões a partir de uma apresentação, separando uma parte sobre o que ela chamou de conteúdos e outra em que ela descreveu a experiência de escrever os diários.

Apolo e Cleber enalteceram a estrutura dos encontros – de acordo com eles, diferente daquilo com que estavam acostumados –, compartilharam suas impressões sobre os conteúdos discutidos que mais lhes chamaram atenção. Além disso, reforçaram a oportunidade de compartilhar práticas e trocar ideias sobre questões envolvendo a tarefa de ensinar permitida pelas AP – que, segundo eles, em geral, estão ausentes dos ambientes de formação de professores. Silvio, Naylor e Michel gravaram uma roda de conversas entre eles próprios, em que comentam sobre cada um dos encontros, configurando-se em mais um portfólio que transgrediu o formato tradicional de apresentações. Gladson e Vinicius estruturam o seu portfólio comparando como chegaram e como saíram da disciplina, compartilhando suas experiências pessoais com a decisão em ser professor de matemática e de ingressar no mestrado, relataram que pretendem implementar os diários reflexivos em suas aulas e explicitaram como as reflexões suscitadas pelas AP se conectam com suas práticas bem como com aprendizados obtidos em outros espaços. Gladson, particularmente, compartilhou que a experiência com as AP na disciplina o fez revisitar o tema do seu TCC. Por fim, Luciane e Gabiangela projetaram o vídeo em que sintetizaram a experiência vivida a partir de fragmentos das apresentações utilizadas nos encontros, de fotos e de outras imagens que ilustram a narração.

De modo geral, as apresentações de portfólios indicaram que a distinção entre história e herança foi algo que chamou particular atenção desse grupo como um todo. Foi muito presente nos portfólios a experiência propiciada pelos diários reflexivos, particularmente com vistas ao desenvolvimento da habilidade de escrever. Também foi amplamente relatada a oportunidade, criada pelas AP, de compartilhar práticas e de aprender com os colegas.

Para além de ser apenas uma maneira de fazer os participantes revisitarem tudo que aconteceu durante o período letivo, a utilização dos portfólios e a sua apresentação para o grupo é um momento em que os participantes percebem como as experiências são múltiplas, uma vez que, ainda que todos tenham participado dos mesmos encontros, cada um os toma para si de modo diferente. Além disso, o trabalho com diários reflexivos permite que os professores percebam, a partir de suas próprias experiências com a realização da tarefa, como é possível utilizar formas de avaliação para além das convencionais. Sendo assim, consideramos que essa é uma prática potente para espaços de formação de professores de matemática.

Problematizando Contribuições

Consideramos como uma das mais importantes contribuições desta tese a articulação de diferentes referenciais teóricos, o que aconteceu em diferentes dimensões. Talvez a mais visível diga respeito a atender uma demanda intrínseca do uso da história da matemática no ensino.

Usar a história no ensino pressupõe conhecimentos sobre história da matemática, sobre o ensino de matemática e também sobre a própria matemática[76]. A escolha das narrativas históricas evidencia, por exemplo, nossos entendimentos sobre a matemática e também sobre a sua história – que nem sempre são claros e evidentes. Reconhecer as peculiaridades de um estudo em História da Matemática demanda conhecimentos sobre os métodos específicos desse campo de pesquisa. Da mesma forma, são necessários conhecimentos específicos sobre a Educação Matemática, e, no nosso caso, sobre a Formação de Professores, de modo que o estudo contemple também as principais características e especificidades da pesquisa nessa área. Além disso, o conhecimento sobre a Matemática também é fundamental. Assim como Saito denuncia

> Articular história e ensino não é tarefa simples, uma vez que requer que consideremos não só os aspectos epistemológicos e metodológicos ligados à história da matemática, mas também à educação matemática, pois essas duas áreas de conhecimento referem-se a campos de investigação distintos, definidos por diferentes métodos e objetos de investigação. Embora pareça ser natural articulá-los, visto que a história da matemática e o ensino de matemática se referem a conteúdos matemáticos (tendo por foco principal de análise a construção do conhecimento matemático), do ponto de vista epistemológico, entretanto, a articulação deve ser examinada como um construto e considerada em toda sua complexidade. (SAITO, 2018, p. 605)

Nesse sentido, buscamos nesta pesquisa articular discussões teóricas sobre a História da Matemática e sobre a Formação de Professores (especialmente, sobre o papel de coletivos docentes, bem como sobre a especificidade de saberes docentes), o que se materializa na combinação das *mathtasks* e das tarefas históricas.

Consideramos que as próprias tarefas históricas se configuram como uma contribuição deste trabalho. Ao propô-las, articulamos o desenvolvimento da escuta intencional – tal como proposto por Abraham Arcavi e Masami Isoda – e a utilização de discursos governados por metarregras (supostamente) distintas das que os professores estão acostumados – como Tinne Kjeldsen e seus colaboradores defendem. Isso foi potencializado pela abordagem ZIZO – outra contribuição deste trabalho –, que ao combinar momentos de imersão e de panorama, propicia a apresentação da fonte sem qualquer contextualização, com vistas ao estranhamento e a sua revisitação depois de estudados os contextos histórico e matemático.

Com relação ao papel da história na nossa proposta, destacamos que não pretendemos apresentar atividades históricas que possam ser replicadas pelos professores em suas salas de aula. Nossa proposta, estando baseada no desenvolvimento da postura problematizadora, usa a

---

[76] Agradecemos a Uffe Jankvist, com quem tivemos o prazer de conversar sobre as peculiaridades e particularidades necessárias para a realização de estudos e pesquisas na interseção de duas áreas de inquérito tão bem delimitadas.

história para problematizar a matemática, o seu desenvolvimento e as práticas dos professores, bem como para promover o desenvolvimento da escuta intencional. Usamos a história para promover *commognitive conflicts*, tirando assim os professores de suas zonas de conforto e esperando que possam reinterpretar e (re)elaborar seus próprios saberes – sobre matemática, sobre seu ensino.

Outra dimensão bastante evidente está na conexão entre referenciais sobre aprendizagem – no nosso caso, a *Commognition* – e sobre formação de professores. Em geral, as pesquisas sobre formação docente com foco em saberes têm poucas articulações com a literatura sobre aprendizagem. Procuramos fazer isso na nossa pesquisa, uma vez que entendemos os saberes docentes como produzidos a partir da mobilização na prática, ou em termos sfardianos, da participação no discurso. Tanto nossa perspectiva de aprendizagem, quanto de educação e de formação docente são participacionistas, propiciando ainda mais a articulação entre esses eixos teóricos.

Nesta tese buscamos extrapolar a noção de educação problematizadora freiriana para o âmbito da formação docente. Também procuramos extrapolar as discussões sobre a formação inicial para a formação de professores em serviço – nosso foco de estudo – situando ambas na afirmação da docência como profissão. Nesse sentido, articulam-se a *educação problematizadora* de Paulo Freire; os *coletivos docentes* presentes tanto na investigação como postura de Marilyn Cochran-Smith e Susan Lytle, quanto nos trabalhos de Brent Davis e colaboradores, particularmente, a noção de *substruct*; as discussões sobre *saberes profissionais docentes* (epistemologia própria dos saberes docentes, tal como Maurice Tardif e seus colaboradores propõem) e, especificamente, as *sobre saberes docentes em matemática*, entrelaçando entendimentos sobre a matemática estabelecida e sobre como o conhecimento matemático é produzido, como defendido por Brent Davis e seus colaboradores.

A amarração entre os saberes docentes e a aprendizagem também se materializa na dimensão histórica da nossa proposta. De um lado, temos a perspectiva participacionista com foco na cultura profissional e na coletividade e, de outro, discursos socialmente situados em contextos históricos muito diferentes dos atuais e dos situados nas salas de aulas. Como buscamos desenvolver a postura problematizadora por meio de problematizações, a utilização de diferentes discursos (visando a promover *commognitive conflicts*) tem a potência de mexer na zona de conforto dos professores. Neste trabalho, utilizamos a *Commognition* fundamentando tais problematizações.

A *Commognition*, por sua vez, além de ser usada para analisar os dados gerados pela aplicação das AP, também sustenta, desde o início, seu design. Como desenvolvemos as AP com vistas a promover mudanças discursivas, as tarefas foram pensadas para que os discursos dos professores pudessem ser observados. Assim também aconteceu durante a condução dos encontros e, por isso, foram criados os diversos momentos em que os professores puderam compartilhar suas práticas e expressar suas opiniões.

Finalmente, destacamos a contribuição da proposta de AP como um exemplo de formação docente em que os professores são considerados no centro do processo. Nesta proposta, no lugar de esperarem pelo depósito de conhecimentos, eles efetivamente, participam de sua formação, tendo reconhecida a sua autoridade sobre os conhecimentos da prática (saberes da experiência, como colocam Maurice Tardif e seus colaboradores).

Alguns desafios e limitações enfrentados durante o trabalho já foram aqui discutidos. O fato de as AP terem sido aplicadas em uma disciplina em que os professores precisavam ser aprovados para concluir o mestrado pode ter enviesado a sua participação e, consequentemente as impressões compartilhadas conosco. Como analisamos uma única aplicação das AP, as impressões que aqui descrevemos são diretamente dependentes do grupo de professores que participou do estudo empírico. Como não observamos a prática dos professores, nossas impressões são restritas ao que eles declararam sobre o que faziam ou passariam a fazer nas suas atuações como docentes. Acrescentamos, ainda, que o volume de dados produzidos permite uma diversidade de interpretações, seja considerando os nossos referenciais, seja até considerando outros referenciais – ainda que a nossa proposta tenha sido desenhada considerando-se a *Commognition*. Por isso, enfatizamos sempre que nesta tese apresentamos *uma possível* análise dos dados.

No anseio de se engajar em uma agenda de pesquisa que considere e contemple as especificidades da história da matemática *no* ensino, assumimos a limitação da revisão de literatura da nossa pesquisa, sobretudo no que diz respeito à literatura brasileira referente à formação de professores de matemática – o que, reconhecemos, acaba não situando adequadamente a tese na produção no contexto nacional. Apesar dessa limitação reconhecida, enfatizamos a importância de trabalhos como o que aqui propomos para o desenvolvimento de pesquisa em história no ensino de matemática que articulem e se referenciem efetivamente em referenciais teóricos de ambas as áreas, sobretudo no que diz respeito ao delineamento de parâmetros metodológicos para investigações dessa natureza.

Possíveis Desdobramentos e Perspectivas Futuras

O desdobramento mais natural e pulsante que podemos destacar é o desejo de realizar outras aplicações das AP. Nosso envolvimento com a proposta é tamanho que, se pudéssemos desenvolveríamos AP na grande maioria das nossas atividades docentes e de pesquisa. Contudo, na impossibilidade de colocar isso em prática, acreditamos ser possível implementar, ao menos algumas ideias tanto da postura problematizadora, quanto das AP na prática docente cotidiana, por exemplo, nas aulas ministradas ou na elaboração e execução de projetos de pesquisa e/ou de extensão.

Outro desdobramento natural é a divulgação da pesquisa tanto participando de eventos científicos, quanto publicando sobre os resultados. A publicação de artigos foi pensada durante a escrita deste texto. Assim, pretendemos trabalhar na revisão do artigo apresentado no Capítulo 7, de modo que ele seja publicado no *Journal of Mathematical Behavior*, na edição especial *Advances in Commognitive Research*; organizar o Capítulo 5 para submissão provavelmente para o *International Journal for Science and Mathematics Education*; colocar o Capítulo 6 no formato de artigo a ser publicado também para uma audiência internacional.

Reconhecemos a importância de publicar para o público brasileiro, mas as experiências oportunizadas pelo período de doutoramento – eternizadas pelas parcerias estabelecidas – nos levaram a possibilidades de publicação em periódicos internacionais – quem sabe um dia consigamos publicar traduções desses artigos em periódicos nacionais! Com relação à divulgação da pesquisa para o público brasileiro, almejamos a escrita de um artigo sobre a *Commognition* e as suas possibilidades teóricas e metodológicas. Vislumbramos também a escrita de um artigo teórico sobre a postura problematizadora e outros sobre os temas das rodadas. Esses serão idealmente escritos em parceria com professores atuantes na educação básica, de modo que possamos incorporar seus conhecimentos, enaltecendo a importância de se discutir, do ponto de vista matemático, questões características da prática de sala de aula (por exemplo, possibilidades de abordagem da noção de área sem a ênfase excessiva nas fórmulas).

A experiência com o doutoramento abriu muitas portas e algumas parcerias já foram estabelecidas. Acreditamos, portanto, que o estudo para a realização desta pesquisa cumpriu o papel de doutoramento não só pelo produto apresentado neste texto, mas também pelo desenvolvimento acadêmico e científico que o processo proporcionou para a autora. Esperamos que as discussões sobre a formação de professores em serviço apresentadas nesta tese, possam contribuir para tais discussões no contexto mais amplo da pesquisa nacional, e também possam inspirar outras iniciativas e suscitar caminhos e sugestões também para a formação inicial. Esperamos também que a experiência descrita com as AP possa inspirar os leitores deste texto a experimentarem a problematização em suas práticas. Para nós, é um caminho sem volta, mas que vale à pena.

A BRUNA DEPOIS DE TODAS ESSAS PROBLEMATIZAÇÕES.

Não falei lá no início que sou canceriana. Talvez uma das características mais conhecidas dos cancerianos seja a nossa relação com a casa, o quanto o lar nos dá conforto. Isso é verdade. Mas, ao longo das minhas incursões curiosas na astrologia (podem me criticar!) encontrei uma característica que muito me representa: a dificuldade de terminar, de concluir. E com esta tese não foi diferente. É verdade, muitos foram os obstáculos desde "amanhã eu escrevo isso", ou "estou esperando uma resposta para continuar escrevendo", até "devo mesmo continuar estudando diante disso tudo que está acontecendo?"

Sobre esse último questionamento, lembro que durante os meus estudos de doutorado teve impeachment da Dilma, governo Temer, eleição de Bolsonaro e, consequentemente, muita desvalorização da universidade e, mais recentemente, cada vez mais, desvalorização da ciência e da pesquisa científica. Por muitas vezes me perguntei para que estava estudando e fazendo isso tudo. Mas talvez nada se compare com o sentimento de terminar de escrever as reflexões sobre todas essas problematizações em meio a uma pandemia, em meio a tantas mortes e, principalmente, em meio a tanto descaso por parte do (infelizmente) dirigente mor de nosso país.

Esses quase cinco anos me fizeram ver a pesquisa e as parcerias de uma maneira que eu não podia imaginar no início desse processo. Foram algumas decepções, mas **muitos** aprendizados (e, espero, mudanças discursivas ;)). A problematização que paira na minha cabeça e no meu coração (desde fevereiro) é como não poder abraçar a todos que fizeram parte deste processo? Os que entraram, os que saíram, os que voltaram, os que ficaram, sobretudo, os que, de alguma forma, torceram para que eu conseguisse completar o tão difícil fim. Como ficar sem esse abraço? Difícil. Bem difícil.

Espero, sinceramente, que esse trabalho sirva para que possamos refletir e problematizar não só sobre a matemática e o seu ensino, mas sobretudo sobre as nossas escolhas. Eu sigo me questionando e problematizando.

Bruna Moustapha-Corrêa

1º de junho de 2020

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARCAVI, A.; ISODA, M. Learning to listen: From historical sources to classroom practice. **Educational Studies in Mathematics**, 66, n. 2, p. 111-129, 2007.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special. **Journal of teacher education**, 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática. Campinas, SP: Mercado de Letras**, p. 347-367, 2015.

BEDNARZ, N.; PROULX, J. Knowing and using mathematics in teaching: Conceptual and epistemological clarifications. **For the learning of mathematics**, 29, n. 3, p. 11-17, 2009.

BERNARDES, A.; ROQUE, T. History of Matrices: Commognitive Conflicts and Reflections on Metadiscursive Rules. *In*: CLARK, K. M.;KJELDSEN, T. H., *et al* (Ed.). **Mathematics, Education and History: Towards a Harmonious Partnership**. Switzerland: Springer, 2018. p. 209-227.

BIZA, I., KAYALI, L., MOUSTAPHA-CORRÊA, B., NARDI, E; & THOMA, A. Aguçando o foco na matemática: projetando, implementando e avaliando as atividades de MathTASK para a formaçao de professores de matemática. In: H.R. Elias, J. Viola & V. Giraldo (Eds) **A Formação Matemática na Licenciatura em Matemática: Problematizando Conteúdos e Práticas**. [título provisório]. SBEM: Brasil. (no prelo)

BIZA, I.; NARDI, E. Scripting the experience of mathematics teaching: The value of student teacher participation in identifying and reflecting on critical classroom incidents. **International Journal for Lesson and Learning Studies**, 2019.

BIZA, I.; NARDI, E.; ZACHARIADES, T. Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 10, n. 4-6, p. 301-309, 2007.

BIZA, I.; NARDI, E.; ZACHARIADES, T. Competences of mathematics teachers in diagnosing teaching situations and offering feedback to students: Specificity, consistency and reification of pedagogical and mathematical discourses. *In*: **Diagnostic Competence of Mathematics Teachers**: Springer, 2018. p. 55-78.

CARVALHO, J. D.; ROQUE, T. M. Tópicos de História da Matemática. **Rio de Janeiro: SBM**, 2012.

CHACE, A. B.; MANNING, H.; ARCHIBALD, R. **The Rhind Mathematical Papyrus: British Museum 10057 and 10058 (Vol. II)**. Oberlin, OH: Mathematical Association of America, 1929.

CHACE, A. B.; MANNING, H. P.; ARCHIBALD, R. C. **The Rhind Mathematical Papyrus: British Museum 10057 and 10058**. Oberlin, OH: Mathematical Association of America, 1927.

CLARK, K. M. History of mathematics in mathematics teacher education. *In*: **International handbook of research in history, philosophy and science teaching**: Springer, 2014. p. 755-791.

CLARK, K. M.; KJELDSEN, T. H.; SCHORCHT, S.; TZANAKIS, C. Introduction: Integrating History and Epistemology of Mathematics in Mathematics Education. *In*: **Mathematics, Education and History**: Springer, 2018. p. 1-23.

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. Inquiry as stance: Ways forward. *In*: **Inquiry as stance: Practitioner research for the next generation**: Teachers College Press, 2009. p. 118-165.

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. L. Chapter 8: Relationships of knowledge and practice: Teacher learning in communities. **Review of research in education**, 24, n. 1, p. 249-305, 1999.

COOPER, J., 2014, **Mathematical discourse for teaching: A discursive framework for analyzing professional development**. 337-344.

COOPER, J. **Mathematicians and Primary School Teachers Learning From Each Other** 2016. - Weizmann Institute of Science, Israel.

CYRINO, M. C. D. C. T. Mathematics teachers' professional identity development in communities of practice: Reifications of proportional reasoning teaching. **Bolema: boletim de educação matemática**, 30, n. 54, p. 165-187, 2016.

DAVIS, B.; RENERT, M. Mathematics-for-teaching as shared dynamic participation. **For the learning of mathematics**, 29, n. 3, p. 37-43, 2009.

DAVIS, B.; RENERT, M. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, 82, n. 2, p. 245-265, 2013.

DAVIS, B.; RENERT, M. **The Math Teachers Know: Profound Understanding of Emergent Mathematics**. New York: Routledge, 2014. 141 p.

DAVIS, B.; SIMMT, E. Mathematics-for-Teaching: an Ongoing Investigation of the Mathematics that Teachers (Need to) Know. **Educational Studies in Mathematics**, 61, n. 3, p. 293-319, 2006.

DOS ANJOS, D. D.; NACARATO, A. M.; DE FREITAS, A. P. Práticas colaborativas: o papel do outro para as aprendizagens docentes. **Educação Unisinos**, 22, n. 2, p. 204-213, 2018.

EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 600 p. (Tradução e Introdução de Irineu Bicudo.

EULER, L. **Introductio In Analysin Infinitorum**. Lausanne: MM Bousquet, 1748.

EULER, L. **Institutiones Calculi Differentialis Cum Eius Usu In Analysi Finitorum Ac Doctrina Serierum**. Impensis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, 1755.

FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. A. **History in mathematics education: The ICMI study**. Springer Science & Business Media, 2000. 0306472201.

FERNÁNEZ, S.; FIGUEIRAS, L. Horizon Content Knowledge: Shaping MKT for a Continuous Mathematical Education. **REDIMAT**, 3, n. 1, p. 7-29, 2014.

FIORENTINI, D. Learning and professional development of the mathematics teacher in research communities. 2014.

FIORENTINI, D.; CRECCI, V. Interlocuções com Marilyn Cochran-Smith sobre aprendizagem e pesquisa do professor em comunidades investigativas. **Revista Brasileira de Educação**, 21, n. 65, p. 505-524, 2016.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. 60a edição ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2016. 284 p.

FRIED, M. N. Can mathematics education and history of mathematics coexist? **Science & Education**, 10, n. 4, p. 391-408, 2001.

GALILEI, G. **Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze Attenenti alla Mecanica ed i Movimenti Locali**. Leiden: Louis Elsevier, 1638.

GALILEI, G. **Dialogues Concerning Two New Sciences by Galileo Galilei**. Tradução CREW, H. e SALVIO, A. D. New York: Macmillan, 1914.

GATTI, B. A. Formação de professores no Brasil: características e problemas. **Educação & Sociedade**, 31, n. 113, p. 1355-1379, 2010.

GATTI, B. A.; NUNES, M. N. R. Formação de professores para o ensino fundamental: estudo de curículos das licenciaturas em pedagogia, lingua portuguesa, matemática e ciências biológicas. **Textos FCC**, 29, p. 158, 2009.

GIRALDO, V. Formação de professores de matemática: para uma abordagem problematizada. **Ciência e Cultura**, 70, n. 1, p. 37-42, 2018.

GIRALDO, V., 2019, Cuiabá. **Que Matemática para a Formação de Professores? Por uma Matemática Problematizada**. SBEM.

GIRALDO, V.; FERNANDES, F. S. Caravelas à Vista: Giros Decoloniais e Caminhos de Resistência na Formação de Professoras e Professores que Ensinam Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, 12, n. 30, p. 467-501, 2019.

GIRALDO, V.; MENEZES, F.; MANO, V.; QUINTANEIRO, W. *et al.* Práticas Docentes Compartilhadas: Integrando Saberes Emergentes da Prática na Formação Inicial de Professores de Matemática. *In*: CYRINO, M. C. D. C. T. (Ed.). **Temáticas Emergentes de Pesquisas Sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática: Desafios e Perspectivas.** Brasília: SBEM, 2018. p. 216-239.

GIRALDO, V.; QUINTANEIRO, W.; MOUSTAPHA, B.; MATOS, D. *et al.* O Laboratório de Práticas Matemáticas para o Ensino. *In*: OLIVEIRA, A. M. P. e ORTIGÃO, M. I. R. (Ed.).

Abordagens Teóricas e Metodológicas na Pesquisa em Educação Matemática. Brasília: SBEM, 2018. p. 186-209.

GIRALDO, V.; ROQUE, T. História e Tecnologia na Construção de um ambiente Problemático para o Ensino de Matemática. **O saber do professor de matemática: ultrapassando a dicotomia entre a didática e conteúdo. Rio de Janeiro: Ciência Moderna**, p. 9-35, 2014.

GIRALDO, V. A.; MENEZES, F.; MATOS, D.; MELO, L. *et al.* Shared Teaching Practices: Integrating Experiential Knowledge Into Pre-Service Mathematics Teachers'education. **RIPEM**, 7, n. 2, p. 4-23, 2018.

GRATTAN-GUINNESS, I. History or heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education. **The American Mathematical Monthly**, 111, n. 1, p. 1-12, 2004a.

GRATTAN-GUINNESS, I. The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage. **Historia mathematica**, 31, n. 2, p. 163-185, 2004b.

IMHAUSEN, A. Egyptian Mathematics. *In*: KATZ , V. e IMHAUSEN, A. (Ed.). **The Mathematics Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook**. New Jersey: Princeton University Press, 2007. p. 7–56.

JANKE, H. Algebraic Analysis in the 18th Century. **London Math. Soc**, n. A History of Analysis, p. 105-136, 2003.

JANKVIST, U. T. On empirical research in the field of using history in mathematics education. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, 12, n. 1, p. 67-101, 2009.

KALEFF, A. M. M. R.; REI, D. M.; GARCIA, S. D. S. **Quebra-Cabeças Geométricos e Formas Planas**. 3 ed. Niterói: EdUFF, 2002.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics: an Intorduction**. 3 ed. Pearson Addison-Wesley, 2009.

KIERAN, C. Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. *In*: **Handbook of research on the psychology of mathematics education**: Brill Sense, 2006. p. 11-49.

KILPATRICK, J. A higher standpoint. **ICME 11 Proceedings**, 2008.

KJELDSEN, T. H. Does history have a significant role to play for the learning of mathematics?: Multiple perspective approach to history, and the learning of meta level rules of mathematical discourse. *In*: **History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the 6th European Summer University.**: Verlag Holzhausen GmbH, 2011. p. 51-61.

KJELDSEN, T. H.; BLOMHØJ, M. Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 80, n. 3, p. 327-349, 2012.

KJELDSEN, T. H.; PETERSEN, P. H. Bridging history of the concept of function with learning of mathematics: Students' meta-discursive rules, concept formation and historical awareness. **Science & Education**, 23, n. 1, p. 29-45, 2014.

LAVIE, I.; STEINER, A.; SFARD, A. Routines we live by: From ritual to exploration. **Educational Studies in Mathematics**, 101, n. 2, p. 153-176, 2019.

LÜTZEN, J. Between Rigor and Applications: Developments in the Concept of Function in Mathematical Analysis. *In*: NYE, M. J. (Ed.). **The Cambridge History of Science**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. p. 468-487.

MIATELO, L. The Difference 5 ½ in a Problem of Rations from the Rhind Mathematical Papyrus. **Historia mathematica**, 35, n. 4, p. 277-284, 2008.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, A. C. O lugar da matemática na licenciatura em matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, 27, n. 47, p. 981-1005, 2013.

MOUSTAPHA-CORRÊA, B.; BERNARDES, A.; GIRALDO, V. Historical Tasks to Foster Problematization. *In*: Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 2019, Utrecht, the Netherlands. Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME, p. 2149-2157.

MOUSTAPHA-CORRÊA, B., BERNARDES, A., GIRALDO, V., BIZA, I., & NARDI, E. Problematizing mathematics and its pedagogy: Teachers' discursive shifts through history-focussed and classroom situation-specific tasks. **Journal of Mathematical Behavior** (Special Issue: Advances in Commognitive Research). (em revisão).

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, 9, n. 9-10, 2005.

NARDI, E.; RYVE, A.; STADLER, E.; VIIRMAN, O. Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: the case of discursive shifts in the study of Calculus. **Research in Mathematics Education**, 16, n. 2, p. 182-198, 2014.

NÓVOA, A. Para uma formação de professores construída dentro da profissão. *In*: **Professores: Imagens do Futuro Presente**. Lisboa: EDUCA, 2009.

NÓVOA, A. Firmar a posição como professor, afirmar a profissão docente. **Cadernos de Pesquisa**, 47, n. 166, p. 1106-1133, 2017.

NÓVOA, A.; VIEIRA, P. Um alfabeto da formação de professores (A teacher education alphabet). **Crítica Educativa**, 3, n. 2, p. 21-49, 2017.

PANZA, M. Euler's Introductio in Analysin Infinitorum and the Program of Algebraic Analysis: Quantities, Functions and Numerical Partitions. 2007.

PEJLARE, J.; BRÅTING, K. Writing the History of Mathematics: Interpretations of the Mathematics of the Past and Its Relation to the Mathematics of Today. 2019.

RENERT, M.; DAVIS, B. An open way of being: Integral reconceptualization of mathematics for teaching. **S. Esbjèorn-Hargens, J. Reams, & O. Gunnlaugson, eds. Integral education: new directions for higher learning**, p. 193-214, 2010.

ROBUTTI, O.; CUSI, A.; CLARK-WILSON, A.; JAWORSKI, B. *et al.* ICME international survey on teachers working and learning through collaboration: June 2016. **ZDM**, 48, n. 5, p. 651-690, 2016.

ROQUE, T. Sobre a Noção de Problema. **Revista Lugar Comum**, n. 23-24, p. 135-146, 2010.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 507 p.

ROQUE, T. Desmascarando a equação. A história no ensino de que matemática. **Revista Brasileira de História da Ciência**, 7, n. 2, p. 167-185, 2014.

SAITO, F. Construindo interfaces entre história e ensino da matemática. **Ensino da Matemática em Debate (ISSN 2358-4122)**, 3, n. 1, 2016a.

SAITO, F. História e ensino de matemática: construindo interfaces. **Investigaciones em Educacion Matemática. Lima: Fondo Editorial PUCP**, p. 253-291, 2016b.

SAITO, F. A pesquisa histórica e filosófica na educação matemática. **Eventos Pedagógicos**, 9, n. 2, p. 604-618, 2018.

SAITO, F.; DA SILVA DIAS, M. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, 19, n. 1, p. 89-111, 2013.

SCHUBRING, G. **Conflicts between generalization, rigor, and intuition. Number concepts underlying the development of analysis in 17th?19th century France and Germany. Sources and studies in the history of mathematics and physical sciences.** New York: Springer, 2005.

SCHUBRING, G. A matemática elementar de um ponto de vista superior: Félix Klein e a sua atualidade. **O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo**, p. 39-54, 2014.

SCOCUGLIA, A. Educação Bancária x Educação Problematizadora. Programa Paulo Freire Vivo. João Pessoa: TV UFPB**:** https://www.youtube.com/watch?v=dNK41Err40jE p. 2016.

SFARD, A. **Thinking as communicating : human development, the growth of discourses, and mathematizing**. New York: Cambridge University Press, 2008. 324 p.

SFARD, A. Developing mathematical discourse: Some insights from communicational research. Special issue of. **The International Journal of Educational Research**, 51-52, p. 9, 2012.

SFARD, A. University mathematics as a discourse–why, how, and what for? **Research in Mathematics Education**, 16, n. 2, p. 199-203, 2014.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational researcher**, 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

TARDIF, M. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários
Elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas conseqüências em relação à formação para o magistério. Revista Brasileira de Educação. 2000.

TARDIF, M. A profissionalização do ensino passados trinta anos: dois passos para a frente, três para trás. **Educação & Sociedade**, 34, n. 123, p. 551-571, 2013.

TARDIF, M.; LESSARD, C.; LAHAYE, L. Os professores face ao saber: esboço de uma problemática do saber docente. **Teoria e educação**, 4, p. 215-233, 1991.

TURNER, F.; ROWLAND, T. The knowledge quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. *In*: **Mathematical knowledge in teaching**: Springer, 2011. p. 195-212.

WAGNER, E. Teorema de Pitágoras e áreas. **IMPA, Rio de Janeiro**, 2006.

WATSON, A.; OHTANI, M.; AINLEY, J. Task design in mathematics education. **Proceedings of ICMI Study**, 22, p. 9-16, 2015.

WINICKI, G. The analysis of regula falsi as an instance for professional development of elementary school teachers. *In*: KATZ, V. (Ed.). ***Using history to teach mathematics—an international perspective***. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000. v. 6, p. 129-134.

APÊNDICES

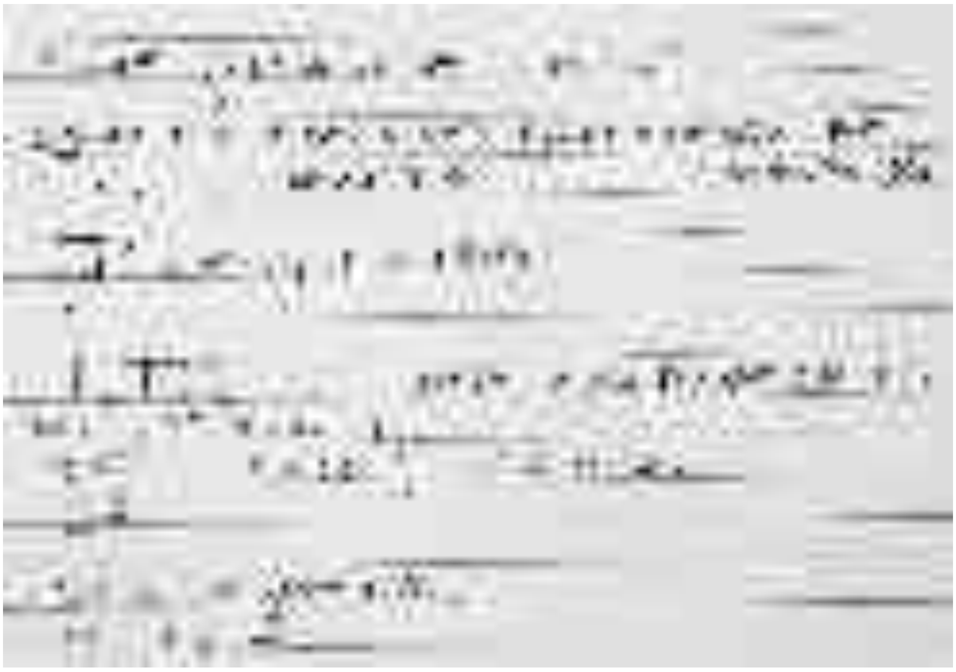
APÊNDICE A – *Mathtask* Disparadora Rodada 1

A professora Andreia está com uma turma do 7º ano do EF. Ela começou a trabalhar com probleminhas que podem ser resolvidos por álgebra, apresentando para a turma a seguinte situação.

Marina gosta de criar problemas para seu pai inspirado no que aprende na escola. Numa certa noite ela disse.
***Pai, descobre quantos reais eu tenho! A dica é: se eu adicionar um quarto do que tenho ao que eu tenho, ficarei com R$15,00.* Quantos reais Marina tem?**

Os estudantes trabalharam individualmente e, em seguida, dois foram convidados para ir ao quadro expor a sua solução.

Rodolfo apresentou a solução a seguir



E Fábio

Questionamentos

a. O que está por trás da solução de Rodolfo?
b. E da de Fábio?

Como professor, como você

c. aproveitaria as soluções apresentadas para dar continuidade a aula?
d. costuma trabalhar a resolução de problemas?
e. costuma introduzir a álgebra?

APÊNDICE B – Tarefa Histórica de Imersão Rodada 1

A Matemática no Antigo Egito

Tarefa inspirada no texto
ARCAVI, A.; ISODA, M. Learning to Listen: From Historical Sources to Classroom Practice. *Educational Studies in Mathematics.* Special issue on the history of mathematics in mathematics education, V. *66*, pp. 111–129, 2007.

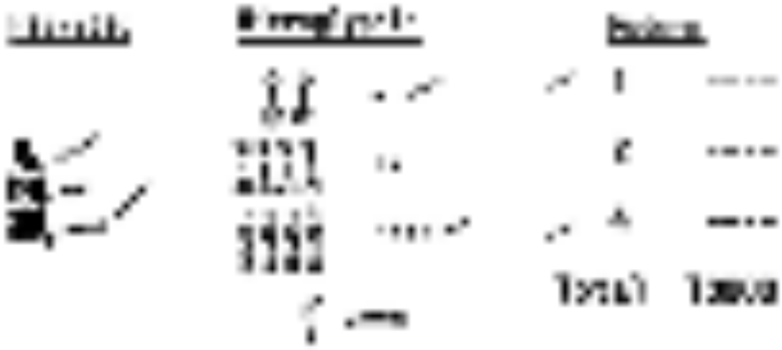
1ª etapa

A figura a seguir, retirada do Papiro de Ahmes, apresenta um cálculo em hierático e hieróglifo feito na solução do problema 74.

1. Com base na tradução inicial para a notação moderna, indique o que cada um dos símbolos hieroglíficos significa.
2. Complete os espaços em branco.
3. Explique qual cálculo foi efetuado nesse excerto.

2ª etapa

A figura a seguir apresenta outro cálculo feito durante a solução do problema 52.



1. De acordo com a experiência adquirida na etapa anterior, o que você se perguntaria para tentar entender esse novo texto?
   [Compartilhe com os colegas]

2. Considerando a tradução inicial do hieróglifo para a notação moderna, indique o que cada um dos símbolos pode significar.
3. Complete os espaços em branco.
4. Explique quais cálculos foram efetuados nesse caso e qual é o significado das barras.

5. Calcule 13×27 pelo método egípcio.

6. Qualquer par de números pode ser multiplicado por esse método? Explique.

3ª etapa

A figura a seguir a presenta a solução do problema 24. A tradução para o inglês apresenta algumas omissões para o propósito desta tarefa.

1. Crie questões cujas respostas ajudariam você a entender o processo de solução de uma equação linear. [Compartilhe com os colegas]

2. Escreva, em notação moderna, a equação correspondente à primeira sentença, e resolva-a.

3. Observe o primeiro passo.

$$\begin{array}{ll} /\ 1 & 7 \\ /\ \frac{1}{7} & \_\_\_ \end{array}$$

Aparentemente os egípcios abordaram o problema substituindo um número experimental e vendo o que acontece.

   a. Qual número eles experimentaram?
   b. Complete o espaço em branco.
   c. Qual resultado foi obtido?
   d. Por que você acha que eles escolheram esse número?

4. Observe o segundo passo.

$$\begin{array}{ll} 1 & 8 \\ /\ 2 & \_\_\_ \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} & \_\_\_ \\ /\ \frac{1}{4} & \_\_\_ \\ /\ \frac{1}{8} & \_\_\_ \end{array}$$

a. Complete os espaços em branco.
b. Quais cálculos foram efetuados e qual é o resultado?

5. Observe o terceiro passo.

$$\begin{array}{ll} /\ 1 & 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \\ /\ 2 & \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ /\ 4 & \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{array}$$

a. Complete os espaços em branco.
b. Quais cálculos foram efetuados e qual é o resultado?

6. Observe o passo final.

O fazer como
ocorre: – A quantidade é $16\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$
um sétimo é _______
Total _______

Complete os espaços em branco e explique o que foi alcançado nesse passo.

7. Reproduza e resuma o método de solução e explique-o.

8. Escreva a solução para o problema, como apareceria no Papiro (mas com notação moderna), se o número experimental fosse 14 no lugar de 7.

9. O problema 25 do Papiro é “Uma quantidade cuja metade é adicionada a ela resulta em 16.”. Resolva-o como você faria atualmente e utilizando o método egípcio (como você acha que apareceria no Papiro, mas usando notação moderna).

4ª etapa

Lucíola, uma professora do quinto ano, queria avaliar se seus estudantes sabiam como encontrar o todo quando uma parte é dada.

Ela fez com seus estudantes um teste que incluía a seguinte questão.

“$\frac{3}{5}$de um número é 12. Qual é esse número? Explique sua solução.”

Veja o que Luís Filipe escreveu

$$12 \cdot 2 = 24$$
$$24 \div 6 = 4$$
$$24 - 4 = 20$$

A solução de Luís Filipe está correta?
Se você fosse o professor de Luís Filipe, qual seria a sua avaliação sobre o conhecimento de Luís Filipe?

APÊNDICE C – *Mathtask* Reflexões de Práticas Docentes Rodada 1

João, seu pai e a equação

João um menino de 12 anos que está no 6º ano do ensino fundamental foi apresentado ao Problema 25 do Papiro de Ahmes

Uma quantidade e sua metade somadas fazem 16. Qual a quantidade?

Passado algum tempo, ele disse que o problema não tinha solução. E afirmou.

João: Não dá resultado nenhum... não existe número que faz isso!

Mãe: Por que você acha que não existe número que faz isso?

João: Porque eu testei com todos os números de 1 até 11. E nenhum dá! 10 é menor e 11 passa de 16, dá 16,5.

Mas João não desistiu. Ele percebeu que é um número entre 10 e 11. Continuou fazendo contas, agora com números com vírgula.

Ele percebeu que com 10,66 o resultado dá 15,99. Decidiu testar com 10,661. Mas ao observar os cálculos entendeu que é 10,666...

Apesar de João ter usado apenas os números representados na forma decimal, ele já conhece as frações.

Seu pai, então, interveio, perguntando se ele conseguiria montar uma equação. Na imagem é possível ver o que João fez.

Vendo como ele escreveu, o pai perguntou o que significa metade. Então, João respondeu

João: haaammm um dividido por 2!

Percebeu, assim, que poderia ter escrito a equação de outra maneira

$$x + \frac{x}{2} = 16$$

Mesmo conseguindo escrever a equação, João achou que essa maneira é mais difícil de resolver.

Na próxima aula de Matemática, João contou para sua professora o que aconteceu. E perguntou.

João: Professora, o meu jeito de fazer está errado?
Não sei por que meu pai insiste com .... como é mesmo o nome? Quando tem o x?

Professora: Equação.

João: Isso. Equação... Tá errado fazer do meu jeito?

Questionamentos:

- **a.** Na sua opinião, o que está por trás da situação que ocorreu entre João e seu pai ao tentarem resolver o problema?
- **b.** Por que você acha que o pai de João insiste com o uso da equação?
- **c.** Se você fosse a professora, de que maneira você responderia ao questionamento do João?

APÊNDICE D – *Mathtask* Disparadora Rodada 2

Numa reunião de professores de matemática, o grupo discutia sobre o ensino do Teorema de Pitágoras. Paula e Diego levaram duas propostas para demonstrar o Teorema.

Proposta da Professora Paula.

Pré requisito: semelhança de triângulos

A partir de um triângulo ABC, retângulo em A, traçamos a altura AH e verificamos que os triângulos AHB e AHC são semelhantes ao triângulo ABC.

Da semelhança dos triângulos AHC e ABC temos $\frac{b}{a} = \frac{m}{b}$, ou seja, $b^2 = am$ e, da semelhança dos triângulos AHB e ABC, temos $\frac{c}{a} = \frac{n}{c}$, ou seja, $c^2 = an$. Somando essas duas relações membro a membro, encontramos:

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m + n) = a \cdot a = a^2$$

Proposta do Professor Diego

1ª parte. [1 tempo] Quebra-Cabeça dos Quadrados.

Turma organizada em grupos de quatro, com dois conjuntos de peças por grupo, de modo que duas duplas trabalhem independentemente e possam discutir entre si.

Orientações

1. Você recebeu um conjunto de 11 peças com 8 triângulos e 3 quadrados.
2. Observe as figuras triangulares. Elas são iguais?
3. Com quatro peças triangulares e o quadrado maior, monte uma figura com o formato de um quadrado. Reserve.
4. Com as peças restantes, ou seja, quatro peças triangulares e os outros dois quadrados, monte uma figura com o formato de um quadrado. Reserve.
5. Observe os dois quadrados montados. Eles são iguais? Discuta com seus colegas.
6. Qual conclusão você pode chegar sobre as três peças quadradas? Discuta com seus colegas.

7. Pegue um dos triângulos e os três quadrados. Justaponha os quadrados aos lados do triângulo.
8. Observando a figura formada, tente encontrar alguma relação levando em conta o comprimento dos lados do triângulo retângulo e os quadrados justapostos a seus lados. Não se esqueça da conclusão obtida no item 6.
9. Discuta com seus colegas e registre suas conclusões.

2ª parte. [1 tempo] Demonstração

Observe a figura a seguir.

Nela, encontram-se dois quadrados de mesma medida de lado, ou seja, de mesma área.

Seus lados estão divididos em segmentos de mesma medida, disposto de modo diferente.

Na figura da esquerda, adjacente a cada vértice há dois segmentos de medida diferente. Já no quadrado da direita, adjacente a 2 vértices há segmentos de mesma medida e nos outros dois há segmentos de medida diferente.

Assim, em cada um dos quadrados há quatro triângulos retângulos congruentes, porém dispostos de modo distinto.

Logo, o que sobra de cada quadrado deve ter a mesma área.

No quadrado da esquerda, sobra um quadrado cuja medida de seu lado corresponde à medida da hipotenusa do triângulo retângulo.

E no quadrado da direita, sobram dois quadrados, cujas medidas de seus lados correspondem às medidas dos catetos do triângulo retângulo.

Assim, considerando esse triângulo retângulo, o quadrado sobre a hipotenusa tem área igual à soma das áreas dos quadrados sobre os catetos.

Observação: Questionar a turma se o fato depende do quadrado e do modo como seu lado foi dividido.

Questionamentos

Considerando as propostas da Professora Paula e do Professor Diego, responda.

a. Qual você considera mais matematicamente rigorosa? Por quê?
b. Qual você usaria na Educação Básica? Por quê?
   Indique
   bi. a série e o momento que usaria – por exemplo, para introduzir, para concluir, como aplicação.
   bii. os tipos de problemas e exercícios que você proporia à turma. Se possível, anexe os enunciados.

APÊNDICE E – Proposição II.14 (Tarefa Histórica de Imersão Rodada 2)

Fonte: (EUCLIDES, 2009)

APÊNDICE F – Proposição I.47 (Tarefa Histórica de Imersão Rodada 2)

Fonte: (EUCLIDES, 2009)

APÊNDICE G – Tarefa de Medida de Área com o Tangram

1. Observe o quebra-cabeça Tangram. Quais figuras geométricas compõe as peças deste quebra-cabeça?
2. Monte a peça quadrada fazendo uso de outras peças do Tangram. Quais e quantas peças você usou?
3. Agora, monte a peça em forma de paralelogramo e, em seguida, a peça triangular média.
4. Agora, monte a peça triangular maior. Quais peças você utilizou? Você conseguiria montar essa peça usando somente triângulos menores? Em caso afirmativo, quantos precisaria?
5. Reflita junto com seus colegas quantas peças triangulares menores são necessárias para montar o Tangram inteiro, ou seja, as 7 peças que o compõe.
6. Agora, considere a peça triangular menor como a unidade de medida de área. A partir dessa medida determine a área das demais peças. (Organize os dados na tabela abaixo)
7. E se a unidade de medida de área for a peça quadrada? Determine a área das demais peças.
8. E se a unidade de medida de área for a peça triangular média? Determine a área das demais peças.
9. E se a unidade de medida de área for a peça triangular maior? Determine a área das demais peças.

	Peça do Tangram a ser medida					
Unidade de medida	Triângulo menor	Quadrado	Paralelogramo	Triângulo Médio	Triângulo Maior	Tangram
Triângulo menor						
Quadrado						
Triângulo Médio						
Triângulo Maior						

APÊNDICE H – *Mathtask* Reflexões de Práticas Docentes Rodada 2

Na aula de Geometria para a Educação Básica de um curso de Licenciatura em Matemática, o professor promoveu uma discussão sobre o que é área e o que é necessário para ter uma fórmula de área. Em seguida, dois professores da Educação Básica, com experiência no ensino de área, apresentaram as suas abordagens.

Professora Lúcia

Ela levou para a turma cópias do livro do 6º ano da coleção Teláris da editora Ática.

Explicou para a turma que, apesar de o material ser do 6º ano, ela costuma usar essa abordagem com as suas turmas do 8º ano para apresentar as fórmulas das áreas dos quadriláteros.

Ela começa com o retângulo, relembrando o que, em geral, vê-se em anos anteriores, a partir de uma malha retangular, cujo quadradinho é a unidade de medida de área. Em seguida, ela observa que o quadrado é um caso particular do retângulo.

Para obter a área do paralelogramo, ela transforma o paralelogramo em um retângulo.

Para obter a área do triângulo, ela dobra o triângulo e observa que obtém um paralelogramo com o dobro da área do triângulo.

Para obter a área do trapézio, ela também dobra a figura a fim de obter um paralelogramo.

E para o losango, ela observa que as diagonais determinam um retângulo com o dobro da área do losango.

Os exercícios apresentados por essa professora são exercícios para calcular áreas.

Professor Luiz Felipe

Mostrou para a turma que o trabalho com áreas que costuma desenvolver na escola em que trabalha, começa no 7º ano com atividades com o Tangram. Nessas atividades, trabalha-se a noção de equivalência de áreas, e medições das peças a partir de uma determinada peça (aproveitando para iniciar a noção de função a partir da representação algébrica). Os exercícios que são explorados são aqueles para desenhar figuras que tenham a área determinada pela quantidade de quadradinhos.

Já no 8º ano, ele apresenta a fórmula da área do retângulo a partir de um retângulo representado em uma malha quadrangular. Em seguida, determina, a partir da área do retângulo, as áreas do paralelogramo, do triângulo, do losango e do trapézio. E apresenta questões que não apenas usem as fórmulas, mas que continuem explorando as transformações de figuras.

Ele levou para a turma anotações sobre como costuma proceder.

Anexas encontram-se
1. as cópias das páginas do livro da Coleção Teláris, disponibilizada pela professora Lúcia.
2. as anotações do professor Luiz Felipe.

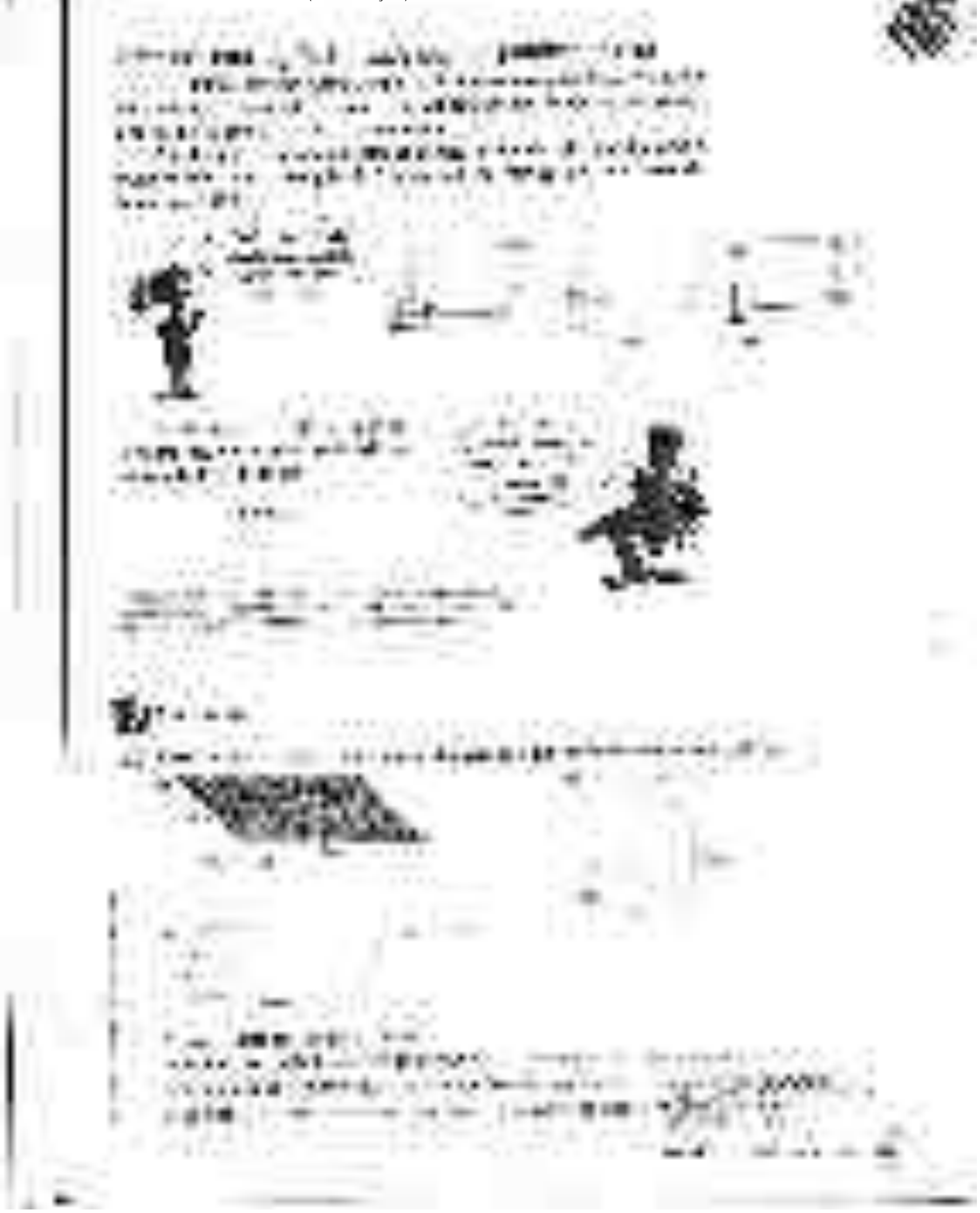
Questionamentos

a. Como professor, qual abordagem você está acostumado a usar para o ensino de áreas?
b. Avalie se as abordagens dos professores Lúcia e Luiz Felipe desenvolvem os aspectos conceituais relacionados à área (significado de medir, significado de fórmula).
c. Você identifica outros aspectos conceituais nas abordagens? Quais?
d. Alguma das abordagens apresentadas chamou a sua atenção? Por quê?
e. Você considera que a aula da professora Lúcia poderia ser enriquecida com o uso de materiais concretos? Em caso afirmativo, descreva que materiais concretos poderiam ser usados, como e em que pontos da aula.
f. Após as apresentações, o estudante Flávio questionou: “Luiz Felipe, me parece que a sua abordagem não foca nas fórmulas. Como seus alunos costumam se sair em concursos de acesso como, por exemplo, os pré-militares?” Se você fosse a professor Luiz Felipe, como responderia ao Flávio.

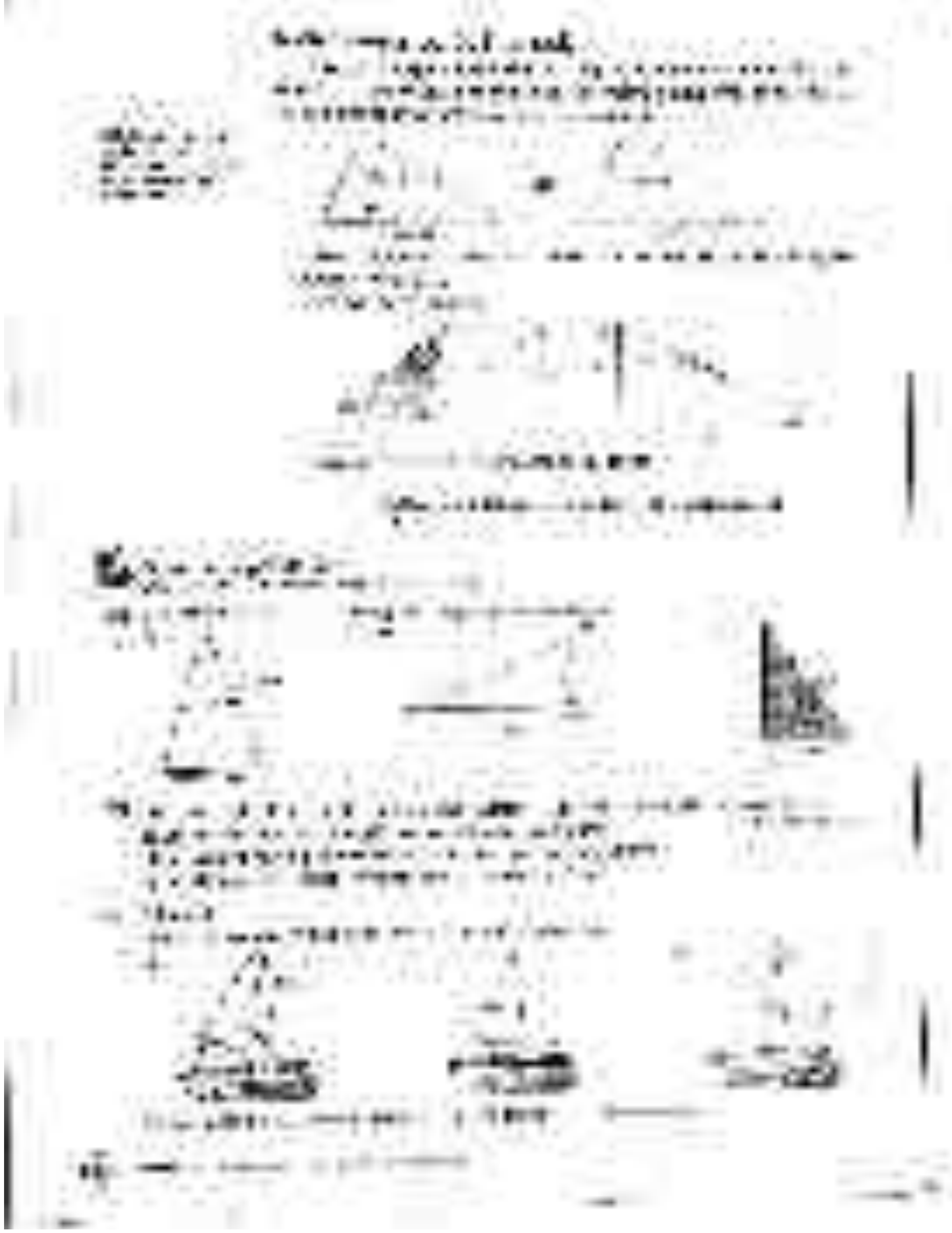
Anexo 1 - Professora Lúcia

Anexo 1 - Professora Lúcia (continuação)

Anexo 1 - Professora Lúcia (continuação)



Anexo 1 - Professora Lúcia (continuação)



Anexo 1 - Professora Lúcia (continuação)

Anexo 2
Proposta do professor Luiz Felipe

7º ano
Atividades com Tangram para trabalhar a noção de equivalência de áreas (apenas formando figuras).
Atividade com o Tangram para explorar as peças e medi-las usando uma das peças do próprio Tangram como unidade de medida.
Utilizar a atividade do Tangram para indicar uma medida em função da outra (representação algébrica e introdução do conceito de função).
Exercício numa malha quadrangular, desenhar figuras que tenham a área determinada pela quantidade de quadradinhos (por exemplo, desenhar retângulos diferentes com 12 unidades de área, desenhar triângulos diferentes com 4 unidades de área)

8º ano
- Para cada uma das figuras, transforme-a um em retângulo com área equivalente.

- Para cada uma das figuras, tomando a área do retângulo como unidade de medida, indique a sua área. Explique como obteve cada uma das áreas.

- Determinação da área do retângulo, a partir de um retângulo representado em uma malha quadrangular.
- Determinação das áreas do paralelogramo, do triângulo, do losango e do trapézio a partir da área do retângulo.
- Apresentação de exercícios que não apenas usem as fórmulas, mas que também continuem explorando as transformações de figuras.

Anexo 2

Atividades com o Tangram

1. Observe o quebra-cabeça Tangram. Quais figuras geométricas compõe as peças deste quebra-cabeça?
2. Monte a peça quadrada fazendo uso de outras peças do Tangram. Quais e quantas peças você usou?
3. Agora, monte a peça em forma de paralelogramo e, em seguida, a peça triangular média.
4. Agora, monte a peça triangular maior. Quais peças você utilizou? Você conseguiria montar essa peça usando somente triângulos menores? Em caso afirmativo, quantos precisaria?
5. Reflita junto com seus colegas quantas peças triangulares menores são necessárias para montar o Tangram inteiro, ou seja, as 7 peças que o compõe.
6. Agora, considere a peça triangular menor como a unidade de medida de área. A partir dessa medida determine a área das demais peças. (Organize os dados na tabela abaixo)
7. E se a unidade de medida de área for a peça quadrada? Determine a área das demais peças.
8. E se a unidade de medida de área for a peça triangular média? Determine a área das demais peças.
9. E se a unidade de medida de área for a peça triangular maior? Determine a área das demais peças.

	Peça do Tangram a ser medida					
Unidade de medida	Triângulo menor	Quadrado	Paralelogramo	Triângulo Médio	Triângulo Maior	Tangram
Triângulo menor						
Quadrado						
Triângulo Médio						
Triângulo Maior						

APÊNDICE I – *Mathtask* Disparadora da Rodada 3

Numa sala de aula da 1a série do Ensino Médio, o professor Victor começa o estudo de funções quadráticas. Para começar, escreve no quadro como indicado a seguir e prossegue a aula chamando atenção para os coeficientes e para como se determina imagens de valores específicos.

A turma, então, passa a resolver a lista de exercícios disponibilizada pelo professor.

Exercícios

1. Indique os coeficientes das funções a seguir.
   a. $f(x) = 5x^2 + x - 7$
   b. $f(x) = 4 - x^2$
   c. $f(x) = x^2 - x$
   d. $f(x) = -4 + 2x^2 - 9x$

2. Considere $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Determine.
   a. $f(1)$
   b. $f(2)$
   c. $f(0)$
   d. $f(-1)$
   e. x, tal que $f(x) = 4$
   f. x, tal que $f(x) = 2$
   g. x, tal que $f(x) = 0$

Aline e Bruna sentam-se juntas para resolver a lista. Ouve-se, então, o seguinte diálogo.
Bruna: Como que vamos resolver essa função?
Aline: Essa questão aqui é só para indicar os coeficientes.
Bruna: Ah tá! Mas e na outra? Não tem que que resolver?

O professor Victor ficou intrigado com a fala da Bruna para “resolver a função”. Ao encontrar com um colega após a aula comentou com ele.
Victor: Dou aula há anos e até hoje não consigo entender por que os estudantes cismam em falar que vão “resolver a função”.

Questionamentos

a. O que está por detrás da fala da Bruna e da observação do professor Victor?
b. Como professor, como você abordaria um questionamento de um estudante que quer “resolver uma função”?

APÊNDICE J – Tarefa Histórica de Imersão Rodada 3

Atividade histórica

1ª parte:

1. **Leia e procure entender a demonstração do Teorema I, Proposição I.**

Teorema I, Proposição I

O tempo no qual qualquer espaço é atravessado por um corpo inicialmente em repouso e uniformemente acelerado é igual ao tempo no qual o mesmo espaço é atravessado pelo mesmo corpo movendo-se com velocidade uniforme, cujo valor é a média entre a maior velocidade e a velocidade imediatamente anterior à aceleração ter começado.

Demonstração

Seja a reta AB o tempo no qual o espaço CD é atravessado por um corpo que inicia seu movimento no repouso em C e é uniformemente acelerado; seja a maior velocidade adquirida durante o intervalo AB representada pela reta EB, desenhada perpendicularmente à reta AB; desenhe a reta AE, depois todas as retas paralelas à BE a partir de pontos equidistantes sobre AB representarão valores cada vez maiores da velocidade que começou a crescer no instante A. Seja F o ponto que bissecta a reta EB; desenhe FG paralela à BA, e GA paralela à FB, formando o paralelogramo AGFB que é igual em área ao triângulo AEB, dado que o lado GF bissecta o lado AE no ponto I, de modo que, se as paralelas no triângulo AEB se estendem até GI, a soma das paralelas contidas no quadrilátero é igual à soma das contidas no triângulo AEB; para as do triângulo IEF são iguais às contidas no triângulo GIA, ao passo que as incluídas no trapézio AIFB são comuns. Dado que cada e todo instante de tempo no intervalo de tempo AB tem seu ponto correspondente na reta AB, da qual pontos paralelos desenhados e limitados pelo triângulo AEB representam o aumento de valores do aumento de velocidade, e dado que paralelas contidas no mesmo retângulo representam valores da velocidade em que não estao aumentando e sim constantes, parece, de certo modo, que o momento [*momenta*] assumido pelo movimento do corpo também deve representar, no caso do movimento acelerado, pelo aumento das paralelas do triângulo [209] AEB, e, no caso do movimento uniforme, pelas paralelas do retângulo GB. Para, o que o momenta pode faltar na primeira parte do movimento acelerado (a deficiência do momento sendo representado pelos paralelos do triângulo AGI) é feito pela momenta representada pelas paralelas do triângulo IEF.

Portanto, é claro que espaços iguais serão percorridos em tempos iguais por dois corpos, um dos quais, partindo do repouso, se move com uma aceleração uniforme, enquanto o momento do outro, movendo-se com velocidade uniforme, é metade do seu momento máximo sob movimento acelerado.

q.e.d.

2. **Você percebe alguma relação entre o conteúdo da fonte analisada e o conceito de função?**

2ª parte:

3. **Observe as definições do conceito de função apresentadas por diferentes matemáticos. Analise cada uma das delas, observando possíveis semelhanças e diferenças.**

3.
Uma quantidade variável compreende todos os números nela mesma, tanto positivos quanto negativos, inteiros e fracionários, os que são racionais, transcendentes e irracionais. Não devemos excluir nem mesmo o zero e os números imaginários.

4. Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes.

Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas funções de x.

Sejam a e b dois números fixos e x uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre a e b. Se a cada x corresponde um único y, finito, de maneira que, quando x se move continuamente no intervalo entre a e b, y = f(x) também varia progressivamente, então y é dita uma função contínua de x nesse intervalo. Para isso, não é obrigatório, em absoluto, nem que y dependa de x de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas.

APÊNDICE K – *Mathtask* Reflexões de Práticas Docentes Rodada 3

Na sala de matemática....

Pedro e Levi são dois professores que têm buscado rever os exemplos que levam para os seus estudantes. Faz algum tempo que vêm estudando novas formas de ensinar função.

Ronaldo, um professor recém-chegado à escola, encontrou uma folha sobre a mesa da sala de matemática e ficou pensativo sobre as situações descritas. Nela havia três exercícios e algumas anotações feitas à mão.

Ronaldo ficou pensando sobre as questões e curioso para saber se aqueles tipos de exercício poderiam ser trabalhados em sala.

Questionamentos

a. **Para cada uma das situações indique**
   i. **objetivos.**
   ii. **conteúdos que podem ser abordados.**
b. **Você usaria esses exercícios? Por quê? Em qual série?**
c. **Qual tipo de dificuldade os estudantes podem enfrentar, caso esses exercícios lhes sejam propostos? Como você abordaria essa(s) dificuldade(s)? (responda para cada situação)**

[1ª Situação]
Dentre os gráficos apresentados a seguir, identifique aquele que melhor descreve os dados apresentados em cada uma das tabelas seguintes.

Variação

I. Café esfriando

Tempo (minutos)	0	5	10	15	20	25	30
Temperatura (ºC)	90	79	70	62	55	49	44

II. Preparando a ceia

Peso (quilos)	3	4	5	6	7	8	9
Tempo (horas)	2,5		3,5	4	4,5	5	5,5

III. Depois de três canecas de cerveja...

Tempo (horas)	1	2	3	4	5	6	7
Álcool no sangue (mg/100ml)	90	75	60	45	30	15	0

IV. Como um bebê cresce antes do nascimento

Tempo de gestação (meses)	2	3	4	5	6	7	8	9
Comprimento do bebê (cm)	4	9	16	24	30	34	38	42

[2ª Situação]

Observe as figuras a seguir.

a. O que os gráficos da primeira linha têm em comum? E as da segunda linha?

b. Agora observe-os por coluna. Você consegue identificar algo em comum?

Crescimento – crescimento proporcional; usar o GeoGebra?!?!

[3ª Situação]

Como construir uma caixa de volume máximo?

Vamos utilizar uma folha de cartolina quadrada de lado 40cm para construir uma caixa sem tampa. Para isso, cortamos quadrados nos quatro cantos da cartolina e dobramos as partes retangulares restantes, para formar os lados da caixa. O objetivo é obter a caixa com o maior volume possível.

Prática – levar vários quadrados de cartolina e tesouras

1. Discuta com seus colegas de grupo a melhor estratégia para se obter a caixa de volume máximo. Em seguida construa a caixa e calcule o seu volume.
2. Faça uma comparação com os volumes das caixas construídas pelos demais grupos. Organize os dados em uma tabela que relacione a medida do lado x do quadrado recortado com o volume V(x) da caixa obtida.

x								
V(x)								

3. Encontre a expressão que fornece o volume V(x) da caixa em função do lado x do quadrado recortado.
4. No contexto do problema, em que intervalo real a variável independente x pode ser considerada?
5. Baseado nos itens anteriores, faça uma conjectura sobre qual o valor de x fornece o volume máximo.
6. Utilize um software ou uma calculadora gráfica para visualizar a representação gráfica da função V(x). A partir dessa representação gráfica determine, aproximadamente, o valor de x que fornece o volume máximo.

APÊNDICE L – *Mathtask* Invenção ou Descoberta?

Cassiano e Raphael são dois estudantes de Licenciatura em Matemática.

Entretidos com o ICM que aconteceu no Rio de Janeiro, conversam sobre o que viram no maior evento de matemática do mundo.

Cassiano: Você viu? A *Matemaníaca* esteve no ICM, ela gravou um vídeo com alguns vencedores da medalha Fields. Um dos entrevistados disse que foi a melhor pergunta feita para ele!
Raphael: É... eu sempre fico pensado se a Matemática foi inventada ou descoberta...
Cassiano: O que você está falando?!?!
Raphael: Ué... foi a pergunta que ela fez para eles!
Cassiano: Não, a melhor pergunta foi se o zero é ou não natural!

Questionamentos

a. **Na sua opinião, a matemática é inventada ou descoberta? Justifique.**
b. **No vídeo, os argumentos usados pelos dois entrevistados são**

Alessio Figalli: Essa é uma questão complicada. Todo mundo tem a sua própria opinião. A Matemática nasceu para modelar o mundo. Nasceu para entender tanto se a Terra é redonda ou não e para calcular o diâmetro da Terra e saber o seu tamanho. Os números de uma forma geral e a matemática posteriormente. Sempre com esse ideal de transformar a natureza e a física em números, transformando nosso mundo em algo que pode ser descrito em números. Então... Para mim, acho que foi inventada por humanos para descrever o mundo.

Akshay Venkates: Eu acho que isso depende muito de qual parte da matemática. Mas nas partes da matemática em que trabalhei, eu certamente penso que foi descoberta.

i. **Qual a sua opinião sobre a resposta de cada um dos laureados com a medalha?**
ii. **Você já tinha considerado esses argumentos? Ou melhor, você já tinha se feito essa pergunta?**

c. **Como professor, você acha que é importante considerar esse questionamento? Se não, por quê? Se sim, como?**

Link para o vídeo do YouTube com as entrevistas https://www.youtube.com/watch?v=EjpMyyvaBlo

APÊNDICE M – Planejamento Encontro 1

1ª aula – 17 de agosto

Objetivo: apresentação da proposta

	duração	
1ª parte	10/15 min	Boas vindas e apresentação breve da proposta da disciplina. Solicitando que seja gravado – com o consentimento, começa-se a gravar.
2ª parte	40/50 min	O papel do professor experiente na formação de professores
3ª parte	15/25 min	A História da Matemática e a Educação Matemática
4ª parte	20/30 min	Apresentação da proposta Assinatura dos termos TCLE
	30/40 min	Tarefa Disparadora Socialização das soluções Classificação
	20/30 min	MathTASK – com um contexto que já se tenha aprendido álgebra

APÊNDICE N – Apresentação Encontro 1

ProfMat UNIRIO

"Tópicos em História da Matemática"

Aline Bernardes

Bruna Moustapha Corrêa

Victor Giraldo

O professor experiente e o seu papel na formação de professores

História da Matemática

Educação Matemática

História da Matemática

A nossa proposta

História da Matemática

Estrutura do curso

Avaliação

Registre uma solução para a seguinte situação

Marina gosta de criar problemas para seu pai inspirado no que aprende na escola. Numa certa noite ela disse.

Pai, descobre quantos reais eu tenho! A dica é: se eu adicionar um quarto do que tenho ao que eu tenho, ficarei com R$15,00.

Socialização das Soluções

APÊNDICE O – Planejamento Encontro 2

2ª aula – 24 de agosto

Objetivo: discussão histórica

Organização da turma

	duração	**responsável/ observação**	**descrição das atividades**	↑
1ª parte	10 min	Silvio e Guilherme	Relato do encontro anterior	TM
Determinação da dupla responsável pelo relato desta aual & Separação da turma em 3 grupos				
2ª parte	5min		Semelhanças e diferenças das soluções do problema da Marina	g
	7min			TM
	15 min	Bruna	Questionamentos da MathTASK	g
	20 min (g5+g5+g 5+TM5)		Apresentações dos 3 grupinhos	TM
3ª parte	5 min	Bruna	Como vocês costumam lidar com algo que nunca viram ou que não esperavam encontrar??	TM
	2 min	Estranheza via fonte original	Problema 25 e sua solução em hierático	TM
			Problema 25 e sua solução em hieróglifo	TM
	7 min		**Excerto Histórico**	
	0,5 min	Contextualização Aline	O Papiro de Ahmes	
	3min		E a história... O Antigo Egito Organização da sociedade O papel dos escribas	
	3min		O Papiro de Ahmes e os problemas de Aha	
	0,2 min		O problema 25 como um exemplo de um problema de Aha	
	A Matemática no Antigo Egito			
	20 min		1ª etapa	
	15min			TM
	15 min	Aline	O sistema de numeração egípcio	TM
		Bruna	2ª etapa De acordo com a experiência adquirida na etapa anterior, o que você se perguntaria para tentar entender esse novo texto?	
	10 min		2ª etapa	g
	10min			TM
	15 min	Aline	Operações na Matemática no Antigo Egito Adição e Multiplicação	TM
	3 min	Bruna	3ª etapa Crie questões cujas respostas ajudariam você a entender o processo de solução de uma equação linear. [Compartilhe com os colegas]	TM
	12 min		3ª etapa	g
	15 min	Bruna		TM
Observação			Parar tendo discutido o item 6!	

Tarefa de casa:

1. **O que é a solução dos egípcios?**
2. **Por que a solução apresentada pelos egípcios dá certo?**
3. **leitura do capítulo**

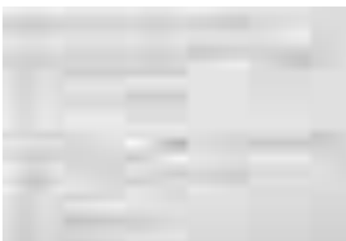
sugestão vídeo disponível no site do ProfMat – "A matemática no antigo Egito"

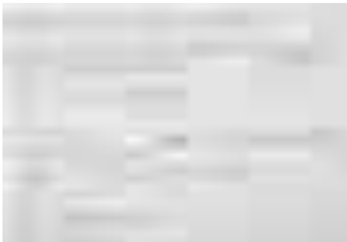
APÊNDICE P – Apresentação Encontro 2

Aula 2

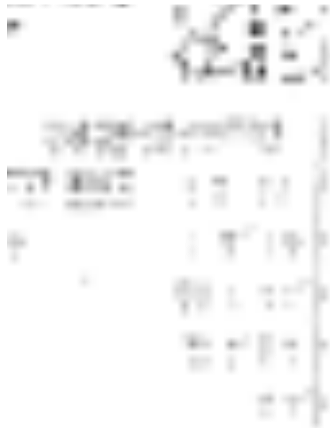
ProfMat UNIRIO
“Tópicos em História da Matemática”

Aline Bernardes
Bruna Moustapha Corrêa





Como vocês costumam lidar com algo que nunca viram ou que não esperavam encontrar??

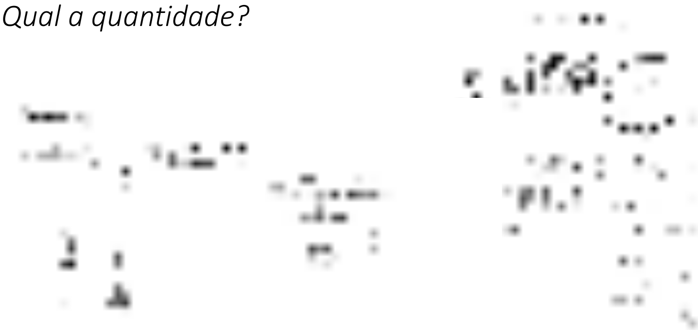


O Papiro de Ahmes

E a história...

Problema 25

Uma quantidade e sua metade somadas fazem 16.
Qual a quantidade?



A matemática no Antigo Egito

O sistema de numeração egípcio

1. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]
4. [illegible]
5. [illegible]
6. [illegible]

Operações na Matemática do Antigo Egito

Adição e Multiplicação

APÊNDICE Q – Planejamento Encontro 3

3ª aula – 31 de agosto

Objetivo: Sistematização da parte histórica e reflexão para a sala de aula.

Organização da turma

	duração	responsável/ observação	descrição das atividades		↑
1ª parte	10 min	Michel e Vinicius	Relato do encontro anterior		TM
Determinação da dupla responsável pelo relato desta aula & Separação da turma em 3 grupos					
2ª parte	40 min	Aline	O sistema de numeração egípcio Representações de frações e como as frações eram utilizadas no Antigo Egito Operações elementares no Antigo Egito		TM
3ª parte	7min		Observar o excerto e tentar entender		g
	7min	Bruna			TM
	Observação: No excerto, as frações estão representadas com um misto de notação moderna e egípcia.				
		Bruna	Retomando a 3ª etapa da atividade do texto de Arcavi&Isoda	1º passo: o número experimental; determinação do seu sétimo; qual foi o resultado?	
				2º passo: É importante chamar atenção que, agora, a soma procurada não é na coluna da esquerda. Por isso, no próximo passo se utiliza a soma da coluna da esquerda. Esse passo está buscando o valor que multiplicado por 8 dá 19.	
				3º passo: Multiplica-se o valor obtido no passo anterior (lembrando que o passo anterior corresponde a uma divisão) pelo número experimental.	
				4º passo: a verificação	
			Escrever e resumir o método de solução em termos modernos.		g
		Bruna	**Em termos modernos, como você reproduziria esse método?**		TM
			E se o número experimental fosse 14???		g
		Bruna			TM
			Retomar o método apresentado no papiro		
			E o problema 25?		g
			Pensando numa solução		TM
	Chamar atenção para o fato de os egípcios utilizarem a fração 2/3!!!				
			Uma tradução em linguagem moderna para a solução Relacionar com a solução de Fábio – revista		
		Registrar por escrito e entregar	Método da Falsa Posição Problema de *aha* corresponde a uma situação em que se adicionava a uma quantidade a ser determinada (*aha*) uma fração ou várias frações de si. O Método da Falsa Posição é usado nos problemas de aha em que apenas uma fração da quantidade desconhecida é adicionada.		g
		Bruna	1. Em termos modernos, os problemas de *aha* estudados nos encontros correspondem a equações de que tipo? 2. Apresente uma justificativa para o método da falsa posição. 3. No método da falsa posição, o resultado depende do número experimental (“chute”)? 4. O método da falsa posição resolve todo problema de *aha*? Por quê? 5. Por que você acha que tal método foi inventado?		TM
		Aline/Bruna	Por que é anacrônico dizer que os egípcios resolviam equações?		
		Bruna	O método da falsa posição e a noção de proporcionalidade		
Fechamento & Ponte para a reflexão para a sala de aula Agora, vamos deixar a história um pouquinho de lado e vamos passar a refletir como esse conhecimento que construímos ao longo dessas duas últimas semanas pode nos ajudar a refletir sobre a sala de aula. Para isso, eu os convido a lerem a seguinte tarefa.					

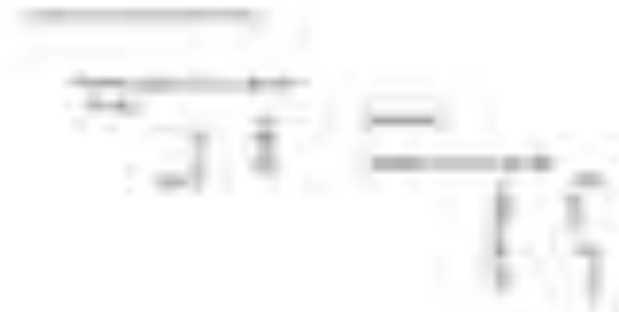
	10min		MathTASK João e a falsa posição	g
	7min	Bruna		TM
		Bruna	Qual a diferença entre a solução pelo método da falsa posição e uma solução algébrica e a solução do João?	
		Bruna	E se João estivesse no Ensino Médio? Como a professora o convenceria de que a equação é importante?	
		Bruna	Por que a equação é tão importante?	
		Bruna	Considerando a primeira rodada 13. Na atividade *A Matemática no Antigo Egito*, por que você acha que é pedido para elaborar perguntas com vistas a entender os excertos apresentados? 14. De que maneira você relaciona os diversos momentos? 15. Que conteúdos foram trabalhados? 16. Você acha que seria possível trabalhar um problema como os que trabalhamos nos encontros com seus estudantes? Qual? Por quê?	
		Bruna/Aline	Para casa	
		Bruna/Aline	Decisão sobre a parte em aberto	

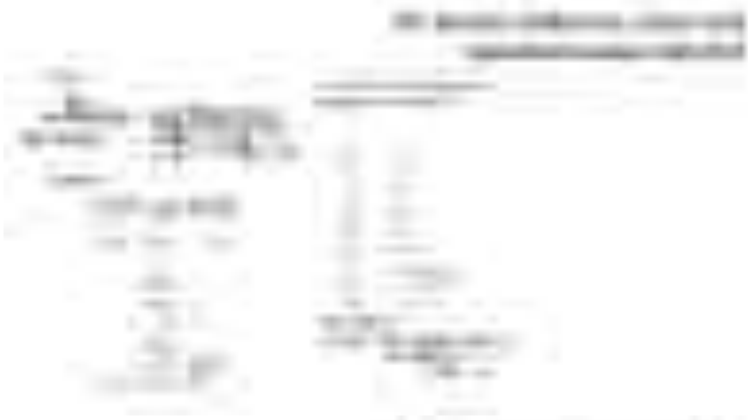
APÊNDICE R – Apresentação Encontro 3

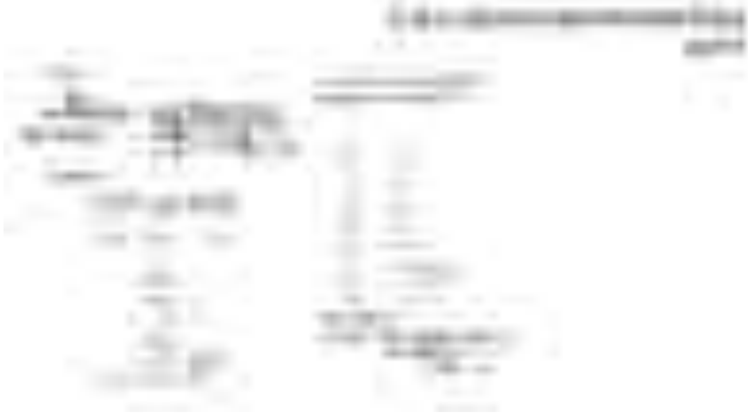
Aula 3

ProfMat UNIRIO
"Tópicos em História da Matemática"

Aline Bernardes
Bruna Moustapha Corrêa





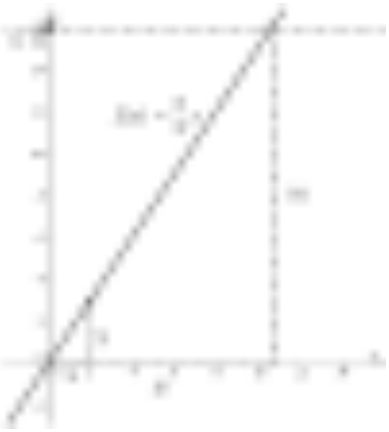


como você faria atualmente

e

Por que é anacrônico dizer que os egípcios resolviam equações?

O método da Falsa Posição e a noção de proporcionalidade



$$x + \frac{x}{2} = 16$$
$$\frac{3x}{2} = 16$$
$$x = 16 \times \frac{2}{3} = \frac{32}{3}$$

Se para 2 o resultado é 3, então, como procuramos por 16 e como $3 \times \frac{16}{3} = 16$, então, $2 \times \frac{16}{3}$, resolve o problema.

$$\mathbf{1 + 0,5 = 1,5}$$
$$\mathbf{2 + 1 = 3}$$
$$\mathbf{3 + 1,5 = 4,5}$$
$$\mathbf{4 + 2 = 65 + 2,5 = 7,5}$$
...
$$\mathbf{10 + 5 = 15}$$
$$\mathbf{11 + 5,5 = 16,5}$$
Então, a solução está ente 10 e 11.
$$\mathbf{10,5 + 5,75 = 15,75}$$
$$\mathbf{10,6 + 5,3 = 15,9}$$
$$\mathbf{10,65 + 5,30205 = 15,95205}$$
$$\mathbf{10,66 + 5,33 = 15,99}$$
$$\mathbf{10,661 + 5,030305 = 15,691305}$$
$$\mathbf{10,666 + 5,333 = 15,999}$$
Então, o resultado é 10,6666...

Qual a diferença entre elas?

Você considera válidos os três tipos de soluções?
O que você faria se alguma delas aparecesse em uma avaliação?


Estrutura do curso
Precisamos decidir!
1ª rodada
2ª rodada
Em aberto
Avaliação do processo
Em aberto

APÊNDICE S – Planejamento Encontro 4

4ª aula – 14 de setembro
Objetivo: identificar como áreas e o Teorema de Pitágoras são trabalhados na Educação Básica e que tipo de demonstração é feita em sala.

	duração	responsável/ observação	descrição das atividades	
	15/20	Leticia e Ulisses	Relato do encontro anterior	TM
	40/50		Construção de mapas sobre o Teorema de Pitágoras e áreas de figuras planasz Turma dividida em dois grupos Confecção de cartaz	g
	25/35	Bruna	Apresentação das ideias	TM
	5/10 5/10 5/10		Mathtask Em grupos, discutem e registram individualmente	G
	15/20	Bruna	Socialização	TM
	5/10	Aline e Bruna	Feedback dos diários	TM

Tarefa de casa: indicar uma demonstração diferente e como a faria em sala

APÊNDICE T – Planejamento Encontro 5

5ª aula – 21 de setembro
Objetivo: imersão numa demonstração by Euclides: a estranheza.

	duração	responsável/ observação	descrição das atividades	
			Recolher as tarefas de casa. Guardaremos esse registro para a reflexão para a sala de aula.	
	15/20	Michel e Cleber	Relato do encontro anterior	TM
	5/10	Bruna	Registrar por escrito 1. Você já estudou Geometria? a. O quê? b. Como? 2. Você já leu os Elementos de Euclides?	TM
	10		Proposição II.14 [o excerto] Entrega da proposição e de sua demonstração tal como aparece em Bicudo	ind
	25		Destacar • "passos fundamentais" • o que está por trás da demonstração • dúvidas	g
	20	Convidar um prof	Elencar no quadro tudo que destacado nos pequenos grupos. Fotografar o quadro	TM
	5/10		Você reparou se o teorema de Pitágoras foi usado nessa demonstração. Registre por escrito como ele foi usado.	ind
	25	Bruna e Aline	Leitura da demonstração destacando o que é cada passo.	TM
	15/20	Aline	"Apresentação" dos Elementos de Euclides Axiomático dedutivo Primeiros princípios Problemas e teoremas Régua e compasso etc	TM

Tarefa de casa: Leituras, vídeos e estudo da proposição i.47 (teorema de Pitágoras)
Zahar: Capítulo 3, páginas 160 – 185
ProfMat – Capítulo 2, seções 2.1 e 2.3
Irineu Bicudo "Geometria Grega", em 4 partes
https://www.youtube.com/watch?v=O3ap76TFG9k&list=PLvfVMqgQfJ_pJA_26-xXenTxch809Y6Cp
Pitombeira "Os Elementos de Euclides: equivalência de áreas"
https://www.youtube.com/watch?v=iNnhB9v91Fw
Os Elementos tradução de Irineu Bicudo – introdução e livro I
https://books.google.com.br/books?id=um94A66MDxkC&pg=PA97&hl=pt-BR&source=gbs_toc_r&cad=3#v=onepage&q&f=false

APÊNDICE U – Apresentação Encontro 5

Aula 5

ProfMat UNIRIO
“Tópicos em História da Matemática”

Aline Bernardes
Bruna Moustapha Corrêa

Os Elementos de Euclides

Os Elementos de Euclides

Avaliação

Atividades semanais

Atividades globais

Portfólio

Para casa

Leituras:

Vídeos

Estudar: Proposição I.47

APÊNDICE V – Planejamento Encontro 6

6ª aula – 28 de setembro

Objetivo: o tratamento de áreas nos Elementos e o uso do teorema de Pitágoras para somar áreas

	duração	responsável/ observação	descrição das atividades	
	10/15	Gladson e Apolo	Relato do encontro anterior	TM
1ª parte	25/30	Aline	Discussão a partir das leituras e dos vídeos	TM
	20	Aline	Os Elementos método axiomático dedutivo Exemplo de problema I.10 e teorema I.41	TM
	15	Aline	Os Elementos – livros I e II Quadratura Equivalência de áreas Aplicação de áreas Operações com áreas Construção com régua e compasso	TM
2ª parte	10	Bruna	O teorema de Pitágoras Alguma dúvida sobre a demonstração	TM
	5/10	Bruna	O teorema de Pitágoras Observação do Applet	TM
	10	Bruna Aline	O Teorema de Pitágoras Desvelando a demonstração Chamar atenção de que o teorema é usado para somar áreas	TM
3ª parte	1	Bruna	Como o teorema é usado: a proposição II.14	TM
	5/10	Aline	Desvelando a proposição II.14 O primeiro passo: a proposição I.45	TM
	10/15	Bruna	Desvelando a proposição II.14	TM

Tarefa de casa: **Discutimos como Euclides abordou o tratamento de áreas nos livros I e II dos Elementos e também sobre o papel do Teorema de Pitágoras em tal tratamento.**
Reflita sobre o tratamento de áreas dado por Euclides nos primeiros livros dos Elementos e sobre o tratamento de áreas feito atualmente na sala de aula. Faça o mesmo para o Teorema de Pitágoras.
Registre por escrito suas impressões.

APÊNDICE X – Apresentação Encontro 6

Aula 6

ProfMat UNIRIO
“Tópicos em História da Matemática”

Aline Bernardes
Bruna Moustapha Corrêa

Os Elementos de Euclides

1ª parte

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Os Elementos de Euclides

1ª parte

Estrutura dos livros:

- Definições.
- Postulados.
- Noções comuns.
- Teoremas e problemas (proposições).

Método axiomático dedutivo

1ª parte

Como Euclides fazia a quadratura?

O Teorema de Pitágoras 2ª parte

APÊNDICE W – Planejamento Encontro 7

7ª aula – 19 de outubro
Objetivo: problematizar o ensino de áreas e do teorema de Pitágoras

	duração	responsável/ observação	descrição das atividades	
	10/15		Relato do encontro anterior	TM
			Tarefa de casa Apresentação do que foi pensado Entrega por escrito	TM
		Aline	**Resgate histórico** O tratamento de áreas nos *Elementos* de Euclides e o papel do Teorema de Pitágoras • áreas sem atribuir números às medidas • equivalência de áreas • operações com áreas • aplicação de áreas	TM
			Registro por escrito RECOLHER O que é área? Como você costuma ensinar áreas Para você qual o papel das fórmulas no ensino de áreas? Na sua opinião, qual a melhor maneira de apresentar as fórmulas de áreas na Educação Básica?	i
			Socializando... O que é área?	TM
		Bruna	Atividade com o Tangram	g
		Bruna e Aline	**Socializando** Atividade com o Tangram O que é trabalhado nos itens 2 a5? E nos 6 a 9?	TM
		Bruna e Aline	**Sistematizando**: O que é área? Área é uma grandeza que pode ser medida Comparar Aspectos: • Equivalência de áreas • Medida com uma unidade	TM
			O que é uma fórmula de área?	TM
		Bruna	A multiplicação e seus significados interior e exterior	TM
		Bruna	Fórmula de área	TM
		Bruna e Aline	MathTASK: O ensino de áreas: duas propostas de abordagem — Leitura e explicação das propostas	&TM
			Registro por escrito	i
			Socialização das respostas	TN
		Aline e Bruna	PROBLEMAS de uma abordagem de área restritiva às fórmulas	RM
		Bruna	Voltando ao Teorema de Pitágoras O que foi apresentado nos trabalhos *versus* o que é feito nos Elementos	TM
		Aline	Qual o uso do Teorema de Pitágoras nos Elementos?	TM
		Bruna	Áreas: **O que é e o que não é possível fazer na Educação Básica?**	TM
		Bruna	Voltando aos MAPAS: modificações??!	g
		Bruna	**Socializando**... Voltando aos MAPAS: modificações??!	TM
		Aline	Trabalhos	TM

APÊNDICE Y – Apresentação Encontro 7

Aula 7

ProfMat UNIRIO
"Tópicos em História da Matemática"

Aline Bernardes
Bruna Moustapha Corrêa

APÊNDICE Z – Planejamento Encontro 8

8ª aula – 09 de novembro
Objetivo: problematizar o ensino de áreas e do teorema de Pitágoras e disparar a discussão sobre funções

<table>
<tr><th></th><th>duração</th><th>responsável/ observação</th><th colspan="2">descrição das atividades</th><th></th></tr>
<tr><td></td><td>10/15</td><td>Leticia</td><td colspan="2">Relato do encontro anterior</td><td>TM</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Bruna e Aline</td><td colspan="2">Retomando:
1. O que é área?
Área é uma grandeza que pode ser medida
Comparar
Aspectos:
Equivalência de áreas
Medida com uma unidade
2. O que é uma fórmula de área?
3. A multiplicação e seus significados interior e exterior
4. Fórmula de área</td><td>TM</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">Bruna e Aline</td><td rowspan="3">MathTASK: O ensino de áreas: duas propostas de abordagem</td><td>Leitura e explicação das propostas</td><td>g&TM</td></tr>
<tr><td>Recolha dos registros por escrito</td><td>i</td></tr>
<tr><td>Socialização das respostas</td><td>TN</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Aline e Bruna</td><td colspan="2">PROBLEMAS de uma abordagem de área restritiva às fórmulas</td><td>RM</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Bruna</td><td colspan="2">Voltando ao Teorema de Pitágoras
O que foi apresentado nos trabalhos versus o que é feito nos Elementos</td><td>TM</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Aline</td><td colspan="2">Qual o uso do Teorema de Pitágoras nos Elementos?</td><td>TM</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Bruna</td><td colspan="2">Áreas: O que é e o que não é possível fazer na Educação Básica?</td><td>TM</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Bruna</td><td colspan="2">Voltando aos MAPAS: modificações??!</td><td>g</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Bruna</td><td colspan="2">Socializando...
Voltando aos MAPAS: modificações??!</td><td>TM</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Aline</td><td colspan="2">Trabalhos???</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">Iniciando a próxima rodada</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Bruna e Aline</td><td colspan="2">Registre três exemplos de função

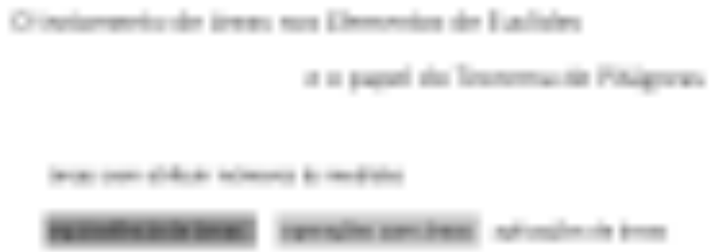
Tarefa de casa: Peça a seus estudantes que apresentem três exemplos de função</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">Bruna e Aline</td><td rowspan="3">MathTASK: “resolver a função”</td><td>Leitura</td><td>g&TM</td></tr>
<tr><td>Registros por escrito</td><td>i</td></tr>
<tr><td>Socialização das respostas</td><td>TN</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
</table>

APÊNDICE AA – Apresentação Encontro 8

Aula 8

ProfMat UNIRIO
“Tópicos em História da Matemática”

Aline Bernardes
Bruna Moustapha Corrêa



A multiplicação

O que é uma fórmula de área?

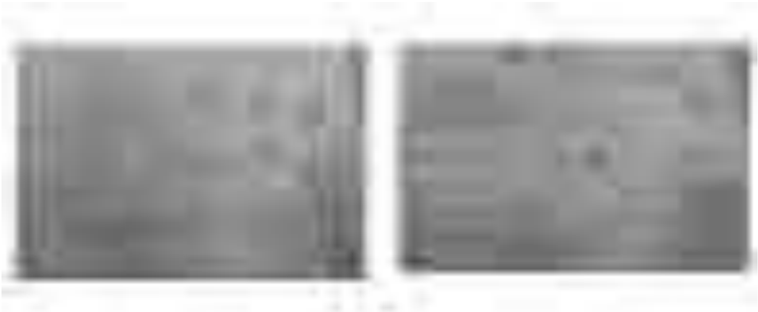
O ensino de área: duas propostas de abordagem

discutindo sobre...

O ensino de área: duas propostas de abordagem

Qual é uso do Teorema de Pitágoras nos Elementos?

Á.R.E.A.S.



Registre três exemplos de função

APÊNDICE AB – Planejamento Encontro 9

9ª aula – 16 de novembro

Objetivo: imersão histórica em 4 fontes selecionadas – Galileu, Euler, Dirichlet e Bourbaki. Discussão sobre as propostas de abordagem.

	duração	responsável/ observação	descrição das atividades			
	10/15	Naylor	Relato do encontro anterior			TM
	10/15	Bruna	**Registro por escrito** 1. O que você espera que seus estudantes saibam de função? 2. O que é função?			i
	10/15		**Socialização** o que é função e o que espero que meus estudantes saibam **Quando eu penso em função, eu penso em...**			TM
	2	Bruna	Relembrar Tarefa de casa Peça a seus estudantes que apresentem três exemplos de função e registrar o que é função			
	10/15	Bruna	MathTASK: "resolver a função"	Recolher os registros por escrito		i
				Socialização das respostas		TM
		Bruna	Se vocês fossem estudar a história de função, como fariam? O que selecionariam?			
			Imersão histórica	**Causando estranhamento** Entrega dos excertos para os grupos.		g
	15	Aline e Bruna		**Atividade histórica** **1ª parte:** **1. Leia e procure entender a demonstração do Teorema I, Proposição I.** **2. Você percebe alguma relação entre o conteúdo da fonte analisada e o conceito de função?**	G a l i l e u	g
	10			**2ª parte:** **3. Observe as quatro definições do conceito de função apresentadas por três diferentes matemáticos.** **Analise cada uma das delas, observando possíveis semelhanças e diferenças.**	E u l e r	
	10				D i r i c h l e t	
	5				B o u r b a k i	
	10		**Socialização** O que cada passagem nos diz? Por que será que selecionamos essas passagens?			
	10	Aline e Bruna	**Falando sobre cada personagem**	G a l i l e u		
	10			E u l e r		
	10			D i r i c h l e t		
	10			B o u r b a k i		
	20	Aline e Bruna	**Socialização** Você já parou para pensar que os objetos matemáticos nem sempre foram definidos e utilizados do mesmo jeito que fazemos hoje? Você já pensou em como um conceito se desenvolve até a definição atual?			
			Tarefa de casa: Trazer uma definição de função indicando de onde retirou e por que a escolheu. Pensar em qual fonte histórica seria importante Leituras Vídeos			
	40		Tempo para os grupos discutirem sobre suas propostas de abordagem			TM

APÊNDICE AC – Apresentação Encontro 9

Aula 9

ProfMat UNIRIO
“Tópicos em História da Matemática”

Aline Bernardes
Bruna Moustapha Corrêa

Você acredita que as noções matemáticas mudam ao longo do tempo?

Você saberia citar um exemplo?

APÊNDICE AD – Planejamento Encontro 10

10ª aula – 23 de novembro
Objetivo: *overlook* histórico

<table>
<tr><th></th><th>duração</th><th>responsável/ observação</th><th colspan="2">descrição das atividades</th><th></th></tr>
<tr><td></td><td>10/15</td><td></td><td colspan="2">Relato do encontro anterior</td><td>TM</td></tr>
<tr><td></td><td>30</td><td></td><td colspan="2">Discutindo sobre os trabalhos</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>10</td><td>Gladson e Cleber</td><td colspan="2">Capítulo 5: “Galileu e a nova ciência”</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>10</td><td>Leticia e Luciane</td><td colspan="2">Capítulo 6: “Ideias que podem ser associadas à noção de função”</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>10</td><td>Michel e Silvio</td><td colspan="2">Capítulo 6: “Das séries infinitas ao estudo das funções por Euler”</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>10</td><td>Ulisses e Vinicius</td><td colspan="2">Capítulo 7: “A definição de função de Dirichlet”</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>10</td><td>Naylor e Guilherme</td><td colspan="2">Capítulo 7: “A abordagem dos conjuntos e a definição atual de função”</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td rowspan="3">Aline</td><td>Galileu</td><td rowspan="3">Contexto
• Sócio cultural
• Que tipo de problemas estava imerso
Por que pensou nesse tipo de problema

Aprofundamento da passagem destacando a sua importância para o entendimento do conceito de função</td><td rowspan="3">TM</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>Euler</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>Dirichlet</td></tr>
<tr><td></td><td>45</td><td>Bruna e Aline</td><td colspan="2">Apresentação das definições de função trazidas, destacando de onde retirou e por que escolheu essa</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>20</td><td>Aline</td><td colspan="2">Visão geral do desenvolvimento do conceito de função
Explicitação do recorte que foi feito
Apresentar uma linha do tempo com outros personagens que tivemos que omitir por questão de tempo</td><td>TM</td></tr>
</table>

APÊNDICE AE – Apresentação Encontro 10

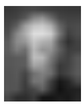
Aula 10

ProfMat UNIRIO
“Tópicos em História da Matemática”

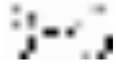
Aline Bernardes
Bruna Moustapha Corrêa

"O problema da corda"

D'Alembert



- Uma corda elástica com extremidades fixas 0 e "l" é deformada até uma posição inicial e, em seguida, liberada.
- A corda começará a vibrar e o problema que se coloca é determinar a função que descreve a forma da corda em um instante "t" qualquer.
- D'Alembert resolveu o problema por uma equação diferencial parcial:



- Começou uma discussão sobre como devia ser a forma inicial da corda:

  u(x,0) = f(x), f(x) = ?

Comentando sobre o passeio histórico acerca da definição de função

A definição de função de Dirichlet

Comentando sobre o passeio histórico acerca da definição de função

A abordagem dos conjuntos e a definição atual de função

APÊNDICE AF – Planejamento Encontro 11

11ª aula – 30 de novembro
Objetivo: fechamento do *overlook* histórico e reflexões para a sala de aula

<table>
<tr><td></td><td>duração</td><td>responsável/
observação</td><td colspan="2">descrição das atividades</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>10/15</td><td>Ulisses</td><td colspan="2">Relato do encontro anterior</td><td>TM</td></tr>
<tr><td></td><td>15</td><td>Naylor e Guilherme</td><td colspan="2">Capítulo 7: “A abordagem dos conjuntos e a definição atual de função”</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="3">Aline</td><td>G a l i l e u</td><td rowspan="3">Contexto
• Sócio cultural
• Que tipo de problemas estava imerso
Por que pensou nesse tipo de problema

Aprofundamento da passagem destacando a sua importância para o entendimento do conceito de função</td><td rowspan="3">TM</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>E u l e r</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>D i r i c h l e t</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>Aline</td><td colspan="2">Visão geral do desenvolvimento do conceito de função
Explicitação do recorte que foi feito
Apresentar uma linha do tempo com outros personagens que tivemos que omitir por questão de tempo</td><td>TM</td></tr>
<tr><td></td><td>10</td><td rowspan="3">Bruna</td><td rowspan="3">Mathtask: Pedro, Levi e Ronaldo</td><td>Ler e entender as situações</td><td>g</td></tr>
<tr><td></td><td>5</td><td>Registro das respostas</td><td>g</td></tr>
<tr><td></td><td>10</td><td>Compartilhamento de ideias</td><td>TM</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Bruna</td><td colspan="2">O que você espera que seus estudantes saibam de função?
O que seus estudantes responderam?

Para você o que é função?
Seus exemplos de função
Exemplos dos estudantes</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Bruna</td><td colspan="2">Voltando à atividade de Pedro, Levi e Ronaldo?
Você usaria aquelas atividades?
Com qual propósito?</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Bruna</td><td colspan="2">Voltando mais um pouco...
Resolver equações</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Bruna</td><td colspan="2">incógnita versus variável: qual a diferença?

Na sala, há preocupação em diferenciá-las? Como? Por quê?</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Bruna e Aline</td><td colspan="2">Incógnita, variável e coeficiente</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">É possível trabalhar a noção de variação?
Como?
Os exemplos que apresentados aos estudantes propiciam isso?</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">O que queremos versus o que fazemos</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>2,5</td><td></td><td colspan="2">Vídeo</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">Invenção ou descoberta?</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">Combinar próximas aulas</td><td></td></tr>
</table>

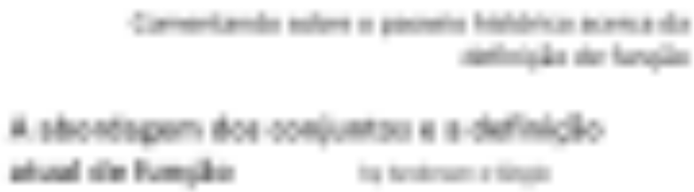
Tarefa de casa: Mathtask Invenção ou Descoberta?

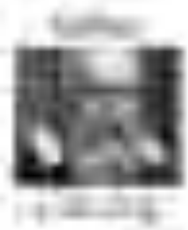
APÊNDICE AG – Apresentação Encontro 11

Aula 11

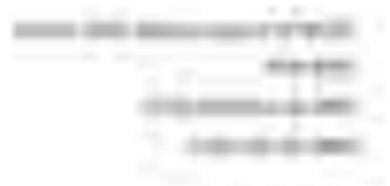
ProfMat UNIRIO
"Tópicos em História da Matemática"

Aline Bernardes
Bruna Moustapha Corrêa





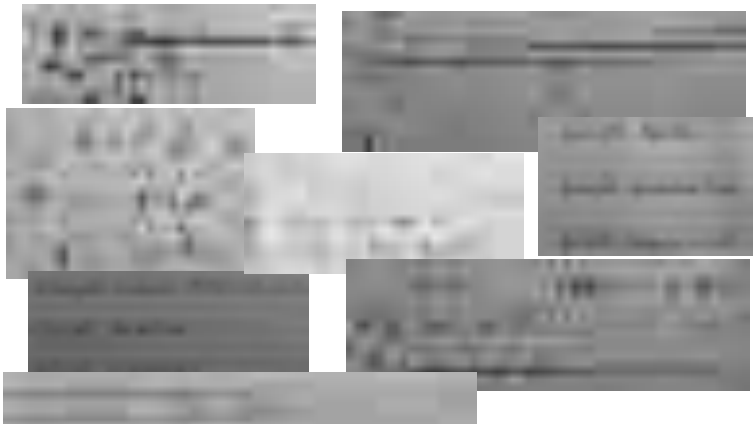





Para você o que é função?

- Uma relação entre grandezas.
- É uma relação entre conjuntos.
- Uma relação entre duas grandezas.
Sempre coloquei para meus alunos que a cada valor que eu substituo tenho uma relação.
- Dados dois conjuntos A e B, função de A em B é a relação entre cada elemento do conjunto A, a um único elemento do conjunto B.
- A relação entre grandezas.
- Uma relação de dependência entre grandezas.
- É uma relação entre duas grandezas.
- Função é uma relação entre duas grandezas que obedece uma lei de formação.
- Dados dois conjuntos A e B, não vazios, dizemos que uma relação R de A em B é uma função f de A em B se, e somente se, para todo elemento $x \in A$ houver um e apenas um correspondente $y \in B$, tal que o par ordenado $(x, y) \in f$.



Voltando à atividade de Pedro, Levi e Ronaldo!

Você acertou aquelas atividades?

Com qual propósito?

Voltando mais um pouco...

MATEMÁTICA

invenção

descoberta

APÊNDICE AH – Apresentação Encontro 12

12ª aula – 07 de dezembro
Objetivo: apresentação das propostas de abordagem

	duração	responsável/ observação	descrição das atividades	
	10		Relato do encontro anterior	TM
	15		Decisão sobre os **critérios de avaliação**. Criatividade Recurso Coerência com objetivos Clareza na apresentação Relação com as discussões feitas ao longo do curso Trouxe história? Como?	
	150 min		Apresentação dos trabalhos	
	10 min		Relembrar da **avaliação** Diários Reflexivos Relatos Proposta de Abordagem – trabalhos Portfólio Atividades de cada rodada	

APÊNDICE AI – Apresentação Encontro 13: Portfólio da Bruna

Aula 13
última

ProfMat UNIRIO
“Tópicos em História da Matemática”

Aline Bernardes
Bruna Moustapha Corrêa

o estágio sanduíche

Arthur Powell

trabalho colaborativo

 A metodologia do estudo empírico

communication cognition
COMMOGNITION

A parceria com Irene e Elena no projeto MathTASK

communication cognition
COMMOGNITION

Uma maneira de não esquecer que,
mais do que estudante, os participantes
são professores!

Dados a serem produzidos:

wiki

imagens

e muito mais...

diários reflexivos

vídeos

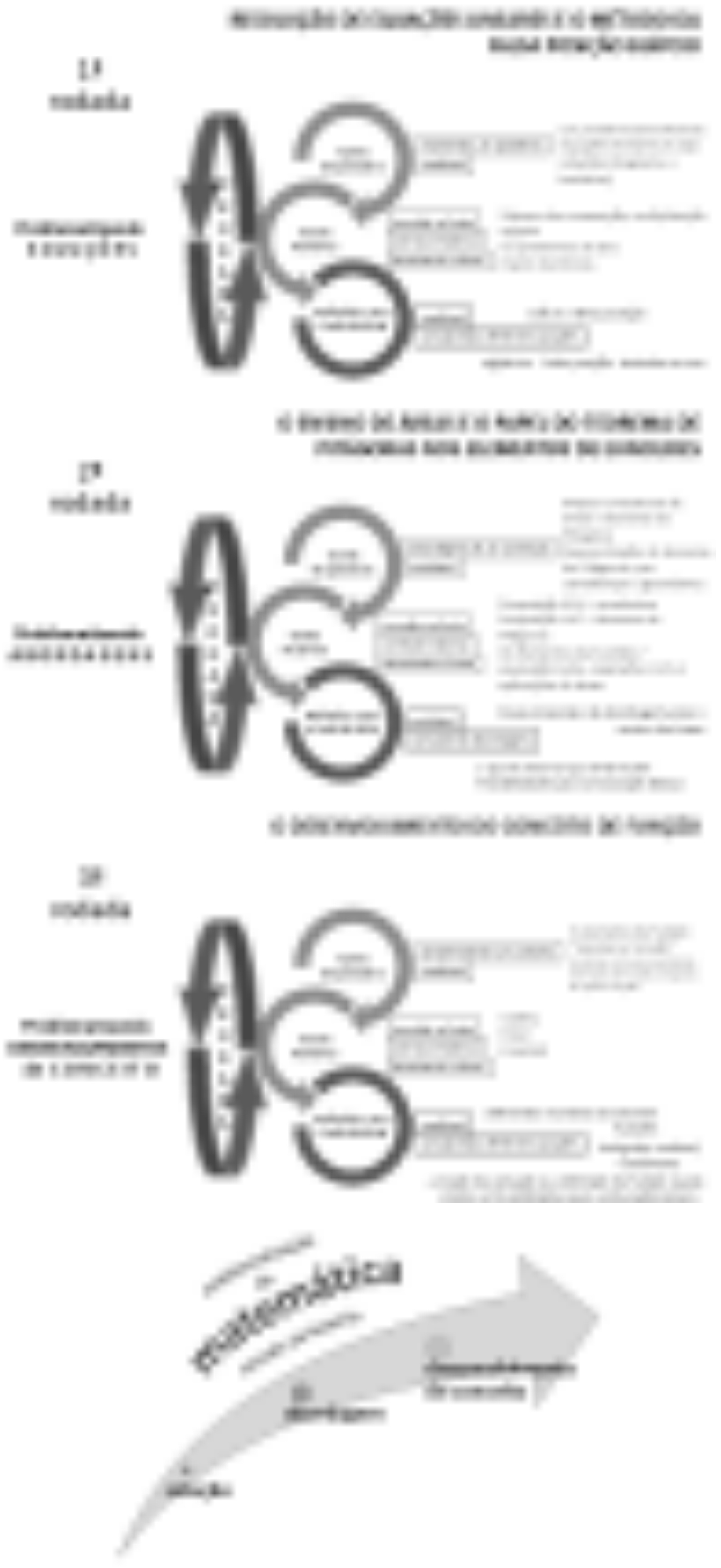
registros por escrito da tarefa

propostas de abordagem

portfólios

ProfMat UNIRIO
"Tópicos em História da Matemática"

1ª rodada	2ª rodada	3ª rodada	Avaliação do processo


matemática


MATEMÁTICA
Eu aprendi...
Eu aprendi...

APÊNDICE AJ – Questionário

Questionário de Avaliação

Respondendo a este questionário, você me ajudará a saber um pouco mais sobre suas impressões sobre a experiência vivenciada na disciplina e a conhecê-la(o) mais.

* Required

1. **Email address** *

Dados Pessoais

2. **Qual a sua idade? (em anos)** *

3. **Qual o seu sexo?** *
   Mark only one oval.
   - Feminino
   - Masculino
   - Other:

4. **Qual a sua graduação?** *
   Check all that apply.
   - [ ] Matemática
   - [ ] Pedagogia
   - [ ] Física
   - [ ] Other:

5. **Em que ano você se formou?** *
   Considere a primeira graduação.

6. **Você já fez alguma especialização?** *
   Mark only one oval.
   - Sim, em ensino ou educação matemática
   - Sim, em outra área
   - Não

7. **Há quanto tempo você atua na Educação Básica? (em anos)** *
Ou quanto tempo você atuou

8. **Em qual nível você atua?** *
Check all that apply.

- [ ] Séries Iniciais do Ensino Fundamental
- [ ] Séries Finais do Ensino Fundamental
- [ ] Ensino Médio
- [ ] Ensino Superior

9. **Registre qualquer informação que julgar pertinente sobre você.**

O que vem na minha cabeça...

10. **Indique, no máximo, três palavras que representem o que mais chamou a sua atenção na disciplina.** *
Por favor, use palavras ou expressões.

Sobre a disciplina Tópicos em História da Matemática

11. **Como foi a experiência de escrever diários reflexivos?** *
Mark only one oval.

- Interessante, pois me fez refletir.
- Maçante, pois tinha que ser feito semanalmente.
- Não posso avaliar, pois não escrevi os diários durante o processo.
- Trabalhosa, mas penso em aplicá-la com meus próprios estudantes.
- Sem ela não teria me envolvido tanto com a disciplina.
- Other: ______________________

12. **Os relatos no início de cada aula...** *
Mark only one oval.

- foram uma “encheção de linguiça".
- ajudavam a lembrar o que tinha sido feito na aula anterior.
- foram um compartilhamento dos diários reflexivos.
- foram uma maneira de discutir com um colega sobre o que aconteceu na aula em que ficamos responsáveis pelo relato.
- Other: ______________________

13. **A parte histórica era composta de três partes: mergulho da fonte histórica [primária], contextualização histórico-cultural-matemática e desvelamento da fonte. Sobre a parte histórica,** *
Marque todas as opções as quais você se identifica, mas, por favor, seja criterioso =)
Check all that apply.

- [ ] Ih... nem tinha reparado nessas três partes!
- [ ] O mergulho na fonte histórica pode ser suprimido, pois não acrescenta muita coisa
- [ ] Eu nunca tinha tido contato com uma fonte primária.
- [ ] Mergulhar numa fonte histórica foi interessante.
- [ ] Mergulhar numa fonte histórica foi desafiador.
- [ ] A contextualização poderia vir primeiro e, na sequência, o estudo e o entendimento da fonte primária.
- [ ] O contato com a fonte primária, sem nenhuma informação sobre ela, foi interessante e fundamental para o envolvimento com o estudo de cada tema.
- [ ] As leituras indicadas foram pouco esclarecedoras.
- [ ] Ainda bem que foram indicados vídeos, não tenho muita paciência para ler!
- [ ] Os vídeos eram longos e chatos.
- [ ] Os vídeos eram interessantes.
- [ ] As discussões após as leituras e vídeos indicados foram pouco produtivas.
- [ ] As discussões após as leituras e vídeos indicados foram esclarecedoras.
- [ ] Other: ______________________

14. **Você acha que a parte histórica contribuiu para você olhar com outros olhos para a produção de seus estudantes?** *
Mark only one oval.

- Nunca tinha pensado nisso!
- Não e não entendo a relação que isso poderia ter.
- Sim, vou incentivar que meus estudantes expressem as suas ideias.
- Sim, agora, vou buscar entender as respostas diferentes que aparecem nas provas.
- Não, pois eu já tinha o hábito de procurar entender o que meus estudantes fazem de diferente.
- Other: ______________________

15. **As mathtasks foram usadas tanto no momento disparador, quanto nas reflexões para a sala de aula. Sobre elas,** *
Marque todas as opções as quais você se identifica, mas, por favor, seja criterioso =)
Check all that apply.

- [ ] Não sei o que são mathtasks.
- [ ] Me colocaram no papel de professor(a).
- [ ] Trouxeram questões pertinentes para a sala de aula.
- [ ] Me fizeram refletir sobre práticas comuns na sala de aula.
- [ ] As mesmas questões podiam ter sido levantadas sem o contexto apresentado no início de cada mathtask.
- [ ] O contexto apresentado no início de cada mathtask confundia. Teria sido melhor ir direto ao ponto.
- [ ] O contexto apresentado no início de cada mathtask foi fundamental para eu entender a situação descrita e refletir sobre os questionamentos levantados.
- [ ] Foi importante ter discutido com colegas, antes de responder aos questionamentos.
- [ ] Foi importante ter discutido com colegas e com a turma toda.
- [ ] Não precisava de tantas discussões – com colegas e depois com a turma toda.
- [ ] Discutir, registrar e discutir, quanto trabalho... Não precisava disso tudo!
- [ ] Other: ______________________

16. **A reflexão para a sala de aula aconteceu....** *
Marque todas as opções as quais você se identifica, mas, por favor, seja criterioso =)
Check all that apply.

- [ ] em momentos específicos ao final de cada rodada.
- [ ] em momentos específicos no início de cada rodada.
- [ ] em todos os momentos.
- [ ] ao final do curso com a apresentação dos portfólios.
- [ ] ao final do curso com a apresentação dos trabalhos.
- [ ] ao escrever o diário reflexivo.
- [ ] ao registrar os questionamentos das tarefas (mathtasks).
- [ ] durante todas discussões com a turma.
- [ ] durante a discussão sobre a parte histórica.
- [ ] Other: ____________________

17. **Considerando a proposta de abordagem elaborada,** *
Marque todas as opções as quais você se identifica, mas, por favor, seja criterioso =)
Check all that apply.

- [ ] Eu procurei incorporar aspectos históricos trabalhados durante as aulas na proposta apresentada.
- [ ] Eu procurei incorporar aspectos pedagógico-didáticos trabalhados durante as aulas na proposta apresentada.
- [ ] Apresentei uma proposta de aula que já estou acostumada(o) a usar em sala.
- [ ] Apresentei uma proposta de aula que minha (meu) colega já está acostumada a usar em sala.
- [ ] Ter discutido com minha (meu) colega foi fundamental para a proposta apresentada.
- [ ] Eu poderia ter feito uma proposta tão boa quanto a apresentada sozinha(o).
- [ ] Não entendi muito bem o propósito de apresentar uma proposta de abordagem.
- [ ] Não vi conexão das propostas apresentadas com o que discutimos ao longo do semestre.
- [ ] Algumas propostas apresentadas não se relacionam com o que discutimos ao longo do semestre.
- [ ] As propostas apresentadas refletiram, mesmo que indiretamente, o que discutimos ao longo do semestre.
- [ ] Other: ____________________

18. **Considerando o portfólio,** *
Marque todas as opções as quais você se identifica, mas, por favor, seja criterioso =)
Check all that apply.

- [ ] Me fez revisitar o que aconteceu ao longo do semestre.
- [ ] Foi mais um trabalho.
- [ ] Teria sido melhor fazê-lo sozinha(o).
- [ ] Foi ótimo ter feito em dupla, pois pude refletir com minha(meu) colega.
- [ ] Não precisava ter sido apresentado, bastava a parte escrita.
- [ ] Não precisava de uma parte escrita, bastava a apresentação.
- [ ] As apresentações foram chatas.
- [ ] As apresentações foram interessantes.
- [ ] Ver como os meus colegas entenderam a disciplina, me fez revisitar o meu próprio entendimento sobre todas as discussões que tivemos ao longo do semestre.
- [ ] Other: ____________________

19. **No encontro final, alguns participantes sugeriram que o modelo da disciplina deveria ser usado nos cursos de graduação.** *
Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	
Discordo totalmente	◯	◯	◯	◯	◯	Concordo totalmente

20. **Se quiser, justifique a opinião indicada na pergunta anterior.**

____
____
____
____
____

A matemática...

21. **A 1ª rodada – na qual discutimos sobre a matemática egípcia – foi importante para que eu reconhecesse diferentes soluções como matematicamente corretas.** *
Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	
Discordo totalmente	◯	◯	◯	◯	◯	Concordo totalmente

22. **A 2ª rodada – na qual estudamos o tratamento de áreas dado por Euclides nos Elementos (livros I e II) – foi importante para que eu percebesse que há aspectos matemáticos que atualmente são deixados de lado no ensino de áreas.** *
Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	
Discordo totalmente	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭	Concordo totalmente

23. **A 3ª rodada – na qual estudamos alguns momentos históricos do desenvolvimento do conceito de função – foi importante para que eu refletisse sobre como um conceito matemático se desenvolve.** *
Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	
Discordo totalmente	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭	Concordo totalmente

24. **O conjunto das três rodadas foi fundamental para que eu revisitasse o meu entendimento sobre o que é a própria matemática.** *
Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	
Discordo totalmente	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭	Concordo totalmente

25. Guilherme **foi taxativo: " [...] uma que me deixou muito.... feliz até, né? Foi o fato de verificar que a Matemática, ela é mutável em seus conceitos... Meu Deus do céu! Só essas duas mesmo para me fazer mudar isso aí." Sobre o fato de a Matemática ser mutável,** *
Check all that apply.

- [ ] Eu nunca tinha pensado sobre isso!
- [ ] Eu já sabia dessa característica da Matemática.
- [ ] Para mim, a matemática é uma ciência exata e, portanto, imutável.
- [ ] As aulas me fizeram refletir sobre como os conceitos matemáticos se desenvolvem.
- [ ] Ao longo da história, os conceitos matemáticos vão sendo descobertos e encaixados na "linha" da Matemática.
- [ ] Pessoas, ou grupo de pessoas, inventam os conceitos matemáticos de acordo com as suas necessidades sociais, culturais, políticas e matemáticas.
- [ ] Other: ____________________

A história da matemática...

26. **Você já tinha estudado história da Matemática?** *
Mark only one oval.

- Sim, numa disciplina da graduação.
- Sim, numa disciplina da pós.
- Sim, sozinha(o).
- Não.

27. **Caso você já tenha estudado história da matemática, principalmente, se o fez sozinha(o), qual fonte usou?**

____

28. **Para você, a história da matemática é...** *
Mark only one oval.

- personagens, datas e acontecimentos marcantes.
- um conjunto de relatos de fatos que aconteceram no passado.
- o estudo de práticas matemáticas que aconteceram no passado.
- Nenhuma das opções acima.

29. **Caso você não tenha sido contemplado nas opções da pergunta anterior, responda: para você o que é a história da matemática?**

____
____
____
____
____

30. **A disciplina a(o) fez ...** *
Mark only one oval.

- entender a história da matemática de forma totalmente diferente.
- reforçar a ideia que você tinha sobre história da matemática.
- complementou a sua visão de histórica da matemática, reforçando que é preciso conhecer datas e personagens.
- complementou a sua visão de histórica da matemática, reforçando a necessidade de conhecer as práticas matemática do passado para entendê-lo.
- Other: _______________________________

A prática docente...

31. **Indique, no máximo, três palavras que representem como você acha que a experiência com a disciplina impactará a sua prática docente?** *

32. **Durante as aulas, houve alguns relatos sobre o potencial didático do tangram. Como professor(a), você costuma usar material concreto em suas aulas?** *
Mark only one oval.

- Não.
- Sim, apenas mostrando para os estudantes.
- Sim, de modo que os próprios estudantes manipulem o material.
- Não costumava, mas pretendo começar a usar.

33. **Indique quais materiais você usa ou pretende usar em suas aulas.**

34. **Na aula do dia 23 de no Gladson afirmou "Uma coisa que eu achei bem legal nessa matéria específica é que vocês ouvem muito a gente. Vocês pediram pra gente escolher qual seria a rodada e... assim... eu nunca ouvi os meus alunos."** *
Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	
Discordo totalmente						Concordo totalmente

35. **Em seu portfóli Cleber e Apolo afirmaram "A ideia é justificar em sala de aula cada momento desta matéria, aplicando com nossos alunos as práticas que desenvolvemos."** *
Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	
Discordo totalmente						Concordo totalmente

36. **Caso você concorde co indique de que maneira pretende inserir nas suas aulas as discussões realizadas ao longo do semestre.**

37. **As discussões que permearam os encontros ao longo do semestre me fizeram rever a minha própria prática docente.** *
Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	
Discordo totalmente	◯	◯	◯	◯	◯	Concordo totalmente

38. **Caso você tenha respondido positivamente à pergunta anterior, indique como.**

Terminando...

39. **"As aulas tiveram a propriedade de nos transformar".** *
Mark only one oval.

	1	2	3	4	5	
Discordo totalmente	◯	◯	◯	◯	◯	Concordo totalmente

40. **Caso você tenha concordado, em que aspecto se deu a sua transformação ?**

Google Forms

APÊNDICE AK – Roteiro da Entrevista

1. Fale [livremente] sobre a experiência na disciplina.
   Você pode, por exemplo, pensar nas suas expectativas com a disciplina e o que, de fato, aconteceu.
2. O que você achou da metodologia implementada nas aulas? *Como* ela foi conduzida.
3. Fale um pouco sobre a 1ª rodada.
4. Fale um pouco sobre a 2ª rodada.
5. Fale um pouco sobre a 3ª rodada.
6. Há alguma coisa que você viu/aprendeu nas aulas e que você pensa em usar nas suas [próprias] aulas?
7. Algo nas aulas mudou a maneira que você pensa/entende a matemática?
8. Algo nas aulas mudou a maneira que você pensa/entende história da matemática?
9. Algo nas aulas mudou como você estuda matemática?
10. Algo nas aulas mudou como você dá aula?
    Teve alguma mudança na maneira como você lida com seus estudantes?

APÊNDICE AL – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Título do estudo: Problematizações matemáticas por meio de excertos históricos: discutindo com professores sobre matemática e o seu ensino.

Pesquisadora responsável: Bruna Moustapha Corrêa – estudante de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ensino e História da Matemática e da Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

Orientador: Victor Giraldo.
Co-Orientadora: Aline Bernardes.

Objetivo e justificativa da pesquisa
O principal objetivo é problematizar a forma como os próprios professores entendem o que é produzir matemática, e a partir daí problematizar também as formas como eles lidam (legitimando ou não) com as produções dos seus estudantes. A problematização será feita a partir de discussões via problemas ou contextos oriundos da história da matemática, articuladas com a experiência da prática dos professores participantes. A colaboração é, portanto, essencial e se configura como um aspecto potencialmente diferencial, na medida em pretendemos analisar o discurso e possíveis mudanças nele de todos os participantes. A pesquisa justifica-se, portanto, devido à contribuição tanto com relação ao uso da história na formação de professores quanto com relação às consequências da colaboração para todos os participantes.

Participantes da pesquisa
Professores em exercício na Educação Básica

Envolvimento na pesquisa
O envolvimento com a pesquisa se dá com a participação nos encontros presenciais disciplina eletiva Tópicos em História da Matemática (PROFMAT/UNIRIO), com a realização das atividades propostas pelas professoras e com a concordância em ter sua participação observada para coleta de dados.

Você tem a liberdade de se recusar a participar, e poderá, ainda, se recusar a continuar participando em qualquer fase da pesquisa sem qualquer tipo de prejuízo.

Sempre que quiser, você poderá pedir mais informações sobre a pesquisa, entrando em contato com a pesquisadora responsável por meio do endereço eletrônico bruna.correa@uniriotec.br.

Riscos / desconfortos
A não participação em alguma atividade do estudo empírico não implicará na reprovação na disciplina.
Possíveis constrangimentos entre os participantes serão contornados com a intervenção da pesquisadora de forma a permitir a pluralidade de ideias.

Todas as informações coletadas neste estudo são estritamente confidenciais e para fins acadêmicos e quando divulgadas, terão a identidade dos sujeitos da pesquisa preservada ou indicada de acordo com a sua vontade.

Benefícios
Permitir ao professor participante revisar o entendimento sobre o que é produzir matemática.
Permitir ao professor participante uma reflexão sobre a sua própria prática docente.
Criação de um grupo de discussão sobre os saberes e as práticas docentes, estreitando laços entre a universidade e a escola, com benefícios para ambas as partes.

Pagamento
Você não terá nenhum tipo de despesa por participar desta pesquisa. E nada será pago por sua participação.

Consentimento

Eu, ____
acredito ter sido suficientemente informado a respeito das informações sobre o estudo em questão. Ficaram claros para mim quais são os propósitos do estudo, os procedimentos a serem realizados, seus desconfortos e riscos, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes. Ficou claro também que minha participação é isenta de despesas. Concordo voluntariamente em participar deste estudo. Eu poderei retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem penalidades ou prejuízos. Este documento é emitido em duas vias que serão ambas assinadas por mim e pela pesquisadora, ficando uma via com cada um de nós.

____ Data: ___/ ____/ _____
Assinatura do participante

____
Assinatura da Pesquisadora Responsável