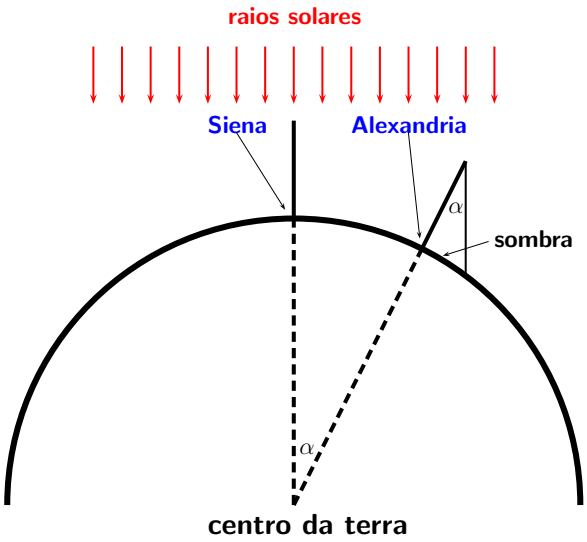
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado em Ensino de Matemática
Seleção – 2020 – Etapa 2

Questão 1. (2,0 pontos) Durante uma aula de matemática, o professor comentou que a Geometria Euclidiana Plana estudada na escola pode não ser apropriada para modelar certas situações, como a trajetória de um vôo Rio-Tóquio, por conta da curvatura do planeta Terra. Em tal momento, um estudante, apoiado no dogma de que a Terra é plana, afirmou que não concordava com o comentário do professor. O estudante argumentou que já havia utilizado diversos resultados de Geometria Euclidiana Plana durante uma reforma de sua casa, e que não observou erros. Assim, para o estudante, esses resultados corresponderiam a uma realidade observada, o que seria suficiente para garantir que a Terra é Plana.

Na aula seguinte, o professor propôs como dinâmica para a sala de aula a determinação da circunferência da Terra a partir de argumentações sobre sua curvatura atribuídas a Eratóstenes, que nasceu no século III antes da era comum. Eratóstenes observou que, em determinado horário do dia, no mesmo dia do ano, o mesmo objeto projetava sombras com tamanhos diferentes em lugares distintos do planeta. Com base nessa observação, Eratóstenes concluiu que isso só poderia acontecer se a Terra fosse curva, tomando como hipótese que os raios solares incidem na Terra como um feixe de retas paralelas.

Eratóstenes, então, escolheu um determinado dia e horário em que o sol incidisse perpendicularmente (sem projeção de sombra) na cidade de Siena (atual cidade de Assuan). Ele registrou, nesse dia e horário, na cidade de Alexandria, o ângulo α entre a direção vertical e a direção da projeção da sombra de um objeto (como ilustra o esquema a seguir).

Erastóstenes determinou a distância entre Siena e Alexandria como 5000 *stadia*, sendo *stadion* a medida de comprimento na cultura grega e helenística. Ele obteve com essa experiência uma estimativa para a circunferência da Terra, por meio da propriedade de proporcionalidade entre arcos e ângulos. Porém, na época, vários valores do *stadion* eram usados e não se sabe com certeza qual deles Erastóstenes utilizou. Dois deles são os mais prováveis: o *stadion* olímpico, correspondendo a cerca de 185 metros; e o assim chamado o *stadion* "itinerante", correspondendo a cerca de 157 metros.



(a) A partir de ideias ilustradas no texto e no esquema acima, já conhecidas há pelo menos 23 séculos, obtenha uma estimativa para a circunferência da Terra, determinando a distância entre Siena e Alexandria em km, com os dois valores prováveis do *stadion*.

(b) No lugar de professor, que retorno você daria a esse estudante, considerando também sua argumentação e seu dogma?

Questão 2. (2,0 pontos) Considere a solução (fictícia) a seguir, dada por estudante do 1º ano do ensino médio, Pedro, para a inequação de números reais $\dfrac{2\,x-4}{5-x} \geqslant 1$.

Solução de Pedro:

Para que o quociente de uma divisão seja maior ou igual a 1, é necessário que o numerador seja maior ou igual ao denominador. Então:

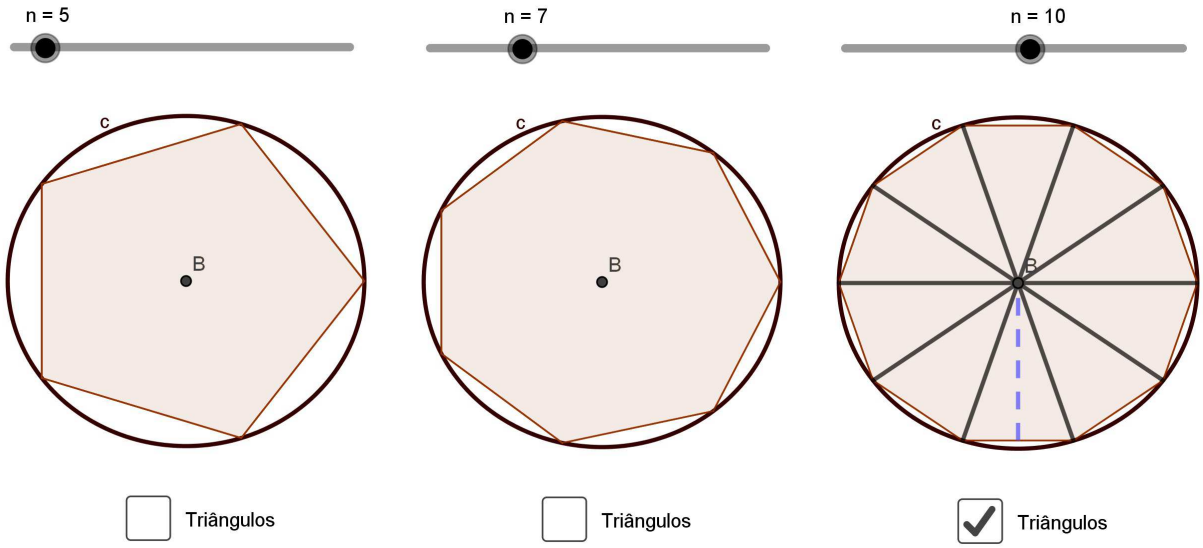
$$
\begin{aligned}
&2\,x-4 \geqslant 5-x \Rightarrow \\
&2\,x+x \geqslant 5+4 \Rightarrow \\
&3\,x \geqslant 9 \Rightarrow \\
&x \geqslant 3
\end{aligned}
$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$$

(a) Determine em $\mathbb{R}$ o conjunto S, solução de $\dfrac{2\,x-4}{5-x} \geqslant 1$. Mostre, por absurdo, que S não tem maior elemento.

(b) Discuta a solução de Pedro, indicando sob que hipóteses adicionais esta seria válida, e que retorno você daria a ele, no lugar de professor, considerando a argumentação do estudante.

Questão 3. (2,0 pontos) O método da exaustão – presente em estudos atribuídos a Eudoxo (século IV antes da era comum) – consiste, em termos gerais, na obtenção da medida de superfícies planas por aproximação de áreas de polígonos. Com inspiração nas ideias do método de exaustão, um professor utilizou um recurso computacional em sala de aula para variar o número n de lados de um polígono regular inscrito em um círculo. Observe as telas com diferentes valores para n.



Por meio da aproximação de um círculo por polígonos regulares inscritos, com números de lados n tendendo a infinito, obtenha uma relação entre a área, o raio e o perímetro do círculo. Considerando a definição de π como razão entre o perímetro e o diâmetro de um círculo, use essa relação para deduzir a fórmula de área do círculo. Como você abordaria essas questões em uma turma do ensino médio?

Questão 4. (2,0 pontos) Fiorentini e Oliveira (2013)[1] discutem diferentes práticas sociais do educador matemático, a fim de refletir sobre o saber matemático mobilizado e requerido na atividade de ensino. Dentre as questões motivadoras para tal estudo dos autores, encontra-se a interrogação: "De que matemática estamos falando, quando dizemos que o professor precisa saber bem matemática para ensiná-la?"(p. 917). Tal questionamento se relaciona com críticas quanto à desarticulação entre a formação e a atividade de ensino:

> *Essas críticas referem-se aos currículos, sobretudo às disciplinas específicas, às metodologias de ensino das aulas, ao distanciamento ou desconexão entre as práticas de formação e as práticas de ensinar e aprender na escola básica, à falta de diálogo ou inter-relação entre as disciplinas específicas e as de formação didático-pedagógica, ao isolamento do estágio, entre outras. (FIORENTINI, OLIVEIRA, 2016, p. 919)*

Por exemplo, esta prova de seleção para o curso de Mestrado em Ensino de Matemática foi pensada tendo como referência o conhecimento de conteúdo na sua dimensão pedagógica. Na questão anterior, buscamos uma articulação entre uma ideia tipicamente estudada em disciplinas de Cálculo – somas infinitas – e um conteúdo da escola básica (área de círculo). Ainda, na segunda questão, vemos um tipo de argumentação muito recorrente no estudo de diferentes disciplinas da licenciatura – demonstrações por absurdo – como uma possível reflexão sobre solução de uma inequação.

Neste sentido, discuta a articulação entre um conteúdo de matemática da licenciatura (tipicamente do curso superior) e uma abordagem, ou conteúdo a ser abordado, na educação básica.

Questão 5. (2,0 pontos) Há uma convicção geral de que a matemática se constitui como a ciência mais objetiva, com verdades incontestáveis e de rigor perfeito. Na historiografia da matemática esse entendimento tem sido questionado nas ultimas décadas. A partir dessa informação, responda as questões a seguir.

(a) Quais são as argumentações para afirmar que o rigor na matemática é "time-dependent"?

(b) Apresente e explique argumentações de matemáticos importantes dos séculos XVII ou XVIII (Newton ou Leibniz ou Euler) que hoje em dia não mais se aceitariam como rigorosas. (Podem ser exemplos da teoria de séries.)

(c) Que consequências dessa mudança da visão da matemática você vê para o ensino da matemática?

[1] Fiorentini, D.; Oliveira, A.T. O lugar das matemáticas na licenciatura em matemática: que matemáticas e que práticas formativas? Bolema, v. 27, n. 47, p. 917-938, 2013.