Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado em Ensino de Matemática
Seleção – 2018
Etapa 2

Questão 1. Considere o espaço $\mathbb{R}^3$, munido de um referencial ortonormal. Sejam A o ponto de coordenadas $(1, 2, 2)$ e S a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

(a) Determine uma equação para o plano p tangente à esfera S em A.

(b) Determine uma equação para a interseção da esfera com o plano de equação $y = 2$.

(c) Determine um sistema com duas equações cartesianas cujo conjunto solução seja a reta normal ao plano p que passa pelo ponto A.

(d) Determine uma equação para uma elipse contida no plano xy e que é tangente à esfera S nos pontos $(-3, 0, 0)$ e $(3, 0, 0)$, escolhendo, por exemplo, os focos $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

(e) Faça um esboço representando geometricamente todos os conjuntos cujas equações foram determinadas nos itens anteriores.

Questão 2. Em uma avaliação de Cálculo I, os estudantes deveriam avaliar as afirmações abaixo como verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas com argumentos válidos. Ambas as justificativas estão erradas. Identifique que argumentos foram usados de forma equivocada, justificando suas respostas.

(a) **Afirmação 1:** *A equação* $\dfrac{1}{x} = 0$ *admite uma solução real.*

Justificativa:

Dem.: Como a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua e como $f(-1) = -1 < 0 < 1 = f(1)$, podemos usar o Teorema do Valor Intermediário para concluir que $f(a) = 0$ para algum $a \in \mathbb{R}$ tal que $-1 < a < 1$.

(b) **Afirmação 2:** *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = x^2 - 1$, *se* $x > 1$ *e,* $f(x) = -x^2 - 1$ *se* $x \leqslant 1$. *A equação* $f(x) = 0$ *tem uma solução real.*

Justificativa:

Dem.: Como $(x^2 - 1)$ e $(-x^2 - 1)$ são contínuas e, além disso, $f(0) = -1 < 0 < 3 = f(2)$, podemos usar o Teorema do Valor Intermediário para concluir que $f(a) = 0$ para algum $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < 2$.

Questão 3. Considera-se nesta questão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta se a afirmação for verdadeira, ou exiba um contra-exemplo caso seja falsa.

(a) Se a_n é uma sequência de termos positivos e, $a_n \to 0$, então a_n é decrescente.

(b) Se $|a_n|$ é uma sequência crescente, então a_n é crescente.

(c) Se a_n é uma sequência crescente, então $|a_n|$ é crescente.

(d) Se a_n é uma sequência limitada, então a_n é convergente.

Questão 4. Dê alguns exemplos significativos e analise sua importância nos desenvolvimentos da Álgebra nos seguintes períodos: (a) século XVII; (b) século XIX. A qualidade da redação, tanto na forma quanto ao conteúdo, será levada em conta.

Questão 5. Ripoll, Rangel, e Giraldo (2015)[1] observam que, com a introdução dos números negativos, o conceito de número sofre uma ressignificação: de *quantidade* para *quantidade com orientação*. Para os autores, essa ressignificação está relacionada ainda com uma ressignificação na estrutura algébrica, isto é, nas operações de soma e de produto.

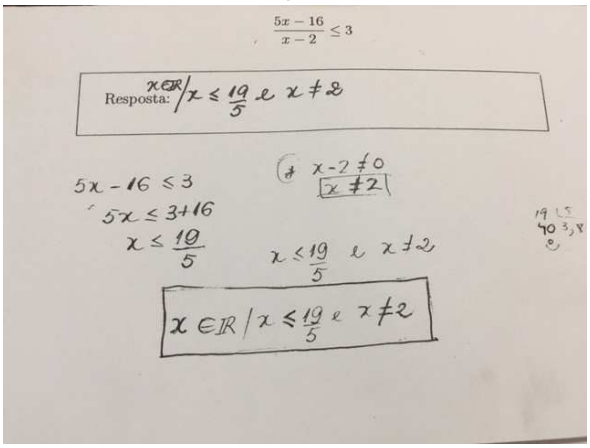
Tomando essas ressignificações como base, explique como você abordaria a seguinte ideia no 7º ano do ensino fundamental, empregando a interpretação de multiplicação como ampliação composta com reflexão: 3×4, $(-3) \times (-4)$ *e* $-(3 \times (-4))$ *produzem o mesmo resultado em* $\mathbb{Z}$. Generalize sua explicação para dois números inteiros quaisquer. Indique que recursos didáticos você empregaria nesta abordagem.

Questão 6. Pinto (2002)[2] nos leva a refletir sobre o que vem sendo tratado e identificado por diferentes pesquisadores sobre o ensino de matemática na universidade. Para a autora (PINTO, 2002, p. 225): "De um modo geral, a pesquisa tem questionado a matemática que se ensina no nível universitário e a maneira como ela é ensinada, buscando compreender as dificuldades dos alunos em seu contato com a matemática ensinada na universidade [...]".

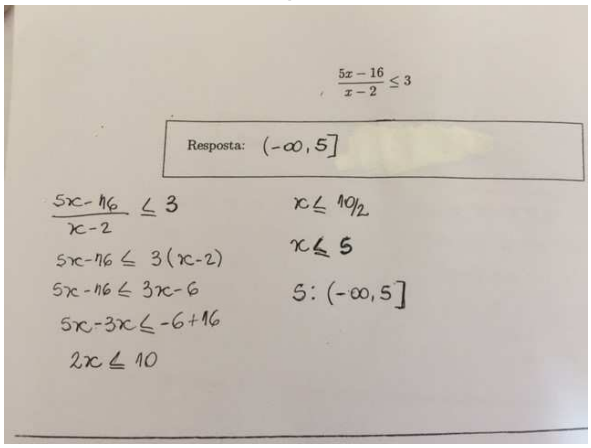
Apresentamos, a seguir, um problema proposto a um grupo de alunos recém ingressos numa universidade, que cursavam uma disciplina de pré-cálculo, bem como a solução apresentada por dois desses alunos.

Problema: Resolva a inequação $\dfrac{5\,x-16}{x-2} \leqslant 3$ e explique sua solução.

Solução 1:



Solução 2:



[1] Ripoll, C.; Rangel, L.; Giraldo, V. Coleção Matemática para o Ensino, volumes 1 e 2. Rio de Janeiro, SBM, 2015.

[2] Pinto, M.M.F. Educação Matemática no Ensino Superior. Educação Matemática em Revista, n. 36, p. 223-238, 2002.

(a) Analise e interprete como foram encaminhadas as soluções em cada caso, classificando-as em certas ou erradas.

(b) Como os professores poderiam intervir para auxiliar esses alunos a validarem a resposta encontrada, em cada caso?

(c) Pinto (2002) faz referência explícita à dificuldade recorrente de alunos em associar números reais e pontos na reta numérica. Como o uso da reta poderia auxiliar os alunos na compreensão da solução dessa inequação?