**Universidade Federal do Rio de Janeiro**
**Instituto de Matemática**
**Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática**
**Mestrado em Ensino de Matemática**
**Seleção 2017 – Etapa 2**

---

**Questão 1. (1,0 ponto)** Sejam $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$, $q \neq k$. Considere $\mathcal{P}$ o lugar geométrico dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cuja distância ao ponto $(p,q)$ é igual à distância à reta horizontal $y = k$.

(a) (0,2 ponto) Faça um esboço de $\mathcal{P}$.
(b) (0,2 ponto) Determine uma fórmula algébrica para os pontos $(x,y) \in \mathcal{P}$, que expresse $y$ em função de $x$, envolvendo as constantes $k$, $p$ e $q$.
(c) (0,3 ponto) Discuta a relação entre $q$ e $k$ e a natureza da curva.
(d) (0,3 ponto) Desenvolva uma argumentação para explicar a forma geométrica de $\mathcal{P}$ para alunos do ensino médio.

**Questão 2. (1,0 ponto)** Considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para um número real positivo $x$. Seja ainda $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, um subsequência $(x_n)$ de monótona, decrescente e convergente para um número real $y$.

(a) (0,2 ponto) Determine o valor de $x - y$.
(b) (0,4 ponto) Podemos afirmar que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$? Justifique a sua resposta.
(c) (0,4 ponto) Mostre que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 0$ para todo $n \geqslant n_0$.

**Questão 3. (1,5 ponto)** Uma *sequência de números reais* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é definida como uma função na forma

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & y_n \end{array}.$$

(a) (0,3 ponto) Esboce um possível gráfico para função $f$ no sistema ortogonal cartesiano.
(b) (0,4 ponto) Segundo a definição de continuidade, uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in D$ se:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } x \in D,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

A função $f$ é dita contínua se é contínua em $x_0\ \forall\, x_0 \in D$.
De acordo com essa definição, a função $f$ é contínua?
(c) (0,4 ponto) Sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 < n_2$, e $y \in \mathbb{R}$ tais que $f(n_1) < y < f(n_2)$. É correto afirmar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = y$?
(d) (0,4 ponto) O Teorema do Valor Intermediário tem o seguinte enunciado:

*Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ um função contínua. Sejam $x_1, x_2 \in [a,b]$, com $x_1 < x_2$, tais que $f(x_1) \neq f(x_2)$, digamos $f(x_1) < f(x_2)$.*
*Então, dado $k \in\, ]f(x_1), f(x_2)[$ , existe $c \in\, ]x_1, x_2[$ tal que $f(c) = k$.*

Sua resposta ao item anterior é coerente com este Teorema, ou implica em alguma inconsistência em relação ao mesmo? Justifique a sua resposta.

**Questão 4. (1,5 ponto)** Considere a função $p : ]-3,3[ \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma:

$$p(x) = \begin{cases} x^3 - 4x & \text{se } x < -1 \text{ ou } x > 2 \\ 2 - x & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

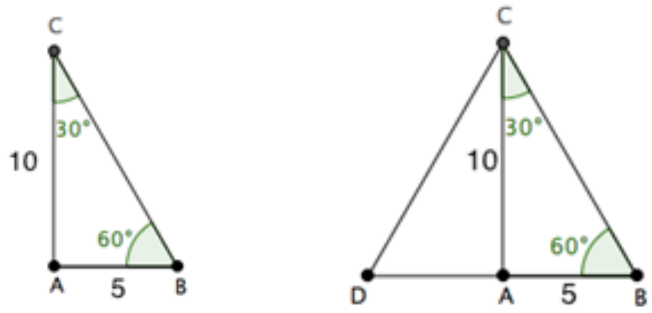
Esboce o gráfico de $p$ (0,3 ponto) e determine:

(a) (0,2 ponto) os pontos $x$ do domínio em que $p$ é descontínua;
(b) (0,2 ponto) os pontos $x$ do domínio em que $p$ não é diferenciável;
(c) (0,2 ponto) os pontos $x$ do domínio em que $p'(x) = 0$;
(d) (0,2 ponto) os pontos de máximo e de mínimo locais e absolutos de $p$;
(e) (0,2 ponto) os intervalos em que $p$ é crescente e os intervalos em que $p$ é decrescente;
(f) (0,2 ponto) o valor de $\displaystyle\int_{-2}^{2} p(x)\, dx$.

**Questão 5. (2,5 pontos)**

Em aula de desenho geométrico no sexto ano – em que os alunos já tinham estudado construção de triângulos, assim como construção e medida de ângulos – uma professora pediu para que os estudantes construíssem um triângulo com ângulos internos de $30°$ e de $60°$. O aluno João fez a construção geométrica e, ainda sabendo que maior ângulo se opõe a maior lado (e vice-versa), ilustrou dois lados com medidas $5$ e $10$, como na figura abaixo à esquerda.

Percebendo que João tinha atribuído valores aos lados do triângulo de forma incorreta e para dar retorno a ele sobre seu erro, a professora desenhou um triângulo equilátero $BCD$ a partir do triângulo $ABC$, como mostra a figura abaixo à direita.




*construção feita por João* *desenho feito pela professora para dar retorno a João*

(a) (0,5 ponto) Como você acha que João pensou para chegar aos valores $5$ e $10$ para os lados dos triângulo?
(b) (0,5 ponto) João ainda não estudou sobre razões métricas ou trigonométricas no triângulo, assim como ainda não sabe sobre teorema de Pitágoras. Considerando essa etapa de ensino, prossiga a ideia da professora (ou elabore outra) para dar retorno/explicação a João sobre seu erro.
(c) (1,5 ponto) Discuta essa situação de ensino, assim como os dois itens anteriores, a partir das ideias teóricas de Ball et al (2008), considerando a perspectiva geral do texto, assim como as categorias de conhecimento propostas no mesmo.

**Questão 6. (2,5 pontos)**

O livro *História da Matemática – Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*, de Tatiana Roque, analisa vários aspectos do cálculo diferencial de Leibniz.

(a) (0,7 ponto) Explique como o cálculo de Leibniz se aplica à determinação de uma tangente à uma curva definida por uma equação. Dê um exemplo simples para ilustrar o procedimento do cálculo.
(b) (0,8 ponto) Qual foi a recepção do cálculo leibniziano na Europa?
(c) (1,0 ponto) Explique algumas diferenças entre o cálculo infinitesimal Newtoniano e aquele de Leibniz.