Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado em Ensino de Matemática
Seleção 2015 – Etapa 2

ATENÇÃO:

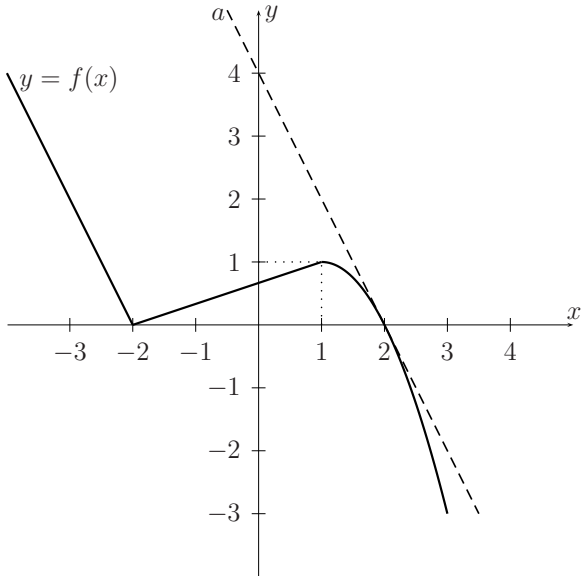
- **Resolva 3 questões escolhidas dentre as questões 1 a 4.**
- **Resolva as questões 5, 6 e 7.**

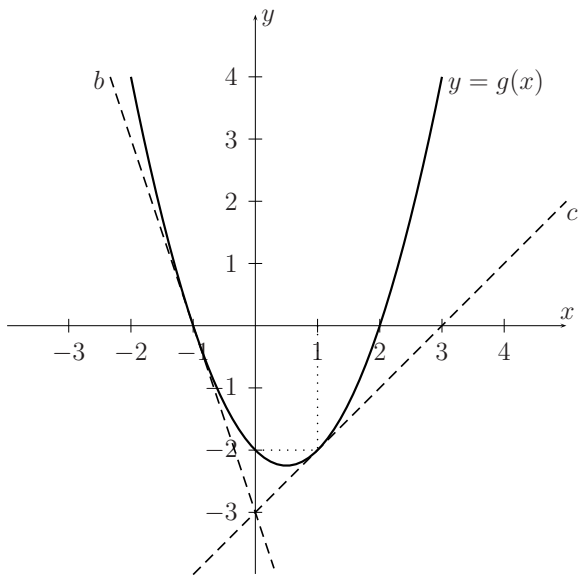
1. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é *crescente* em D se $\forall\, x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Dizemos que f é *estritamente crescente* em D se $\forall\, x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

   Determine se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas.

   (a) Se f é diferenciável em D e $f'(x) > 0\ \forall\, x \in D$, então f é estritamente crescente em D.
   (b) Se f é crescente em D, então f é diferenciável $f'(x) \geqslant 0\ \forall\, x \in D$.
   (c) Se f é diferenciável e crescente em D, então $f'(x) \geqslant 0\ \forall\, x \in D$.
   (d) Se D é um intervalo e f é diferenciável e crescente em D, então $f'(x) \geqslant 0\ \forall\, x \in D$.
   (e) Se D é um intervalo e f é diferenciável e estritamente crescente em D, então $f'(x) > 0$ $\forall\, x \in D$.

2. As figuras abaixo representam os gráficos de duas funções f e g. A reta a é tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 0)$. As retas b e c são tangentes ao gráfico de g nos pontos $(-1, 0)$ e $(1, -2)$, respectivamente. Os trechos do gráfico de f correspondentes a $x < -2$ e a $-2 < x < 1$ são segmentos de reta. Determine, se possível, os valores da derivada e as equações das retas tangentes ao gráfico da função $f \circ g$ nos pontos $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$. Justifique sua resposta.





3. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, munido do produto escalar e da norma euclidianos usuais.

   (a) Determine uma equação para o plano Π definido pelos ponto $A(1, 1, 0)$, $B(1, -1, 4)$ e $C(0, 2, 1)$.
   (b) Determine equações paramétricas para a reta perpendicular ao plano Π que passa pelo ponto $D(0, 0, 1)$.
   (c) Calcule a área do triângulo ABC.
   (d) Calcule o volume do tetraedro $ABCD$.

4. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^N$, munido do produto escalar e da norma euclidianos usuais.

   (a) Mostre que valem as equivalências $\forall\, u, v \in \mathbb{R}^N$:

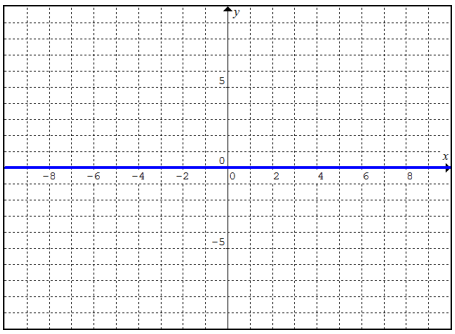
      i. $\|u\| = \|v\| \Longleftrightarrow u + v \perp u - v$
      ii. $u \perp v \Longleftrightarrow \|u + v\| = \|u - v\|$

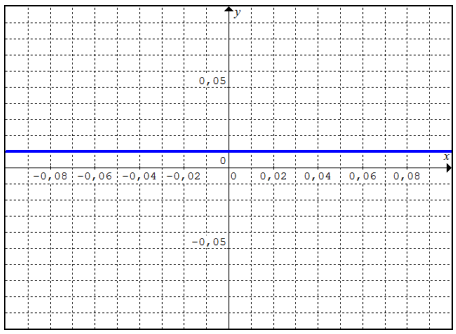
   (b) Deduza, com base nas equivalências demonstradas no item anterior, uma condição necessária e suficiente, relacionando lados e diagonais de quadriláteros, para cada um dos enunciados seguintes:

      i. um paralelogramo $ABCD$ é um losango se, e somente, se ...
      ii. um paralelogramo $ABCD$ é um retângulo se, e somente, se ...

   (c) As condições deduzidas no item anterior vale também para quadriláteros que não são paralelogramos? Justifique a sua resposta.

5. As figuras a seguir mostram o gráfico da função $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = \dfrac{1}{x^6 + 100}$, gerado por um software computacional, nas janelas gráficas $-10 \leqslant x \leqslant 10$, $-10 \leqslant y \leqslant 10$ (à esquerda) e $-0,1 \leqslant x \leqslant 0,1$, $-0,1 \leqslant y \leqslant 0,1$ (à direita).





   (a) Na figura da direita, o gráfico parece ter o aspecto da função constante igual a 0. Explique este comportamento, com base nas propriedades da função u.

   (b) Na figura da direita, o gráfico parece ter o aspecto da função constante igual a $0,01$. Explique este comportamento, com base nas propriedades da função u.

   (c) Qual o maior valor atingido por u? Quais são os limites de u no infinito? Indique uma janela gráfica em que seja possível visualizar a variação do gráfico de u. Justifique a sua escolha.

6. É comum ouvirmos que a descoberta dos irracionais na Grécia provocou uma crise dos fundamentos da matemática. Discuta essa afirmação.

7. O trecho em anexo foi extraído do texto:

   Sztajn, P. (2002). O que precisa saber um professor de matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. Educação Matemática em Revista, n. 11A.

   No trecho, a autora comenta o trabalho de Ball (1991). Segundo o relato de Sztajn, Ball afirma que que os esforços para demonstrar a relação (intuitivamente inquestionável) entre o conhecimento de matemática do professor e a qualidade de suas aulas não alcançaram sucesso. A partir daí, Ball identifica três dimensões do conhecimento de conteúdo matemático do professor e discute formas como essas dimensões se articulam.

   Com base na sua própria com ensino de matemática (como professor da educação básica, como aluno da educação básica ou no curso de licenciatura), comente criticamente a visão de Ball relatada no trecho em anexo sobre a importância dessas três dimensões do conhecimento matemático e da articulação entre elas pelo professor para a qualidade de suas aulas.

Em 1991 é editado o segundo volume da coleção de pesquisas intitulada *Advances in research on teaching*[6] (Brophy, 1991), dedicado especificamente ao saber disciplinar do professor e à relação deste com a prática. O primeiro capítulo é sobre o professor de Matemática. Ball (1991) inicia seu artigo afirmando que esforços feitos para demonstrar a relação entre o conhecimento que o professor tem de Matemática e a qualidade de suas aulas não alcançaram sucesso dentro da pesquisa educacional[7]. Como essa relação parece ser intuitivamente inquestionável, embora não seja uma verdade empiricamente demonstrada, a autora se propõe a entendê-la melhor a partir de uma revisão do que significa a expressão "saber matemática". Ball então apresenta a tese que desenvolve em seu artigo: o conhecimento que o profissional de ensino tem de Matemática interage com seus pressupostos e com suas crenças – sobre ensino-aprendizagem, sobre seus alunos e sobre o contexto da sala de aula –, moldando a forma como cada professor ensina essa disciplina a seus alunos.

O saber disciplinar de Matemática é apresentado por Ball (1991) como um conceito que envolve três dimensões. A primeira é o que ela chama de conhecimento substantivo, isto é, conhecimento da substância da Matemática, de suas proposições, conceitos e procedimentos. É o conhecimento da estrutura da Matemática, da relação entre tópicos – é o conhecimento ao qual usualmente nos referimos quando dizemos que alguém sabe Matemática. A segunda dimensão é o conhecimento da natureza dessa disciplina e do discurso matemático. Nessa dimensão encontra-se o conhecimento sobre o fazer matemático. O que é aceito como uma solução dentro da Matemática? Como essas soluções são julgadas, aceitas ou descartadas? Como novas idéias são geradas no campo da Matemática e quais os mecanismos para sua validação? Entender as regras de funcionamento da Matemática é, para Ball, uma das dimensões do saber da disciplina, e de grande importância quando consideramos o ensino dessa ciência, pois deve reger o discurso e as discussões propostas para a sala de aula. Finalmente, além do conhecimento de e sobre Matemática (as duas primeiras dimensões), a terceira dimensão do saber disciplinar de Matemática é composta pelas respostas emocionais que a pessoa apresenta com relação a essa ciência, além da auto-percepção que o indivíduo possui acerca de sua relação com a mesma. O conhecimento que alguém tem da Matemática envolve o que sabe sobre o assunto, o que sabe sobre a organização do campo e suas atitudes perante o assunto.

> *O conhecimento que alguém tem da Matemática envolve o que sabe sobre o assunto, o que sabe sobre a organização do campo e suas atitudes perante o assunto*

O professor de Matemática, entretanto, precisa ser capaz de articular seu saber, pois aquilo que é apenas tacitamente aceito não pode ser explicitamente ensinado. Logo, o saber matemático do professor também precisa envolver uma linguagem apropriada, capaz de "falar" Matemática para além da repetição de expressões ou teoremas, expressando as relações que formam a estrutura dessa disciplina. Para Ball, além de explícito, o conhecimento que o professor tem também deve ser adequadamente conectado, pois a Matemática não é uma lista de regras, definições e tópicos isolados.

Ao contrário, essa ciência possui uma organização interna que liga os diversos assuntos, e o professor deve ser capaz de fazer essas conexões. O saber explícito e conectado do professor, finalmente, deve articular-se à visão que este tem sobre a Matemática, sobre a natureza da disciplina, formando aquilo que influenciará a forma com a qual decide apresentar certo tópico para seus alunos. Todas essas facetas do saber do professor precisam ser pesquisadas e compreendidas, e, ao buscar examinar o que sabem os professores, "pesquisadores devem criar oportunidades para explorar o conhecimento que o professor tem de determinado conceito em diversos contextos e a partir de vários pontos de vista" (Ball, 1991, p. 20).

6 Avanços na pesquisa sobre ensino.

7 A autora cita o National Longitudinal Study of Mathematical Abilities, um estudo feito nos anos 60 com 112.000 alunos. Vinte características dos professores desses alunos foram analisadas, incluindo anos de experiência, créditos obtidos em cursos de Matemática, ser formado em Matemática, gostar de Matemática e orientação filosófica com relação à Matemática. De modo geral, nenhuma das características sobre formação do professor ou sobre suas atitudes estava fortemente relacionada com o desempenho dos alunos. Os autores do estudo então concluíram que muitas das crenças sobre o que caracterizava o bom professor eram falsas, entre elas a idéia de que quanto mais alguém sabe Matemática melhor professor será.