Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado em Ensino de Matemática
Seleção 2012 – Etapa 2

Questão 1. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando rigorosamente as suas respostas.

(a) Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas seqüências de números reais. Se a seqüência $(x_n + y_n)$ é convergente, então x_n e y_n são ambas convergentes.

(b) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência satisfazendo à seguinte propriedade: $\forall\varepsilon > 0$, existe uma quantidade infinita de termos de (x_n) pertencentes ao intervalo $]\,a-\varepsilon, a+\varepsilon\,[$. Então (x_n) converge para a.

(c) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência convergindo para $a \in \mathbb{R}$. Então, $\forall\varepsilon > 0$, existe uma quantidade infinita de termos de (x_n) pertencentes ao intervalo $]\,a-\varepsilon, a+\varepsilon\,[$.

(d) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência satisfazendo à seguinte propriedade: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. Então, podemos afirmar que (x_n) é de Cauchy, portanto convergente.

(e) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência satisfazendo à seguinte propriedade: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. Então, podemos afirmar que (x_n) é de Cauchy, mas não que (x_n) é convergente.

Questão 2. Considere os pontos $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$, sendo a, b, c número reais não nulos.

(a) Determine uma equação do plano ABC.

(b) Mostre que a projeção ortogonal H do ponto O sobre o plano ABC é o ortocentro do triângulo ABC.

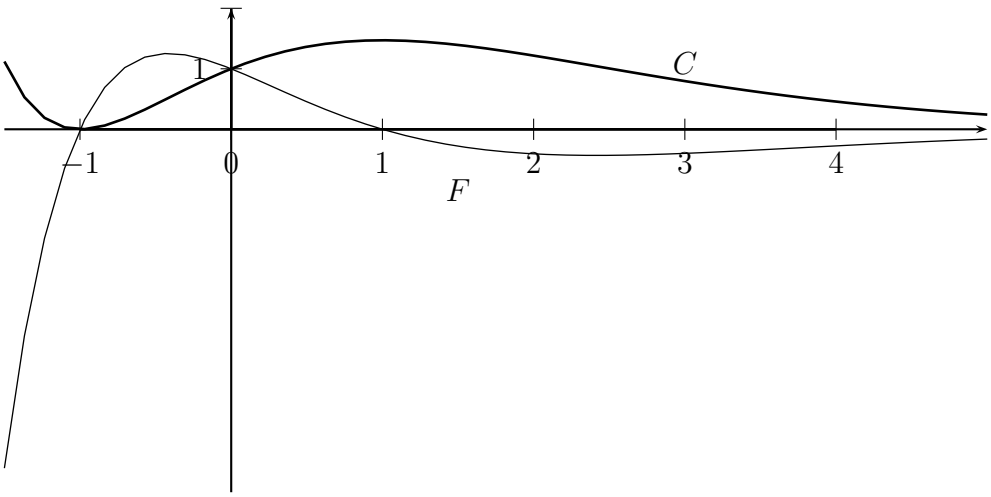
(c) Seja $d = OH$. Mostre que $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

Questão 3.

(a) Mostre que a reta que une os pontos médios de duas arestas opostas de um tetraedro regular é perpendicular a cada uma delas.

(b) Determine a distância entre duas arestas opostas de um tetraedro regular.

Questão 4. As curvas C e F são gráficos de duas funções diferenciáveis definidas em $\mathbb{R}$. Sabe-se que uma das funções é a função derivada da outra. Estas duas funções serão denotadas por g e g'.



(a) Associe a cada uma das funções g e g' o seu gráfico. Justifique sua resposta.
(b) Qual é a inclinação da reta tangente à curva C no ponto de abscissa $x = 0$?
(c) Qual é a área limitada entre a curva F, o eixo das abscissas e as retas $x = -1$ e $x = 0$?

Questão 5. Considere as funções $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \mathrm{e}^x - \ln x$ e $g(x) = xe^x - 1$.

(a) Determine os intervalos em que g é crescente e os intervalos em que g é decrescente.
(b) Conclua do item anterior que existe um único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha e^\alpha = 1$.
(c) Calcule os limites de f nos extremos de seu domínio.
(d) Determine os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente.
(e) Mostre que f admite um ponto de mínimo em $m = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$. Este ponto de mínimo é local ou absoluto? A função f admite outros extremos locais ou absolutos? Justifique as suas respostas.
(f) Faça um esboço do gráfico de f.

Questão 6. Seja uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que admite primitivas em $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que se f é ímpar, toda primitiva de f é par.
(b) Se f é par, o que podemos afirmar sobre as primitivas de f?
(c) A função inversa da função $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ pode ser definida por $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.
Utilizando unicamente as propriedades decorrentes da definição da função φ como integral, mostre que φ é ímpar e estritamente crescente.
(d) Estude a convexidade do gráfico de φ.

Questão 7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f é derivável em $x = 0$.
(b) Determine a função derivada de f.
(c) Considere as sequências $a_n = \dfrac{1}{n\,\pi}$ e $b_n = \dfrac{2}{n\,\pi}$. Determine os limites:

$$\lim_{n\to+\infty} |f(a_n)| \qquad \lim_{n\to+\infty} |f(b_n)|$$

(d) Deduza do item anterior que f' é descontínua em $x = 0$.