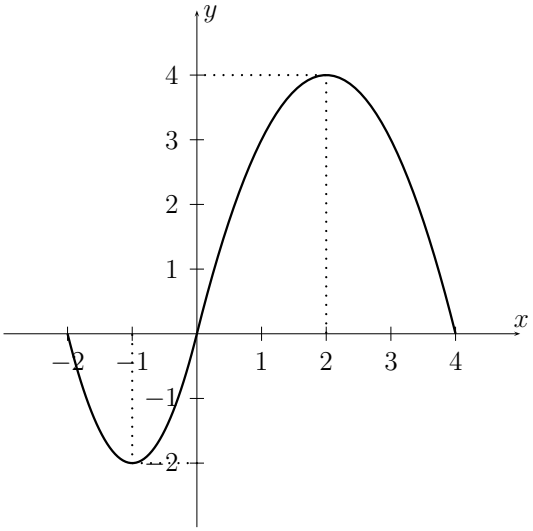
UFRJ - Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
www.pg.im.ufrj.br/pemat
Mestrado em Ensino de Matemática
Seleção – 2011
Etapa 2

---

**Questão 1.** Considere $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ a função cujo gráfico é apresentado ao lado. Para cada um dos itens a seguir, indique um domínio $D \subset \mathbb{R}$ adequado em que uma função com a lei de formação dada possa ser definida e esboce o gráfico desta função.




(a) $f_1(x) = (f(x))^2$

(b) $f_2(x) = f(x^2)$

(c) $f_3(x) = |f(x)|$

(d) $f_4(x) = f(|x|)$

**Questão 2.** Encontre uma transformação de coordenadas de modo que as assíntotas da curva $x\,y - x - y = 0$ coincidam com os novos eixos coordenados.

**Questão 3.** Considere um cubo $ABCDEFGH$, de aresta $a$. Considere o triângulo $ABG$, cujos lados são: $AB$, aresta do cubo; $BG$, diagonal da face do cubo; $AG$, diagonal do cubo.

(a) Determine os cossenos dos três ângulos internos de $ABG$.

(b) Determine a área de $ABG$, em função de $a$.

**Questão 4.** Considere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por: $h(x) = \begin{cases} |\,4x - 5\,| & \text{se } |x-1| \leq 1 \\ |\,x^2 - 1\,| & \text{se } |x-1| > 1 \end{cases}$

Faça um esboço do gráfico de $h$ e determine (caso existam):

(a) todas as soluções reais da equação $h(x) = 0$;

(b) todos os pontos fixos de $h$ (isto é, os pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que $h(x) = x$);

(c) os pontos $x \in \mathbb{R}$ em que $h$ é descontínua;

(d) os pontos $x \in \mathbb{R}$ em que $h$ não é derivável;

(e) os pontos $x \in \mathbb{R}$ em que $h'(x) = 0$;

(f) os máximos e mínimos locais de $h$;

(g) as equações das retas tangentes ao gráfico de $h$ nos pontos $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5}{4}$ e $x_3 = 2$.

**Questão 5.** Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \ln|x^3 - 1|$.

Faça um esboço do gráfico de $g$ e determine (caso existam):

(a) os limites $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} g(x)$;

(b) os limites $\lim_{x\to -\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} g(x)$;

(c) as assíntotas horizontais e verticais de $g$;

(d) os máximos e mínimos locais e absolutos de $g$;

(e) os intervalos em que $g$ é crescente e os intervalos em que $g$ é decrescente;

(f) os pontos de inflexão de $g$;

(g) os intervalos em que a concavidade de $g$ é voltada para cima e os intervalos em que a concavidade de $g$ é voltada para baixo.

**Questão 6.** Considere a região plana limitada $R$, determinada no primeiro quadrante entre a curva $y = \mathrm{e}^x$ e sua reta tangente em $x = 1$.

(a) Faça um esboço da região $R$.

(b) Determine a área de $R$.

(c) Determine o volume do sólido determinado pela rotação de $R$ em torno da reta $y = \mathrm{e}$.

**Questão 7.** O Teorema de Weierstrass afirma que:

*Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, em que $I$ é um intervalo fechado e limitado. Então, existe $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) \geq f(x)\ \forall\, x \in I$.*

Responda as questões a seguir, justificando rigorosamente suas respostas.

(a) O Teorema de Weierstrass continua valendo sem a hipótese de que $f$ é contínua?

(b) O Teorema de Weierstrass continua valendo sem a hipótese de que o domínio $I$ é fechado?

(c) O Teorema de Weierstrass continua valendo sem a hipótese de que o domínio $I$ é limitado?

(d) Podemos afirmar que o ponto $x_0$ no enunciado do Teorema de Weierstrass é único?

**Questão 8.** Use o Teorema de Weierstrass para demonstrar o seguinte resultado:

*Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$. Então $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.*

UFRJ - Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
www.pg.im.ufrj.br/pemat
Mestrado em Ensino de Matemática
Seleção – 2011
Etapa 2 – Gabarito

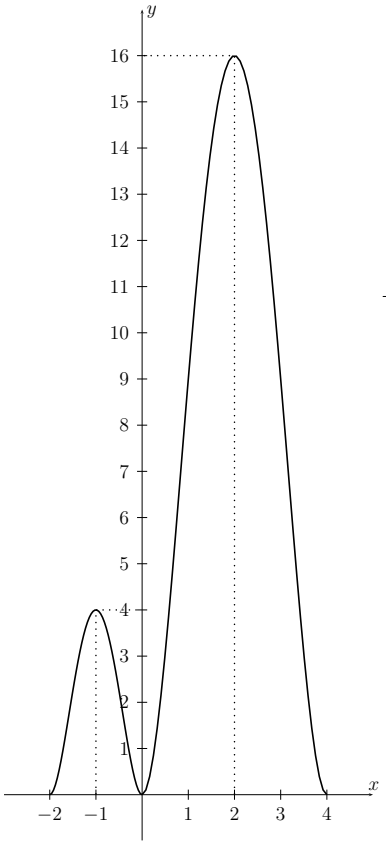
**Questão 1.**

(a) Faz sentido definir $f_1$ nos mesmos elementos em que $f$ está definida. Assim, podemos definir $f_1 : [-2, 4] \to \mathbb{R}$. O gráfico de $f_1$ tem o aspecto mostrado abaixo.

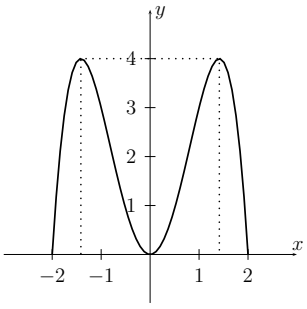
(b) Como $f_2$ é definida como $f_2(x) = f(x^2)$, para que seja possível calcular $f_2$ em um elemento $x$, é preciso que $x^2$ pertença ao domínio de $f$, isto é que $x^2 \in [-2, 4]$. Isto ocorre se e só se $x \in [-2, 2]$. Assim, podemos definir $f_2 : [-2, 2] \to \mathbb{R}$. O gráfico de $f_2$ tem o aspecto mostrado abaixo.

(c) Faz sentido definir $f_3$ nos mesmos elementos em que $f$ está definida. Assim, podemos definir $f_3 : [-2, 4] \to \mathbb{R}$. O gráfico de $f_3$ tem o aspecto mostrado abaixo.

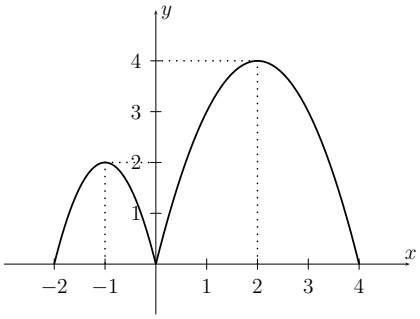
(d) Como $f_4$ é definida como $f_4(x) = f(|x|)$, para que seja possível calcular $f_4$ em um elemento $x$, é preciso que $|x|$ pertença ao domínio de $f$, isto é que $|x| \in [-2, 4]$. Isto ocorre se e só se $x \in [-4, 4]$. Assim, podemos definir $f_4 : [-4, 4] \to \mathbb{R}$. O gráfico de $f_4$ tem o aspecto mostrado abaixo.



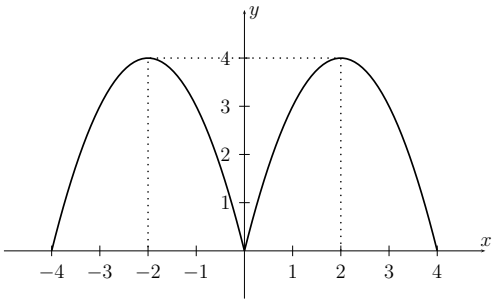
(a) $f_1$



(b) $f_2$



(c) $f_3$



(d) $f_4$

**Questão 2.** A curva por ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&x\,y - x - y = 0\\
&y\,(x-1) - x = 0\\
&y\,(x-1) - (x-1) - 1 = 0\\
&(x-1)\,(y-1) = 1
\end{aligned}$$

Assim, consideremos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} \overline{x} = x - 1 \\ \overline{y} = y - 1 \end{cases}$$

No sistema de coordenadas $\overline{x}\ \overline{y}$, a curva adquire a forma: $\overline{x}\,\overline{y} = 1$. Portanto, a curva é uma hipérbole cujas assíntotas coincidem com os eixos $\overline{x}\ \overline{y}$.

**Questão 3.**

(a) Como a aresta $AB$ é perpendicular à face $BCGF$, em particular esta aresta é perpendicular à diagonal $BG$. Como $AB$ e $BG$ são lados do triângulo $ABG$, concluímos que este triângulo é retângulo em $B$. Portanto:

$$\cos \hat{B} = 0$$

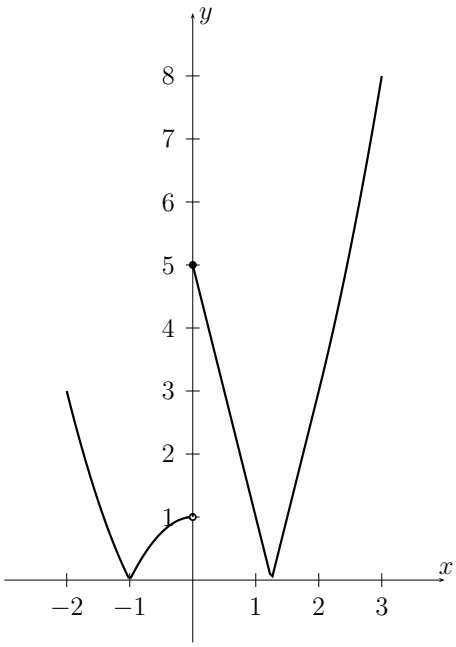
Como os lados $BG$ e $AG$ correspondem, respectivamente, à diagonal da face do cubo e à diagonal do cubo, temos que: $BG = a\sqrt{2}$ e $AG = a\sqrt{3}$. Logo:

$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AG} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cos \hat{G} = \frac{BG}{AG} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(b) Como $ABG$ é retângulo em $B$, temos que sua área é dada por:

$$S = \frac{1}{2}\,AB \cdot BG = \frac{1}{2}\,a \cdot a\sqrt{2} = a^2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Questão 4.** A função é definida como $h(x) = |4x-5|$ em $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leq 1\} = [0,2]$ e como $h(x) = |x^2-1|$ em $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| > 1\} = ]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$. Logo, seu gráfico tem o aspecto:




(a) Fazendo $|4x-5| = 0$, obtemos $x_1 = \frac{5}{4}$ como solução. Como $x_1 \in A$, este ponto é solução de $h(x) = 0$. Fazendo $|x^2-1| = 0$, obtemos $x_2 = -1$ e $x_3 = 1$ como soluções. Como $x_2 \in B$, mas $x_3 \notin B$, concluímos que, destes, apenas $x_2$ é solução de $h(x) = 0$. Logo, as soluções de $h(x) = 0$ são $x = -1$ e $x = \frac{5}{4}$, o que também pode ser constatado pela análise do gráfico ao lado.

(b) Fazendo $|4x-5| = x$, encontramos $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{5}{3}$, ambos pertencentes a $A$. Analisemos os possíveis pontos fixos de $h$ em $B$. Como o trecho do gráfico correspondente a $]-\infty, 0[$ está contido no 2º quadrante, não pode haver pontos fixos de $h$ neste intervalo. Além disso, verificamos que $h(2) = 3 > 2$ e que $h(x) - x$ é estritamente crescente para $x > 2$. Portanto, não pode haver pontos fixos de $h$ em $]2, +\infty[$. Logo, os únicos pontos fixos de $h$ são $1$ e $\frac{5}{3}$.

(c) Nos interiores dos conjuntos $A$ e $B$, a função é certamente contínua, pois cada uma das expressão algébricas são obtidas por meio de composição de funções contínuas. Portanto, os únicos candidatos a descontinuidades são os pontos de fronteira deste conjuntos, $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$. Verificamos que:

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} h(x) = 5$$

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^+} h(x) = 3$$

Logo, a única descontinuidade de $h$ ocorre em $x_1 = 0$.

(d) São candidatos a pontos em que a função não é derivável os pontos de fronteira do intervalo, $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$, e os pontos em que as expressões modulares se anulam, $x_3 = -1$ e $x_4 = \frac{5}{4}$. A função é certamente diferenciável nos demais pontos $x \in \mathbb{R}$. Como a função é descontínua em $x_1 = 0$, certamente não é derivável neste ponto. Para verificar a diferenciabilidade nos outros três pontos, como $h'$ está definida na vizinhança de cada um deles, podemos calcular os limites laterais de $h'$:

$$\lim_{x\to 2^-} h'(x) = \lim_{x\to 2^-} 4 = 4 \qquad \lim_{x\to 2^+} h'(x) = \lim_{x\to 2^+} 2x = 4$$

$$\lim_{x\to -1^-} h'(x) = \lim_{x\to -1^-} 2x = -2 \qquad \lim_{x\to -1^+} h'(x) = \lim_{x\to -1^+} (-2x) = 2$$

$$\lim_{x\to \frac{5}{4}^-} h'(x) = \lim_{x\to \frac{5}{4}^-} (-4) = -4 \qquad \lim_{x\to \frac{5}{4}^+} h'(x) = \lim_{x\to \frac{5}{4}^+} 4 = 4$$

Logo, $h$ é derivável em $x_2 = 2$ e não é derivável em $x_3 = -1$ nem em $x_4 = \frac{5}{4}$. Os pontos em que $h$ não é derivável são $-1$ e $\frac{5}{4}$.

(e) De acordo com o argumento do item anterior, $h'$ está definida no domínio $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{5}{4}\right\}$. Neste domínio, $h'$ é dada por:

$$h'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < -1 \\ -2x & \text{se } -1 < x < 0 \\ -4 & \text{se } 0 < x < \frac{5}{4} \\ 4 & \text{se } \frac{5}{4} < x \leq 2 \\ 2x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Examinando as expressões algébricas acima juntamente com os respectivos intervalos de definição, concluímos que não existem pontos $x \in D$ em que $h'(x) = 0$.

(f) Analisando a expressão algébrica e o gráfico de $h$, vemos que a função: admite $(-1, 0)$ e $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ como mínimos absolutos; não admite outros mínimos locais; não admite máximos absolutos; admite $(0, 5)$ como máximo local.

(g) A função não é derivável em $x_2 = \frac{5}{4}$, logo não existe reta tangente neste ponto.

Para determinar a reta tangente em $x_1 = \frac{1}{2}$, observamos que, como a definição de $h$ no intervalo $0 < x < \frac{5}{4}$ coincide com a reta $y = -4\,x + 5$, então está é também a reta tangente ao gráfico de $h$ em $x_1 = \frac{1}{2}$.

Como $h(2) = 3$ e $h'(2) = 4$, a reta tangente em $x_3 = 2$ é dada por $y - 3 = 4\,(x - 2)$, ou seja, $y = 4\,x - 5$.

**Questão 5.** Temos que:

$$g(x) = \ln|x^3 - 1| = \begin{cases} \ln(x^3 - 1) \text{ se } x > 1 \\ \ln(1 - x^3) \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

Para analisar o sinal de $g$, consideremos separadamente os casos $x > 1$ e $x < 1$:

Para $x > 1$, temos:

$$\begin{array}{l} g(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 > 1 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{2} \\ g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \\ g(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x^3 - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < \sqrt[3]{2} \end{array}$$

Para $x < 1$, temos:

$$\begin{array}{l} g(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^3 > 1 \Leftrightarrow x < 0 \\ g(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ g(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < 1 - x^3 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \end{array}$$

Então

$$\begin{array}{l} g(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > \sqrt[3]{2} \\ g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt[3]{2} \\ g(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt[3]{2}\,,\ x \neq 1 \end{array}$$

A derivada primeira de $g$ é dada por:

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{3\,x^2}{x^3 - 1} \text{ se } x > 1 \\ \dfrac{-3\,x^2}{1 - x^3} \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

Isto é:

$$g'(x) = \frac{3\,x^2}{x^3 - 1} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Então:

$$\begin{array}{l} g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1\,,\ x \neq 0 \end{array}$$

A derivada segunda de $g$ é dada por:

$$g''(x) = \frac{6\,x\,(x^3 - 1) - 3\,x^2 \cdot 3\,x^2}{(x^3 - 1)^2} = -3\,x\,\frac{x^3 + 2}{(x^3 - 1)^2}$$

Então:

$$\begin{array}{l} g''(x) > 0 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{2} < x < 0 \\ g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2} \text{ ou } x = 0 \\ g''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt[3]{2}\,,\ 0 < x < 1 \text{ ou } x > 1 \end{array}$$

(a) Como $x^3 - 1 = 0$ para $x = 1$, temos que:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = -\infty$$

(b) Quando $x \to \pm\infty$, temos que $|x^3 - 1| \to \pm\infty$. Logo:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

(c) Dos itens (a) e (b), concluímos que $g$ não admite assíntotas horizontais e possui uma assíntota vertical em $x = 1$.

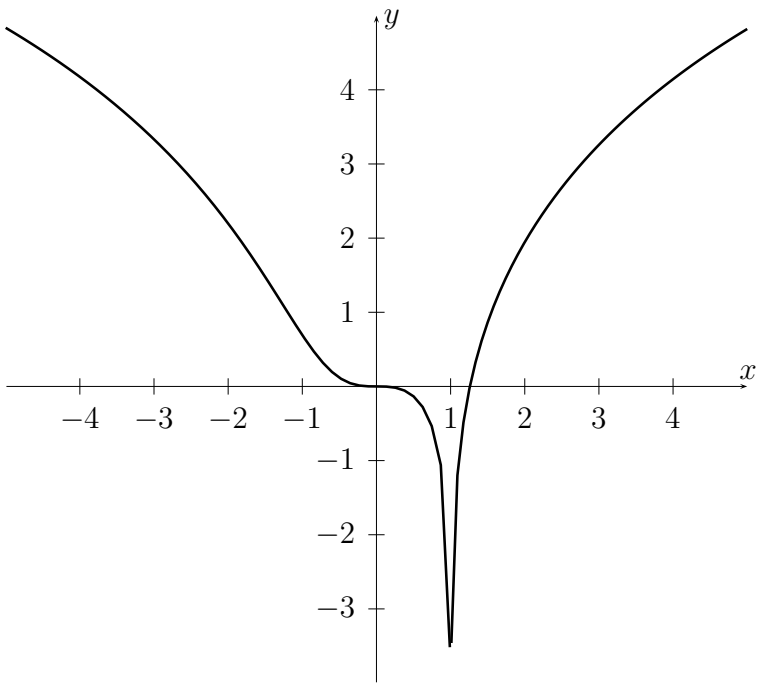
(d) Da análise do sinal da derivada primeira, concluímos que $g$ não admite máximos ou mínimos locais ou absolutos.

(e) Da análise do sinal da derivada primeira, concluímos que: $g$ é crescente para $x > 1$; $g$ é decrescente para $x < 1$.

(f) Da análise do sinal da derivada segunda, concluímos que $g$ possui pontos de inflexão em $(0, 0)$ e $(-\sqrt[3]{2}, \ln 3)$.

(g) Da análise do sinal da derivada segunda, concluímos que: $g$ possui concavidade voltada para cima para $-\sqrt[3]{2} < x < 0$; $g$ possui concavidade voltada para baixo para $x < -\sqrt[3]{2}$, para $0 < x < 1$ e para $x > 1$.

Da análise acima, concluímos que o gráfico de $g$ tem o seguinte aspecto:

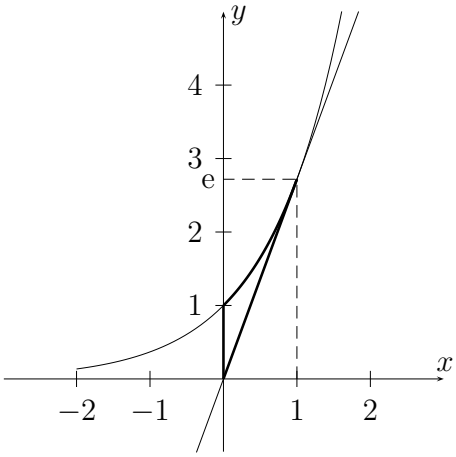


**Questão 6.**

(a) Temos que $y(1) = y'(1) = \mathrm{e}$. Portanto, a reta tangente à curva em $x = 1$ é dada por $y - \mathrm{e} = \mathrm{e}\,(x-1)$, ou seja:

$$y = \mathrm{e}\,x$$

Logo, a região $R$ tem o seguinte aspecto:




(b) Observando o esboço acima, vemos que a área da região pode ser calculada como a área sob o gráfico de $y = \mathrm{e}^x$, para $0 \le x \le 1$, menos a área do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,\mathrm{e})$.

$$S = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,dx - \frac{1}{2}\,\mathrm{e} = \mathrm{e} - 1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e} = \frac{\mathrm{e}}{2} - 1$$

(c) O volume pedido pode ser calculado da seguinte forma:

$$V = \int_0^1 S(x)\,dx$$

em que $S(x)$ é a área da seção gerada pela rotação do segmento determinado entre a curva $y = \mathrm{e}^x$ e a reta $y = \mathrm{e}\,x$, para $0 \le x \le 1$. Observando o esboço acima, vemos que esta seção é um anel circular com raios interior $r_1(x)$ e exterior $r_2(x)$ dados por:

$$r_1(x) = \mathrm{e} - \mathrm{e}^x \qquad r_2(x) = \mathrm{e} - \mathrm{e}\,x$$

Logo:

$$\begin{aligned}
S(x) &= \pi\,r_2^2(x) - \pi\,r_1^2(x)\\
&= \pi\,\left[(\mathrm{e} - \mathrm{e}\,x)^2 - (\mathrm{e} - \mathrm{e}^x)^2\right]\\
&= \pi\,\left[(\mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e}\,\mathrm{e}\,x + \mathrm{e}^2 x^2) - (\mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e}\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x})\right]\\
&= \pi\,\left[2\,\mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^2\,x^2 - 2\,\mathrm{e}^2\,x\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(x) &= \pi \int_0^1 \left[2\,\mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^2\,x^2 - 2\,\mathrm{e}^2\,x\right]\,dx\\
&= \pi\,\left[2\,\mathrm{e}^{x+1} - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \mathrm{e}^2\,\frac{x^3}{3} - \mathrm{e}^2\,x^2\right]_0^1\\
&= \pi\,\left[2\,\mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{e}^2}{3} - \mathrm{e}^2\right]\\
&= \pi\,\left(\frac{5}{6}\,\mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e} + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

**Questão 7.**

(a) Não. Basta considerar como contra-exemplo a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \neq 1 \\ 0 \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

Então, $f$ está definida em um domínio limitado e fechado, mas não admite um máximo.

(b) Não. Basta considerar como contra-exemplo a função $f : ]0,1[ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Então, $f$ é contínua, está definida em um domínio limitado, mas não admite um máximo.

(c) Não. Basta considerar como contra-exemplo a função $f : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Então, $f$ é contínua, está definida em um domínio fechado, mas não admite um máximo.

(d) Não. Basta considerar como contra-exemplo a função $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Então, $f$ satisfaz as hipóteses do Teorema Weierstrass, mas o máximo não é único.

**Questão 8.** Fixemos um elemento $x_1 \in \mathbb{R}$ qualquer. Pela definição de limite no infinito, aplicada ao número $f(x_1) > 0$, temos que: como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq f(x_1)$ $\forall\, x \leq a$; como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, então existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq f(x_1)$ $\forall\, x \geq b$. Podemos supor, sem perda de generalidade, $a < b$.

Por outro lado, pelo Teorema de Weierstrass, existe $x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(x_2)$ $\forall\, x \in [a, b]$.

Assim, basta escolhermos $x_0$ tal que $f(x_0) = \max\{f(x_1), f(x_2)\}$ (isto é, $x_0$ será o elemento dentre $x_1$ ou $x_2$ que tiver a maior imagem). Então, dado $x \in \mathbb{R}$, temos que: se $x \leq a$ ou $x \geq b$, então $f(x) \leq f(x_1) \leq f(x_0)$; se $a \leq x \leq b$, então $f(x) \leq f(x_2) \leq f(x_0)$.