TEXTO I

Students' Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey

Hendrik Radatz

Student's errors in mathematics education are not simply a result of ignorance and situational accidents. Most student mistakes are not due to unsureness, carelessness, or unique situational conditions, as was assumed at the beginnings of the behaviouristic theory of education. Rather, student errors are the result or the product of previous experiences in the mathematics classroom. According to the present state of error research, student errors

- are causally determined, and very often systematic;
- are persistent and will last for several school years, unless the teacher intervenes pedagogically;
- can be analyzed and described as error techniques;
- can be derived, as to their causes, from certain difficulties experienced by students while receiving and processing information in the mathematical learning process, or from effects of the interaction of variables acting on mathematical education (teacher, curriculum, student, academic environment, etc.).

Student errors "illustrate" individual difficulties; they show that the student has failed to understand or grasp certain concepts, techniques, problems, etc., in a "scientific" or "adult" manner. Analyzing student errors may reveal the faulty problem-solving process and provide information on the understanding of and the attitudes toward mathematical problems.

From this perspective, error analysis gains importance in two respects. First, with regard to the requirements of academic practice, as an opportunity to diagnose learning difficulties, as a method of developing criteria for differentiating mathematical education, and as a means to create more awareness and support for the performance and understanding of individual students. Second, error analysis seems to be a remarkable starting point for the research on the mathematical teaching-learning process. Error analysis must be considered a promising research strategy for clarifying some fundamental questions of mathematics learning.

The following is an attempt to give a brief historical survey. Of course this enumeration will not be exhaustive, nor will evaluation be free of a certain subjectivity. (...) Error analysis in mathematical education has a long history, and is characterized by very different approaches and interests, which were shaped both by the contemporary mainstream of the sciences concerned, pedagogy and psychology, and by the objectives and forms of organization determined by the respective educational policies.

Three focal points and tendencies can be discerned:

1. Arithmetic constitutes the dominating subject matter area for the majority of the studies. It is only after the recent incisive reform concerning the content of mathematical curricula that research interest has extended to other topics of mathematical education.
2. Error theory was developed in Germany sporadically, with great intervals in between, and with little continuity, as opposed to its development in the U.S., for instance.
3. There is a pluralism of theoretical approaches to and explanatory attempts about the causes of student errors in the mathematical learning process, while error techniques in certain subject matter areas (e.g. written calculation methods within the set $\mathbb{N}$) can be very succinctly described.

Fonte: Radatz, H. (1980). Student' Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. *For the Learning of Mathematics*, vol. 1, pp. 16-20.

Vocabulário dado:

- *behaviouristic theory* – teoria comportamentalista

TEXTO II

Ruler and Compass Constructions

Robin Hartshorne

One of the notable features of Euclid's Elements is his constructive approach to geometry. Many of his propositions are not theorems in the usual sense, that under certain hypotheses a certain result is true. Rather they are construction problems: given certain data, to construct a certain figure. For example, the first proposition of Book I is to construct an equilateral triangle. We could regard these constructions as existence proofs. But they are existence proofs of a very special kind: They are constructive, and the constructions are carried out with specified tools, the ruler (or *straightedge*) and compass. Almost one-third of the propositions in Book I, and all of the propositions in Book IV, are constructions. The constructive approach is even embedded in the initial assumptions of Euclid's geometry, because Postulate 1 says "to draw a straight line from any point to any point," and Postulate 3 says "to describe a circle with any center and distance." A modern mathematician would be more likely to say that there exists a line through any two points, and replace Postulate 3 by a definition of a circle as the set of points equidistant from a given point.

This constructive approach pervades Euclid's *Elements*. There is no figure in the entire work that cannot be constructed with ruler and compass, and this limits the world of subjects to be discussed to those that are constructible. So for example, in Book IV, where Euclid discusses regular polygons inscribed in a circle, we find the triangle, the square, the pentagon, the hexagon, and the regular 15-sided polygon, all of which can be constructed. But there is no mention of a regular 7-sided polygon, for example, and there are no theorems about regular n-gons such as one might find in a modern text. A modern mathematician would never doubt the existence of a regular 7-gon: Just take angles of $2\pi/7$ at the center of the circle, and join corresponding points on the circumference. The question would be rather, is it possible to construct the regular 7-gon with ruler and compass? But for Euclid, it seems that he cannot discuss a figure until he has shown how to construct it. (...)

This brings us to the thorny question of what exactly it means to say that a certain mathematical object exists. For some of the structures considered by modern-day mathematicians, this is indeed a difficult question. But for Euclid there was no doubt, I believe we will not be far from the truth if we say simply that Euclid's geometry only those geometrical figures exist that can be constructed with ruler and compass.

So now let us examine more closely how these ruler and compass constructions work. Look at (I.1), for example: To construct an equilateral triangle on a given line segment. We are given a line segment AB. We draw a circle with center A and radius AB, and another circle with center B and radius BA. These two circles meet at a point C (and also at another point D, which we do not need). With the ruler we draw the lines AC and BC. Then ABC is the required equilateral triangle. (...)

Fonte: *Geometry: Euclid and Beyond*, Robin Hartshorne.

Responda as questões 1 a 6 a seguir, com base no Texto I.

Questão 1. (valor: 0,5) Qual é a causa apontada para os erros dos estudantes no texto?

(a) Resultados ou produtos simples.

(b) Ignorância e acidentes situacionais.

(c) Incerteza ou descuido.

(d) Condições situacionais únicas, como assumia a teoria comportamentalista da educação.

(e) Experiências prévias na sala de aula matemática.

Questão 2. (valor: 0,5) De acordo com o texto, qual das afirmações abaixo **não** pode ser feita sobre erros de estudantes, com base na pesquisa da época?

(a) Com frequência são sistemáticos.

(b) A menos que o professor intervenha, duram por muitos anos.

(c) Persistem severamente até o último ano escolar.

(d) Podem ser resultado de dificuldades experimentadas durante o processo de aprendizagem.

(e) Podem ser resultado da interação de variáveis como o professor, estudante, currículo, ambiente acadêmico, dentre outras.

Questão 3. (valor: 0,5) O texto, ao se referir às potencialidades da análise de erros em matemática, nos alerta para o fato de que:

(a) A análise de erros pode revelar questões mal entendidas pelos alunos, em matemática.

(b) A análise de erros em matemática tem sido tratada sempre com o objetivo de mostrar o que o aluno não sabe.

(c) As contribuições das pesquisas sobre a análise de erros podem ser um bom caminho para a elaboração de livros didáticos de matemática.

(d) A pedagogia e a psicologia devem se fundamentar nas contribuições da análise de erros para orientar os alunos e professores na escola básica.

(e) Deve ser dada maior atenção aos erros cometidos na aprendizagem da geometria, e não da aritmética.

Questão 4. (valor: 0,5) Observe as afirmações abaixo. De acordo com as idéias trazidas no texto, quais delas correspondem à importância do processo de análise de erros?

(I) Possibilitam um diagnóstico das dificuldades que os alunos têm na aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

(II) Constituem um ponto de partida para a pesquisa sobre ensino e aprendizagem de matemática.

(III) Proporcionam aos professores a oportunidade de comparar os erros dos alunos com os seus.

(IV) Dão elementos para a elaboração de melhores instrumentos de avaliação.

(a) **(I)** e **(II)**

(b) **(I)** e **(III)**

(c) **(II)** e **(III)**

(d) **(II)** e **(IV)**

(e) **(III)** e **(IV)**

Questão 5. (valor: 0,5) O autor destaca três pontos focais e tendências na analise de erros em educação matemática. Dentre as afirmações abaixo, assinale a única que está dentre esses pontos destacados.

(a) Apenas recentemente a aritmética dominou esta área de pesquisa, em relação a outros tópicos de educação matemática.

(b) Os interesses de pesquisa sempre tiveram grande extensão sobre conteúdos curriculares e outros tópicos em educação matemática.

(c) A teoria dos erros foi desenvolvida com grandes intervalos na Alemanha e com pouca continuidade nos Estados Unidos.

(d) Há uma diversidade de teorias que tentam explicar as causas dos erros dos estudantes no processo de aprendizagem.

(e) Técnicas de erros com métodos escritos de cálculo sobre números naturais são difíceis de descrever.

Questão 6. (valor: 2,5) Faça um resumo, de no máximo vinte linhas, em língua portuguesa, das principais idéias do segundo parágrafo do texto (trecho entre *From this perspective* e *fundamental question of mathematics learning*).

Responda as questões 7 a 12 a seguir, com base no Texto II.

Questão 7. (valor: 0,5) Hartshorne afirma que muitas das proposições de Euclides, em *Os Elementos*, não são teoremas no sentido usual da palavra. Como o autor justifica esta afirmação?

(a) Uma das notáveis características dos *Elementos* de Euclides é sua abordagem construtiva para a geometria.

(b) Os resultados são válidos apenas sob certas hipóteses.

(c) As proposições são, na verdade, problemas de construção.

(d) A primeira proposição do Livro I, por exemplo, é construir um triângulo equilátero.

(e) A primeira proposição do Livro I dá um exemplo de construção de um triângulo equilátero.

Questão 8. (valor: 0,5) Por que o autor considera as provas de existência em *Os Elementos* especiais?

(a) Em muitas das proposições, sob certas hipóteses, certos resultados são verdadeiros.

(b) As provas descrevem construções realizadas com régua e compasso.

(c) Para realizar as construções são carregadas ferramentas especificadas.

(d) Quase um terço das proposições do Livro I e todas as proposições do Livro IV são construções.

(e) A abordagem construtiva está presente mesmo nos Postulados.

Questão 9. (valor: 0,5) Segundo o texto, Euclides não faz menção ao polígono regular de 7 lados. Por que este polígono não é tratado em *Os Elementos*, assim como diversos outros?

(a) No livro IV, Euclides discute polígonos que podem ser inscritos no círculo.

(b) Os polígonos regulares que podem ser inscritos no círculo são o triângulo, o quadrado, o pentágono, o hexágono e o polígono de 15 lados.

(c) Não há teoremas sobre polígonos de n lados como os que poderiam ser encontrados em textos modernos.

(d) O polígono regular de 7 lados pode ser construído com régua e compasso.

(e) O polígono regular de 7 lados não pode ser construído com régua e compasso.

Questão 10. (valor: 0,5) Na construção descrita no último parágrafo do texto, o que podemos afirmar sobre o ponto D?

(a) Pertence aos segmento AB.

(b) Pertence ao círculo de centro A e raio AB.

(c) Encontra o ponto C.

(d) Pertence à reta BC.

(e) É interior ao triângulo ABC.

Questão 11. (valor: 0,5) Segundo o texto, qual é o critério de existência para objetos geométricos na geometria de Euclides?

(a) Em muitas proposições, um resultado é válido sob certas hipóteses.

(b) De acordo com Postulados 1 e 3, só podem ser construídos objetos por meio de retas ligando dois pontos e círculos descritos com qualquer centro e qualquer raio.

(c) Só existem os objetos que podem ser representados por meio de alguma figura plana.

(d) Uma figura existe se pode ser construída com régua e compasso.

(e) A existência dos objetos deve ser demonstrada por meio de proposições.

Questão 12. (valor: 2,5) Faça um resumo, de no máximo dez linhas, em língua portuguesa, das principais idéias do primeiro parágrafo do texto (trecho entre *One of the notable features* até *points equidistant from a given point*).

Gabarito das questões objetivas

1	2	3	4	5	7	8	9	10	11
e	c	a	a	d	c	b	e	b	d