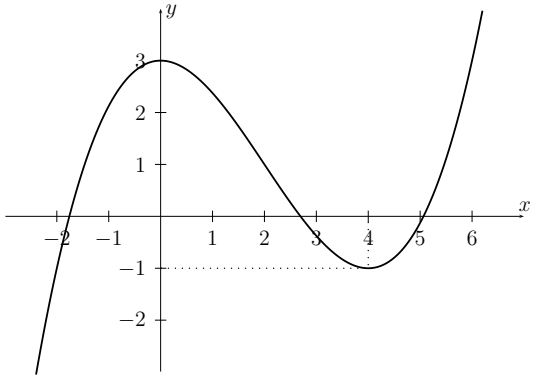
UFRJ - Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
www.pg.im.ufrj.br/pemat
Mestrado em Ensino de Matemática
Seleção – 2010
Etapa 2

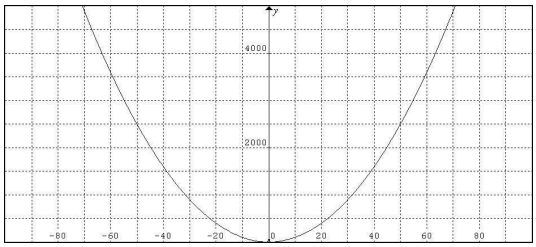
Questão 1. Considere a função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x^3 - 3x$. A figura ao lado mostra um trecho do gráfico de uma função $p_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na forma $p_1(x) = p(a\,x + b) + c$, em que a, b e c são constantes reais. Dentre os itens abaixo, escolha aquele que indica os valores possíveis para as constantes a, b e c. Justifique sua resposta.



(a) $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$ (b) $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ (c) $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$

(d) $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = -1$ (e) $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = 1$ (f) $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 1$

Questão 2. A figura ao lado representa o gráfico da função $q : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $q(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, traçado em um programa de computador para $x \in [-100, 100]$ e $y \in [0, 5000]$. Justifique suas respostas.



(a) O gráfico de q é uma parábola?

(b) O ponto de $x = 0$ é um ponto de mínimo de q?

(c) A função q possui extremos locais ou absolutos? Em caso afirmativo, indique quantos.

(d) A função q possui assíntotas verticais ou horizontais?

(e) Discuta o aspecto do gráfico que aparece na figura, comentando as respostas dos itens anteriores.

Questão 3. Em cada um dos itens abaixo, esboce e identifique o lugar geométrico no $\mathbb{R}^3$.

(a) Dos pontos que eqüidistam do plano $z = 0$ e do ponto $(0, 0, 1)$.

(b) Dos pontos que eqüidistam do eixo x e do ponto $(0, 0, 1)$.

(c) Dos pontos que eqüidistam do plano $z = 1$ e do eixo x.

Questão 4. Considere o seguinte problema: *Inscrever um quadrado $PQRS$ em um triângulo ABC dado, de tal forma que o lado PQ esteja contido em AB.* Resolva este problema usando coordenadas cartesianas.

Questão 5. Considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^3 - 3\,x + k$, em que k é uma constante real. Em cada um dos itens abaixo, determine: o(s) valor(es) de k para o(s) qual(is) h satisfaz a condição dada (caso tais valores existam); o número total de raízes complexas de h; a multiplicidade de cada uma destas raízes.

(a) h não possui nenhuma raiz real.

(b) h possui uma única raiz real.

(c) h possui exatamente duas raízes reais.

(d) h possui três raízes reais.

Questão 6. Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo **todas** as condições abaixo.

1. f é contínua;
2. $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$;
4. f tem um mínimo absoluto em $x = 0$;
5. f não tem máximos locais ou absolutos.

Questão 7. Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = x\,\mathrm{e}^{(x^{-3})}$$

Faça um esboço do gráfico de g indicando (caso existam):

(a) os limites $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$;

(b) os limites $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$;

(c) as assíntotas horizontais e verticais de g ;

(d) os máximos e mínimos locais e absolutos de g ;

(e) os intervalos em que g é crescente e os intervalos em que g é decrescente;

(f) os pontos de inflexão de g ;

(g) os intervalos em que a concavidade de g é voltada para cima e os intervalos em que a concavidade de g é voltada para baixo.

Questão 8. Sejam S_1 a área limitada entre a curva $y = x^2\,\mathrm{e}^{(x^2)}$, os dois eixos coordenados e a reta $x = 2$ e S_2 a área limitada entre a curva $y = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^x$, os dois eixos coordenados e a reta $x = 4$. Mostre que $S_2 = 2\,S_1$.

Questão 9.

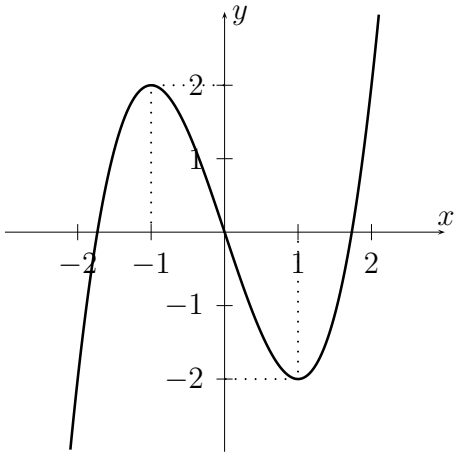
(a) Mostre que toda seqüência monótona e limitada é convergente.

(b) Mostre, com contra-exemplos, que as duas hipóteses do teorema acima são indispensáveis (isto é, que o teorema não é válido sem as mesmas).

(c) Enuncie a recíproca do teorema enunciado no item (a) e verifique se esta recíproca é verdadeira. Justifique rigorosamente a sua resposta.

UFRJ - Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
www.pg.im.ufrj.br/pemat
Mestrado em Ensino de Matemática
Seleção – 2010
Etapa 2 – Gabarito

Questão 1. A derivada de p é dada por $p'(x) = 3\,x^2 - 3$. Analisando o sinal de p', concluímos que p é crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$ e decrescente em $]-1, 1[$. Portanto, p admite um ponto de máximo em $(-1, 2)$ e um ponto de mínimo em $(1, -2)$. Assim, o gráfico de p tem o aspecto mostrado ao lado.
Para encontrar os valores das constantes a, b e c, devemos comparar este gráfico com o de p_1 e determinar as transformações geométricas que p sofreu para gerar p_1.



Em primeiro lugar, observamos que a distância entre as abscissas dos extremos locais é de 2 unidades em p e de 4 unidades em p_1. Logo, p sofreu uma expansão na direção horizontal de razão 2, então, $a = \frac{1}{2}$. Vemos também que o gráfico sofreu uma translação horizontal no sentido positivo, logo a constante b deve ser negativa. Considerando as alternativas dadas, devemos ter $b = -1$. Finalmente, p sofreu uma translação vertical no sentido positivo, logo a constante c deve ser positiva. Portanto, considerando as alternativas, $c = 1$.

Logo, a alternativa correta é a (e).

Questão 2.

(a) Não, pois q não é uma função do segundo grau.

(b) O ponto $x = 0$ não pertence ao domínio de q. Em particular, não pode ser um ponto de mínimo.

(c) A derivada de q é dada por $q'(x) = 2\,x - \dfrac{2}{x^3}$, cujas raízes são os pontos $x = \pm 1$. A derivada segunda de q é dada por $q''(x) = 2 + \dfrac{6}{x^4}$. Logo $q''(-1) > 0$ e $q''(1) > 0$. Segue que q admite pontos de mínimo, $(-1, 2)$ e $(1, 2)$, e não admite pontos de máximo.

(d) Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} q(x) = +\infty$, então q não admite assíntotas horizontais.
Como q é contínua em todos os pontos de seu domínio o único candidato a assíntota vertical é $x = 0$. De fato, como $\lim\limits_{x \to 0} q(x) = +\infty$, temos que $x = 0$ é assíntota vertical de q.

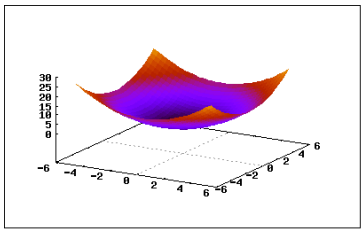
(e) Para os valores de x em que o gráfico é exibido, podemos considerar que $\dfrac{1}{x^2}$ é desprezível em comparação a x^2. Logo, o gráfico de q adquire um aspecto muito semelhante ao de $y = x^2$. Por esta razão, a figura pode causar a impressão errônea de que o gráfico de q é uma parábola e de que o ponto $(0, 0)$ (que nem mesmo pertence ao gráfico) é um ponto de mínimo.
Além disso, os dois pontos de mínimo de q, bem como os ramos do gráfico que ficam acima destes pontos e tendem a infinito, ocorrem no intervalo $x \in [-1, 1]$. Como este intervalo é muito pequeno em relação às dimensões da janela gráfica, a assíntota e os pontos de mínimo não aparecem na figura.

Questão 3.

(a) A distância de um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao plano $z = 0$ é dada por $|z|$. Assim, o lugar geométrico considerado é dado pela equação: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$.

Desenvolvendo esta equação, obtemos: $z = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2+1)$.

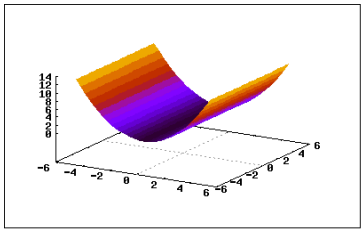
Logo, o lugar geométrico é um parabolóide circular voltado para o sentido positivo do eixo z e com vértice em $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$.



(b) A distância de um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao eixo x é dada por $\sqrt{y^2 + z^2}$. Assim, o lugar geométrico considerado é dado pela equação: $\sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$.

Desenvolvendo esta equação, obtemos: $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + 1)$.

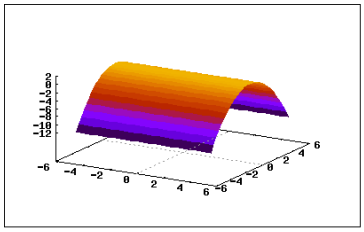
Logo, o lugar geométrico é um cilindro parabólico paralelo ao eixo y e voltado para o sentido positivo do eixo z.



(c) A distância de um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao plano $z = 1$ é dada por $|z-1|$ e a distância de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao eixo x é dada por $\sqrt{y^2 + z^2}$. Assim, o lugar geométrico considerado é dado pela equação: $|z-1| = \sqrt{y^2 + z^2}$.

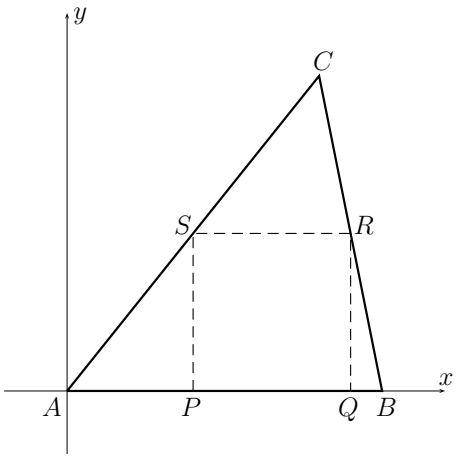
Desenvolvendo esta equação, obtemos: $z = \dfrac{1}{2}(1 - y^2)$.

Logo, o lugar geométrico é um cilindro parabólico paralelo ao eixo x e voltado para o sentido negativo do eixo z.



Questão 4. Consideremos um sistema de eixos ortogonais com origem no vértice A do triângulo de tal forma que o lado AB esteja contido no eixo das abscissas, como mostra a figura ao lado. Sejam $(a, 0)$ e (b, c) as coordenadas dos vértices B e C, respectivamente. Assim, na formulação em coordenadas, a, b e c são os dados do problema.

Devemos descobrir onde devem estar localizados os vértices P e Q de tal forma que o quadrado $PQRS$ satisfaça as condições do problema. Sejam $(x_P, 0)$ e $(x_Q, 0)$ as coordenadas dos pontos P e Q, respectivamente. Seja ℓ o lado do quadrado. Então, as coordenadas dos pontos R e S são dadas por (x_Q, ℓ) e (x_P, ℓ), respectivamente. Além disso:



$$x_Q - x_P = \ell$$

A equação das retas AC e BC, respectivamente, são dadas por $y = \dfrac{c}{b}\,x$ e $y = \dfrac{c}{b-a}\,(x-a)$.

Como o vértice S pertence à reta AC e R pertence à reta BC, as coordenadas destes pontos satisfazem as equações acima. Isto nos dá as seguintes equações:

$$\ell = \frac{c}{b}\,x_P \qquad \ell = \frac{c}{b-a}\,(x_Q - a)$$

Assim, temos três equações e três incógnitas (x_P, x_Q e ℓ). Fazendo $x_Q = x_P + \ell$ na equação acima à direita e isolando x_P nas duas equações, temos:

$$x_P = \frac{b\,\ell}{c} \qquad x_P = \frac{(b-a)\,\ell}{c} + a - \ell = \frac{1}{c}\,(b\,\ell - a\,\ell + a\,c - c\,\ell)$$

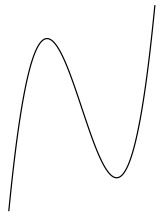
Logo, $b\,\ell = b\,\ell - a\,\ell + a\,c - c\,\ell$, portanto:

$$\ell = \frac{a\,c}{a+c}$$

Isto nos permite determinar x_P e x_Q:

$$x_P = \frac{a\,b}{a+c} \qquad x_Q = x_P + \ell = \frac{a\,(b+c)}{a+c}$$

Questão 5. A derivada de h é dada por $h'(x) = 3\,x^2 + 3$. Logo, h é crescente em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$, decrescente em $]-1, 1[$, admite um ponto de máximo em $(-1, 2+k)$ e um ponto de mínimo em $(1, -2+k)$. Assim, o gráfico de h tem o aspecto mostrado ao lado, sendo que valor de k determina a posição vertical.



(a) Como h é um polinômio de grau ímpar, admite pelo menos uma raíz real. Logo, não existem valores de k satisfazendo esta condição.

(b) Considerando a análise do gráfico de h, para que a função possua uma única raiz real, o ponto de máximo e o ponto de mínimo devem estar ambos de um mesmo lado do eixo x. Para que isto ocorra, as ordenadas destes pontos devem ter o mesmo sinal. Assim, devemos ter $(k+2)\,(k-2) > 0$. A solução desta equação em k é $|k| > 2$, isto é, $k < -2$ ou $k > 2$. Logo, estes são os valores de k para os quais h tem uma única raiz real.

Se esta única raiz real de h fosse múltipla, teria que ser também uma raiz de h'. Como certamente este não é o caso, esta raiz tem multiplicidade 1. Como a soma das multiplicidades das raízes deve ser igual ao grau do polinômio, então h certamente têm raízes complexas não reais. Como as raízes não reais de um polinômio com coeficientes reais são conjugadas, então h tem outras duas raízes complexas.

Assim, h tem três raízes complexas, todas simples, das quais uma é real e duas são não reais.

(c) Para que h tenha exatamente duas raízes reais, um dos extremos locais da função deve ser também uma raiz. Assim, devemos ter $k = -2$ ou $k = 2$.

Neste caso, uma das raízes reais de h é também raiz de h', logo a multiplicidade desta raiz é pelo menos 2. Como h tem exatamente duas raízes reais e a soma de suas multiplicidades deve ser igual a 3, então a única possibilidade é que uma das raízes tenha multiplicidade 1 e a outra 2.

Assim, h tem duas raízes complexas, todas reais, sendo uma simples e outra dupla.

(d) Para que h tenha três raízes reais, o ponto de máximo e o ponto de mínimo devem estar em lados opostos do eixo x. Então, as ordenadas destes pontos devem ter sinais opostos. Assim, devemos ter $(k+2)\,(k-2) < 0$. A solução desta equação é dada por $|k| < 2$, isto é, $-2 < k < 2$. Logo, estes são os valores de k para os quais h tem três raízes reais.

Como a soma das multiplicidades das raízes deve ser igual a 3, concluímos que h tem três raízes complexas, todas reais e simples.

Questão 6. Podemos exibir uma função racional (isto é, quociente de dois polinômios) satisfazendo a todas as condições dadas.

Para que esta função satisfaça à condição (1), o denominador não deve ter raízes reais. Para que satisfaça à condição (2), podemos tomar para denominador e numerador polinômios não negativos. Para que satisfaça à condição (3), os polinômios do numerador e do denominador devem ter mesmo grau e ter mesmo coeficiente nos termos de maior grau.

Se tomarmos x^2 como numerador, o gráfico de f passará necessariamente pelo ponto $(0,0)$. Para que este seja um mínimo absoluto, devemos escolher um denominador estritamente maior que x^2. Se tomarmos, por exemplo, x^2+1, teremos:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

Então, $f'(x) = \dfrac{2\,x}{(x^2+1)^2}$. A única raiz de f' é portanto $x=0$. Como f é diferenciável em todo o seu domínio, segue que f não tem pontos de máximo locais ou absolutos.

Logo, f satisfaz todas as condições pedidas.

Questão 7. Em primeiro lugar, observamos que, como $\mathrm{e}^{(x^{-3})} > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, então $g(x) > 0$ para $x > 0$ e $g(x) < 0$ para $x < 0$.

Quando $x \to 0^-$, temos que $\mathrm{e}^{(x^{-3})} \to 0$, logo $\lim\limits_{x\to 0^-} x\,\mathrm{e}^{(x^{-3})} = 0$.

Quando $x \to 0^+$, temos que $\mathrm{e}^{(x^{-3})} \to +\infty$, logo, para calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,\mathrm{e}^{(x^{-3})}$, esbarramos em uma indeterminação. Pela regra de L'Hospital, temos:

$$\lim_{x\to 0^+} x\,\mathrm{e}^{(x^{-3})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{(x^{-3})}}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-3\,x^{-4}\,\mathrm{e}^{(x^{-3})}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\,\mathrm{e}^{(x^{-3})}}{x^2} = +\infty$$

Segue que g tem uma assíntota vertical em $x=0$.

Quando $x \to \pm\infty$, temos que $\mathrm{e}^{(x^{-3})} \to 1$, logo:

$$\lim_{x\to -\infty} x\,\mathrm{e}^{(x^{-3})} = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} x\,\mathrm{e}^{(x^{-3})} = +\infty$$

Segue que g não tem assíntotas horizontais.

A derivada de g é dada por:

$$g'(x) = \mathrm{e}^{(x^{-3})} + x\left(-3\,x^{-4}\,\mathrm{e}^{(x^{-3})}\right) = \left(1-3\,x^{-3}\right)\,\mathrm{e}^{(x^{-3})}$$

Como $\mathrm{e}^{(x^{-3})} > 0$, para analisar o sinal de g', basta considerar o sinal de $1-3\,x^{-3} = \dfrac{x^3-3}{x^3}$. Temos que: $x^3-3>0$ para $x > \sqrt[3]{3}$ e $x^3-3<0$ para $x<\sqrt[3]{3}$; $x^3>0$ para $x>0$ e $x^3<0$ para $x<0$.

Logo: $g(x)>0$ para $x<0$ e para $x>\sqrt[3]{3}$; $g(x)<0$ para $0<x<\sqrt[3]{3}$.

Então, g é crescente em $]-\infty,0[$ e em $]\sqrt[3]{3},+\infty[$ e decrescente em $]0,\sqrt[3]{3}[$ e

A derivada segunda de g é dada por:

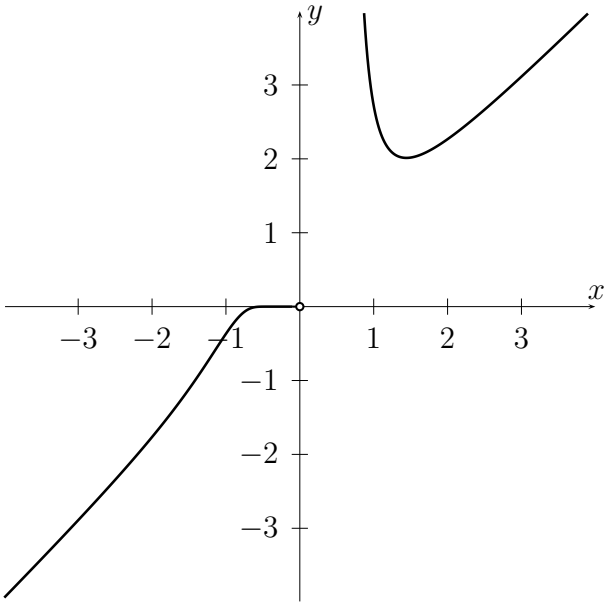
$$g''(x) = 9\,x^{-4}\,\mathrm{e}^{(x^{-3})} + \left(1-3\,x^{-3}\right)\,(-3\,x^{-4})\,\mathrm{e}^{(x^{-3})} = \left(6\,x^{-4}+9\,x^{-7}\right)\,\mathrm{e}^{(x^{-3})}$$

Para analisar o sinal de g'', basta considerar o sinal de $6\,x^{-4}+9\,x^{-7} = \dfrac{3}{x^7}\,\left(2x^3+3\right)$. Temos que: $2x^3+3>0$ para $x>-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ e $x^3-3<0$ para $x<-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; $x^7>0$ para $x>0$ e $x^7<0$ para $x<0$.

Segue que $g(x)>0$ para $x<-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ e para $x>0$ e que $g(x)<0$ para $-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}<x<0$.

Então, g tem concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right[$ e em $]0, +\infty[$ e para baixo em $\left]-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, 0\right[$.

Da análise acima, concluímos que o gráfico de g tem o seguinte aspecto:



Da análise das derivadas e do gráfico, observamos ainda que:

- g tem um ponto de mínimo local em $\left(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\right)$;
- g não tem pontos de mínimo absolutos;
- g não tem pontos de máximo locais ou absolutos;
- g tem um ponto de inflexão em $\left(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$;

Questão 8. A área S_1 é dada por:

$$S_1 = \int_0^2 x^2\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = x^2$, temos que: $du = 2\,x\,dx = 2\sqrt{u}\,dx$, $x = 0 \Rightarrow u = 0$ e $x = 2 \Rightarrow u = 4$. Logo, na varíavel u, a integral acima assume a forma:

$$S_1 = \int_0^4 u\,\mathrm{e}^u\,\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{u}\,\mathrm{e}^u\,du = \frac{1}{2}\,S_2$$

Logo, $S_2 = 2\,S_1$.

Questão 9.

(a) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência monótota, digamos não decrescente, e limitada. Seja $X = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Como X é limitado, existe $s = \sup X$.
Seja $\varepsilon > 0$. Como $s = \sup X$, existe pelo menos um elemento de X no intervalo $]\,s-\varepsilon, s\,]$. Isto é, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s - \varepsilon < x_{n_0} \leq s$. Como x_n é monótona não decrescente, temos que $x_{n_0} \leq x_n\ \forall\, n \geq n_0$. Como $s = \sup X$, temos que $x_n < s\ \forall\, n \in N$. Logo, $s - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < s\ \forall\, n \geq n_0$. Em particular, segue que:

$$|x_n - s| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_0$$

Logo, $s = \lim x_n$.

(b) Seja $a_n = n$. Então a_n é monótota, não limitada e não é convergente.
Seja $b_n = (-1)^n$. Então b_n não é monótota, é limitada e não é convergente.

(c) O enunciado da recíproca do teorema seria: *Toda seqüência convergente é monótona e limitada*.
Esta recíproca não é verdadeira, pois a seqüência $c_n = (-1)^n\,\dfrac{1}{n}$, por exemplo, é convergente mas não é monótona.