UFRJ - Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
www.pg.im.ufrj.br/pemat
Mestrado em Ensino de Matemática
Seleção – 2009
Etapa 2

Questão 1. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando rigorosamente as suas respostas.

(a) Seja $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Afirmar que f não tende a 0 quando x tende a $+\infty$ é equivalente a afirmar que $\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq 0$.

(b) Se $f :]a, b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável e estritamente crescente, então sua derivada é estritamente positiva.

(c) Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável e sua derivada é estritamente positiva, então f é crescente.

(d) Existe um reta $r \subset \mathbb{R}^2$, passando pela origem, tal que todos os pontos pertencentes a r têm ambas as coordenadas racionais.

(e) Existe um reta $r \subset \mathbb{R}^2$, passando pela origem, tal que nenhum ponto pertencente a r têm ambas as coordenadas racionais.

Questão 2. Considere os pontos $A(1, 0, -1)$, $B(0, 1, -1)$, $C(2, 0, -1)$ e $E(2, 1, -2)$. Sejam r a reta que contém A e B e Π o plano que contém A, B e C.

(a) Determine o ponto H, de interseção de Π com a reta s, que é perpendicular a Π e passa por E.

(b) Determine a equação do plano Θ, que contém o ponto H e é perpendicular a r.

(c) Qual é a relação entre os planos Π e Θ? E entre o plano Θ e a reta s?

Questão 3. Sejam $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ tais que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

(a) Que condição devem satisfazer as coordenadas de A, B, C e D?

(b) Que condições devem satisfazer as coordenadas de um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ para que P esteja no interior do paralelogramo $ABCD$.

(c) Que condições devem satisfazer as coordenadas de um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ para que P esteja no interior do triângulo ABC.

Questão 4. Seja $\mathcal{Q}$ o quadrado de vértices nos pontos $A_1(1, 1)$, $A_2(-1, 1)$, $A_3(-1, -1)$ e $A_4(1, -1)$. Considere $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$ cinco círculos distintos e de mesmo raio r, contidos no interior de $\mathcal{Q}$, de forma que:

1. cada círculo $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$ é simultaneamente tangente a dois lados consecutivos de $\mathcal{Q}$;
2. o círculo $\mathcal{C}_0$ tem centro na origem e é tangente a todos os outros círculos $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$.

Faça um esboço representando a situação e determine r.

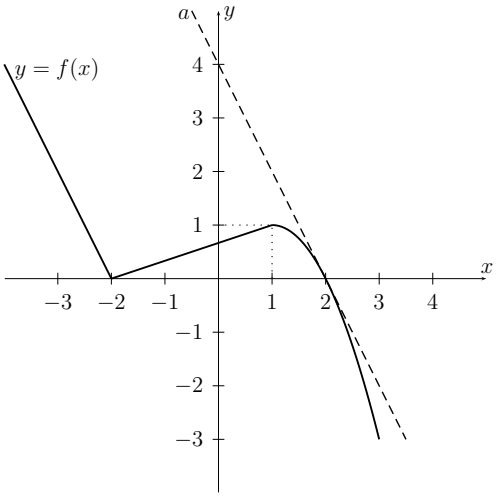
Questão 5. Considere a função $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $s(x) = |x| \operatorname{sen}(x)$.

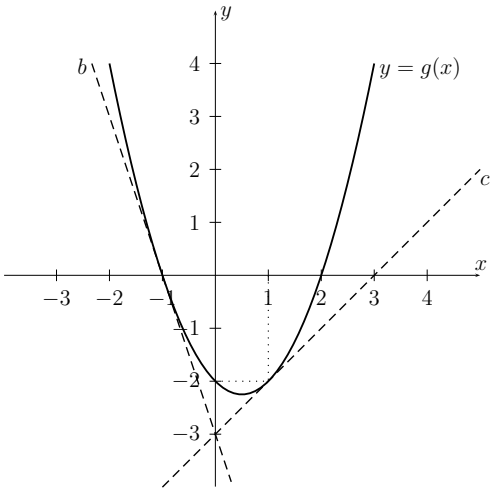
(a) Mostre que o gráfico de s fica limitado entre duas retas, que tocam o gráfico em infinitos pontos. Determine esses pontos.

(b) Determine os valores de x em que s é diferenciável e encontre a função s'.

(c) Os máximos locais da função s ocorrem para os mesmos valores de x que os máximos locais da função seno? Justifique a sua resposta.

Questão 6. As figuras abaixo representam os gráficos de duas funções f e g. A reta a é tangente ao gráfico de f no ponto $(2,0)$. As retas b e c são tangentes ao gráfico de g nos pontos $(-1,0)$ e $(1,-2)$, respectivamente. Os trechos do gráfico de f correspondentes a $x<-2$ e a $-2<x<1$ são segmentos de reta. Determine, se possível, os valores da derivada da função $f\circ g$ nos pontos $x_1=-1$ e $x_2=1$. Justifique sua resposta.





Questão 7. Considere a função $h:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definida por: $h(x)=\dfrac{\ln|3\,x|}{x^3}$. Faça um esboço do gráfico de h indicando (caso existam):

(a) os limites $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$;

(b) os limites $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$;

(c) as assíntotas horizontais e verticais de h;

(d) os máximos e mínimos locais e absolutos de h;

(e) os intervalos em que h é crescente e os intervalos em que h é decrescente;

(f) os pontos de inflexão de h;

(g) os intervalos em que a concavidade de h é voltada para cima e os intervalos em que a concavidade de h é voltada para baixo.

Questão 8. Considere a função $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt$. Faça um esboço do gráfico de φ no intervalo $\left]-2\sqrt{\pi},2\sqrt{\pi}\right[$.

Questão 9.

(a) Enuncie a definição de convergência de seqüências de números reais e interprete esta definição geometricamente.

(b) Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de números reais. Suponha que exista $x_0\in\mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: $\forall\,\varepsilon>0$ existem infinitos índices n tais que $|x_n-x_0|<\varepsilon$. Podemos afirmar que x_0 é o limite de (x_n)?

Questão 10. Considere as seguintes seqüências de números reais: $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ e $b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}$, em que α é um número real maior que 1.

(a) Sabemos que (a_n) é divergente. Mostre que (a_n) é monótona. A seqüência (a_n) é limitada? Justifique sua resposta.

(b) A seqüência (b_n) é monótona? E limitada? Justifique sua resposta.

(c) O que podemos concluir sobre a seqüência (b_n) com base no item anterior?

UFRJ - Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
www.pg.im.ufrj.br/pemat
Mestrado em Ensino de Matemática
Seleção – 2009
Etapa 2 – Gabarito

Questão 1.

(a) Falso.
Contra-exemplo: $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$.
Temos que f não tende a 0 quando x tende $+\infty$, mas não é correto afirmar que $\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq 0$, uma vez que este limite não existe.

(b) Falso.
Contra-exemplo: $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.
Temos que f é diferenciável e estritamente crescente, mas $f'(0) = 0$.

(c) Falso.
Contra-exemplo: $f :]-1, 0[\cup]0, 1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ x & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$.
Temos que $f'(x) = 1 \ \forall x$, mas f não é crescente.

(d) Falso.
Suponhamos que existisse tal reta r. Tomemos um ponto $(x_1, y_1) \in r$. Então $x_1, y_1 \in \mathbb{Q}$. Como r passa pela origem, então $(\pi x_1, \pi y_1) \in r$. Mas isso implicaria $\pi x_1 \in \mathbb{Q}$, o que é uma contradição.

(e) Verdadeiro.
Tomemos, por exemplo, r a reta de equação $y = \sqrt{2}\, x$. Dado $(x, y) \in r$, temos que $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \notin \mathbb{Q}$.

Questão 2.

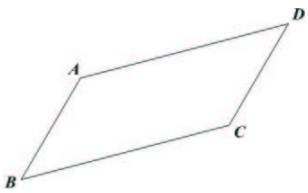
(a) Os três pontos A, B, C verificam a propriedade $z = -1$. Portanto, a equação do plano Π é $z = -1$. Como a reta s é perpendicular ao plano Π e este é paralelo ao plano xy, então, a reta s é paralela ao eixo z. Como esta reta passa pelo ponto $E(2, 1, -2)$, o ponto H de interseção do plano Π com a reta s tem por coordenadas $H(2, 1, -1)$.

(b) O plano Θ contem o ponto H e tem por vetor normal $\vec{AB} = (0, 1, -1) - (1, 0, -1) = (-1, 1, 0)$. Logo, um ponto P pertence a Θ se e somente se $(x-2, y-1, z+1) \cdot (-1, 1, 0) = 0$. Daí, segue que a equação de Θ é dada por $\vec{HP} \cdot \vec{AB} = 0$, ou seja, $x - y = 1$.

(c) Como $\Theta \perp r$ e $r \subset \Pi$, então $\Theta \perp \Pi$. Temos que s e Θ são ambos perpendiculares a Π. Como além disso $H \in s$ e $H \in \Theta$, então $s \subset \Theta$.

Questão 3.

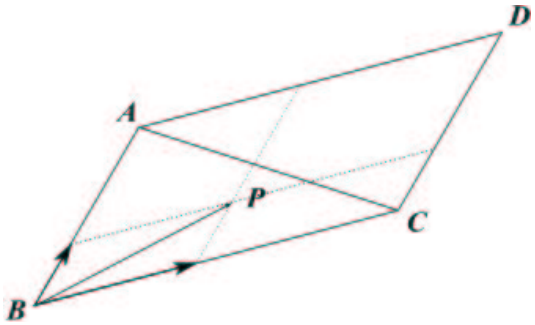
(a) Sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$. Então, se $ABCD$ é um paralelogramo, os vetores $\vec{BA}$ e $\vec{CD}$ são iguais, ou seja: $(x_A - x_B, y_A - y_B) = (x_D - x_C, y_D - y_C)$. Logo:



$$x_A + x_C = x_B + x_D \qquad y_A + y_C = y_B + y_D$$

Por outro lado, se a condição acima é verdadeira para as coordenadas de A, B, C e D, então os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{DC}$, bem como os vetores $\vec{AD}$ e $\vec{BC}$ são iguais, e portanto $ABCD$ é um paralelogramo.

(b) O ponto P estará no interior do paralelogramo quando $\vec{BP}$ for uma combinação linear de $\vec{BA}$ e $\vec{BC}$, com os coeficientes positivos e não maiores do que 1. Caso contrário, estará na fronteira desse paralelogramo, ou fora dele. Portanto:



$$B = (x_B + a\,(x_A - x_B) + b\,(x_C - x_B), y_B + a\,(y_A - y_B) + b\,(y_C - y_B))$$

em que $0 < a, b < 1$.

(c) Examinando a expressão e figura acima, vemos que: P estará sobre a diagonal AC se $a+b = 1$, . e estará no interior do triângulo ABC quando $0 < a + b < 1$.

Questão 4. Observando a figura, consideremos T, o ponto em que o círculo $\mathcal{C}_1$ tangencia o lado A_1A_2. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo TO_1A_1, vemos que:

$$\overline{O_1A_1}^{\,2} = 2\,r^2$$

Como $\overline{OO_1} = \overline{OO_2} = 2\,r$ e $\overline{O_3A_3} = \overline{O_1A_1} = r\,\sqrt{2}$, então a diagonal do quadrado $\mathcal{Q}$ é dada por:

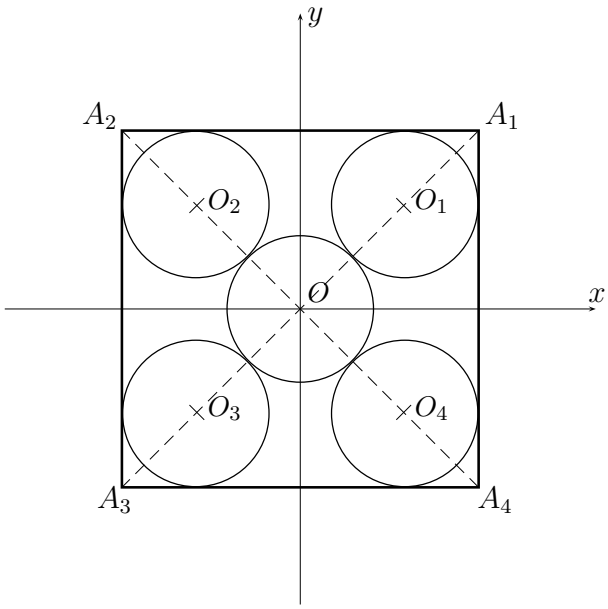
$$\overline{A_1A_3} = 2\,\overline{O_1A_1} + 2\,\overline{OO_1} = 2\,\left(2 + \sqrt{2}\right)\,r$$

Como o lado de $\mathcal{Q}$ é igual a $\overline{A_1A_2} = 2$, segue que:

$$2\,\left(2 + \sqrt{2}\right)\,r = 2\,\sqrt{2}$$

Logo:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$



Questão 5.

(a) Como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, então $-|x| \leq \operatorname{sen} x \leq |x|$. Como a união dos gráficos de $y = -|x|$ e $y = |x|$ coincide com as retas $y = -x$ e $y = x$, temos que o gráfico de s fica limitado entre essa duas retas. O gráfico toca a reta $y = x$ nos valores de x em que $\operatorname{sen} x = 1$, isto é, nos pontos $x = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Analogamente, o gráfico toca a reta $y = x$ nos valores de x em que $\operatorname{sen} x = -1$, isto é, nos pontos $x = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Temos que s é dada por:

$$s(x) = \begin{cases} x\,\operatorname{sen} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x\,\operatorname{sen} x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Assim, s é diferenciável para $x \neq 0$ e $s'(x) = \operatorname{sen} x + x\,\cos x$ se $x > 0$ $s'(x) = -\operatorname{sen} x - x\,\cos x$ se $x < 0$. Para determinar se s é diferenciável em 0, devemos verificar se existe o limite com $h \to 0$ da expressão:

$$\frac{s(h) - s(0)}{h} = \frac{|h|\,\operatorname{sen}(h)}{h} = \begin{cases} \operatorname{sen} x \text{ se } x > 0 \\ -\operatorname{sen} x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Assim, ambos os limites laterais da expressão acima existem e são iguais a 0. Segue que s é diferenciável em 0 e $s'(x) = 0$. Então s é diferenciável $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$s'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x + x\,\cos x \text{ se } x \geq 0 \\ -\operatorname{sen} x - x\,\cos x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

(c) Se x é um ponto de máximo da função seno, temos que $\cos x = 0$ e $\operatorname{sen} x = 1$. Segue que, nestes pontos, temos $s'(x) = \pm 1$. Portanto, estes não podem ser pontos de máximo de s.

Questão 6. Como g possui reta tangente em $x_1 = -1$, podemos afirmar que g é diferenciável neste ponto. Como $g(x_1) = 0$ e o trecho correspondente ao gráfico de f neste ponto é um segmento de reta, podemos afirmar também que f é diferenciável em $g(x_1)$. Pela Regra da Cadeia, segue que $f \circ g$ é diferenciável em $x_1 = -1$ e $(f \circ g)'(x_1) = f'(g(x_1))\, g'(x_1) = f'(0)\, g'(-1)$. Além disso, $g'(-1)$ é a inclinação de b e $f'(0)$ é a inclinação da reta que liga os pontos $(-2, 0)$ e $(1, 1)$. Assim:

$$g'(-1) = \frac{-3-0}{0-(-1)} = -3 \qquad f'(0) = \frac{1-0}{1-(-2)} = \frac{1}{3}$$

Logo, $(f \circ g)'(x_1) = -1$.

De forma análoga, temos que g é diferenciável em $x_2 = 1$. No entanto, f não é diferenciável em $g(x_2) = -2$, pois no gráfico de g encontram-se neste ponto dois segmentos de reta com inclinações diferentes. Assim, não podemos determinar se $f \circ g$ é diferenciável em x_2 com os dados do problema.

Questão 7. Em primeiro lugar, observamos que $h(-x) = \dfrac{\ln|-3\,x|}{(-x)^3} = -\dfrac{\ln|3\,x|}{x^3} = -h(x)$. Isto é, h é ímpar, portanto seu gráfico é simétrico em relação à origem. Assim, basta analisá-lo para $x > 0$.

(a) Quando $x \to 0^+$, temos que $\ln(3\,x) \to -\infty$ e $x^3 \to 0$ (positivamente). Segue que:

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$$

Como h é ímpar, então:

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = +\infty$$

(b) Quando $x \to +\infty$, temos que $\ln(3\,x)$ e x^3 tendem ambos a $+\infty$. Logo, podemos usar a Regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(3\,x)}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{-1}}{3\,x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3\,x^3} = 0$$

Como h é ímpar, então:

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$$

(c) Como $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$, então h tem uma única assíntota horizontal em $y = 0$. Como $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$, então h tem uma assíntota vertical em $x = 0$. Como não há outros valores de x para os quais h tenda a $\pm\infty$, então está é a única assíntota vertical de h.

(d) Para $x > 0$, a derivada de h é dada por:

$$h'(x) = \frac{x^{-1}\,x^3 - \ln(3\,x)\,3\,x^2}{x^6} = \frac{1 - 3\,\ln(3\,x)}{x^4}$$

Logo, para $x > 0$, a única raiz de h' é o ponto $x_1 = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$. Além disso, $h'(x) > 0$ para $0 < x < \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$ e $h'(x) < 0$ para $x > \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$. Segue que $(x_1, h(x_1)) = \left(\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}, 9\,\mathrm{e}^{-1}\right)$ é um ponto de máximo local de h. Como $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = +\infty$, este máximo não pode ser absoluto.

Como h é ímpar, segue que $(x_2, h(x_2)) = \left(-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}, -9\,\mathrm{e}^{-1}\right)$ é um ponto de mínimo local de h, que não é mínimo absoluto.

A função não admite outros pontos de máximo ou mínimo locais ou absolutos.

(e) Do item anterior, temos que h é crescente em $\left]0, \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\right]$ e decrescente em $\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}, +\infty\right[$. Como h é ímpar, temos ainda que h é crescente em $\left[-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}, 0\right[$ e decrescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\right]$.

(f) Para $x > 0$, a derivada segunda de h é dada por:

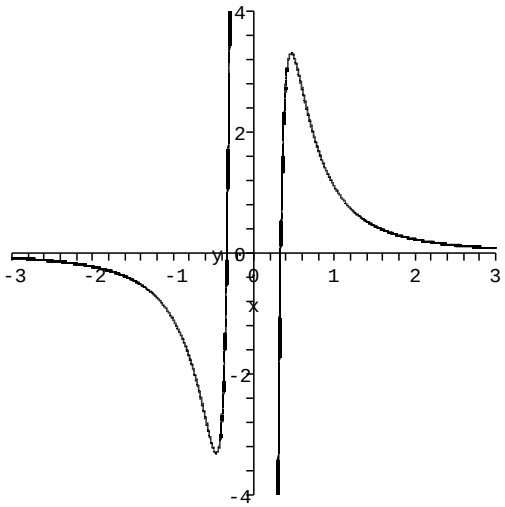
$$h''(x) = \frac{-3\,x^{-1}\,x^4 - (1 - \ln(3\,x))\,4\,x^3}{x^8} = \frac{4\,\ln(3\,x) - 7}{x^5}$$

Logo, para $x > 0$, a única raiz de h'' é o ponto $x_2 = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{7}{12}}$. Além disso, $h''(x) < 0$ para $0 < x < \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{7}{12}}$ e $h''(x) > 0$ para $x > \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{7}{12}}$. Segue que $x_3 = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{7}{12}}$ é um ponto de inflexão de h.

Como h é ímpar, segue que $x_4 = -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{7}{12}}$ é outro ponto de inflexão de h.

(g) Do item anterior, temos que h tem concavidade voltada para baixo em $\left]0, \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{7}{12}}\right]$ e para cima em $\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{7}{12}}, +\infty\right[$. Como h é ímpar, temos ainda que h tem concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{7}{12}}, 0\right[$ e para baixo em $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{7}{12}}\right]$.

Dos ítens anteriores, podemos concluir que o gráfico de h tem o seguinte aspecto.



Questão 8. Temos que $\varphi(0) = 0$ e que, como $\operatorname{sen}(t^2)$ é uma função par, então:

$$\varphi(-x) = \int_0^{-x} \operatorname{sen}\left(t^2\right)\,dt = -\int_0^{x} \operatorname{sen}\left((-t)^2\right)\,dt = \int_0^{x} \operatorname{sen}\left((-t)^2\right)\,dt$$

Logo, φ é ímpar, portanto seu gráfico é simétrico em relação à origem. Assim, basta analisá-lo para $x > 0$.

Segue do Teorema Fundamental do Cálculo que a derivada de φ é dada por:

$$\varphi'(x) = \operatorname{sen}\left(x^2\right)$$

Então, $\varphi'(x) = 0$ se e somente se $x^2 = k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $x = \pm\sqrt{k\,\pi}$, com $k \in \mathbb{N}$. Assim, para $0 \leq x < \sqrt{4\,\pi}$, as raízes de φ' são: $x_0 = 0$, $x_1 = \sqrt{\pi}$, $x_2 = \sqrt{2\,\pi}$ e , $x_3 = \sqrt{3\,\pi}$.

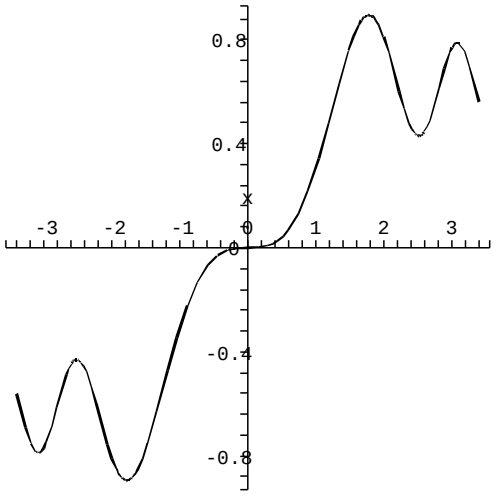
A derivada segunda de φ é dada por:

$$\varphi''(x) = 2\,x\,\cos\left(x^2\right)$$

Logo, $\varphi''(x_0) = 0$, $\varphi''(x_1) = -2\sqrt{\pi}$, $\varphi''(x_2) = 2\sqrt{2\,\pi}$ e , $\varphi''(x_3) = -2\sqrt{3\,\pi}$. Segue que x_1 e x_3 são pontos de máximo local e que x_2 é um ponto de mínimo local. Logo, $-x_1$ e $-x_3$ são pontos de mínimo local e que $-x_2$ é um ponto de máximo local. Como $\varphi'(x) > 0$ para $0 < x < \sqrt{\pi}$ e para $-\sqrt{\pi} < x < 0$, temos que φ é crescente em $]\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}[$. Logo, $x_0 = 0$ é um ponto de inflexão de φ.

Temos ainda que, $\varphi''(x) = 0$ se e somente se $x^2 = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, isto é, $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\,\pi}$, com $k \in \mathbb{N}$. Logo, os pontos de inflexão de φ, para $-\sqrt{4\,\pi} \leq x < \sqrt{4\,\pi}$ são (além de $x_0 = 0$): $x_4 = \sqrt{\frac{3\,\pi}{2}}$, $x_5 = \sqrt{\frac{5\,\pi}{2}}$, $x_6 = \sqrt{\frac{7\,\pi}{2}}$ e os simétricos destes pontos.

O gráfico de φ tem portanto o seguinte aspecto.



Questão 9.

(a) Uma seqüência de número reais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x_0 \in \mathbb{R}$ se:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad | \quad n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$$

Geometricamente, esta definição significa que, dado uma raio ε positivo tão pequeno quanto se queira, é possível encontrar um índice n_0 suficientemente grande a partir do qual todos os termos da seqüência distarão de x_0 menos que o raio ε dado.

(b) Neste caso, não podemos afirmar que x_0 é o limite de x_n. Consideremos, como contra-exemplo, a seqüência:

$$x_n = \begin{cases} 1/n & \text{se } n \text{ é par} \\ 1 & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

Seja $x_0 = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, seja n_0 o menor número par maior que $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Então, para todo número par $n \geq n_0$, temos:

$$|x_n - x_0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{\varepsilon}$$

Questão 10.

(a) Dados $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$, temos:

$$a_n - a_m = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} > 0$$

Portanto $a_m < a_n$. Segue que (a_n) é monótona crescente.
A seqüencia (a_n) não pode ser limitada, pois, caso o fosse, como é monótona, seria convergente.

(b) Analogamente ao item anterior, dados $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$, temos:

$$b_n - b_m = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^{\alpha}} = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} > 0$$

Portanto $b_m < b_n$. Segue que (b_n) é monótona crescente.
Para verificar que (b_n) é limitada, dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos $p \in \mathbb{N}$ tal que 2^p seja a menor potência de 2 maior que n. Então:

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \leq \sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k^{\alpha}} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}}\right) + \left(\frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{5^{\alpha}} + \frac{1}{6^{\alpha}} + \frac{1}{7^{\alpha}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(2^{p-1})^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(2^p - 1)^{\alpha}}\right) \\
&< 1 + \left(\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}}\right) + \left(\frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(2^{p-1})^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(2^{p-1})^{\alpha}}\right) \\
&< 1 + 2\,\frac{1}{2^{\alpha}} + 4\,\frac{1}{4^{\alpha}} + \ldots + 2^{p-1}\,\frac{1}{(2^{p-1})^{\alpha}} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{1}{(2^{p-1})^{\alpha-1}} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(2^k)^{\alpha-1}} = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k
\end{aligned}$$

A seqüência obtida acima é uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é 1 e a razão é $r = \dfrac{1}{2^{\alpha-1}}$. Como $\alpha - 1 > 0$, então $r < 1$. Logo, esta a soma desta progressão é convergente para $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \dfrac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}$. Logo:

$$b_n < \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Então (b_n) é limitada superiormente.

(c) Como (b_n) é monótona crescente e limitada superiormente por $\dfrac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}$, podemos concluir que (b_n) é convergente e que seu limite é menor ou igual a $\dfrac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}$.