TEXTO I

Symbol Sense: Informal Sense-Making in Formal Mathematics

Abraham Arcavi

The argument

It is widely accepted that correct performance of arithmetical operations should not be the sole focus of arithmetic teaching and learning. The knowledge of when to use an operation, and themes like "number sense" are nowadays receiving increasing attention. In general terms, "number sense" [NCTM, 1989; Sowder and Schappelle, 1989; Sowder, 1992] can be described as a "non-algorithmic" feel for numbers, a sound understanding of their nature and the nature of the operations, a need to examine reasonableness of results, a sense of the relative effects of operating with numbers, a feel for orders of magnitude, and the freedom to reinvent ways of operating with numbers differently from the mechanical repetition of what was taught and memorized.

Is there a parallel situation with algebra? Does the mathematics education community no longer consider symbolic manipulations as the central issue in algebra instruction? The answer seems to be affirmative especially in the light of the emergence of symbolic manipulators and, in part, because many high school students make little sense of literal symbols, even after years of algebra instruction. Even those students who manage to handle the algebraic techniques successfully, often fail to see algebra as a tool for understanding, expressing, and communicating generalizations, for revealing structure, and for establishing connections and formulating mathematical arguments (proofs). Instruction does not always provide opportunities not only *not* to memorize, but also to "forget" rules and details and to be able to see through them in order to think, abstract, generalize, and plan solution strategies. Therefore, it would seem reasonable to attempt a description of a parallel notion to that of "number sense" in arithmetic: the idea of "symbol sense".[1]

What is symbol sense? A first round

Compared to the attention which has been given to "number sense", there is very little in the literature on "symbol sense". One welcome exception is Fey [1990]. He does not define symbol sense directly, but he lists "a reasonable set of goals for teaching" it, which include the "following basic themes":

- Ability to scan an algebraic expression to make rough estimates of the patterns that would emerge in numeric or graphic representation. ...
- Ability to make informed comparisons of orders of magnitude for functions with rules of the form n, n^2, n^3, ... , and n^k. ...
- Ability to scan a table of function values or a graph or to interpret verbally stated conditions, to identify the likely form of an algebraic rule that expresses the appropriate pattern. ...
- Ability to inspect algebraic operations and predict the form of the result or, as in arithmetic estimation, to inspect the result and judge the likelihood that it has been performed correctly. ...
- Ability to determine which of several equivalent forms might be most appropriate for answering particular questions. ...

In this paper we attempt to extend the above situations both in number and content. Like Fey, we do not attempt to define "symbol sense"—the task is too complicated. We think that "number sense" has been more widely discussed [e.g. Sowder and Schappelle, 1989], and yet a definition has proved to be extremely elusive. Therefore we will concentrate on describing and discussing behaviors which illustrate what we claim are examples of symbol sense.

A methodological aside: Since we do not claim, either here or in the rest of this paper, to describe research on students' cognition and ways of learning, we can afford to be indulgent with the interpretations of the anecdotal data we provide. Thus we propose to dismiss the risks of misinterpreting (either by overcrediting or undercrediting) students' comments. We bring the examples as mere illustrations of instances of what, in our view, symbol sense is.

Fonte: *For the Learning of Mathematics*, n. 14 (3) (1994), pp. 24-35.

TEXTO II

Semantic and Syntactic Proof Productions

KEITH WEBER AND LARA ALCOCK

1. INTRODUCTION

Reasoning about advanced mathematical concepts involves a complex interaction between rigorous and intuitive thought. Advanced mathematical concepts differ from those encountered earlier in that they are determined by a precise, unambiguous definition, usually expressed using logical symbols. Formal reasoning about such concepts requires the use of this definition, and the inferences that one can draw are limited to a set of well-defined, agreed upon procedures (Tall, 1989). While a high level of rigour is required when reasoning about mathematical concepts, it has been argued that one also needs intuitive, non-formal representations of these concepts to reason about them effectively. For instance, Fields Medalist William Thurston declares that learning about a mathematical topic consists of building useful non-formal mental models, and that this cannot be accomplished by studying definitions and rigorous proofs alone (Thurston, 1994). Fischbein (1982) argues that removing intuitive representations from formal mathematical thought is neither possible nor desirable, as these are necessary components of productive mathematical thinking. Eminent mathematicians have testified to the importance of intuitive thought in their own mathematical work (e.g. Hadamard, 1945; Poincaré, 1913). On a less positive note, students' intuitive understandings of advanced mathematical concepts have been implicated in the errors they make (relative to the formal theory) in reasoning about these concepts (e.g. Tall and Vinner, 1981; Vinner, 1991), indicating that this intuition has a significant role in their reasoning too.

Our purpose in this paper is to further clarify the meanings of 'formal' and 'intuitive' reasoning, the role each can play in producing proofs within a given area of mathematics, and the ways in which they are related. We accomplish this by discussing two qualitatively different ways in which an individual might produce a correct proof, and illustrating these by using data from independent studies in group theory and real analysis.

2. SYNTACTIC AND SEMANTIC PROOF PRODUCTIONS

When asked to prove a statement, professional mathematicians and logically capable mathematics students all share the same goal – to produce a logically valid argument that concludes with the statement to be proven. However, the processes used to complete this goal may vary widely. On one extreme, students might construct a proof by reproducing an argument that has been memorised by rote, or applying an algorithm that they have been told will produce a valid proof. Proofs of this type require minimal engagement on the part of the prover and the prover may be unaware of how his or her proof establishes the veracity of a mathematical statement. At the other extreme, some proofs may involve the prover constructing new mathematical concepts, or re-conceptualising old concepts in radically different ways. In this paper, we wish to describe two types of proof productions that lie between the two extremes described above. More specifically, we distinguish between proof productions in which the prover works from a literal reading of the involved definitions and proof productions in which the prover also makes use of his or her intuitive understanding of the concepts.

We define a *syntactic proof production* as one which is written solely by manipulating correctly stated definitions and other relevant facts in a logically permissible way. In a syntactic proof production, the prover does not make use of diagrams or other intuitive and non-formal representations of mathematical concepts. In the mathematics community, a syntactic proof production can be colloquially defined as a proof in which all one does is 'unwrap the definitions' and 'push symbols'.

We define a *semantic proof production* to be a proof of a statement in which the prover uses instantiation(s) of the mathematical object(s) to which the statement applies to suggest and guide the formal inferences that he or she draws. By an instantiation, we refer to a systematically repeatable way that an individual thinks about a mathematical object, which is internally meaningful to that individual. (...) For example, an instantiation of a particular sequence might consist of the sequence plotted on a Cartesian graph or of the terms of a sequence listed as an infinite string of numbers. An instantiation of an arbitrary convergent sequence might consist of a graph of a 'prototypical' convergent sequence. During a semantic proof production, the prover may physically draw or write these instantiations or he or she may work with them mentally. What is crucial is that the prover use these instantiations in a meaningful way to make sense of the statement to be proven and to suggest formal inferences that could be drawn.

Fonte: *Educational Studies in Mathematics*, n. 56 (2004), pp. 209-234.

Responda as questões 1 a 6 a seguir, com base no Texto I.

Vocabulário dado:

- *sound* – sólido, bem fundamentado
- *aside* – aparte, adendo

Questão 1. (valor: 0,5) No primeiro parágrafo do texto, o autor descreve *number sense*, em termos gerais. Quais dos itens abaixo **não** está incluído nessa descrição?

(a) sensibilidade "não algorítmica" por números

(b) compreensão do som da natureza dos números e das operações

(c) necessidade para examinar se resultados são ou não razoáveis

(d) sensibilidade por ordens de magnitude

(e) liberdade de reinventar formas de operar com números

Questão 2. (valor: 0,5) Que posição é defendida pelo autor no início do segundo parágrafo do texto?

(a) A comunidade de educação matemática parece não mais considerar manipulação simbólica como a questão central do ensino de álgebra.

(b) A comunidade de educação matemática considera manipulação simbólica como a principal questão do ensino de álgebra.

(c) A comunidade de educação matemática não considera longas manipulações simbólicas importantes para o ensino de álgebra.

(d) A comunidade de educação matemática por muito tempo considerou manipulação simbólica como a causa do mau desempenho de estudantes na escola.

(e) Existe uma longa preocupação na comunidade de educação matemática sobre a relação central entre manipulação simbólica e o mau desempenho de estudantes na escola.

Questão 3. (valor: 0,5) Ainda no segundo parágrafo, o que o autor comenta sobre a oportunidade para os alunos não só não memorizarem, mas também "esquecerem" regras e detalhes?

(a) O ensino de álgebra sempre permite que isto aconteça.

(b) O ensino de álgebra nunca deve permitir que isto aconteça.

(c) Isto impede que os estudantes vejam uma ordem para pensar nas regras.

(d) Isto permite aos estudantes pensar, abstrair, generalizar e planejar estratégias de solução.

(e) Isto não prejudica a aprendizagem de álgebra.

Questão 4. (valor: 0,5) De acordo com o último parágrafo do texto, qual é o papel dos comentários dos estudantes que aparecerão no artigo?

(a) Fazer um adendo metodológico.

(b) Descrever pesquisas sobre cognição de estudantes e formas de aprender.

(c) Dar interpretações anedóticas para os dados fornecidos.

(d) Eliminar os riscos de interpretações errôneas.

(e) Ilustrar o que é *symbol sense*, na visão do autor.

Questão 5. (valor: 0,5) Com base na leitura deste trecho, qual das frases abaixo melhor descreve o objetivo do artigo?

(a) Revisar a descrição da idéia de *number sense* dada por NCTM (1989), Sowder e Schappelle (1989) e Sowder (1992).

(b) Comparar a atenção que tem sido dada na literatura de educação matemática à idéia de *symbol sense*, em relação à noção de *number sense*.

(c) Discutir exemplos e comportamentos associados com a noção de *symbol sense*, sem tentar dar uma definição precisa para o termo.

(d) Construir uma definição precisa para a noção de *symbol sense* com base na idéia de *number sense*.

(e) Procurar por uma exceção na lista de habilidades construída por Fey (1990).

Questão 6. (valor: 2,5) Faça um resumo, de no máximo dez linhas, em língua portuguesa, das principais idéias do penúltimo parágrafo do texto (trecho entre *In this paper we attempt* e *examples of symbol sense*).

Responda as questões 7 a 12 a seguir, com base no Texto II.

Questão 7. (valor: 0,5) Que declaração de William Thurston é citada pelos autores no primeiro parágrafo?

(a) A construção de tópicos matemáticos consistentes usa modelos mentais não formais e isso não pode estar acompanhado de definições e demonstrações rigorosas.

(b) A construção de modelos mentais não formais necessária para a aprendizagem de matemática não pode ser alcançada unicamente através do estudo de definições e demonstrações rigorosas.

(c) A construção de modelos mentais não formais necessária para a aprendizagem de matemática deve ser alcançada unicamente através do estudo de definições e demonstrações rigorosas.

(d) Para construir modelos mentais não formais, os estudantes devem tentar estudar definições e provas sozinhos.

(e) Os estudantes têm um pensamento não formal e não são capazes de formular definições e provas formais sozinhos.

Questão 8. (valor: 0,5) Segundo o texto, que autores defendem que representações intuitivas não são importantes para o pensamento matemático?

(a) Fischbein.

(b) Hadamard e Poincaré.

(c) Tall e Vinner.

(d) Todos os anteriores.

(e) Nenhum dos anteriores.

Questão 9. (valor: 0,5) De acordo com o segundo parágrafo, qual é o objetivo do artigo?

(a) Apresentar uma proposta para o uso de significados 'formais' e 'intuitivos' para provas no ensino de áreas em matemática.

(b) Discutir qualitativamente como o pensamento intuitivo pode prejudicar a produção de demonstrações corretas.

(c) Esclarecer os significados de pensamento ‘formal’ e ‘intuitivo’, a forma como eles se relacionam e seus papéis em um dado ramo da matemática.

(d) Discutir dois caminhos qualitativamente diferentes a partir dos quais um indivíduo pode produzir uma prova correta.

(e) Ilustrar a discussão com dados de dois estudos independentes em teoria de grupos e análise real.

Questão 10. (valor: 0,5) Qual das frases abaixo melhor resume a definição dos autores para *produção de prova sintática*?

(a) Aquela escrita exclusivamente através da manipulação de definições e outros fatos relevantes de maneira correta.

(b) Aquela que é escrita através da manipulação logicamente inadequada de definições e outros fatos relevantes.

(c) Aquela que usa diagramas e outras representações intuitivas não formais dos conceitos matemáticos.

(d) Aquela em que são usadas definições coloquiais para as provas.

(e) Aquela que pode ser explicada em termos coloquiais.

Questão 11. (valor: 0,5) As afirmações abaixo dizem respeito à noção de *produção de prova semântica* definida pelos autores. Qual delas é **falsa**?

(a) Em uma produção de prova semântica são usadas formas de pensar sobre objetos matemáticos para sugerir e guiar o traçado das inferências formais.

(b) Em uma produção de prova semântica são usadas formas de pensar sobre objetos matemáticos, que podem ser repetidas sistematicamente e têm significado para o indivíduo.

(c) Em uma produção de prova semântica não se pode usar o gráfico de seqüência convergente prototípica.

(d) Durante uma produção de prova semântica se pode usar desenhos feitos fisicamente.

(e) Durante uma produção de prova semântica se pode usar desenhos sobre os quais o indivíduo pensa.

Questão 12. (valor: 2,5) Faça um resumo, de no máximo dez linhas, em língua portuguesa, das principais idéias do trecho do terceiro parágrafo do texto entre *When asked to prove a statement* e *in radically different ways*.

Gabarito das questões objetivas

1	2	3	4	5	7	8	9	10	11
b	a	d	e	c	b	e	c	a	c