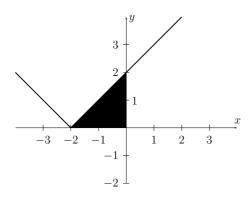
UFRJ - Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Seleção 2008 — Etapa 2

Questão 1. Considere R a região pintada na figura abaixo. De qual dos sistemas R é solução?



(A)
$$\begin{cases} y \le |x-2| \\ y \le 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$$
 (B)
$$\begin{cases} y \ge |x-2| \\ y \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$$
 (C)
$$\begin{cases} y \le |x-2| \\ y \ge 0 \\ x \le 0 \end{cases}$$

(B)
$$\begin{cases} y \ge |x - 2| \\ y \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

(C)
$$\begin{cases} y \le |x - 2| \\ y \ge 0 \\ x \le 0 \end{cases}$$

(D)
$$\begin{cases} y \ge |x+2| \\ y \ge 0 \\ x \le 0 \end{cases}$$
 (E)
$$\begin{cases} y \le |x+2| \\ y \ge 0 \\ x \le 0 \end{cases}$$

(E)
$$\begin{cases} y \le |x + y| \ge 0 \\ x \le 0 \end{cases}$$

Questão 2. Identifique e esboce a curva plana de equação cartesiana: $y^2 - x - 2y - 3 = 0$.

Questão 3. Sejam dadas três retas, distintas duas a duas, no \mathbb{R}^2 . Considere o problema de construir círculos tangentes simultaneamente a estas três retas. Discuta o número de soluções do problema, em função da posição relativa das retas.

Questão 4. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, sendo r, s e t três retas distintas duas a duas e α , β e γ três planos distintos dois a dois no \mathbb{R}^3 . Justifique as respostas, somente para as afirmações falsas.

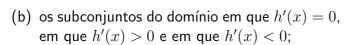
- (a) Se r e s não são paralelas, então elas se interceptam.
- (b) Se r é perpendicular a t e s também é perpendicular a t, então r e s são paralelas.
- (c) Se r intercepta s e s é paralela a t, então r intercepta t.
- (d) Se α e β não se interceptam, então α e β são paralelos.
- (e) Se α é perpendicular a γ e β também é perpendicular a γ , então α e β são paralelos.

Questão 5. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$.

- (a) Mostre que a função possui uma assíntota inclinada r(x).
- (b) É possível encontrar, uma função $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cujo gráfico fique contido estritamente entre o gráfico de f e sua assíntota inclinada, isto é, uma função tal que $r(x) < f_1(x) < f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$? Caso seja possível determine esta função f_1 . Justifique sua resposta.

Questão 6. A figura abaixo representa o gráfico de uma função $h:]-3, 5[\to \mathbb{R}.$ Os trechos do gráfico correspondentes a $x \in]-3, -1]$, $x \in [-1, 0]$, $x \in [2, 3]$ e $x \in [3, 5[$ correspondem, cada um, a um segmento de reta; e o trecho correspondente a $x \in [0, 2]$ é um arco de parábola. Em cada um dos ítens a seguir, determine o que é pedido, caso seja possível. Justifique suas respostas.

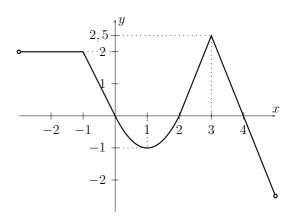
(a) os valores de $x\in]-3,5[$ em que h é descontínua e os valores de $x\in]-3,5[$ em que h não é diferenciável;





(d) o valor de
$$\int_0^5 h(x) dx$$
;





Questão 7. Considere a função $g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por: $g(x) = \ln |x^3 - 1|$. Faça um esboço do gráfico de g indicando (caso existam):

- (a) os limites $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} g(x)$;
- (b) os limites $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x)$;
- (c) as assíntotas horizontais e verticais de g;
- (d) os máximos e mínimos locais e absolutos de g;
- (e) os intervalos em que g é crescente e os intervalos em que g é decrescente;
- (f) os pontos de inflexão de g;
- (g) os intervalos em que a concavidade de g é voltada para cima e os intervalos em que a concavidade de g é voltada para baixo.

Questão 8. Considere a sequência de números reais definida recursivamente da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} (a_n^2 + 1) \ \forall n \ge 1 \end{cases}$$

- (a) Mostre que (a_n) é estritamente crescente. Sugestão: use indução.
- (b) Considere o seguinte argumento para determinar o limite de (a_n) :

Temos que $x = \lim a_{n+1} = \lim a_n$. Então, podemos tomar $x = \lim a_{n+1} = \lim a_n$. Logo:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} (a_n^2 + 1) \Rightarrow \lim a_{n+1} = \frac{1}{2} ((\lim a_n)^2 + 1) \Rightarrow$$

 $x = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Logo, $\lim a_n = 1$.

Este argumento está correto? Justifique sua resposta.

(c) É verdade que $\lim a_n = 1$? Justifique sua resposta.

Questão 9. O problema fundamental do Cálculo Infinitesimal na época de Newton era o seguinte: dada a relação entre duas quantidades variáveis, encontrar a relação entre suas taxas de variação e viceversa. Sendo x e y duas quantidades variáveis, Newton calculava a razão entre suas taxas de variação $\frac{y}{x}$, que determina a inclinação da tangente à curva descrita nas variáveis x e y.

Se temos uma curva dada por $y=x^n$, consideramos o um intervalo de tempo infinitamente pequeno e \dot{x} o e \dot{y} o são os incrementos infinitamente pequenos de x e y respectivamente. Para encontrar a razão entre as taxas de variação, Newton substitui $x+\dot{x}$ o e $y+\dot{y}$ o na equação da curva, obtendo $y+\dot{y}$ $o=(x+\dot{x}\,o)^n$. Utilizando a fórmula que conhecemos hoje como "binômio de Newton" e que já era realmente conhecida por ele, escreve $y+\dot{y}$ $o=x^n+n$ o \dot{x} $x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}$ o^2 \dot{x}^2 $x^{n-2}+\ldots$ Eliminado $y-x^n=0$ e dividindo tudo por o, obtém-se: $\dot{y}=+n$ \dot{x} $x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}$ o \dot{x}^2 $x^{n-2}+\ldots$ Considerando que o é infinitamente pequeno, é possível negligenciar os termos contendo esta quantidade, o que nos permite obter a fórmula $\dot{y}=n$ $x^{n-1}\dot{x}$, ou seja $\dot{y}=n$ x^{n-1} .

Reconhecemos imediatamente neste resultado a fórmula correta para a derivada da função $y=x^n$. No entanto, o procedimento pelo qual esta fórmula foi obtida não é rigoroso do ponto de vista da matemática contemporânea. Identifique o que está errado, diga quais as principais noções utilizadas hoje que permitem corrigir este erro e explique como estas o fazem.

Questão 10. Considere $\mathcal C$ um cone (não necessariamente reto) de base elíptica $\mathcal E$. Mostre que o volume de $\mathcal C$ é dado por $V=\frac{1}{3}\,S_0\,h$, onde S_0 é a área de $\mathcal E$ e h é a altura de $\mathcal C$. Dado: a área de um elipse de semi-eixos a e b é igual a $\pi\,a\,b$.

UFRJ - INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

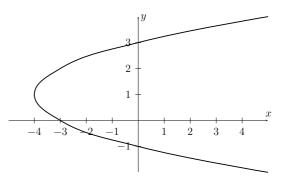
Seleção 2007 – Etapa 2 – Gabarito

Questão 1. (E)

Questão 2. Completando quadrados na equação dada. obtemos $y^2 - 2y + 1 - 1 - 3 - x = 0$. Logo:

$$x = (y - 1)^2 - 4$$

Assim, a equação representa a parábola esboçada ao lado.



Questão 3. Três retas distintas no \mathbb{R}^2 podem ter as seguintes posições relativas: ou são todas paralelas $(r \parallel s \parallel t)$; ou duas delas são paralelas e a terceira é concorrente a ambas $(r \cap s = \{A\}, r \cap t = \{B\}, r$ $s \parallel t$); ou são concorrentes duas a duas $(r \cap s = \{A\}, r \cap t = \{B\}, s \cap t = \{C\})$. Se as retas são concorrentes duas a duas, podemos ter ainda que os pontos de intersecção são distintos dois a dois $(A \neq B, A \neq C, B \neq C)$; ou que pelo menos dois deles são iguais (digamos, A = B). Mas, se A=B, devemos ter também A=B=C, pois, caso contrário, as retas s e t teriam dois pontos distintos ($A = B \in C$) em comum, logo seriam coincidentes. Assim, temos quatro possibilidades:

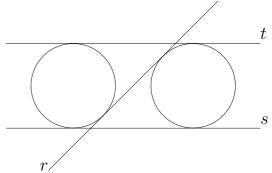
caso 1:
$$r \parallel s \parallel t$$

três retas.



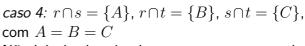
caso 2:
$$r \cap s = \{A\}$$
, $r \cap t = \{B\}$, $s \parallel t$

Não há círculos simultaneamente tangentes às Há dois círculos distintos simultaneamente tangentes às três retas.

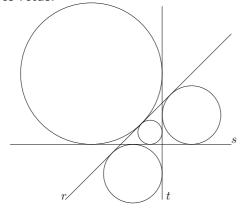


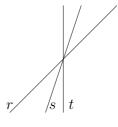
caso 3:
$$r \cap s = \{A\}$$
, $r \cap t = \{B\}$, $s \cap t = \{C\}$, com $A \neq B$, $A \neq C$, $B \neq C$

Há quatro círculos simultaneamente tangentes às três retas.



Não há círculos simultaneamente tangentes às três retas.





Questão 4.

(a) Falso.

As retas podem ser reversas. Considere como contra-exemplo a reta r determinada pelos pontos (0,0,0) e (1,0,0) (isto é, o eixo x) e a reta s determinada pelos pontos (0,1,0) e (0,0,1). Então, r e s não são paralelas, mas não se interceptam.

(b) Falso.

Considere como contra-exemplo os três eixos coordenados. Os eixos x e y são ambos perpendiculares ao eixo z, mas não são paralelos.

(c) Falso.

Considere como contra-exemplo a reta r determinada pelos pontos (0,0,0) e (1,0,0) (isto é, o eixo x), a reta s determinada pelos pontos (0,0,0) e (0,1,0) (isto é, o eixo y) e a reta t determinada pelos pontos (0,0,1) e (0,1,1). Então, r intercepta s (na origem), s é paralela a t, mas r não intercepta t.

- (d) Verdadeiro.
- (e) Falso.

Considere como contra-exemplo os três planos coordenados. Os eixos xz e yz são ambos perpendiculares ao eixo xy, mas não são paralelos.

Questão 5.

(a) Efetuando a divisão de x^3+1 por x^2+1 , obtemos que $x^3+1=x$ (x^2+1) + (-x+1), logo: $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+1}=x+\frac{1-x}{x^2+1}.$

Portanto: $\lim_{x \to \pm \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to \pm \infty} \frac{1 - x}{x^2 + 1} = 0.$

Segue que a reta r(x) = x é uma assíntota inclinada de f.

(b) Como f(1) = r(1) = 1, não pode haver f_1 tal que $r(x) < f_1(x) < f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Questão 6.

(a) A função não admite pontos de descontinuidade, uma vez que em cada um dos pontos em que os segmentos de reta e o arco de parábola se encontram os limites laterais de h são iguais. No interior dos segmentos em que h é definida por um mesmo segmento de reta ou arco de parábola, a função é certamente diferenciável. Para verificar a diferenciabilidade nos pontos

parábola, a função é certamente diferenciável. Para verificar a diferenciabilidade nos pontos $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$ e $x_4=3$, de encontro desses intervalos, devemos calcular os limites laterais de h' em cada um. Nos pontos $x_1=-1$ e $x_4=3$, os limites laterais de h' são dados pelas inclinações das retas que definem h nos intervalos vizinhos:

$$\lim_{x \to -1^{-}} h'(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -1^{+}} h'(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 3^{-}} h'(x) = \frac{5}{2} \qquad \lim_{x \to 3^{+}} h'(x) = -\frac{5}{2}$$

Nos pontos $x_2=0$ e $x_3=2$, os limites laterais de h' são dados pelas inclinações das retas e pela derivada da parábola que definem h nos intervalos vizinhos. Como essa parábola tem raízes 0 e 2 e vértices em (1,-1), podemos concluir que esta parábola tem equação $y=x^2-2\,x$. Logo, $h'(x)=2\,x-2$ para $x\in]0,2[$. Então:

$$\lim_{x \to 0^{-}} h'(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 0^{+}} h'(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 2^{-}} h'(x) = 2 \qquad \lim_{x \to 2^{+}} h'(x) = \frac{5}{2}$$

Portanto, os únicos pontos em que h não é diferenciável são $x_1=-1$, $x_3=2$ e $x_4=3$

(b) Temos que:

- h'(x)=0 nos pontos em que a reta tangente ao gráfico de h existe e tem inclinação nula, isto é, no conjunto $]-3,-1[\,\cup\{1\};$
- h'(x) > 0 nos pontos em que a reta tangente ao gráfico de h existe e tem inclinação positiva, isto é, no conjunto $]1,2[\,\cup\,]2,3[$ e
- h'(x) > 0 nos pontos em que a reta tangente ao gráfico de h existe e tem inclinação negativa, isto é, no conjunto $]-1,1[\,\cup\,]3,5[\,.$
- (c) Analisando o gráfico, percebemos que a imagem de h é o intervalo $]-\frac{5}{2},\frac{5}{2}].$ Assim, o maior valor atingido por h é $\frac{5}{2}$, que ocorre ponto x=3, mas a função não admite um mínimo absoluto.
- (d) Temos que:

$$\int_0^5 h(x) dx = \int_0^2 h(x) dx + \int_2^3 h(x) dx + \int_3^4 h(x) dx + \int_4^5 h(x) dx$$

As três últimas integrais acima podem ser calculadas através da área de um triângulo de base $\int_{-\infty}^{3} \int_{-\infty}^{4} \int_{-\infty}^{5} \int_{-\infty}^{5} \int_{-\infty}^{6} \int_{-$

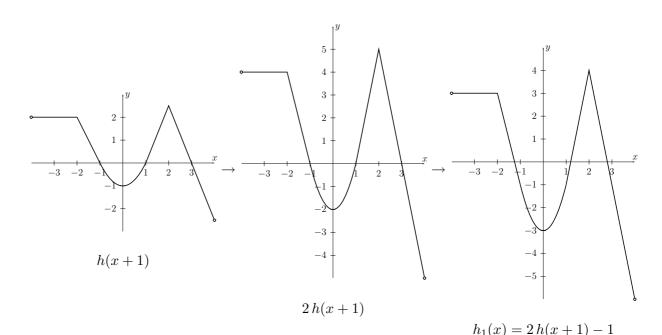
1 e altura
$$\frac{5}{2}$$
. Assim: $\int_2^3 h(x) \, \mathrm{dx} = \int_3^4 h(x) \, \mathrm{dx} = -\int_4^5 h(x) \, \mathrm{dx} = -\frac{5}{4}$.

Além disso:
$$\int_0^2 h(x) dx = \int_1^2 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}.$$

Portanto:

$$\int_0^5 h(x) \, \mathrm{dx} = -\frac{4}{3} + \frac{5}{4} = -\frac{1}{12}$$

- (e) Podemos entender a construção de h_1 em três passos, ilustrados na figura a seguir:
 - 1. Soma-se 1 ao argumento da função, obtendo h(x+1). O efeito geométrico desta operação é uma translação horizontal de 1 unidade para a esquerda.
 - 2. Multiplica-se h(x+1) por 2, obtendo $2\,h(x+1)$. O efeito geométrico é uma dilatação vertical de razão 2.
 - 3. Subtrai-se 1 de 2h(x+1), obtendo $h_1(x) = 2h(x+1) 1$. O efeito geométrico desta operação é uma translação horizontal de 1 unidade para baixo.



Questão 7.

Para estudar o sinal de g, devemos determinar para que valores de x, temos $|x^3-1|$ é igual, maior ou menor que 1. Temos que $|x^3-1|=1$ se e só se $x^3-1=\pm 1$, isto é, x=0 ou $x=\sqrt[3]{2}$. Portanto, $|x^3-1|<1$ para $x\in]0, \sqrt[3]{2}[$ e $|x^3-1|>1$ para $x\in]-\infty, 0[\cup]\sqrt[3]{2}, +\infty[$. Então, g(x)=0 para x=0 ou $x=\sqrt[3]{2};$ g(x)<0 para $x\in]0, \sqrt[3]{2}[$ e g(x)>0 para $x\in]-\infty, 0[\cup]\sqrt[3]{2}, +\infty[$.

Quanto $x \to 1$ (tanto pela direita quanto pela esquerda), $|x^3 - 1| \to 0$ (positivamente). Logo:

$$\lim_{x \to 1^{-}} \ln|x^{3} - 1| = \lim_{x \to 1^{+}} \ln|x^{3} - 1| = -\infty$$

Quanto $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, temos $|x^3 - 1| \to +\infty$. Portanto:

$$\lim_{x \to -\infty} \ln|x^3 - 1| = \lim_{x \to -\infty} \ln|x^3 - 1| = +\infty$$

Para calcular a derivada de g, observamos:

$$g(x) = \ln|x^3 - 1| = \begin{cases} \ln(x^3 - 1), x > 1 \\ \ln(1 - x^3), x < 1 \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \ln|x^3 - 1| = \begin{cases} \frac{3x^2}{x^3 - 1}, x > 1 \\ \frac{-3x^2}{1 - x^3}, x < 1 \end{cases}$$
$$g'(x) = \frac{3x^2}{x^3 - 1} \ \forall x \neq 1$$

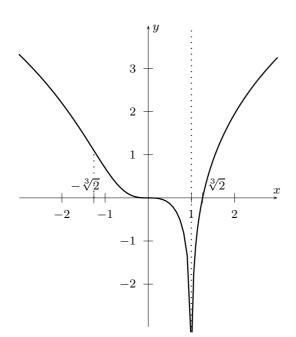
Então, g'(x) = 0 se x = 0; g'(x) < 0 para x < 1, $x \ne 0$ e g'(x) > 0 para x > 1.

A derivada segunda de g é dada por:

$$g''(x) = \frac{6x(x^3 - 1) - 3x^2 \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-3x^4 - 6x}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-3x(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^2}$$

Então, g''(x)=0 se x=0 ou $x=-\sqrt[3]{2}$; g'(x)<0 para $x<-\sqrt[3]{2}$ ou x>0, $x\neq 0$ e g'(x)>0 para $-\sqrt[3]{2}< x<0$.

Essas informações nos permitem concluir que o gráfico de g tem o aspecto abaixo.



- (a) $\lim_{x \to 1^{-}} \ln|x^3 1| = \lim_{x \to 1^{+}} \ln|x^3 1| = -\infty$
- (b) $\lim_{x \to -\infty} \ln |x^3 1| = \lim_{x \to -\infty} \ln |x^3 1| = +\infty$
- (c) g não tem assíntotas horizontais e tem uma assíntota vertical em x=1
- (d) g não possui máximos ou mínimos locais ou absolutos
- (e) g é crescente em $]1,+\infty[$ e decrescente em $]-\infty,1[$
- (f) g possui pontos de inflexão em (0,0) e em $(-\sqrt[3]{2},\ln 3)$
- (g) g possui concavidade voltada para cima em $]-\sqrt[3]{2},0$ [e concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-\sqrt[3]{2}$ [, em]0,1 [e em $]1,+\infty$ [

Questão 8.

(a) Devemos mostrar que $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Temos que $a_2 = \frac{5}{2} > 2 = a_1$, logo a afirmação é válida para n = 1.

Suponhamos agora que que a afirmação seja válida para algum $k \in \mathbb{N}$ fixo. Temos que: $a_{k+2} = \frac{1}{2} \left(a_{k+1}^2 + 1\right)$. Pela hipótese de indução, temos que $a_{k+1} > a_k$. Como todos os termos da seqüência são positivos (pela sua própria definição), segue que $a_{k+1}^2 > a_k^2$, portanto:

$$a_{k+2} = \frac{1}{2} (a_{k+1}^2 + 1) > \frac{1}{2} (a_k^2 + 1) = a_{k+1}$$

Portanto, a afirmação é válida também para k+1, como queríamos demonstrar. Isto completa o argumento de indução.

- (b) O argumento não está correto. Para definir o número $x = \lim a_{n+1} = \lim a_n$ e operar com este número, devemos saber de antemão se o mesmo de fato existe, isto é, se a seqüência a_n converge. Mas isto não foi demonstrado na argumentação apresentada.
- (c) Não é verdade que $\lim a_n=1$. Podemos observar que o que de fato foi demonstrado na argumentação do item anterior é que, $se \lim a_n$ existe, então $\lim a_n=1$. Como a seqüência é estritamente crescente e $a_1=2$, então seu limite não pode ser 1. Portanto, $\lim a_n$ não pode existir. Isto é, a seqüência é divergente.

Questão 9. O erro deste procedimento está no fato da quantidade o ser considerada "infinitamente pequena" para justificar a eliminação dos termos que são por ela multiplicados, uma vez que, em uma etapa anterior, todos os termos foram divididos por esta quantidade, logo ela não pode ser considerada nula. Ora, o que pode ser uma quantidade "infinitamente pequena" que não seja igual a zero? Seu estatuto matemático não está bem definido.

Este problema é resolvido, na matemática atual, com a noção de limite. A derivada é definida como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Ou seja, quando h tende para zero, os valores f(x+h) e f(x) se aproximam indefinidamente e a diferença entre eles é dividida por h. Quanto mais próximo h estiver de zero, mais próxima a diferença entre f(x+h) e f(x), dividida por h, estará da derivada, mas não dizemos que o limite é atingido quando h se torna "infinitamente pequeno" e sim quando é extraído o limite desta divisão. Isto que dizer que $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \; \text{tal que } |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|.$

A noção de limite permite, deste modo, eliminar o caráter de "aproximação infinita" contido no raciocínio utilizado por Newton.

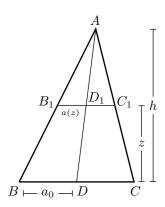
Questão 10. Sejam a_0 e b_0 os semi-eixos da base do cone. Então $S_0 = \pi \, a_0 \, b_0$. Consideremos \mathcal{E}_z o corte transversal do cone por um plano paralelo ao plano da base distando z (0 < z < h) deste. Então \mathcal{E}_z é uma elipse, cujos semi-eixos a(z) e b(z) dependem de z. Seja $S(z) = \pi \, a(z) \, b(z)$ a área de \mathcal{E}_z . Portanto:

$$V = \int_0^h S(z) \, \mathrm{d}z$$

Para determinar a(z) e b(z), observemos a figura ao lado, que representa um corte transversal do cone por uma plano perpendicular ao plano da base e que contem o vértice do cone.

Os triângulos ABD e AB_1D_1 são semelhantes (pelo caso AA). As bases destes triângulos são a_0 e a(z) e suas alturas são h e h-z, respectivamente, Logo, $\frac{a(z)}{h-z}=\frac{a_0}{h}$, isto é, $a(z)=a_0\,\frac{h-z}{h}$. Analogamente, $b(z)=b_0\,\frac{h-z}{h}$. Portanto:

$$S(z) = \pi a_0 b_0 \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 = S_0 \left(\frac{h-z}{h}\right)^2$$



Então:

$$V = \int_0^h S_0 \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 dz = \frac{S_0}{h^2} \int_0^h (h^2 - 2hz + z^2) dz = \frac{S_0}{h^2} \left[h^2 z - hz^2 + \frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{S_0}{h^2} \frac{h^3}{3}$$
$$= \frac{1}{3} S_0 h$$