TEXTO I

The Role of Contradiction and Uncertainty in Promoting the Need to Prove in Dynamic Geometry Environments

Nurit Hadas, Rina Hershkowitz & Baruch B. Schwarz

The failure to teach proofs

The failure to teach mathematical proof appears to be universal. Senk (1985) found that only 30% of the students in full year geometry courses that teach proofs (in the U.S.A.) reached 75% mastery in proving. In addition, even those students that succeeded to function in the proving ritual were not always aware of its meaning. They rarely saw the point of proving, and/or the need to prove, especially when the statement to be proved was given as a ready-made fact without any discovery by the learners. Balacheff (1991) claims that if students do not engage in proving processes, it is not so much because they are not able to do so, but rather because they do not see any reason or feel any need for it. High-school students, even in advanced mathematics and science classes, do not realize that a formal proof confers universal validity to a statement. A large percentage of students believes that, even after they have proved, checking more examples is desirable (Fischbein and Kedem, 1982; Vinner, 1983). Many students do not distinguish between evidence and deductive proof as a way of knowing that a geometrical statement is true (Chazan, 1993). Similarly, Schoenfeld (1986) claimed that after a full year geometry course in college, most students do not see the point of using deductive reasoning in geometric constructions, and that they are still naive empiricists whose approach to constructions is an empirical 'guess and test' loop. They produce proofs because the teacher demands them, not because they recognize that they are necessary in their practice (Balacheff, 1988).

The goals of teaching proofs

As mentioned above, for mathematicians, proofs play an essential role in establishing the *validity* of a statement and in *shedding light* on the reasons that support that statement. Lately mathematics educators have extended considerably the goals that must be fulfilled when teaching proofs. For example de Villiers (1990, 1999 p. 5) lists six functions of proof:

- *Verification* (concerned with the truth of a statement),
- *Explanation* (providing insight into why it is true),
- *Systematization* (the organization of various results into a deductive system of axioms, major concepts and theorems),
- *Discovery* (the discovery or invention of new results),
- *Communication* (the transmission of mathematical knowledge),
- *Intellectual challenge* (the *self-realization/fulfillment* derived from constructing a proof).

It seems that the first two functions mentioned by de Villiers, are related to the main roles of proof in mathematics discussed above: - *verification* directly relates to *validation* and *explanation* is synonymous with *shedding light*. An analysis of teaching materials indicates that these functions often remain hidden in textbooks. The list presents new perspectives on proving, both from the point of view of the professional mathematician (as shown above) and the experienced teacher. De Villiers considers these functions as desirable, although he is aware that they are not fulfilled in class.

Fonte: *Educational Studies in Mathematics*, n. 44 (2000), pp. 127-150.

TEXTO II

Comparing Infinite Sets – A Process of Abstraction

Pessia Tsamir & Tommy Dreyfus

Actual infinity, a central concept in philosophy and mathematics, has profoundly contributed to the foundation of mathematics and to the theoretical basis of various mathematical systems. It has long and persistently been rejected by mathematicians and philosophers alike, and was highly controversial even in the last century in spite of the comprehensive framework provided for it by Cantorian set theory. In fact, Cantor had problems in publishing his findings. In spite of his great effort to convince his contemporaries of the validity of his results, he was confronted with much antagonism as a result of *horror infiniti* (Boyer, 1985).

Moreover, even Cantor himself was surprised by the conclusions he reached while developing and investigating the theory of infinite sets. It was documented, for instance, that: *Earlier that year [1874] he [Cantor] had posed his next important problem to Dedekind in a letter: "Might it be possible to correspond a surface (a square . . .) with a straight line . . . so that to each point of the surface one point of the line corresponds, and conversely?" Although Cantor thought the answer must be negative, he could offer no reason for his belief, and neither could Dedekind. By 1877, however, Cantor was able to send Dedekind the startling news that, contrary to prevailing mathematical opinion, a one-to-one correspondence between lines and planes is not impossible. The proof is a matter of representing each point on the square by a pair of decimal coordinates . . . Cantor himself was so unprepared for the result that it prompted him to exclaim, "I see it but I don't believe it!"* (Dauben, 1983, p. 115)

Gradually, however, the notion of actual infinity gained recognition within the mathematical community, and finally it was acknowledged as a major source of mathematical inspiration. Hilbert, for instance, described the transfinite numbers as "the most astonishing product of mathematical thought, one of the most beautiful realizations of human activity in the domain of the pure intelligible." He declared that "no one shall expel us from the paradise Cantor has created for us." (Boyer, 1985, p. 617). Still, he was aware of the counter-intuitive nature of infinity, rooted in everyday experience and in overgeneralization from the finite system to the infinite one: . . . *the infinite is nowhere to be found in reality, no matter what experience, observation, and knowledge are appealed to. Can thought about things be so much different from things? . . . can thought be so far removed from reality? Rather is it not clear that, when we think that we have encountered the infinite in some real sense, we have merely been seduced into thinking so by the fact that we often encounter extremely large and extremely small dimensions in reality?* (Hilbert, 1925/1989, p. 191)

Fonte: *Journal of Mathematical Behavior*, n. 21 (2002), pp. 1-23.

Responda as questões 1 a 6 a seguir, com base no Texto I.

Vocabulário dado:

- *mastery* – maestria, domínio, compreensão ou conhecimento sobre um assunto ou técnica
- *to see the point* – entender a razão, a intenção ou o motivo para algo
- *to shed light* – jogar luz sobre, no sentido de esclarecer determinado assunto

---

Questão 1. (valor: 0,5) Que fato encontrado por Senk (1985) sobre estudantes nos Estados Unidos é citado no começo do primeiro parágrafo do texto?

(a) Apenas 30% dos estudantes em cursos de geometria em que provas são ensinadas demonstraram 75% de compreensão em exames de matemática.

(b) Apenas 30% dos estudantes em cursos de geometria em que provas são ensinadas atingiram 75% de domínio em demonstrações matemáticas.

(c) Apenas 30% dos estudantes tiveram mal desempenho em cursos de geometria e outros 75% fizeram as provas com maestria.

(d) Apenas 30% dos estudantes completaram cursos de geometria em que provas são ensinadas, e 75% destes tiveram domínio em demonstrações matemáticas.

(e) Apenas 30% dos estudantes fizeram cursos de geometria, e 75% destes aprenderam demonstrações matemáticas.

Questão 2. (valor: 0,5) No primeiro parágrafo, quais das afirmativas a seguir é atribuída a Balacheff (1991)?

(a) Alunos não se envolvem com o processo de provar nem tanto por que não são capazes, mas por que não vêem razão para isso.

(b) Alunos não se envolvem com o processo de provar por que não são capazes e necessitam de mais razão e sentimento para isso.

(c) Alunos não provam resultados matemáticos, pois não conseguem desenvolver o raciocínio correto para isto.

(d) É necessário engajar os alunos em mais atividades de provas matemáticas.

(e) Alunos nunca se engajam em processos de provas matemáticas.

Questão 3. (valor: 0,5) Ao final do primeiro parágrafo, o que afirma Schoenfeld (1986)?

(a) Depois de um ano cheio de cursos de geometria na faculdade, a maioria dos estudantes não consegue deduzir raciocínios em construções geométricas.

(b) Depois de um ano cheio de cursos de geometria na faculdade, a maioria dos estudantes não consegue enxergar os pontos no plano que devem ser usados para deduzir um raciocínio em construções geométricas.

(c) Depois de um curso de geometria de um ano completo na faculdade, a maioria dos estudantes não consegue enxergar os pontos no plano que devem ser usados para deduzir um raciocínio em construções geométricas.

(d) Depois de um curso de geometria de um ano completo na faculdade, a maioria dos estudantes não entende a razão de usar raciocínio dedutivo em construções geométricas.

(e) Depois de um ano inteiro de geometria na faculdade, construções geométricas e o uso de raciocínio dedutivo não são pontos abordados.

Questão 4. (valor: 0,5) Entre as funções das provas matemáticas listadas por de Villiers, **não** podemos incluir:

(a) Descoberta de resultados novos.

(b) Exemplificação de resultados.

(c) Verificação da veracidade de um resultado.

(d) Transmissão de conhecimentos matemáticos.

(e) Desafio intelectual.

Questão 5. (valor: 0,5) Que afirmação sobre livros didáticos é feita no último parágrafo do texto?

(a) As funções de sistematização e comunicação não são freqüentemente abordadas em livros didáticos.

(b) As funções de sistematização e comunicação são freqüentemente abordadas em livros didáticos.

(c) Nenhuma das funções da prova matemática listadas por de Villiers é abordada em livros didáticos.

(d) As funções de verificação e explicação freqüentemente ficam ocultas em livros didáticos.

(e) As funções de verificação e explicação ficam explícitas em livros didáticos.

Questão 6. (valor: 2,5) Faça um resumo, de no máximo dez linhas, em língua portuguesa, das principais idéias do último parágrafo do texto.

Responda as questões 7 a 12 a seguir, com base no Texto II.

Questão 7. (valor: 0,5) No segundo parágrafo a autora relata um problema proposto por Cantor em uma carta a Dedekind. Que problema foi esse?

(a) Seria possível que uma superfície (um quadrado) com lados retos corresponda àqueles pontos da reta que são convertidos?

(b) Seria possível que uma superfície (um quadrado) corresponda com uma linha reta e os pontos da superfície que estejam também na reta sejam convertidos?

(c) Seria possível corresponder uma superfície (um quadrado) com uma linha reta de tal forma que a cada ponto da superfície corresponda um ponto da reta e vice-versa?

(d) Seria possível ligar uma superfície (um quadrado) com linhas retas de tal forma que cada ponto da superfície tenha um único ponto em comum com as retas correspondentes.

(e) Seria possível ligar uma superfície (um quadrado) com linhas retas de tal forma que todos os pontos da superfície tenham um único ponto em comum com a reta correspondente.

Questão 8. (valor: 0,5) Qual foi, segundo o texto, a reação de Cantor e Dedekind ao problema proposto na carta?

(a) Tanto Cantor quanto Dedekind acreditavam que a resposta não deveria ser negativa, mas nenhum dos dois se preocupou em buscar uma razão para esta crença.

(b) Cantor acreditava que a resposta deveria ser negativa, mas nem ele nem Dedekind foram capazes de dar uma razão para isso.

(c) Cantor acreditava que não havia razão para que a resposta fosse negativa, mas Dedekind discordava dele.

(d) Cantor achava que a resposta era negativa, mas não ofereceu nenhuma razão para isso, e Dedekind não poderia concordar.

(e) Cantor achava que a resposta não poderia ser negativa, e por alguma razão, e Dedekind não poderia acreditar nisso.

Questão 9. (valor: 0,5) Segundo o texto, em que se baseava a prova enviada por Cantor a Dedekind em 1877?

(a) Em uma opinião matemática contraditória.

(b) Cantor foi capaz de enviar a Dedekind novidades brilhantes.

(c) No contrário da opinião prevalente, de que uma correspondência um-a-um entre planos e retas não é impossível.

(d) Na representação de cada ponto do quadrado por um par de coordenadas decimais.

(e) Cantor estava tão despreparado para o resultado que exclamou "Eu vejo mas não acredito!"

Questão 10. (valor: 0,5) Qual foi a reação da comunidade matemática relatada no início do terceiro parágrafo?

(a) Reconheceu gradativamente a noção de infinito atual.

(b) Reconheceu imediatamente a noção de infinito atual.

(c) Rejeitou gradualmente a noção de infinito atual.

(d) Rejeitou completamente a noção de infinito atual.

(e) Aceitou completamente a noção de infinito atual.

Questão 11. (valor: 0,5) No terceiro parágrafo, os autores afirmam que Hilbert estava ciente da natureza anti-intuitiva da noção de infinito. Quais das seguintes citações correspondem a comentários de Hilbert sobre este fato?

I - Os números transfinitos são o mais surpreendente produto do pensamento humano, uma das mais belas realizações da atividade humana no domínio da inteligência pura.

II - Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.

III - A natureza do infinito está enraizada na experiência de todo dia e na generalização de sistemas finitos para infinitos.

IV - Pode o pensamento das coisas ser tão diferente das coisas?

(a) I e II

(b) II e III

(c) III e IV

(d) somente I

(e) somente IV

Questão 12. (valor: 2,5) Faça um resumo, de no máximo dez linhas, em língua portuguesa, das principais idéias do primeiro parágrafo do texto.

Gabarito das questões objetivas

1	2	3	4	5	7	8	9	10	11
b	a	d	b	d	c	b	d	a	e