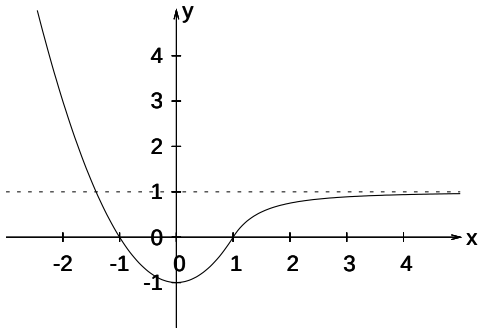
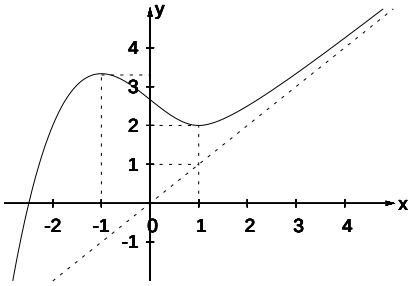
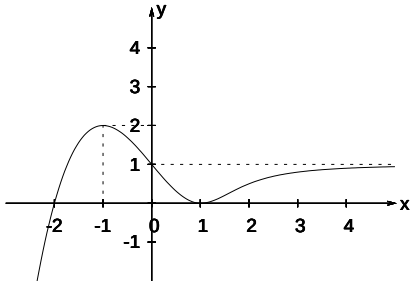
UFRJ - Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado em Ensino de Matemática
Seleção 2006 – Etapa 2

Questão 1. Considere a função p cujo gráfico é dado ao lado. Dentre os gráficos abaixo, indique o único que pode representar uma função q cuja derivada seja p.
Observação: nesta questão, não é necessário justificar sua resposta.

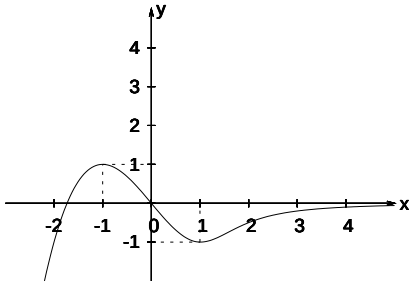




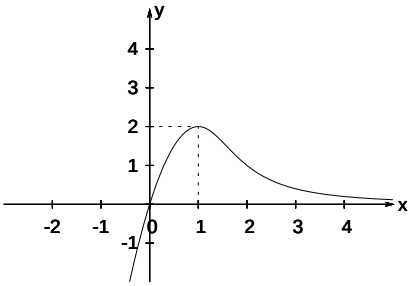
(a)



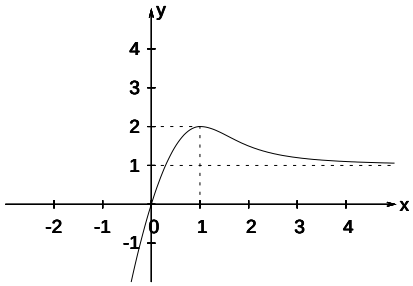
(b)



(c)



(d)



(e)

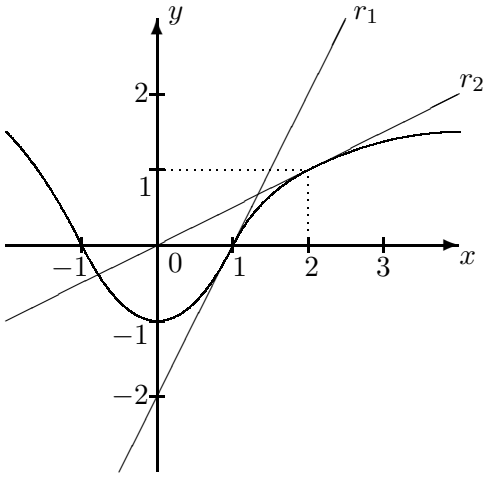
Questão 2. Considere a dízima periódica: $\alpha = 0,\overline{9} = 0,999\ldots$. Determine quais das afirmativas abaixo é a correta. Justifique rigorosamente a sua resposta.

(a) $\alpha > 1$ (b) $\alpha = 1$ (c) $\alpha < 1$

Questão 3. Identifique e esboce a curva plana de equação cartesiana $x^2 + 2\,y^2 + 4\,x - 8\,y + 8 = 0$.

Questão 4. Determine e identifique o lugar geométrico dos pontos do $\mathbb{R}^3$ que são equidistantes dos pontos $(1, 0, 0)$ e $(0, 2, -1)$.

Questão 5. A figura ao lado representa um trecho do gráfico de uma função $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. As retas r_1 e r_2 são tangentes ao gráfico em $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, respectivamente. Considere ainda a função $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(x) = |\, x^2 - 3\,x + 2\,|$.



(a) A função $v \circ u$ é diferenciável em $x_1 = 1$? Em caso afirmativo, determine $(v \circ u)'(1)$.

(b) A função $v \circ u$ é diferenciável em $x_2 = 2$? Em caso afirmativo, determine $(v \circ u)'(2)$.

Justifique suas respostas.

Questão 6. Considere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$h(x) = \begin{cases} (x+1)\,(3-x) & \text{se } x \geq 0 \\ |\,2x+3\,| & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Faça um esboço do gráfico de h, indicando (caso existam):

(a) todas as soluções reais da equação $h(x) = 0$;

(b) os máximos e mínimos locais de h;

(c) os pontos $x \in \mathbb{R}$ em que h é descontínua;

(d) os pontos $x \in \mathbb{R}$ em que h não é derivável;

(e) o valor da área da região acima do eixo das abscissas, abaixo do gráfico de h e entre as retas $x = -2$ e $x = 1$.

Questão 7. Considere a função $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$g\,(x) = x^2\,\ln x$$

Faça um esboço do gráfico de g indicando (caso existam):

(a) os limites $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$;

(b) as assíntotas horizontais e verticais de g;

(c) os máximos e mínimos locais e absolutos de g;

(d) os intervalos em que g é crescente e os intervalos em que g é decrescente;

(e) os pontos de inflexão de g;

(f) os intervalos em que a concavidade de g é voltada para cima e os intervalos em que a concavidade de g é voltada para baixo.

Questão 8. Para calcular o limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, uma pessoa argumentou da seguinte forma:

$$\textit{Como} \lim_{x \to +\infty} (x^2+1) = \lim_{x \to +\infty} (x^2-1) = +\infty\ ,\ \textit{então} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1\ .$$

A argumentação acima está correta? E a conclusão (isto é, o valor do limite), está correta? Justifique suas respostas.

Questão 9.

(a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial de segundo grau. Mostre que a reta $y = a\,x + b$ é tangente ao gráfico de f se, e somente se, intercepta o gráfico em um único ponto.

(b) O enunciado do item anterior é válido para uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qualquer (não sendo necessariamente polinomial de segundo grau)?

Questão 10. Enuncie a definição de derivada de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e explique seu significado geometricamente.

UFRJ - Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado em Ensino de Matemática
Seleção – 2006
Etapa 2

Questão 1. Alternativa correta: **(a)**

Questão 2. Alternativa correta: **(b)**

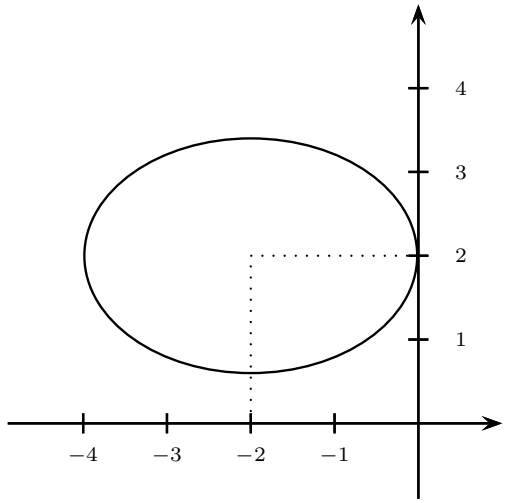
O número α é o limite de uma série geométrica de razão $\dfrac{1}{10}$: $\alpha = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$. Logo:

$$\alpha = 9 \cdot \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Questão 3. Desenvolvendo a equação dada, obtemos:

$$\begin{aligned}
&x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 8 = 0\\
&x^2 + 4x + 4 + 2(y^2 - 4y + 4) - 4 - 8 + 8 = 0\\
&(x+2)^2 + 2(y-2)^2 = 4\\
&\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1
\end{aligned}$$

A curva é portanto uma elipse de centro no ponto $(-2, 2)$, semi-eixo horizontal $a = 2$ e semi-eixo vertical $b = \sqrt{2}$, como mostra a figura ao lado.



Questão 4. O lugar geométrico pedido é formado pelos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:

$$\mathsf{d}((x,y,z),(1,0,0)) = \mathsf{d}((x,y,z),(0,2,-1))$$

Desenvolvendo esta equação obtemos:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}\\
&x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1\\
&-2x = -4y + 4 + 2z\\
&2x - 4y + 2z + 4 = 0
\end{aligned}$$

O lugar geométrico é portanto um plano no $\mathbb{R}^3$.

Questão 5. Se u é diferenciável em x e v é diferenciável em $u(x)$, então segue pela regra da cadeia que $v \circ u$ é diferenciável em x e $(v \circ u)'(x) = v'(u(x))\, u'(x)$.

Do gráfico dado para u, temos que u é diferenciável em $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, $u'(1) = 2$ e $u'(2) = \frac{1}{2}$. Além disso, temos que:

$$v(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{se } x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2 \\ -x^2 + 3x - 2 & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Portanto v é diferenciável $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ e:

$$v'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se } x < 1 \text{ ou } x < 2 \\ -2x + 3 & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$$

(a) Como v é diferenciável em $u(1) = 0$, temos pela regra da cadeia que $v \circ u$ é diferenciável em $x_1 = 1$ e $(v \circ u)'(1) = v'(0)\, u'(1) = 6$.

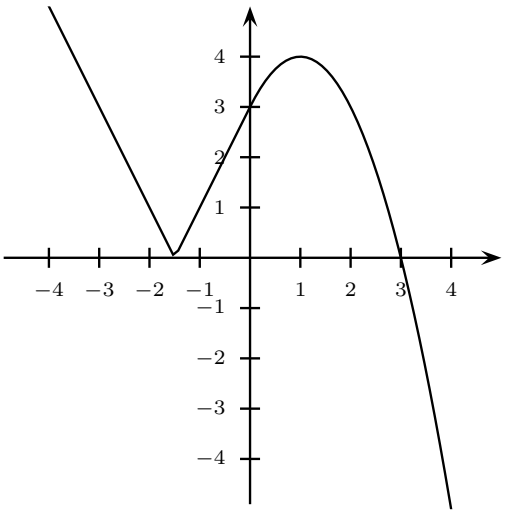
(b) Como v não é diferenciável em $u(2) = 1$, não podemos aplicar a regra da cadeia neste ponto. Porém, podemos usar a regra da cadeia para calcular as derivadas laterais de $v \circ u$. Assim, sendo $v_1(x) = x^2 - 3x + 2$ e $v_2(x) = -x^2 + 3x - 2$, temos:

$$f'_-(2) = (v_1 \circ u)'(2) = v_1'(u(2))\, u'(2) = v_1'(1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f'_+(2) = (v_2 \circ u)'(2) = v_2'(u(2))\, u'(2) = v_2'(1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $v \circ u$ não pode ser diferenciável em $x_2 = 2$.

Questão 6. Analisando a equação de h, vemos facilmente que o gráfico de h tem o seguinte aspecto:



(a) As soluções reais de $h(x) = 0$ são os $x = -\frac{3}{2}$ e $x = 3$.

(b) O único ponto de mínimo local de h é $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$. O único máximo local de h é o vértice da parábola $y = (x+1)(3-x)$, isto é o ponto $(1, 4)$.

(c) A função é certamente contínua para $x \neq 0$. Além disso, $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = h(0) = 3$. Logo, h é contínua $\forall x \in \mathbb{R}$.

(d) A função não derivável em $x = -\frac{3}{2}$, pois é definida pela expressão $|2x + 3|$. O único outro ponto onde h pode não ser derivável é $x = 0$, onde ocorre a mudança das sentenças por meio das quais h é definida. Neste ponto, temos que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(-x^2 + 2x + 3) - 3}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(2x + 3) - 3}{x} = 2$$

Então, h é diferenciável em 0 e $h'(0) = 2$. O único ponto em que h não é derivável é portanto $x = -\frac{3}{2}$.

(e) A área é dada por:

$$\begin{aligned}
S = & \int_{-2}^{1} h(x)\,\mathrm{dx} = \int_{-2}^{-\frac{3}{2}} h(x)\,\mathrm{dx} + \int_{-\frac{3}{2}}^{0} h(x)\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{1} h(x)\,\mathrm{dx} \\
= & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 + \int_0^1 (x+1)(3-x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \int_0^1 (-x^2 + 2x + 3)\,\mathrm{dx} = \\
= & \frac{5}{2} + \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{3} + 1 + 3 = \\
= & \frac{37}{6}
\end{aligned}$$

Questão 7. O sinal de g é determinado pelo logaritmo, logo g é positiva para $x > 1$ e negativa para $0 < x < 1$.

(a) Temos que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, pois $\lim_{x\to+\infty} x^2 = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Como $\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, para calcular $\lim_{x\to 0^+} g(x)$, podemos aplicar a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-2\,x^{-3}} \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = 0$$

(b) Como $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (e $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ não está definido), então g não admite assíntotas horizontais. Como não existem pontos $a \in \mathbb{R}$ em que os limites laterais de g sejam infinitos, então g também não admite assíntotas verticais.

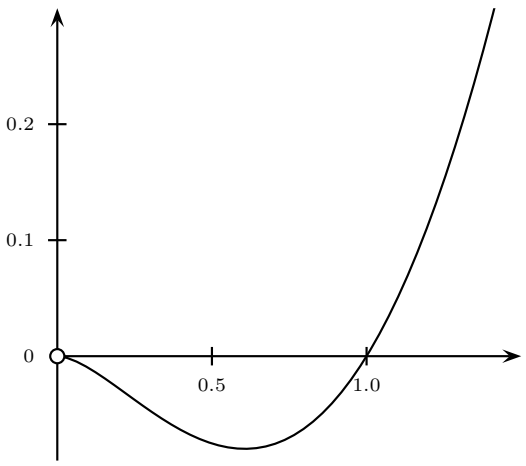
A derivada de g é dada por: $g'(x) = 2x\,\ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x\,(2\ln x + 1)$.

Para analisar o sinal de g, basta considerar o fator $(2\ln x + 1)$. Assim, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ e $g'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

A derivada segunda de g é dada por: $g''(x) = x \cdot \dfrac{2}{x} + 1 \cdot (2\ln x + 1) = 2\ln x + 3$.

Logo, $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$, $g''(x) > 0 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$ e $g''(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

Considerando os fatores acima, podemos concluir que o gráfico de g tem o seguinte aspecto:



Observando o gráfico ao lado, podemos responder às questões a seguir.

(c) O único mínimo absoluto de g ocorre no ponto $(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1})$. A função não possui máximos locais ou absolutos.

(d) A função é decrescente em $]0, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}[$ e crescente em $]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$.

(e) O único ponto de inflexão de g é $(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-3})$.

(f) A função possui concavidade voltada para baixo em $]0, \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}[$ e concavidade voltada para cima em $]\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}, +\infty[$.

Questão 8. A argumentação não está correta, pois, se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ não podemos afirmar que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. De fato, temos que $\lim_{x\to+\infty} x^2 = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, mas $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$.

Por outro lado, o valor do limite está correto pois:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$$

Questão 9.

(a) Seja $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, com $A, B, C \in \mathbb{R}$ e $A \neq 0$. Como sabemos, a equação da reta t tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = (2Ax_0 + B)(x - x_0) + Ax_0^2 + Bx_0 + C \\ &= (2Ax_0 + B)x + (C - Ax_0^2) \end{aligned}$$

Se (x, y) está na interseção de t com o gráfico de f, então é solução do sistema

$$\begin{cases} y = Ax^2 + Bx + C, \\ y = (2Ax_0 + B)x + (C - Ax_0^2) \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos que x é solução de

$$Ax^2 - 2Ax_0x + Ax_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A(x - x_0)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0$$

Substituindo na primeira equação obtemos $y = f(x_0)$. Ou seja, o único ponto na interseção de t com o gráfico de f é o ponto de tangência.

Suponhamos agora, que a reta $y = ax + b$ intercepte o gráfico de f apenas em $(x_0, f(x_0))$, ou seja, $(x, y) = (x_0, f(x_0))$ é a única solução do sistema

$$\begin{cases} y = Ax^2 + Bx + C, \\ y = ax + b \end{cases}$$

Neste caso, subtraindo as equações, obtemos que x_0 é a única solução da equação do segundo grau

$$Ax^2 + (B - a)x + (C - b) = 0$$

Segue que $\Delta = 0$ e, portanto,

$$x_0 = \frac{a - B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{a - b}{2A} \quad \Rightarrow \quad a = 2Ax_0 + B$$

Ou seja, a reta $y = ax_b$ tem a mesma inclinação de t e ambas passam por $(x_0, f(x_0))$, logo, elas coincidem.

(b) Não. As retas de equações $y = 0$ e $y = x$ se interceptam apenas em $(0, 0)$ mas não são tangentes neste ponto. Por outro lado, a reta $y = 2$ é tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 - 3x$ no ponto $(-1, 2)$ e, além deste ponto, o intercepta em $(2, 2)$.

Questão 10. A derivada de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o limite (caso este exista):

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Se pensarmos em h como uma variação da variável x, o numerador $f(x+h) - f(x)$ será a variação correspondente da variável y. Assim, a razão $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ é a inclinação da reta que corta o gráfico de f nos pontos $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+h))$. Quando $h \to 0$, esta razão tente à inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$, isto é, a reta que melhor aproxima o gráfico de f próximo a este ponto.