TEXTO I

CHAPTER 1

Euler and Number Theory

Of all branches of mathematics, none is so natural—nor so deceptively difficult—as the theory of numbers. Its object is to understand the positive integers, surely the most fundamental of mathematical entities. To the uninitiated, number theory seems far simpler than its more sophisticated cousins like trigonometry or calculus. After all, any eight-year old can count to fifty, but how many know the Law of Cosines or the Chain Rule?

It takes very little number theoretic exposure to disabuse the uninitiated of this notion. In fact, the innocent-looking whole numbers are the source of some of the deepest, most vexing problems in mathematics. Hiding their secrets with an embarrassing ease, the integers provide a worthy challenge for the greatest of mathematicians.

Perfect numbers, the subject of this chapter, were of interest as far back as classical times. Euclid (ca. 300 BCE) included a major theorem about such numbers in his masterpiece, the *Elements*, and twenty centuries later Leonhard Euler revisited the topic to finish what Euclid had begun. Yet even Euler left important questions unanswered. To this day, as with so many issues in number theory, the final chapter remains to be written, and the quest for perfect numbers, in the words of Victor Klee and Stan Wagon, "is perhaps the oldest unfinished project of mathematics."[1]

Prologue

Euclid's *Elements* is recognizable even by non-mathematicians as the foremost geometry text of the ancient Greeks. But many are surprised to learn that Euclid devoted three of the thirteen books (or chapters) of the *Elements* to number theory.

[1]Victor Klee and Stan Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Association of America, 1991, p. 178.

This reflects a tradition in Greek thought going back to the Pythagorean philosophers of the sixth century BCE. For them, whole numbers were more than just mathematical abstractions—they were objects of reverence and contemplation, woven into the very fabric of Nature. The Pythagoreans attributed to whole numbers an importance having as much to do with mysticism as with mathematics.

Working within this tradition, Euclid began Book VII of the *Elements* with 22 definitions. Some are easily recognizable today. For instance, Euclid defined a "prime number" to be one that is "measured by a unit alone." Others, like "an even-times odd number"—which Euclid defined as "that which is measured by an even number according to an odd number"—sound quaint to our ears.

The definition of importance for this chapter, and the last on his list, was:

Definition. A **perfect** number is that which is equal to its own parts.

The modern reader may be somewhat confused by the terminology. The matter becomes clearer if we recognize that, for Euclid, "part" meant "proper whole number divisor" and that "equal to" meant "equal to the sum of." With these modifications, we transform Euclid's words into their modern equivalent:

Definition. A whole number is **perfect** if it is equal to the sum of its proper divisors.

For example, the number 6 is perfect because its proper divisors are 1, 2, and 3, and $1 + 2 + 3 = 6$. So too are 28 ($1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$); 496 ($1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$); and 8128 ($1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064 = 8128$). These four were the only perfect numbers known in ancient Greece, and no others below 10,000 display such "perfection." Clearly they are few and far between.

Nicomachus, a Greek mathematician of the first century, held such numbers in high regard. He observed that perfect numbers are remarkable and rare, "even as fair and excellent things are few ... while ugly and evil ones are widespread."[2] And in later centuries, imaginative scholars attached to perfect numbers a significance of the most outlandish kind. For instance, the number 6 was taken as representing the *perfect* union of the sexes, for $6 = 3 \times 2$, where 3

[2]Nicomachus of Gerasa, *Introduction to Arithmetic*, trans. Martin L. D'ooge, U. of Michigan Press, 1938, p. 209.

is a "male" number and 2 is a "female" one (for reasons that should be evident to all but the anatomically challenged). Clearly, our predecessors made perfect numbers carry some pretty heavy baggage.

Euclid bypassed such numerological rubbish and addressed the subject from a purely mathematical viewpoint. Although defining perfect numbers at the outset of Book VII, he never mentioned them again until the end of Book IX—that is, until the final number theoretic proposition in the *Elements*. Undoubtedly, Euclid was saving the best until last, for his theorem was a classic, providing a splendid recipe for perfect numbers.

The result, Proposition 36 of Book IX, was stated by Euclid as:

> If as many numbers as we please beginning from a unit be set out continuously in double proportion, until the sum of all becomes prime, and if the sum multiplied into the last make some number, the product will be perfect.

The modern reader is permitted another blank look. This too needs a bit of translation.

First, the part about beginning with a unit and proceeding in "double proportion" is Euclid's way of describing the series $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$. He supposed that, in continuing this process, the sum turns out to be a prime number; in other words, he assumed that $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1}$ is prime. Then, when this sum is "multiplied into the last"—that is, when we multiply $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1}$ by 2^{k-1} (the "last" term of the progression)—Euclid asserted that the resulting product is a perfect number.

Before examining his proof, we observe that $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1}$ is a finite geometric series which sums to $(2^k - 1)/(2 - 1) = 2^k - 1$. Thus, Euclid's proposition, recast in modern terms, becomes:

Theorem. *If $2^k - 1$ is prime and if $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$, then N is perfect.*

Extraído de: Dunham, William. *Euler: The Master of Us All.* The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions, n. 22, 1999.

Responda as questões 1 a 6 a seguir, com base no TEXTO I.

Questão 1. (valor: 0,5) Qual é, segundo o autor, o assunto do capítulo 1?

(a) números primos
(b) números perfeitos
(c) números naturais
(d) números inteiros
(e) teoria dos números

Questão 2. (valor: 0,5) Como o pensamento grego, desde os filósofos pitagóricos, concebia os números naturais?

(a) Como um reflexo de três dos treze livros dos *Elementos* de Euclides.
(b) Como um reflexo da tradição.
(c) Como apenas abstrações matemáticas.
(d) Como objetos de reverência e contemplação.
(e) Como mais importância mística do que matemática.

Questão 3. (valor: 0,5) Como Euclides definia número primo?

(a) Aquele que não admite divisores próprios.
(b) Aquele que é medido por um número par de acordo com um número ímpar.
(c) Aquele que só é divisível por ele próprio e pela unidade.
(d) Aquele que é um número par vezes um número ímpar.
(e) Aquele que é medido por uma unidade somente.

Questão 4. (valor: 0,5) Como Euclides tratava os números perfeitos?

(a) Como números relevantes e raros.
(b) Como uma representação da união dos sexos, do "masculino"e do "feminino".
(c) De um ponto de vista puramente matemático.
(d) Levando em conta aspectos numerológicos.
(e) Da mesma forma que Nicomachus, um matemático grego do século I.

Questão 5. (valor: 0,5) O que afirma a proposição 36 do livro IX dos *Elementos* de Euclides?

(a) Que a soma $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1}$ é um número primo.
(b) Que a soma $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1}$ multiplicada por 2^{k-1} é um número perfeito.
(c) Que, se 2^{k-1} é um número primo, então a soma $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1}$ multiplicada por 2^{k-1} é um número perfeito.
(d) Que, se a soma $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1}$ é um número primo, então esta soma multiplicada por 2^{k-1} é um número perfeito.
(e) Que, se a soma $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1}$ é um número perfeito, então 2^{k-1} é um número primo.

Questão 6. (valor: 2,5) Traduza para o português os dois primeiros parágrafos do texto (o trecho entre *Of all branches of Mathematics,* ... e ... *challenge for the greatest of mathematicians*.

TEXTO II

CHAPTER 14

ADVANCED MATHEMATICAL THINKING AND THE COMPUTER

ED DUBINSKY AND DAVID TALL

1. INTRODUCTION

The computer can be used as a tool to complement advanced mathematical thinking in a variety of ways. In research it has been used to provide data to suggest possible theorems, to seek counter-examples and to carry out onerous computations to prove theorems involving only a finite number of algorithmic cases. In education it can be used for the same objectives, and for one other major purpose: to help students conceptualize, and construct for themselves, mathematics that has already been formulated by others.

There are already many computer tools available for general use. Symbolic manipulators have been used in research, but with less initial success in education. We hypothesize that success using the computer in education is enhanced by using the computer for explicit conceptual purposes and report empirical research which supports this hypothesis. New software environments are being developed which enable the student to explore concepts in a directed and meaningful way, and which suggest new approaches to mathematics more appropriate for the learner.

Programming can be used to support both mathematical research and mathematics teaching. But when it is simply added to the curriculum without very specific aims in mind it has not always been successful. We will discuss the way in which a computer language, designed so that the programming constructs mirror mathematical constructs, can assist students to carry out mathematical processes and encapsulate them as mathematical concepts. (...)

3. THE COMPUTER IN MATHEMATICS EDUCATION – GENERALITIES

All the various ways that computers are used in research are potentially available for teaching and learning advanced mathematics. For example, students may learn to program in order to tackle certain types of problem, or they may use general purpose software as an environment to explore ideas. The main difference between the activities of undergraduate students and mathematical research is that the former usually covers knowledge domains which are known to the more experienced members of the mathematical community, whereas research is attempting to break new ground. Of course, to the student the mathematics is new, and here there may be strong analogies with research, but the far greater portion of a student's work is concerned with mathematics that is already part of an organized knowledge system. This opens up a further possibility for the use of the computer in mathematical education, through the development of computer software designed to help the student conceptualize mathematical ideas.

Recent research into concept development shows consistently the complexity of an individual's mental imagery: students can give the "right" answers for the wrong reasons, whilst "wrong" answers may have a rational origin. In particular, many researchers have realized that student errors are often the product of misconceptions brought about using old knowledge in a new context where it no longer holds good. This leads to the hypothesis that learning may be improved by helping students construct knowledge in their own minds in a context which is designed to aid, or even stimulate, that construction. One way of doing this is through providing richly endowed computer software which embodies powerful mathematical ideas so that the student can manipulate and reflect on them. Another is to have the student program mathematical constructions in a computer language designed so that the act of programming parallels the construction of the underlying mathematical processes.

A computer can also give much-needed meaning to mathematical concepts that students may feel are "not of the physical world" but in the mind, or in some ideal world. It is generally agreed that ideas are easier to understand when they are made more "concrete" and less "abstract". When an abstract idea is implemented or represented in a computer, then it is concrete in the mind, at least in the sense that it exists (electro-magnetically, if not physically). Not only can the computer construct be used to perform processes represented by the abstract idea, but it can itself be manipulated, things can be done to it. This tends to make it more concrete, especially for the person who constructed it. Indeed, it is in general true that whenever a person constructs something on a computer, a corresponding construction is made in the person's mind. It is possible to orchestrate this correspondence by providing programming tasks in an appropriate programming language designed so that the resulting mental constructions are powerful ideas that enhance the student's mathematical knowledge and understanding. Moreover, once the various constructions exist on the computer, it is very useful to reflect on what they are (in terms of how the computer makes them) and what processes they can engage in.

Extraído de: Dubinsky, Ed & Tall, David. *Advanced Mathematical Thinking and the Computer*, in Tall, D.O. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Holland, 1991, pp. 231 - 248. Disponível em: www.davidtall.com

Responda as questões 7 a 12 a seguir, com base no TEXTO II.

Questão 7. (valor: 0,5) No primeiro parágrafo, os autores citam algumas formas como o computador pode ser usado para complementar o pensamento matemático avançado em pesquisa e em educação. Dentre as alternativas abaixo, qual corresponde a uma forma de uso do computador em pesquisa, citada nesse parágrafo?

(a) Para fornecer dados para sugerir possíveis teoremas.

(b) Para contar exemplos.

(c) Para provar apenas um número finito de teoremas algorítmicos.

(d) Para ajudar estudantes a construir por si próprios a matemática que já foi formulada por outros.

(e) Para provar teoremas onerosos.

Questão 8. (valor: 0,5) Que hipótese é feita pelos autores no segundo parágrafo?

(a) Manipuladores simbólicos têm sido usados em educação com menos sucesso que em pesquisa.

(b) O sucesso do uso de computadores em educação é potencializado através do seu uso para propósitos conceituais explícitos.

(c) O sucesso do uso de computadores em educação é potencializado através do seu uso para propósitos conceituais explícitos e para reportar pesquisa empírica.

(d) Já há muitas ferramentas computacionais para uso geral, logo manipuladores simbólicos podem ser usados em educação com mais sucesso que inicialmente.

(e) O sucesso em usar o computador em educação se deve ao seu uso em propostas conceituais e em pesquisas empíricas.

Questão 9. (valor: 0,5) Qual é, de acordo com os autores, a principal diferença entre as atividades de estudantes de graduação e de pesquisa matemática?

(a) As atividades de estudantes de graduação normalmente cobrem domínios de conhecimento que são conhecidos de membros mais experientes da comunidade matemática, enquanto a pesquisa está tentando descobrir novos terrenos.

(b) As atividades de pesquisa matemática normalmente cobrem domínios de conhecimento que são conhecidos de membros mais experientes da comunidade matemática, além da pesquisa estar tentando descobrir novos terrenos.

(c) A forma como usualmente é coberto o conhecimento em domínios conhecidos pelos membros mais experientes da comunidade matemática, onde a pesquisa tenta bloquear novas abordagens.

(d) Para o estudante, a matemática é uma novidade, e a maior parte de seu trabalho é com uma matemática que já é parte de um sistema de conhecimento organizado.

(e) Para o estudante, a matemática é uma novidade, e grande parte deles se preocupam com uma matemática que já é parte de um sistema de conhecimento organizado.

Questão 10. (valor: 0,5) Dentre as alternativas abaixo, escolha aquela que corresponde a uma forma, citada no texto, de ajudar estudantes a construir conhecimento em suas próprias mentes, em um contexto planejado para auxiliar esta construção.

(a) Evitar que estudantes dêem a resposta "certas" pelas razões erradas, dando preferência a respostas erradas com origens racionais. Particularmente, evitando realizar nos estudantes erros de produção na concepção do uso de velhas técnicas em um novo contexto, onde vastos conhecimentos são bons.

(b) Estimular o uso de velho conhecimento em novos contextos, onde o mesmo se aplique bem.

(c) Evitar o uso de velho conhecimento em novos contextos, onde o mesmo não mais seja válido.

(d) Ter programas de matemática construídos para estudantes em uma linguagem de computador construída para o ato de programar processos matemáticos, como desenhar paralelas.

(e) Fazer com que os estudantes programem construções matemáticas em uma linguagem de computador desenhada de tal forma que o ato de programar seja paralelo à construção dos processos matemáticos subjacentes.

Questão 11. (valor: 0,5) Segundo os autores, de que forma o computador pode dar significado a conceitos matemáticos abstratos?

(a) Estudantes podem ter a sensação de que alguns conceitos "não estão no mundo físico".

(b) Estudantes podem ter a sensação de que alguns conceitos estão na mente ou em um mundo ideal.

(c) Quando uma idéia abstrata é implementada ou representada em computador, esta fica mais concreta na mente.

(d) Em geral, concorda-se que idéias são mais fáceis de entender quando são mais "concretas" e menos "abstratas".

(e) O computador só pode ser usado para construir processos representados por uma idéia abstrata.

Questão 12. (valor: 2,5) Traduza para o português o quarto parágrafo do texto (o trecho entre *All the various ways that computers are used,* ... e ... *to help the student conceptualize mathematical ideas.*

Gabarito das questões objetivas

1	2	3	4	5	7	8	9	10	11
b	d	e	c	d	a	b	a	e	c