

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**O PROCESSO HISTÓRICO DE DISCIPLINARIZAÇÃO DO CÁLCULO
INFINITESIMAL NO BRASIL E UM PANORAMA SOBRE ALGUNS PAÍSES DA
EUROPA E AMÉRICA**

MARIANNA DEL' SECCHI SYPNIEVSKI

Rio de Janeiro

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MARIANNA DEL' SECCHI SYPNIEVSKI

**O PROCESSO HISTÓRICO DE DISCIPLINARIZAÇÃO DO CÁLCULO
INFINITESIMAL NO BRASIL E UM PANORAMA SOBRE ALGUNS PAÍSES DA
EUROPA E AMÉRICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Gert Schubring.

Rio de Janeiro

2023

CIP - Catalogação na Publicação

D994p Del Secchi Sypniewski, Marianna
O PROCESSO HISTÓRICO DE DISCIPLINARIZAÇÃO DO
CÁLCULO INFINITESIMAL NO BRASIL E UM PANORAMA SOBRE
ALGUNS PAÍSES DA EUROPA E AMÉRICA / Marianna Del
Secchi Sypniewski. -- Rio de Janeiro, 2023.
147 f.

Orientador: Gert Schubring.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal
do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática,
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática,
2023.

1. História do ensino de cálculo. 2. Movimento
Internacional de Reforma. 3. Análises de livros
texto de cálculo. I. Schubring, Gert, orient. II.
Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

**O PROCESSO HISTÓRICO DE DISCIPLINARIZAÇÃO DO CÁLCULO
INFINITESIMAL NO BRASIL E UM PANORAMA SOBRE ALGUNS PAÍSES DA
EUROPA E AMÉRICA**

MARIANNA DEL' SECCHI SYPNIEVSKI

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada em: 13 de julho de 2023.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gert Schubring (Orientador)

Universidade Federal do Rio de Janeiro – PEMAT

Assinatura dispensada (Resolução CEPG/UFRJ N° 128, de 11/11/2022)

Prof. Dr. Felipe Acker

Universidade Federal do Rio de Janeiro – IM

Assinatura dispensada (Resolução CEPG/UFRJ N° 128, de 11/11/2022)

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira de Carvalho

Universidade Estadual do Rio de Janeiro

Assinatura dispensada (Resolução CEPG/UFRJ N° 128, de 11/11/2022)

Prof.^a Dr.^a Márcia Maria Fusaro Pinto (Suplente)

Assinatura dispensada (Resolução CEPG/UFRJ N° 128, de 11/11/2022)

Universidade Federal do Rio de Janeiro - PEMAT

Dedico este trabalho, de todo o coração:

À minha mãe, Ramayana, e aos meus pais, Rodrigo e Alexandre, que sempre me incentivaram a caminhar em busca do conhecimento.

Ao amor da minha vida, Matheus, pessoa que tive a sorte de encontrar no meio dessa jornada de estudos.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer às pessoas que foram fundamentais para que eu conseguisse chegar até aqui.

À minha mãe, Ramayana, que mesmo apesar de todas as dificuldades soube conduzir a minha criação de forma excelente com um imenso incentivo à educação.

Aos meus pais, Rodrigo e Alexandre, que com todo o carinho sempre me apoiaram a seguir os meus sonhos. Obrigada por confiarem em mim.

Aos meus irmãos, André, Maria Vitória, Rafael e Amanda, por simplesmente existirem na minha vida e proporcionarem inúmeros momentos de felicidade. Em especial, ao meu irmão, Rafael, que decidiu seguir os meus passos e hoje também cursa graduação em matemática.

Às minhas avós, Isolete e Lídia, por todo o amor depositado em mim. O carinho de vocês foi extremamente fundamental.

Um agradecimento, em especial, ao meu avô, Roberto, que ao longo do processo de desenvolvimento desta pesquisa teve diversos problemas relacionados à sua saúde, mas ainda assim, sempre buscou me transmitir tranquilidade e perseverança para seguir com o meu propósito.

Ao meu esposo, Matheus Viegas, por todo carinho, companheirismo e cumplicidade. E, especialmente, por acompanhar todo o percurso sem permitir que eu desistisse.

A todos os colegas e professores que pude cultivar nesse período de passagem pela UFRJ, que contribuíram de forma significativa para o meu aprendizado.

Ao meu orientador, Gert Schubring, por aceitar fazer parte deste trabalho e por dedicar tanto tempo para que isto fosse possível. Agradeço por toda a sua paciência e compreensão. Sem as suas contribuições, este trabalho não teria chegado até aqui.

Um enorme agradecimento aos professores João Bosco Pitombeira e Felipe Acker, por aceitarem compor a banca de qualificação deste trabalho. Agradeço pelas excelentes contribuições na composição da banca.

RESUMO

A disciplina de cálculo passou por diversas mudanças até se estabelecer tal como concebemos hoje. No entanto, algumas de suas características atuais podem ser notadas desde o período em que começa a ser ensinar cálculo, através dos tensionamentos entre rigor e intuição, e a dicotomia presente no ensino voltado para matemáticos e engenheiros. Outro fator nesse contexto, refere-se ao fato de que nem sempre a disciplina de cálculo foi ensinada como cálculo puramente dito, mas sim com todo o rigor que se espera de um curso de análise matemática. Nesse sentido, com intuito de estudar a história do ensino de cálculo, a presente pesquisa busca apresentar uma análise mais profunda acerca do seu processo de disciplinarização no Brasil durante o século XX. Para tal tarefa, partimos de um levantamento histórico sobre a organização do ensino de matemática nas principais instituições do país, destacando as reformas educacionais que fizeram o cálculo ora ser ensinado, ora retirado dos currículos oficiais. A metodologia adotada para realização da pesquisa foi a análise bibliográfica, por onde apresentamos análises de uma série de livros que fizeram parte desse processo de disciplinarização. As esferas de ensino analisadas foram divididas entre as escolas secundárias, escolas técnicas e o ensino superior. Outro desdobramento da pesquisa advém do Movimento Internacional de Reforma liderado por Felix Klein, por onde buscamos analisar os seus efeitos no Brasil, e além disso, estabelecer um panorama sobre a situação de alguns dos países que participaram da conferência de 1914.

Palavras-chaves: História do ensino de cálculo; História do ensino análise matemática; Movimento Internacional de Reforma; Reformas educacionais brasileiras; Análises de livros-texto de cálculo.

ABSTRACT

The calculus discipline several changes until it was established as conceive it today. However, some of its current characteristics can be noticed since the period when calculus began to be taught, through the tensions between rigor and intuition, and the dichotomy present in teaching aimed at mathematicians and engineers. Another factor in this context refers to the fact that the discipline of calculus was not always taught as pure calculus, but with all the rigor that is expected from a mathematical analysis course. In this sense, with the intention of studying the history of teaching calculus, this research seeks to present a deeper analysis of its process of disciplinarization in Brazil during the 20th century. For this task, we start from a historical survey on the organization of mathematics teaching in the main institutions of the country, highlighting the educational reforms that made calculus sometimes be taught, sometimes removed from the official curricula. The methodology adopted to carry out the research was the bibliographic analysis, through which we present a series of books that were part of this process of disciplinarization. The educational spheres analyzed were divided between secondary schools, technical schools and higher education. Another development of the research comes from the International Reform Movement led by Felix Klein, through which we seek to analyze its effects in Brazil, and in addition, establish an overview of the situation of some of the countries that participated in the 1914 conference.

Keywords: History of calculus teaching; History of mathematical analysis teaching; International Reform Movement; Brazilian educational reforms; Calculus textbook analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Exemplo de máximo e mínimo de uma função.....	34
Figura 2: Índice da versão de 1878.....	41
Figura 3: Índice da introdução das Lezioni di analisi infinitesimale.	42
Figura 4: Livros adotados no segundo ano da Academia Real Militar.	50
Figura 5: Alguns exercícios propostos.	69
Figura 6: Capa do livro “Matemática 2º Ciclo - 3ª Série” (1956).	74
Figura 7: Página 123 do livro “ <i>Matemática 2º Ciclo - 3ª Série</i> ” (1956).	79
Figura 8: Capa do livro “ <i>Curso de Matemática</i> ” de Manoel Jairo Bezerra.	81
Figura 9: Índice da obra de Bezerra referente à Aritmética e Álgebra. (GRIFO NOSSO).....	81
Figura 10: Página 182 do livro “ <i>Curso de Matemática</i> ” (1965).	84
Figura 11: Modelo de ensino dos elementos do cálculo nos EUA.	130

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1. APRESENTAÇÃO	10
1.1. Introdução	10
1.2. Fundamentação teórica	12
1.3. Metodologia.....	15
CAPÍTULO 2. PANORAMA INTERNACIONAL SOBRE O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA TRANSIÇÃO ENTRE A ESCOLA SECUNDÁRIA E O ENSINO SUPERIOR EM PAÍSES-CHAVES.....	17
2.1. Alemanha.....	17
2.2. França.....	19
2.3. Inglaterra.....	22
2.4. Itália	23
2.5. Estados Unidos.....	24
2.6. Rússia/União Soviética	26
CAPÍTULO 3. A DUALIDADE NO ENSINO DE CÁLCULO: DOIS EXEMPLOS NO SÉCULO XIX	28
3.1. Análise dos “ <i>Elements of analysis as applied to the mechanics of engineering and machinery</i> ” (1869), Weisbach	28
3.2. Análise dos “ <i>Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali</i> ” (1878), Dini.....	39
3.3. Avaliação comparativa entre as obras de Weisbach e Dini.....	47
CAPÍTULO 4. HISTÓRIA DO ENSINO DE CÁLCULO NO BRASIL: ENSINO SUPERIOR	48
4.1. A chegada da Família Real e as primeiras instituições de ensino superior	48
4.1.1. As primeiras escolas de engenharia	49
4.1.2. As primeiras Universidades.....	53
4.1.3. As disciplinas de cálculo e análise nas Universidades.....	54
4.1.4. Reforma Universitária de 1968.....	56
CAPÍTULO 5. HISTÓRIA DO ENSINO DE CÁLCULO NO BRASIL: ENSINO SECUNDÁRIO	57
5.1. As origens da educação secundária.....	57
5.1.1. Colégio Pedro II	58
5.1.2. Reforma Benjamin Constant	59
5.1.3. Movimento Internacional de Reforma do ensino de matemática no Brasil	60
5.1.4. Reforma Campos.....	61

5.1.5. Reforma Capanema	62
5.2. Criação da Lei de Diretrizes e Bases (LDB), 1961	64
CAPÍTULO 6. ANÁLISES DOS LIVROS-TEXTOS: ENSINO SECUNDÁRIO E	
TÉCNICO	66
6.1. Livros brasileiros destinados ao ensino secundário	66
6.1.1. Análise de um livro didático utilizado durante a Reforma Campos	67
6.1.2. Análise de um livro didático utilizado durante a Reforma Capanema.....	74
6.1.3. Análise de um livro didático utilizado após a LDB de 1961	80
6.1.4. Análise avaliativa das obras	88
6.2. Análise dos livros utilizados no ensino técnico	89
6.2.1. Análise do livro “ <i>Matemática - 2º Grau: 3ª série</i> ” (1976), Iezzi et al.....	89
6.2.2. Análise do livro “ <i>Cálculo Diferencial e Integral</i> ” (1957), Ayres.....	93
CAPÍTULO 7. ANÁLISES DOS LIVROS-TEXTOS: ENSINO SUPERIOR ANTES DA	
REFORMA DE 1968.....	95
7.1. Análise do “ <i>Curso de Cálculo Infinitesimal</i> ” (1952-1962), Tibiriçá	95
7.2. Análise dos “ <i>Elementos de Cálculo Diferencial e Integral</i> ” (1961), Granville, Smith e Longley.....	104
7.3. Uma breve avaliação das obras	110
CAPÍTULO 8. ANÁLISES DOS LIVROS-TEXTOS: ENSINO SUPERIOR APÓS A	
REFORMA DE 1968.....	113
8.1. Análise do livro “ <i>Cálculo</i> ” (1976), George Thomas Jr.....	113
8.2. Análise do livro “ <i>Curso de Análise</i> ” (1989), Elon Lages Lima	121
8.3. Algumas conclusões.....	129
CONSIDERAÇÕES FINAIS	132
REFERÊNCIAS	136

CAPÍTULO 1. APRESENTAÇÃO

Descrevemos nesse capítulo uma breve apresentação sobre o tema escolhido, bem como as questões norteadoras, seus objetivos, e os aspectos teóricos e metodológicos que constituíram a construção desta pesquisa.

1.1. Introdução

Os elementos do cálculo diferencial e integral fazem parte de uma disciplina que compõe um grupo de componentes curriculares presentes em diversos cursos universitários que formam profissionais tais como matemáticos, físicos, químicos, engenheiros, economistas, entre outros. De forma geral, podemos observar que esta é uma disciplina que apresenta destaque no currículo do ensino superior brasileiro, na maioria dos cursos voltados para área das ciências exatas.

Tomando como ponto de partida os dias atuais, podemos notar indícios de problemas que vêm sendo enfrentados tanto por professores, quanto por alunos, que estão envolvidos no assunto em questão. O principal deles está relacionado aos altos níveis de reprovação e evasão que tal disciplina apresenta. Outra vertente presente no ensino de cálculo são os tensionamentos entre rigor e intuição, que também abrem espaço para a dicotomia no ensino voltado para formação de matemáticos e engenheiros.

Os conflitos que envolvem o ensino de cálculo, bem como as dificuldades de aprendizagem, têm se mostrado pertinente e esse fato tem gerado diversas discussões e debates entre educadores matemáticos ao longo dos últimos anos. Uma ilustração dessa situação pode ser observada através do estudo de Pagani e Allevato (2014), que apresentam um levantamento abrangendo teses e dissertações produzidas no Brasil entre 1999 e 2013, e revelam um expressivo número de estudos voltados para esse assunto. Isso demonstra claramente a relevância e o interesse acadêmico em torno desse tema. Em um cenário internacional, a situação não é diferente, onde também é possível encontrar diversas pesquisas e artigos dentro dessa temática.

Os estudos conduzidos nessa perspectiva representam uma tentativa de melhoria do ensino de cálculo e que buscam compreender quais fatores contribuem para as problemáticas associadas a ele, bem como encontrar possíveis soluções para enfrentar tais obstáculos. Na concepção de alguns professores, o maior empecilho é devido ao despreparo dos alunos baseado na estrutura curricular do ensino de matemática que não dá o suporte que uma disciplina de

cálculo necessita. No entanto, podemos observar que existem inúmeros fatores que também exercem influência nesse processo. De acordo com Rezende (2003):

Muito se fala, muito se tem dito no meio acadêmico, a respeito do “fracasso no ensino de cálculo”. Creio, no entanto, que, se investigarmos a origem histórica de tal “fracasso”, verificaremos que este tem início desde o momento em que se começa a ensinar cálculo (REZENDE, 2003, p.15).

Nesse sentido, a pesquisa em história do ensino de cálculo surge como uma tentativa de compreensão sobre o que o estudo em história pode nos revelar a respeito do formato desta disciplina tal como conhecemos hoje, e suas possíveis relações com o ensino atual. Essa é uma noção que parte da perspectiva de que a matemática como disciplina possui influências históricas, filosóficas, culturais e de desenvolvimento da própria matemática.

Desse modo, o objetivo principal desta pesquisa consiste em compreender como ocorreu o processo de disciplinarização do cálculo, isto é, entender *como* ele se tornou um objeto de ensino, *como* seu currículo foi estruturado, *o que* era ensinado e *para quem* era ensinado. Essas indagações são o que caracterizam as questões norteadoras desta pesquisa.

Com relação ao recorte temporal, podemos definir que os acontecimentos do século XX foram o foco central, por onde investigamos a trajetória da disciplina de cálculo em ambientes do ensino secundário, técnico e superior. Mas como nenhum processo histórico ocorre de maneira puramente isolada, também se tornou válido apresentar alguns aspectos do ensino presentes no século XIX, onde destacamos a constituição das principais instituições do país, com intuito de estabelecer as relações de uma maneira coerente.

O ponto de partida para a construção desta pesquisa deve-se a um evento que ocorreu no início do século XX. Nesse período, houve uma significativa mobilização da comunidade internacional de matemáticos, que reunida no Congresso de Matemáticos em Roma, gerou a criação, em 1908, de uma Comissão Internacional de Ensino de Matemática. O nome oficial dessa comissão foi dado por IMUK¹ e Felix Klein (1849-1925) foi nomeado como presidente (SCHUBRING, 2003). Nesse momento, as pesquisas em educação matemática foram impulsionadas e ganharam um maior destaque em um cenário internacional. Como consequência, começaram a surgir alguns movimentos de modernização do ensino.

O mais importante para nosso estudo é o que foi apresentado na Conferência Internacional do Ensino de Matemática de 1914, evento que ocorreu em Paris. O principal representante desse movimento foi próprio Felix Klein, que preparou com todo cuidado uma

¹ A sigla derivada de seu nome original em alemão: Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission.

agenda de reformas para modernizar o ensino de matemática. A peça chave para essa reforma, na visão de Klein, era a introdução dos elementos de cálculo nos currículos das escolas secundárias (SCHUBRING, 1989), pois ele havia percebido uma lacuna existente entre a matemática das escolas de ensino básico e a matemática do ensino superior. Sua solução para romper com tal separação seria reformular o ensino de matemática baseado no pensamento funcional que o cálculo fornece, e assim, a matemática desfrutaria de uma linearidade entre os níveis de ensino, além de contribuir para uma modernização curricular que se tornou necessária.

Emanuel Beke (1862-1946) foi o responsável pelo relatório da Conferência de 1914, e apresenta os detalhes da reunião, bem como os relatos dos países participantes sobre a implementação do projeto de reforma. A partir desse documento, é possível ter uma noção sobre a situação dos seguintes países: Alemanha, Austrália, Áustria, Bélgica, Brasil, Dinamarca, Estados Unidos, França, Holanda, Hungria, Ilhas Britânicas, Itália, Noruega, Romênia, Rússia, Sérvia, Suécia e Suíça.

A partir da proposta apresentada delimitam-se alguns objetivos que buscamos atingir ao longo da pesquisa, sendo eles os seguintes: descrever o processo histórico de desenvolvimento da disciplina de cálculo no Brasil, estabelecer um panorama sobre os países que tentaram introduzir o cálculo nas escolas secundárias (sucessos e fracassos), analisar como o ensino de cálculo foi estruturado a partir dos livros-texto utilizados e descrever as reformas educacionais que influenciaram a consolidação do cálculo como disciplina.

Nesse sentido, cabe aqui também destacar algumas considerações iniciais com relação ao ensino de cálculo segundo os aspectos de rigor e intuição. Dentre os tipos de abordagem mais comuns, podemos notar dois estilos em torno do ensino. O primeiro é caracterizado por apresentar aspectos mais rigorosos sobre os conceitos, como pôr exemplos as demonstrações e definições formais. E o segundo é baseado em noções mais intuitivas, por onde os conceitos surgem a partir de exemplos iniciais, quase sempre em conjunto com figuras, que mais adiante são generalizados para outros casos, e o foco maior costuma ser as aplicações. Dessa forma, no decorrer do texto, quando surgirem referências a um cálculo do estilo formal, trata-se de uma comparação com o primeiro tipo, ao mesmo passo em que o segundo se relaciona com as citações de cálculo do tipo intuitivo.

1.2. Fundamentação teórica

A história das disciplinas constitui um ramo da historiografia que vem sendo estudado com maior ênfase nas últimas décadas. Cada disciplina possui uma história e sua evolução é um processo contínuo que depende da forma como os seres humanos, a sociedade e as

tecnologias se desenvolvem. Com o intuito de fornecer o devido embasamento que esta pesquisa necessita, cabe destacar as concepções empreendidas nos conceitos de disciplinarização e disciplina.

A noção de disciplinarização empregada nesta pesquisa assume em conformidade as ideias expostas por Dametto (2020). Nesse sentido, o termo se refere ao processo de constituição de um conjunto de saberes organizados em torno de um objetivo comum, com reflexões sobre como uma área de conhecimento se torna um assunto a ser ensinado, em particular presente em currículos escolares. Isto é, o processo de transformar uma área de conhecimento em uma disciplina pode ser entendido como a disciplinarização dela. Com isso, a disciplinarização é a constituição de uma disciplina presente em currículos de ensino. Esse processo pode ocorrer de forma oficial ou não, pois elementos de uma disciplina podem estar presentes nos currículos de forma diluída.

Com relação à disciplina, podemos encontrar dois itinerários, um centrado nas disciplinas escolares e o outro nas disciplinas acadêmicas. O termo disciplina escolar refere-se a uma disciplina dentro de um currículo escolar organizado, que possui um corpo de conhecimento institucionalmente voltado para ensino e aprendizagem, enquanto disciplina acadêmica refere-se a um campo ou ramo de aprendizagem associado a um departamento acadêmico dentro de uma universidade que visa o desenvolvimento de pesquisas e formação profissional de pesquisadores, acadêmicos e especialistas.

Para compreensão desta pesquisa, torna-se importante estabelecer as relações existentes entre matemática acadêmica e a matemática escolar. Schubring (2019) apresenta alguns pontos divergentes dessa relação através das teorias de dois pesquisadores franceses: Yves Chevallard e André Chervel.

O primeiro deles busca analisar como o conhecimento científico (saber sábio) torna-se conhecimento matemático escolar, ou seja, um conhecimento para ser ensinado. Chevallard conceitua esse processo como “transposição didática”.

[...] um conteúdo de saber que é designado como saber a ensinar sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O “trabalho” que transforma um saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado transposição didática (CHEVALLARD, 1991, apud MOREIRA, 2004, p.15).

Portanto, Chevallard conceitua “transposição didática” como o processo de fabricação de um objeto de ensino, que ocorre através da adaptação de um saber sábio, tornando-o um objeto do saber escolar. Nesse sentido, a teoria de Chevallard defende que existe uma estreita

relação entre a matemática escolar e acadêmica. No entanto, essa concepção estabelece uma hierarquia entre ambas, pois considera que a matemática escolar depende diretamente da matemática acadêmica, e com isso o conhecimento é estabelecido a partir de um processo unilateral, que provem de um polo concebido como avançado (matemática acadêmica), com destino a outro polo inferior, feito na escola e envolvendo o professor na sala de aula. (SCHUBRING, 2019, p. 171). Esse fato tem sido criticado por alguns pesquisadores e Moreira alerta em sua tese de doutorado, que:

[...]as análises de Chevallard, embora penetrem de forma rica e profunda em certos aspectos do processo de ensino de matemática na escola, padeceriam do tipo de limitação apontado por Young, qual seja, considerar a matemática escolar como fundamentalmente “dada” (pela matemática científica), ao invés de “a ser explicada” (em termos de seus múltiplos condicionantes) (MOREIRA, 2004, p. 16).

Então, podemos assumir que a disciplinarização escolar de um conteúdo, pela visão de Chevallard, seria o objeto resultante do processo de transposição didática. Em contraposição a essa corrente teórica, Chervel apresenta reflexões a partir do campo da história das disciplinas escolares, e argumenta que a cultura escolar e as disciplinas escolares são caracterizadas por sua autonomia. O autor salienta que:

[...]conteúdos de ensino são concebidos como entidades sui generis, próprios da classe escolar, independentes, numa certa medida, de toda realidade cultural exterior à escola, e desfrutando de uma organização, de uma economia interna e de uma eficácia que elas não parecem dever a nada além delas mesmas, quer dizer à sua própria história (CHERVEL, 1988, p. 64).

Na concepção desse autor, a disciplina não pode ser caracterizada apenas pela transmissão de conteúdo, tendo em vista que esta faz parte de um mecanismo de ensino e se constitui historicamente em conjunto com a prática e a cultura escolar (MOREIRA, 2004, p.17). Dessa forma, o papel da instituição escolar não é reproduzir o que está fora dela, mas sim de adaptar, criar e transformar um saber e culturas próprias, um tipo de cultura que só é acessível através da mediação pedagógica, ou seja, pela escola.

A história das disciplinas escolares, neste sentido, se localizaria sob o guarda-chuva da nova história cultural e constituiria inclusive, para alguns, o núcleo fundamental da cultura escolar[...] mas que, em definitivo, implicaria um olhar sobre a instituição escolar com espaço não de reprodução ou de mera transposição de conhecimentos externos, mas de produção do saber (VIÑAO, 2008, p.188).

Portanto, pela ótica de Chervel, o processo de disciplinarização ocorre através criação própria da escola, de uma cultura escolar e pelo seu caráter relativamente autônomo, torna-se independente das demais disciplinas, e até mesmo das disciplinas acadêmicas.

Tendo em vista, essas duas concepções distintas, torna-se preciso encontrar uma forma menos dicotomizada para estabelecer as relações entre disciplina escolar e acadêmica, e com isso não devemos nos prender apenas na visão de Chervel, que caracteriza a matemática escolar como produção estritamente desenvolvida no interior da escola, e nem a de Chevallard, que reduz a prática escolar em uma transposição de conhecimento da matemática científica. Ao invés disso, tentaremos estabelecer um meio-termo, com intuito de aproveitar o melhor que as duas teorias têm a oferecer, por meio de uma combinação adequada de ambas.

Um caminho intermediário é indicado por Schubring (2019) através do conceito de *elementarização* proposto por Felix Klein, cuja questão epistemológica básica é a relação entre matemática escolar e acadêmica. De acordo com Schubring, *elementarizar* uma ciência significa conectar os elementos dessa ciência como um todo. Para Klein, não havia separação entre matemática elementar e matemática acadêmica, e sua concepção:

[...]implicava, em relação ao currículo, que novas descobertas e desenvolvimentos na matemática acadêmica deveriam ter alcançado uma certa maturidade e integração com o restante da matemática - em outras palavras, uma reestruturação da matemática a partir de elementos recém-concebidos da ciência (SCHUBRING, 2019, p. 175).

Dessa forma, é apresentada uma estrutura não hierárquica entre os conhecimentos matemáticos, pois não há diferença qualitativa entre as partes elementares e as partes superiores, os elementos são como as “sementes” das partes superiores (*ibidem*, p.173). Portanto, essa é uma forma de colocar a matemática escolar em uma relação produtiva com o progresso da matemática.

A hipótese principal desta pesquisa está centrada na concepção de que as disciplinas são construções que resultam de um processo social e histórico. Portanto, além da história do próprio desenvolvimento conceitual, o processo de disciplinarização sofre influências das políticas educacionais predominantes em cada época, e sua consolidação está intimamente ligada à formação de profissões que estão relacionadas a essa disciplina. Além disso, as funções educacionais de uma disciplina dentro de cada sistema educacional, permitem denominar qual é o seu lugar, presença e peso nos planos de ensino, e consequentemente identificar quais são seus objetivos que a legitimam como disciplina.

1.3. Metodologia

A pesquisa em história do ensino possui suas complexidades baseadas em alguns fatores. O primeiro consiste na ideia de que é preciso descartar a concepção de que a pesquisa histórica se resume apenas em uma mera reconstrução de fatos que podem ser alinhados em

uma ordem cronológica. Mais importante do que isso, é preciso compreender que este tipo de pesquisa está intimamente vinculado a um contexto social e cultural, e quando se deseja aproximar a história do ensino a realidade a qual ele estava inserido, são necessários métodos de análise histórico-sociais. Um segundo fator é que a historiografia do ensino de matemática está pouco desenvolvida quando comparada com a história da matemática.

Enquanto a da história da matemática trata predominantemente de ideias, de conceitos, o ensino constitui uma realidade social que precisa de incomparavelmente mais categorias sociais para revelar as dimensões desta realidade (SCHUBRING, 2005, p.8).

Tendo em vista que investigar processos de natureza social representa um desafio, Schubring (2005) comenta que ainda existem poucas obras gerais que investigam toda a história de ensino de um país, ou então que fazem comparações entre histórias particulares de diferentes países.

Alguns instrumentos de pesquisa que auxiliam na análise mais profunda sobre a realidade do ensino são: o livro-texto, o professor de matemática e a função do ensino de matemática. Outra dimensão importante para estudo é a análise do desenvolvimento histórico dos conteúdos do ensino e a relação destes com o desenvolvimento da matemática escolar. Nesse sentido, a metodologia escolhida para a realização dessa pesquisa foram as análises dos livros-textos.

Dessa forma, podemos caracterizar este estudo como uma abordagem de natureza qualitativa, e que quanto aos seus objetivos pode ser denominada como exploratória. Os procedimentos técnico-metodológicos para coleta das fontes que mais se enquadram nessa perspectiva são os de análise documental e bibliográfica, que constituem uma técnica importante para coleta de fontes escritas.

CAPÍTULO 2. PANORAMA INTERNACIONAL SOBRE O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA TRANSIÇÃO ENTRE A ESCOLA SECUNDÁRIA E O ENSINO SUPERIOR EM PAÍSES-CHAVES

A introdução dos elementos do cálculo infinitesimal foi um dos pontos principais do primeiro Movimento Internacional de Reforma do Ensino da Matemática, iniciado por Felix Klein como parte das iniciativas organizadas pela IMUK, a primeira forma da ICMI, desde 1908. Um primeiro balanço internacional desse aspecto de reforma curricular foi empreendido no congresso da IMUK, em 1914. Uma das tarefas originais do projeto desta dissertação foi analisar o desenvolvimento desta reforma desde o congresso de 1914 até os tempos atuais. Porém, a análise do desenvolvimento no Brasil revelou-se como tão rica em material e questões que aqui, na dissertação, revelaram a necessidade de se restringir a relatar apenas qualitativamente as linhas principais para alguns dos países significativos do primeiro período do Movimento Internacional: a Alemanha, França, Itália, Inglaterra, Estados Unidos e a Rússia/União Soviética.

2.1. Alemanha

Iniciamos com a Alemanha, onde a introdução já fora proposta bem antes do movimento internacional, pelo próprio Felix Klein, desde 1900, como parte de um programa abrangente de reforma do currículo do ensino nas escolas secundárias, a fim de redefinir a transição do ensino secundário para o superior (SCHUBRING, 1989). Já em 1905, um êxito muito considerável foi alcançado: no famoso *Programa de Merano*, a introdução dos elementos do cálculo infinitesimal foi recomendada para dois dos três característicos tipos de escolas secundárias: a *Oberrealschule* e o *Realgymnasium* – porém, ainda não para o (*humanistisches*) *Gymnasium*. E isso representava que as escolas com perfil moderno e tecnológico podiam incluir tais elementos no seu currículo, mas não a escola com perfil clássico (línguas latim e grego)². Beke, no seu relato sobre os resultados desta reforma curricular até o congresso de 1914, resumiu:

(...) na Prússia, onde nenhum novo currículo foi estabelecido nos últimos anos, o ensino do cálculo diferencial e integral não foi oficialmente introduzido, mas encontrou um lugar em quase todos os Realschulen, em muitos Realgymnasia e em um bom número de Gymnasia (SCHUBRING, 2014, p. 38).

² As línguas clássicas definiram o tipo de escola: o *Realgymnasium* ficou no meio, com latim, e a *Oberrealschule* ensinou nem grego nem latim, mas línguas modernas.

Em 1925, na Prússia, a reforma foi adotada para todos os três tipos de escola. Esta reforma também contribuiu para o ensino das disciplinas de análise nas universidades e nas *Technische Hochschulen*. Em ambas instituições, as disciplinas foram de análise matemática: nas universidades, para a formação de professores, a ênfase foi teórica, enquanto nas *Technische Hochschulen*, na formação de engenheiros, a ênfase também inclui as aplicações. Essa forma curricular de transição das escolas secundárias para o ensino superior permaneceu inalterada também depois da Segunda Guerra Mundial, na República Federal da Alemanha.

Uma nova reforma estrutural e curricular aconteceu em 1972, mas sem alterar essas características. Os três tipos tradicionais de escola secundária, habilitando os egressos a se matricularem no ensino superior, foram unificados em um único tipo de escola – *Gymnasium* – e suas três últimas séries foram chamadas de *Oberstufe* – correspondendo ao ensino médio atual no Brasil; e o currículo para esta nova *Oberstufe* foi profundamente reestruturado. Em vez de um currículo definido de maneira tradicional, as disciplinas escolares foram substituídas por um sistema de cursos em que os alunos podiam escolher segundo perfis próprios, individualizando assim o ensino nos últimos três anos. No entanto, foram definidas três áreas principais dos saberes escolares, e tornou-se obrigatório a escolha de um curso em cada uma delas. Para a área da matemática e das ciências a escolha era um curso de “*Analysis*”- que poderia ser um *Grundkurs* (curso básico), ou um *Leistungskurs* (curso avançado). Na última década, o foco principal destes cursos de *Analysis* foi a modelagem; funções são interpretadas como modelos matemáticos. O currículo para estes cursos, no Estado Federal de *Nordrhein-Wesfalen*, enfatiza o seu caráter introdutório, ou seja, do tipo de “cálculo”:

Em uma ampla gama de situações de aplicação, a consideração simultânea de duas variáveis desempenha um papel especial, com uma sendo vista como dependente da outra. Funções são modelos matemáticos para tais relações. Como parte da análise, a descrição e investigação das relações funcionais são aprofundadas abordando as questões inversas da determinação das taxas de variação (derivação) e a reconstrução do conjunto das taxas de variação (integral) ou a determinação das tangentes às curvas (derivação) e o cálculo das áreas sob as curvas (integral) podem ser processados sistematicamente (MINISTERIUM, 2014, p. 17).

Para o conceito de integral no *Grundkurs*, indica-se:

- Interpretar o conteúdo das superfícies orientadas no contexto;
- Esboçar a função de área correspondente para uma determinada função limite;
- Explicar e usar exemplos adequados para explicar a transição da soma do produto para a integral com base em um conceito propedêutico de limite;
- Explicar a relação entre a taxa de mudança e a função integral de uma maneira geometricamente intuitiva (teorema fundamental do cálculo diferencial e integral) (*ibid.*, p. 28).

Para o *Leistungskurs*, entende-se o nível um pouco mais elevado do mesmo conceito, mas enfatizando a mesma abordagem “propedêutica” e “intuitiva”:

- Explicar e realizar com exemplos adequados a transição da soma do produto para a integral com base em um conceito propedêutico de limite;
- Explicar a relação entre a taxa de variação e a função integral;
- Determinar antiderivadas de funções inteiras racionais;

$$x \rightarrow \frac{1}{x};$$

- Usar a função logaritmo natural como a antiderivada da função
- Usar a soma de intervalo e linearidade de integrais;
- Justificar o teorema fundamental do cálculo diferencial e integral usando um conceito intuitivo de continuidade (*ibid.*, p. 32).

Em alguns dos outros Estados Federais, exigiram-se mais conteúdos, porém com mesmo tipo de abordagem. Nas disciplinas do ensino superior, o nível da análise matemática prevalece, mesmo depois da introdução americanizada, pelo “*sistema de Bologna*”, em 1999, da divisão artificial em *bachelor* e *master*.

2.2. França

A França é o outro país que, em conjunto com a Alemanha, teve o cálculo infinitesimal com um papel forte no ensino da escola secundária. Costuma-se falar que foi introduzido antes mesmo do que na Alemanha. Porém, deve-se avaliar isto com cuidado. Na grande reforma de 1902, atribuindo às escolas técnico-científicas um papel não mais subordinado aos *lycées*, de perfil clássico, as derivadas – desde “aplicações até exemplos numéricos muito simples” – pertenceram ao programa da penúltima série (classe de *seconde*), para dois das quatro seções – *C* e *D* (BELHOSTE, 1995, p. 598). A seção *C*, com o latim e as ciências, correspondeu ao *Realgymnasium* da Prússia, e a seção *D*, línguas modernas e ciências, correspondeu ao *Oberrealschule* (BELHOSTE, 1996, p. 30). Um ensino mais extenso ficou reservado para a classe de *mathématiques* – a última série, que preparava para o *baccalauréat* em ciências³, mas mesmo assim, alertava sobre evitar “questionamentos súteis” sobre os fundamentos e de “não recluir ao fazer apelo à intuição” (*ibid.*, p. 608). Beke formulou a restrição a um grupo de alunos com perfis profissionais da seguinte forma:

O relator francês, Sr. Ch. Bioche, que gentilmente nos forneceu as informações, observa que a classe de *Mathématiques spéciales* oferece hoje, como antes, um estudo aprofundado do cálculo diferencial e integral (BEKE, 2014, p. 41).

³ As seções literárias A e B terminaram com a *classe de philosophie*, preparando para o *baccalauréat* clássico. O *baccalauréat* foi o exame para ingresso na universidade.

A disciplinarização do cálculo no ensino médio francês aconteceu numa maneira bem paralela ao modelo alemão de *Merano* de 1905, com a característica de não incluir as seções clássicas.

Em 1925, ocorreu outra reforma importante para escolas secundárias francesas: foram reestruturadas segundo a *égalité scientifique* – igualdade científica. De forma diferente da separação anterior em seções clássicas e seções científicas, todos os alunos deveriam receber um ensino equilibrado das humanidades e das ciências; porém, não se relata detalhes sobre o currículo quanto ao cálculo infinitesimal (BELHOSTE, 1996, p. 32). Na verdade, este relato tradicional sobre a reforma de 1925, não relata bem a estrutura estabelecida. Houve um “tronco comum”, sim, mas adicionalmente às disciplinas, houve também nas primeiras duas séries (6^a e 5^a) a opção entre duas seções, com latim ou línguas modernas. E nas outras quatro séries houve, além do tronco comum, três seções: com latim e grego, com latim, e sem grego e latim, ou seja, uma estrutura bem análoga à Prússia (MINISTÈRE, 1925, p. 6-9).

E no tronco comum, o ensino do cálculo foi preparado para todos os alunos desde a *Seconde*, a quinta das sete séries, pela introdução da noção de função, na parte da álgebra, e a noção de área, na parte da geometria (ibid., p. 63-64). Na *Première*, a penúltima série, continuou – para todos – com funções simples, áreas e volumes (ibid., p. 81-82). A última série foi bifurcada, uma para as humanidades – chamada *classe de Philosophie* – e a outra para as ciências – chamada *classe de Mathématiques*. Aí revela-se a surpresa, que o cálculo infinitesimal constou em ambos os ramos. Na *Philosophie* de uma maneira básica, mediante um ensino de duas horas semanais, houve, não obstante, os elementos do cálculo: derivada, aplicações para algumas funções simples, “função primitiva” e seu uso para calcular algumas áreas. Na *Mathématique*, com nove horas e meia, houve um ensino extenso de funções, derivada e operações com derivadas, máximos e mínimos. Quanto à integração houve os mesmos termos como na *Philosophie* (ibid., p. 98). Assim, o relato tradicional de uma divisão na última série dá uma visão enganadora quanto à matemática (BELHOSTE, 1996, p.32-33). Evidencia-se, assim, uma estrutura bem paralela com a Prússia do mesmo ano – apesar do ódio dos alemães na França pós-guerra. Esta estrutura foi mantida até o fim dos anos 1930.

Depois da segunda guerra, se reestabeleceu a separação entre as seções literárias e científicas. Desde os anos 1960, seguiu-se uma série de reformas frequentes dos programas: as reformas de 1966, 1971, 1982, 1985, 1991 mudaram também os conteúdos e abordagens do ensino da análise matemática, nas duas últimas séries do ensino médio - *Première* e *Terminale*. Pode-se observar oscilações entre o estilo de ensino do tipo “cálculo” e “análise”: com mais apelo à intuição ou com mais rigor (BLOCH, 2000, p. 133).

Seguiram novas reformas dos programas e das estruturas das escolas em 2000, 2010 (ARTIGUE, 2011) e a reforma profunda de 2018, praticada desde 2019. Voltou-se praticamente à concepção de 1925 de um tronco comum: as seções separadas das humanidades e das ciências foram dissolvidas. No ensino médio, a primeira série, chamada *seconde*, foi do tipo tronco comum. No programa da matemática dela houve a continuação de ensinar funções, já introduzido em séries anteriores. Nas duas últimas séries, *Première* e *Terminale*, foi introduzido um sistema de cursos: na *Première*, entre 12 cursos oferecidos, devia-se escolher três de *spécialité*. No primeiro ano escolar dessa reforma, 2019-2020, cerca de 68% dos alunos escolheram o curso *Spécialité mathématiques*. O foco da parte de *analyse* deste curso foi: derivada, variações e curvas de funções, função exponencial. No entanto, no ensino científico, como parte do tronco comum, a matemática apareceu somente como integrada nas ciências, sem assuntos próprios.

Na última série deve-se continuar com duas das três opções de cursos da série anterior. No curso *Spécialité mathématiques* deste ano, de 6 horas semanais, contém a *analyse* bem extensa: sequências e limites, convergência, limites de funções, complementos sobre a derivação, continuidade, funções logarítmicas, primitivas, cálculo integral. Destaca-se que o limite conecta uma apresentação intuitiva com a prática de exemplos elementares, e que a integral seria introduzida desde a noção intuitiva de área. O curso alternativo *mathématiques complémentaires*, de 3 horas, contém também uma parte forte de *analyse*: continuidade, extensão da derivação, equações diferenciais, noção de integração de funções. No entanto, o curso *expertes mathématiques* que se pode escolher adicionalmente à *Spécialité*, não contém cálculo, e a matemática no ensino científico do tronco comum não indica assuntos (PRÉSENTATION NATIONALE, 2021, p. 26-28).

A situação no ensino médio francês fica ainda mais complicada quando se considera dois outros tipos de escolas, fazendo parte da estrutura estabelecida em 2018: o *lycée technologique* e o *lycée professionnel*, com currículos próprios.

Nas universidades, o cálculo infinitesimal fica estabelecido como análise matemática. Mas devido à formação não homogênea dos estudantes, costuma-se fazer no primeiro semestre da universidade um esforço para a transição ao nível da análise matemática: a análise é uma consolidação com complexidade técnica crescente e novas funções, como as trigonométricas inversas, mas não com um espírito muito diferente do que se fazia no ensino médio. E nas últimas semanas, um trabalho de análise começa com a noção de limite superior, as sequências,

e as definições formais. Depois, no segundo semestre, os cursos são mais separados e os de matemática têm uma formação mais tipicamente universitária⁴.

2.3. Inglaterra

A Inglaterra, ao longo de muito tempo, não desenvolveu fortemente um sistema de ensino público – devido à noção de que isto não seria tarefa do Estado. Assim, tornaram-se dominantes as chamadas *public schools*, que – contrariamente ao nome – eram escolas privadas, para as classes de elite. E a matemática nunca teve um papel forte nestas escolas. Um sistema de escolas secundárias públicas foi estabelecido somente em 1944 (HOWSON, 2014, p. 263). Devido ao sistema muito diferenciado de escolas secundárias, fica difícil de fazer afirmações gerais sobre o ensino na Inglaterra (e no País de Gales; a Escócia tem um sistema próprio). Em 1914, o ensino do cálculo ficou restrito aos alunos em escolas com perfis técnico-profissionais, mas com tendências de estender para um ensino geral:

Em seu relatório detalhado sobre todas as perguntas feitas, o Sr. C. Godfrey nos informa que, de acordo com uma prática em uso nos últimos 20 a 25 anos, jovens de 17 a 19 anos que se preparam para os estudos matemáticos recebem uma instrução especial e relativamente ampla em cálculo diferencial e integral, uma instrução que se baseia em métodos rigorosos. Uma prática um pouco menos estabelecida, mas ainda com pelo menos 15 anos, também é dar instrução especial aos alunos que pretendem seguir carreiras militares ou engenharia civil. Em muitas instituições, a instrução para os dois grupos é a mesma. Em lugares onde esses grupos são separados, há menos preocupação com o rigor no último grupo do que no primeiro. De acordo com Godfrey, a nova tendência parece ser: "cálculo para o menino médio". Em algumas escolas, o currículo geral abrange o cálculo; em outros, tentativas estão sendo feitas (BEKE, 2014, p. 43).

Essas tendências são confirmadas. As escolas inglesas possuem hoje em dia o ensino de cálculo, mas fica difícil de se concretizar exatamente. Existe um *National Curriculum* para a Inglaterra e o País de Gales, mas não é obrigatório. As escolas podem aplicar seus próprios currículos. A parte relevante do *National Curriculum* para as séries do ensino médio é o “*Key Stage 5*”. Aí, indica-se:

- A derivada de $f(x)$ como o gradiente da tangente ao gráfico de $y=f(x)$ em um ponto; o gradiente da tangente como limite; interpretação como uma taxa de variação; derivadas de segunda ordem;
- Aplicações de diferenciação a gradientes, tangentes e normais, máximos e mínimos e pontos críticos, crescimento e decrescimento de funções;
- Integração indefinida como o reverso da diferenciação;
- Aproximação da área sob uma curva usando a regra do trapézio; interpretação da integral definida como a área sob uma curva; estimativa de integrais definidas (KEY STAGE 5).

⁴ Agradeço muitíssimo a Prof(a). Michèle Artigue (Paris) por suas extensas informações e avaliações.

A maioria das escolas públicas ensinam um tipo de *introduction to calculus*. No entanto, pode ser que dependendo do próprio currículo da escola, este ensino seja oferecido aos alunos que se preparam para estudar engenharia. E como as escolas privadas preparam, em geral, para os vestibulares e costumam ensinar um tipo de *introduction to analysis* – em particular, as escolas que preparam seus alunos para vestibulares são organizadas por universidades individuais.

As universidades costumam se apresentar como dessatisfeitas com a preparação dos estudantes para participar com êxito nas disciplinas de análise matemática e oferecem frequentemente uma disciplina introdutória. Dessa forma, livros-texto do tipo *Introduction to Analysis* são publicados em grande escala⁵.

2.4. Itália

Desde a constituição da Itália como um Estado unificado, em 1859, o currículo da matemática nos colégios foi marcado por um extremo grau de rigor matemático e de classicismo, a fim de integrar a matemática no espírito classicista destes colégios. Assim, o assunto principal do ensino da matemática foi durante muito tempo a geometria euclidiana, e até mesmo se utilizou uma tradução italiana dos elementos de Euclides como livro didático (SCHUBRING, 2022, p. 159). Klein notou-se em sua preparação para o congresso de 1914, sua profunda decepção com atuação dos colegas italianos quanto ao movimento de reforma: “Itália completamente recusando” (SCHUBRING, 2000, p. 275).

Somente em um segundo novo tipo de escolas secundárias houve a possibilidade de ensinar o cálculo. Beke apresentou essa situação em seu relato:

O Sr. Castelnuovo, um delegado italiano, gentilmente nos informou que no novo currículo do Liceo moderno, que entrará em vigor este ano, o cálculo diferencial e integral está sendo trazido para as duas séries superiores. Atualmente, é ensinado em algumas escolas apenas em caráter excepcional. Temos grandes esperanças na transformação do ensino médio italiano em matemática. O currículo deixa claro que o programa, embora reduzido ao mínimo, deve ser ministrado com total precisão, seguindo as tradições do ensino de matemática italiano (BEKE, 2014, p. 44).

A Itália tornou-se, de fato, o único país onde se ensinava os elementos de cálculo infinitesimal nas escolas secundárias por uma abordagem rigorosa, ou seja, não do tipo “cálculo”. O *Liceo moderno* de 1911/13 não obteve êxito. Em 1923, foi introduzido outro tipo de escola secundária, o *Liceo Scientifico*, para dar uma certa contrabalança ao *Liceo clássico*.

⁵ Agradeço ao Prof. Leo Rogers por suas explicações e informações nesta situação bem complicada.

O programa para as últimas séries deste novo *Liceo* indicava o ensino do cálculo infinitesimal, mas diferente para as duas seções *A* e *B*. Na seção *A*, se ensinou somente:

Derivadas de x^m (onde m é um número inteiro ou uma fração), $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$; o significado geométrico e cinemático das derivadas; máximos e mínimos usando derivadas (MACHI; MENGHINI, 2014, p. 38).

Enquanto na seção *B*, foi indicado:

O conceito de limite de uma sequência ou de uma função e teoremas fundamentais a seu respeito. Os conceitos de derivadas e integrais para funções de uma variável; derivada de uma soma, de um produto e de uma função composta (*ibid.*, 2014).

Basicamente, o ensino dos elementos de cálculo infinitesimal continuou depois de 1945 para as escolas do perfil científico e técnico. Porém, em 2010, aconteceu uma mudança profunda: este ensino foi estendido para todas as escolas secundárias. A característica do ensino desta disciplina tem se mantido, a partir da prática de ensinar segundo a abordagem especificamente italiana de rigor. Embora os programas, mesmo os mais recentes de 2010, não tornam explícitos os métodos utilizados no ensino, todos os livros didáticos expõem o cálculo como análise matemática: o limite é definido por meio de épsilon e delta, e depois aplicado consequentemente. Os teoremas de Cauchy, Lagrange e Weierstrass são apresentados nestes livros didáticos⁶. E quase não precisa destacar que as disciplinas no ensino superior ensinam a análise, segundo padrões de rigor.

2.5. Estados Unidos

Para o início do século XX, fica fácil fazer uma afirmação geral – porque é negativa. O fato foi formulado assim por Beke:

Conforme relatado pelo Sr. D.E. Smith, zeloso reformador e um dos iniciadores da Comissão, o cálculo diferencial e integral não faz parte do ensino médio; não pode nem mesmo ser opcional, uma vez que os alunos das séries iniciais estão muito absortos na preparação para os exames de admissão à faculdade. Enquanto não for levado para o programa deste exame, há pouca chance de se tornar um componente do ensino médio (BEKE, 2014, p. 41).

Devido às diferenças enormes entre os Estados Federais nos níveis regionais e locais, fica bem difícil de trazer informações gerais sobre a situação como se desenvolve desde 1914. Mesmo assim, é possível afirmar a seguinte avaliação qualitativa.

⁶ Agradeço a Profa. Marta Menghini (Roma) para as suas avaliações e informações.

- Alunos na *High School*, correspondente ao ensino médio, frequentemente possuem ensino de *pre-calculus*;
- Estudantes nos *colleges*, no *undergraduate studies*, possuem disciplinas de cálculo;
- E nos *graduate studies*, as disciplinas são de análise matemática⁷.

Lamenta-se uma certa pressão de ensinar o cálculo na *High School*, para melhorar as chances de conseguir passar no vestibular (BRESSOUD, 2020). O currículo típico de *pre-calculus* é:

- Funções e gráficos;
- Retas e taxas de variação;
- Sequências e séries;
- Funções polinomiais e racionais;
- Funções esponenciais e logarítmicas;
- Geometria Analítica;
- Álgebra linear e matrizes;
- Probabilidade e estatística.

Dessa forma, podemos assumir uma hipótese de que as estruturas nos Estados Unidos serviram fortemente como modelo para as estruturas no Brasil⁸, em particular depois da reforma universitária de 1968. A princípio, os Estados Unidos possuem a mesma estrutura como a do Brasil após a LDB de 1961: no currículo das escolas secundárias – quer dizer que nem na *High School*, nem no ensino médio fica previsto um ensino segundo o movimento da reforma do Felix Klein de 1908.

Porém, em outros países, existe um ensino preparatório de cálculo, nas últimas séries das escolas secundárias – ao menos para alunos de uma seção com um perfil científico-técnico – e assim, as disciplinas no ensino superior iniciam com a análise matemática. Repararam-se visões diferentes das escolas secundárias nos países estudados aqui: o cálculo diferencial, compondo parte da cultura geral, versus uma função preparatória para certos perfis profissionais ou de estudos no ensino superior – e mesmo com variações no mesmo país entre geral e “profissionalizado”.

⁷ É preciso estar consciente de que os *undergraduate studies* dos Estados Unidos correspondem à graduação no Brasil, e os *graduate studies* à pós-graduação.

⁸ A situação referente ao Brasil será discutida em capítulos posteriores.

2.6. Rússia/União Soviética

Apesar de inicialmente não estar entre os países prioritários para esta pesquisa, a Rússia revelou-se um componente significativo para o panorama geral investigado. Essa importância decorre do papel desempenhado por livros-texto russos de cálculo diferencial e integral no contexto brasileiro. Um exemplo notável é o livro *Cálculo diferencial e integral* de Nikolai Semenovich Piskounov (1908-1977), do Instituto Matemático Steklov, publicado em português pela Editora MIR (Moscou), e que esteve presente em muitas edições desde 1969 nas bibliotecas da UFRJ. Este livro também pode ser encontrado, por exemplo, na ementa da disciplina Cálculo Diferencial e Integral IV da UERJ⁹. Dessa forma, buscamos introduzir uma breve seção para descrever o que podemos afirmar sobre a situação da Rússia/ União Soviética no contexto desta pesquisa.

De uma forma geral e resumida, é possível estabelecer que o curso secundário russo incluiu algum estudo dos elementos do cálculo em seu currículo. No relatório da Conferência de 1914, Beke afirma que:

De acordo com o relatório abrangente do Sr. C. Possé, o cálculo diferencial e integral está incluído nos currículos de 1907 das escolas secundárias modernas e em algumas escolas específicas para meninas, assim como no currículo de 1910 das escolas militares. No entanto, isso e até mesmo os elementos de geometria analítica não são ensinados nos ginásios, onde ainda está em vigor um currículo mais antigo (BEKE, 2014, p. 44).

Esse trecho retirado do relatório de 1914 apresentada uma visão da situação da Rússia no período compreendido até 1914. Dessa forma, este país também se junta à lista dos países que já haviam, de alguma maneira, introduzido os elementos do cálculo infinitesimal no currículo das escolas secundárias como efeito do Movimento de Reforma Internacional. No entanto, conforme esse trecho, vemos que ele compôs parte do currículo das escolas técnicas e modernas, mas não dos ginásios.

No período entre 1915 até 1992 não encontramos informações sobre como ocorreu esse processo nos anos seguintes ao Movimento de 1914. Somente após o colapso da União Soviética, que conseguimos destacar alguns fatores importantes dentro desse contexto. Isso foi possível devido às análises fornecidas por Alexander Karp¹⁰.

⁹ A ementa da disciplina pode ser encontrada em: http://www.boluerj.uerj.br/pdf/de_00512004_03082004.pdf
Acesso em 20/04/2023.

¹⁰ Agradeço ao professor Alexander Karp pelas análises gerais fornecidas com relação ao ensino de cálculo das escolas secundárias da Rússia no período pós União Soviética.

O ensino secundário no período pós União Soviética também incluía os elementos do cálculo no currículo das escolas. Isso significa que, mais especificamente, mesmo aqueles que estudaram em cursos curtos deveriam saber o que é derivada e como ela pode ser aplicada a alguns problemas. Além disso, a antiderivada foi ensinada em conjunto à problemas de como encontrar a área da região limitada pelo gráfico da função $y = x^2 - 2x$ e o eixo x . Provas não são fornecidas normalmente e até mesmo evidências de apoio são raras. Claro, as escolas com um curso avançado de estudo oferecem um curso sólido e rigoroso.

Na Rússia, o cálculo foi ensinado aos alunos das séries mais avançadas, de uma forma ou de outra, por quase meio século. Embora o conteúdo que os alunos aprendem permanece relativamente estável, a maneira pela qual eles devem ser ensinados ainda é assunto de debate. Existem diferentes opiniões sobre o grau de rigor com que várias proposições devem ser provadas, se uma definição formal de limite é necessária ou não, que quantidade de aplicações geométricas e físicas devem ser examinadas e se a atenção deve ser focada principalmente na teoria ou na prática (JACKUBSON, 2011, p.226).

Com relação aos tópicos e ênfases no ensino, podemos observar que:

Entre as questões que tradicionalmente fazem parte do aparato do cálculo, o tópico estudado com maior detalhamento é "Derivadas". O conteúdo aqui é suficientemente tradicional: as derivadas das funções elementares básicas, as regras de diferenciação e o uso das derivadas para investigar funções e resolver problemas envolvendo máximos e mínimos. Se o tópico "Derivadas" é estudado por todos os alunos do último ano, então as coisas se tornam mais complicadas com o tópico "Integrais". Apenas o estudo do conceito de "antiderivadas" é atualmente considerado totalmente obrigatório, juntamente com o cálculo correspondente de antiderivadas, sendo que problemas mais difíceis (como os que envolvem cálculo de áreas) constituem uma parte opcional do programa - mais precisamente, atualmente eles não estão incluídos nos chamados requisitos para formatura, o que significa que tais problemas não aparecerão em exames (JACKUBSON, 2011, p.192).

Em relação à análise matemática, basicamente, o curso universitário padrão (bem, universidade ou universidade pedagógica) era chamado de análise e incluía axiomas, todas as provas, etc. É assim que limites, derivadas, antiderivadas, entre outros, são estudados. É muito diferente do cálculo americano, e se assemelha mais com o estilo observado na Alemanha e França. O título análise matemática é usado e normalmente inclui teoria da medida, medida de Lebesgue, etc. Foi ministrado por volta do 5º semestre. Novamente, não se trata de provar o teorema do valor intermediário - como costuma ser feito nos EUA, e deveria ser provado no início do primeiro semestre.

CAPÍTULO 3. A DUALIDADE NO ENSINO DE CÁLCULO: DOIS EXEMPLOS NO SÉCULO XIX

Em meio ao estudo sobre a disciplina de cálculo diferencial e integral, nos deparamos com alguns conflitos de longa data que permeiam o ensino até os dias atuais, a saber, os casos emblemáticos de divergência entre a formação de matemáticos e engenheiros. Esse é um assunto que merece destaque, pois existem formas distintas de abordagem que podem ser notadas nos livros-textos sobre o assunto, que apesar de tratarem do mesmo conteúdo, apresentam diferenças substantivas dependendo do seu objetivo de formação. Nesse sentido, trata-se de uma questão que compõem nosso estudo sobre a disciplinarização do cálculo nos ambientes de ensino superior.

Nesse capítulo, buscamos apresentar dois exemplos opostos de livros-textos utilizados durante o século XIX, por onde destacaremos suas diferenças de acordo com o foco ao qual se destina.

3.1. Análise dos “*Elements of analysis as applied to the mechanics of engineering and machinery*” (1869), Weisbach

Julis Weisbach (1806-1871) foi um professor de matemática alemão que atuou na formação de engenheiros na *Bergschule Freiberg*¹¹, e que teve destaque em seus estudos voltados para a área da engenharia. Dentre suas obras publicadas, temos assuntos como matemática, mecânica, agrimensura e hidráulica.

Nesta seção, apresentamos uma análise de um dos livros de Weisbach, intitulado por *Elements of analysis as applied to the mechanics of engineering and machinery*¹² (1869), uma versão inglesa da obra que foi originalmente publicada em alemão¹³, em 1845. Tal livro pertence ao *Treatise on the Mechanics of Engineering and Machinery*¹⁴, um conjunto dividido em três volumes. Para esta análise, o foco principal está presente no primeiro volume desse tratado, pois neste são apresentados os elementos do cálculo diferencial e integral, pelo qual realizamos nosso estudo.

Certamente, tratamos de um livro que teve sua devida importância para a formação de engenheiros, tendo em vista que além do alemão, e das duas versões em inglês (da América e

¹¹ Uma escola superior de Minas localizada na Saxônia.

¹² Tradução do título para o português: Elementos de análise aplicados à mecânica de engenharia e máquinas.

¹³ Título original em alemão: Lehrbuch der Ingenieur-und Maschinenmechanik.

¹⁴ Tradução do título para o português: Tratado de Mecânica da Engenharia e da Maquinária.

Inglaterra), a obra também foi traduzida para alguns outros idiomas, tais como francês, sueco, polonês e russo.

O livro de Weisbach é reconhecido como um curso recomendado aos estudantes de engenharia, onde é possível encontrar os resultados de um estudo sobre os fundamentos do cálculo diferencial e integral. No prefácio da primeira edição, o autor realiza alguns comentários sobre sua obra e demarca seu principal objetivo.

Alguns acharão um ou outro capítulo muito minucioso, enquanto outros acharão o mesmo curto demais; alguns exigirão um tratamento mais científico de certos assuntos, que outros desejariam ter apresentado de uma maneira mais popular. Mas muitos anos de estudo, muita experiência em ensino e observação múltipla, indicaram-me o método segundo o qual preparei o presente trabalho, e que mais considere adequado para a finalidade pretendida. Meu principal objetivo ao preparar este trabalho foi atingir a maior simplicidade na enunciação e na prova, e resolver todos os problemas importantes apenas por meio da matemática elementar (WEISBACH, 1869, p.VII, tradução própria).

Dessa forma, o autor busca enunciar os elementos principais do cálculo de forma simplificada, por meio de exemplos e com a preocupação de não apresentar uma fórmula sem a sua devida explicação, além de concentrar suas provas nos resultados que são mais importantes de maneira elementar.

O livro possui cerca de 70 páginas, e devido a sua extensão, optamos por apresentar a sua análise completa. Com relação à estrutura, podemos observar um fato curioso presente na obra, pois o mesmo é organizado a partir de artigos ao invés de capítulos, onde não existe uma separação entre os assuntos, e com isso o texto desfruta de uma linearidade, na qual os temas de certa forma estão interligados.

Além disso, podemos perceber que ao longo do texto, em nenhum momento o autor utiliza termos como definição, teorema, proposição e também não define quais são os conhecimentos prévios que o leitor deve possuir para compreensão da obra. Ao invés disso, o método utilizado busca introduzir os conceitos mediante a exemplos e imagens, e é dessa forma que a teoria é desenvolvida, caracterizando assim um tipo de abordagem mais próximo do estilo intuitivo.

Os primeiros artigos do texto são destinados às funções e leis naturais, e com isso temos uma breve exposição sobre conceito de variáveis, e em seguida é estabelecida uma relação entre elas, definida como função de uma ou mais variáveis.

A dependência de uma magnitude y sobre outro x é expressa por uma fórmula matemática, como, por exemplo, $y = 3x^2$ ou $y = ax^m$. Geralmente, colocamos $y=f(x)$, ou $z = \phi(y)$, e chamamos de y uma função de x , como também z uma função de y . [...] Portanto, as magnitudes indefinidas x e y são denominadas variáveis, ou

magnitudes variáveis, enquanto aquelas que são determinadas, ou devem ser consideradas como determinadas, e, portanto, prescrevem o processo algébrico pelos quais y procede de x são chamados constantes, ou magnitudes constantes. Aquela das magnitudes variáveis que deve ser assumida arbitrariamente, é denominada variável independente, e aquela que é determinada em função desta por um processo prescrito é chamada de variável dependente. Em $y = ax^m$, a e m são as constantes, enquanto x é a variável independente e y , a dependente (WEISBACH, 1869, p.1, tradução própria).

Neste trecho, temos as noções iniciais sobre função, estabelecidas por meio de exemplos, e identificação de termos conhecidos de uma função. Essa noção apresentada é bem parecida com a qual vemos hoje nos livros atuais. No entanto, em nenhum momento o autor utiliza conceitos como domínio e imagem de uma função, cuja definição é tão importante para o seu estudo.

O mesmo raciocínio também é utilizado para definir uma função de duas variáveis, representada por $z=f(x,y)$, e neste caso, temos que z é *função* de x e y concomitantemente. Em seguida, alguns exemplos são colocados em figuras para uma melhor compreensão da representação gráfica que uma função pode assumir, incluindo também a função de duas variáveis. Nesses artigos iniciais, também são apresentados alguns exemplos aplicados que utilizam o conceito estabelecido, e podemos perceber o cuidado tomado pelo autor, para definir detalhadamente o que é uma função, pois essa será a peça chave para a construção dos conceitos seguintes.

Os artigos 5-6 recebem o título de “*Diferenciais e Posição da tangente*” e aqui devemos destacar algumas observações importantes. Após a apresentação de alguns tipos de funções, representações e aplicações, o autor introduz as noções de diferenciais sem recorrer a nenhuma definição de limite. Esse é um fato que deve ser destacado, pois se trata de um tema de grandes discussões entorno do ensino de cálculo, recebendo críticas acerca da questão do rigor, tão enaltecido por diversos matemáticos. O segundo fato merece uma atenção redobrada, pois o autor prefere utilizar diferenciais ao invés de derivada.

Dessa forma, neste artigo o autor menciona um incremento de magnitude infinitesimal, o qual é a base utilizada para a construção da teoria de diferenciais. E com isso, temos mais outro ponto importante, que está relacionado ao fato de que em nenhum momento o autor explica o que seria esse incremento infinito e nem o que isso representa.

Portanto, a noção de diferenciais é estabelecida a partir do incremento de partes infinitesimais na variável x , que por sua relação de dependência, também gera uma variação em y , ou seja, um incremento infinitesimal.

Ambos os incrementos ∂x e ∂y de x e y são chamados de *diferenciais*, ou elementos das variáveis ou coordenadas x e y , e agora é nossa tarefa principal encontrar, para as funções mais frequentemente recorrentes, os diferenciais, ou melhor, as relações entre os elementos associados de suas variáveis x e y (WEISBACH, 1869, p.5, tradução própria).

Outro fato a ser destacado é a notação apresentada. O uso dos símbolos ∂x e ∂y , ao invés de dx e dy , são curiosas pois os primeiros são comumente utilizados apenas para representar derivadas parciais. Além disso, durante boa parte do texto o autor trabalha com esses símbolos separados, salvo apenas a exceção de quando deseja-se calcular a inclinação da reta tangente, que veremos mais adiante. Dessa forma, seguindo por esse raciocínio estabelecido, o autor apresenta a regra mais geral para determinar a diferencial de uma função, como sendo $\partial y = f(x + \partial x) - f(x)$.

Nesse sentido, são apresentados alguns exemplos a partir dessa noção de incrementos, e considerando que a parte infinitesimalmente pequena quando comparada com o restante da expressão, pode ser desconsiderada. Isso é o que leva o leitor a primeira visão do que seria a diferencial de uma função. Por meio desse mesmo processo, o autor prossegue tentando encontrar os termos diferenciais, fazendo a razão entre ∂x e ∂y em busca do ângulo que forma a reta tangente a um determinado ponto de uma curva. E aqui devemos destacar, que esta operação de encontrar a razão entre os termos diferenciais, representa um quociente verdadeiro, e que é diferente da noção de derivada estabelecida pelo símbolo $\frac{dy}{dx}$.

A linha reta que passa por dois pontos infinitamente aproximados de uma curva é chamada de *tangente*, ou *linha de contato* desta curva, e determina a direção da mesma entre estes pontos. A direção da tangente é indicada pelo ângulo a sob o qual o eixo AX das abscissas é interceptado por esta linha. [...] Portanto, o quociente dos dois diferenciais ∂y e ∂x indica a tangente trigonométrica do ângulo tangencial (WEISBACH, 1869, p.6, tradução própria).

O interessante dessa conclusão é que para encontrar o ângulo tangencial, o autor busca calcular os diferenciais separados, e faz de fato um quociente entre ambos. Isso contrasta com o que conhecemos sobre o conceito de derivada, onde ao calculá-la em um determinado ponto é o que nos fornece tal ângulo. A seguir, temos um exemplo utilizado no livro para este cálculo:

Para a parábola, por exemplo, cuja equação é $y^2 = px$, temos, se colocarmos $y^2 = px = z$,

$$\partial z = (y + \partial y)^2 - y^2 = y^2 + 2y\partial y + \partial y^2 - y^2 = 2y\partial y + \partial y^2$$

ou, uma vez que ∂y^2 desaparece quando comparado com $2y\partial y$:

$$\partial z = 2y\partial y,$$

e da mesma forma: $\partial z = p(x + \partial x) = px = p\partial x$. Portanto, $2y\partial y = p\partial x$, então o

ângulo tangencial da parábola é: $\tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y} = \frac{y^2}{2xy} = \frac{x}{2y}$ (WEISBACH, 1869, p.6, tradução própria).

Também vemos exemplos de plano tangente a uma superfície, que utilizam a mesma noção estabelecida. Neste mesmo artigo, são desenvolvidas relações entre curvas convexas e côncavas com suas respectivas retas tangentes. Sobretudo, vimos que o texto apresenta ausência da teoria de limites na construção dos conceitos, e outro fator que podemos observar é justamente na forma da introdução do conceito de diferencial. Normalmente as noções de diferenciais são introduzidas a partir do problema de tangentes, e em seguida o conceito de derivada é trabalhada como uma taxa de variação. Porém, o que vemos em Weisbach é um pouco diferente.

Com base no que foi estabelecido até aqui, os próximos passos são dados a partir do desenvolvimento das principais técnicas e propriedades atreladas à noção de diferencial. O artigo 7 é destinado a isto, e nele vemos alguns exemplos que resultam nas seguintes conclusões:

Podemos, portanto, aduzir as seguintes regras importantes:

I. *Os membros constantes (a, 5) de uma função desaparecem por diferenciação e os fatores constantes (m, 3) permanecem assim inalterados.*

[...]

II. *O diferencial da soma de várias funções é igual à soma dos diferenciais de cada função* (WEISBACH, 1869, p.7-8, tradução própria).

Essas regras são deduzidas a partir da noção de diferencial apresentada no artigo 5, e aqui vemos novamente uma característica marcante deste trabalho, pois o autor utiliza exemplos numéricos para basear sua teoria, sem estabelecer definições. Em seguida, o artigo 8 também é voltado para a dedução de mais algumas regras de “diferenciação”. Utilizamos o termo entre aspas, pois estamos nos referindo à diferenciação de diferenciais e não de derivadas, conforme estamos habitualmente acostumados.

Se tivermos $y=uv$, o produto de duas variáveis, então:

$$\begin{aligned} \partial y &= (u + \partial u)(v + \partial v) - uv = uv + u\partial v + v\partial u + \partial u\partial v - uv = u\partial v + v\partial u + \partial u\partial v \\ &= u\partial v + (v + \partial v)\partial u \end{aligned}$$

Mas em $v + \partial v$, ∂v é infinitesimal em comparação com v , portanto podemos:

$v + \partial v = v$, e $(v + \partial v)\partial u = u\partial v$ bem como:

$u\partial v + (v + \partial v)\partial u = u\partial v + v\partial u$, de modo que temos:

III. $\dots \partial(uv) = u\partial v + v\partial u$ (WEISBACH, 1869, p.8-9, tradução própria).

Esta é a forma em que o autor desenvolve a regra do produto, e deduz as regras da potência e quociente de forma bem detalhada, utilizando um raciocínio semelhante. Na maioria dos livros, essas regras são estabelecidas a partir da definição formal de derivada, e envolve a teoria de limites.

No artigo seguinte, o autor define a função $y = x^m$ como uma das mais importantes, pois aparece com bastante frequência nas análises que serão feitas nos estudos aplicados. Com isso, este artigo é reservado para descrição e apresentação de funções neste formato, bem como suas representações gráficas.

No artigo 11 são estabelecidas as relações entre reta tangente e assíntotas, onde uma assíntota de uma curva pode ser considerada a tangente para um ponto infinitamente distante da curva, ou seja, a reta que se aproxima da curva, mas sem nunca chegar à mesma, em uma magnitude infinita. Aqui nesse trecho, vemos que o autor utiliza o termo se aproximar até infinito, sem estabelecer a noção de limite, nem definir o que seria essa aproximação.

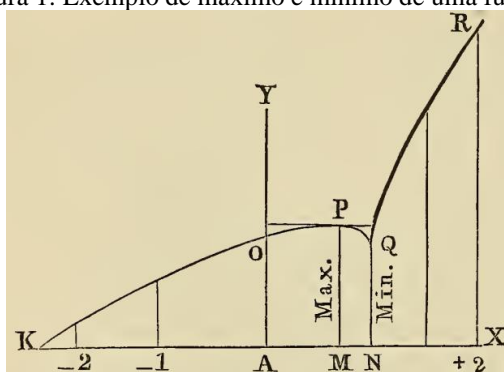
Quando uma curva se aproxima cada vez mais, *ad infinitum* a uma linha reta que está distante por uma magnitude finita da origem das coordenadas, sem nunca chegar às mesmas, esta linha reta é chamada de *assíntota da curva*. A assíntota pode ser considerada como a tangente ou linha de contato para um ponto infinitamente distante da curva (WEISBACH, 1869, p.16, tradução própria).

O interessante dessa definição é que mais uma vez o autor introduz um conceito comumente definido a partir de limites, por um caminho diferente. A partir das noções introduzidas, a maneira de se encontrar a assíntota de uma curva possui uma estreita relação com a sua tangente. No artigo seguinte, são expressas as características de hipérbolas e elipses, que são deduzidas a partir da equação de uma circunferência. Estes também são elementos importantes para os cálculos futuros, segundo o autor. No artigo 14, vemos um dos tópicos mais importantes do cálculo diferencial, que trata da aplicação do conceito de diferenciais para cálculo de máximos e mínimos. Dessa forma, o autor sugere que:

Os pontos onde a tangente a uma curva “corre” paralela a um dos eixos das coordenadas são os mais importantes; porque aqui, via de regra, um ou outro das coordenadas x e y tem seu valor *máximo* ou *mínimo*; ou então, como dizemos, um *máximo* ou um *mínimo*. Para o paralelismo com o eixo das abscissas, temos $\alpha = 0$; portanto, $\tan \alpha = 0$ e para o paralelismo com o eixo das ordenadas, $\alpha = 90^\circ$; Portanto, $\tan \alpha = \infty$; e disso segue a regra: *Os valores da abscissa ou variável independente x aos quais os valores máximo ou mínimo da ordenada ou variável dependente y correspondem, pode ser encontrado colocando a razão diferencial $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ e ∞ , e resolver as equações obtidas, em relação a x* (WEISBACH, 1869, p.19, tradução própria).

Devemos fazer uma observação nesta definição que chamou bastante a atenção, no que se diz respeito a segunda igualdade $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$, cuja solução pode representar um máximo ou mínimo. O curioso neste caso é que quando tratamos do cálculo utilizado nos livros usuais, geralmente a derivada não existe. Na figura a seguir, temos um exemplo em que esta situação ocorre.

Figura 1: Exemplo de máximo e mínimo de uma função.



Fonte: (WEISBACH, 1869, p.20).

A função representada é $y = x + \sqrt[3]{(x-1)^2}$. O autor considera que $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$ em $x=N$, e caracteriza Q como um valor mínimo da função, e de fato ele é. Porém, podemos constatar que a derivada nesse ponto não existe, e muito menos a tangente. Uma possível resposta para este problema, deve se ao fato de que o autor utiliza a noção de diferenciais ao invés de derivada, conforme estamos habituados. Dessa forma, o método utilizado por Weisbach para encontrar máximos e mínimos consiste em descobrir possíveis valores de x que satisfazem a razão $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ ou $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$.

Em seguida, no artigo 14 são trabalhadas as noções de curvas crescentes e decrescentes, diferencial de segunda ordem e suas interpretações, e pontos de inflexão.

Em uma *curva ascendente* da origem A , y aumenta com x e ∂y é, portanto, positivo, enquanto em uma *curva descendente*, y diminui conforme x aumenta, e ∂y é, portanto, negativo e, finalmente, zero, no ponto onde a curva corre paralela ao eixo de coordenadas AX .

[...]

Portanto, a seguinte regra é aplicável: *Se o diferencial da tangente do ângulo tangencial for positivo, a curva será convexa, se for negativa a curva será côncava, e se for zero, teremos que considerar um ponto de inflexão da curva* (WEISBACH, 1869, p.20-21, tradução própria).

Com isso, o ponto de inflexão é definido como o ponto sob curva cuja a concavidade muda de côncava para convexa e, vice e versa. Este ponto pode ser encontrado através da

seguinte equação: $\partial(\tan \alpha) = \partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0$. Que apesar do autor não definir no texto, essa é a noção de diferencial de segunda ordem, ou seja, a diferencial da diferencial, ou então diferencial da tangente. Neste mesmo artigo, o autor finaliza tirando algumas conclusões importantes:

Do exposto, também é fácil inferir o seguinte: O ponto onde a curva correr paralela ao eixo das abscissas, para as quais há, portanto, $\tan \alpha = 0$, corresponde a um *mínimo*, *máximo*, ou a um ponto de *viragem da curva*, conforme esta curva seja *convexa*, *côncava* ou *nem uma nem outra*; i. e. de acordo como nós temos: $\partial(\tan \alpha) = 0$ é *positivo*, *negativo* ou *zero*. Por outro lado, o ponto onde uma curva corre paralela ao eixo de ordenadas, para o qual temos $\tan \alpha = \infty$, corresponde a um *mínimo*, *máximo* ou a um *ponto de viragem da curva*, de acordo com como o mesmo é *côncavo*, *convexo* ou *parcialmente côncavo e parcialmente convexo*; portanto, de acordo com se $\partial(\tan \alpha) = 0$ é *negativo* ou *positivo* antes e após este ponto, ou tem antes um sinal diferente daquele que segue (WEISBACH, 1869, p.21, tradução própria).

Vemos, portanto, um método exposto sobre como encontrar os pontos máximos e mínimos de uma curva, bem como descobrir se a mesma é crescente ou decrescente, e encontrar suas concavidades. Resolver problemas deste tipo é de grande importância para os exercícios aplicados. No final deste artigo, o autor apresenta um desses exemplos.

O último assunto envolvendo essa parte do texto com relação à diferenciais, é destinado ao desenvolvimento da série de MacLaurin através da “diferenciação” sucessiva, que é expressada no artigo 15. Com isso, vemos o seguinte:

Para uma função que é representada em uma série convergente progredindo de acordo com as potências de x , cujos expoentes são números inteiros positivos, como:

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \dots \text{ obtemos:}$$

$$f_1(x) = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \dots$$

$$f_2(x) = 2A_2 + 2.3A_3x + 3.4A_4x^2 + \dots$$

$$f_3(x) = 2.3A_3x + 2.3.4A_4x + \dots \& c.$$

Se, nessas séries, fizermos $x=0$, obteremos expressões que podem ser usadas para encontrar os coeficientes constantes

$$f(0) = A_0, f_1(0) = A_1, f_2(0) = 2A_2, f_3(0) = 2.3A_3$$

E, portanto, os próprios coeficientes:

$$A_0 = f(0), A_1 = f_1(0), A_2 = \frac{1}{2} f_2(0), A_3 = \frac{1}{2.3} f_3(0)$$

Consequentemente, uma função pode ser desenvolvida na seguinte forma, denominada *série de MacLaurin*:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f_1(0) + \frac{x^2}{1.2} f_2(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f_3(0) + \dots \quad (\text{WEISBACH, 1869, p.23-24,}$$

tradução própria).

Os termos f_1 , f_2 , f_3 e f_4 são utilizados para representar as diferenciais sucessivas da função $f(x)$. A forma que o autor utiliza para introduzir tal série é muito semelhante com a qual

é apresentada nos livros usuais, porém não vemos a definição de série convergente, pois esta depende da definição de limite. Além disso, também não vemos uma explicação sobre a representação de uma função como série de potências.

A partir do art. 16, o autor começa a introdução do conceito de integral, que é definida como o somatório de pequenos valores infinitesimais que preenchem o todo analisado.

Este somatório é indicado pelo sinal integral \int que é colocado antes da expressão geral para os elementos que devem ser somados; assim, em vez de $y = [\phi(\partial x) + \phi(2\partial x) + \phi(3\partial x) + \dots + \phi(n\partial x)]\partial x$ e escrevemos $y = \int \phi(x)\partial x$. Neste caso, y é chamado de integral de $\phi(x)\partial x$, como também $\phi(x)\partial x$, o diferencial de y (WEISBACH, 1869, p.26, tradução própria).

Temos, mais um exemplo de conceito que é comumente baseado na teoria de limites, envolvendo somatórios infinitos. No entanto, vemos que o autor utiliza o termo somas infinitas, sem o uso do somatório, e com isso é definido a operação de integração. Além disso, o autor comenta que as integrais podem ser encontradas através dessas somas, entretanto se torna mais fácil utilizar as regras de integração que serão desenvolvidas nos artigos seguintes. Nos primeiros exemplos, o autor utiliza conhecimentos prévios para determinar algumas integrais. Vejamos um exemplo a seguir:

Para a diferencial $\partial y = ax\partial x$, temos, por exemplo, a integral: $y = \int ax\partial x = a\partial x(\partial x + 2\partial x + 3\partial x + \dots + n\partial x) = (1 + 2 + 3 + \dots + n)a\partial x^2$ ou, desde que, de acordo com o art. 15, temos para $n = \infty$, a soma da progressão dos números

naturais: $(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{1}{2}n^2$ e $\partial x^2 = \frac{x^2}{n^2}$,

$$y = \int ax\partial x = \frac{1}{2}n^2 a \frac{x^2}{n^2} = \frac{1}{2}ax^2$$

(WEISBACH, 1869, p.26, tradução própria).

Para que essa demonstração faça sentido, é preciso assumir que se n é o número de elementos ∂x de x , então $x = n\partial x$, ou ainda que $\partial x = \frac{x}{n}$. Dessa forma, o autor utiliza algumas progressões conhecidas para determinar certas integrais, a partir de sua noção apresentada como uma soma infinita.

Em seguida, alguns casos gerais de cálculo de integral são apresentados. No artigo seguinte, o autor define integral como a operação inversa à diferenciação, e a partir dessa noção, são desenvolvidas as principais propriedades e regras de integração.

I. *O fator constante m permanece inalterado* tanto por integração como por diferenciação; existe um *membro constante a* que não pode ser determinado apenas pela integração; e que, portanto, a mera integração produz uma integral que ainda é *indeterminada*.

II. *A integral de uma soma de vários diferenciais é igual à soma das integrais dos diferenciais individuais* (WEISBACH, 1869, p.27-28, tradução própria).

Essas regras, são deduzidas a partir das regras de “diferenciação” introduzidas no art. 7. Além disso, nesse trecho o autor comenta que a partir de *I.*, temos que o processo de integração gera uma constante que torna a integral indeterminada. Para encontrar o valor dessa constante, devemos:

Se tivermos $x=c$ e $y=k$, e se descobirmos que $y = \int \phi(x)dx = a + f(x)$, então $k=a+f(c)$, e da subtração temos: $y-k=f(x)-f(c)$, então neste caso:

$$y = \int \phi(x)dx = k + f(x) - f(c) = f(x) + k - f(c)$$

E temos, portanto, a constante $a=k-f(c)$ (WEISBACH, 1869, p.27, tradução própria).

Este é um processo interessante, pois a partir disso o autor argumenta que mesmo encontrando a constante a , o valor da integral continua indefinida. Portanto, devemos determinar um valor k_1 da integral, que corresponde a um determinado valor c_1 de x , e este último deve ser ainda introduzido na integral encontrada, então temos: $k_1 = k + f(c_1) - f(c)$.

Esse valor de x para o qual $y=0$ é o mais conhecido; nesse caso, portanto, temos $k=0$ e, portanto, a integral indeterminada $y = \int \phi(x)dx = f(x)$ leva à integral determinada $k_1 = f(c_1) - f(c)$, que é encontrado, se, na expressão $f(x)$ para o primeiro, os dois dados limites c_1 e c de x sejam introduzidos, e os valores apurados sejam subtraídos um do outro. Para indicar isso, escrevemos $\int_c^{c_1} \phi(x)dx$ ao invés de $\int \phi(x)dx$ (WEISBACH, 1869, p.27, tradução própria).

Dessa forma o autor desenvolve a noção de integral definida, e no artigo 18, prossegue deduzindo outras integrais a partir de tudo que já foi definido para diferenciais, utilizando-o como operação inversa da integração. Em seguida, alguns exemplos numéricos são apresentados ao leitor, para uma maior familiaridade com a nova operação definida.

Da mesma forma como o autor fez no artigo 9, ele separa um novo artigo apenas para a exploração da função exponencial $y = a^x$, ao qual é descrito no art. 19. Com isso, são expressas a forma de MacLaurin, a exponencial de base e , diferenciais das funções exponenciais, e função logaritmo natural. O artigo 20 dá continuidade ao anterior tratando de alguns exemplos e

representações gráficas. No art. 21 encontramos as diferenciais de funções que envolvem o logaritmo natural. A partir do que foi definido nos artigos anteriores, o art. 22 é destinado a apresentar o cálculo de integrais envolvendo funções exponenciais e logarítmicas, levando sempre em consideração que a integral é a operação inversa da diferenciação.

Dessa forma, o texto prossegue com alguns exemplos de cálculo de integrais utilizando funções trigonométricas, circulares, exponenciais e logarítmicas. O art. 24 trata especificamente das funções trigonométricas e circulares e nele vemos algumas propriedades e representações gráficas dessas funções. No artigo seguinte, o autor exhibe as diferenciais de cada função vista no artigo anterior, e acrescenta também as diferenciais das inversas trigonométricas.

Seguindo com o mesmo raciocínio utilizado nos outros artigos para encontrar as integrais, no artigo 26 vemos as integrais das funções trigonométricas. E dessa maneira o autor apresenta uma série de cálculo de integrais envolvendo diversos tipos de funções. O trecho final no texto é reservado para exploração de diferenciais e integral de diversas funções, e nele vemos muito exemplos onde método utilizado para encontrar a integral é sempre considerar tal operação como inversa da diferencial. Essa forma de cálculo é muito semelhante com a qual encontramos na maioria dos livros, após a definição formal de integral.

O texto também possui um tópico destinado a representação das funções trigonométricas a partir da série de MacLaurin, conforme foi apresentada ao longo do texto. No art. 28, o autor utiliza a regra do produto estabelecida para diferencial, com intuito de desenvolver a fórmula de reduções da integral (conhecida como integração por partes) que é uma ferramenta muito utilizada no cálculo de algumas integrais mais complexas, e com isso, o texto descreve alguns exemplos de utilização dessa técnica.

E com isso chegamos ao próximo artigo que trata dos problemas de quadratura. Tal problema é um dos mais antigos enfrentados pelos gregos, e consiste em encontrar um quadrado que possui área igual à outra figura determinada. Com isso, a palavra quadratura ficou conhecida como o sinônimo do processo de determinar áreas. Dessa forma, o autor utiliza o problema para estabelecer as relações entre integral e área, através da integral definida. “A área de toda a superfície F pode ser encontrada integrando o diferencial $y\partial x$, colocando assim

$$F = \int_c^c y\partial x \text{ ” (WEISBACH, 1869, p.42).}$$

No artigo 35 temos uma aproximação com a famosa regra L’Hopital, no entanto, como o texto não utiliza a teoria de limites, a noção é utilizada para calcular o valor de uma função em um determinado ponto cujo resultado seja $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Dessa forma, é possível calcular as

diferenciais de cada uma das funções e por fim, encontrar o valor da função no ponto inicialmente dado, sem alterar o valor original da função. O autor apresenta esse método sem utilizar este nome, e em seguida apresenta alguns exemplos de aplicação da regra. Ao final do texto, temos os dois artigos onde são apresentados os métodos de Mínimos Quadrados e Interpolação.

De forma geral, os conceitos básicos do livro são introduzidos como evidentes, sem explicações, e fazem apelo ao saber intuitivo. Notamos a ausência da teoria de limites e continuidade. Além disso, a obra de Weisbach é marcada por uma visão sobre o cálculo através de lentes diferentes das quais a maioria dos livros apresenta, onde é possível definir o conceito de diferencial e integral sem a teoria de limites, e através da coleção de regras e exemplos, desenvolve os resultados dos mais importantes funções para estudo dos estudantes de engenharia. Certamente, essa foi uma obra significativa para formação de engenheiros, tendo em vista o seu caráter prático.

3.2. Análise dos “*Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*” (1878), Dini

Ulisse Dini (1845-1918) foi um professor de matemática italiano que consagrou sua carreira através do ensino e da política. Nascido em Pisa, ele estudou matemática na *Scuola Normale Superiore* (SNS) da Universidade de Pisa, com o Enrico Betti (1823-1892). Terminado os estudos na SNS, ele ganhou uma bolsa para estudar um ano em Paris, onde foi aluno de Joseph Bertrand e Charles Hermite, em 1865-66. Em seu retorno à Pisa, se tornou professor da SNS, que desde a direção de Betti passou da tarefa de formar professores do magistério para configurar uma instituição de pesquisa, sendo assim, o primeiro lugar na Itália para formação de matemáticos. Dini lecionou álgebra superior, teoria da geodésia e análise infinitesimal. Ele também chegou ao mais alto cargo dentro dessa universidade, onde atuou como reitor no período de 1888 até 1890.

Com relação às suas publicações, Dini apresentou textos consagrados tais como “*Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*” (1878), “*Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reali*” (1880) e “*Lezioni di analisi infinitesimale*” (1907–1915), sendo este último dividido em dois volumes, o primeiro destinado para o cálculo diferencial e o segundo para o cálculo integral. É importante destacar que a versão de 1878 foi elaborada seguindo os conceitos de rigor de análise da Alemanha. Dini relatou no prefácio da primeira publicação, em 1878:

Até 12 ou 13 anos atrás tinha surgido em mim a dúvida de que alguns dos princípios fundamentais da análise não apresentavam em seus enunciados ou em suas demonstrações todo aquele rigor próprio da matemática. No entanto, novo na vida científica, ao descobrir que ninguém havia levantado tais dúvidas publicamente, eu extraí delas a convicção de que elas estavam apenas em minha mente (DINI, 1878, p. IV, tradução própria).

Além disso, Dini também relata que encontrou, em torno de 1870-71, publicações de Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) e Eduard Heine (1821-1881) que mostraram que cientistas renomados na ciência já haviam exposto dúvidas ainda maiores. Assim, ele entrou em comunicação com matemáticos alemães, e em particular com Schwarz, que enviou informações sobre os novos métodos de Weierstraß. Recebendo ainda mais publicações de Georg Cantor, Richard Dedekind e Hermann Hankel. Dessa forma, Dini podia conceber o seu livro-texto de análise matemática como uma revelação e exposição do novo rigor alemão, que através do intermédio de Schwarz, pôde se basear nas concepções de Weierstraß.

O seu livro-texto *Fundamentos para a teoria das funções de variação real*¹⁵ foi elaborado para a sua disciplina de 1871-72, mas foi publicado só em 1878. O livro ganhou destaque na Alemanha rapidamente e foi traduzido em 1892 por Jacob Lüroth e Adolf Schepp: *Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse*. Além disso, tal livro também foi fortemente revisado e republicado com o novo título *Lições de análise infinitesimal*¹⁶, em 1907-1909.

O nosso objeto de análise nesse momento são essas duas versões em italiano, que tratam do cálculo infinitesimal. O tratado apresentado em 1878, é o resultado dos estudos de Dini sobre análise infinitesimal através do novo rigor alemão, que geraram as suas notas de aulas para a disciplina a qual lecionava na Universidade de Pisa. Também é válido ressaltar que este era destinado aos alunos de matemática.

O autor reconhece que essa primeira versão é incompleta, mas ainda assim admite que:

Assim o fiz, reservando-me o direito de retomar a publicação do restante deste trabalho em momento mais oportuno, após ter publicado, seguindo os novos conceitos, um curso completo de Análise Infinitesimal do qual já foi assinado um primeiro esboço para minhas aulas sobre este assunto; e depois do que disse espero encontrar pena no leitor pelos vários defeitos que serão encontrados na obra que agora entrego ao julgamento do público (DINI, 1878, p. IV, tradução própria).

Esse primeiro exemplar possui um pouco mais de 400 páginas, e nele temos os conceitos fundamentais da teoria do cálculo infinitesimal. Vejamos, a seguir, os tópicos encontrados neste texto a partir de seu índice.

¹⁵ Tradução do título original em italiano: *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*.

¹⁶ Tradução do título original em italiano: *Lezioni di analisi infinitesimale*.

Figura 2: Índice da versão de Dini (1878).

I N D I C E	
DELLE	
MATERIE CONTENUTE IN QUESTO LIBRO	
~~~~~	
<i>Prefazione . . . . .</i>	Pag. III
<i>Numeri incommensurabili . . . . .</i>	» 1
<i>Gruppi di numeri e di punti, loro limite superiore e inferiore . . . . .</i>	» 14
<i>Concetto di limite. — Infinitesimi e infiniti . . . . .</i>	» 21
<i>Concetto di funzione. — Continuità e discontinuità. . . . .</i>	» 35
<i>Funzioni continue in un dato intervallo . . . . .</i>	» 46
<i>Funzioni infinite volte discontinue . . . . .</i>	» 62
<i>Derivata di una funzione. . . . .</i>	» 66
<i>Teoremi sulle serie . . . . .</i>	» 94
<i>Principio della condensazione delle singolarità . . . . .</i>	» 117
<i>Funzioni che non hanno mai la derivata determinata e finita . . . . .</i>	» 147
<i>Altre considerazioni generali riguardanti specialmente la esistenza delle derivate delle funzioni finite e continue . . . . .</i>	» 167
<i>Integrali definiti . . . . .</i>	» 232

Fonte: (DINI, 1878).

Dessa forma, são apresentados os conceitos de números incommensuráveis, conjuntos, limite, função, derivada e integral. É válido ressaltar que a abordagem do tema, conforme podemos ver em seu índice, é baseada no conceito de número com um enfoque nos irracionais.

A outra versão deste trabalho, apresentada no início do século XX, se constitui como um texto mais completo dividido em dois volumes. O primeiro deles é destinado ao cálculo diferencial, e possui cerca de 700 páginas. Nesse sentido temos uma primeira diferença notável entre os dois compilados de 1878 e 1907, a saber, a sua extensão. Certamente, Dini conseguiu cumprir com o seu objetivo que se constituía em apresentar um texto mais completo e rigoroso sobre análise infinitesimal, acrescentando novas ideias ao trabalho que havia iniciado na década de 1870. Sobre a questão do rigor, destacamos a seguinte passagem:

Se, como um tratado de cálculo, pode ter parecido muito matizado e muito extenso para a maioria dos jovens estudantes universitários que visam estudos de aplicação em vez dos de alta matemática, deve-se notar que, embora mantendo uma generalidade conveniente, o rigor trouxe para os estudos, em vez de complicar a ciência, tornou-a mais simples e clara; enquanto, por outro lado, não se deve esquecer que, em Pisa, a florescente escola matemática e a Scuola Normale Superiore trouxeram e ainda continuam a manter com grande honra estudos ainda superiores (DINI 1907, p. V, tradução própria).

Algumas características podem ser notadas em ambas as versões analisadas, tais como o seu caráter teórico, e a ausência de figuras e exercícios. Sobre esse fator, no prefácio da edição de 1907, o autor comenta que:

Nas duas partes deste tratado o leitor raramente encontrará aplicações e exercícios, e isso constitui um defeito que reconheço pela primeira vez. Mas a extensão já extremamente grande que o trabalho vem a ter, e a circunstância de que, para adicionar novas aplicações e exercícios em número conveniente, a publicação ainda teria sido adiada quem sabe por quanto tempo e talvez abandonada para sempre, induzido a publicá-lo sem aqueles (DINI, 1907, p.VII, tradução própria).

Conforme salientamos anteriormente, uma das principais diferenças entre as versões é devido à prolongação do texto. Nesse sentido, apresentamos a seguir o índice da introdução da versão de 1907, a fim de se estabelecer mais algumas comparações. A primeira parte dessa versão é destinada a uma longa introdução, com cerca de 100 páginas, voltadas para a apresentação dos conceitos básicos para o estudo do cálculo diferencial propriamente dito.

Figura 3: Índice da introdução das Lezioni di analisi infinitesimale.

INDICE	
—	
Prefazione . . . . .	III
INTRODUZIONE	
—	
I. Considerazioni generali [§ 1-5] . . . . .	XI
Quantità costanti e quantità variabili [§ 1]. — Rappresentazione geometrica di una variabile [§ 2], — di due o più variabili [§ 3-5].	
II. Generalità sui gruppi di numeri o di punti [§ 6-17] . . . . .	XIV
Gruppi (o insieme) di numeri o di punti [§ 6]. — Intorno di un punto [§ 7]. — Punti-limiti di un gruppo [§ 8]. — Gruppi derivati: gruppi di prima e di seconda specie [§ 9-10]. — Gruppi chiusi, concentrati e perfetti [§ 11]. — Potenza di un gruppo. Gruppi numerabili [§ 12]. — Proprietà dei gruppi di prima specie [§ 13-14]. — Gruppi rinchiusibili, e gruppi densi nell'intervallo [§ 15]. — Limite superiore e limite inferiore di infiniti numeri. Esistenza di questi limiti [§ 15-17].	
III. Dei limiti [§ 18-27] . . . . .	XXVI
Il limite pel caso di una variabile [§ 18-19]. — Caso di più variabili [§ 20]. — Differenza fra valore delle quantità nel punto limite e il limite dei valori [§ 21]. — Limiti di somme, di prodotti ecc. Considerazioni che dimostrano come il limite di una somma infinita può talvolta non essere la somma dei limiti [§ 22]. — Teoremi di Cauchy sulla condizione necessaria e sufficiente per la esistenza del limite [§ 23-24]. — Se non esiste il limite di una successione, la successione deve oscillare [§ 25-26]. — Successioni monotone [§ 27].	
IV. Concetto di funzione. Continuità e discontinuità [§ 28-39] . . . . .	XXXVIII
Concetto di funzione secondo Dirichlet [§ 28-29]. — Funzioni limitate ( <i>bornées</i> ). Continuità e discontinuità. Discontinuità di prima e di seconda specie [§ 30-33]. — Salto in un punto di discontinuità [§ 34]. — I simboli $f(a+0)$ ed $f(a-0)$ [§ 35]. — Il teorema di Weierstrass sul limite superiore ed inferiore delle funzioni [§ 36]. — Oscillazione di una funzione in un intervallo e in un punto [§ 37-38]. — Continuità delle somme, dei prodotti, dei quozienti ecc. [§ 39].	
V. Funzioni continue in un dato intervallo [§ 40-64] . . . . .	XLI
Funzioni continue e funzioni generalmente continue in un intervallo [§ 40]. — Continuità uniforme. Teorema di Cantor [§ 41-42]. — Conseguenze e teoremi varii sulle proprietà fondamentali delle funzioni continue [§ 43-54]. — Punti e tratti di invariabilità [§ 55]. — Considerazioni generali relative ai massimi e minimi delle funzioni. Ampiezza di una oscillazione [§ 56-59]. — Classificazione delle funzioni secondo il numero dei loro massimi o minimi [§ 60]. — Sulle funzioni continue che hanno un numero finito di massimi e di minimi. — Funzioni che soddisfano alle condizioni di Dirichlet [§ 61-62]. — Sulle funzioni che hanno un numero infinito di massimi e minimi [§ 63-64].	
VI. Funzioni infinite volte discontinue [§ 65-69] . . . . .	LXVI
Loro classificazione in funzioni punteggiate discontinue, e funzioni totalmente discontinue [§ 65]. — Sui salti delle funzioni punteggiate discontinue [§ 66-68]. — Le funzioni discontinue che hanno un numero finito di oscillazioni sono punteggiate discontinue [§ 69].	
VII. Alcuni studii sulle serie [§ 70-109] . . . . .	LXX
<b>Generalità.</b>	
Convergenza e divergenza delle serie in generale. Resto delle serie convergenti [§ 70-72]. — Misura della divergenza per le serie reali [§ 73-74]. — Criterii di convergenza di D'Alembert e di Cauchy per le serie a termini positivi. Limite superiore dell'errore formandosi a un certo termine in queste serie quando sono convergenti [§ 75-77]. — Teorema di Abel, e sua applicazione alle serie reali o complesse e alla dimostrazione della convergenza di serie trigonometriche notevoli [§ 78-81]. — Serie convergenti indipendentemente dall'ordine dei termini e teorema di Riemann [§ 82-83].	
<b>Serie ordinate per le potenze di una variabile.</b>	
Generalità. Raggio e cerchio di convergenza [§ 84-87]. — Teorema di Cauchy e di Hadamard sul raggio di convergenza [§ 88]. — Limite superiore dell'errore in queste serie, quando sono a coefficienti reali e si considerano per valori reali della variabile, quando ci si arresta a un certo termine [§ 89-90].	
<b>Serie convergenti in ugual grado.</b>	
Definizioni e considerazioni varie [§ 91-93]. — Le serie convergenti i cui termini sono funzioni continue, ma che non rappresentano una funzione continua, non sono convergenti in ugual grado [§ 94]. — Due teoremi che danno condizioni sufficienti per la convergenza in ugual grado in un intervallo, il primo basato sulla considerazione della serie dei massimi o dei limiti superiori dei valori assoluti dei singoli termini, e il secondo basato sul teorema di Abel §§ 78-80 [§ 95-97]. — Serie di potenze e serie trigonometriche	

Fonte: (DINI, 1907).

Nessa preliminar de seu texto, Dini discorre sobre as noções gerais de variáveis, conjuntos, limite, continuidade, funções e séries. Notemos que a parte referente aos números

irracionais presente na outra versão, foi retirada nesta nova apresentação. No decorrer da primeira parte do livro, o autor ressalta a importância do conceito de limite para o estudo em matemática, em particular, quando se trata do cálculo infinitesimal. Nesse sentido, a teoria dos limites se estabelece como o seu fundamento principal, e seu objetivo é defini-lo com todo o rigor necessário.

Comparando os dois índices apresentados, vemos que na segunda versão, o autor prefere organizar os conceitos fundamentais sobre conjuntos, funções e limites em uma introdução. Após isso, o restante das páginas é dedicado exclusivamente para o cálculo diferencial, onde vemos conceitos mais avançados que não estão presentes na versão de 1878 como, por exemplo, as séries de Taylor, equações diferenciais e aplicações da derivada de funções de várias variáveis. Sobre os tópicos em comum presente em ambas as edições, vemos um texto muito semelhante, que em certas passagens apresenta novos comentários do autor, mas preservando a mesma noção apresentada em 1878.

Tendo em vista tais considerações feitas até então, destacamos a seguir uma análise conceitual sobre a versão de 1878, pois esse constitui-se como o nosso objetivo principal. É válido notar que sempre que possível, serão feitas comparações da obra com edição de 1907.

Dessa forma, de acordo com o objeto que compõe o nosso estudo, visamos destacar e analisar os seguintes tópicos presente no texto de Dini, a saber, os conceitos de limites, continuidade, derivada e integral.

Nesse sentido, a primeira visão do conceito de limite é precedida pela seguinte noção. Dada uma quantidade real  $y$  que para valores considerados de uma outra quantidade  $x$ , excluindo o valor particular em que  $x = a$ , sempre haverá um valor determinado e finito que formam uma série de quantidades contínuas ou discretas, que constituem um conjunto de pontos infinitos, dos quais  $a$  é o ponto limite. A partir disso, a definição de limite é exposta como:

Então se existe uma quantidade finita e determinada  $A$  que goza da propriedade que, tomando à vontade um número diferente de zero mas arbitrariamente pequeno e positivo  $\sigma$ , com  $x$  se aproximando indefinidamente para valores decrescentes ou para valores crescentes para a quantidade  $a$ , que agora supõe finito, sem que  $x$  nunca se torne igual a  $a$ , a diferença  $A - y$  acaba se tornando e depois permanece constantemente inferior em valor absoluto ao número  $\sigma$  escolhido, diremos que  $A$  é o limite dos valores que temos para  $y$  quando  $x$  sempre se aproxima cada vez mais de  $a$  para valores crescentes ou decrescentes (DINI, 1878, p.22, tradução própria).

Sobre o conceito de limite, podemos observar que este se constituiu através de uma abordagem estabelecida a partir do rigor que envolve a sua noção principal. Outros casos também são definidos de maneira semelhante como, por exemplo, para os limites infinitos.

Se acontecer que à medida que  $x$  se aproxima indefinidamente de  $a$  para a direita ou para a esquerda,  $y$  também assume valores infinitos (ou seja, numericamente maiores que qualquer número dado) ou que eles acabem se tornando tão grandes quanto desejado em valor absoluto, então se para cada número positivo e tão grande quanto você quiser  $\omega$  você pode encontrar um número diferente de zero  $\varepsilon$ , positivo quando os valores de  $x$  considerados estão à direita de  $a$  e negativos quando estão à esquerda, tal que para todos os valores de  $x$  entre  $a$  e  $a + \varepsilon$  ( $a$  excluído)  $y$  é sempre mantido maior que  $\omega$  em valor absoluto, dir-se-á que os valores de  $y$  à medida que  $x$  se aproxima indefinidamente de  $a$  à direita ou à esquerda têm como limite  $\pm\infty$  (DINI, 1878, p.22, tradução própria).

Essa seria, portanto, uma definição para um limite que dado um valor  $x=a$ , tem-se que  $y$  cresce indefinidamente, caracterizando-se assim, um limite infinito. O autor também acrescenta outro caso.

E quando finalmente a variável  $x$  crescer indefinidamente, por exemplo, para valores positivos e de acordo com certas leis (como por exemplo para inteiros), então se existir um número finito e determinado  $A$  com a propriedade de que, tomado a vontade um número diferente de zero, mas arbitrariamente pequeno e positivo  $\delta$ , sempre podemos encontrar um número positivo  $x'$  tão grande que para cada valor de  $x$  maior que  $x'$  que pode ser levado em conta, a diferença correspondente é sempre numericamente menor que  $\delta$ , será dito que  $A$  é o limite dos valores que ocorrem para  $y$  quando  $x$  cresce indefinidamente para valores positivos, ou o limite de  $y$  para  $x = \pm\infty$  (DINI, 1878, p.23, tradução própria).

E por fim, a última noção a ser estabelecida sobre limites infinitos é a seguinte:

E finalmente diremos que  $y$  tem como limite o infinito (positivo ou negativo) para  $x = \pm\infty$ , por exemplo, para  $x = \pm\infty$ , quando para todo número arbitrariamente grande e positivo  $\omega$  existirá um número positivo  $x'$  tal que para cada valor de  $x$  maior que  $x'$ , que pode ser levado em consideração,  $y$  é sempre maior que  $\omega$  em valor absoluto (DINI, 1878, p.23, tradução própria).

Em seguida, o autor busca apresentar exemplos concretos de funções que apresentam limites de acordo com cada caso apresentado.

Vemos aqui algumas das características presentes nesse texto. A primeira delas é a ausência da notação, que mesmo no decorrer das páginas seguintes, aparece apenas em raras situações. A segunda é a forma puramente retórica que o autor utiliza para definir o conceito, a partir de um diálogo com o leitor, ausentando-se assim, de uma escrita com símbolos matemáticos. Esses dois aspectos estão presentes nas duas versões da obra como um todo.

O conceito de continuidade aparece no capítulo voltado para o estudo das funções. Esta última, por sua vez, é admitida a partir da noção de Dirichlet. Sendo assim, uma função  $f(x)$  de uma variável real  $\mathcal{X}$  é definida em um dado intervalo, e para cada valor de  $\mathcal{X}$  existe apenas um único valor  $y$ , que pode ser obtido independentemente das operações analíticas sobre a

própria variável. Tem isso em vista, sobre a continuidade de funções em um ponto, o autor assume a seguinte definição.

Diremos que é contínua para  $x=a$  ou no ponto  $a$  onde tem o valor  $f(a)$ , quando para todo número diferente de zero mas arbitrariamente pequeno e positivo  $\sigma$ , exista um número diferente de zero e positivo  $\varepsilon$ , tal que para todos os valores de  $\delta$  numericamente menor que  $\varepsilon$ , a diferença  $f(a+\delta)-f(a)$  seja numericamente menor que  $\sigma$ ; ou, em outras palavras, diremos que  $f(x)$  é contínua no ponto  $x=a$  onde tem o valor  $f(a)$ , quando o limite de seus valores à direita e à esquerda de  $a$  é o mesmo e é igual a  $f(a)$ , ou também, se quiser, quando as grandezas  $f(a+h)$  e  $f(a-h)$ , onde  $h$  é positivo, para  $h=0$  têm como limite  $f(a)$ ; ou finalmente quando as quantidades  $f(a+h)-f(a)$ ,  $f(a-h)-f(a)$  se tornam infinitesimais junto com  $h$  (DINI, 1878, p.37, tradução própria).

E através de um raciocínio semelhante, também acrescenta o caso da descontinuidade.

Diremos então que  $f(x)$  é descontínua para  $x=a$  quando não existir para todo valor positivo de  $\sigma$  um valor positivo correspondente de  $\varepsilon$  tal que para todos os valores de  $\delta$ , numericamente menores que  $\varepsilon$  sempre temos numericamente  $f(a+\delta)-f(a) < \sigma$ ; ou em outras palavras, diremos que  $f(x)$  é descontínua para  $x=a$  quando os valores  $f(a+h)$  de  $f(x)$  à direita de  $a$  e aqueles  $f(a-h)$  de  $f(x)$  à esquerda de  $a$  não têm limites definidos um para o outro, ou sendo diferentes das duas partes de  $a$ , ou sendo iguais eles diferem do valor  $f(a)$  que tem a função no ponto  $a$  (DINI, 1878, p.38, tradução própria).

Nesse sentido, vemos que as noções de continuidade e descontinuidade são aplicações diretas da teoria de limites. Aqui temos um exemplo de conceitos definidos sem utilizar a notação, gráficos ou imagens, que apesar desses fatores, não prejudicam a compreensão da ideia apresentada.

O autor também dedica uma seção para o conceito de continuidade em um intervalo. Neste caso, uma função é dita contínua em um dado intervalo caso seja contínua em todos os pontos deste intervalo. As concepções aparecem de forma semelhantes nas duas versões de 1878 e 1907.

Para o conceito de derivada, o autor assume a seguinte definição:

Seja  $f(x)$  uma função que em um ponto  $x$  do intervalo  $(\alpha, \beta)$  considerada finita e contínua. Se  $x$  é um ponto dentro desse intervalo  $(\alpha, \beta)$ , a derivada dessa função no mesmo ponto  $x$  é chamada de limite da razão  $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$  para  $\delta$  tendendo a zero para valores positivos e negativos, assumindo que este limite é determinado finito e independente do sinal de  $\delta$  (DINI, 1878, p.66, tradução própria).

A primeira observação que podemos destacar também é devida ao uso da notação. Apesar de não ser explicitada nesta definição, o autor usa a tradicional forma  $f'(x)$  para representar a derivada, porém esta aparece apenas em raras situações, onde o que predomina é

o seu formato como limite da razão  $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ , ou variações deste. Essa é uma característica que também é preservada na versão de 1907, porém nesta o autor acrescenta o termo  $Df(x)$  para se referir à derivada de uma função.

Uma diferença notável entre as duas edições analisadas está presente na forma como Dini desenvolve as propriedades sobre derivadas. Essa observação deve-se ao fato de que na versão de 1878, o autor firma uma longa discussão sobre o conceito de derivada, mas não chega a estabelecer regras para o seu cálculo, pois em todas as situações, ele faz uso da definição apresentada acima. Esse fator é alterado no exemplar de 1907, pois neste temos um tópico do texto destinado para o desenvolvimento dessas regras. É válido ressaltar, que mesmo assim, o autor continua utilizando a definição inicial, através de limites, para chegar a tais resultados. Ambos os livros tratam o conceito de derivada de forma bastante teórica.

Sobre o conceito de integral, temos que a maior parte do livro de 1878 é destinada para essa parte do cálculo. O autor apresenta a seguinte perspectiva sobre as integrais definidas.

Nos tratados de cálculo diferencial e integral, a integral definida  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$  entre dois limites reais  $\alpha$  e  $\beta$ , para a função real e finita  $f(x)$  é normalmente definida dizendo que não é nada mais do que a quantidade  $f_1(\beta) - f_1(\alpha)$ , onde  $f_1(\beta)$  e  $f_1(\alpha)$  são os valores para  $x = \beta$  e  $x = \alpha$  de uma função finita e contínua  $f_1(x)$  ligada à  $f(x)$  pela relação  $\frac{df_1(x)}{dx} = f(x)$  (DINI, 1878, p.232, tradução própria).

No entanto, logo em seguida, Dini critica essa visão sobre o conceito pois a partir dela não é possível estabelecer uma demonstração rigorosa sobre a existência da integral, além de que também não fornece uma forma de como encontrá-la. Tendo isso em vista, o autor busca desenvolver tal demonstração a partir de operações com somatórios e propriedades da derivada, chegando a seguinte definição para a integral definida:

(...) a integral definida  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ , para uma função finita e contínua  $f(x)$  que entre  $\alpha$  e  $\beta$ , é a derivada de outra função finita e contínua  $F(x)$ , mas que também poderia ser definida dizendo que é o limite da soma dos produtos dos intervalos  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  no qual o intervalo  $(\alpha, \beta)$  é multiplicado respectivamente pelo valor da função  $f(x)$  correspondente a um determinado valor de  $x$  no mesmo intervalo (DINI, 1878, p.234, tradução própria).



Considerando os elementos apresentados nessa análise, podemos concluir que ambas as versões do livro de Dini apresentam uma concepção rigorosa e teórica sobre o cálculo diferencial e integral. Não se trata de livro de exercícios ou muito menos de aplicações, mas sim um texto coerente que busca detalhar aspectos conceituais sobre a própria teoria.

### **3.3. Avaliação comparativa entre as obras de Weisbach e Dini**

A partir das análises feitas podemos inferir algumas conclusões parciais de caráter comparativo. É válido ressaltar que duas amostras não representam todos os livros sobre o assunto, podendo ser encontrados outros casos que não apresentem nenhuma das características aqui citadas. No entanto, buscamos selecionar exemplos que retratam as divergências presentes no ensino de cálculo, de acordo com cada público ao qual se destina.

Nesse sentido, apresentamos o livro de Weisbach, cujo foco principal é a formação de engenheiros, e a obra de Dini voltada para a formação de matemáticos. A primeira diferença notável é que se tratam de livros com intenções epistemológicas distintas. O livro de Weisbach, assume um caráter do estilo intuitivo, que mesmo sem a proposta de exercícios, visa a aplicação prática dos principais conceitos apresentados. Em contrapartida, a proposta de Dini assume um caráter mais formal e teórico, por onde são apresentados os conceitos de forma mais detalhada, sem se preocupar com as regras ou métodos para calcular, pois seu objetivo principal é a construção da teoria.

Mas, além de se tratar de livros com propostas totalmente diferentes, outras distinções também podem ser notadas, a saber, as conceituais. Conforme exposto, o livro de Weisbach não admite a teoria de limite para a construção dos conceitos do cálculo, e esse é o ponto principal. Como consequência, as noções de continuidade também não estão presentes na obra de Weisbach. E, além disso, a construção de outros conceitos também é bastante diferente como, por exemplo, as noções de diferenciais e derivada.

Tendo isso em vista, esses exemplos mostram que a dualidade presente no ensino de cálculo, isto é, a divergência entre livros-textos para formação de matemáticos e engenheiros, possui longa data e que desde o século XIX já podiam ser notadas tais distinções entre os ensinamentos. Mas que, além disso, também revelam que tal questão está intimamente ligada aos debates acerca de rigor e intuição.

## CAPÍTULO 4. HISTÓRIA DO ENSINO DE CÁLCULO NO BRASIL: ENSINO SUPERIOR

A primeira introdução de uma matemática de nível superior no Brasil, ocorre após a transferência da coroa portuguesa para a capital do país, em 1808. Em meio a esse contexto, surgem as primeiras escolas superiores do país, e antes disso, para quem almejava-se obter um estudo deste nível, era preciso viajar para universidades de outros países como, por exemplo, Portugal, e este era um privilégio para poucos.

Nesse sentido, a matemática de nível superior aparece em um primeiro momento no século XIX, vinculada as escolas de engenharia, e apenas no século XX ocorre a introdução em cursos de formação matemática voltados para a licenciatura e pesquisa acadêmica. Veremos a seguir, como ocorreu a criação das principais instituições por onde a disciplina de cálculo esteve presente, bem como evidenciar características que marcaram o ensino de cada época, a literatura adotada e as figuras importantes. Esperamos que tal exposição ampare o leitor na compreensão da evolução da história do ensino de matemática das instituições superiores de nosso país.

### 4.1. A chegada da Família Real e as primeiras instituições de ensino superior

Em 1808, após à chegada da família real, o Brasil tornou-se sede do Império português, e isso gerou a necessidade de ampliação da infraestrutura das cidades, bem como um maior investimento em melhorias de serviços essenciais, tais como os ligados à saúde, direito, economia, e atividades militares. Esse fato teve profundas consequências para a sociedade brasileira, incluindo sua cultura, ciência e educação.

Nesse contexto, começam a surgir escolas de nível superior com cursos voltados para ciências econômicas, engenharia militar, medicina, e mais tarde, direito e outras engenharias. A preparação para os alunos que almejam ingressar em tais instituições, era feita por meio das *aulas régias*¹⁷, que permaneceram em vigor até 1834.

A transferência da Coroa portuguesa para o Brasil teve consequências de longo alcance. Logo após sua chegada em 1808, D. João VI criou escolas de medicina em Salvador e no Rio de Janeiro (1808); curso de ciências econômicas no Rio de Janeiro (1808); e, mais importante para nós, a Real Academia de Guardas-Marinha, para preparar oficiais da Marinha para a defesa da longa costa desprotegida, e a Academia Real Militar da Corte (1810), para preparar oficiais do exército. Mais tarde, essa escola passou a ser Escola Central (1858) e, depois, Escola Politécnica. Logo depois, a Academia Real Militar abriu suas portas para estudantes não militares. A partir de 1858, ofereceu três cursos de instrução: um curso teórico de matemática, física e

---

¹⁷ Um sistema educacional adotado após expulsão dos Jesuítas do império português, que consistiam em aulas isoladas sobre um tema específico.

ciências naturais; um curso de engenharia militar; e um curso de engenharia civil (CARVALHO; DASSIE, 2012, p. 501).

Uma instituição importante surge em 1810, com a criação da Academia Real Militar. Vemos nesse contexto, a primeira introdução da matemática de nível superior se estabelecendo no Brasil, e com isso o cálculo diferencial e integral começa a ser ensinado no país.

Em 1822, o Brasil torna-se independente de Portugal, e o regime político adotado é a monarquia. O novo congresso começa então a discutir sobre a criação dos cursos jurídicos, que em 1827, são constituídos em Olinda e São Paulo. Novas discussões suguem no âmbito do ingresso dos alunos nessas instituições, e o Congresso decide então por incluir a geometria no exame de admissão, juntando-se ao latim, francês, filosofia e retórica.

Consequentemente, tornou-se necessário uma melhoria nos cursos de matemática, para preparar os alunos que ingressariam em tais instituições. E com isso, podemos observar o aspeto propedêutico que o ensino secundário passou a desempenhar, cujo currículo unificado ainda não havia sido estabelecido, mas certamente carecia de estudos matemáticos.

Um fator que contribuiu para a inclusão da matemática na formação cultural de todos os alunos foi a decisão de incorporar geometria no exame de admissão ao duas faculdades de direito, fundadas em 1827 nas cidades de São Paulo e Olinda, esta última na província de Pernambuco, perto de Recife (CARVALHO; DASSIE, 2012, p. 502).

Com isso, a matemática, que até então era concebida como um saber específico dos cursos das escolas militares, ganha um novo papel ao se concretizar como um elemento da formação geral escolar.

#### **4.1.1. As primeiras escolas de engenharia**

A Academia Real Militar foi fundada em dezembro de 1810, e surge em meio a um período de mudanças no Brasil, pois o Rio de Janeiro havia, em pouco tempo, se tornado sede do Império português e um processo de modernização estava sendo implementado no país. Tal instituição foi criada no Rio de Janeiro, e tinha por objetivo formar oficiais de artilharia, engenharia, geógrafos e topógrafos, bem como também oferecer um curso de ciências matemáticas, físicas e naturais.

O curso Matemático oferecido pela Academia Real tinha duração de quatro anos, e o primeiro ano costumava ser dedicado para as disciplinas básicas da matemática, pois nesse momento o ensino secundário ainda não havia se concretizado de maneira sólida. Além disso,

em sua fase inicial a instituição era reservada apenas aos alunos militares, situação essa que mais tarde sofre alterações.

Logo após sua chegada ao Brasil, a corte tratou de criar uma Academia Real Militar, que passou a funcionar em 1811. Ali se criou um Curso de Ciências Físicas, Matemáticas e Naturais, com duração de quatro anos. Os livros adotados eram de Euler, Bézout, Monge, Lacroix e outros destacados textos franceses (D'AMBROSIO, 1999, p.6).

O ensino de cálculo desta instituição utilizava como base o livro *Cálculo Diferencial e Integral*, de Lacroix, e o seu estudo pertencia ao segundo ano do curso Matemático. Com a criação da Academia Militar, surge a necessidade da contratação dos professores que leccionariam em tal instituição. A maioria desses profissionais escolhidos eram oficiais militares de origem portuguesa, em conjunto com alguns brasileiros que haviam se formado no exterior. Como exemplo desses professores contratados para atuarem na Academia Real, podemos citar o professor brasileiro José Saturnino da Costa Pereira (1773-1852), formado na Universidade de Coimbra, e o português Francisco Cordeiro da Silva Torres (1775-1856), graduado pela Academia Real dos Guardas-Marinhas de Lisboa.

Vemos, em particular, que o primeiro professor de cálculo na Academia Real Militar foi o ***Sargento Francisco Cordeiro da Silva Torres***, que veio a ser o tradutor da maioria das obras de Lacroix utilizadas na Academia, a saber, *Tratado de Aritmética*, *Elementos de Álgebra* e o ***Cálculo Diferencial e Integral*** (PEREIRA, 2017, p.134, grifo nosso).

Mormêllo (2010) é outra fonte que também investigou o ensino de matemática na Academia Real Militar, no período de 1811 a 1874. Através de seu trabalho, também podemos notar indicações da obra de Lacroix para a disciplina de cálculo diferencial e integral para o segundo ano da Academia Real Militar.

Figura 4: Livros adotados no segundo ano da Academia Real Militar.

Segundo Ano da Academia Real Militar	
Disciplina	Livro
Revisão de cálculo (1º ano)	
Métodos para a resolução das equações Aplicações da álgebra à geometria das linhas e das curvas (segundo grau e superiores)	LACROIX, Sylvestre-François. <i>Elementos d'Algebra</i> . Trad. Francisco da S. T. e Alvim. Rio de Janeiro: Imprensa Régia, 1812. LACROIX, Sylvestre-François. <i>Tratado Elementar de Aplicação de Algebra à Geometria</i> . Trad. José Victorino dos Santos e Souza. Rio de Janeiro: Imprensa Régia, 1812.
Cálculo Diferencial e Integral (aplicações à Física, Astronomia e Cálculo das Probabilidades)	LACROIX, Sylvestre-François. <i>Tratado Elementar de Cálculo Diferencial e Cálculo Integral</i> . Trad. Francisco da Silva Torres e Alvim. Rio de Janeiro: Imprensa Régia, 1812-1814.
Geometria Descritiva	LEGENDRE, Adrien-Marie. <i>Elementos de Geometria Descritiva; com aplicações às artes</i> . Trad. José Victorino dos Santos e Souza. Rio de Janeiro: Imprensa Régia, 1812.
Desenho	Os estatutos não citam obra para o desenho.

Fonte: Mormêllo (2010).

A Academia Real Militar passa por algumas reformas ao longo do século XIX, que em determinados períodos abrem o seu público para estudantes civis, e em outros momentos passam a restringir novamente apenas aos militares. Essas mudanças também fazem com que seu nome mude para Escola Militar em 1839, Escola Central em 1858, até se constituir como Escola Politécnica do Rio de Janeiro, em 1874. Sad e Silva (2014) analisaram os indícios do ensino de cálculo na Escola Politécnica durante o período de 1874 a 1885, e assumem que:

Entre as indicações de referências a livros didáticos, citadas em alguns dos programas, por exemplo, o de 1880, observamos a possibilidade de terem sido consultadas obras de Lacroix, que são apresentadas com títulos resumidos e sem datas como: “Cálculo”; “Calcul différentiel et integral tomo 2”; e “Calcul des probabilités”. A primeira, pode referir-se a edições como o *Tratado Elementar de Calculo Diferencial e Integral* – que foi traduzida por Torres (1812) e anteriormente utilizada na Academia Militar, ou mesmo edições posteriores do *Traité du Calcul Différentiel et du calcul Integral*, (1819 ou 1861). A segunda, prece ser a sétima edição, de 1867, sob o mesmo título, mas revista e comentada por Hermite e Serret. Todavia, notamos que, o programa referente ao cálculo de 1882, por exemplo, contém menos semelhança com a obra de Lacroix e mais com os tópicos da citada obra de J. Bertrand (1864, 1870) – *Traité de calcul différentiel et de calcul integral* (SAD; SILVA, p. 174, 2014).

A Escola de Minas de Ouro Preto foi uma instituição inaugurada em 12 de outubro de 1876, e tinha como objetivo a formação de engenheiros para a exploração das minas e para o setor metalúrgico. Claude Henri Gorceix (1842-1919) foi o primeiro diretor dessa instituição, e durante o tempo em que ocupou este cargo realizou diversas adaptações em sua estrutura e currículo, que alteram definitivamente o rumo dessa Escola. O curso inicial oferecido nesta instituição tinha duração de dois anos e era dedicado aos alunos com idade mínima de 18 anos. Os conteúdos estudados neste curso eram organizados da seguinte maneira:

No primeiro ano, os alunos estudariam física, química geral, mineralogia, exploração das minas, noções de topografia, levantamento de planos das minas, trigonometria esférica, geometria analítica, complementos de álgebra, mecânica, geometria descritiva, trabalhos gráficos e desenho de imitação. Deveriam ainda realizar trabalhos práticos como manipulações de química, determinação prática dos minerais e excursões mineralógicas. No segundo ano, as matérias ministradas eram geologia, química dos metais e docimasia, metalurgia, preparação mecânica dos minérios, mecânica, estudo das máquinas, construção, estereotomia, madeiramento, trabalhos gráficos e legislação das minas. Na parte prática, teriam que realizar ensaios metalúrgicos, manipulações de química, explorações geológicas e visitas a fábricas (GABLER, 2014).

Os alunos aprovados nos exames do segundo ano recebiam o diploma de Engenheiro de Minas. Apesar da disciplina de cálculo não compor parte da lista apresentada acima, Pereira (2017) utiliza o relatório de trabalho de Gorceix, referentes ao segundo trimestre letivo de 1876-1877, e evidencia a presença de vários conceitos relacionados ao cálculo diferencial e integral.

- Cálculo Diferencial – Diferenciação de várias ordens de funções de várias variáveis, diferenciação de funções implícitas, determinação de valores máximos e mínimos, funções de uma variável e funções que podem assumir valores da forma  $\frac{0}{0}$ .

- Cálculo Integral – Noções sobre integral definida, diversos métodos de integração, aplicações (PEREIRA, 2017, p. 230).

A maior parte desses tópicos apresentados faziam parte de um curso introdutório que Gorceix decidiu implementar na Escola de Minas em 1877, que ficou conhecido como curso preparatório. Os motivos para criação dessa etapa eram baseados na falta de preparação dos alunos que ingressavam na instituição e a situação do ensino secundário do país. Pereira (2017) ainda ressalta que maior parte dos conteúdos que preenchiam o currículo desse curso eram tópicos de matemática.

Dessa forma, a carga horária do curso inicialmente previsto sofre alterações que mudam sua duração para três anos, com a inclusão do curso preparatório, e depois para seis anos, caracterizando-se por três de Curso Geral e três de Curso Superior.

Em agosto de 1893, foi criada a Escola Politécnica de São Paulo, outra instituição com destaque, tendo em vista que esta foi a primeira escola de engenharia do Estado de São Paulo, e a terceira do país, juntando-se com a Politécnica do Rio de Janeiro e a Escola de Minas de Ouro Preto. Os primeiros cursos concebidos por tal instituição foram os de engenharia industrial, engenharia civil, engenharia agrícola, e o curso anexo de artes mecânicas.

Nesta instituição, a disciplina de cálculo também esteve presente, e a literatura adotada consistia em duas obras francesas: os *Premier éléments de calcul infinitesimalde* (1884), de Hippolyte Sonnet, e o tratado *Cours des Mathematiques* (1885), de Charles Comberousse. Ambas as obras apresentam a noção intuitiva de limite, e tratam o cálculo de forma elementar e prática. De acordo com Pereira (2017), a fundamentação do cálculo diferencial seguia um modelo semelhante ao que já havia sido estabelecido na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, através dos métodos de Newton, Leibniz e Lagrange. E, além disso, a maior parte cálculo integral costumava-se ser dedicado às suas técnicas e aplicações. O caderno de um ex-aluno da Escola Politécnica de São Paulo, de 1904, encontrado em estado conservado, evidencia o uso do livro do Hyppolite Sonnet pelo professor na sua disciplina (ver Pereira 2017, p. 319).

Portanto, os primeiros indícios de ensino de cálculo surgem no Brasil no âmbito da formação de engenheiros, e apenas no século XX que vemos esse estudo se ampliar para outras áreas.

#### 4.1.2. As primeiras Universidades

A Universidade de São Paulo (USP) foi criada em 1934, por decreto estadual, e surge a partir da reunião de outras instituições já existentes, dentre elas a Faculdade de Medicina, Faculdade de Direito, e a própria Escola Politécnica de São Paulo. Nesse contexto, surge a recém-criada Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL), onde é criado um departamento de matemática, e o primeiro curso de matemática em nível superior dissociado das escolas de engenharia do país. Foi através desse curso que surgiram os primeiros matemáticos brasileiros, e tal instituição tornou-se referência no ensino de matemática.

Sobretudo, para o ensino deste novo curso, foram contratados professores franceses, italianos, portugueses. Cavalari (2012) em seu artigo, descreve detalhadamente a trajetória desse curso de matemática criado na USP, bem como os professores que lecionaram no departamento e os conteúdos ensinados ao longo do curso. A autora também destaca a influência e atuação dos professores italianos como fundamental para os primeiros anos do curso de matemática na FFCL, tendo em vista que eles contribuíram para a criação da biblioteca deste curso, como um incentivo de iniciação à pesquisa.

Uma primeira tentativa de organização universitária já havia sido implementada no Brasil, desde 1920, a partir do decreto que criou a Universidade do Rio de Janeiro (URJ). Tal instituição surgiu como uma reunião de escolas superiores existentes na cidade, tais como a Escola Politécnica do Rio de Janeiro, Faculdade de Medicina e a Faculdade de Direito. No entanto, essa justaposição de instituições não foi o que configurou uma aproximação a qual almejava-se para a existência de uma universidade, e as mesmas continuaram a atuar de maneira isolada. A universidade existia apenas na letra da lei (OLIVEIRA, 2016). Mas essa primeira tentativa, embora artificial, deu origem anos mais tarde a uma universidade de fato. Em 1937, a URJ através de um decreto-lei torna-se Universidade do Brasil (UB).

Em 1935, surge a Universidade do Distrito Federal (UDF), sancionada por decreto estadual. No entanto, a proposta apesar de promissora, durou poucos anos. Em 1939, a UDF foi extinta e incorporada à Universidade do Brasil, quando foi criada a Faculdade Nacional de Filosofia, Ciências e Letras (FNFil), como uma nova unidade da UB.

Medeiros (1996) nos informa que a FNFil era constituída dos cursos de Matemática, Física, Química, História Natural, Ciências Sociais, Letras Clássicas, Letras Neolatinas, Letras Anglo Germânicas, Filosofia e Pedagogia. O Departamento de Matemática era composto pelas cátedras de Análise Matemática e Superior, Geometria, Complementos de Matemática (MEDEIROS, 1996, apud PEREIRA, 2017, p.214).

A Universidade do Brasil, após à reforma universitária, passa a denominar-se Universidade Federal do Rio de Janeiro. Em 1969, a Escola de Minas é incorporada em conjunto com a Escola de Farmácia na Universidade Federal de Ouro Preto.

### **4.1.3. As disciplinas de cálculo e análise nas Universidades**

Após a fundação das primeiras universidades, em particular, a USP e UDF, vemos a introdução dos cursos de matemática no país, e a criação dos primeiros núcleos de pesquisa matemática se estabelecendo. Em meio a esse novo ambiente, inicia-se o processo de contratação dos professores de matemática que atuavam nessas instituições. No caso da USP, boa parte dos contratados foram pesquisadores de origem francesa, italiana, e portuguesa, e em alguns casos, brasileiros com especialização no exterior.

Nesse contexto, devemos destacar dois professores que desempenharam enormes contribuições para a estruturação do curso de matemática da FFCL em sua fase inicial, sendo eles o italiano Luigi Fantappiè (1901-1956), e brasileiro Omar Catunda (1909-1986). Fantappiè estudou matemática na Universidade de Pisa, em 1922, e foi chamado como o primeiro professor de análise da USP, junto com mais professores de países europeus, visto que ainda não haviam docentes brasileiros capazes para assumir as lições neste novo nível de ensino superior. Além disso, Fantappiè foi responsável por disseminar teorias modernas da álgebra, geometria e análise no Brasil, e obteve apoio de professores como Catunda, seu assistente na cadeira de análise da USP, formado pela Escola Politécnica de São Paulo, em 1930.

O trabalho de Fantappiè na USP é mencionado em diversas obras que retratam a sua importância para o ensino de matemática na nova universidade, e sua atuação na FFCL obteve resultados frutíferos. Nesse contexto, é possível constatar a influência italiana que a matemática, a disciplina de análise, e conseqüentemente também de cálculo em específico, obtiveram a partir da atuação dos professores italianos, como o caso de Fantappiè. E como consequência, a literatura adotada em sua maioria também era italiana.

Um dos principais reflexos dessa influência pode ser notado no livro "*O curso de Análise Matemática*" publicado por Omar Catunda, em 1962. E. B. Lima (2006) realizou uma pesquisa aprofundada sobre este livro e revela que o início de sua construção ocorre a partir de 1940, momento em que Catunda assume a cadeira de análise matemática na USP, logo após o retorno de Fantappiè à Itália, em 1939 (E. B. LIMA, 2006, p.94). Além disso, é importante destacar que a construção que deu origem ao livro, publicado em 1962, consistia em um conjunto de apostilas que adaptavam a literatura de Fantappiè, em italiano, para o português. Devido a relação profissional que ambos obtiveram no período em que trabalharam juntos,



Catunda obteve fortes influências do método de ensino de Fantappiè e essas evidências estão presentes em seu livro.

Desse convívio direto com Fantappiè, que durou cerca de cinco anos, Omar Catunda pôde construir uma base sólida de conhecimentos sobre matemática moderna, em particular da análise matemática, inclusive facultando-o a publicar o primeiro livro brasileiro de análise. Esse fator, consubstanciado com a caracterização que Omar Catunda dava à educação, qual seja, de que seria através dela que se conseguiria a autonomia do desenvolvimento social brasileiro, fez de Fantappiè, no nosso discurso, como o matemático que mais influenciou a formação matemática de Omar Catunda (E. B. LIMA, 2006, p. 132).

Além disso, E. B. Lima (2006) também relata que vários autores como Ubiratan D'Ambrosio e Elza Furtado Gomide mencionam o livro de Catunda como o primeiro livro de análise escrito por um brasileiro, e que, além disso, também obteve um certo destaque, sendo amplamente utilizado em instituições de nível superior no Brasil em um determinado período (E. B. LIMA, 2006, p. 16). Mais adiante, discutiremos sobre o fato que atribui à Catunda, a primeira produção de análise matemática de origem brasileira.

Em paralelo ao que fora destacado na USP, a situação no Rio de Janeiro a qual devemos relatar parte do curso de matemática oferecido pela Universidade do Distrito Federal, onde tivemos o brasileiro Lélío Gama (1892-1981) como ocupante da cátedra de análise. Sua atuação nesta Universidade ocorre até a sua extinção, em 1939.

Por sua vez, a recém-criada FNFi também ofereceu um curso matemático, e seguiu a tendência já observada na FFCL, da contratação de professores europeus, sobretudo, italianos. Dentre eles podemos destacar Gabrielle Mammana (1893-1942). Um dos assistentes de Mammana, fora o brasileiro José Abdelhay (1917-1996), que havia se formado pela FFCL, em São Paulo. Logo após a volta de Mammana para a Itália, Abdelhay assume a cátedra de análise da FNFi.

Nesse ponto, podemos ver claramente uma confluência no contexto da FNFi, visto que o trabalho iniciado por Lélío Gama, procurando trazer um novo olhar e uma nova atitude em termos de pesquisa matemática, conflui-se com a influência estabelecida pela escola italiana (que já havia sido instituída na USP), inicialmente por meio do trabalho de Mammana e posteriormente por meio da atuação de Abdelhay, que acabava de ser formado no contexto da escola italiana na USP (PEREIRA, 2017, p.219).

Dessa forma, no tocante referente à disciplina de análise, o que vemos nos cursos de matemática até 1960, é a presença marcante dos modelos de ensino europeu, sobretudo o italiano e o francês, e até mesmo a reprodução de traduções de seus livros. Devido a essa influência notada nos cursos em sua fase inicial, o ensino de cálculo se caracterizou por assumir

um estilo mais rigoroso, em conjunto com a análise matemática, pois este era o modelo difundido nos cursos de matemática da Europa.

Apesar desses fatores evidenciados, Ávila (2002) nos revela que a partir de 1960 essa situação começa a mudar, através da chegada dos livros americanos que rapidamente tomaram lugar dos livros europeus. No âmbito da disciplina de cálculo, esse período de transição entre as abordagens é o que caracteriza a separação entre cálculo e análise no ensino superior em curso de matemática.

Outro fator importante desse novo reflexo americano no ensino de cálculo, pode ser notado na Universidade do Brasil, através da versão traduzida de uma obra apresentada por José Abdelhay, que admite o cálculo sobre essa perspectiva americana, a saber, os *Elementos de Cálculo diferencial e Integral* dos autores americanos Granville, Smith e Longley.

#### **4.1.4. Reforma Universitária de 1968**

Ao final da década de 1960 e logo após a primeira versão da LDB de 1961, as universidades constituídas no Brasil passaram por um movimento de reforma que foi instituído pela Lei nº 5.540, de 28 de novembro de 1968, também conhecida como Lei da Reforma Universitária, que aplicou no ensino a estrutura dos Estados Unidos como um novo padrão. Consistiu em um conjunto de mudanças estruturais que propunha expandir as universidades, com o foco maior na pós-graduação. Uma das principais mudanças foi a extinção do sistema de cadeiras e cátedras. Foram introduzidos os departamentos, como por exemplo, o Instituto de Matemática na UFRJ e o Instituto de Matemática e Estatística (IME) na USP. Foi introduzido a dedicação exclusiva para os docentes; assim, os docentes foram contratados para atuar em só uma instituição - eles não foram mais obrigados de procurar uma segunda ou terceira posição em outra instituição a fim de ter um salário decente.

O mais pertinente para essa dissertação foi o estabelecimento da pós-graduação. Embora já a LDB introduziu a pós-graduação, mas por falta de experiência e de recursos, só em alguns lugares o mestrado foi já introduzido - por exemplo, no IMPA e no COPPE. No entanto, com a Lei de 1968, a estruturação em mestrado e doutorado, segundo padrões dos EUA, tornou-se mais geral. Para os departamentos de matemática e os cursos básicos deles de cálculo infinitesimal em ambos níveis, aconteceu - em um processo aparentemente geral para o Brasil, mas não ainda investigado - a conceitualização da disciplina como “cálculo” na graduação e como “análise matemática” no mestrado. No Capítulo 8, esse trabalho há de analisar livros-texto característicos para esses dois novos níveis.

## **CAPÍTULO 5. HISTÓRIA DO ENSINO DE CÁLCULO NO BRASIL: ENSINO SECUNDÁRIO**

O sistema educacional brasileiro passou por um longo período de evolução desde a chegada dos portugueses até se constituir e transformar-se no ensino tal como conhecemos atualmente. Esse processo de mudanças foi fruto de longos conflitos e tentativas de se estabelecer uma educação consoante com as necessidades de cada época, mas que, sobretudo, também compõem a história dos que lutaram para uma melhoria no ensino. Essas transformações ocorreram de forma paulatina entre as diversas naturezas de ordem operacional, financeira, política, e sob influência de outros países.

No âmbito referente ao ensino de cálculo, tais mudanças podem ser notadas através das vertentes por onde esse ensino se estabeleceu. Com isso, temos o trabalho de analisar esses ambientes onde a disciplina de cálculo esteve presente, para poder traçar um panorama acerca desse estudo no país.

Dentre eles, podemos citar como o mais comum, aquele que se encontra nos currículos dos cursos superiores voltados para formação científica e profissional. Além disso, encontramos essa disciplina presente em outro tipo de instituição, cujo objetivo principal também era o de formar profissionais, mais em um nível diferente do anterior, as chamadas escolas técnico-militares. Outra categoria que faz parte desse quadro, são as escolas de ensino secundário, que sob impacto de algumas reformas, fizeram o cálculo ser ensinado nesses espaços educacionais em determinados períodos.

Com isso, buscamos nas páginas subsequentes, relatar alguns indícios importantes da história do ensino de matemática nessas instituições, para em seguida entender melhor o papel que a disciplina cálculo teve em cada uma delas.

### **5.1. As origens da educação secundária**

O Brasil durante a fase colonial teve o cenário educacional dominado pelos Jesuítas, por cerca de duzentos anos, até a sua expulsão, em 1759. As escolas jesuítas que foram construídas nesse período possuíam uma grande ênfase na formação religiosa e humanística. No entanto, de acordo com Carvalho (1996), falar do ensino secundário no Brasil do século XIX até 1930, é referir-se obrigatoriamente ao Colégio Pedro II, instituição a qual tornou-se o padrão de ensino para todo o país, conforme veremos mais adiante.

Durante o século XIX, entre as décadas e 20 e 30, surgiram algumas instituições de ensino nos moldes dos liceus europeus, que refletem a influência francesa que a educação

brasileira recebeu. Desses liceus, podemos destacar o Liceu Provincial de Pernambuco, criado em 1826, o Liceu da Bahia, constituído em 1836, e seguido após um ano pelo Colégio Pedro II.

De fato, se excluirmos a criação do Liceu Provincial de Pernambuco, em 1826, que permanece uma iniciativa excepcional, somente catorze anos depois da Independência inicia-se a fase de ação mais ampla dos poderes públicos no sentido da criação de estabelecimentos de ensino secundário. De 1836 é a lei provincial de criação do Liceu da Bahia, e do ano seguinte o decreto regencial de criação do Colégio Pedro II. Ambos surgem como reunião, organização e complementação de aulas ou cadeiras preexistentes, em ambos confluem a tradição do ensino clássico, representada pela predominância acentuada do latim, e a tendência inovadora que responde à exigência de novos estudos científicos e de línguas modernas que constituíssem preparação aos estudos de nível superior de qualquer especialidade (SILVA, 1969, p.191).

Tais instituições representam agentes importantes para caracterização do ensino básico, e destacamos o protagonismo do Colégio Pedro II nesse quesito, onde se inicia, nominalmente, o ensino secundário, com aspectos caracterizado pelo enciclopedismo.

Carvalho e Dassie (2012, p. 501) nos trazem dois pontos com relação ao ensino secundário dessa época. O primeiro deles é conforme ao que foi apresentado por Silva (1969), que assume a existência de uma tentativa de conciliar a tradição clássica de educação baseada nas humanidades e na língua latina, e a crescente demanda por novos estudos científicos e outros idiomas, pois estes tornaram-se necessários para os estudos pós-secundários. O segundo ponto menciona Cardoso (2002, p. 57), que afirma existir um caráter duplo no ensino brasileiro, um propedêutico, e o outro caracterizado pelo seu amplo alcance, através da tentativa preservar uma parte da antiga tradição educacional humanística herdada dos Jesuítas.

No entanto, as raízes iniciais desse nível de ensino foram se encontrando em meio da possibilidade de preencher a lacuna referente a preparação aos cursos superiores. Mais adiante, veremos que apenas na República, que a evolução do ensino secundário começa a ganhar força em sentido da construção de uma função formativa, reconhecendo como finalidade dessa etapa, não apenas como um mero ritual de passagem ao nível superior.

### **5.1.1. Colégio Pedro II**

A constituição do colégio Pedro II, em 1837, representa um marco importante para a história da educação brasileira, pois a partir daí é que se torna possível estabelecer um sistema escolar organizado, mediante uma instituição pública e com currículo bem definido. Miorim (1998), citada por Carvalho e Dassie (2012), relata que com a criação do Pedro II, começa a existir pela primeira vez:

(...) um plano gradativo e integral de estudos para o ensino secundário, no qual os alunos fossem promovidos ano a ano, e não, como antes, por disciplinas e

conquistassem, ao final do curso, o bacharelado, o que lhes possibilitou [a partir de 1843] para se inscrever em estabelecimentos de ensino superior, sem necessidade de concurso. Nesse plano de estudos, que seguia os modelos franceses, as ênfases eram os clássicos e as humanidades (MIORIM 1998, p.87, apud CARVALHO; DASSIE, 2012, p.502).

A matemática presente nos currículos do Colégio Pedro II teve uma grande influência para o estabelecer um lugar estável para a matemática no ensino secundário brasileiro. No período de 1837 até 1889, os estudos de matemática eram divididos entre aritmética, álgebra, geometria e trigonometria. Tal instituição foi fundamental para a caracterização do ensino organizado, e se torna importante para o nosso estudo com relação à disciplina de cálculo, pois conforme veremos ele fez parte do currículo durante algumas fases do século XIX.

### 5.1.2. Reforma Benjamin Constant

Em 1889, ocorre a proclamação da República, e o Brasil atravessa uma fase de grandes mudanças, tanto sociais e econômicas, quanto educacionais.

A chamada reforma Benjamin Constant se trata de um movimento liderado pelo, até então, Ministro de Educação Benjamin Constant, que seguia ideias positivistas e buscava a introdução de disciplinas científicas no currículo. O ensino secundário, que durante o período Imperial havia quase que se reduzido aos preparatórios, foi o mais atingido pela reforma, e dessa forma houve uma ruptura na tradição clássico-humanística. Martins (1984) utiliza como referência o relato de Evaldo e outros (1977, p.94) sobre tal mudança:

(...) de qualquer modo a Reforma Benjamin Constant rompe com a tradição clássico-humanista e através do exame de madureza seu ponto alto procura tirar do ensino secundário o caráter meramente propedêutico. Assim, imprime novos rumos ao ensino brasileiro, impossibilitando uma volta ao passado (FEREIRA; et al, 1977, p.94, apud MARTINS, 1984, p.69).

Tal movimento de reforma, representava uma tentativa de garantir a função de um ensino formativo no âmbito da educação secundária. No entanto, a Reforma Benjamin Constant eleva a um grau exagerado na tendência do enciclopedismo, que se apresenta como uma alternativa à formação classicista. A proposta principal dessa reforma, visava a implementação de sete anos de estudos, construídos sobre os princípios fundamentais das ciências. Dessa forma, a proposta do novo currículo foi a seguinte:

*1º ano* – aritmética (estudo completo) e álgebra elementar (estudo completo); *2º ano* – geometria preliminar, trigonometria retilínea, geometria especial (estudo perfunctório das seções cônicas, da concóide, da *limaçon* de Pascal e da espiral de Arquimedes); *3º ano* – geometria geral e seu complemento algébrico, cálculo diferencial e integral (limitado ao conhecimento das teorias rigorosamente indispensáveis ao estudo da mecânica geral propriamente dita); *4º ano* – 1º período:

mecânica geral (limitada às teorias gerais de equilíbrio e movimento dos sólidos invariáveis e precedida das noções rigorosamente indispensáveis do cálculo das variações); 2º período: astronomia (precedida da trigonometria esférica), geometria celeste e noções sucintas de mecânica celeste (gravitação universal); 5º ano – física geral e química geral; 6º ano – biologia; 7º ano – sociologia e moral, e noções de direito pátrio e de economia política (SILVA, 1969, p. 221, grifo nosso).

E em conjunto com esses conteúdos explicitados, haviam ainda no currículo proposto por tal reforma, o estudo do português, e outras línguas como o latim, francês, inglês e alemão, bem como a geografia, história do Brasil, desenho e música. Esse ideal reformador tão imensamente carregado é o que tornou sua aplicação como inexecutável, de acordo com Silva (1969).

Mesmo esta reforma tendo durado poucos anos, uma parte importante que devemos destacar desse movimento, é a introdução do cálculo infinitesimal como componente curricular das escolas secundárias. A disciplina de cálculo diferencial e integral foi ensinada em conjunto com a geometria analítica no período entre 1891 a 1901, que apesar de ter apresentado resultados satisfatórios, foi retirada do currículo (BEKE, 1914, p.40). Esse fato, referente ao ensino cálculo, permaneceu inalterado até 1929, quando cálculo diferencial reaparece no sexto do curso complementar do Colégio Pedro II, voltados aos alunos que visavam passar no vestibular das escolas militares e politécnica (CARVALHO, 1996, p.72).

O modelo de ensino secundário atingido através da reforma deixada por Benjamin Constant, permaneceu apenas até 1897, quando o mesmo já havia falecido, e não encontrara alguém que desse continuidade aos seus esforços. Contudo, em 1898, o Ministro Amaro Cavalcanti, no Regulamento do Ginásio Nacional (Colégio Pedro II), reduziu o esquema de Benjamin Constant, propondo para o ensino secundário dois tipos de cursos: um curso “propedêutico ou realista” com duração de 6 anos e um curso “clássico ou humanista” realizado em 7 anos (MARTINS, 1984, p.73).

### **5.1.3. Movimento Internacional de Reforma do ensino de matemática no Brasil**

Dentre todas as mudanças que ocorreram no ensino secundário no Brasil, um movimento começa a ganhar espaço no país, sendo esse de origem internacional. Apesar desse movimento, conforme expomos, ter surgido no início de século XX, ele encontra lugar no Brasil apenas nos anos finais da década 20, através da atuação do professor de matemática Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II. Roxo ficou conhecido como sendo um dos grandes defensores do ideário de reforma que Klein apresentou através do IMUK, acerca de suas ideias de modernização do ensino de matemática.

Dessa forma, Roxo também buscou defender a inclusão no ensino secundário das noções de função, de geometria analítica e de cálculo infinitesimal, cuja introdução já havia tentado implementar desde 1928 no Pedro II. Além disso, o papel de Roxo foi essencial no cenário das mudanças causadas pelas reformas do século XX, pois ele contribuiu para elaboração dos programas de matemática.

#### 5.1.4. Reforma Campos

A partir de 1931, novos avanços são dados em direção a um ensino secundário bem estruturado, e com isso temos a Reforma Campos, que se caracteriza como uma das mais importantes tentativas de se organizar o sistema educacional brasileiro.

Tal reforma foi colocada em prática pelo ministro da Educação e Saúde, Francisco Campos, nomeado ao cargo durante o governo de Getúlio Vargas (1930-1945). Dentre os objetivos da Reforma, o principal deles era o de ampliar a finalidade do curso secundário, que durante muito tempo havia se resumido aos cursos propedêuticos, para lhe atribuir uma nova finalidade. Conforme relatamos anteriormente, essa também era uma das preocupações presente na reforma Benjamin Constant, mas que não obteve tanto sucesso, na prática.

Nesse sentido, a reforma Campos propôs alteração da duração do ensino secundário, que voltou a configurar sete anos, em dois ciclos, a serem divididos entre: um curso fundamental de cinco anos, e um curso complementar de 2 anos, de caráter pré-vocacional de preparação para as escolas superiores. Dessa forma, esse movimento representa uma tentativa de conciliar as duas funções do ensino secundário, sendo o primeiro deles, nas palavras de Silva (1969) a “formação do homem para todos os grandes setores da atividade nacional”, e o segundo com a finalidade de “preparar para os cursos superiores”.

O Colégio Pedro II por sua vez, desempenhou um papel fundamental nesse contexto, pois a partir de seus programas de ensino foram formulados os programas oficiais válidos para todo o país. (CARVALHO, 1996, p.21). Euclides Roxo, sabendo a importância de sua posição no âmbito da reforma educacional, utilizou a oportunidade como forma de ampliar para o resto do país, as inovações que vinha implementando desde 1928, no Pedro II, com relação aos programas de matemática. Vejamos, a seguir, o currículo de 1934:

Segunda Série (3 horas)

(...)

II. Aritmética e Álgebra

Noção de função de uma variável independente. Representação gráfica. Estudos das funções  $y = ax$  e  $y = \frac{a}{x}$ ; exemplos.

(...)

Representação gráfica de função linear de uma variável. Resolução gráfica de um sistema de duas equações com duas incógnitas.

(...)

Terceira Série (3 horas)

Aritmética e Álgebra

(...)

Estudo das funções  $y = x^m$ ,  $y = \frac{1}{x^m}$  e  $y = (x)^{\frac{1}{m}}$ ;

Quarta Série (3 horas)

Aritmética e Álgebra

(...)

Estudo da função exponencial

(...)

Quarta Série (3 horas)

Aritmética, Álgebra e Geometria

(...)

Derivada de um polinômio inteiro em  $x$ .

Noção de limite. Derivada de  $(x)^{\frac{1}{2}}$ . Derivada de seno  $x$ , co-seno  $x$ , tangente de  $x$  e cotangente de  $x$ .

Interpretação geométrica da noção de derivada. Aplicação da noção de derivada ao estudo da variação de algumas funções simples.

Processos elementares de desenvolvimento em série; convergência de uma série.

Desenvolvimento em série do seno, co-seno e tangente.

Problema inverso da derivação. Primitivas imediatas. Aplicação ao cálculo de certas áreas.

(...)

Sexto Ano (Curso complementar para os estudantes que se destinarem às escolas militares e politécnica) (CARVALHO, 1996, p. 76).

Conforme já fora exposto, Roxo era um defensor das ideias de Klein com relação à renovação do ensino de matemática, e nesse momento vemos esse ideário começando a ser colocado em prática no Brasil. Roxo almejava acabar com as subdivisões entre os diferentes ramos da matemática, que eram estudados de forma isolada, interligando-os em uma única disciplina: a matemática. A chave para isso seria a reestruturação do currículo através das noções de função e introdução ao cálculo diferencial e integral, e, portanto, como parte da reforma, vemos a reintrodução dos elementos do cálculo infinitesimal no currículo regular da escola secundária.

### 5.1.5. Reforma Capanema

Em 1934, o cargo de Ministro da Educação e Saúde passa a ser ocupado por Gustavo Capanema, e em 1942 temos mais uma reforma importante, a chamada Reforma Capanema, instituída durante a ditadura de Getúlio Vargas. O Ministro Capanema conseguiu instituir no país, uma reforma que obteve longo alcance, mesmo com o Brasil passando por um momento político delicado.

Tal reforma buscou conciliar duas vertentes que haviam se caracterizado em torno do ensino secundário: a clássica ou humanista e a realista ou científica (MARTINS, 1984, p. 180).



E com isso, temos uma nova divisão para o ensino médio que se constitui em dois ciclos: O primeiro era um curso ginásial, obrigatório para todos os alunos, e o segundo um curso colegial, onde era possível optar por uma maior ênfase em ciências, através do curso científico, ou então em humanidades, com um curso clássico.

Sobretudo, esta reforma age como um representante mais fidedigno e completo sobre o ensino secundário no sentido de que:

A definição completa e acabada do ensino secundário como um tipo específico de ensino, perfeitamente caracterizado por seus objetivos, seu currículo e sua organização geral (SILVA, 1969, p.294).

Silva ainda acrescenta que:

O que constitui o caráter específico do ensino secundário é sua função de formar, nos adolescentes, uma sólida cultura geral, marcada pelo cultivo a um tempo das humanidades antigas e das humanidades modernas, e bem assim de nêles acentuar e levar a consciência patriótica e a consciência humanística (SILVA, 1969, p.295).

Com essa reforma, os elementos do cálculo permaneceram presentes no currículo das escolas secundárias, e faziam parte do Programa de Matemática do Curso Científico.

Programa de Matemática do Curso Científico

Primeira Série

(...)

Álgebra

Unidade IV – Os polinômios

2- Noção de variável e de função; variação do trinômio do segundo grau. Representação gráfica.

3- Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos.

(...)

Segunda Série

Unidade 1 – A função exponencial

(...)

2- Noção de função exponencial e de sua função inversa.

(...)

Terceira Série

Álgebra

Unidade II – Funções

1- Noção de função de variável rela.

2- Representação cartesiana.

3- Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidades de uma função racional.

Unidade III – Derivadas

1- Definição; interpretação geométrica e cinemática.

2- Cálculo das derivadas.

3- Derivação das funções elementares.

4- Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples (CARVALHO, 1996, p.77).

Esse foi o modelo adotado durante a implementação da reforma Capanema, que manteve o cálculo nos programas regulares dos cursos científicos, sem muitas alterações, até 1961, ano em que é sancionada a primeira versão da LDB.

## **5.2. Criação da Lei de Diretrizes e Bases (LDB), 1961**

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) surge a partir do texto promulgado em dezembro de 1961, pelo então presidente da república, João Goulart, sob o nº 4.024/1961. Tal documento consiste em um conjunto de leis que organizam e definem todos os princípios que regem a educação no país, desde suas finalidades administrativas até a estrutura e organização do ensino. Essa primeira proposta efetiva da LDB surgiu após longos anos de debates políticos, e foi seguida por novas reformulações em 1971, e a mais atual em 1996.

A LDB/1961 é considerada a mais importante dentre as impactantes reformas do sistema educacional brasileiro ocorridas ao longo do século XX. Isso se deve, principalmente, pelo fato de pela primeira vez no país uma única lei tratar de todos os níveis e ramos do ensino. Além disso, esse documento traz o diferencial de ter descentralizado alguns princípios de organização do currículo escolar, concedendo aos Estados da federação e suas escolas uma moderada, porém importante, flexibilidade para definir currículos mais ajustados às peculiaridades regionais (QUEIROZ; HOUSOME, 2019, p.5).

A partir dessa legislação o sistema de ensino passa a ser organizados em três graus de educação, sendo eles: o primário, médio e superior. A educação de grau primário era composta pelo ensino pré-primário e o ensino primário, sendo este último obrigatório a partir dos sete anos, e ministrado em pelo menos quatro séries anuais. A educação de grau médio, prosseguia à escola primária, e era voltada para à formação do adolescente. Nesse sentido, para o ensino médio ficou estabelecido uma carreira de estudos de no mínimo 7 anos - divididos em dois ciclos, o ginásial (quatro anos) e o colegial (três anos) - e passou a abranger os cursos secundários, técnicos e de formação de professores para a educação primária. Com relação às disciplinas ministradas, a LDB/1961 garante que:

Art. 35. Em cada ciclo haverá disciplinas e práticas educativas, obrigatórias e optativas.

§ 1º Ao Conselho Federal de Educação compete indicar, para todos os sistemas de ensino médio, até cinco disciplinas obrigatórias, cabendo aos conselhos estaduais de educação completar o seu número e relacionar as de caráter optativo que podem ser adotadas pelos estabelecimentos de ensino.

§ 2º O Conselho Federal e os conselhos estaduais, ao relacionarem as disciplinas obrigatórias, na forma do parágrafo anterior, definirão a amplitude e o desenvolvimento dos seus programas em cada ciclo.

§ 3º O currículo das duas primeiras séries do 1º ciclo será comum a todos os cursos de ensino médio no que se refere às matérias obrigatórias (LDB, 1961).

Portanto, era dever do Conselho Federal de Educação a competência de indicar as disciplinas obrigatórias de todo o ensino médio, e em conjunto com os conselhos estaduais que deveriam completar os seus respectivos currículos com as disciplinas optativas.

No período compreendido antes da LDB de 1961, a organização curricular das escolas era estabelecida por meio de decretos-leis, que fixavam os conteúdos obrigatórios a serem ministrados nas diversas etapas da educação, como por exemplo, nas reformas Campos e Capanema. Esses decretos-leis detalhavam o que deveria ser ensinado em cada disciplina e série. Dessa forma, com a criação da LDB, esse modelo foi substituído por uma abordagem mais flexível, e papel do governo federal foi reduzido a definir as disciplinas que deveriam ser ensinados nos vários tipos de escola e não mais os conteúdos.

Além disso, o ingresso no 1º ciclo do ensino médio dependia de um exame de admissão que garantisse um desempenho satisfatório do ensino primário. Com a LDB, o ensino técnico de grau médio passa a ser dividido entre industrial, agrícola e comercial.

Com relação ao ensino de grau superior, a LDB/61 afirma que este tem por principal objetivo a pesquisa, o desenvolvimento das ciências, letras e artes, bem como a formação de profissionais de nível universitário. A este tipo de educação dedicam-se estabelecimentos que sejam agrupados ou não em universidades, e através da cooperação de institutos de pesquisa e centros de treinamento profissional.

Art. 69. Nos estabelecimentos de ensino superior podem ser ministrados os seguintes cursos:

- a) de graduação, abertos à matrícula de candidatos que hajam concluído o ciclo colegial ou equivalente, e obtido classificação em concurso de habilitação;
- b) de pós-graduação, abertos a matrícula de candidatos que hajam concluído o curso de graduação e obtido o respectivo diploma;
- c) de especialização, aperfeiçoamento e extensão, ou quaisquer outros, a juízo do respectivo instituto de ensino abertos a candidatos com o preparo e os requisitos que vierem a ser exigidos (LDB, 1961).

Com a descentralização permitida pela LDB, o ensino de cálculo é retirado dos programas das escolas secundárias, deixando de ser obrigatório. E, até mesmo depois das novas legislações educacionais com os documentos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a exclusão dos elementos do cálculo permaneceu.

## CAPÍTULO 6. ANÁLISES DOS LIVROS-TEXTOS: ENSINO SECUNDÁRIO E TÉCNICO

### 6.1. Livros brasileiros destinados ao ensino secundário

Buscamos nesse tópico trazer as análises de algumas obras que fizeram parte do processo de inclusão do ensino de cálculo nas escolas do ensino secundário brasileiro. Essas análises são peças-chaves da nossa pesquisa, pois é a partir delas que podemos identificar a maneira como, de certa forma, esse ensino acontecia na prática, e melhor compreender como foi o processo de transição de ensino entre as reformas.

Nesse sentido, essa parte do texto busca focar no caso do Brasil, apresentado três livros didáticos utilizados no seu ensino secundário. Dentre eles, temos o “Curso de Matemática” dos autores Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza. Trata-se de um livro de matemática voltado para o 5º ano das escolas secundárias que esteve presente durante a Reforma Campos. Acreditamos que o estudo de tal obra é relevante para nosso trabalho, justamente pelo fato de ser uma obra de Euclides Roxo, professor de matemática do Colégio Pedro II, que era um grande percussor das ideias do movimento de reforma proposto por Félix Klein. Além disso, tal livro representa uma das primeiras tentativas de inclusão dos elementos do cálculo nessas instituições.

O segundo livro-texto analisado, também é de autoria do professor Euclides Roxo, em colaboração com outros autores, sendo eles: Haroldo Cunha, Roberto Peixoto e Dacorso Netto. Tal livro denomina-se como “Matemática 2º Ciclo”, e faz parte de uma coleção de três volumes, voltados para o ensino secundário que vigorou durante a Reforma Gustavo Capanema. Dessa forma, a unidade do livro analisado refere-se ao estudo da 3ª série, onde esteve presente os elementos do cálculo.

Na última análise trazemos o livro “Curso de Matemática” do professor de matemática Jairo Manoel Bezerra. Sua obra é apresentada em um volume único, cujo foco principal são os primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos clássico e científico das escolas secundárias. Esse é um livro que chamou nossa atenção pelo fato de apresentar os elementos do cálculo diferencial em uma proposta de ensino que foi posterior à criação da LDB, pela qual tais conteúdos não configuravam mais parte dos currículos do ensino secundário.

Também devemos ressaltar que, as análises feitas não pretendem classificar os livros em “bons” ou “ruins”, mais sim em verificar as diversas formas como os elementos do cálculo estiveram presentes nessas escolas, identificando as maneiras de se apresentar tais conteúdos, bem como os focos de ensino.

### 6.1.1. Análise de um livro didático utilizado durante a Reforma Campos

Apresentaremos a seguir uma análise do livro “*Curso de Matemática 5º Ano*”, sob autoria dos professores Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza. Tal livro torna-se importante para nosso estudo, tendo em vista que este apresenta os elementos do cálculo que foram inseridos durante a Reforma Campos, nos currículos das escolas secundárias. Dessa forma, a análise de tal obra, nos dá pontos-chaves referentes ao aspecto desse ensino nessas instituições.

A versão analisada refere-se à 4.^a edição, publicada em 1940, pela Livraria Francisco Alves, com cerca de 328 páginas, é voltada para o ensino de matemática referente ao 5º ano das escolas secundárias. Sua estrutura é dividida entre vinte e três capítulos, onde a maior parte destina-se aos elementos do nosso objeto de estudo. Além disso, o livro também possui partes destinadas à trigonometria, geometria e suas relações com o cálculo.

Uma característica fundamental deste livro é o seu imenso repertório de exemplos integrados e exercícios propostos com suas respectivas respostas, que propõem ao aluno uma intensa prática de utilizar todos os conteúdos apresentados, relacionando-os uns com os outros. Além disso, os autores também buscam trazer diversas notas referentes aos conceitos, nomenclaturas e ideias, que associam o estudo com a história da matemática. Tais notas, aparecerem na maioria das vezes no rodapé e são um ponto-chave da obra, pois utilizam diversas referências muito renomadas.

Nos oito primeiros capítulos do livro, temos conteúdos referentes à trigonometria e as noções de análise combinatória. A partir do capítulo IX, inicia-se a introdução dos elementos do cálculo, que seguem a tradicional ordem de apresentação dos conceitos, tendo as noções preliminares sobre limite, seguida mais adiante pelo conceito de derivada, e mais tarde o de integral.

Para o conceito de limite, os autores destinam três capítulos, com cerca de 60 páginas, onde podemos ver uma preocupação em detalhar desde os conceitos mais simples, até os mais complexos. A construção do conceito de limite ocorre em três etapas: noção geral, limite de uma variável e limite de uma função. A noção preliminar de limite é apresentada da seguinte forma:

Consideremos uma variável  $x$  e uma quantidade constante  $A$ . Suponhamos que se atribuam a  $x$  uma infinidade de valores, cada vez mais próximos de  $A$ , de modo que a diferença  $A - x$  possa tornar-se e conservar-se, em valor absoluto, menor do que qualquer quantidade dada. Dizemos, nesse caso, que  $x$ , *tende para*  $A$  ou que  $x$  *tem por limite*  $A$ , o que indicamos simbolicamente escrevendo:

$$\lim x = A$$

(ROXO; THIRÉ; MELLO E SOUZA, 1940, p.105).

Nessa definição podemos ver a ideia fundamental do conceito de limite, porém sem a definição formal tal como conhecemos com  $\varepsilon$  e  $\delta$ . Essas ideias são reapresentadas mais adiante, mas sem o uso de demonstrações. Nesse sentido, os autores buscam trazer três exemplos distintos, onde a matemática se relaciona com tais ideias, conforme apresentado. Os autores ainda discutem a importância do estudo da teoria de limites para a construção de diversos conceitos em matemática.

A definição de limite de uma variável, aparece pela primeira vez em forma retórica como sendo:

Chama-se limite, de uma quantidade variável,  $x$ , a uma constante da qual a variável se pode aproximar de tal modo, que a diferença entre a variável  $x$  e a constante possa torna-se e permanecer, em valor absoluto, menor do que qualquer quantidade dada (ROXO; THIRÉ; MELLO E SOUZA, 1940, p.107).

Nesse capítulo, também podemos constatar a presença ideias, que nem sempre são bem explicadas, como, por exemplo, os conceitos de infinitamente pequeno, infinitamente grande e a divisão por zero. Vejamos, a seguir, uma delas.

Chama-se *infinitamente pequeno* a uma quantidade variável que tem por limite zero, isto é, uma quantidade que pode tornar-se e conservar-se menor, em valor absoluto, do que qualquer quantidade dada.  
Um infinitamente pequeno é uma quantidade *essencialmente variável*.  
Um infinitamente pequeno não é zero. O zero é, porém, o limite para o qual tende um infinitamente pequeno (ROXO; THIRÉ; MELLO E SOUZA, 1940, p.108).

Nuances como essa, que estão presentes em diversas partes do livro, o tornam didaticamente bem apresentado. Com isso, em seguida temos uma série exemplos onde se aplicam tais ideias, e o caso do infinitamente grande aparece como caso contrário ao anterior. Com isso, este último seria, portanto, uma quantidade variável que cresce ilimitadamente, e que possui valores maiores do que qualquer quantidade dada. É aqui, que vemos então, a primeira noção de infinito, e de limites que tendem para infinito, ressaltando ainda que tal quantidade é uma variável, e que jamais poderá ser confundida como uma constante.

O limite de uma função, surge como uma associação entre variáveis  $x$  e  $y$ , onde temos que se  $x$  tende para um determinado valor  $a$ , e variável  $y$  que através de sua relação funcional com  $x$ , tenderá para um valor  $b$ . Em outras palavras, podemos dizer que:

(...) a diferença entre  $y$  e  $b$  pode torna-se, em valor absoluto, tão pequena quanto nós quisermos, bastando que a diferença  $a - x$  também se torne, em valor absoluto, suficientemente pequena.

Dizemos, então, que  $y$  tem para limite  $b$ , quando  $x$  tende para  $a$ , o que se indica escrevendo:

$$\lim_{x \rightarrow a} y = b$$

(ROXO; THIRÉ; MELLO E SOUZA, 1940, p.115).

Apesar dessa apresentação utilizar a ideia de função, tal conceito só é expressido com mais detalhes em uma seção posterior. Novamente, diversos exemplos entram em vigor, com intuito de melhor apresentar essas ideias na prática. Em seguida, os autores explicitam algumas propriedades envolvendo limites, e ainda destacam o papel dessa teoria na concepção de número incomensurável, através da noção de aproximação.

No capítulo X, temos uma discussão acerca dos limites singulares e formas ilusórias (indeterminações) que podem surgir no cálculo dos limites de certas expressões. Mais adiante, temos também os limites fundamentais exponencial e trigonométrico, onde é apresentado o número  $e$ .

Um ponto interessante dessa construção, tal como os autores propõem a aplicação da teoria de limites, é o fato de que na maior parte do livro as notações de limite não aparecem, sendo expressos na maioria das vezes, principalmente nos exercícios propostos, de forma retórica. Vejamos a seguir um exemplo disso:

Figura 5: Alguns exercícios propostos.

3 — Achar o limite da expressão:

$$\sqrt{x + \frac{x^2 - 1}{x - 1}}$$

quando  $x$  tende para 1.

Resp.: 3.

4 — Achar o limite da expressão:

$$1 + x^2 + \frac{16 - x^2}{4 - x}$$

quando  $x$  tende para 4.

Resp.: 25.

5 — Achar o limite da expressão:

$$1 + \frac{x + 3}{x - 2} + \frac{x - 2}{x + 3}$$

quando  $x$  tende para 2.

Resp.:  $\infty$ .

6 — Determinar o limite da expressão:

$$\log x + \sqrt{x - 1}$$

quando  $x$  tende para 1

Resp.: 0.

7 — Determinar o limite da expressão:

$$\frac{1 + x}{1 + \cos x}$$

quando  $x$  tende para zero.

Resp.:  $\frac{1}{2}$ .

8 — Achar o limite da expressão:

$$\sqrt{5 + \log x}$$

quando  $x$  tende para 0,1.

Resp.: 2.

Fonte: (ROXO; THIRÉ; MELLO E SOUZA, 1940, p.138).

No último capítulo dessa parte, referente aos limites, podemos ver um maior aprofundamento acerca do conceito de função, onde são destacadas suas classificações, notações, representações e por último, continuidade. Nesse sentido, também devemos ressaltar que essa parte do livro utiliza a exploração das representações gráficas. As funções de mais de uma variável, também são apresentadas.

Além disso, um conceito que julgamos como importante nesse capítulo, aparece na página 153, e é peça fundamental para a proposta de construção dos conceitos como o livro propõem, pois é a partir dessa noção que logo em seguida são caracterizadas as derivadas. Vejamos:

Quando uma variável  $x$  passa de um valor  $x_1$  para um segundo valor  $x_2$ , a quantidade, que se precisa juntar a  $x_1$  para obter  $x_2$ , denomina-se *acrécimo* dessa variável.

Exemplo: quando  $x$  varia de 15 a 18, o acréscimo de  $x$  é 3; quando  $x$  varia de 8 a 6, o acréscimo de  $x$  é  $-2$ .

De modo geral: quando a variável  $x$  varia de  $x_1$  a  $x_2$ , o acréscimo de  $x$  será:  $x_2 - x_1$

Esse acréscimo, como já mostramos, pode ser positivo ou negativo (ROXO; THIRÉ; MELLO E SOUZA, 1940, p.153).

É essa noção de acréscimos, que mais adiante também dará forma ao conceito de continuidade, conforme veremos. Antes disso, os autores ainda exibem uma notação para esse acréscimo, e em seguida temos mais uma extensão desse conceito, agora para acréscimo de uma função.

Seja  $f(x)$  uma função de  $x$ . Se atribuirmos a  $x$  um acréscimo  $\Delta x$ , a função tomará a forma:

$$f(x + \Delta x)$$

O acréscimo da função, para o acréscimo  $\Delta x$  da variável, será expresso pela diferença entre o novo valor da função e o valor primitivo. Esse acréscimo será:

$$f(x + \Delta x) - f(x)$$

(ROXO; THIRÉ; MELLO E SOUZA, 1940, p.155).

Vemos, portanto, através desse enunciado, uma das sementes embrionárias para a caracterização da derivada, e mais tarde, sua relação com a teoria de limites. Além disso, os autores também incluem nessa seção, as representações gráficas desses acréscimos, no âmbito das funções.

É a partir dessa noção de acréscimo, que outros conceitos também são definidos, como, por exemplo, taxas de variação de uma função. Ou seja, imagine uma função, e suponha que dado um acréscimo na variável  $x$ , essa função terá um acréscimo  $h$ . Se esse  $h$  for positivo, então a função é crescente, caso contrário, decrescente. Nesse sentido, logo em seguida, temos a definição de continuidade de uma função.



Seja  $f(x)$  uma função que é definida para  $x=m$ . Designemos por  $f(m)$  o valor que tem  $f(x)$  quando substituimos  $x$  por  $m$ .

Se atribuirmos á variável  $x$  um acréscimo  $h$ , o acréscimo da função será:

$$f(m+h) - f(m)$$

Esse acréscimo pode ser, como já sabemos, positivo, negativo ou nulo.

A função será *continua* no ponto  $x=m$  quando o acréscimo da função tiver por limite zero no caso do acréscimo  $h$  tender para zero.

A função contínua num intervalo  $(a, b)$  poderá variar, por graus insensíveis, desde  $a$  até  $b$ .

Uma função não contínua é denominada *discontínua*. (ROXO; THIRÉ; MELLO E SOUZA, 1940, p.159)

Um ponto que merece destaque com relação a essa definição de continuidade é que apesar de utilizar a teoria de limite, é bastante diferente da qual convencionalmente se utiliza nos dias atuais, e talvez possamos entender isso como menos teórico.

Logo após o que fora estabelecido nos capítulos anteriores, temos agora a parte referente ao estudo do cálculo diferencial, e para isso os autores reservam cinco capítulos, com cerca de 60 páginas no total. Tendo em vista o conceito que destacamos como importante na parte anterior, logo no início do capítulo XII, vemos a definição de razão dos acréscimos.

Consideremos a função univalente  $y=f(x)$ . Vamos supor que num intervalo  $(a, b)$ , para o qual essa função é definida, atribuímos a  $x$  um acréscimo  $\Delta x$ ; resulta para a função um acréscimo  $\Delta y$ . Temos assim:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

Dessa equação, tiramos o valor do acréscimo  $\Delta y$ , substituindo  $y$  por  $f(x)$ :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Determinando o quociente do acréscimo  $\Delta y$  da função pelo acréscimo  $\Delta x$  da variável, obtemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A expressão  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  será denominada *razão dos acréscimos* ou *quociente das diferenças*.

O acréscimo  $\Delta x$  da variável independente é, em geral, suposto diferente de zero e positivo. A razão dos acréscimos pode ser um número positivo, nulo ou negativo (ROXO; THIRÉ; MELLO E SOUZA, 1940, p.164).

O conceito de acréscimos age como a peça principal para toda a construção que será feita nas páginas subsequentes. Essa última definição, se aproxima cada vez mais da ideia de derivada, porém ainda não está totalmente caracterizada. Antes desse passo, vemos também a interpretação geométrica da razão de acréscimos e sua relação com a tangente. Logo em seguida, após alguns exemplos, temos uma seção destinada ao limite da razão dos acréscimos, bem como sua interpretação geométrica.

Dada uma função  $y=f(x)$ , que define uma curva  $C$ , a declividade da tangente ao longo dessa curva será uma função de  $x$ .

Essa nova função de  $x$  será representada por  $f'(x)$  e denominada a *derivada* de  $f(x)$ . Chama-se *derivada de uma função*, a *outra função*, que exprime, para um valor dada da variável, o limite da razão do acréscimo da função dada para o acréscimo correspondente da variável, quando este tende para zero (ROXO; THIRÉ; MELLO E SOUZA, 1940, p.177).

Dessa forma a derivada é definida, e esse capítulo se encerra com apresentação das suas notações. No capítulo XIII, os autores procuram estabelecer as mais conhecidas regras de derivação de funções sendo todas encontradas a partir do seguinte processo:

- I) Damos á variável  $x$  um acréscimo  $\Delta x$ ;
- II) Calculamos, a seguir, o acréscimo  $\Delta y$  recebido pela função;
- III) Dividimos o valor de  $\Delta y$  por  $\Delta x$ , e obtemos, dêsse modo, a razão dos acréscimos;
- IV) Procuramos o limite dessa razão quando  $\Delta x$  tende para zero.

Esse limite – se existir – será, *por definição*, a derivada da função (ROXO; THIRÉ; MELLO E SOUZA, 1940, p.181).

Após deduzidas as fórmulas, os autores as utilizam para simplificar o processo. Um outro conceito presente nesse livro que merece destaque é o de diferenciais, tendo em vista que esse também é um tipo de noção que na maioria das vezes não é muito bem explicitada.

Seja  $y=f(x)$  uma função univalente e contínua num intervalo  $(a,b)$ . Seja  $x$  um número dêsse intervalo. Ao produto da derivada  $f'(x)$  pelo acréscimo,  $dx$ , da variável independente,

$$f'(x)dx$$

denomina-se *diferencial* da função. A diferencial será representada por  $dy$ ; temos:

$$dy = f'(x)dx$$

$dy$  é a diferencial de  $y$ .

$dx$  é a diferencial de  $x$  (ROXO; THIRÉ; MELLO E SOUZA, 1940, p.194).

Destacamos esse conceito, pois é a partir dessa noção que mais adiante serão calculadas as integrais. Ao final, temos também as definições de derivadas parciais, que encerram essa parte com uma sequência de exercícios sobre essa seção. O capítulo XIV, dá prosseguimento aos cálculos que já haviam sendo feitos desde a apresentação da derivada, porém este é destinado ao processo de derivação de algumas funções transcendentais.

O décimo quinto capítulo, é reservado exclusivamente para as derivadas de ordem superior de uma função, bem como exercícios sobre esse assunto. Dessa forma chegamos, portanto, ao último capítulo dessa segunda parte do livro que se refere ao cálculo diferencial. Neste podemos ver as aplicações da teoria apresentada através dos problemas de máximos e mínimos. Nesse processo, também encontramos uma nova definição para as taxas de variação de uma função, classificadas entre crescente ou decrescente, a partir da noção de derivada.

De acordo com o nosso estudo, a última parte do livro é referente ao cálculo integral, cujos autores prepararam dois capítulos com 24 páginas no total, sendo um deles voltado para a integral como processo inverso da derivação, e o outro para integral definida e aplicações.

Dessa forma, o que vemos no capítulo XVII são as noções preliminares sobre as primitivas imediatas, tendo em vista que a integração é o inverso da diferenciação. Para auxiliar nesse processo, os autores apresentam um quadro que relaciona os resultados obtidos nos capítulos anteriores sobre as principais regras de derivação, com as suas diferenciais e integrais imediatas. Em seguida, são feitas novas considerações para determinar as principais propriedades da integração. Ainda nessa parte, são discutidas as interpretações geométricas da constante de integração.

Na página 233 inicia-se o capítulo XVIII, cujo foco principal é a definição de integral definida, bem como sua interpretação geométrica que garante a base teórica para o cálculo de áreas. Dessa forma, temos à seguinte conclusão:

A diferencial da área limitada por uma curva  $y=f(x)$ , pelo eixo dos  $x$ , por uma ordenada fixa e por uma ordenada variável, é igual ao produto da ordenada variável pela diferencia da abscissa correspondente.

A formula  $dS = ydx$  nos mostra que um elemento infinitamente estreito de área ou uma faixa compreendida entre duas ordenadas infinitamente próximas pode ser considerada como um retângulo de base  $y$  e altura  $dx$ .

A área considerada,  $S$ , será, pois, a função cuja diferencial é  $ydx$ , isto é, será a integral de  $ydx$ .

$$S = \int ydx$$

(ROXO; THIRÉ; MELLO E SOUZA, 1940, p.234).

Logo em seguida, a integral definida surge a partir do problema de cálculo de áreas, e mais adiante eles apresentam a integral considerada como o limite de uma soma infinita. Nesse ponto, temos, portanto, a associação da integral com a teoria de limites, bem como justificativa geométrica para integral como cálculo de áreas.

Nesta análise, apresentamos como tais autores citados buscaram introduzir os elementos do cálculo em um livro de matemática voltado para o ensino secundário. No entanto, além do que fora apresentado, não podemos deixar de citar que nos capítulos seguintes, também são apresentados conteúdos de cálculo mais avançado tais como: volume de sólidos de revolução, noções elementares sobre sequências, séries e convergência. Além disso, um fato muito interessante encontrado nos capítulos XIX e XX, que são destinados aos cálculos de área e volume, e utilizam os conceitos de integral para deduzir algumas fórmulas.

### 6.1.2. Análise de um livro didático utilizado durante a Reforma Capanema

Dentre os livros editados para os cursos colegiais do ensino secundário durante o vigor da Reforma Gustavo Capanema, temos o conjunto *Matemática 2º Ciclo - 1ª, 2ª e 3ª série*, uma coleção de três livros, cuja produção é devida à quatro autores, sendo eles os professores de matemática do Colégio Pedro II, Euclides Roxo e Haroldo Cunha, e dois professores do Instituto de Educação, Roberto Peixoto e Cesar Dacorso Netto. Os elementos do cálculo encontram-se presentes na obra voltada para a 3ª série, e analisaremos a versão da obra referente à 5ª edição, datada de 1956.

Figura 6: Capa do livro “Matemática 2º Ciclo - 3ª Série” (1956).



Fonte: (ROXO et al, 1956).

Tal livro possui uma estrutura didática dividida entre três unidades, sendo a primeira destinada ao estudo das funções, seguida pela parte voltada para o estudo das derivadas e primitivas, e a última para a introdução da teoria de equações e polinômios. Com isso, a parte pela qual interessa nosso estudo está presente nas duas primeiras unidades citadas.

A partir dessa estrutura temos um fato interessante, pois neste livro os elementos do cálculo não aparecem apenas em capítulos isolados, seguindo uma certa sequência destinada apenas ao cálculo, mas sim em conjunto com outros ramos da matemática, tais como a álgebra e a geometria analítica. Além disso, mais um fator que merece destaque é fato da parte referente às integrais, que aparece dentro da unidade destinada para as derivadas, sendo assim, um indício de que o formato adotado segue a linha de estabelecer o processo de integração como uma antiderivação.

As primeiras páginas da obra são destinadas ao conceito de função, bem como sua representação aritmética, algébrica e geométrica, seguida por uma discussão inicial acerca das noções intuitivas de limite de uma sucessão, através de exemplos algébricos e geométricos.

Nessa parte, os autores utilizam a ideia de convergência para estabelecer noções numéricas de aproximação, e um segundo exemplo de que a área de um círculo é o limite das áreas de uma série de polígonos regulares inscritos. Ainda nesse início do texto, também podemos observar uma apresentação mais detalhada das funções elementares e suas representações gráficas, e uma primeira abordagem para o conceito de continuidade.

Continuidade. No exemplo que estudamos (16),  $y = x^2$ , só atribuímos a  $x$  valores inteiros e consecutivos. Fácil será, porém, verificar que se dermos a  $x$  valores compreendidos entre dois números inteiros e consecutivos, os valores correspondentes de  $y$  estarão também compreendidos entre os valores de  $y$  obtidos anteriormente para os valores consecutivos de  $x$ . Assim, para  $x = 1,5$ , valor compreendido entre 1 e 2, obteremos  $y = 2,25$ , valor compreendido entre 1 e 4. Observamos que quanto menos variar  $x$ , menos variará também  $y$ , ou, por outras palavras, que  $y$  é uma *função contínua* de  $x$  (ROXO et al, 1956, p.22).

Essa primeira visão sobre o conceito de continuidade é algo que deve ser destacado pois aparece até mesmo antes do conceito de limite de uma função, e essa noção é retomada de forma mais formalizada mais adiante. Ao passo que tal ideia surge nesse formato apresentado, é o que abre espaço para em seguida ser colocada em evidência as noções de acréscimo de uma função, conceito que servirá como base para a construção da teoria de derivadas na unidade seguinte. Vejamos:

Tomemos uma função  $y=f(x)$  e representamos por  $y_0$  seu valor numérico, correspondente a um dado valor  $x_0$  da variável, isto é, seja:  $y_0 = f(x_0)$ . Suponhamos, depois,  $x_0$  acrescido de uma quantidade arbitrariamente escolhida  $h$ , que *poderá ser positiva ou negativa*. À função, corresponderá, em geral, um valor numérico diferente, que representaremos por  $y_0 + k$ , podendo  $k$ , ser, também, *positivo ou negativo*. Em casos especiais, teremos  $k < 0$  ou  $k = 0$ . Escreveremos dessa forma:  $y_0 + k = f(x_0 + h)$ . Subtraindo, membro a membro, as duas últimas igualdades, virá:  $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$ . Esse número  $k$  é o *acréscimo da função*, correspondente ao *incremento*  $h$  de  $x$  (ROXO et al, 1956, p.26).

Os autores utilizam essa definição de acréscimo para a conceitualizar os casos de crescimento e decréscimo de funções, e concluem que “uma função é *crecente* quando  $x$  e  $y$  variam no mesmo sentido; isto é, crescendo  $x$ ,  $y$  cresce; decrescendo  $x$ ,  $y$  decresce”, e no caso contrário, será “*decrecente*, quando  $x$  e  $y$  variam em sentidos opostos; crescendo  $x$ ,  $y$  decresce; decrescendo  $x$ ,  $y$  cresce” (ROXO et al, 1956, p.28).

Nesse sentido, unindo tais conceitos estabelecidos, uma nova percepção para o conceito de continuidade é apresentada como sendo uma função cujos acréscimos podem se tornar tão pequenos quanto se queira, e o contrário, é o que torna uma função descontínua. Outro caso que

caracteriza uma descontinuidade é quando o valor  $f(x_0)$  não pode ser calculado. Com isso, é apresentada a divisão por zero como um símbolo de impossibilidade que exemplifica esse tipo de descontinuidade.

Em seguida, chegamos a terceira parte dessa unidade que é destinada à teoria de limites. Temos, portanto, a seguinte definição:

Limite de uma variável. Seja  $C$  o *campo de variabilidade* de  $x$ , isto é, seja  $C$  o conjunto de números que  $x$  poderá representar. Diz-se que  $x$  *tende* para um número  $x_0$ , quando é possível atribuir-lhe valores satisfazendo à condição:  $|x - x_0| < \varepsilon$  (1) para todo e qualquer número aritmético  $\varepsilon$ , tão pequeno quanto quisermos, ou, em outras palavras, quando os valores de  $x$  podem tornar-se tão próximos de  $x_0$  quanto desejarmos (ROXO et al, 1956, p.30).

Além disso, os autores ainda ressaltam que tal número  $x_0$  pode ou não pertencer ao conjunto  $C$ , e acrescentam uma nova definição:

Ponto de acumulação. É usual chamar-se o limite  $x_0$  de *ponto de acumulação* ou de *ponto limite* de  $C$ , porquanto, em torno do valor  $x_0$ , existe sempre uma infinidade de valores de  $x$ , isto é, uma infinidade de números do conjunto  $C$ . É prático e comum escrever  $x \rightarrow x_0$ , para afirmar que  $x$  tende para  $x_0$  (ROXO et al, 1956, p.31).

É a partir dessas noções estabelecidas que se torna possível definir o limite de uma função, através das constantes arbitrárias  $\varepsilon$  e  $\delta$ , mas sem a apresentação de demonstrações.

Limite de uma função. Dada uma função  $y=f(x)$ , definida em um intervalo  $(a, b)$ , dizer que:  $\lim_{x \rightarrow x_0} y = y_0$  equivale a afirmar ser possível a condição:  $|y - y_0| < \delta$  (4) para qualquer número aritmético  $\delta$ , tão pequeno quanto desejarmos, desde que tomemos  $x$  *suficientemente* próximo de  $x_0$ , isto é, poderemos sempre, em (1), escolher  $\varepsilon$  de modo que seja verificada esta condição (4). Com outras palavras, diremos que  $y_0$  é o limite da função, ao tender  $x$  para  $x_0$  (ROXO et al, 1956, p.32).

Essa mesma definição também é ampliada para o caso dos limites infinitos, e em seguida o limite de uma sucessão pode ser revisto, considerando uma sucessão como um caso particular de uma função com variáveis inteiras. As páginas seguintes são destinadas para a definição de descontinuidade e continuidade, agora fazendo uso dos limites. Então, uma função definida em um intervalo  $(a, b)$ , será dita contínua para um valor  $x_0$  desse intervalo, quando o limite da função de  $x$  tendendo para  $x_0$  for igual ao valor da função no ponto  $x_0$ . Dessa forma, uma

função será contínua em um intervalo  $(a, b)$  caso seja contínua em todos os pontos desse intervalo. Por outro lado, a descontinuidade pode ser definida como:

Diremos, ao contrário, que a função dada é *descontínua* para o valor  $x_0$  considerado, em qualquer um dos seguintes casos:

- quando o símbolo  $f(x_0)$  não tiver significado numérico;
- quando não existir o  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ;
- quando, embora existindo esse limite e o valor  $f(x)$ , tivermos:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Poderemos, ainda, ter apenas uma descontinuidade parcial, isto é, à direita ou à esquerda (ROXO et al, 1956, p.36).

Com intuito de exemplificar os conceitos colocados, os autores propõem o estudo da continuidade das funções seno e cosseno, por meio de identidades trigonométricas para chegar em suas conclusões. Em seguida, são apresentadas as classificações das descontinuidades em seus diversos casos, e dentre eles, o exemplo da função racional. Essa parte do texto se encerra com um tópico destinado aos exercícios de aplicação do conteúdo apresentado. Esses exercícios aparecem sempre ao final de cada seção, em conjunto com seus gabaritos. É válido ressaltar que tais exercícios também exploram as representações gráficas.

Ainda nessa primeira unidade do livro, temos mais duas seções voltadas para a geometria analítica, onde são explorados: função linear, formas paramétricas, ângulos, distâncias, equação de uma circunferência, e função quadrática. A unidade II, é dividida entre 5 seções destinadas às noções de derivada e primitivas. Com isso, logo no início dessa parte do livro, vemos a seguinte definição:

Seja  $x_0$  um ponto qualquer onde se supõe definida a função  $y=f(x)$ . Atribuindo a  $x$  um *acrécimo* arbitrário  $\Delta x$ , o acréscimo correspondente da função, que caracteriza sua *diferença* será:  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ . O limite da *razão incremental*  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , para  $\Delta x \rightarrow 0$ , quando existe, define a *derivada* da função; seu valor depende do ponto considerado. Para representa-la são usuais os símbolos:  $f'(x_0)$  (Lagrange) e  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$  (Leibniz). Podemos, portanto, escrever:  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  (ROXO et al, 1956, p.85).

Vemos, portanto, que a noção de derivada é motivada de forma algébrica pelos processos envolvendo limite e a noção de acréscimo estabelecida na unidade anterior. A sua interpretação geométrica é feita logo em seguida a partir da reta tangente como o limite da reta secante, onde é possível concluir que a *derivada* da função em um ponto corresponde ao

coeficiente angular da tangente nesse ponto (ROXO et al, 1956, p.88). Na página seguinte, temos a definição de diferencial de uma função.

Representando por  $dy$  a *diferencial* da função  $y=f(x)$ , tem-se por definição:  $dy = f'(x)\Delta x$  (4). Tomemos, entretanto, o caso particular da função  $y=x$ . Visto que

$\Delta y = \Delta x$ , virá:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$  e, por consequência:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$  mostrando que a derivada

dessa função é sempre a unidade. Então, de acordo com (4), o *diferencial* será:  $dx = \Delta x$ . Substituamos, portanto, em (4), o *acréscimo*  $\Delta x$ , pela *diferencial*  $dx$  da variável. Virá para expressão da *diferencial de uma função*  $y = f(x)$ :  $dy = f'(x)dx$ . De onde:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \text{ (ROXO et al, 1956, p.89).}$$

Os autores ainda acrescentam que “esse conceito simples de *diferencial* é devido a Cauchy (1843)”. Dessa forma como foi posta a ideia de *diferencial*, é o que nos mostra que tal cálculo reduz-se ao cálculo das derivadas. A interpretação geométrica é apresentada logo em seguida que constitui o *diferencial* como um acréscimo da ordenada tangente. Com isso, considerando valores suficientemente pequenos de  $\Delta x$ , é possível afirmar que  $dy \approx \Delta y$ .

Essa substituição do incremento  $\Delta y$  pela diferencial  $dy$ , aparentemente sem significação, é de incalculáveis vantagens nas aplicações em geral; dela decorre a denominação de *acréscimo elementar* ou *instantâneo*, que também se dá à diferencial, conforme assinalámos antes. A extraordinária simplificação, que assim se introduz nos cálculos, justifica a importância e o largo uso da diferencial em todos os domínios da matemática aplicada. Observemos, finalmente, que, de um modo geral, teremos  $dy > \Delta y$  ou  $dy < \Delta y$ , conforme a *concavidade* da curva esteja *voltada para baixo* ou *para cima* (ROXO et al, 1956, p.91).

Dessa maneira, tendo colocada em vista a importância do conceito de diferencial, as funções derivadas e as derivadas sucessivas são apresentadas logo em seguida. Nesse sentido, tópico 2 dessa unidade é destinado ao desenvolvimento das mais conhecidas regras de derivação, utilizando a definição de derivada como o limite das razões dos acréscimos. Essas regras também são utilizadas no processo de cálculo das diferenciais.

Posteriormente, no tópico seguinte são apresentadas as aplicações da teoria das derivadas no estudo das variações de uma função, por onde são recolocadas as noções de crescimento e decréscimo de funções, relacionando tais conceitos com a derivada, e os problemas de máximos e mínimos. Além disso, os autores apresentam ao final dessa seção as formas de relacionar todos esses conceitos com a representação gráfica de uma função, e propõem mais exercícios de aplicação da teoria.

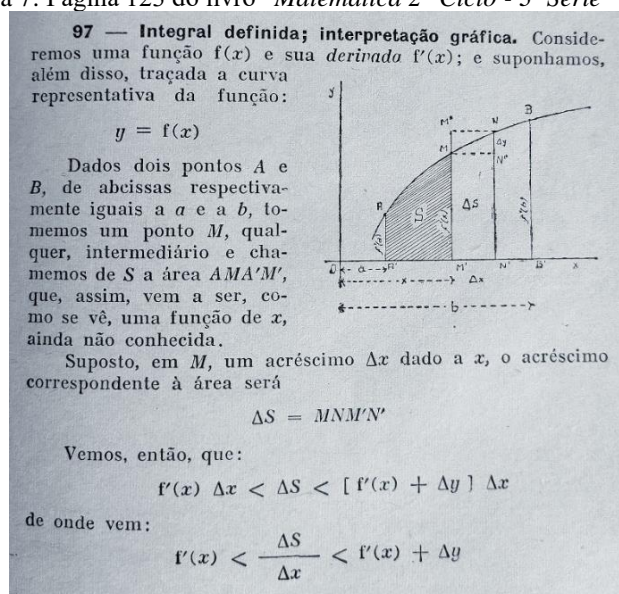


As últimas duas seções são reservadas para as noções de primitivas e integral. Os autores iniciam essa parte com o conceito de funções primitivas, e ressaltam esse processo como o inverso da função derivada, e sob essa visão que podem ser calculadas as primitivas imediatas.

Não há um símbolo, de uso generalizado, para caracterizar esta operação de *cálculo da função primitiva*. Comumente, se parte, não da função *derivada*  $6x^2$ , porém, da *diferencial*  $6x^2 dx$  e, em relação a esta, a função  $2x^3 + c$  é chamada de *função integral* ou, simplesmente, *integral*. O número  $c$  define a *constante de integração*. E, como símbolo, usa-se o sinal  $\int$ , escrevendo-se, então:  $\int 6x^2 dx = 2x^3 + c$ . O fato de termos, em  $c$ , um *número não determinado*, faz com que, sob esta forma, a integral seja denominada *integral indefinida*. (ROXO et al, 1956, p.119).

Dessa forma, apesar dos problemas de integração e diferenciação serem inversos, as técnicas para calculá-los, nem sempre terão as mesmas características. As funções primitivas imediatas serão aquelas cujo o diferencial pode ser calculado de forma direta a partir dessa noção de inversão. Em seguida, é a apresentada a integral definida em conjunto com sua interpretação geométrica, como cálculo de área. Vejamos a seguir:

Figura 7: Página 123 do livro “Matemática 2º Ciclo - 3ª Série” (1956).



Fonte: (ROXO et al, 1956).

Na página seguinte, os autores continuam com o desenvolvimento chegando à conclusão

de que  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f'(x)$  pois,  $\Delta x$  e  $\Delta y$  tendem juntos para zero. Além disso, temos que se a derivada da área S, que é uma função de  $x$ , é igual à derivada de  $f(x)$ , então  $S = f(x) + c$ . Fazendo  $x = a$ , teremos área nula, ou seja,  $f(a) + c = 0$ , chegando na igualdade  $c = -f(a)$ . Por

outro lado, fazendo  $x = b$ , teremos finalmente a área total delimitada, ou seja,  $S = f(b) - f(a)$

. Dessa forma, temos que:

Passamos assim, da *integral indefinida*  $f(x) + c$ , representando funcionalmente a área  $S$ , à relação  $f(a) - f(b)$ , equivalente a uma área ABA'B' perfeitamente determinada. Dá-se, por isso, a esta última relação, o nome de integral definida, escrevendo-se, de um modo geral:  $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ . Vê-se, portanto que uma *integral definida* pode ser sempre interpretada como representativa de uma área determinada (ROXO et al, 1956, p.124).

O conceito de integral definida e suas aplicações é o que encerra esta unidade do livro, seguida pelos exercícios de aplicação. A unidade 3 conforme relatamos no início, refere-se ao estudo dos polinômios.

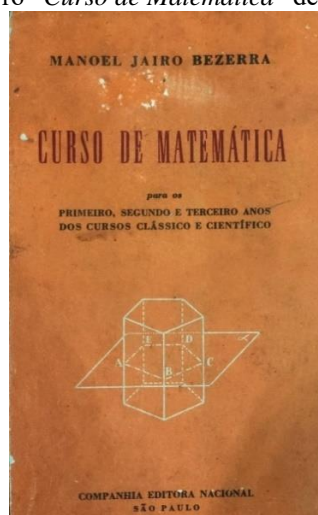
De forma geral, temos que o livro texto analisado não apresenta uma estrutura muito extensa, e possui cerca de 200 páginas, sendo as 50 primeiras para o estudo das funções e limites, seguida mais adiante por cerca de 35 páginas para o estudo das derivadas, e mais 10 páginas para as integrais. Essa divisão é o que nos permite concluir que o foco principal da obra baseasse sobre a noção de função, que utiliza a teoria de limites para formalizar o conceito de continuidade, e que também serve como aporte para a construção da derivada. As integrais por sua vez, aparecem de forma resumida, e os autores buscam evidenciar as suas aplicações, a saber, o cálculo de áreas.

### 6.1.3. Análise de um livro didático utilizado após a LDB de 1961

Nesta análise utilizaremos o livro publicado no ano de 1965, pela Companhia Editora Nacional, sob autoria do professor de matemática Manoel Jairo Bezerra. Trata-se de um livro, em volume único, destinado aos três anos dos cursos clássico científico do ensino secundário. Com isso, neste exemplar temos uma estrutura de quatro capítulos, pelo qual a matemática desse nível é dividida entre os seguintes ramos: aritmética e álgebra, geometria, trigonometria e geometria analítica.

Na apresentação da obra, o autor sugere que o livro deveria agir como agente facilitador para a revisão da matéria nas vésperas de vestibulares, que além de auxiliar o professor quando deseja-se recordar um assunto de uma série anterior, também agrega ao aluno a possibilidade de obter o conteúdo de matemática do 2º Ciclo por um preço acessível (BEZERRA, 1965).

Figura 8: Capa do livro “Curso de Matemática” de Manoel Jairo Bezerra.



Fonte: (BEZERRA, 1965).

Nesse sentido, este é um livro que chama a nossa atenção pelo fato de encontramos os conteúdos referentes ao cálculo diferencial, e alguns traços do cálculo integral, na parte destinada ao 3º ano de aritmética e álgebra.

Figura 9: Índice da obra de Bezerra referente à Aritmética e Álgebra.

ARITMÉTICA E ÁLGBRA	
(1.º, 2.º e 3.º Anos)	
1. Noções sobre o cálculo aritmético aproximado. Erros (1.º ano).....	13
2. Progressões (1.º ano).....	39
3. Logaritmos (1.º ano).....	63
4. Equações exponenciais (1.º ano).....	88
5. Análise combinatória simples (2.º ano).....	94
6. Binômio de Newton (2.º ano).....	110
7. Determinantes (2.º ano).....	118
8. Sistemas lineares (2.º ano).....	137
9. Trinômio do 2.º grau.....	151
10. Números reais e complexos (3.º ano).....	155
11. Funções (3.º ano).....	165
12. <u>Límites</u> (3.º ano).....	179
13. <u>Derivadas</u> (3.º ano).....	203
14. <u>Primitivas imediatas</u> (3.º ano).....	250
15. <u>Polinômios</u> (3.º ano).....	264
16. Introdução à teoria das equações (3.º ano).....	281

Fonte: (BEZERRA, 1965) (Grifo nosso).

O fato mais curioso deve-se ao seu ano de publicação, tendo em vista que nesta época, o cálculo não fazia mais parte dos currículos oficiais das escolas deste nível de ensino. Dessa

forma, buscamos analisar a maneira como autor insere os elementos do cálculo em sua obra, e utilizaremos essa primeira parte do livro com o foco no ensino do 3º ano.

O início do livro é voltado para os conteúdos referentes à aritmética e álgebra, onde temos dezesseis capítulos, divididos entre os três anos do ensino médio. Vemos, portanto, que o estudo das funções aparece apenas no terceiro ano, seguido pelo estudo dos limites, derivadas e primitivas.

No capítulo 11, o autor apresenta o conceito elementar de função como sendo uma relação entre variáveis, para o qual cada valor  $x$  corresponda um ou mais valores de  $y$ , conforme uma determinada lei (BEZERRA, 1965). Dessa forma, uma função pode ser classificada como unívoca ou plurívoca, de acordo com as quantidades associações existentes entre  $x$  e  $y$ . A função de uma variável real é definida como uma função cujas as variáveis  $x$  e  $y$  possuam como domínio o conjunto dos números reais. Em seguida, o domínio de uma função real, é definido como o “*campo de existência de uma função*”, que consiste no conjunto  $X$  do domínio da variável  $x$ , pelo qual a função é definida.

Neste mesmo capítulo surge o conceito de sucessão como sendo um caso particular de função, cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Dessa forma, os estudos estabelecidos para funções reais também valem para as chamadas sucessões. Em seguida, são apresentadas as possíveis classificações entre funções como algébricas ou transcendentais. Ao final deste capítulo, o autor destina algumas páginas para as representações gráficas das funções mais usuais, onde vemos as definições de crescimento e decréscimo. Um aspecto interessante sobre essa estrutura de conceitos que Bezerra propõe em seu livro, é a apresentação dos tipos de funções, onde a primeira função apresentada é a exponencial, seguida pela logarítmica e trigonométricas, onde a função polinomial aparece depois, apenas nos exercícios propostos.

O capítulo 12 é voltado para a introdução dos conceitos de limite, suas propriedades e técnicas de cálculo. O autor afirma que:

O conceito de limite é um dos mais importantes do cálculo e da análise matemática. Sua formulação precisa é devida a Cauchy, o qual compreendeu que, a conceituação *dinâmica* de limite, isto é, a idéia de aproximação contínua, poderia, e, ainda mais, segundo êle, deveria ser omitida em benefício de sua definição, que poderíamos denominar de *estática* e que torna possível ao estudante a compreensão analítica das propriedades de continuidade de uma função e do indispensável conceito de derivada (BEZERRA, 1965, p.179).

Dessa forma, a partir dessas palavras de Bezerra, podemos concluir que o seu principal objetivo neste capítulo, é apresentar esse conceito que é tão importante, através da construção de uma base teórica necessária para o estudo das derivadas, bem como para a conceitualização

da continuidade das funções. Com isso, a primeira definição que surge é a de *limite de uma variável*, que pode ser entendido como um valor  $a$  tal que a diferença entre  $x - a$ , em valor absoluto, possa se tornar tão pequena quanto se queira. Em outras palavras:

Dizemos, então, que uma variável  $x$  tem para *limite finito* um número  $a$ , quando fixado um número  $e$ , tão pequeno quanto se queira, se tenha  $|x - a| < e$  ou  $a - e < x < a + e$  e dizemos que  $x$  *tende para*  $a$ , cuja notação é  $x \rightarrow a$  ou que o limite de  $x$  é  $a$  cuja representação é  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$  (BEZERRA, 1965, p.179).

Logo em seguida, a próxima definição é referente aos limites infinitos, que ocorrem quando temos uma variável  $x$  de domínio  $X$ , que para  $E$  tão grande quanto se queira, se tenha  $|x| > E$  e, portanto, o limite da variável  $x$  é *infinito*. Na página subsequente o autor estende a definição de limite, agora para limite de funções reais, divididas entre quatro casos:

1.^a) Seja  $y=f(x)$  uma função definida em um intervalo  $(a, b)$  e seja  $x_0$  um ponto de  $(a, b)$ . Diz-se que a função  $y$  tem um limite  $l$ , quando a variável  $x$  tende para  $x_0$ , se para cada número  $e$  positivo, existe em correspondência com  $e$ , um número  $d$  tal que para  $0 < |x - x_0| < d$  tal que  $|f(x) - l| < e$ . Indica-se essa definição com a notação

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

2.^a) Seja  $y=f(x)$  uma função definida em um intervalo  $(-\infty, +\infty)$ . Se a variável  $x$  tem um *limite infinito*, diz-se que  $y$  tem para *limite finito*  $l$  se para cada  $e$  positivo existe em correspondência com  $e$ , um número  $E$  tal que, para  $|x| > E$  se tenha  $|f(x) - l| < e$ . E representamos simbolicamente assim:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ , conforme se tenha, respectivamente,  $x$  positivo ou negativo.

3.^a) Seja  $y=f(x)$  definida em um intervalo  $(a, b)$  e  $x_0$  pertencente a  $(a, b)$ . Diz-se que uma função  $y=f(x)$  tem *limite infinito* quando  $x$  tem limite finito  $x_0$ , se para cada número positivo  $E$ , existe em correspondência com  $E$ , um número positivo  $d$  tal que para  $0 < |x - x_0| < d$  se tenha  $|f(x)| > E$ . E indicamos simbolicamente assim:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty.$$

4.^a) Seja uma função  $y=f(x)$  definida em um intervalo  $(-\infty, +\infty)$ . Diz-se que uma função  $y=f(x)$  tem *limite infinito*, quando a variável  $x$  tem também limite infinito, se para cada  $E$  existe, em correspondência com  $E$ , um número  $E_1$  tal que para  $|x| > E_1$  se tenha  $|f(x)| > E$ . E teríamos as seguintes expressões simbólicas  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$  ou

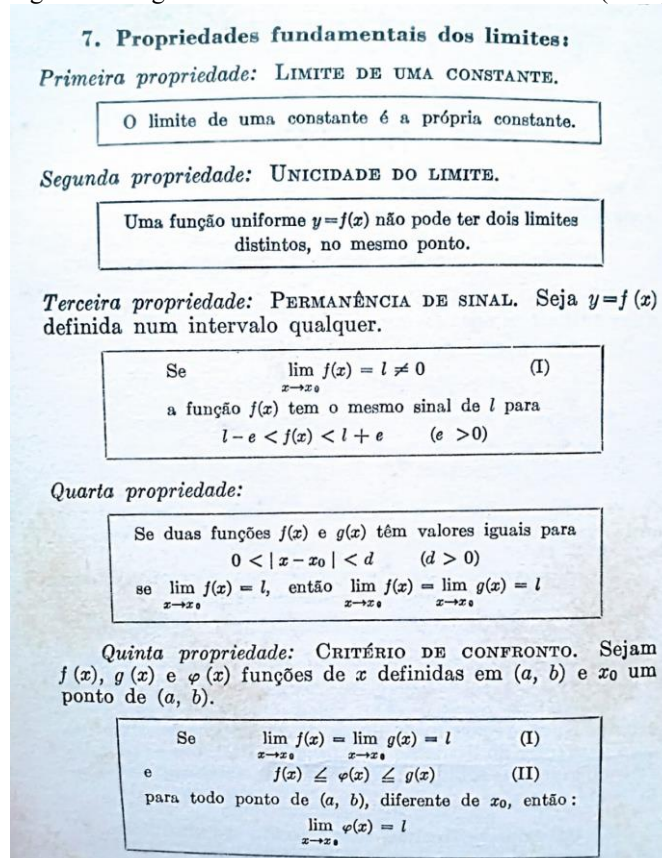
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty \text{ (BEZERRA, 1965, p.180).}$$

Vemos, portanto, uma preocupação em apresentar detalhadamente todos os tipos de limites e seus possíveis resultados. Além disso, o livro não poupa o aluno das definições mais “formais” de limite, tal como podemos ver, ainda sem o uso de  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{D}$ , mas como outras letras que representam um processo semelhante. O autor ainda acrescenta que geralmente, o cálculo

de limites através da definição torna-se algo laborioso e difícil, e dessa forma apresenta as propriedades e operações com limites que auxiliaram nesse processo, destacando todos os tipos de indeterminações que podem surgir nesse trabalho. Os limites fundamentais trigonométrico e exponencial também são apresentados, bem como suas aplicações em exercícios.

Um aspecto presente na obra de Bezerra, é a forma como ele utiliza caixas retangulares para destacar suas principais conclusões, o que podemos ver na figura a seguir:

Figura 10: Página 182 do livro “Curso de Matemática” (1965).



Fonte: (BEZERRA, 1965).

Ao final do capítulo, temos as definições de limites laterais, seguida pela definição de continuidade e descontinuidade de funções.

I) Diz-se que uma função  $y=f(x)$ , definida em  $(a, b)$  é *contínua em um ponto*  $x_0$  de  $(a, b)$ , se:

1) existe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  e é finito

2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

II) Diz-se que uma função  $y=f(x)$ , definida em  $(a, b)$  é *contínua nesse intervalo*, se for contínua em todos os pontos  $(a, b)$ .

III) Uma função  $y=f(x)$  diz-se *descontínua* em um ponto  $a$  se, uma ao menos das condições abaixo não forem satisfeitas:

- 1)  $f(x)$  é definida em  $a$
- 2) existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e é finito
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Um ponto  $a$  onde  $f(x)$  não seja contínua diz-se um *ponto de descontinuidade* de  $f(x)$  (BEZERRA, 1965, p.196).

Dessa forma, o autor apresenta alguns exemplos de aplicação dessa definição, e encerra o capítulo através de uma série de exercícios resolvidos comentados, seguida por exercícios propostos sobre todo o conteúdo apresentado de forma geral. No capítulo seguinte, temos o estudo das derivadas. Dessa forma, este inicia-se através da seguinte definição:

Seja uma função  $y=f(x)$  uniforme em um certo intervalo  $(a,b)$ , e consideremos  $x_0$  um ponto desse intervalo e  $\Delta x_0$  o acréscimo da variável.

Quando a variável sofre um acréscimo  $\Delta x_0$  a função sofre um acréscimo  $\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$ .

A relação  $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$  univocamente definida para cada valor de

$\Delta x_0$ , chama-se *razão dos acréscimos* ou *razão incremental*. Chama-se *derivada* da função  $y=f(x)$  no ponto  $x_0$ , ao limite, finito, caso exista, da razão incremental quando

$\Delta x_0 \rightarrow 0$ . E indica-se assim:  $\lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = f'(x_0)$  (BEZERRA, 1965, p.203).

Dessa forma, temos que uma função será dita derivável em um ponto, caso seja possível calcular a sua derivada, e além disso, temos pela unicidade do limite, que a derivada de um ponto é única. A função derivada  $y' = f'(x)$  seria, portanto, uma função gerada a partir de  $y = f(x)$ , cujo valor para cada  $x$  coincide com a derivada de  $f(x)$  nesse ponto. O autor em seguida, apresenta a interpretação geométrica da derivada, chegando à conclusão de que a derivada uma função é igual ao coeficiente angular tangente geométrica a essa curva no ponto  $x_0$  (BEZERRA, 1965, p.205).

Nesse sentido, o autor também nos apresenta o conceito de diferencial, sua interpretação geométrica, e suas diferenças com relação aos acréscimos:

Seja uma função  $y=f(x)$  admitindo derivada finita em  $(a,b)$  sejam  $\Delta x$  e  $\Delta y$  os acréscimos, da variável e da função. Chama-se *diferencial da função  $f(x)$*  correspondente ao acréscimo  $\Delta x$  ao produto da derivada  $f'(x)$ , e indicamos assim:  $dy = f'(x)\Delta x$ .

O símbolo  $dy$  representa a *diferencial*.

O símbolo  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$  indica uma *diferença* (BEZERRA, 1965, p.205).

Em seguida, são apresentadas as regras de derivação, e um ponto positivo que devemos destacar é que neste caso o autor prefere utilizar uma abordagem mais teórica, deduzindo todas as fórmulas de derivação a partir de tudo o que já foi apresentado sobre limites, e a definição de derivada conforme vimos anteriormente, ao invés de apenas apresentar as técnicas por si só. Dessa forma, ele prossegue com o cálculo das demais derivadas sempre utilizando a definição e as regras já deduzidas, e depois apresenta um quadro sinótico (p.226) com todos esses resultados, relacionando as funções com suas respectivas derivadas.

Além disso, Bezerra também apresenta as aplicações da teoria das derivadas, e para isso associa a definição de função crescente e decrescente com a definição de derivadas. Nesse sentido, chegamos as definições de ponto crítico e de inflexão, bem como os pontos de máximos e mínimos que uma função pode assumir. Antes de encerrar o capítulo, o autor ainda apresenta um passo a passo para o estudo da variação das funções e como representa-la graficamente.

Para o estudo da variação de funções de uma variável real, podemos, de acordo com o que acabamos de estudar nos itens anteriores, estabelecer a seguinte marcha:

- a) determina-se o campo de definição da função;
- b) calcula-se a derivada da função e estuda-se o sinal dessa derivada, determinando nos intervalos de continuidade os valores da variável que anulam a derivada;
- c) acham-se os máximos, mínimos ou pontos de inflexão;
- d) verificamos os intervalos onde a função é crescente ou decrescente;
- e) acham-se os valores particulares da função nos pontos  $x=0$ ,  $x = \pm\infty$  e nos pontos onde ela se anula (quando possível);
- f) faz-se um quadro com um resumo geral dos resultados encontrados e com o seu auxílio faz-se a representação gráfica da função (BEZERRA, 1965, p.241).

Dessa forma, o autor apresenta alguns exemplos de aplicação desse processo, e talvez essa seja a parte mais importante desse capítulo, pois é a partir do que foi visto que se torna possível encontrar o gráfico das mais diversas funções. Essa parte do livro também é encerrada com uma série de exercícios propostos.

O último capítulo é referente aos estudos das primitivas. Com isso, temos as definições para funções primitivas, integral indefinida, integral definida e o cálculo de áreas. O conceito o qual é a peça primordial desse capítulo é definido como:

**Funções primitivas:** Dada uma função  $f(x)$  definida em  $[a, b]$ , chama-se *função primitiva* ou simplesmente *primitiva* de  $f(x)$ , a toda função  $g(x)$ , também definida em  $[a, b]$  e cuja derivada  $g'(x) = f(x)$  em todo  $[a, b]$ .

(...)

**Integral indefinida:** Seja a função  $f(x)$  e suponhamos que ela admita uma primitiva  $g(x)$ ; se admite uma primitiva, admite uma infinidade:  $g(x) + C$ .

A expressão  $g(x) + C$  se denomina *integral indefinida* ou simplesmente *integral* de  $f(x)dx$ , que representamos com o símbolo  $\int f(x)dx$ , símbolo êsse que representa, pois, tôdas as primitivas de  $f(x)$  e a função  $f(x)dx$  chama-se *função integranda*.



Portanto, se  $g'(x) = f(x)$  podemos escrever:

$$\int f(x)dx = g(x) + C$$

(BEZERRA, 1965, p.250).

A integral, portanto, surge como uma técnica de antiderivação, e o autor também discute um pouco sobre a necessidade de se somar uma constante C ao final desse processo. Seguindo por essa linha, o autor estabelece um novo quadro de associação entre funções, neste caso relacionando as diferenciais com suas respectivas primitivas, a partir de tudo o que foi desenvolvido até então. A integral definida aparece através do seguinte enunciado:

Seja  $y=f(x)$  uma função contínua e uniforme em  $(\alpha, \beta)$  e seja  $g(x)$  uma primitiva de  $f(x)$ . A diferença  $g(b) - g(a)$ , dos valores da primitiva  $g(x)$ , em dois pontos quaisquer de  $(\alpha, \beta)$ , denomina-se *integral definida* da diferencial  $f(x)dx$ , entre os

limites  $a$  e  $b$ , e indicamos por  $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$  ou  $\int_a^b f(x)dx = [g(x)]_a^b$

(BEZERRA, 1965, p.256).

Dessa forma, temos a conceitualização de integral definida, mas sem a citar o teorema fundamental do cálculo. Com isso, a integral definida segue como mais uma aplicação de primitivas, e sua definição utilizada como cálculo de áreas também segue nesse sentido. Vejamos:

A área da superfície limitada por uma curva, cuja equação é  $y=f(x)$ , pelo eixo dos  $x$ , e pelas ordenadas de dois pontos, cujas abcissas são  $a$  e  $b$  é dada por  $A = \int_a^b f(x)dx$

(BEZERRA, 1965, p.258).

No início desse texto relatamos que neste livro aparecem alguns traços do cálculo integral, justamente pelo fato de que esse capítulo é voltado apenas aos estudos das primitivas, e a integral nesse sentido, aparece como um método de antiderivação.

De forma geral, ao analisar os elementos do cálculo presentes na obra de Bezerra, podemos concluir que foco principal aparenta ser o conceito de derivada, tendo em vista que o capítulo destinado a esse tópico é o mais longo dentre os analisados, com cerca de 47 páginas. Nesse sentido, o estudo de limite aparece como base para a construção de todo o capítulo referente às derivadas, com 24 páginas, e as primitivas apresentadas em um capítulo menor com não mais do que 15 páginas, que também utilizam esses conceitos, e possuem a aplicação do cálculo de áreas.

#### 6.1.4. Análise avaliativa das obras

Com o intuito de traçar uma análise comparativa entre as obras apresentadas, podemos verificar em primeiro lugar algumas diferenças notáveis em seus índices, por onde os elementos do cálculo se enquadram. Tendo em vista que os dois primeiros livros são voltados para séries específicas do ensino secundário, temos que durante a Reforma Campos, o ensino de cálculo fazia parte da proposta de ensino do 5º ano, em um livro que dividido entre conteúdos de álgebra, trigonometria e geometria. Já o segundo, compunha o currículo que vigorou durante a Reforma Campos, e fazia parte da 3ª série colegial dos cursos científicos, de forma integrada com a álgebra e geometria analítica. Sendo o terceiro livro uma versão em volume único que trata de toda a matemática do ensino secundário, o cálculo aparece na proposta do 3º ano dentro da seção destinada ao estudo de aritmética e álgebra.

Com relação às suas estruturas didáticas, todos eles seguem a ordem de conteúdos apresentados na sequência limite, derivada e integral. Algumas diferenças podem ser notadas em relação à ordem de apresentação das funções e limites. Conforme relatamos, o “Curso de Matemática (1940)” apresenta a noção intuitiva de limite antes mesmo da definição de função.

De acordo com os processos de apresentação da teoria de limites, temos que os dois primeiros livros analisados buscam trabalhar as noções intuitivas de limites através de exemplos muito semelhantes, para em seguida ampliar tais ideias para os limites de uma variável, seguida pelo limite de uma função, sem utilizar demonstrações mais teóricas. Em contrapartida, o “Curso de Matemática” de Bezerra, já inicia o capítulo referente aos limites para apresentar a definição de maneira mais formalizada.

Os dois primeiros livros citados também possuem uma característica em comum com relação à construção do conceito de derivada a partir da noção da razão dos acréscimos, que costuma ser feita ainda na parte da teoria de limites. Esse é um ponto que agrega a nossa hipótese de que a teoria de limites está presente nessas obras com intuito de garantir a base teórica necessária para a conceitualização da derivada, mas de certa forma, cedendo um pouco de todo rigor que costuma ser colocado nessas disciplinas no âmbito do ensino superior, que é exatamente o que caracteriza a sua adaptação para as escolas.

Tendo o conceito de derivada definido, todos os livros buscam apresentar as aplicações do cálculo para o estudo gráfico das funções, e dentre eles, as noções de crescimento e decréscimo, continuidade e problemas de máximos e mínimos.

O conceito de integral, por sua vez, aparece de forma bem simplificada em todos os livros analisados, e dentre eles o livro que busca apresentar um pouco mais dessa teoria é o Curso de Matemática (1940). Dessa forma, a integral quase sempre é definida apenas como

processo inverso da diferenciação, que logo em seguida é ampliada para a interpretação do cálculo de áreas, e em alguns casos até mesmo para cálculo de volume.

De forma geral, todos os livros possuem uma ênfase maior no conceito de derivada, e talvez esse fato ocorra pelo motivo das aplicações e vantagens que compõem o estudo das funções.

## **6.2. Análise dos livros utilizados no ensino técnico**

Com intuito de constituir uma breve análise acerca do ensino de cálculo presente nas instituições de formação técnica, selecionamos dois livros com estruturas bastante distintas, que foram recomendados e utilizados por instituições desse nível de ensino. O primeiro deles faz parte de uma coletânea de vários autores destinada aos estudantes do 2º grau no geral, onde se faz presente o estudo da teoria de limites e derivadas. E o segundo, com uma abordagem mais técnica, voltado quase que exclusivamente para a resolução de exercícios, e destinado especificamente para os estudantes de cálculo elementar.

### **6.2.1. Análise do livro “*Matemática - 2º Grau: 3ª série*” (1976), Iezzi et al.**

O texto ao qual analisaremos aqui, trata-se de um livro que faz parte da coleção “*Matemática - 2º Grau*” apresentado em três volumes, um trabalho com a colaboração de vários autores, tais como Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, José Carlos Teixeira, Nilson José Machado, Márcio Cintra Goulart, Luiz Roberto da Silva Castro e Antônio dos Santos Machado. Dentre os autores citados, destacam-se Iezzi e Dolce, que produziram diversos livros didáticos de matemática consagrados, e que repercutem até os dias atuais, além de serem os professores fundadores da editora Atual (1973), a qual este livro pertence. Iezzi possui formação de engenharia pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, e licenciatura em matemática pela USP, e foi professor de matemática em pré-vestibulares e faculdades de São Paulo. Dolce formou-se em engenharia civil, também pela Escola Politécnica, e atuou como professor da rede estadual de São Paulo.

Dessa forma, temos uma coleção de livros voltados para os estudantes de matemática de nível médio, onde é possível encontrar um estudo sobre os elementos do cálculo na unidade voltada para a 3ª série. Tal livro apresenta elementos da geometria analítica, polinômios, cálculo diferencial e números complexos.

No prefácio da obra, os autores comentam que a partir desse livro é que se encerra o trabalho ao que se propuseram, de apresentar uma coleção de livros que se encaminha também

para aqueles que não desejam ingressar ao ensino superior de matemática. Com isso, contamos com um texto que apresenta um nível de rigor reduzido ao mínimo necessário, integrado a diversos exercícios resolvidos e propostos. Nesse sentido, com relação ao ensino de cálculo, os autores afirmam que:

Nos capítulos onde fazemos um estudo introdutório ao cálculo, optamos por um desenvolvimento mais pormenorizado das derivadas e suas aplicações, restringindo propositadamente a exposição sobre limites. Reconhecendo que, de qualquer modo, ao nível 2º grau, é impossível colocar a teoria dos limites com todo rigor matemático, apresentamos as propriedades de que precisamos em derivadas, sem cogitar de suas provas e fazendo sucessivos apelos à intuição (IEZZI, et al, 1976).

Tal estudo introdutório, conforme citam os autores, referem-se à teoria de limites, derivadas e aplicações. Dessa forma, a parte do livro destinada para tal é dividida entre quatro capítulos, a saber, limites, derivadas, regras de derivação, e estudo da variação das funções.

Na introdução do capítulo sobre limites, os autores fazem uma breve menção aos trabalhos de Newton e Leibniz, que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo, através dos problemas de mecânica e geometria. E ainda destacam que as noções de derivada e diferencial dependem da noção de função, um dos conceitos mais importantes da matemática, e buscam revisar as suas ideias principais, que são apresentadas de forma mais detalhada na unidade da 1ª série da coleção. Nessa parte vemos então as ideias gerais sobre função, domínio, imagem e representações gráficas.

Os autores consideram que a teoria de limites é imprescindível para a introdução do cálculo diferencial, e buscam apresentá-la de forma bastante intuitiva a partir de um exemplo numérico. Vejamos a seguir:

Vamos considerar a função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  por  $y = 2x - 1$ . Podemos obter valores de  $y$  tão próximos de 3 quanto quisermos, bastando para isso tomarmos valores de  $x$  suficientemente próximos de 2. Assim se quisermos  $2,9 < y < 3,1$ , basta que tomemos  $1,95 < x < 2,05$ . De fato, temos:

$2,9 < y < 3,1 \Leftrightarrow 2,9 < 2x - 1 < 3,1 \Leftrightarrow 3,9 < 2x < 4,1 \Leftrightarrow 1,95 < x < 2,05$   
isto é,  $3 - 0,1 < y < 3 + 0,1$  quando  $2 - 0,05 < x < 2 + 0,05$  ou seja

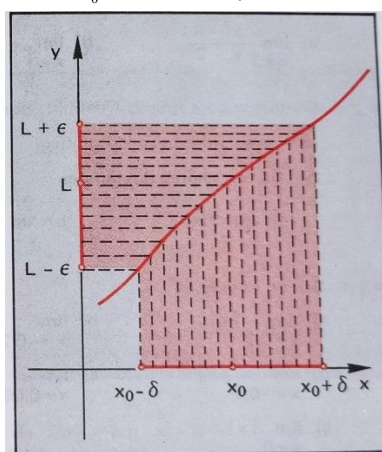
$$\boxed{3 - 0,1 < f(x) < 3 + 0,1 \text{ quando } 2 - 0,05 < x < 2 + 0,05}$$

(IEZZI, et al, 1976, p.138).

Esse raciocínio é mantido para valores cada vez menores, de forma que é possível induzir que  $f(x)$  se aproxima de 3 quando  $x$  se aproxima de 2, o que equivale a dizer que função toma valores tão próximos de 3 quanto se queira, a partir de valores de  $x$  suficientemente próximos de 2. E, portanto, o limite da função  $f(x)$ , quando  $x$  tende para 2, é 3.

Essa noção intuitiva de limite também é apresentada para os casos em que a função não é definida em um determinado ponto, para uma função com um “salto”, e para uma função que possui limites laterais diferentes em um ponto, sendo este último, o que caracteriza a não existência do limite. Em seguida, temos a definição mais geral acerca do conceito de limite, dessa vez com constantes arbitrárias.

Dada uma função  $f$ , definida num intervalo  $D$ , dizemos que o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $x_0$ , é  $L$  e anotamos  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  se para cada número real  $\varepsilon > 0$  sempre existe em correspondência um número  $\delta > 0$ , de modo que para todo  $x$  do domínio  $D$ :  $(x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0) \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$



(IEZZI, et al, 1976, p.141).

Uma característica fundamental desse livro é a sua abordagem focada nos exercícios resolvidos para exemplificar o uso dos conceitos definidos. As próximas páginas são destinadas à exploração das principais propriedades envolvendo a operação de limite, seguida pela definição de continuidade, conforme podemos ver a seguir.

Para que uma função seja contínua em um ponto  $x=a$  de seu domínio é necessário que exista o  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e este limite coincida com o valor da função em  $a$ , ou seja

$$f(x) \text{ é contínua em } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Isto significa que  $f$  é contínua num ponto  $a$  somente quando se verificarem as três condições seguintes:

- 1) existe  $f(a)$
- 2) existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Uma função é contínua *num conjunto* se é contínua em todos os pontos deste conjunto (IEZZI, et al, 1976, p.147).

Em seguida os autores utilizam exemplos de funções contínuas com seus respectivos gráficos. Nas últimas páginas desse capítulo, temos a apresentação do limite fundamental

trigonométrico e exponencial, com suas devidas justificativas. O que fora exposto até então é o que os autores julgam como necessário para a construção do conceito de derivada, propriedades e suas aplicações.

O sétimo capítulo do texto destina-se às derivadas, apresentadas em um primeiro momento como a taxa de variação. Dessa forma, eles buscam partir de ideias concretas para estabelecer tal conceito. Com isso, a derivada é desenvolvida de forma bastante intuitiva através da noção de variação (acréscimo), e dessa forma, ela se estabelece como o limite da razão dos acréscimos, ou então, como a taxa de variação instantânea.

Essa forma utilizada para a construção do conceito de derivada é o que se encaminha para logo em seguida serem feitas as associações com a física, onde vemos a interpretação com relação à velocidade e a aceleração. O significado geométrico da derivada é o que permite chegar à conclusão de que a derivada determina a inclinação da curva em um determinado ponto, e que através dela é possível encontrar a reta tangente ao gráfico.

Portanto, o que devemos ressaltar desse capítulo é a sua forma como busca estabelecer a noção de derivada antes mesmo de apresentar sequer uma regra ou propriedade. Vemos aqui o esforço de entregar ao leitor um texto em um diálogo muito bem apresentado, com intuito de estabelecer a verdadeira essência do conceito.

O capítulo 9 é destinado especificamente para sistematizar o cálculo das derivadas, por onde são encontradas as principais técnicas de derivação, tais como as estabelecidas para as funções constantes, de potência, trigonométricas, logarítmicas, bem como as regras de soma, produto e quociente. É importante ressaltar que todas as regras são deduzidas a partir da noção inicial de derivada como limite da razão dos acréscimos, e no final são destacados todos os resultados encontrados em uma tabela.

No último capítulo destinado ao cálculo, temos as aplicações da teoria de derivadas sob os problemas de máximos e mínimos. O estudo das derivadas fornece informações importantes sobre o gráfico de uma função, e esta parte do texto destina-se para esse tipo de exploração. Dessa forma, as taxas de crescimento e decréscimo podem ser interpretadas a partir da derivada de primeira ordem, e a concavidade da função em um intervalo através da derivada de segunda ordem. Esse é um capítulo focado basicamente na resolução de exercícios que aplicam os conceitos apresentados.

De forma geral, um ponto que merece destaque em tal obra analisada refere-se à construção do conceito de limite, que dentre a maioria dos livros voltados para o este nível de ensino, não apresentam a teoria de limite tal como está presente neste. Ainda que os autores tenham escolhido por livrar o leitor de minúcias mais rigorosas, como provas e demonstrações, vemos um caminho muito interessante para abordagem desse conceito, utilizando ideias concretas para estabelecer a visão formal mais adiante.

Sobre o conceito de derivada, temos que os autores utilizam uma abordagem parecida com outros livros que possuem o mesmo foco, sob o acréscimo das relações da teoria com a física. Além disso, conforme relatamos, temos um material que se dedica a apresentar e desenvolver a teoria de derivadas de forma bastante didática, através de exemplos e exercícios, como o cuidado de não apresentar nenhuma fórmula sem a sua devida justificativa.

Podemos concluir que tal livro apresenta uma linguagem acessível ao público que se destina, integrado a uma enorme diversidade de exemplos introdutórios, seguidos pelos conceitos formais, além de fazer uma associação do cálculo com os elementos da física. Um livro como este pode ter sido parte do ensino técnico pela sua forma didática muito bem apresentada, e por sua repleta gama de exercícios.

### **6.2.2. Análise do livro “Cálculo Diferencial e Integral” (1957), Ayres**

O segundo livro da nossa seleção voltada para o ensino técnico é uma versão traduzida para o português do *Theory and problems of differential and integral calculus*, um livro americano destinado aos alunos de cálculo no geral, e que no Brasil, fora utilizado também no ensino técnico. O autor do livro, Frank Ayres Jr, foi um matemático estadunidense que publicou uma série de livros sobre matemática pela editora Schaum, e também foi professor e chefe do departamento de matemática do Dickinson College.

O cálculo presente na publicação de Ayres aparece como um resumo da teoria, cujo foco principal é a resolução de exercícios, fato esse expresso na própria capa do livro, onde vemos “Cálculo diferencial e integral”, “resumo da teoria”, “974 problemas resolvidos”. Nesse sentido, o autor busca deixar claro a principal proposta da obra, destacando que tal livro não se trata de um livro texto, e recomenda que ele seja utilizado em conjunto com outros livros de referência sobre a teoria. Na apresentação da obra, Ayres comenta que:

O emprêgo correto do livro exige o conhecimento perfeito do que êle é e do que não é. Não encerra demonstrações de teoremas e não discute princípios. Não é, decididamente, um livro texto e não deve ser empregado com o fim de evitar o estudo do livro texto regular. Cada capítulo possui um rápido sumário das definições,

princípios e teoremas necessários, seguido de uma série de problemas resolvidos, de dificuldade crescente. Normalmente, os primeiros problemas destinam-se a tornar mais claras as definições e teoremas e podem ser vantajosamente usados durante o estudo da teoria do livro texto (AYRES, 1957).

Dessa forma, como já evidencia o autor, o resumo da teoria aparece no início de cada capítulo como se fosse um sumário da teoria, onde são destacados os conceitos julgados como importantes para a prática da resolução dos exercícios. Dessa forma, a principal característica da obra é a sua abordagem procedimental fundada a partir de numerosos exercícios, forma pela qual o autor acredita que a teoria ficará aprendida de maneira satisfatória.

Nos capítulos do livro, temos conteúdos desde o cálculo elementar até o mais avançado. O conceito de limite, nesse sentido, é apresentado em poucas palavras da forma padrão, sem sua definição formal. Em seguida são apresentadas as propriedades de limite e a definição de continuidade. Os exercícios propostos em seguida, buscam aplicar tais noções a partir de exercícios diretos do tipo “calcule”. Essa primeira parte é apresentada em poucas páginas.

A derivada aparece como o limite da razão entre os acréscimos e os primeiros exercícios buscam utilizar essa definição para o cálculo das derivadas. No capítulo seguinte vemos um formulário com as regras de derivação, que a partir de então, serão utilizadas nas aplicações. Os sétimo e oitavo capítulos são destinados para o estudo dos gráficos das funções, a partir dos testes envolvendo derivadas. O que temos, portanto, é uma sequência de procedimentos que deverão ser seguidos para resolver os problemas de máximos e mínimos, bem como a construção do gráfico. Nos exercícios propostos para essas unidades, é onde o foco passa a ser os problemas mais contextualizados. As associações da noção de derivada com velocidade e aceleração também fazem parte da obra.

A integral, por sua vez, aparece um pouco mais adiante, baseada na noção de antiderivação, e em seguida temos um formulário com as principais integrais. Os problemas propostos nessa parte buscam utilizar a tabela para cálculo de diversos tipos de integrais. Nas páginas seguintes temos a apresentação de alguns métodos que auxiliam a integração, tais como a integral por partes, substituição trigonométrica e frações parciais. Mais adiante temos a integral definida como área e novos exercícios de aplicação.

Como o livro analisado trata-se de uma coleção de exercícios com um resumo da teoria, o que podemos concluir é que definitivamente não se trata de um livro texto, e que segue uma abordagem procedimental, com exercícios técnicos de aplicação, e poucos contextualizados.



## CAPÍTULO 7. ANÁLISES DOS LIVROS-TEXTOS: ENSINO SUPERIOR ANTES DA REFORMA DE 1968

Os livros-textos de cálculo infinitesimal são, conforme já fora exposto, a parte principal desta pesquisa e dando prosseguimento ao nosso estudo, buscamos apresentar neste capítulo a análise de dois exemplos de textos utilizados no ensino superior brasileiro antes da Reforma Universitária de 1968.

Dentre eles, temos o “Curso de Cálculo Infinitesimal” do professor Altamiro Tibiriçá Dias, que representa um importante componente da história do desenvolvimento da disciplina de análise, e conseqüentemente também de cálculo, no Brasil. Isso deve-se ao fato de que tal obra pode ser considerada o primeiro livro-texto de produção autoral brasileira sobre o assunto, segundo o estado atual das pesquisas, e que se caracterizou por não se tratar de uma mera reprodução de consagrados livros estrangeiros. Além disso, o livro de Tibiriçá foi destinado aos alunos de engenharia, e isso nos auxilia a compreender como era uma abordagem adotada para o cálculo nesses ambientes de formação, ao menos para esta época e para esta instituição.

A segunda obra analisada é de origem americana, e possui autoria dos professores Granville, Smith e Longley. O trabalho desses autores, intitulado por “Elementos de Cálculo Diferencial e Integral” obteve um destaque no meio universitário ao longo do século XX, e foi destinado aos estudantes do nível superior no geral. A sua repercussão também chegou ao Brasil, e em 1961 foi publicada uma versão traduzida para o português, indicada para os cursos de matemática, engenharia e física, mas que, em sua maioria, foi utilizada pelos alunos de licenciatura em matemática. Nossa análise é construída a partir dessa tradução.

Comprendemos a relevância de tais obras para os desdobramentos desta pesquisa, e como de costume, também incluímos um breve resumo sobre os personagens atrelados a tais obras, com intuito de proporcionar uma maior identificação com relação aos seus respectivos autores.

### 7.1. Análise do “Curso de Cálculo Infinitesimal” (1952-1962), Tibiriçá

Tibiriçá (1911-1993) nasceu no estado do Rio de Janeiro, e formou-se em engenharia pela Escola de Minas de Ouro Preto, na turma de 1937. Mais tarde, tornou-se professor catedrático desta mesma instituição, onde também exerceu o cargo de diretor durante um período do ano de 1989¹⁸. Entre seus trabalhos publicados, destacamos a relevância do *Curso*

---

¹⁸ A lista de diretores da Escola de Minas pode ser consultada em: <https://semopbh.com.br/diretores-escola-de-minas-de-ouro-preto>. Acesso em 03/03/21.

*de Cálculo Infinitesimal*, publicado pela primeira vez em 1952, e recebeu uma nova edição em 1962, com auxílio da Fundação Gorceix. A obra original foi criada a partir de suas notas de aulas voltadas para as turmas de engenharia, e com isso, vemos que tal texto surge a partir da necessidade de ensino para os futuros engenheiros e possui características do método de ensino adotado pela instituição onde Tibiriçá exercia sua profissão.

Um primeiro ponto importante que devemos destacar é a grande semelhança que tal livro-texto possui com relação aos livros de análise matemática, e este é um fato curioso por se tratar de um objeto voltado para a formação de engenheiros. Na apresentação da segunda edição, Santos¹⁹ chega a categorizar tal obra como um tratado de análise. Tibiriçá afirma que seu objetivo era formular um texto completo sobre todos os pontos do programa da cadeira de cálculo da Escola de Minas, juntando vários conceitos que raramente eram encontrados em uma obra só. Além disso, seu trabalho também pode ser considerado um dos primeiros livros-textos de produção autoral brasileira sobre o assunto.

A repercussão desse trabalho pode ser conferida a partir da necessidade da criação de uma nova edição, onde foi possível corrigir alguns erros e fazer uma revisão mais detalhada sobre a redação do texto. As mudanças que podemos observar entre essas duas edições, referem-se ao número de páginas, e a reformulação de alguns enunciados com acréscimos de considerações. A questão do número de páginas da segunda edição ser superior ao da anterior, se caracteriza também pelo fato de que o primeiro texto possuía uma versão datilografada, substituída pela versão impressa da segunda edição, e com isso, através desse novo formato, o texto passou a ser mais centralizado, fazendo com que ocupasse mais espaço. De forma geral, as duas versões possuem a mesma estrutura de organização textual, e, a ordem dos capítulos e apresentação dos conceitos é preservada.

Nesse sentido, buscamos apresentar uma análise mais detalhada dessa segunda edição. A estrutura do texto é composta por um capítulo de introdução aos números reais, onde é estabelecida a construção dos conjuntos numéricos, bem como suas propriedades e operações, pois o autor considera que tais definições são essenciais para a boa compreensão dos estudos que serão desenvolvidos mais adiante. Então, nesta parte inicial vemos a caracterização dos números naturais através da noção de sucessores, bem como os números fracionários e relativos, números racionais e irracionais, chegando finalmente ao conjunto dos números reais, cuja construção é feita a partir dos cortes de Dedekind.

---

¹⁹ Christovam Colombo Santos foi professor da Escola de Engenharia da UMG (atual UFMG), e ex-professor da Escola de Minas de Ouro Preto.

O restante do livro é dividido entre três partes, conforme a seguinte organização: livro I, com uma revisão preliminar e complementos de álgebra, variáveis reais, funções, e a teoria de limites; livro II destinado ao cálculo diferencial; e livro III onde é apresentado o cálculo integral. De acordo com os conteúdos presentes no livro I, podemos caracterizar que tal curso de cálculo estabelecido por Tibiriçá segue a tendência de uma análise algébrica, a partir das noções de Euler e Cauchy. A seguir, apresentaremos uma análise de cada parte desse livro, tentando destacar como aparecem os principais elementos do cálculo, sendo eles: a definição de função, limite, continuidade, diferenciais, derivada e integral.

O Livro I recebe o nome de “preliminares”, e é dividido em seis capítulos. Na primeira parte, vemos uma revisão sobre conjuntos e complementos de álgebra, e com isso, temos os conceitos de ordem, densidade, enumerabilidade, ponto de acumulação, entre outros. O segundo capítulo é destinado às variáveis reais, e com isso surgem as leis de variação e uma primeira definição do conceito de limite. O interessante dessa estrutura, é que o autor define limite antes de definir função, tendo em vista que toda sua abordagem inicial se refere apenas às variáveis, que, na prática, tratam-se de sequências. O conceito de limite, nesse sentido, é introduzido da seguinte forma:

Diz-se que uma variável  $x$ , que varie segundo uma lei, tem para limite finito  $a$  (ou tende para o limite finito  $a$ ) escrevendo-se:

$$(1) \quad \lim x = a$$

quando dado um número positivo  $\varepsilon$ , por menor que seja, se pode determinar um valor  $x_1$  de  $x$  tal que, para todos os *infinitos* valores de  $x$  seguintes de  $x_1$ , se tenha sempre:

$$(2) \quad |x - a| < \varepsilon$$

(TIBIRIÇÁ, 1962, p.81).

Essa definição revela ao leitor uma visualização inicial sobre conceito de limite referindo-se apenas às variáveis. É importante ressaltar a diferença entre funções e variáveis, tendo em vista que apesar da semelhança, ambas possuem significados diferentes, como por exemplo, a exigência de que para cada valor  $x$ , se deve corresponder apenas um valor de  $y$ . Além disso, as variáveis representam relações entre quantidades, enquanto o conceito de função é algo mais específico. Vemos, portanto, o início de uma apresentação formal do conceito de limite. Mais adiante, o autor estende essa definição para o caso das sucessões (sequências). Com isso, temos:

Por definição, o limite de uma sucessão, caso haja, será o de uma variável cujos valores sucessivos sejam diversos termos da sucessão.

A condição (2) escrever-se-á agora  $|u_n - a| < \varepsilon$ , o que nos permitirá dizer eu uma sucessão tende para o limite finito  $a$  quando, dado um número positivo  $\varepsilon$ , por menor que seja, se pode determinar um número  $N$  tal que, para todo índice  $n > N$ , se tenha sempre

$$(5) \quad |u_n - a| < \varepsilon$$

A condição (4) permitirá dizer-se que uma sucessão, tende para um limite  $a = \pm\infty$  quando, dado um número  $\lambda'$  arbitrariamente grande, existir um número  $N$  tal que, para todo  $n > N$ , se tenha:

$$(5') \quad u_n > \lambda$$

Analogamente, definiríamos o limite  $-\infty$  (TIBIRIÇÁ, 1962, p.82).

Além dessa ampliação do conceito de limite, o autor busca trazer aliado desta última definição, as noções de convergência e divergência, conforme veremos a seguir:

Se, dada a sucessão  $\{u_n\}$ , existir sempre um número  $a$  satisfazendo a condição (5) ou (5'), diremos que  $\{u_n\}$  é *regular; convergente* se  $a$  for finito, e *divergente* se  $a$  for infinito. Se não houver um tal número  $a$ , a sucessão se dirá não regular (TIBIRIÇÁ, 1962, p.83).

Nas páginas seguintes, o autor apresenta alguns teoremas e corolários relacionados ao tema discutido até então, e suas propriedades. Ainda neste capítulo, chegamos ao tópico “limite de funções”, e neste momento aparece pela primeira vez, uma definição para o conceito que é tão importante no âmbito de um curso de cálculo, e que neste caso, podemos chamar como um curso de análise. Então:

Diz-se que  $y$  é função de  $x$  escrevendo-se  $y=f(x)$ , quando exista entre  $x$  e  $y$  uma correspondência tal que, fixando um valor de  $x$ , o de  $y$  fique univocamente definido. Diz-se que  $y$  é *função de várias variáveis*  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , quando exista entre  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $y$  uma correspondência tal que, fixado um grupo de valores para  $x_1, x_2, \dots, x_n$  o valor de  $y$  fique univocamente definido, escrevendo-se  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Em geral, os valores de  $y$  variam com os de  $x$ , e, caso os valores de  $y$  tenham para limite  $A$ , quando se deem a  $x$  valores sucessivos cujo o limite seja  $a$ , se dir-se-á que  $y$  tem limite para  $A$ , quando  $x \rightarrow a$ ; escrevemos, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} y = A$$

(TIBIRIÇÁ, 1962, p.89).

Com isso, a primeira definição para o conceito de função aparece atrelado ao conceito de limite, e uma nova extensão desse conceito pode ser analisada.

Se  $a$  e  $A$  forem finitos, a definição anterior permitirá que se escrevam:

$$\begin{cases} 0 < |x - a| < \varepsilon & (1) \\ |y - A| < \sigma & (2) \end{cases}$$

Isto é:  $y$  tem para limite  $A$  quando  $x \rightarrow a$  se, dado um número positivo  $\sigma$  arbitrariamente pequeno, existir um número positivo  $\varepsilon$  tal que, na vizinhança restrita  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  de  $a$ , a diferença entre os valores correspondentes de  $y$  e  $A$  seja, em valor absoluto, menor que  $\sigma$  (TIBIRIÇÁ, 1962, p.90).

Nesse sentido, nas páginas subsequentes, o autor busca estabelecer as propriedades de limite a partir da definição de função. O texto em si, é bastante formal e possui uma estrutura de definições, teoremas, corolários e demonstrações, que é exatamente o que se espera de um curso de análise. Alguns exemplos são dados junto das definições, porém não vemos exercícios propostos sobre os conceitos definidos. Mais adiante, o autor nos apresenta uma nova definição importante, a saber, o conceito de infinitésimos.

*Infinitamente pequenos*, ou *infinitésimos* são variáveis cujo limite é zero; infinitésimo é, pois, uma variável, e nenhum número, mesmo pequeno, poderá ser um infinitésimo. Segundo a definição, se  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$  são infinitésimos, em número finito, serão também infinitésimas as expressões:

$$\alpha + \beta + \gamma, \alpha\beta\gamma\dots\lambda \text{ e } \alpha^n, n \text{ finito positivo}$$

(TIBIRIÇÁ, 1962, p.98).

Dessa forma, temos que Tibiriçá define o infinitamente pequeno tal como fora apresentado por Cauchy²⁰. Nesse sentido, tais objetos são considerados como variáveis. Ao final deste capítulo, o autor acrescenta algumas considerações, e justifica os estudos dos infinitésimos como sendo:

O Método do Cálculo Infinitesimal, ou simplesmente Cálculo Infinitesimal, é aquele em que se utiliza o conhecimento dos infinitésimos. Divide-se em Cálculo Diferencial e Cálculo Integral:

no cálculo diferencial, as quantidades são consideradas como o limite da relação de dois infinitamente pequenos;

no cálculo integral, as quantidades são consideradas como o limite da soma de infinitésimos em número indefinidamente crescente (TIBIRIÇÁ, 1962, p.102).

No capítulo 3, temos mais algumas definições para o conceito de função, e com isso, é apresentado função unívoca e uniforme, funções inversas, paridade de funções e periodicidade. Nessa parte também vemos as representações analítica e geométrica de uma função. Em seguida, a definição de continuidade e descontinuidade é apresentada através da ideia de oscilação de uma função em um ponto.

---

²⁰ Uma referência para compreender tal noção é a literatura de Schubring (2005): *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century France and Germany*.

Uma função é *contínua* num ponto quando a sua oscilação é nula nesse ponto. Portanto, se  $y=f(x)$  for contínua no ponto  $a$  e na vizinhança  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  de  $a$  os seus extremos forem  $E_\varepsilon$  e  $e_\varepsilon$ , teremos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon - e_\varepsilon = 0$$

Da definição resulta que, dado um número positivo  $\sigma$ , arbitrariamente pequeno, deverá existir um número positivo  $\varepsilon$  tal que, na vizinhança  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  de  $a$ , se tenha:

$$E_\varepsilon - e_\varepsilon < \sigma$$

(TIBIRIÇÁ, 1962, p.107).

O contrário disso, ocorre quando a oscilação não é nula, e, portanto, a função será descontínua no ponto em questão. Os possíveis tipos de descontinuidade são apresentados, e a páginas seguintes são destinadas a novas definições e teoremas sobre esse assunto, e logo após, também vemos esse conceito ser expandido para o caso de funções de várias variáveis ao longo do quarto capítulo.

No capítulo 5, podemos observar as funções elementares, tais como as formas indeterminadas da função afim, exponencial e trigonométrica, que são ditas elementares, pois a maioria das funções se pode expressar como combinação destas. O autor prossegue com mais algumas definições sobre tais funções e suas inversas, e no próximo capítulo estende tudo o que foi apresentado nesta primeira parte do livro para as suas aplicações.

Com isso, chegamos ao Livro II, cujo foco principal é o cálculo diferencial, e possui uma estrutura composta por quatro capítulos. Logo no início do primeiro capítulo, o autor apresenta uma definição para a noção de *acréscimos*, considerada como a diferença da função em um determinado ponto.

Seja  $y=f(x)$  uma função de  $x$  definida univocamente no intervalo  $(a, b)$  que contem  $x_0$  e  $x$ . Então, a diferença  $\Delta x = h = x - x_0$  se chamará o *acréscimo da variável* no ponto  $x_0$ ;  $h$  poderá ser escolhido arbitrariamente e  $x = x_0 + h$  se dirá um *ponto vizinho* de  $x_0$ . A diferença

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Será o *acréscimo da função* no ponto  $x_0$  para o acréscimo  $h$  da variável  $x$  (TIBIRIÇÁ, 1962, p.139).

Vemos a importância dessa definição, tendo em vista que o conceito principal desse capítulo é definido a partir dessa noção de acréscimo. A partir disso, a derivada é apresentada da seguinte forma:

Chama-se derivada da função  $y=f(x)$  em relação a  $x$ , no ponto  $x_0$ , ao limite da razão do acréscimo da função para o da variável no ponto  $x_0$  quando este último tende para zero, caso esse limite exista determinado, finito ou não, e seja independentemente do sinal e da lei segundo a qual o acréscimo da variável tenda para zero (TIBIRIÇÁ, 1962, p.139).

O autor insere as possíveis notações para a derivada e em seguida utiliza uma representação para descrever o que foi apresentado, chegando ao seguinte formato para a definição da derivada:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

A partir disso, o autor prossegue utilizando a definição apresentada para encontrar a derivada das funções elementares, e nas páginas seguintes, continua introduzindo novos conceitos e teoremas sobre o assunto. Neste capítulo, também vemos a generalização de mais algumas derivadas importantes, cuja técnica de cálculo sempre parte da teoria de limites. A definição de diferencial também aparece nesse contexto, cuja apresentação é dada da seguinte forma:

Chama-se *diferencial* duma função diferenciável à parcela do seu acréscimo que é proporcional ao acréscimo da variável, indicando-se pela letra  $d$  anteposta à função:

$$dy = A \cdot \Delta x$$

Resulta que a diferencial de  $y=f(x)$  é função de  $\Delta x$ , podendo ser grande ou pequena com  $\Delta x$ , e é, em geral, função de  $x$  também (TIBIRIÇÁ, 1962, p.145).

As propriedades mais importantes sobre derivadas também são estabelecidas nesse capítulo, e é a partir dessas regras que são encontradas as formas gerais de cálculo da derivada das demais funções. A segunda seção deste capítulo é destinada aos aspectos e características das funções, que podem ser verificados através da derivada, tais como, os intervalos de crescimento e decréscimo. Antes do final deste capítulo, temos por último, a definição de derivadas sucessivas, ou então, as chamadas derivadas de ordem superior.

Nos capítulos II e III temos a definição de derivadas parciais, utilizadas para cálculos que envolvem funções de duas ou mais variáveis, basicamente como se fosse uma expansão do capítulo anterior para essas outras funções. A partir do capítulo IV, observamos um trabalho de caracterização das derivadas de funções implícitas de uma ou mais variáveis, seguido pelo método de mudança de variáveis. Dessa forma, o autor encerra essa parte do livro que tem como título “Cálculo Diferencial”. Aqui temos outro ponto que merece destaque, que se justifica pelo fato da ausência do método de aplicações do conceito de derivada, a saber, os problemas de máximos e mínimos. Sendo este um fato bastante curioso, tendo em vista a sua importância,

podemos entender que o intuito nesta primeira abordagem era o de estabelecer a teoria sobre o conceito e as noções iniciais, cujas aplicações aparecem apenas no tomo II do conjunto.

Com isso, chegamos ao Livro III, cujo objetivo é apresentar o cálculo integral, seguindo os padrões de formalização que são características da obra de Tibiriçá. O mesmo fato que destacamos no Livro II, referente ao cálculo diferencial, também ocorre neste, e com isso, verificamos uma tentativa de construção dos conceitos essenciais, para uma aplicação futura na continuação da obra. Essa parte do texto também é dividida entre quatro capítulos que detalharemos a seguir.

O primeiro capítulo no Livro III é intitulado como Integrais indefinidas, e com isso, logo no início o autor define que:

*A integração é a operação inversa da diferenciação; ela tem por fim, dada a função  $f(x)$ , determinar uma função  $F(x)$  – chamada primitiva de  $f(x)$  – cuja derivada seja  $f(x)$ ; ou, o que é a mesma coisa, tem por fim, dada a diferencial  $f(x)dx$ , determinar uma função  $F(x)$  – chamada integral indefinida de  $f(x)dx$  – cuja diferencial seja  $f(x)dx$ . Indica-se com o símbolo  $\int$ , a que se faz seguir a diferencial dada:*

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Que se lê: integral indefinida de  $f(x)dx$  (TIBIRIÇÁ, 1962, p.231).

Portanto, a integral nesse contexto é definida como a operação inversa a diferenciação, que mais adiante será definida como o limite de soma de infinitésimos em um número indefinidamente crescente. O autor também discute a necessidade da adição de uma constante arbitrária no processo de integração.

Com isso, logo em seguida vemos os processos de generalização do cálculo integral através dessa primeira noção apresentada. Nessa parte também são colocadas algumas propriedades acerca desse cálculo, seguido pelo método de substituição e integração por partes. Na próxima seção, é apresentado mais um método de auxílio para resolução de integrais, o chamado método das frações parciais. Neste capítulo, o que temos é uma longa apresentação das integrais de diversos tipos de funções, que são mais comuns, e que provavelmente servirá de apoio para as aplicações futuras.

No capítulo II, temos a apresentação das integrais definidas, e a partir disso, a integral é definida como o limite das somas infinitas:

Seja  $y=f(x)$  uma função univocamente definida em todos os pontos do intervalo  $(a,b)$ ,  $a < b$ , no qual é limitada, isto é, os seus extremos  $e$  e  $E$  são números finitos. Dividamos  $(a,b)$  em  $n$  intervalos parciais quaisquer,  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$ ; tomemos em



cada intervalo parcial um ponto arbitrariamente escolhido e sejam  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  esses pontos; calculemos os valores  $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)$  da função em cada um desses pontos; multipliquemos cada um desses valores pelo diâmetro de intervalo correspondente, e façamos o somatório

$$S_n = f(x_1)\delta_1 + f(x_2)\delta_2 + \dots + f(x_n)\delta_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\delta_i$$

que escreveremos, abreviadamente:

$$S_n = \sum_1^n f(x_i)\delta_i$$

Se subdividirmos cada intervalo parcial  $\delta_i$ , em outros  $\delta_i', \delta_i'', \delta_i''', \dots$  obteremos nova divisão de  $(a, b)$  em  $n'$  intervalos parciais, e poderemos, com a repetição do processo anterior, calcular novo somatório  $S_{n'}$ ; com nova subdivisão, novo somatório  $S_{n''}$ , e assim por diante; assim, teremos a sucessão

$$\{S_n\} = S_n, S_{n'}, S_{n''}, \dots$$

Posto isso, chama-se integral definida de  $f(x)$ , de  $a$  até  $b$ , ao limite da sucessão acima, quando  $n$  tende para infinito e todos os  $\delta\delta$  tendem para zero, caso esse limite exista, determinado e único, independentemente da escolha dos valores  $f_i$  dentro de cada intervalo parcial e da lei segundo a qual os  $\delta\delta$  tendam para zero. Então a função se dirá *integrável*, a integral se dirá *convergente*, e  $x$  será a *variável de integração* (TIBIRIÇÁ, 1962, p.281).

Esse é um exemplo de definição que teve mudanças entre a primeira e segunda edição, pois nessa Tibiriçá acrescenta algumas considerações importantes que complementam a noção de integral definida. Dessa forma, a definição passou a ter um caráter mais didático que auxilia o leitor na compreensão do conceito. Com isso, o autor apresenta o duplo aspecto que o conceito de integral possui, a saber, sua definição como limite das somas infinitas, e sua característica de ser a operação inversa à diferenciação. Neste capítulo também temos o teorema fundamental do cálculo seguida de sua demonstração.

Se  $f(x)$  fôr contínua no intervalo  $(a, b)$ , teremos  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$  em que  $F$  é uma função contínua cuja diferencial seja  $f(x)dx$  em cada ponto do intervalo  $(a, b)$

.Com efeito, sendo  $X$  um ponto de  $(a, b)$  e  $f(x)$  contínua, teremos:  $\varphi(X) = \int_a^X f(x)dx$  e  $\varphi'(X) = f(X)$ . Sendo, pois,  $F(x) + C$  as integrais indefinidas (contínuas como  $\varphi(x)$ ) de  $f(x)dx$ , haverá um valor  $C_1$  de  $C$  para o qual se tenha  $\varphi(X) = F(X) + C_1$

, ou seja,  $\int_a^X f(x)dx = F(X) + C_1$ , qualquer que seja  $X$  do intervalo  $(a, b)$ . Para  $X=a$ ,

vem  $0 = F(a) + C_1$ , donde  $C_1 = -F(a)$ , resultando:  $\int_a^X f(x)dx = F(X) - F(a)$ .

Fazendo agora  $X$  tender para  $b$ , teremos a tese, se  $F(x)$  fôr contínua, c.q.d. (TIBIRIÇÁ, 1962, p.297).

O autor prossegue com mais algumas definições envolvendo agora esta última definição apresentada, por meio de novos teoremas e corolários, desenvolvendo a integral imprópria e os métodos de integração para o caso das integrais definidas. O capítulo III conta com a definição e exploração de integrais múltiplas, seguido do último capítulo que apresenta a integração das diferenciais totais de primeira ordem.

Uma primeira conclusão sobre essa análise, é assumir que o livro-texto de Tibiriçá possui fortes raízes nos fundamentos da análise matemática, tendo em vista sua estrutura robusta e repleta de demonstrações e teoremas, sendo este primeiro livro com poucas representações geométricas e aplicações. Além disso, o livro não se baseia nos livros-textos franceses, do tipo de formação para engenheiros. Até agora, não sabemos se Tibiriçá foi influenciado por livros alemães ou italianos.

Dessa forma, sua estrutura é muito semelhante ao curso de análise cujo foco são os alunos de matemática, o que torna este livro como um ponto fora da curva no âmbito da formação de engenheiros. Este último fator é o que caracteriza uma surpresa com relação ao trabalho de Tibiriçá, que admite uma abordagem rigorosa e foi destinado ao ensino numa instituição de formação técnica. Nesse sentido, é importante destacar o fato de que tal livro foi elaborado na época onde os elementos do cálculo compuseram parte obrigatória do currículo das escolas secundárias, e assim, os alunos ingressantes da Escola de Ouro Preto já deveriam ter obtidos conhecimentos básicos referentes ao cálculo, possibilitando assim, um ensino de análise num nível superior.

## **7.2. Análise dos “*Elementos de Cálculo Diferencial e Integral*” (1961), Granville, Smith e Longley**

Dentre os livros textos cujo foco principal caracterizou-se pelo uso no ensino superior, temos um exemplo de destaque entre estudantes universitários ao longo do século XX. Os “*Elementos de Cálculo Diferencial e Integral*” apresentados por William Anthony Granville, Percy Franklin Smith e William Raymond Longley tiveram uma repercussão que pode ser notada através de suas inúmeras edições publicadas.

A fim de descrever sucintamente as figuras por trás de tal obra, temos, em primeiro lugar, Granville, que fora um matemático americano e presidente do *College of Gettysburg*, seguido pelos professores de matemática Smith e Longley, ambos da *Yale University*. Entre os autores citados, Granville aparece como o principal, cuja primeira versão é datada de 1904, com coautoria e revisão de Smith. Longley passa a configurar o papel de coautor apenas em edições posteriores, a partir de 1911.

Tal obra destaca-se também por sua originalidade em referência às suas questões metodológicas e didáticas para o ensino de cálculo. Granville reconhecia a enorme diferença entre tratados rigorosamente bem detalhados e um livro texto voltado para o uso em sala de aula. Vejamos suas palavras presentes no prefácio da primeira edição:

O presente volume é o resultado de um esforço para escrever um livro texto moderno sobre cálculo, que será essencialmente um livro de exercícios. Com esse fim em mente, o princípio pedagógico, que cada resultado deveria ser tanto intuitivo como analiticamente evidente ao estudante, foi constantemente mantido na mente. Realmente foi melhor pensar que, em alguns casos, como, por exemplo, em Máximos e Mínimos e no Teorema do Valor Médio, deve-se discutir primeiro a questão do lado intuitivo, de modo que a significância da nova ideia possa ser clara da maneira mais direta. O objetivo não foi ensinar o estudante a depender unicamente da sua intuição, mas, em alguns casos, usar essa faculdade antes da investigação analítica (GRANVILLE, 1904, p. III, tradução nossa).

É muito interessante notar a sua preocupação com as questões pedagógicas que envolviam o ensino de cálculo, e a intenção de estabelecer um texto voltado para ser ensinado. Em um dos boletins da Sociedade Matemática Americana (AMS), Van Vleck²¹ analisa alguns trechos da obra de Granville e destaca a necessidade de livros didáticos modernos, pois aqueles que estão familiarizados com o seu desenvolvimento e reconstrução, o reconhecem. Com isso, ele afirma que:

Em primeiro lugar, deve-se ter em mente que, para uma aula comum, o livro didático deve ser principalmente um livro de exercícios. O Dr. Granville entende perfeitamente essa necessidade e pode-se prever com segurança que seu livro será um sucesso decisivo na sala de aula. De aparência incomumente atraente, o volume apresenta o assunto com clareza e traz as marcas de um professor que sente as dificuldades de um aluno. Há um estoque incomumente grande e bem graduado de exemplos, dos quais o aluno obterá uma avaliação admirável nos ramos da matemática anteriores ao cálculo (VAN VLECK, 1906, p.183, tradução nossa).

E Van Vleck não estava errado ao presumir que tal obra seria um sucesso. O texto publicado originalmente em língua inglesa, recebeu traduções para outros idiomas, incluindo o português. Dessa forma, buscamos investigar uma versão de 1961, que consiste em uma tradução para língua portuguesa feita por José Abdelhay, professor da Universidade do Brasil.

O texto completo da versão que analisamos é apresentado em volume único com cerca de 700 páginas. Dessa forma, buscamos destacar os conceitos que compõem o nosso estudo, a saber, a teoria de limites, continuidade, derivadas, diferencial e integral. A sua estrutura é dividida entre três partes, sendo a primeira delas voltada para o cálculo diferencial, seguida pelo

---

²¹ Edward Burr Van Vleck foi um matemático estadunidense, e em 1913 tornou-se presidente da AMS.

cálculo integral, e a última para cálculo diferencial e integral. Os elementos que desejamos investigar estão presentes na primeira e segunda partes.

Começando pelo cálculo diferencial, temos que a teoria de limites encontra-se nessa secção e detalharemos como essa apresentação ocorre. Antes disso, os autores dedicam um capítulo voltado para um formulário de elementos da álgebra, trigonometria e geometria analítica, que servem como uma revisão de conceitos importantes para o estudo que será feito ao longo do livro. A ideia de limite aparece em um capítulo posterior, em conjunto com a definição de variáveis e funções. Com relação a este último, Granville apresenta as noções gerais, notações e representações gráficas, além de discutir a impossibilidade da divisão por zero, que faz com que algumas funções não sejam definidas em determinados pontos.

Sobre o conceito de limite, as suas noções gerais são apresentadas através do clássico exemplo da área do círculo, que é o limite da área de um polígono regular de  $n$  lados inscritos no círculo, fazendo  $n$  tender ao infinito. A partir desse exemplo, a definição de limite de variável é introduzida com a ideia de aproximação. Em seguida, o limite de uma função é apresentado de forma bastante intuitiva, sem recorrer à definição mais formalizada com desigualdades que envolvem constantes arbitrárias  $\mathcal{E}$  e  $\delta$ . Vejamos a seguir:

**Limite de uma função.** Nas aplicações, o que usualmente aparece é isto. Temos uma variável  $v$  e uma dada função  $z$  de  $v$ . A variável independente  $v$  toma valores tendendo a  $l$  e temos que examinar os valores da variável dependente  $z$ , em particular, determinar se  $z$  tende a um limite. Se existe uma constante  $a$  tal que  $\lim z = a$ , então se escreve  $\lim_{v \rightarrow l} z = a$ , que se lê “limite de  $z$ , quando  $v$  tende a  $l$ , é igual a  $a$ ” (GRANVILLE, 1961, p. 14).

Um fator que chama a nossa atenção é a frase utilizada na primeira linha dessa definição, “nas aplicações, o que usualmente aparece é isto”. Tendo em vista que essa é a única noção de limite de uma função apresentada no livro, vemos que Granville decide apenas por utilizar a noção intuitiva de limite, sem demonstrações, e considera que para as aplicações isso é o necessário e suficiente.

A continuidade de uma função em um ponto é introduzida logo em seguida a partir do limite, e a descontinuidade como um caso contrário. Antes de encerrar este capítulo, também vemos uma discussão acerca das noções de infinito e infinitésimos, sendo este último o valor de uma variável que tende para zero. Apesar do tratamento dos limites de Granville aparecer de forma bastante usual, envolvendo poucos teoremas e exercícios, vemos que o foco principal se localiza no conceito do capítulo seguinte, a saber, o de derivada, sendo a teoria de limites uma fundamentação teórica para este.

Conforme podemos ver na maioria dos livros, a noção de derivada quase sempre é motivada através da ideia de acréscimos, e, não obstante a isso, Granville também adota essa linha de construção. O conceito mais preciso de derivada de uma função surge, portanto, como *o limite da razão do acréscimo da função para o acréscimo da variável independente, quando este último tende a zero* (GRANVILLE, 1961, p.25). O autor ainda descreve que o processo de achar a derivada chama-se derivação ou diferenciação, e em seguida apresenta as notações para

esse conceito, e destacando que o símbolo  $\frac{dy}{dx}$  não se trata de um quociente, mas sim o valor correspondente ao limite do quociente verdadeiro  $\Delta y / \Delta x$ . Outro ponto que merece destaque é a forma como é apresentada a regra geral para se encontrar a derivada de uma função. Vejamos:

Primeiro Passo: Substitui-se  $x$  por  $x + \Delta x$  e calcula-se o novo valor da função,  $y + \Delta y$ .

Segundo Passo: Subtrai-se o dado valor da função do novo valor, achando-se, assim,  $\Delta y$  (o acréscimo da função).

Terceiro Passo: Divide-se  $\Delta y$  (acrécimo da função) por  $\Delta x$  (acrécimo da variável independente).

Quarto Passo: Acha-se o limite do quociente quando  $\Delta x$  (acrécimo da variável independente) tende a zero. Êste limite é a derivada (GRANVILLE, 1961, p.28).

Destaca-se aqui o cuidado didático que Granville possui para estabelecer a ideia de derivada e sua forma de encontrá-la, fazendo essa breve explicação, antes mesmo de falar sobre qualquer técnica de derivação. Alguns exemplos e exercícios aparecerem logo em seguida, e a interpretação geométrica da derivada também é explicitada através de sua relação com a reta tangente. As fórmulas de derivação mais gerais são todas deduzidas no capítulo seguinte, partindo do passo a passo estabelecido anteriormente.

O quinto capítulo é destinado às aplicações da derivada, e neste podemos ver os problemas de máximos e mínimos, relação com a função crescente e decrescente, e interpretações físicas. No capítulo VI, temos a expansão do conceito para as derivadas de ordem superior, seguidas pelas suas interpretações matemáticas e físicas.

Notória é a forma como é feita a apresentação os conceitos no geral, sempre partindo de exemplos para em seguida formular a sua definição mais precisa. Conforme destacamos no início, o nosso intuito não é o de analisar o livro completo, mas sim de investigar aspectos presentes nele que fazem parte do nosso estudo tal como propomos. Dessa forma, partimos para o capítulo IX onde aparece um conceito que julgamos importante, os chamados diferenciais.

Na construção da noção de derivadas, deixou-se claro que o símbolo de derivada não se tratava de um quociente. No entanto, em algumas aplicações é válido se estudar o significado

das expressões  $dy$  e  $dx$  sendo analisadas separadamente. O diferencial de uma função fica estabelecido como sendo a *derivada multiplicada pela diferencial da variável independente* (GRANVILLE, 1961, p.166). Nessa parte, os autores descrevem que o diferencial de uma variável pode ser assumido como sendo igual ao acréscimo dessa variável, isto é,  $dx = \Delta x$ .

Resta-nos agora descrever o tratamento das integrais presentes na segunda parte do livro. Nesse sentido, temos que o cálculo integral inicia-se no capítulo XII e logo nas primeiras linhas vemos uma explicação acerca das integrais imediatas. A motivação para a construção desse conceito parte da ideia de funções inversas, e Granville apresenta alguns desses exemplos. Dessa forma, temos que:

No cálculo diferencial aprendemos como calcular a derivada  $f'(x)$  de uma dada função  $f(x)$ , uma operação indicada por:  $\frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$ , ou, se usarmos diferenciais, por  $df(x) = f'(x)dx$ . Os problemas do cálculo integral dependem da *operação inversa*, precisamente: *Achar uma função  $f(x)$  cuja derivada  $f'(x) = \phi(x)$  é dada*. Ou, já que é usual usar diferenciais no cálculo integral, podemos escrever:  $df(x) = f'(x)dx = \phi(x)dx$  e pôr o problema como segue: *Dada a diferencial de uma função, achar a função*. A função assim achada chama-se *integral* da dada função, o processo de achá-la chama-se *integração* e a operação de integração é indicada pelo  *sinal de integração*  $\int$  posto antes da dada expressão diferencial; assim,  $\int f'(x)dx = f(x)$ , lê-se integral de  $f'(x)dx$  igual a  $f(x)$ . A diferencial  $dx$  indica que  $x$  é a *variável de integração* (GRANVILLE, 1961, p.230).

Com isso, vemos que a integral é definida em palavra simples, de modo que fica explícito que as operações de derivação e integração são inversas uma da outra, destacando o papel do diferencial nesse sentido. Aqui temos, portanto, a noção intuitiva de integral e as chamadas integrais imediatas. Para estabelecer esse conceito, os autores ainda acrescentam frases que encaminham o pensamento que o aluno deve seguir ao estabelecer essas relações, tal como, “*que função, quando derivada, dá a função que quero integrar?*” (GRANVILLE, 1961, p.234). Destacamos, mais uma vez, o empenho didático presente na obra de Granville, que talvez tenha sido exatamente um dos motivos de seu sucesso.

Ainda nesse trecho do texto, são discutidas as formas para encontrar as integrais, que diferente das derivadas, nem sempre são tão facilmente encontradas. Para isso, é preciso utilizar o conhecimento sobre as técnicas de derivação para encontrar as integrais diretas, e quando isso não for possível, serão necessárias técnicas de redução para chegar a uma das conhecidas. Granville ainda afirma que para auxiliar nesse processo, também são utilizadas as tabelas de integrais. O que vemos em seguida nesse capítulo são diversos exemplos e exercícios utilizando a nova operação definida, sempre partindo do que fora estabelecido para as derivadas, tendo

em vista que a noção de integral aqui age apenas como o inverso da diferencial. Granville também dedica um capítulo especificamente para discutir a necessidade de acrescentar uma constante de integração ao final do processo, e a forma de como encontrá-la.

O capítulo XIV é destinado à introdução da integral definida e sua relação com a área de uma curva, onde o seguinte teorema é enunciado:

A diferencial da área limitada por uma curva, o eixo  $xx$ , uma ordenada variável é igual ao produto da ordenada variável pela diferencial da correspondente abscissa (GRANVILLE, 1961, p.293).

A partir desse resultado é possível assumir que se uma curva é dada por uma função  $y = \phi(x)$ , e seja  $du$  a diferencial da área compreendida entre a curva e o eixo das abcissas, e duas ordenadas, então  $du = ydx = \phi(x)dx$ . E finalmente, integrando essa última expressão, teríamos que  $u = \int \phi(x)dx$ . Dessa forma, fica explícito a função da integral para o cálculo de áreas, mas devemos ressaltar que a demonstração do teorema que permite chegar a essa conclusão é omitida. Outro teorema é apresentado para definir como a integral de fato representará o valor exato da área, então temos:

A diferença entre os valores de  $\int ydx$  para  $x=b$  e  $x=a$  dá a área limitada pela curva cuja ordenada é  $y$ , o eixo dos  $xx$  e as ordenadas correspondentes a  $x=a$  e  $x=b$ . Essa diferença é representada pelo símbolo

$$(4) \int_a^b ydx \text{ ou } \int_a^b \phi(x)dx,$$

que se lê “integral de  $a$  a  $b$  de  $ydx$ ”. A operação é chamada de *integração entre limites*, sendo  $a$  o limite inferior e  $b$  o superior.

Como (4) tem sempre um valor definido, ela diz-se uma *integral definida*. Realmente, se

$$\int_a^b \phi(x)dx = f(x) + C,$$

$$\text{então } \int_a^b \phi(x)dx = [f(x) + C]_a^b = [f(b) + C] - [f(a) + C],$$

$$\text{ou } \int_a^b \phi(x)dx = f(b) - f(a),$$

havendo desaparecido a *constante de integração* (GRANVILLE, 1961, p.294).

Dessa forma é apresentada a integral definida e sua relação com a área de uma curva. Essas noções são trabalhadas em exemplos e problemas propostos e mais adiante temos novas visões sobre a integral, dentre elas as suas representações geométricas, a integral aproximada pela regra de do trapézio e a regra de Simpson. Além dessas noções, temos outra apresentada

no capítulo XV que exibe uma nova percepção para o conceito de integral, agora estabelecido como um processo de soma.

Granville afirma que o primeiro modo de se conceber a integral partiu da necessidade de se conceber o cálculo de áreas como a reunião de um número infinitamente grande de áreas muito pequenas, que ao serem somadas, originariam na área desejada. E ainda acrescenta que o próprio sinal de integral representa um S alongado que surge da ideia de uma soma. A partir da visão de se estabelecer a integral como um processo de soma é o que permite chegar a um resultado imprescindível, o chamado teorema fundamental do cálculo.

Seja  $\phi(x)$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$ . Dividamos êste em  $n$  subintervalos e sejam  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  os comprimentos dêstes. Em cada um dos subintervalos escolhamos um ponto e sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  as abscissas dos pontos escolhidos. O limite da soma

$$(2) \phi(x_1)\Delta x_1 + \phi(x_2)\Delta x_2 + \dots + \phi(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n \phi(x_i)\Delta x_i$$

quando  $n$  tende ao infinito de tal modo que cada subintervalo tenda a zero, é igual ao valor da integral definida  $\int_a^b \phi(x)dx$ . A igualdade pode ser abreviada como segue:

$$\int_a^b \phi(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \phi(x_i)\Delta x_i$$

(GRANVILLE, 1961, p.318).

Outros elementos do cálculo diferencial são apresentados nos próximos capítulos, mas encerramos nossa análise por aqui, tendo em vista que os conceitos principais aos quais nos interessamos, já foram expostos.

De forma geral, podemos constatar que o livro de Granville cumpre com o seu objetivo de apresentar um texto moderno sobre o assunto, ao passo que esteve preocupado com as questões metodológicas e didáticas para o ensino de cálculo. Conforme Van Vleck já havia assinalado, tal obra trata-se de um livro de exercícios, que busca associar as partes teóricas didaticamente bem selecionadas e que são minimamente necessárias para a compressão, com a prática da resolução problemas. Devemos ressaltar também que esse é um exemplo de livro que representa de fato um livro de cálculo, que renuncia uma fundamentação teórica mais rigorosa.

### 7.3. Uma breve avaliação das obras

O objetivo inicial com as análises que propomos neste capítulo foi evidenciar aspectos teóricos dos elementos do cálculo em instituições do ensino superior, tanto para alunos de engenharia, quanto para os de matemática. No entanto, nos deparamos com certos tipos de surpresa, tendo em vista que mostramos um livro utilizado na engenharia, que consistia em um



livro de análise matemática, versus outro livro baseado em aspectos intuitivos, utilizado em cursos de matemática e que representa a nova influência da literatura americana.

Além dos tipos de abordagens completamente distintos, também podemos notar diferenças conceituais entre os dois livros-textos. O livro de Tibiriçá apresenta os elementos do cálculo a partir da construção do conjunto dos números reais como um corpo. Isto é, todos os conceitos e consequências são construídos a partir do zero, sem precisar recorrer a conceitos preliminares. Por outro lado, o livro de Granville apresenta aspectos do tipo intuitivo, com foco maior na resolução de exercícios, e os conceitos introduzidos são aqueles necessários para as aplicações. A consequência dessa prática é quase ausência da teoria de limites, que aparece apenas de forma intuitiva para definir derivada e continuidade.

Sobre a afirmação que assume o pioneirismo da obra de Tibiriçá dentre as produções autorais brasileiras, também devemos destacar o estudo realizado por E. B. Lima (2006), que considera o livro “*O curso de Análise Matemática*” de Catunda, publicado em 1962, como a primeira produção brasileira de análise matemática.

Todas essas atividades de Fantappiè foram acompanhadas ativamente pelo seu assistente Omar Catunda que pôde construir uma base sólida de conhecimentos sobre a matemática moderna, em particular sobre a análise matemática moderna, capacitando-o a publicar posteriormente em seu nome o livro *Curso de Análise Matemática* baseado na reelaboração com acréscimos das notas de aula de Fantappiè. Tal publicação, feita no início da década de 1950, deu origem ao primeiro livro de análise matemática moderna escrito por um brasileiro (E. B. LIMA, 2006, p.30).

A relevância da obra de Catunda para o desenvolvimento da análise matemática no Brasil também é assunto da pesquisa realizada por Pereira (2017). No entanto, o último autor revelou que esse feito se deve à Tibiriçá, tendo em vista que a primeira versão do seu trabalho foi publicada em 1952. Nesse sentido, a hipótese válida para essa divergência de opiniões deve-se ao fato que a obra de Tibiriçá é intitulada como um curso de cálculo, mas que na realidade trata-se de análise matemática²². Por outro lado, E. B. Lima (2006) argumenta que a construção do livro de Catunda começa, de fato, em 1940, momento em que ele assume a cadeira de análise matemática na USP. No entanto, as primeiras publicações que deram origem ao livro publicado por Catunda, em 1962, eram um conjunto de apostilas elaboradas com uma profunda influência de Fantappiè.

Dessa forma, se considerarmos a data das publicações e o tipo de abordagem adotada por Tibiriçá, podemos seguir em conformidade com a concepção estabelecida por Pereira

---

²² Por esse motivo, a hipótese que construímos sobre este fato é que os autores E. B. Lima e Mattedi (2006) não conheciam o livro de Tibiriçá (1952).

(2017). De toda forma, nosso interesse não é findado em decidir ou definir quem foi o primeiro, mas sim trazer à tona tais discussões que enriquecem esta análise.

## **CAPÍTULO 8. ANÁLISES DOS LIVROS-TEXTOS: ENSINO SUPERIOR APÓS A REFORMA DE 1968**

Tendo em vista a construção da pesquisa que fora até então apresentada, também se torna válido analisar dois exemplares que compuseram o Ensino Superior após as mudanças estabelecidas pela Reforma Universitária de 1968. Nesse sentido, visamos apresentar neste capítulo as análises de dois livros selecionados que configuraram parte desta modalidade de ensino, sendo um deles voltado para cursos de graduação no geral, e outro que foi amplamente utilizado na pós-graduação em matemática.

Conforme destacamos anteriormente, a configuração da disciplina de cálculo no primeiro período do século XX para cursos de matemática e até mesmo para as engenharias, que através do rigor e aspectos formais, consistiam na realidade em cursos de análise matemática. Após a década de 1960 e com o advento da Reforma Universitária, houve uma mudança na estrutura do ensino, passando-se assim por uma transição, a saber, um curso de cálculo efetivo para alunos iniciantes nas áreas das ciências exatas, um curso de análise matemática para os estudantes mais avançados da graduação em matemática, e uma disciplina efetiva de análise matemática para os cursos de pós-graduação, tais como mestrado e doutorado em matemática.

Dessa forma, as obras selecionadas estiveram presentes nas universidades após a Reforma de 1968, e com isso, a primeira delas consiste em um livro de cálculo voltado para alunos iniciantes que visam um primeiro contato com a disciplina, e a segunda em um texto de análise utilizado em cursos da pós-graduação.

A primeira análise é de uma versão traduzida de um livro de origem americana, “Cálculo” de George Thomas. E a segunda é clássico dentre as produções brasileiras que consiste no “Curso de Análise” de Elon Lages Lima.

### **8.1. Análise do livro “Cálculo” (1976), George Thomas Jr**

George Brinton Thomas Jr. (1914 - 2006) foi um professor de matemática estadunidense que lecionou no Instituto de Tecnologia de Massachusetts, e ficou amplamente reconhecido devido às suas publicações referentes ao cálculo. Os livros desse autor são considerados clássicos dentro da área do cálculo diferencial e integral que foram adotados por muitas universidades como texto de referência.

A relevância do trabalho de Thomas para a presente pesquisa deve-se ao fato de que ele adquiriu uma certa visibilidade em universidades brasileiras, sendo utilizado em muitos cursos

de graduação após as transformações estabelecidas pela reforma de 1968. Dessa forma, visamos apresentar uma análise do primeiro volume do livro “Cálculo” de Thomas Jr. Para tal, contamos com uma versão publicada em 1976, e traduzida por Alfredo Alves de Faria. A primeira tradução para o português desta obra é de 1965.

O livro como um todo apresenta uma abordagem progressiva, que começa com os conceitos mais básicos e avança gradualmente para tópicos mais avançados. Cada parte é organizada de forma sistemática e apresenta conceitos, teoremas e aplicações de forma clara e concisa. Além disso, ele também apresenta uma grande variedade de exercícios e problemas, que são cuidadosamente selecionados para ajudar o leitor a compreender e aplicar os conceitos apresentados. O livro também conta com exercícios de aplicação que proporcionam o estudo do cálculo e a sua relevância para outras áreas do conhecimento, como a física, a engenharia e astronomia.

O primeiro volume possui cerca de 270 páginas e sua estrutura é dividida entre apenas quatro capítulos. Dentre eles, temos os três primeiros voltados para o estudo do Cálculo Diferencial e suas aplicações, fazendo com que o cálculo integral apareça somente no último capítulo, cujas aplicações pertencem ao segundo volume da obra.

O primeiro capítulo é intitulado *Razão de Variação de uma Função* e apresenta os conceitos fundamentais do cálculo diferencial, tais como a derivada e o limite. O capítulo começa com uma discussão sobre a ideia de variação e movimento.

O cálculo é o ramo da matemática que ensina a resolver duas amplas classes de problemas. A primeira relaciona-se com a razão de variação, ou taxa de variação, de uma quantidade. P. ex., quando um corpo se move em linha reta, sua distância do ponto de partida varia com o tempo; ocorre então perguntar *com que velocidade* o corpo se move num dado instante. O *cálculo diferencial* é o ramo do cálculo que trata desse tipo de problema. O segundo tipo de problema de que se ocupa o cálculo é o de determinar uma função quando se lhe conhece a razão, ou taxa, de variação. Assim, p. ex., se conhecemos a *velocidade* de um móvel em cada instante, poderemos determinar a distância por ele percorrida como função do tempo. Problemas como este pertencem ao âmbito do *cálculo integral* (THOMAS, 1976, p. 1).

É importante notar a estrutura didática que Thomas assume logo no início de seu livro, colocando questões e associando-as com os elementos da física, ou seja, evidenciando que os problemas do cálculo surgiram de problemas reais. Além disso, nessa parte de discussão inicial, o autor menciona nomes renomados da história da matemática, como Newton, Kepler e Leibniz. O autor também destaca a ampla associação dos elementos do cálculo com a geometria analítica e dedica os primeiros tópicos deste capítulo para uma revisão sobre conceitos básicos de coordenadas e plano cartesiano.

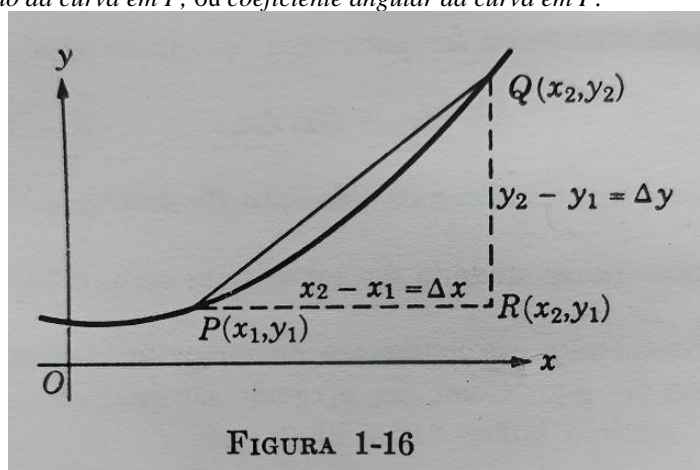
Logo em seguida, o tema a ser revisado são as funções e seus gráficos. Nesta parte vemos desde as noções intuitivas de variável e desigualdades até a noção formal do conceito de função. Nos exemplos apresentados, temos as funções polinomial, racional, raiz e modular. As funções de mais de uma variável também são apresentadas. Também podemos considerar todo o cuidado didático na construção desse conceito tão importante no âmbito de uma disciplina de cálculo.

O próximo tópico trata dos segmentos de reta orientados que constituem a noção de variação em um dado intervalo. Essa ideia é a peça principal para a construção do conceito de inclinação de uma curva.

Definiremos aqui o que se deve entender por inclinação de uma curva num ponto  $P(x,y)$ , da mesma. Foi esse, aliás, o caminho pelo qual Leibniz abordou o “cálculo diferencial”. Na fig. 1-16,  $P(x_1, y_1)$  é um ponto arbitrário da curva  $y=f(x)$  e  $Q(x_2, y_2)$  é outro ponto da mesma na inclinação da secante que passa pelos pontos  $P$  e  $Q$  é

$$m = \text{inclinação de } PQ = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Suponhamos agora que, mantendo  $P$  fixo,  $Q$  se mova sobre a curva em direção a  $P$ . Nessas condições, a inclinação da secante  $PQ$  provavelmente variará. Mas pode ocorrer (como de fato ocorre, na prática, na maioria dos casos) que, ao aproximar-se  $Q$  mais e mais de  $P$ , a inclinação da secante varie cada vez menos, tendendo para um valor-limite constante. Quando isso ocorre (como no exemplo a seguir), chamamos a esse valor-limite a *inclinação da tangente à curva em  $P$* , ou, abreviadamente, *inclinação da curva em  $P$* , ou *coeficiente angular da curva em  $P$* .



(THOMAS, 1976, p. 18).

Observamos nesta construção o estabelecimento de uma ideia inicial de derivada e uma primeira noção intuitiva do conceito de limite. Esse conceito é ampliado, tomando como referência os pontos  $P(x_1, y_1) = P(x_1, f(x_1))$  e  $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ . Como  $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ , então  $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) = Q(x_1 + \Delta x, f(x_1 + \Delta x))$ . Com isso temos que:

$$m = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

O mais interessante dessa apresentação é a ordem dos conceitos, pois vemos que o limite é tratado dentro da construção do conceito de derivada. Dessa maneira, as operações de cálculo de limites podem assumir mais sentido, tendo em vista que agora o leitor sabe que o conceito de derivada depende deste. Seguindo por essa linha de desenvolvimento, a derivada é assumida como uma função cujo valor em cada  $x$  é a inclinação da reta. Logo:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Dessa forma, a derivada é introduzida em termos de limites, e exemplos são fornecidos para ilustrar como calcular a derivada de uma função. Esse capítulo também apresenta uma discussão sobre a interpretação física do conceito de derivada de uma função, onde vemos as noções das velocidades instantânea e média, seguida por exercícios de aplicação.

O autor justifica o estudo sobre limites devido ao fato deste conceito estar atrelado à noção de derivada. Dessa forma, Thomas argumenta que existem regras mais simples para a obtenção das derivadas, mas que estabelecer a noção fundamental de limite é essencial em termos teóricos. Nesse sentido, o autor busca apresentar a noção intuitiva de limite a partir de exemplos numéricos. Em seguida, ele discute sobre as noções mais formalizadas a partir de um exemplo mais generalizado.

Em termos comuns, suponhamo-nos fabricantes de um produto [nossa fábrica produz  $F(x, \Delta x)$  como na eq. (5)] que, se pudéssemos atingir a *perfeição* absoluta, seria o  $L(x)$  da eq. (6). Um comprador vem a nós e faz um pedido. Embora exigente, ele não espera perfeição. Deseja apenas que garantamos a fabricação de um artigo que se afaste da perfeição absoluta, de uma quantidade inferior a um “limite de tolerância” que ele especificará. Em outras palavras, ele comprará o nosso  $F(x, \Delta x)$  se garantirmos que ficará entre  $L(x) - \varepsilon$  e  $L(x) + \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  (épsilon) é um número positivo que representa o “limite de tolerância” prescrito. Para controlar a qualidade do nosso produto  $F(x, \Delta x)$ , tomaremos  $\Delta x$  pequeno. Poderemos fazer  $\Delta x$  tão próximo de zero (positivo ou negativo) quanto quisermos. A quantidade de “imperfeição” do nosso produto, isto é,  $F(x, \Delta x) - L(x)$  poderá ficar entre  $-\varepsilon$  e  $+\varepsilon$ :

$$-\varepsilon < F(x, \Delta x) - L(x) < +\varepsilon \quad (8)$$

Tomando-se  $\Delta x$  próximo de zero. Vê-se agora que podemos satisfazer o comprador mais exigente. Ele coloca seu pedido e especifica o  $\varepsilon$ . Então, para qualquer  $x$  fixo as desigualdades em (8) podem ser satisfeitas simplesmente fazendo-se  $\Delta x$  tender para zero. Isto é, existe um número positivo  $\delta$  (delta), arbitrariamente pequeno, tal que, se controlarmos convenientemente a precisão de  $\Delta x$  ( $-\delta < \Delta x < +\delta, \Delta x \neq 0$ ), podemos garantir o rigor exigido em (8) (THOMAS, 1976, p. 33).

Esse é um tipo de abordagem baseada em descrever as definições formais a partir de aspectos intuitivos. É válido ressaltar a preocupação do autor em apresentar o conceito da forma

mais natural possível. Em seguida, a fim de se estabelecer a definição de uma forma mais generalizada, o autor chega a seguinte relação para o conceito de limite:

$$\boxed{\text{Se } 0 < |\Delta x| < \delta \text{ então } |F(x, \Delta x) - L(x)| < \varepsilon}$$

Por fim, o autor apresenta as propriedades de limites e cálculo de derivada utilizando essa definição. No final, temos uma longa lista de exercícios de aplicação dos conceitos visto ao longo do capítulo.

O segundo capítulo recebe o título *Derivadas das funções algébricas*, e nele podemos ver o desenvolvimento das principais regras de derivação a partir do conceito de limite. Um tópico importante desse capítulo é a definição dos diferenciais.

Estamos agora em condições de definir  $dx$  e  $dy$  de tal forma que sua relação (quando  $dx \neq 0$ ) seja a mesma que a derivada de  $y$  em relação  $x$ . Isto é fácil de fazer-se no caso de ser  $x$  a *variável independente* e  $y$  uma função de  $x$ . Sendo, então,  $x$  variável independente e  $y=F(x)$ , adotaremos as seguintes definições:

(a)  $dx$ , chamado “diferencial de  $x$ ”, pode ser qualquer número real, i.e,  $dx$  é outra variável independente, cujo domínio é dado por  $-\infty < dx < +\infty$ ; e

(b)  $dy$ , chamado “diferencial de  $y$ ”, é função de  $x$  e de  $dx$ , dada por  $\boxed{dy = F'(x)dx}$  onde  $F'(x)$  é a derivada em  $x$  da função  $F$ .

(THOMAS, 1976, p. 77).

Por fim, o capítulo apresenta as noções da regra da cadeia para diferenciais e as derivadas com notação diferencial. Na última seção do capítulo 2, temos o conceito de continuidade de função, e o autor afirma que este conceito é mais simples do que o da diferenciabilidade. Dessa forma, o conceito aparece sob duas condições: uma função será dita contínua em uma vizinhança  $c$ , se  $f(c)$  é bem determinado, e se  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ . Como consequência, o gráfico de uma função contínua em um intervalo  $a \leq x \leq b$  consiste numa curva “suave” naquele intervalo (THOMAS, 1976, p. 86). Através dessa noção, o autor discute a continuidade de alguns exemplos de funções.

Devemos destacar a especificidade do autor apresentar esse conceito apenas no final do capítulo 2, após toda a construção do conceito de derivada que foi feita em dois capítulos. Isso nos chama a atenção pois o conceito de continuidade é extremamente fundamental para o conceito de derivada. No entanto, Thomas apresenta esse conceito apenas no final, quase como que em um apêndice.

Outra questão que precisa ser ressaltada é com relação à ordem dos conceitos, pois temos que a definição de derivada é apresentada sem nenhuma referência à continuidade, e esta aparece apenas no final do capítulo. No entanto, antes de encerrá-lo, o autor apresenta e demonstra o teorema que estabelece tal relação. *Se a função  $f$  possui derivada finita*

$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$  em  $x=c$ , então  $f$  é contínua em  $x=c$  (THOMAS, 1976, p.89). E

ainda acrescenta que a recíproca não é verdadeira, apresentando o exemplo clássico da função  $y = |x|$ .

As aplicações do conceito de derivada, que é uma das principais partes do cálculo Diferencial, são expostas no Capítulo 3. Dentre elas, temos desde à sua geometria, através da resolução de problemas de máximos e mínimos, até o seu emprego em exercícios práticos, como os problemas de otimização e taxas relacionadas. Esse é um capítulo voltado para a resolução de exercícios e conta com cerca de 70 páginas. Também é possível notar a presença e aplicação de conceitos famosos como o teorema do valor médio, teorema do valor intermediário e o teorema de Rolle.

O último capítulo é destinado ao cálculo Integral e recebe o título *Integração*. Nessa parte do texto o autor volta à primeira discussão sobre as funcionalidades do cálculo e seus objetivos. O primeiro conceito apresentado é a integral indefinida, que conforme como fora colocado nas primeiras páginas do livro, é a ferramenta que dispõe encontrar uma função quando uma taxa já é conhecida.

Nesse sentido, a integral indefinida é conceitualizada a partir de equações diferenciais. Dizemos que  $y = F(x)$  é solução da equação diferencial  $\frac{dy}{dx} = f(x)$  se, para  $a < x < b$ , for

diferenciável e  $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$  (THOMAS, 1976, p. 169). Nesse sentido, a integral é

apresentada a partir das noções de antiderivação. O autor também discute a necessidade da soma de uma constante  $+C$  ao final do cálculo da integral, pelo fato de que a  $F(x)$  representa um conjunto de funções que possuem a função  $f(x)$  como derivada, para cada  $C \in \mathbb{R}$ , teremos obtém-se uma função diferente. Um pouco mais adiante, Thomas retorna a tal discussão argumentando que em certos problemas aplicados a outras disciplinas como a química, física e diversos ramos de engenharia, utilizam condições iniciais para determinar solução única de uma equação diferencial, e com isso, é possível determinar o valor da constante  $C$ .

Prosseguindo com essa noção de antiderivação, o autor define algumas integrais indefinidas a partir do que já é conhecido para as derivadas, com a intenção de “desfazer” as regras da derivação. As páginas subsequentes são destinadas a uma revisão sobre conceitos básicos de trigonometria. Isso deve-se ao fato de que em seguida o autor define as derivadas das funções trigonométricas seno e cosseno, e o seu processo de desenvolvimento é feito a partir da definição com limites. Este é até mesmo um fato curioso, pois o autor decide inserir tais



conceitos pela primeira vez, somente no capítulo de integrais. Tendo em vista tais conclusões, é possível determinar as integrais dessas funções, seguindo o mesmo raciocínio anterior.

O próximo conceito designado neste capítulo é o desenvolvimento da integral como área sob uma curva. A primeira forma desse conceito é trabalhada a partir de exemplos numéricos com suas representações geométricas. Mas adiante, temos a formalização, que consiste em considerar um intervalo  $[a, b]$  e subdividi-lo em  $n$  partições. Esse processo resulta em  $n$  retângulos cujas áreas serão  $f(x_1)\Delta x, f(x_2)\Delta x, \dots, f(x_{n-1})\Delta x$ . Ao efetuar o processo de fazer  $n$  tender a infinito, nos garante que área total sob a curva de uma função no intervalo  $[a, b]$  é o equivalente ao seguinte somatório  $S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x$ . A associação desta soma com o conceito de integral é feito logo adiante.

Consideremos uma função  $f$ , positiva e contínua em  $a < x < b$ . Denotemos por  $A_a^c$ ,  $A_c^b$ ,  $A_a^b$  as áreas sob o gráfico e acima do eixo- $x$ , de  $a$  a  $c$ , de  $c$  a  $b$  e de  $a$  a  $b$ , respectivamente. Se  $c$  estiver entre  $a$  e  $b$ , temos

$$\boxed{A_a^c + A_c^b = A_a^b} \quad (1)$$

(1) é verdadeira ainda quando  $c=a$ , desde que definamos como a área de  $a$  a  $a$ , isto é,

$$\boxed{A_a^a = 0} \quad (2)$$

(1) também é verdadeira quando  $c$  está além de  $b$ , desde que adotemos convenções quanto a áreas *relativas*. Convencionemos que a área acima do eixo- $x$  é positiva se caminhamos da esquerda para a direita, e negativa se da direita para a esquerda, enquanto que

$$A_a^c = -A_c^a, A_c^b = -A_b^c, A_a^b = -A_b^a$$

são negativas. Então (1) será verdadeira na forma

$$A_a^b + A_b^c = A_a^c$$

Porque somando-se  $A_b^c$  a  $A_a^b$ , subtrai-se  $A_c^b$  da última, restando  $A_a^c$  (THOMAS, 1976, p. 203).

Combinando esses resultados é possível demonstrar que  $\frac{dA_a^x}{dx} = f(x)$ , então

$A_a^x = \int f(x)dx = F(x) + C$  (utilizando a noção de antiderivação estabelecida desde o início do capítulo).

Assim, se  $F(x)$  é uma função integral qualquer de  $f(x)dx$ , temos

$$A_a^x = \int f(x)dx = F(x) + C$$

$$A_a^a = 0 = F(a) + C$$

Donde

$$C = -F(a)$$

$$A_a^x = F(x) - F(a)$$

Finalmente, fazendo  $x=b$ , temos

$$A_a^b = F(b) - F(a)$$

(THOMAS, 1976, p. 206).

Toda essa construção é o que permite chegar à conclusão reconhecida como o Teorema Fundamental do Cálculo.

$$A_a^b = \lim \sum f(c_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ (THOMAS, 1989, p.209)}$$

Esse resultado é o que permite compreender as integrais definidas, bem como uma forma de encontrá-las. No entanto, mais importante do que isso, é entender as relações com o conceito de área, e, a relação entre derivadas e integrais, que é o ponto principal dessa ferramenta. Além disso, apesar da integral ter sido conceitualizada desde o início do capítulo como algo que é inverso da derivada, que por sua vez possui a definição formal por limites, esse é o primeiro momento em que é possível identificar a integral como um limite de somas, ou seja, sua definição por método infinitesimal. Thomas logo em seguida também acrescenta algumas observações sobre o conceito definido.

*Observação 1:* O sinal  $\int$  é uma modificação de  $S$  (maiúsculo), inicial de *soma*; lembra a estreita relação existente entre a integração e a somação.

*Observação 2:* O limite na eq.  $\lim \sum f(c_k) \Delta x$  é chamado *integral definida de  $f$* , desde  $a$  até  $b$ . Denota-se pelo  $\int_a^b f(x) dx$ . O Teorema Fundamental ensina-nos a calcular esta integral definida, desde que conheçamos uma integral indefinida de  $f(x) dx$ . Subtrai-se o valor da integral indefinida de  $F$  em  $a$  (*limite inferior* de integração), do seu valor em  $b$  (*limite superior*).

*Observação 3:* Se a função toma apenas valores não-negativos (i. e, positivos ou nulos) em  $a \leq x \leq b$ , então a integral definida  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$  representa a área sob os eixos gráfico, acima do eixo- $x$  entre as ordenadas  $x=a$  e  $x=b$  (THOMAS, 1976, p. 212).

Após estabelecer tais concepções, Thomas apresenta uma série de exemplos referentes ao conceito determinado. E, seguindo o costume apresentando na obra, ao final do capítulo temos uma longa lista de exercícios de aplicação dos conceitos.

Dessa forma, é possível considerar que o livro de Thomas possui características próprias, tal como a introdução de conceitos a partir de aspectos intuitivos que se aliam a uma ampla discussão acerca dos conceitos mais básicos, e que se desenvolvem nas generalizações

mais formalizadas. Além disso, trata-se de um livro que possui um enfoque maior na resolução de problemas, em comparação com a teoria matemática. Ainda assim, Thomas buscou apresentar todos os tópicos que um curso introdutório de cálculo necessita, sendo assim um livro recomendado para aqueles que desejam ter um primeiro contato com a disciplina.

## **8.2. Análise do livro “Curso de Análise” (1989), Elon Lages Lima**

Elon Lages Lima (1929-2017) foi um renomado matemático brasileiro reconhecido por suas contribuições em diversas áreas da matemática, incluindo análise matemática, topologia, teoria dos conjuntos e geometria diferencial. Além disso, Lima também foi uma figura importante na comunidade científica brasileira. Ele atuou como professor e pesquisador em várias universidades, foi membro ativo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), onde foi presidente desta associação entre 1973-1975, e teve um papel importante no Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), onde foi diretor durante três períodos: 1969-1971, 1979-1980 e 1989-1993.

Dentre suas publicações, podemos destacar o livro "Curso de Análise" publicado em 1976, e que já passou por diversas edições revisadas e atualizadas. Este livro se tornou um clássico da matemática brasileira e até nos dias atuais tem sido amplamente utilizado em cursos de graduação e pós-graduação como livro-texto base para a disciplina de análise matemática. Desde então, vários livros foram publicados no país, mas o livro de Lima continua sendo um marco na História da Matemática brasileira.

Tendo em vista a relevância desta obra, principalmente nos ambientes de pós-graduação, visamos apresentar uma análise da 6ª edição do “Curso de Análise vol.1” de Lima, publicada em 1989. Dessa forma, faremos uma análise detalhada da estrutura, do conteúdo e da abordagem adotada pelo autor ao longo da obra, com o objetivo de compreender as principais contribuições desta para o ensino formal dos elementos do cálculo diferencial e integral nos ambientes de ensino superior. Para tanto, examinaremos o método utilizado pelo autor para a apresentação dos conceitos matemáticos, a clareza e precisão da linguagem utilizada, a organização dos capítulos e a sequência de assuntos tratados.

Uma das principais características deste livro é sua abordagem rigorosa e formal, que estabelece definições precisas e teoremas bem estruturados. O livro apresenta uma exposição detalhada e metódica dos conceitos, e o autor enfatiza a importância do rigor matemático na construção do conhecimento, o que é fundamental para o entendimento da análise matemática. Além disso, o livro é acompanhado por uma série de exercícios e problemas que ajudam a fixar

os conceitos e a aplicá-los em situações propostas, além de apresentar muitos problemas desafiadores para o leitor.

Outra característica importante do livro é a sua abrangência. "Curso de Análise vol.1" aborda uma ampla gama de tópicos da análise matemática, desde a teoria de conjuntos, sequências, séries numéricas e de funções, até o cálculo diferencial e integral em funções de uma variável. O livro apresenta uma linguagem clara e acessível, e o autor destaca em cada capítulo, observações fundamentais sobre os conceitos necessários para a compreensão do leitor. Além disso, esta obra possui uma série de exemplos para tornar os conceitos mais palpáveis e compreensíveis. Embora a abordagem do livro seja formal e rigorosa, o autor se esforça para tornar a leitura agradável e interessante.

O Capítulo 1 é intitulado "Conjuntos e Funções". Ele é dedicado a um certo tipo de revisão dos conceitos fundamentais da teoria de conjuntos, estabelecendo as propriedades e operações básicas tais como união, interseção, complementar e o produto cartesiano. Neste capítulo também temos a definição dos conceitos principais das funções como domínio, contradomínio e imagem. Em consequência, também são apresentadas as noções de função injetiva, sobrejetiva, inversa e composição entre funções. Dessa forma, é possível identificar que Elon utiliza a teoria dos conjuntos como a base principal para construção da obra. Além disso, levando em consideração que a teoria dos conjuntos foi aceita na época como concepção geral da matemática e que muitos matemáticos do grupo Bourbaki atuaram na época como professores visitantes em São Paulo e no Rio de Janeiro, entende-se que a teoria dos conjuntos constituiu o quadro geral para a apresentação da matemática feita por Lima.

O capítulo seguinte trata de conjuntos finitos, enumeráveis e não-enumeráveis. O autor começa definindo o conceito de conjunto finito e apresentando algumas propriedades básicas desses conjuntos, como a cardinalidade e a união de conjuntos finitos, utilizando essas noções para introduzir o conceito de número. Nesse sentido, os números naturais são apresentados e provados como exemplo de conjunto infinito, e a sua construção é feita a partir dos axiomas de Peano, realizando operações entre funções. Em seguida, ele introduz o conceito de conjunto enumerável, que é um conjunto que pode ser colocado em correspondência um a um com os números naturais. Ele apresenta algumas propriedades dos conjuntos enumeráveis, como a existência de uma enumeração e a propriedade de que a união de conjuntos enumeráveis também é enumerável. O autor então, passa a discutir conjuntos não-enumeráveis, que são conjuntos que não podem ser colocados em correspondência um a um com os números naturais.

Ao final do capítulo, o autor apresenta o Teorema de Cantor, que garante como consequência que o conjunto dos números reais é, de fato, não-enumerável.

O terceiro capítulo é motivado pelo fato de que a obra como um todo possui como principal referencial, o conjunto dos números reais. Para que os conceitos sejam rigorosamente bem definidos, é preciso estabelecer sistematicamente os fundamentos desta teoria. Dessa forma este capítulo aborda suas definições para tal conceito a partir da estrutura algébrica de um corpo, e nesse sentido, os números reais são construídos como um corpo ordenado completo. A partir da noção de completude dos números reais, o autor que afirma que todo conjunto não-vazio de números reais que tenha uma cota superior tem um supremo, ou seja, um menor limite superior. Em seguida, o autor demonstra algumas propriedades básicas dos números reais, como a densidade dos números racionais e irracionais. Mas, é importante destacar que a construção dos números irracionais é feita somente após ter definido axiomáticamente o conjunto dos números reais como um corpo.

O capítulo IV trata de sequências e séries de números reais. O conceito de sequência é apresentado em um primeiro momento, do ponto de visto intuitivo, como uma sequência de pontos na reta real. Em seguida, o autor admite a sua concepção de acordo com a definição geral, que estabelece uma sequência de números reais como uma função definida no conjunto dos números naturais (domínio) e tomando valores do conjunto dos números reais (contradomínio). Lima discute as propriedades básicas das sequências, como crescimento, decrescimento e limitações superior e inferior. O autor retrata que os principais conceitos e resultados da análise matemática se referem a limites, e destaca a sua importância neste capítulo.

Diz-se que o número real  $a$  é *limite* da sequência  $(x_n)$  de números reais, e escreve-se  $a = \lim x_n$ , ou  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , ou  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , quando para cada número real  $\varepsilon > 0$ , dado arbitrariamente, for possível obter um número inteiro  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - a| < \varepsilon$ , sempre que  $n > n_0$ . Em linguagem simbólica:

$$\boxed{\lim x_n = a. \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon}$$

(LIMA, p.83, 1989).

Uma sequência que possui um limite é dita convergente. O autor então passa a discutir o conceito de limite de uma sequência e apresenta algumas propriedades dos limites, como a unicidade e a teorema do confronto. Exemplos clássicos também são apresentados neste capítulo como a monotonicidade de sequências limitadas, existência de subsequências

convergentes e as sequências de Cauchy. Outro tema que também aparece neste capítulo são as sequências divergentes, que são aquelas cujos valores se tornam e se mantêm infinitos, positivos ou negativos.

Seja  $(x_n)$  uma sequência de números reais. Diremos que “ $x_n$  tende para mais infinito”, e escrevemos  $\lim x_n = +\infty$  quando, para todo número real  $A > 0$  dado arbitrariamente, pudermos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow x_n > A$ . (Ou seja, para qualquer  $A > 0$  dado, existe apenas um número finito de índices  $n$  tais que  $x_n \leq A$ ) (LIMA, p.101, 1989).

De modo análogo, esse conceito também é apresentado para o caso em que o limite tende para  $-\infty$ . Dessa forma, teremos que  $\lim x_n = -\infty$  quando dado arbitrariamente  $A > 0$  pode-se encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow x_n < -A$ . Em seguida, o autor apresenta o conceito de séries de números reais, suas propriedades como a convergência, exemplos de séries geométricas e harmônicas, seguidas pela demonstração dos critérios da razão e da raiz para a convergência de séries. O autor também discute as séries alternadas e apresenta o critério de Leibniz para a convergência destas. A convergência condicional é exposta em seguida, e consiste na convergência de uma série que não é absolutamente convergente. Ele também discute o critério de Dirichlet para a convergência de séries.

Lima apresenta no quinto capítulo conceitos que envolvem a topologia na reta real. O autor começa definindo as noções de conjunto aberto e fechado em relação à reta real. Neste capítulo, o autor introduz as ideias de ponto de acumulação, conjuntos compactos, teorema de Borel-Lebesgue e o corolário de Bolzano-Weierstrass. Vejamos, a seguir, um desses conceitos.

Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Um número  $a \in \mathbb{R}$  chama-se *ponto de acumulação* do conjunto  $X$  quando todo intervalo aberto  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , de centro  $a$ , contém algum ponto  $x \in X$  diferente de  $a$ . O conjunto dos pontos de acumulação de  $X$  será representado pela notação  $X'$  (e, às vezes, chamado o *derivado* de  $X$ ). A condição  $a \in X'$  ( $a$  é ponto de acumulação de  $X$ ) exprime-se simbolicamente do modo seguinte:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X; \quad 0 < |x - a| < \varepsilon$$

(LIMA, p.138, 1989).

A noção de ponto de acumulação é um requisito necessário para o entendimento do conceito de limite de acordo com o aspecto formal estabelecido dentro de um curso de análise matemática. O estudo detalhado sobre os limites de funções está presente no capítulo VI. O autor começa definindo o conceito de limite de uma função em um ponto. Vejamos a seguir:

Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com valores reais, definida num subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$ . (Diz-se neste caso que  $f$  é uma função real de uma variável real). Seja  $a \in \mathbb{R}$  um ponto de acumulação de  $X$ , isto é,  $a \in X'$ . Diremos que o número real  $L$  é o *limite* de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$ , e escrevemos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , para significar o seguinte: para cada número real  $\varepsilon > 0$ , dado arbitrariamente, podemos encontrar  $\delta > 0$  de modo que se tenha  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $x \in X$  e  $0 < |x - a| < \delta$ . Portanto, quando  $a$  é ponto de acumulação do domínio de  $f$ , a expressão  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  é uma abreviatura para a afirmação abaixo:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

(LIMA, p.152, 1989).

Logo em seguida, o autor faz uma observação importante a respeito dos limites, destacando que a definição dada para  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  só faz sentido quando  $a$  é um ponto de acumulação do domínio  $X$  da função. Dessa forma, Lima também comenta que a afirmação  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  não diz nada a respeito do valor de  $f(a)$ , pois é possível que o limite sequer pertença ao conjunto imagem de  $f(x)$ , ou então que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ .

Em seguida, são apresentadas as propriedades de operações entre limites, dentre elas temos a soma, subtração, multiplicação, divisão, e o limite de funções compostas. O autor também dedica uma parte deste capítulo para discutir sobre limites infinitos e no infinito, e expressões indeterminadas por meio de uma longa série de exemplos.

O capítulo seguinte trata da noção de continuidade e apresenta algumas propriedades das funções contínuas na reta real. Sobre esse conceito, o autor define que:

Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se contínua no ponto  $a$  quando é possível tornar  $f(x)$  arbitrariamente próximo de  $f(a)$ . Em termos precisos, diremos que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é *contínua* no ponto  $a \in X$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado arbitrariamente, pudermos achar  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$  e  $|x - a| < \delta$  impliquem  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . Simbolicamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

(LIMA, p.174, 1989).

Podemos notar a breve semelhança com a definição formal do conceito de limite. No entanto, o caso da continuidade só é válido quando temos  $a \in X$ . Ainda assim, a noção de continuidade pode ser reduzida ao conceito de limite, desde de que  $a$  seja um ponto de acumulação  $X$ , então a função  $f$  é dita contínua em  $a$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Outra observação importante também é destacada: ao investigar a continuidade de uma função  $f$  num

ponto ou em um conjunto, é preciso levar em consideração o seu domínio. Essa afirmação é o que permite estabelecer a noção de que uma função só pode ser contínua ou descontínua em um ponto que pertence ao seu domínio.

Casos consequentes dessa definição também são apresentados neste capítulo, e vemos o conceito da descontinuidade.

Dada  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , um *ponto de descontinuidade* (ou, simplesmente, uma descontinuidade) da função  $f$  é um ponto  $a \in X$  tal que  $f$  não é contínua no ponto  $a$ . Dizer, portanto, que  $a \in X$  é um ponto de descontinuidade de  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  equivale a afirmar a existência de um número  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo  $\delta > 0$ , se pode encontrar um  $x_\delta \in X$  com  $|x_\delta - a| < \delta$ , mas  $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$  (LIMA, p.180, 1989).

Tendo esses conceitos bem definidos, o autor apresenta uma série de exemplos que retratam as noções estabelecidas. O capítulo continua com a apresentação do teorema do valor intermediário, que afirma que se uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  assume dois valores diferentes  $f(a)$  e  $f(b)$  em  $a$  e  $b$ , então ela assume todos os valores intermediários entre  $f(a)$  e  $f(b)$  em algum ponto  $c$  entre  $a$  e  $b$ . Neste capítulo também são apresentadas as funções contínuas em conjuntos compactos e a continuidade uniforme.

O cálculo diferencial é um dos temas centrais abordados no livro. O autor começa o capítulo VIII apresentando as noções básicas de derivadas para funções de uma variável, estabelecendo definições precisas e formais.

Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X \cap X'$  (isto é,  $a$  é um ponto de acumulação de  $X$  pertencente a  $X$ ). Diremos que  $f$  é *derivável* no ponto  $a$  quando existir o limite  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ . No caso afirmativo, o limite  $f'(a)$  chama-se a *derivada* de  $f$  no ponto  $a$  (LIMA, p.200, 1989).

Nesse sentido, a interpretação geométrica apresentada para o conceito de derivada surge como a inclinação da reta tangente que passa pelo ponto  $(a, f(a))$ . Como a reta tangente também pode ser vista como o limite das inclinações das retas secantes, o conceito de derivada também pode assumir outro formato. Tomando  $h = x - a$ , e  $x = a + h$ , a derivada de  $f$  no ponto  $a$  se torna o limite:  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .

O autor prossegue o capítulo com exemplos de derivadas, e as demonstrações de suas principais propriedades, tais como a derivada da função inversa, regra da soma, produto, quociente e cadeia. O autor discute resultados importantes da definição de derivada acerca da



análise de funções como o Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio. Esse capítulo também tem uma seção destinada à fórmula de Taylor, seguida por novos exemplos de exploração dos conceitos.

Assim como o cálculo diferencial, o cálculo integral também é um tema central abordado neste livro. O autor começa a construção do conceito de integral utilizando como motivação principal o problema das áreas: como determinar a área sob o gráfico de uma função limitada em um intervalo  $[a, b]$ . A determinação desse valor pode ser feita através da soma das áreas de polígonos que subdividem a região, através de aproximações por falta ou excesso. Nesse sentido, apresentando a ideia de aproximação de áreas através de retângulos justapostos, o autor discute a noção de soma de Riemann como uma maneira de se aproximar a área de uma região. Dessa forma, dada uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , o valor numérico da área  $A$  do gráfico de  $f$  no intervalo  $[a, b]$  é o equivalente ao supremo das aproximações por falta, ou ao ínfimo das aproximações por excesso. A partir dessa concepção, o conceito de integral é definido da seguinte forma:

Definiremos agora a *integral inferior*  $\int_a^b f(x)dx$  e a *integral superior*  $\int_a^b f(x)dx$  de uma função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  pondo:  $\int_a^b f(x)dx = \sup_P s(f; P)$   
 $\int_a^b f(x)dx = \inf_P S(f; P)$ . O *sup* e o *inf* são tomados relativamente a todas as partições  $P$  do intervalo  $[a, b]$  (LIMA, p.241, 1989).

Para compreender essa definição é preciso tomar ciência de que o  $\sup_P s(f; P)$  representa o supremo da soma inferior das áreas do conjunto das partições  $P$  de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ . De forma análoga, o símbolo  $\inf_P S(f; P)$  refere-se ao ínfimo da soma superior das partições do intervalo da função. Nesse sentido, uma função é dita integrável quando

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

Lima também discute essa noção de função integrável e apresenta novos corolários a respeito desse conceito, como, por exemplo, a integrabilidade de funções contínuas em intervalos fechados. Após uma série de exemplos sobre o conceito definido, o autor apresenta o Teorema Fundamental do Cálculo, que estabelece a relação entre as integrais e derivadas.

(Teorema Fundamental do Cálculo). Se uma função integrável  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possui uma primitiva  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ . Em outros termos, se uma função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possui derivada integrável, então  $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt$  (LIMA, p.256, 1989).

A partir dessa associação da integral com a derivada, o autor apresenta exemplos de primitivas e integrais definidas, explorando conceitos fundamentais como a regra da cadeia. O livro apresenta as demonstrações das principais técnicas de integração, incluindo a mudança de variáveis e a integração por partes. Por último, o autor apresenta a definição de integral de Riemann como o limite das somas quando o número de intervalos da partição tende a infinito. O final do capítulo é dedicado ao estudo das integrais de funções exponenciais e logarítmicas.

Também é válido destacar que todo o trabalho deste capítulo é baseado na construção do conceito de integrais de forma bem estruturada. Nesse sentido, Lima não aborda o conceito das integrais indefinidas, pois entendemos que o seu objetivo principal é estabelecer uma base conceitual para a definição de integral com conceito puramente matemático, sem necessitar recorrer à técnicas de antiderivação ou busca por primitivas. A relação de inversão entre as operações de derivada e integral é feita somente mais adiante com o teorema fundamental do cálculo, que em termos teóricos, é o que permite estabelecer tal relação.

O capítulo final do livro é destinado ao estudo das sequências e séries de funções. Como esta parte é destinada ao cálculo mais avançado, optamos por não entrar em detalhes sobre este, pois nossa análise se baseia nos elementos fundamentais do cálculo que já foram expostos. Além disso, é preciso destacar que o livro como um todo possui inúmeros conceitos e definições mais específicas que não apresentamos aqui. Isso deve-se ao fato que nosso objetivo consistiu em destacar os temas principais da disciplina de cálculo diferencial e integral que um curso de análise matemática também abrange. Com isso, diversas minúcias teóricas foram omitidas, mas ainda assim, esta análise nos permite fazer uma reflexão acerca dos conteúdos presentes na obra de Lima.

A abordagem do livro é rigorosa e clássica, enfatizando a importância da construção de conceitos a partir de definições precisas e da demonstração rigorosa de teoremas. O livro abrange os principais conceitos da análise matemática, desde a teoria dos conjuntos até a integração de Riemann. O autor apresenta uma escrita clara e concisa, com explicações detalhadas e exemplos. Além disso, o livro é repleto de exercícios bem elaborados, que ajudam

o leitor a consolidar os conceitos aprendidos. Ainda assim, embora o livro contenha muitos exemplos e exercícios propostos, é importante destacar que eles são de natureza conceitual ao invés dos de aplicação. É crucial observar que há uma grande diferença entre ambos, principalmente no quesito desta obra, em que a maioria dos exercícios exige a demonstração a partir de aspectos formais.

Os elementos do cálculo diferencial e integral presentes na obra de Lima são construídos a partir de um caminho formal, com demonstrações de teoremas e resultados gerados por conceitos em ordem crescente. Além disso, o autor não apresenta nenhuma fórmula sem a sua devida explicação. Nesse sentido, também é válido ressaltar que "Curso de Análise" não é uma leitura fácil ou superficial, e que exige dedicação e esforço por parte do leitor. O livro analisado é uma referência indispensável para aqueles que desejam aprofundar seu conhecimento nessa área.

### **8.3. Algumas conclusões**

A partir das análises feitas é possível estabelecer uma concepção acerca dos aspectos que a disciplina de cálculo assumiu nas instituições do ensino superior após a reforma de 1968. As características que permearam o ensino de cálculo na primeira metade do século XX, envolviam aspectos formais, que em sua maioria se assemelhavam com um curso de análise matemática. Isso deve-se ao fato de que desde o início do período em que se começa a ensinar cálculo no Brasil, é possível identificar as influências advindas de países europeus, tais como a Itália e França. Tal influência se reflete através de vários fatores, como, por exemplo, a literatura adotada, a contratação de professores estrangeiros e brasileiros que realizaram seus estudos no exterior. Essa foi uma característica marcante que influenciou também as primeiras publicações autorais brasileiras que utilizaram como base a estrutura de ensino estabelecida por tais países.

No período compreendido entre as décadas de 1950 e 1960, literaturas americanas começaram a ganhar destaque nas instituições de ensino superior, com uma boa aceitação dos alunos e professores. Um exemplo dessa abertura de espaço é a tradução feita por Abdelhay do livro de Granville. Com isso, ocorre o início de um processo de transformação no ensino, que com o advento da Reforma Universitária é colocado em prática de forma efetiva. Além disso, com a chegada dos livros de autores americanos e suas traduções, a disciplina de cálculo toma novos rumos e sua estrutura começa a ser modificada, passando a seguir um modelo de sequência utilizada nos Estados Unidos.

Figura 11: Modelo de ensino dos elementos do cálculo nos EUA²³.

arithmetic → elementary algebra → geometry and trigonometry  
→ pre-calculus → calculus → analysis

A partir desse processo de modificações no ensino, é possível identificar uma nova influência sobre a disciplina de cálculo, que conforme os fatos citados, caracteriza a “separação” entre o cálculo e a análise matemática. Essa mudança ocorreu de forma gradual e após a reforma de 1968, se caracterizou por estabelecer uma disciplina de cálculo puramente dito, a qual visava a apresentação de seus elementos sob aspectos do tipo intuitivo aos estudantes ingressantes de cursos de graduação das áreas das ciências exatas. Essa disciplina também podia ser antecedida por um curso introdutório do tipo pré-cálculo, onde o foco era a revisão de conceitos básicos de funções, geometria e trigonometria.

A disciplina de análise matemática também sofre alterações e passa a ser destinada apenas aos alunos de graduação em matemática (licenciatura e bacharel), sendo parte do currículo em níveis mais avançados do curso. Mas que, além disso, também ficou reconhecida como uma disciplina efetiva em cursos de pós-graduação em matemática. Com isso, a nova divisão estabelece o ensino de cálculo apenas para alunos de graduação, e o ensino em ambientes de pós-graduação, como mestrado e doutorado em matemática ou educação matemática, fica restrito à análise matemática. Dessa forma, a estrutura do ensino dos elementos do cálculo assume novos rumos, se assemelhando com a formatação e estrutura tal como concebemos atualmente.

As análises das obras selecionadas demonstram os tipos de abordagens assumidos em cada uma dessas disciplinas. Constatamos que o livro de Thomas se caracteriza por apresentar os conceitos de forma intuitiva através de exemplos específicos, que à medida que o leitor se familiariza, são generalizados até atingirem uma estrutura mais formalizada. Além disso, uma característica marcante é a presença de muitos exemplos de aplicação, podendo até mesmo ser considerado um livro de exercícios, mas que também garante uma boa base teórica para estudantes iniciantes. Com relação à ordem conceitual, podemos notar uma certa inversão com relação aos outros livros analisados, e assume a seguinte sequência: derivada, limite,

²³ Agradeço ao meu orientador por fornecer este esquema que pertence à um manuscrito que, até a revisão final desta pesquisa, ainda estava em andamento.

continuidade, integral. Dessa forma, o conceito de limite surge devido à definição de derivada, e o autor discute a sua teoria somente após estabelecer essa noção.

Por outro lado, o livro de Elon se caracteriza por apresentar os elementos do cálculo de uma forma muito bem estruturada, utilizando como base a axiomática da teoria dos conjuntos para construção dos números, e seguindo a ordem: limite, continuidade, derivada e integral. O próprio autor enfatiza que toda a teoria apresentada no texto é definida a partir do início, sem fazer uso de resultados que não sejam estabelecidos no decorrer da obra. Dessa forma, podemos considerar que o livro Elon não consiste em uma apresentação dos conceitos, mas sim, na construção dos elementos sob aspectos formais com suas devidas demonstrações. A obra do autor é uma leitura densa destinada a alunos que possuam uma certa experiência com a disciplina de cálculo.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos apresentar neste trabalho um estudo sobre o processo de disciplinarização do cálculo ao longo do século XX. A análise sobre os países selecionados, ainda que breve, nos permite traçar um panorama sobre a sua trajetória e compilar algumas considerações sobre o processo que ocorreu no Brasil. De forma geral, podemos destacar que praticamente todos os países analisados tiveram, em algum momento, o ensino dos elementos do cálculo em escolas secundárias. No entanto, apenas o Brasil não configurou um ensino do tipo “pré-cálculo”, de preparação para as universidades, exceto no ensino técnico, isto é, profissionalizante.

Outro tema de destaque no âmbito desta pesquisa foi a dualidade presente no ensino para matemáticos e engenheiros, ou seja, os conflitos entre rigor e intuição. Isso deve-se à coexistência de duas perspectivas distintas na abordagem e na compreensão desse campo de ensino. Tais perspectivas são conhecidas, conforme citamos anteriormente, como o cálculo intuitivo e o cálculo rigoroso, este último se assemelhando a um curso de análise matemática. Apresentamos dois exemplos de livros do século XIX que evidenciam tais aspectos, onde temos Weisbach representando a formação de engenheiros, e o Dini, voltado para matemáticos, e carrega fundamentos do novo rigor alemão. Dessa forma, podemos concluir que o conceito de continuidade e de limites se revelaram como o “separador das águas” entre os dois tipos de abordagens.

Com isso, também é importante destacar que o cálculo intuitivo é uma abordagem mais prática que se concentra nas aplicações e envolve a utilização de algoritmos e técnicas para realizar cálculos de fato. Por outro lado, o cálculo rigoroso se apresenta como uma abordagem teórica que enfatiza a manipulação de expressões matemáticas simbolicamente, sem atribuir valores numéricos específicos às variáveis. Ele se concentra na compreensão dos conceitos fundamentais do cálculo, e busca desenvolver um entendimento conceitual profundo das ideias matemáticas subjacentes. A dualidade entre essas duas abordagens no ensino de cálculo pode ser vista como um desafio, mas também como uma oportunidade. Ambas as perspectivas têm suas vantagens e limitações. O cálculo rigoroso é fundamental para uma compreensão profunda dos conceitos matemáticos, permitindo aos alunos raciocinarem de forma abstrata e desenvolverem habilidades analíticas. Por outro lado, o cálculo intuitivo é essencial para a aplicação prática do cálculo como ciência. Idealmente, o ensino de cálculo deve buscar uma integração equilibrada entre essas duas abordagens. É importante que os alunos compreendam os conceitos matemáticos subjacentes, mas também sejam capazes de aplicar esses conceitos de maneira eficaz em situações práticas. Isso, ao nosso ver, é o que pode ajudar a superar a

dualidade percebida, fornecendo uma abordagem integrada e oferecendo aos alunos uma visão mais completa dos elementos do cálculo.

No entanto, esta pesquisa nos revela que a separação em dois padrões distintos de cálculo infinitesimal, que apresentamos no século XIX, se manteve universalmente em todos os países até os dias atuais, conforme é o caso do Brasil.

O percurso de desenvolvimento da disciplina de cálculo no Brasil, sem sombra de dúvidas, foi o foco principal. Para traçar conclusões sobre como ocorreu esse processo, é preciso voltar às questões iniciais colocadas.

Para entender como a disciplina de cálculo tornou-se um *objeto de ensino*, descrevemos a criação das principais instituições do país, onde pudemos encontrar os seus primeiros indícios de ensino. Dessa forma, foi possível constatar que o cálculo começa a ser ensinado no século XIX, e surge atrelado aos cursos de engenharia. Todos os livros-textos utilizados no Brasil durante o século XIX foram de origem francesa, devido essa cultura ser a mais acolhida no país nesta época. Essa situação abre espaço para um novo cenário apenas no início do século XX, momento em que surgem as primeiras universidades do país, e com isso, um curso voltado para formação de matemáticos em nível superior.

Para compreender a estrutura do *currículo* adotado, buscamos descrever as principais reformas educacionais, movimentos e legislação que o modificaram ao longo do período analisado. A principal ferramenta utilizada para concernir a questão do *como* foi ensinado, foram as análises dos livros-textos, que apesar de não descrever completamente como o ensino ocorreu na prática, ainda assim transmitem uma boa visão sobre os conteúdos que eram almejados a ser ensinados, o tipo de abordagem e a sua organização. Sobre a indagação do *para quem* era ensinado, encontramos vestígios presentes em três esferas do ensino, sendo elas a educação secundária, técnica e superior.

A reforma Benjamin Constant representou uma primeira tentativa de introdução dos elementos do cálculo no currículo das escolas secundárias, mas que não teve tanto êxito na prática. Esse primeiro experimento foi citado no relatório de Beke referente à conferência de 1914, em que Felix Klein propôs o Movimento Internacional de Reforma. Os efeitos da proposta liderada por Klein chegam ao Brasil, de fato, apenas em 1929, devida a atuação do professor Euclides Roxo. Dessa forma, temos que os elementos do cálculo configuraram parte do ensino secundário desse período até a criação da primeira LDB de 1961. As instituições de ensino técnico seguiram um caminho semelhante ao que ocorreu no ensino secundário, salvo algumas exceções de instituições que, mesmo após a LDB, ainda assim optaram por não retirar

o cálculo dos currículos. Dessa forma, manter o cálculo no ensino técnico é o que reforça a prática de utilizar o cálculo apenas para as aplicações.

Com relação à trajetória do ensino de cálculo das instituições de ensino superior, constatamos desdobramentos importantes que evidenciam que o ensino de cálculo obteve influências provindas de países como a França, Itália e os Estados Unidos. Essas influências ocorreram em três etapas distintas. A primeira delas esteve presente desde o século XIX e foi notada a partir da adoção da literatura francesa nas instituições para formação de engenheiros. A segunda etapa, começa em 1934, nas novas universidades, que para o curso de matemática adotaram a literatura italiana como um padrão, que por sua vez tinham um efeito indireto da matemática rigorosa da Alemanha. E a última, ocorre a partir de 1960, momento em que a literatura americana começa a adquirir um novo destaque nas universidades.

Dessa forma, constatamos que nas escolas de engenharia e até mesmo nas primeiras Universidades, no início o que predominava era o método de ensino europeu, pois a literatura adotada e diversos professores tinham essas origens. Após a década de 1960 a situação começa a tomar novos rumos, com a Reforma Universitária e a nova adesão de livros americanos. O cálculo infinitesimal no Brasil após 1968 passou a seguir o padrão dos Estados Unidos.

Uma consequência desse período de transição entre as abordagens foi a chamada “separação” da disciplina de cálculo e análise matemática. Dessa forma, o cálculo começou a ser destinado aos cursos de graduação no geral, enquanto a análise matemática passou a compor o currículo dos ambientes de pós-graduação em matemática. Não verificamos se houve uma influência alemã no desenvolvimento da disciplina de cálculo no Brasil, e esta é uma questão que ainda deve ser investigada.

As análises dos livros-textos nos revelaram aspectos importantes sobre o processo de disciplinarização do cálculo, proporcionando uma visão panorâmica acerca das mudanças que ocorreram ao longo dos anos. Dessa forma, cada livro selecionado para compor esta pesquisa teve papel fundamental para a compreensão do processo de transformações que a disciplina de cálculo passou até se estabelecer no formato como conhecemos atualmente.

Também é importante ressaltar que o fator surpresa encontrado nos livros de Tibiriçá (1952/1962), que admitem uma abordagem rigorosa para o cálculo e foram destinados ao ensino em uma instituição técnica, pode ser explicado devido ao fato de que a obra foi elaborada na época onde os elementos do cálculo constituíam parte obrigatória do currículo das escolas secundárias. Isso implica que, nesse período, não vigorava uma demarcação tão distinta como a que emergiu após a promulgação da LDB de 1961 e da Reforma Universitária de 1968, com padrões diferentes de “cálculo” e de “análise”. Dessa forma, os alunos ingressantes nos cursos



de engenharia da Escola de Minas, já haviam tido um primeiro contato com os elementos do cálculo infinitesimal, a saber, nas escolas secundárias.

Gostaríamos de ressaltar a nossa imensa admiração pelo trabalho feito por Euclides Roxo, que de forma brilhante apresentou caminhos para introdução dos elementos do cálculo nas escolas secundárias. Outra obra que também merece destaque é o trabalho do professor Tibiriçá, que se revela como uma das primeiras produções brasileiras sobre análise matemática de cunho autoral, que merece ser lembrada e reconhecida por tal feito.

Por fim, também gostaríamos de deixar como um assunto em aberto e que serve de investigação para pesquisas futuras, que visa compreender como ocorreu o processo análogo de transmissão e adaptação do cálculo infinitesimal em outros países colonizados, como, por exemplo, o caso da Argentina, Chile, México, dentre outros.

**REFERÊNCIAS**

ARTIGUE, Michele. Les questions de développement curriculaire à travers un exemple: l'enseignement de l'analyse en France au lycée depuis le début du XXème siècle. *Quadrante*, Vol. XX, n°2, 109-132, 2011.

ÁVILA, Geraldo. O Ensino do Cálculo e da Análise. *Revista Matemática Universitária*, São Paulo, n. 33, p. 83-95, 2002.

AYRES, Frank Jr. Cálculo diferencial e integral resumo da teoria 974 exercícios resolvidos. Coleção Schaum. Traduzido por José Rodrigues Carvalho. Ao livro técnico, Rio de Janeiro, 1957.

BRASIL. Decreto nº 6.026, de 6 de novembro de 1875. Crêa uma Escola de minas na Provincia de Minas Geraes, e dá-lhe Regulamento, 1875.

BRASIL. Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961. Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional, 1961.

BEKE, Emanuel. Classical Papers in Mathematics Education. Beke's Report: Results obtained in the Introduction of Differential and Integral Calculus", edited and commented by Gert Schubring, *International Journal for the History of Mathematics Education*, 2014, 9: 1, 33-70, 1914/2014.

BELHOSTE, Bruno. *Les sciences dans l'enseignement secondaire francais: textes officiels*, réunis et présentés. par Bruno Belhoste. Tome 1: 1789–1914. Paris, Inst. Nat. de Recherche Pédagogique, 1995.

BELHOSTE, Bruno. Réformer ou conserver? La place des sciences dans les transformations de l'enseignantt secondaire en France (1900-1970). *Les Sciences au Lycée. Un siècle de*

*réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, eds. Bruno Belhoste, Hélène Gispert, Nicole Hulin (Paris: Vuibert), 27-38, 1996.

BEZERRA, Manoel Jairo. Curso de matemática: para os primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos clássico e científico. Companhia Editora Nacional. 17.^a edição, p-628, 1965.

BLOCH, Isabel. *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Education. Tese de doutorado, Université Bordeaux 1, 2000.

BRAZILIAN ACADEMY OF SCIENCES. Elon Lages Lima. *Disponível em: <https://www.abc.org.br/membro/elon-lages-lima/>*. Acesso em 21/02/2023.

BRESSOUD, David. The strange role of calculus in the United States. *ZDM – Mathematics Education* 53, 521-533, 2020.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira. O Cálculo na Escola Secundária – Algumas Considerações Históricas. Caderno Cedes 40, 1996.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira.; DASSIE, Bruno Alves. The history of mathematics education in Brazil. *ZDM*, v. 44, n. 4, p. 499-511, 2012.

CAVALARI, Mariana Feiteiro. Um histórico do curso de matemática da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras (FFCL) da Universidade de São Paulo (USP). *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 12, n. 25, p. 15-30, 2012.

CHERVEL, André. L'histoire des disciplines scolaires. Réflexions sur un domaine de recherche. In: *Histoire de l'éducation*, n° 38, 1988. pp. 59-119.

DINI, Ulisse. *Lezioni di analisi infinitesimale*. Vol. 1. Fratelli Nistri, 1907.

DINI, Ulisse. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali di Ulisse Dini*. Tip. T. Nistri, 1878.

GABLER, Louise. Escola de Minas de Ouro Preto. Arquivo Nacional. Rio de Janeiro: MAPA – Memória da Administração Pública Brasileira, 2014. Disponível em:

< <http://mapa.an.gov.br/index.php/menu-de-categorias-2/314-escola-de-minas> >. Acesso em jan. 2022.

GRANVILLE, William Anthony; SMITH, Percy Franklin. *Elements of the Differential and Integral Calculus*. Boston: Ginn & Company, 1904.

GRANVILLE, William Anthony; SMITH, Percy Franklin.; LONGLEY, William Raymond. *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral*. Rio de Janeiro: Editora Científica, 1961. Trad. J. Abdelhay.

HOWSON, Geoffrey. *Mathematics Education in the United Kingdom: England*. *Handbook on the History of Mathematics Education*, Alexander Karp & Gert Schubring (eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (New York: Springer, 2014), (New York: Springer, 2014), 257-269, 2014.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; TEIXEIRA, José Carlos; MACHADO, Nilson José; GOULART, Márcio Cintra; CASTRO, Luiz Roberto da Silveira; MACHADO, Antônio dos Santos. *Matemática - 2º Grau: 3ª série. 5ª edição revisada*, editora Atual, 1976.

JACKUBSON, Mikhael. *Elements of Analysis in Russian Schools*. In: *Series on Mathematics education vol.5: RUSSIAN MATHEMATICS EDUCATION*, p. 191-229, 2011.

LIMA, Eliene Barbosa. Dos Infinitésimos aos Limites: a contribuição de Omar Catunda para a modernização da análise matemática no Brasil. Dissertação de mestrado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2006.

LIMA, Elon Lages. Curso de análise: volume 1. Sexta Edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1989.

MARTINS, Maria Antonieta Meneghini. Estudo da evolução do ensino secundário no Brasil e no Estado do Paraná com ênfase na disciplina de Matemática. Dissertação de mestrado, Curitiba, 1984.

MIORIM, Maria Ângela. O ensino de matemática: evolução e modernização. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 1995.

MINISTERIUM für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen*, 2014. <[https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf](https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf) >

Marchi; MENGHINI, Marta. Italian Debates About a Modern Curriculum in the First Half of the 20th Century. *International Journal for the History of Mathematics Education*, 2014, 9: 2, 23-47, 2014.

MINISTÈRE de l'Instruction Publique. *Enseignement secondaire - horaires, programmes, instructions* (Paris: Armand Colin), 1925.

PRÉSENTATION Nationale de l'enseignement des mathématiques en France au congrès ICME-14. link: <<http://www.cfem.asso.fr/icmi/icme-14>>

MOREIRA, Plínio Cavalcante. O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica. Belo Horizonte: UFMG, p.14-50, 2004.

MORMÊLLO, Ben Hur. O ensino de matemática na Academia Real Militar do Rio de Janeiro, de 1811 a 1874. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2010.

OLIVEIRA, Antonio José Barbosa de. Uma breve história da UFRJ. UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO. Disponível em: <<https://ufrj.br/aceso-a-informacao/institucional/historia/>>. Acesso em jan.2022.

PAGANI, Erica Marlúcia; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral: um mapeamento das teses e dissertações produzidas no Brasil. VIDYA, v. 34, n. 2, p. 14, 2014.

PEREIRA, Vinicius Mendes Couto. O desenvolvimento da Análise no Brasil – Um caminho sobre o surgimento de uma comunidade matemática. Tese de doutorado. HTCE UFRJ, p. 443, 2017.

QUEIROZ, Maria Neuza Almeida; HOUSOME, Yassuko. As disciplinas científicas do ensino básico na legislação educacional brasileira nos anos de 1960 e 1970. Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte), v. 20, 2019.

REZENDE, Wanderley Moura. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. Anais do II SIPEM. 2003.

ROUSE, Hunter. Biography of Julius Weisbach in *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990). Disponível em: <<https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/weisbach-julius-ludwig>>

ROXO, Euclides; THIRÉ, Cecil; MELLO E SOUZA, Júlio César de. Curso de Matemática 5º ano. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1940.

ROXO, Euclides; CUNHA, Haroldo; PEIXOTO, Roberto; NETTO. Matemática 2. Ciclo 3. Serie. Livraria Francisco Alves, 1956.

SCHUBRING, Gert. "Pure and Applied Mathematics in Divergent Institutional Settings in Germany: the Role and Impact of Felix Klein", *The History of Modern Mathematics. Volume II: Institutions and Applications* eds. David Rowe, John McCleary (Boston: Academic Press 1989), 171-220, 1989.

SCHUBRING, Gert. L'Enseignement Mathématique and the first international commission (IMUK): The emergence of international communication and cooperation. One hundred years of L'Enseignement Mathématique. 2003. (pp.47-65).

SCHUBRING, Gert. Pesquisar sobre a história do ensino da matemática: metodologia, abordagens e perspectivas. História do ensino da matemática em Portugal. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, (pp. 5-20), 2005.

SCHUBRING, Gert. Classical Papers in Mathematics Education: Results obtained in the introduction of differential and integral calculus in upper grades of secondary institutions Emanuel Beke (with introduction by Gert Schubring). The international Journal for the history of mathematics Education, v. 9, n. 1, New York, p. 33-70, 2014.

SCHUBRING, Gert. Klein's Conception of 'Elementary Mathematics from a Higher Standpoint'. In: Weigand HG., McCallum W., Menghini M., Neubrand M., Schubring G. (eds) The Legacy of Felix Klein. Monografias do ICME-13. Springer, p.169-180, 2019.

SCHUBRING, Gert. *Analysing Historical Mathematics Textbooks*. International Studies in the History of Mathematics and its Teaching. Springer, 2022.

SILVA, Geraldo Bastos. A educação secundária: perspectiva histórica e teoria. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1969.

SPEZIALI, Pierre. Biography of Ulisse Dini in *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990). Disponível em: <<https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/dini-ulisse>>

TIBIRIÇÁ, Altamiro. *Curso de Cálculo Infinitesimal*. Tomo I, 1ª ed. Ouro Preto: Escola Nacional de Minas e Metalurgia da Universidade do Brasil, 1952.

TIBIRIÇÁ, Altamiro. *Curso de Cálculo Infinitesimal*. Tomo I, 2ª ed. Ouro Preto: Fundação Gorceix, 1962.

THOMAS JR, George Brinton. *Cálculo – Volume 1*. Reimpressão 1ª ed de 1965. Tradução: Alfredo Alves de Farias. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1976.

VAN VLECK, Edward Burr. Granville's Differential and Integral Calculus. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 12(4), 181-187, 1906.

VIÑAO, Antonio. A história das disciplinas escolares. *Revista brasileira de história da educação*, v. 8, n. 3, p. 173-215, 2008.

WEISBACH, Julius. *Elements of analysis as applied to the mechanics of engineering and machinery*. Philadelphia, p.92. 1869.