UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM/UFRJ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA - PEMAT

VINICIUS LINDER PIRES

INTUIÇÃO, FORMA E CONHECIMENTO: RELAÇÕES ENTRE A FILOSOFIA NEOKANTIANA E A EMERGÊNCIA DA MATEMÁTICA PURA NA PRÚSSIA DO SÉCULO XIX

Rio de Janeiro
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM/UFRJ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA - PEMAT

Vinicius Linder Pires

Intuição, forma e conhecimento: relações entre a filosofia neokantiana e a emergência da matemática pura na Prússia do século XIX

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Gert Schubring.

Rio de Janeiro
2022

CIP - Catalogação na Publicação

Linder, Vinicius
L744i Intuição, forma e conhecimento: relações entre a filosofia neokantiana e a emergência da matemática pura na Prússia do século XIX / Vinicius Linder. -- Rio de Janeiro, 2022.
125 f.

Orientador: Gert Schubring.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2022.

1. História da Matemática. 2. Filosofia da Matemática. 3. Matemática Pura. 4. Filosofia Neokantiana. I. Schubring, Gert, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Instituto de Matemática
Secretaria de Ensino de Pós-Graduação

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Instituto de Matemática

Ata de Defesa de Dissertação para a concessão do grau de Mestre em Ensino de Matemática Área de Concentração: Matemática

Defesa realizada no dia 14 de Dezembro de 2022

Candidato: VINICIUS LINDER PIRES

Orientadores: Gert Felix Schubring

Banca examinadora (Nome Completo)

1) Gert Felix Schubring

2) Gerard Emile Grimberg

3) Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Título da Dissertação:

Intuição, forma e conhecimento: relações entre a filosofia neokantiana e a emergência da matemática na Prússia do século XIX

Local da Defesa:
Videoconferência

Em sessão pública, após exposição de cerca de 30 minutos, o candidato foi argüido oralmente pelos membros da banca tendo como resultado:

APROVAÇÃO DA DISSERTAÇÃO SEM RESTRIÇÕES

Presidente: Gert Schubring

Gert Schubring

Gert Schubring

Rio de Janeiro, 14 de dezembro de 2022.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, ao meu orientador, Gert Schubring, pela paciência, compreensão, firmeza de espírito e pela inestimável contribuição à minha formação e a este trabalho.

Agradeço também aos professores do PEMAT, em especial a Victor Giraldo, Thiago Hartz, Gerard Grimberg e Agnaldo Esquincalha, pela grandiosidade e generosidade com as quais conduzem seus alunos.

Agradeço a meus colegas de turma do mestrado e do seminário de história da matemática, pelas valiosas trocas, conversas e leituras compartilhadas.

Agradeço intensamente ao meu amor, Ana, pelo carinho, cumplicidade e apoio incondicional nesse processo duro que foi fazer um mestrado em meio a uma pandemia.

Finalmente, agradeço à Zefa, pela companhia fiel na rotina de leituras e nos passeios diários na praça clarim.

RESUMO

Neste trabalho, investigamos as tensões e ingerências entre filosofia e matemática, no contexto prussiano da emergência da matemática pura, no século XIX. É bem conhecida, na historiografia, a ocorrência de uma virada epistemológica na matemática neste século, que viria a reestruturar as concepções internas de seus objetos, em detrimento de uma noção quantitativa, e a partir de uma concepção relacional. Neste contexto, analisamos as relações desta mudança com a filosofia de sua época, em particular a doutrina kantiana e as neokantianas, e como estas teriam impactado a concepção e a prática da matemática, em direção a uma matemática pura. Nossa investigação consiste na análise de quatro autores principais: Jakob Fries, filósofo da ciência e da matemática do início do século, Hermann Graßmann, matemático cuja obra viria a influenciar novas concepções na segunda metade do século, Leonard Nelson, fundador da escola neo friesiana e influente matemático e filósofo em Göttingen, e Ernst Cassirer, filósofo da escola de Marburg com grandes contribuições à filosofia da ciência do início do século XX.

Palavras-Chave: Matemática Pura; Filosofia da Matemática; Kant; Jakob Fries; Hermann Grassmann; Leonard Nelson; Ernst Cassirer.

ABSTRACT

In this research, we investigate the tensions and interference between philosophy and mathematics in the Prussian context of the emergence of pure mathematics in the nineteenth century. It is well known, in historiography, the occurrence of an epistemological turn in mathematics in this century, which would come to restructure the internal conceptions of its objects, in detriment of a quantitative notion, and from a relational conception. In this context, we analyze the relations of this change with the philosophy of its time, in particular the Kantian and neo-Kantian doctrines, and how these would have impacted the conception and practice of mathematics, towards a pure mathematics. Our investigation consists of the analysis of four main authors: Jakob Fries, philosopher of science and mathematics at the beginning of the century, Hermann Graßmann, mathematician whose work would come to influence new conceptions in the second half of the century, Leonard Nelson, founder of the neo Friesian school and influential mathematician and philosopher in Göttingen, and Ernst Cassirer, philosopher of the Marburg school with major contributions to the philosophy of science of the early twentieth century.

Keywords: Pure Mathematics; Philosophy of Mathematics; Kant; Jakob Fries; Hermann Grassmann; Leonard Nelson; Ernst Cassirer.

SUMÁRIO

1 - Introdução **10**

1.1 Apresentação 10

1.2 Objetivos Gerais e Estrutura 13

1.3 Metodologia 14

2 - Reconstruções contextuais da virada do século XIX **17**

2.1 A distinção sintético-analítica 17

2.2 O contexto social e institucional da Prússia 23

2.3 A filosofia de Immanuel Kant 28

2.3.1 Matemática e a Crítica da Razão 33

2.3.2 A construção de conceitos 38

2.3.3 Restrição ou generalidade da filosofia kantiana da matemática? 45

3 - Movimentos à matemática pura: primeira metade do século XIX **50**

3.1 Jakob Friedrich Fries 51

3.1.1 A filosofia da ciência de Fries: expansão do universo da ciência kantiana 53

3.1.2 A filosofia da matemática de Fries 57

3.2 Hermann Graßmann 64

3.2.1 Die Lineale Ausdehnungslehre 67

3.2.2 A Formenlehre como fundamento da matemática 70

4 - O neokantismo e a matemática moderna: segunda metade do século XIX **74**

4.1 A emergência da matemática moderna 74

4.2 Leonard Nelson 82

4.2.1 A filosofia neofriesiana 84

4.3 Ernst Cassirer 93

4.3.1 Substância e Função: A filosofia do jovem Cassirer 95

4.3.2 O conceito de número 103

4.3.3 A síntese das novas estruturas geométricas 109

4.3.3 Verdade e realidade nas ciências da natureza 117

5 - Considerações Finais **125**

Bibliografia **126**

1 - Introdução

1.1 Apresentação

> *"[filósofos] não têm sido capazes de acompanhar o avanço das teorias científicas, principalmente, porque a ciência se tornou muito técnica e matemática para os filósofos".* (Hawking apud Sarukkai, 2002, p. xii)

Ao longo dos séculos XVII e XVIII, é possível encontrar um intenso desenvolvimento das ciências matemáticas no contexto das ciências naturais, orientadas sobretudo a partir da tradição determinista do pensamento científico. Nesta concepção, a realidade e a natureza encontram-se determinadas através de suas relações de causalidade, as leis naturais, expressas por suas equações matemáticas.

Com efeito, esta tradição sugere que não só os princípios da realidade estariam submetidos à matemática como também o contrário se sucede: em que pese ser um saber eminentemente teórico, os princípios da própria matemática deveriam identificar-se nas condições dadas pelo real. Assim, evidencia-se aqui uma matemática vinculada à realidade, de forma que seus objetos têm sua "cidadania" legitimada por sua conexão com os fenômenos do real. Em outras palavras, a concepção da matemática deste período teria um viés estritamente ontológico: seus objetos demandariam existência real, envolvida diretamente com sua interpretação geométrica.

Um exemplo no qual reside tal tradição pode ser visto a partir do chamado "paradigma quantitativo", que apresenta um conceito específico de número. No espírito desta concepção, pouco se distingue a grandeza do número. Assim, a legitimidade, por exemplo, dos números negativos enquanto objetos numéricos de fato acaba por rejeitada em vista do substancialismo que envolve tal paradigma, como aponta Schubring (2005). Tal entendimento numérico seria a expressão do paradigma quantitativo:

> "Hence, advances in concepts on negative quantities in the eighteenth century make it increasingly clear that only absolute numbers were accepted as legitimate number objects. Something that first emerged in a completely implicit way within fields of application finally became formulated increasingly explicitly as a precondition, as a consequence of reflections on foundations. This number concept was the expression of a quantity concept pervading the whole of mathematics that simultaneously aimed to ensure ontological ties to a "reality" (of whatever kind)." (Schubring, 2005, p. 481)

Já no fim do século XVIII esta concepção da matemática teria levantado uma suspeita pessimista de seus proponentes quanto à sua possível estagnação teórica, como expressa em uma carta de Lagrange a d'Alembert, em 1772:

> "ne vous semble-t'il pas que la haute géométrie va un peu à decadence? (...) Elle n'a d'autre soutien que vous et M. Euler"[1] (Struik, 1987, p.136)

Tal desconfiança encontraria consonância na extensa produção do campo no século XVIII, que teria então já atingido o apogeu de seus grandes resultados.

A partir do século XIX, entretanto, parece haver uma mudança de cenário, influenciada pela emergência das universidades da Prússia no contexto internacional. Ao contrário do que acontecia na França, onde a predominância da *Ècole Polytechnique* norteava as práticas matemáticas tributárias dessa tradição tecnicista, desenvolvia-se na Prússia, um dos estados alemães, uma "nova" matemática, baseada nos valores neo-humanistas. Esta nova visão da matemática posiciona-se então sobre uma nova base epistemológica, ao propor o afastamento de seus pressupostos empíricos em vista de uma matemática "pura".

A caracterização de uma nova matemática, aqui entendida como "pura", identifica-se nos novos objetos e elementos que emergem no século XIX. Se pode citar, por exemplo, as novas geometrias não euclidianas, as álgebras não comutativas, bem como o novo conceito de número, que aqui supera sua concepção quantitativa. De forma geral, esta reinterpretação de velhos objetos, e introdução de novos, representaria uma nova concepção de matemática, orientada, sobretudo, por uma nova perspectiva ontológica. Pode-se dizer, assim, que a própria matemática deixaria de ser compreendida como uma "ciência das quantidades" em vista de ser concebida como uma "ciência das relações", ou ainda como uma ciência que trata, num escopo mais amplo, das estruturas internas da pensabilidade.

Esta virada epistemológica da matemática ocorrida no século XIX, entendida como um fenômeno inicialmente restrito à Prússia, é inserida por Schubring (1981) em um contexto de disciplinarização e institucionalização da matemática. Tal processo demandaria o reconhecimento social da atuação de uma comunidade científica e sua contrapartida institucional. A emergência de uma tal matemática "pura", independente de suas aplicações

[1] "Não lhe parece que a sublime geometria está tendendo à decadência? Ela não tem outro suporte que não você e o Sr. Euler"

bem como o desenvolvimento de uma metodologia específica legitimariam um processo de institucionalização da matemática que levaria a sua autonomia científica. A renovação da visão interna sobre os princípios e metaconcepções da matemática assim se fazia necessária.

Nesse contexto de formação da nova cosmovisão de uma matemática pura, encontraria-se o privilegiamento desta pelas bases epistemológicas fornecidas pela filosofia de Immanuel Kant (1742-1804), em sua Crítica da Razão Pura. Ao consagrar a matemática pura como o sumo exemplar da existência de juízos sintéticos a priori, Kant garantiria a ela a possibilidade da produção de novos conhecimentos. Esta seria a real essência da reinvindicação Kantiana dos juízos sintéticos a priori. (Tóth, 1972, apud Schubring 1981, p. 119)

O encontro dessas ideias filosóficas com a produção matemática é ressaltado também por Roque (2012):

> O estilo dos matemáticos alemães da época pode ser explicado, em grande parte, pela proximidade com a faculdade de filosofia e pelo contato com os filósofos. Promoviam-se, assim, orientações mais teóricas, motivadas também por pressuposições filosóficas. O grupo dos neokantianos do início do século XIX, que se opunha ao idealismo de Hegel, exerceu forte influência sobre diversos matemáticos alemães algumas décadas depois. Os valores neo-humanistas enxergavam a matemática como uma ciência pura, o que era expresso na visão de vários pensadores da época. Os conceitos fundamentais deviam ser definidos por meio de outras definições claramente explicitadas e nunca se basear em intuições. (Roque, 2012, p. 419)

Diante do exposto, esta pesquisa tem como foco as relações entre filosofia e matemática, no contexto da emergência da matemática pura na Prússia, no século XIX, buscando ressaltar a relevância de trabalhos que exercitam essa relação. Tendo as produções da filosofia neokantiana como norte, entendemos como necessário inicialmente empreender uma revisão teórica em torno da obra de Kant. Em seguida, buscaremos tratar de alguns personagens os quais nos serão relevantes às concepções emergentes da matemática pura. Em uma primeira fase, relativa à primeira metade do século XIX, privilegiaremos, sobretudo, a discussão da obra do filósofo Jakob Fries (1773-1843). Também nesta fase, trataremos da obra de Hermann Graßmann (1809-1877), como um exemplo prático significativo de considerações sobre as concepções da matemática pura. Em uma segunda fase da pesquisa, relativa à segunda metade do mesmo século e mais própria ao movimento neokantiano, discutiremos a obra de dois filósofos desta corrente, a saber, Ernst Cassirer (1874-1945) e Leonard Nelson (1882-1927), como exemplos característicos de filósofos recebendo e acompanhando os desenvolvimentos da matemática pura, agora já estabelecidas.

1.2 Objetivos Gerais e Estrutura

Dadas as considerações iniciais, este trabalho tem por objetivo produzir uma análise sobre as relações entre a matemática e filosofia, no contexto da emergência da matemática pura na Prússia do século XIX. Buscamos, portanto, elucidar esta relação, a partir da análise de autores que buscaram, no período em questão, explorá-la.

Nosso texto se estrutura em cinco capítulos, sendo o primeiro a presente introdução. O segundo capítulo consta de uma revisão de bibliografia e pretende dar conta de três eixos principais: em primeiro lugar, uma breve recapitulação dos métodos matemáticos dos séculos XVII e XVIII, tendo em vista a distinção entre os métodos analíticos e sintéticos, sobretudo na França; em segundo lugar, discutiremos o contexto social e institucional da Prússia no início do século XIX, uma vez que entendemos que tal contexto é crucial à emergência da matemática pura; por fim, analisaremos a filosofia kantiana propriamente dita, de forma a elucidar e fundamentar as análises filosóficas posteriores.

Os dois capítulos seguintes dividem-se cronologicamente. O capítulo 3, relativo à primeira metade do século XIX, visa dar conta das primeiras inferências da filosofia neokantiana em direção à matemática pura. Assim, em primeiro lugar, lidamos com a obra de Jakob Fries, proeminente filósofo alemão do século XIX, que pretendeu desenvolver propriamente uma filosofia da matemática sob bases kantianas. Destacamos aqui as contribuições de Fries neste debate, em especial a separação pragmática entre matemáticas pura e aplicada e a afirmação de uma *Formenlehre* como disciplina básica da matemática. Em seguida trataremos da obra de Hermann Graßmann, em especial seu *Ausdehnungslehre de* 1844. O trabalho de Graßmann caracteriza-se por suas metaconcepções inovadoras, além da proposta de um novo ramo da matemática. Com efeito, as obras de Graßmann terão grande influência sobre as concepções posteriores, em particular, na fundamentação da aritmética no fim do século XIX e na emergência da álgebra linear.

O capítulo 4 se propõe relativo à segunda metade do século XIX. Esta fase encontra uma matemática pura já consolidada e constitui-se de análises de uma filosofia, autointitulada neokantiana, em torno destas novas concepções. Assim, primeiramente tratamos da filosofia de Leonard Nelson, fundador da escola neofriesiana, que busca

resgatar no século XX as bases da filosofia de Jakob Fries. Interessa-nos aqui como este trata dos novos objetos da matemática, sobretudo como as conforma com a filosofia de Kant e de Fries. Além disso, será especialmente interessante sua atuação junto à comunidade científica, em particular, em sua amizade com David Hilbert. Em seguida, tratamos da filosofia de Ernst Cassirer, filósofo da escola de Marburg, o qual identifica, em seu livro de 1910, a passagem de um substancialismo nas ciências em direção a uma epistemologia matemático-funcional. Em especial, nos será particularmente interessante o profundo tratamento de Cassirer à concepção de número e às geometrias não euclidianas.

Finalmente, o quinto e último capítulo constará de uma síntese conclusiva do trabalho, tendo em vista a reunião das análises efetuadas em direção aos objetivos propostos.

1.3 Metodologia

O material da pesquisa consta basicamente de fontes primárias, em geral textos dos próprios personagens autores tratados nos dois principais capítulos, bem como fontes secundárias, de maneira que a pesquisa, de forma geral, se constitui desta leitura bibliográfica.

A metodologia de análise orienta-se pela hermenêutica como proposta por Schubring (2005). Schubring define a tradição clássica da hermenêutica referindo-se, sobretudo, à obra de Friedrich August Wolf (1759-1824), para o qual, de maneira simples, a hermenêutica pode ser entendida como a arte de entender e explicar os pensamentos de um Outro por meio dos seus sinais. (Wolf 1839, p. 272 apud Schubring, 2018, p. 199)

Sendo assim, no reconhecimento expresso da alteridade, esta hermenêutica clássica pretende uma investigação sobre o Outro que abarque não só o conhecimento da linguagem, mas uma análise sócio-cultural do período tratado. Com Schleiermacher (1768-1834), a hermenêutica ganharia contornos disciplinares, de forma a ser inserida mais formalmente à filosofia, sobretudo no contexto acadêmico alemão. Convergente à Wolf, Schleiermacher entende que a interpretação hermenêutica deve ser capaz de "sair do próprio pensamento e de entrar no daquele do escrito" (Schleiermacher 1959, p. 32 apud Schubring 2018, 199).

Durante o século XIX, a tradição hermenêutica bifurcaria-se, a partir de uma contraposição proposta por Willhelm Dilthey (1833-1911), o qual se opunha à pretensão objetiva da hermenêutica clássica. A obra de Dillthey inaugura uma hermenêutica subjetiva, sob a qual a tarefa abandona a possibilidade de acesso ao pensamento do Outro, em vista de sua reconstrução própria, tendo a subjetividade do leitor como orientação básica. No século XX, esta hermenêutica subjetiva viria a ser dominante nas humanidades, tendo em vista sua adoção e desenvolvimento, em direção à uma abordagem fenomenológica, por autores como Heidegger (1889-1976) e Gadamer (1900-2002), de maneira a difundi-la plenamente.

A hermenêutica proposta por Schubring, entretanto, opõe-se a esta corrente subjetivista, de forma a propor uma visão "materialista" da interpretação. De maneira geral, esta corrente de uma hermenêutica objetiva pretende o desenvolvimento da tradição de Wolf e Schleiermacher. Essa corrente ganharia força a partir da década de 1960, com as críticas de Szondi (1929-1971) e Bollack (1923-2012) à visão de uma hermenêutica, em seus termos, "humanista".

Sendo assim, a hermenêutica objetiva propõe o acesso ao significado de um texto a partir de uma visão "holística" que, em última instância, pretende conduzir o leitor, de sua posição espaço-temporal, à posição do tempo e do espaço do autor da obra. Segundo Schubring (2005), a tarefa desta interpretação holística requer uma abordagem que dê conta, simultaneamente, de contribuições de pesquisa científica, da sociologia e da história.

Ademais, o desenvolvimento dessa via interpretativa por Schubring privilegia também a noção de comunicação tal como entendida por Krohn e Küppers (1989), os quais caracterizam a atividade científica a partir da interação entre sistema e ambiente, de forma a estabelecer sua legitimação por vias intra e extracientíficas. Combinando tais abordagens, o autor propõe a abordagem da história social das ideias a partir de uma primazia da cultura.

> "Combining the communicational approach with the system–environment–interaction model, I can specify that the social history of ideas is in its essence culturally shaped: the first interaction of the system of mathematics with its environment occurs primarily in the field of culture." (Schubring, 2005, p. 6)

Dessa maneira, no desenvolvimento de uma história social das ideias, estudos sobre a profissionalização e institucionalização se tornam esclarecedores dos elementos sociais-culturais que norteiam a ciência. Aspectos territoriais também tornam-se primordiais. Com efeito, a abordagem holística aqui tomada segue as análises (1) do entendimento de um conceito a partir da perspectiva de um autor próprio; (2) do contexto geral de entendimento

sobre tal conceito; (3) das epistemologias presentes na comunidade do devido contexto; (4) da comparação de epistemologias outras, demarcadas por distinção territorial ou comunicativa; (5) da materialidade dos textos tratados.

Em suma, no uso da hermenêutica objetiva, a proposta de um acesso cognitivo à visão do Outro pretende a abordagem dessa visão em sua totalidade. Conclusivamente, concordamos aqui com Schubring (2018) quando este diz que:

> "... não existem receitas prontas para efetuar análises históricas. Cada caso é um caso diferente; e assim a tarefa do pesquisador se constitui: a de elaborar uma abordagem adaptada ao seu caso. Por outro lado, a hermenêutica apresenta uma orientação confiável nesta busca, uma vez que se queira reconstruir o pensamento do Outro, e não se restringir à uma interpretação pessoal." (Schubring, 2018, p. 200)

2 - Reconstruções contextuais da virada do século XIX

2.1 A distinção sintético-analítica

Esta seção visa a caracterização da metodologia matemática nos séculos XVII e XVIII, em vista a compreender também seus aspectos conceituais. Tal caracterização terá por base as tensões entre os métodos sintético e analítico na matemática, sobretudo na França e Alemanha a partir do século XVII. A obra de referência para esta seção é o livro "*Conflicts Between Generalization, Rigor and Intuition"*, de Gert Schubring (2005).

A distinção analítico-sintética aparece na literatura de forma um tanto polissêmica, tendo diferentes acepções no tempo e nas áreas sobre as quais se refere, em particular, a matemática e a filosofia. Na matemática, esta distinção ficaria conhecida a partir da obra de Pappus (~300 a.E.C.), na qual este a entende a partir dos métodos complementares de composição e resolução no tratamento de problemas, num sentido não problemático.

Na Europa do século XVI, essa distinção seria tensionada, sobretudo em uma crítica à obra de Euclides, representada a partir de Petrus Ramus (1515-1572). Ramus, que seria um defensor da utilidade das ciências matemáticas, acusaria os métodos euclidianos como responsáveis pela baixa predileção da matemática pelos estudiosos os quais, segundo ele, a associariam a uma ciência "obscura" e sem utilidade. Tal visão seria resultado do modelo euclidiano, o qual, apesar de sua tradição e estima, não representaria um bom modelo de ordem metodológica e consistência lógica, por sua não consideração com os processos de generalização do conhecimento matemático.

Em continuidade com o criticismo de Ramus, Antoine Arnauld (1612-1694) rejeitaria o modelo euclidiano apresentando, em seus "*Nouveaux Élémens de Géométrie*", uma nova estrutura metodológica, direcionando-se a um público amplo através de um estilo mais acessível, adotando sobretudo o método analítico de Descartes e suas notações algébricas. Esta obra seria bastante influente, e se mostraria presentes em diversas outras obras posteriores. Em concordância com o programa crítico de Ramus, Arnauld então distinguiria o que chamaria de "métodos de pesquisa" dos "métodos de apresentação":

> "Thus there are two sorts of methods: The one to discover the truth, which is called analysis, or the method of resolution, and which can also be called the method of invention: and the other to make understood to others what one has found, which is called synthesis, or the method of composition, and which can also be called the method of doctrine" (Arnauld & Nicole 1662, 368, apud Schubring, 2005, p.70).

Tais métodos sintéticos de apresentação, entretanto, deveriam seguir o curso de sua "ordem verdadeira", partindo de suas estruturas gerais em direção às particulares e não o contrário. Tal inversão da "ordem natural genuína" seria então o maior erro dos geômetras e do método euclidiano.

Em conformidade com o espírito crítico de Ramus e Arnauld e em um projeto talvez até mais ousado, Jean Prestet (1648-1691) publicaria seus "*Élémens des Mathématiques*", sob os quais se defenderia novamente uma abordagem analítica e algébrica. Em vista a priorizar a generalidade dos métodos, ele reivindicaria a superioridade da aritmética e da álgebra sobre a geometria. Em relação à "geometria dos antigos", Prestet apontaria a falta de método, os detalhes excessivos e o apego à intuição sensível (Schubring, 2010, p. 71).

O programa algébrico de Arnauld e Prestet seria disseminado na França sobretudo a partir da ordem católica dos Oratorianos, em especial pela atuação do grupo do padre Nicolas Malebranche (1638-1715), do qual Prestet fazia parte. O malebranchismo teria influência dominante na Academia de Ciências de Paris, de forma a ter uma atuação decisiva na difusão do método analítico na França, que se tornaria predominante na França sobretudo durante o século XVIII.

Na Alemanha, o primeiro livro a adaptar o estilo moderno de Arnauld e Prestet seria o "*Anfangs-Gründe aller mathematischen Wissenschaften*" de Christian Wolff (1679-1754), publicado em 1710. Esta obra alcançaria uma considerável disseminação em território germânico, tendo uma posterior versão em latim de grande alcance no oeste europeu, sendo o livro-texto alemão de maior alcance em todo o século XVIII (Schubring, 2005, p.96). Além de Wolff, destacam-se outros autores alemães, como Christian Hausen (1693-1743), Johann Segner (1704-1777), Wenceslaus Karsten (1732-1787), Abraham Kästner (1719-1800) e Georg Klügel (1739-1812).

Em particular, Klügel, um professor de matemática na universidade de Halle, advogaria fielmente ao método analítico, desqualificando o método sintético no que neste faltaria a generalização, um aspecto, segundo ele, primordial ao procedimento matemático:

> "The analytic differs from the synthetic method particularly in that the former embraces several cases in a single formula, while the synthetic discusses each case separately. The reason for this is that analysis expresses the connection of the quantities by equations, and that it uses the general properties of the equations, as well as the rules for connecting them to give the value of each quantity by those belonging together with it, or to develop their relations. (...) Moreover, it is

> necessary to present all related cases of a connection between quantities in one calculation, to economize on repetition, and to avoid a too cumbersome set of propositions, as well as in particular to survey all the differences in a formula at a glance" (Klügel, 1795, p. 312-313, apud Schubring, 2005, p. 139).

Em ambos os contextos, a distinção sintético-analítica nos procedimentos matemáticos viria a caracterizar a relação entre tradição e modernidade, esta última vinculada sobretudo aos procedimentos algébricos. Na França, a predominância dos métodos analíticos alcançaria um breve apogeu nos primeiros anos da Revolução, sofrendo uma contração a partir de 1811, em favor de uma reemergência dos métodos sintéticos (Schubring, 2005, p. 295). Este fato requer, entretanto, uma contextualização dos cenários institucionais das ciências matemáticas na França ao fim do século XVIII.

De forma geral, é possível comparar a posição das matemáticas nacionais européias a partir de seu status nas universidades. Um forte ponto de influência no período é a emergência de várias novas instituições a partir do conflito entre catolicismo e protestantismo. Essas novas organizações viriam a se antepor à posição tradicional das faculdades de artes, nas quais o ensino propedêutico das matemáticas se encontraria sobre uma posição de marginalidade a partir do *quadrivium*. A predominância, portanto, da posição religiosa de um certo território seria determinante, como ressaltado por Schubring:

> "While the faculty of arts was able to attain a relatively independent position documented in its rise to “faculty of philosophy” in Protestant territories, in particular Lutheran ones, it not only remained confined to subordinate functions in territories of Catholic faith, but was even in essential parts replaced by colleges having the status of secondary schools." (Schubring, 2005, p. 62)

Na França as universidades seriam predominantemente católicas, de modo que tal modelo restringia a matemática a uma marginalidade curricular. Uma cultura científica, entretanto, se desenvolvia em espaços não universitários, sobretudo a partir da fundação da *Académie des Sciences* em 1666. O domínio institucional das universidades seria também confrontado a partir do século XVIII com a emergência das escolas militares, que forneceriam uma forte instrução em matemática e ciências. Historiadores como Dirk Struik inferem que as academias e escolas militares inauguram um “novo período” na história da matemática francesa. (Struik, 1987, p. 146)

Por contraste, na Alemanha identifica-se uma situação distinta. O desenvolvimento de disciplinas científicas vinculadas às universidades se tornaria uma situação favorável sobretudo em territórios protestantes, de forma a favorecer o fortalecimento dessas instituições e seu destaque no século XVIII. Tal seria o caso das universidades de Halle e

Göttingen, as quais se caracterizariam pelo volume de pesquisas e pelos primeiros processos de especialização que contribuiriam à posterior institucionalização da matemática enquanto ciência autônoma.

Paralelo ao contexto religioso, na França as escolas militares, tal como citado anteriormente, teriam influenciado significativamente a instrução e por consequência a cultura matemática francesa no século XVIII. A implementação dos sistemas de escolas militares viria a estimular uma cultura de conteúdos e métodos específicos, orientados a partir de seus exames. O fato de, em geral, haver uma concomitância nos cargos de examinadores permanentes e autores de livros-texto faria com que tais obras fossem bastante disseminadas nessas escolas (Schubring, 2005, p.121). Alguns casos notáveis de examinadores-autores são Charles Camus (1699-1768), Abbé Bossut (1730-1814) e Étienne Bézout (1730-1783), este último o de mais sucesso dentre eles.

É curioso que tais livros-texto, em contraste com a tradição de Arnauld, venham a prezar pelos métodos sintéticos em vista de um argumento didático. De fato, tais livros viriam a dar um passo atrás no programa analítico francês, em vista a reivindicar a acessibilidade do método sintético a um público mais amplo. Os livros de Camus, por exemplo, não viriam a constar de volumes que tratassem de álgebra. Bézout, em especial, viria a declarar uma distinção na utilização dos métodos direcionados a "gênios" ou "inventores", caso dos métodos analíticos, daqueles apresentáveis ao público geral, caso dos métodos sintéticos (Schubring, 2005, p. 124). De forma geral, é preciso entender a posição central que essas instituições militares teriam no contexto educacional na França e de como esta posição seria tensionada a partir da Revolução.

Os primeiros anos da Revolução Francesa apresentariam uma reestruturação radical dos modelos educacionais e científicos na França. Em particular, a matemática e a química se tornariam as principais disciplinas do sistema educacional, capitaneadas pelo método analítico. Na matemática, sobretudo, o favorecimento do método analítico se converteria em um programa de algebrização em detrimento dos métodos geométricos, que tomará curso na França. Após o fim do período do Terror com a queda de Robespierre em 1794, o grupo dos *Idéologues* passaria a influenciar e orientar as políticas de educação em direção à propagação de tal método, em detrimento do método sintético, o qual era vista como "obscuro". Este grupo estaria em consonância com os discursos anteriores dos malebranchistas e também de Condillac (1715-1780), cuja obra seria de grande influência

em favor do programa analítico na França. Em seu texto *"L'essai sur l'origine des connaissances humaines"*, Condillac discorre sobre a abstração progressiva do conhecimento humano, tendo a abstração das ciências matemáticas como ponto chave de sua discussão. Segundo ele, uma relação clara entre pensamento e linguagem demandava um aperfeiçoamento estrutural da linguagem de forma que uma ciência nada mais seria que uma "língua bem feita". A matemática, e em especial a álgebra, na filosofia de Condillac, consistiria de um exemplo privilegiado de linguagem, sobre a qual seus elementos poderiam ser entendidos como exatos.

O movimento de algebrização na França revolucionária possibilitaria então uma recepção mais interessada das concepções de algebrização da análise. Com efeito, com a criação da *École Polytechnique* em 1794, produz-se um ambiente de padronização dos currículos, centradas no método analítico. O primeiro curso de análise da *École*, ministrado por Gaspard Riche de Prony em 1795, seria representativo desse movimento. Em contraste com a tradição anterior e baseado na obra de Euler, de Prony excluiria o método dos *infiniment petits*, privilegiando as abordagens algébricas. Também Lagrange (1736-1813) pode ser tido como um expoente do método analítico. No contexto da Revolução, Lagrange teria radicalizado seu método de abordagem, algebrizando-o completamente, rejeitando o uso de infinitamente pequenos. Outro caso representativo é o de Bossut, aqui anteriormente citado como um dos examinadores-autores das escolas militares. Em contraste com suas próprias publicações anteriores e apesar de todas elas, Bossut publicaria em 1798 um novo livro-texto no qual contribui para este processo de algebrização na França. (Schubring, 2005, p. 293)

A predominância dos métodos analíticos na França pós-Revolução, sobretudo na *École Polytechnique*, entretanto, seria quebrada a partir de 1811. Esta quebra representaria um retorno a uma orientação dos métodos sintéticos e do papel da geometria, privilegiando os processos intuitivos. Schubring (2005) descreve este processo, o qual se inicia com uma reação do corpo de engenharia militar, o *Corps du Génie*, à nova estrutura educacional centrada na *École Polytechnique*.

Após o fechamento dos sistemas de escolas reais de engenharia, é criada em 1794 a *École Centrale des travaux publics* de Paris. Inicialmente prevista como um sistema de educação integrado das diferentes carreiras profissionais oferecidas para engenheiros e servidores públicos, a escola teria sua estrutura alterada a partir de 1795, dando lugar a uma

função de instituição propedêutica obrigatória às escolas de aplicação, tornando-se *École Polytechnique*.

A partir de 1797, a centralidade da *École* seria questionada, sobretudo pelos *Corps du Génie* e a escola de artilharia os quais, insatisfeitos com o novo sistema, alegariam a insuficiência educacional dos egressos da escola e demandariam a restauração da *École du Génie*. Em particular, nota-se que o *Comité central des Fortifications*, então politicamente influente ao *Directoire*, era composto quase exclusivamente por oficiais ligados ao antigo regime e, consequentemente, interessados na restauração da antiga escola. A atuação de Laplace, o qual encontrava-se na posição de examinador permanente das escolas militares, tanto antes quanto após a Revolução, seria também decisiva na articulação da diminuição do alcance da *École Polytechnique* e ocasionaria numa primeira crise da escola. Com o golpe de Napoleão em 1799, tal situação se estabilizaria, confirmando a posição central da École no sistema educacional francês.

Por volta de 1810, uma nova crise se estabeleceria sobre a *École Polytechnique*, novamente motivada pela *École du Génie*. Após uma nova rodada de ataques aos resultados educacionais da escola de Paris, o *Conseil d'instruction* e o *Conseil de perfectionnement* passam a demandar por mudanças metodológicas, as quais recairiam sobre o uso dos métodos analíticos. A partir de 1811, isso se traduziria em um retorno dos métodos sintéticos e da geometria, concomitante a uma revisão dos cursos em favor de um utilitarismo de conteúdo e em detrimento de conhecimentos não essenciais à realidade profissional.

Com efeito, esta mudança metodológica e epistemológica parece traçada também na obra de alguns autores franceses. Representativa desta virada seria a obra de Lazare Carnot (1753-1823). Inicialmente em consonância com as ideias de Condillac, Carnot viria a revisar suas posições em relação à álgebra afirmando, em 1813, que "os princípios da álgebra comum são muito menos claros e menos bem estabelecidos do que os da análise infinitesimal" (Carnot 1921, vol.2, p. 62 apud Schubring 2005, p. 320). Também no grupo dos *Idéologues* seria possível observar esta mudança, representada nas obras de Destutt de Tracy (1754-1836) e Maine de Biran (1766-1824).

Não obstante, enquanto a hegemonia do método analítico dos anos da Revolução Francesa seria removida por este retorno ao método sintético a partir do período

Napoleônico, na Prússia o método analítico ganharia um novo papel, especialmente a partir das reformas sócio-politicas empregadas na primeira e segunda décadas do século XIX.

2.2 O contexto social e institucional da Prússia

Em seu artigo intitulado "*The conception of pure mathematics as an instrument in the professionalization of mathematics*", de 1981, Gert Schubring caracteriza os contextos institucionais da Prússia no século XIX, inserindo a emergência da matemática pura como uma ferramenta no processo de profissionalização da matemática. Este processo, que caracterizaria uma "nova fase" no desenvolvimento da matemática, seria marcado, a grosso modo, por dois aspectos: (1) o papel institucional preponderante das universidades na produção científica, (2) o estabelecimento de uma comunidade matemática, orientada por objetos e metodologias próprias.

Entendendo, portanto, a emergência da matemática pura como produto consubstanciado deste processo de institucionalização da matemática, é conveniente a descrição dos contextos sociais e institucionais da Prússia deste período, sendo este o objetivo dessa seção.

É bem conhecido, na literatura em geral, o fato de que a matemática pura como uma nova prática surgiria na Alemanha, em contexto marcadamente distinto da França, no século XIX. No entanto, menos conhecido seria o fato de que este não foi um desenvolvimento geral na Alemanha, mas primeiramente restrito à um dos Estados daquela época: à Prússia. E as razões do surgimento deste novo padrão de prática matemática tornam-se ainda menos conhecidas e entendidas porque se assume como evidente que a existência de uma forma profissionalizada já “sempre” existiu na ciência. E como “profissionalizado”, se postulou como óbvio que ensino e pesquisa das ciências coexistissem de alguma forma, em particular, institucionalizada.

A fim de bem entender a especialidade do surgimento de matemática pura na Prússia há de se evocar aqui, em síntese sucinta, as etapas principais - segundo pesquisas recentes - que levaram à este novo padrão de praticar ciências, primeiramente numa pequena região do Oeste da Europa e de forma bem isolada nas primeiras décadas.

Na verdade, por um lado, as universidades que surgiram na Europa de Oeste na alta Idade Média, teriam como única função o ensino para a formação profissional de juristas, médicos e clérigos. A faculdade de arte funcionaria como um substituto das escolas secundárias praticamente não existentes, sendo, portanto, preparatórias para estes estudos profissionalizantes nas faculdades chamadas superiores. Com a Reforma e a Contra-Reforma na primeira metade do século XVI, as estruturas se diferenciariam: nos Estados protestantes, as faculdades de artes ampliariam seu papel, tornando-se faculdade de filosofia, com próprias cátedras – em particular para a matemática -, mas com a mesma função preparatória, na qual os professores apresentariam um ensino enciclopédico. Nos Estados católicos, onde a Ordem dos Jesuítas reestruturou as universidades, as faculdades de artes seriam dissolvidas e alguns dos seus cursos transferidos em disciplinas em colégios jesuítas. Dessa forma, a mudança radical e profunda - ainda hoje não bem entendida na historiografia - foi que, como elemento crucial das reformas na Prússia desde 1810, a Faculdade de Filosofia ganharia um papel independente, além de desafiador às faculdades tradicionais, devido à nova função de formar também profissionais: os professores para as escolas secundárias também reformadas, os *Gymnasien*.

Por outro lado, a pesquisa continuou como uma pratica de indivíduos, sem estruturas institucionalizadas e, em particular, sem relação com universidades. Tais pessoas, em geral, habitualmente se dedicavam à pesquisas em várias áreas, concomitantemente à sua atuação profissional. Tal seria, por exemplo, o caso de Fermat, o qual atuava como jurista, ou de Descartes, o qual viveria da própria fortuna. As primeiras institucionalizações notáveis de pesquisa seriam realizadas em alguns poucos países, e isso por iniciativas do Estado. O nome dessas novas formas foi adotado de um tipo de instituição conhecida desde a Antiguidade, a Academia – e utilizado desde os Tempos Modernos para a prática clássica: reuniões de sábios, em formas privadas e com a função única de uma comunicação interna. Com efeito, um primeiro passo de institucionalização da pesquisa aconteceria na França, onde as universidades apresentam um ensino de matemática somente em colégios associados. Foi em 1666 que o governo francês criou a *Académie des Sciences*, com a tarefa de pesquisa, profissionalizando os membros ordinários; na reforma de 1696, a *Académie* foi organizada em classes segundo disciplinas. Membros famosos, atuando só nesta forma profissionalizada (e assalariada) de pesquisa, foram, entre outros, Clairaut (1713-1765), d'Alembert (1717-1783) e Condorcet (1743-1794). Esta forma radicalmente nova seria instituída depois

também pelo governo da Prússia em Berlin, em 1700, e pelo czar Pedro I (1672-1725) em Petersburgo, em 1725, como parte de seus projetos de reformas da Rússia.

Quanto às funções das universidades e em particular da Faculdade de Filosofia, haveria primeiros novos elementos desde a virada do século XVIII. Em dois estados importantes alemães protestantes, na região de Norte da Alemanha, seriam criadas novas universidades: Halle, na Prússia, em 1694 e em Göttingen, no eleitorado de Hanôver, em 1734. Tais universidades seriam concebidas segundo a política econômica do mercantilismo, dominante na época: a fim de atrair estudantes, normalmente abastados, do grande número de outros Estados alemães, os governos incitariam os professores a se promoverem como sábios. Para esta finalidade, os professores poderiam ficar conhecidos, em particular, por publicações e livros-texto bem elaborados. Esta forma relativamente fraca de incitar os universitários para práticas de pesquisa, iniciou então uma certa forma de pesquisa acompanhando a tarefa clássica de ensino e foi destacada pelo historiador Roy Steven Turner como a raiz para o que denomina *research imperative,* estabelecido posteriormente na Prússia, sob condições político-sociais bem diferentes (Turner 1980).

A mudança fundamental no funcionamento das universidades - a ampliação para a função de pesquisa -, começaria na Prússia, na situação de derrota por Napoleão Bonaparte (1769-1821) em 1806 e de humilhação por anexação de territórios e de guarnições francesas no território restante. A derrota e a situação vexatória dispariam uma dinâmica enorme de amplas reformas sociais, estruturais e da educação. Quanto à educação, as reformas são ligadas com o nome e as concepções neo-humanistas de Wilhelm von Humboldt (1767-1835). A criação da universidade de Berlin, em 1810, se tornaria emblemática para esta nova concepção.[2] E isto no momento em que o resto do Europa continental adotaria o modelo francês pós-revolucionário de ter no ensino superior somente escolas e faculdades profissionalizantes. A partir dos motes de unidade entre pesquisa e ensino ("*Einheit von Forschung und Lehre"*) e do estudar pesquisando ("*forschendes Lernen*"), as universidades na Prússia se transformaram profundamente, e décadas mais tarde nos outros Estados alemães, cunhando o que se entende até hoje – e globalmente – o discurso sobre a essência ("das Wesen") da universidade moderna.

[2] Destaca-se o fato de que a universidade conseguiria incorporar a tarefa de pesquisa ao usurpar esta tarefa da Academia. Desde já, a Academia de Berlin seria reduzido à uma comunidade de sábios, ocupando-se, entre outros, de projetos de edições.

No seu artigo intitulado "*The Prussian Universities and the Concept of Research*", de 1980, Roy Steven Turner destaca o sucesso com que o movimento neo-humanista conseguiria estabelecer no âmbito universitário o novo *ethos* da *Wissenschaft-ideologie.* Turner denota sua formulação a partir da fala de Friedrich Daniel Schleiermacher (1768-1834), um líder na implementação destes ideais:

> Such a development, Schleiermadier insisted, akin to an organic unfolding, for every individual carries within him "the idea of Wissenschaft". The task of the university is to awaken the idea, to nurture it, to inspire and guide the student to self-activity, so that "it becomes second nature for [...] [the youth] to consider everything from the point of view of science, to view individual phenomena not for themselves, [...] but in constant reference to the unity and totality of knowledge [. . .] - this is the business of the university" (Schleiermacher 1808, apud Turner 1980, p. 78).

Para os professores da Faculdade de Filosofia, a *Wissenschafts-Ideologie*, junto com a unidade de pesquisa e ensino, e a nova função do ensino estrito de matemática – não mais como um saber geral e preparatório para outros estudos, mas como uma ciência em si mesma -, possibilitou a eles abandonarem lições enciclopédicas e, por sua vez, se especializarem no ensino de teorias próprias da matemática. Com efeito, devido ao fato de que os seus estudantes não entrariam em carreiras de engenharia, mas na carreira docente em escolas secundárias, a esses professores seria legítimo abordar assuntos de matemática pura, elemento enfatizado também pela *Wissenschafts-Ideologie*.

Além disso, como a citação de Schleiermacher mostra, o segundo pilar da reforma universitária, da implementação da *Wissenschafts-Ideologie*, foi de transformar o estudante, de um ouvinte passivo em palestras, a um praticante ativo da *Wissenschaft*. E as reformas revelam o outro meio chave de transformar as universidades segundo este espírito: o estabelecimento do *Seminar* como o meio desta forma ativa de estudos, generalizando a forma já praticada antes em Halle, desde 1787, para a disciplina de filologia, esta a primeira disciplina a adotar este novo espírito. Desde as reformas na Prússia, os seminários foram estabelecidos para a filologia em cada uma das universidades prussianas – e depois também para a matemática e para a história, formando, juntamente com a filologia, as três disciplinas chaves dos novos *Gymnasien*. Turner destaca as características principais dos *Seminare*, no exemplo do *Seminar* de filologia em Berlin:

> The statutes of the Berlin seminar stress the professional and research-oriented nature of the training it offered. The seminar is intended for those who are "capable of sustaining, propagating, and enlarging [...] [philological] studies" and those "who dedicate themselves chiefly to philology, not those who expect their future advancement from the exercise of another branch of academic learning".

> Exercises stressed critical method, interpretation, and original research, and membership in the seminar offered high rewards to students (Turner 1980, p. 88).

Do ponto de vista epistêmico, por outro lado, o desenvolvimento de uma perspectiva sobre o conhecimento que o entenderia a partir de uma ótica não utilitária permitiria, indiretamente, o desenvolvimento de uma matemática desontologizada. Assim, em detrimento desta visão utilitarista-empirista, presente sobretudo na França, o desenvolvimento de uma matemática pura se daria em concordância com os valores neo humanistas, os quais valorizavam a ideia de uma ciência pura. A obra de Jacobi (1804-1851) é um bom exemplo do ideal não utilitário da ciência. Sua frase: "é honorável a ciência não ter uso" é bem conhecida e sintetiza tais ideias do período. Além de Jacobi, podemos destacar neste cenário a figura de August Leopold Crelle (1780-1855), cuja defesa de uma matemática pura se encontraria também nessa perspectiva de formação espiritual dos indivíduos, como constata Schubring (2005):

> Crelle presented this conception not only in a memoir of 1828 but also in his 1845 textbook on the theory of numbers: he declared that one should not view the applications either "solely or even preferably as the purpose of mathematics" (Crelle 1845, VII), and that pure mathematics takes precedence not only for the development of mathematics but also in the learning process. (Schubring, 2005, p. 484)

Além disso, do ponto de vista do desenvolvimento de uma metodologia científica desta nova matemática, na qual evidencia-se essa noção pura das ciências, seriam centrais os direcionamentos de uma filosofia que fundamentasse essa distinção. Tal seria, portanto, o papel da filosofia de Kant:

> For the further development of mathematics it was necessary to have a methodology which accounted for the possibility of theoretical, new knowledge - in contrast to the then prevailing belief of the analytical method which said that propositions of pure mathematics were always more or less trivial transformations of the "elements". Toth has shown that this situation was radically changed by the philosophy of Kant: Kant proved that there can be essentially new knowledge in pure mathematics - this is the real essence of Kant's claim for synthetical a priori propositions (Toth 1972, p. 8). Only on the basis of Kant's epistemology, which was dualistic at the core (Buhr/lrrlitz, p. 40), did it become possible to reflect on the relationship between pure and applied mathematics. (Schubring, 1981, p. 119)

2.3 A filosofia de Immanuel Kant

> *Ich behaupte aber, daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist. (Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, 1786, p. VIII)*[3]

Considerado uma figura central da filosofia moderna, Immanuel Kant (1724-1804) é um dos responsáveis por uma virada epistemológica no fim do século XVIII, entendida a partir de sua proposta crítica. Kant nasce em Königsberg (hoje Kaliningrado), então capital da Prússia Oriental e um porto comercial central do mar Báltico. Criado em uma modesta família de artesãos protestantes, Kant estudaria filosofia na Albertina, a Universidade de Königsberg. Após seis anos trabalhando como tutor para crianças fora de Königsberg, Kant retorna a sua cidade natal em 1754, onde trabalharia como *Privatdozent* na Universidade de Königsberg até conseguir uma cadeira em filosofia em 1770 na mesma universidade. Apesar de suas produções durante as décadas de 1750 e 1760 e após uma década de 1770 de relativo silêncio, Kant ficaria conhecido sobretudo pelas três obras publicadas em sua "fase crítica", a partir da década de 1780: a Crítica da Razão Pura (*Kritik der reinen Vernunft)* de 1781, a Crítica da Razão Prática (*Kritik der praktischen Vernunft)* de 1788 e a Crítica da Faculdade do Juízo (*Kritik der Urteilskraft)* de 1790, com as quais alcançaria grande reconhecimento. Neste presente trabalho e nos que lidam com a dita revolução epistemológica de Kant, enfatiza-se a primeira crítica, a da razão pura[4], a qual inaugura sua fase crítica.

As primeiras concepções de Kant relativas à filosofia da matemática surgem em sua fase pré-crítica. Destaca-se aqui seu texto de 1763, "Tentativa de introduzir a concepção de Quantidade Negativa na Filosofia". Na primeira seção do texto, Kant lança mão de discussões relativas à fundamentação dos números negativos, no que diz respeito sobretudo à sua significação perante à ausência de quantidade, ou seja, ao "nada".

A proposta de Kant, neste caso, visa a relativização do significado deste "nada", entre a categoria lógica (ou filosófica) e a matemática. Segundo Kant, uma oposição lógica consiste na simultaneidade da afirmação e da negação de uma mesma coisa. O produto dessa

[3] "Mas eu sustento que em qualquer teoria particular da natureza pode ser encontrada tanta ciência real quanto há matemática nela."

[4] Via de regra, utilizaremos aqui a tradução portuguesa de 2005, editada pela Fundação Calouste Gulbenkian.

oposição lógica é o nada absoluto, ou seja, a contradição da própria possibilidade de existência. Por outro lado, uma oposição real refere-se à situação de dois predicados que se anulam, tais como movimentos em direções opostas. Neste caso, o produto desta oposição é, em essência, algo, ainda que seja relativamente nulo, de forma a ser um nada relativo.

Em um olhar mais abrangente sobre as concepções dos números reais, Schubring (2005) caracteriza a importância desta abordagem:

> By means of this conceptual differentiation, Kant successfully deontologized the "nothing" in mathematics, attributing to it the exclusively relational character of the zero. This relativization at the same time accepted that negative numbers enjoyed the mathematical status of real numbers. The important step away from metaphysics, and toward the program of algebraization of mathematics, this meant was rapidly adopted in Germany, whereas France and England did not follow suit for a long time to come. (Schubring, 2005, p. 141)

É notável, também, que tal distinção vem a antecipar as próprias distinções dos conhecimentos da filosofia e da matemática apresentadas posteriormente.

Ao longo do texto da Crítica da Razão Pura, sua primeira e principal obra da fase crítica, não se encontra referência direta ao termo "filosofia da matemática". No entanto, não faltam considerações sobre as concepções fundacionais da matemática, além de reflexões metodológicas desta, sobretudo como um projeto efetivo de ciência.

Há duas edições da Crítica da Razão Pura: a primeira de 1781, e uma segunda de 1787, a qual consta de algumas modificações importantes e de um prefácio pertinente às críticas sofridas pela obra original.[5] A partir deste texto, Kant inaugura o que chama de crítica ao dogmatismo filosófico vigente na filosofia, de forma a tomar como inconsistente toda a produção filosófica que o antecede.

A crítica da razão pura é uma obra cuidadosamente organizada, cujo texto está meticulosamente distribuído sequencialmente em partes, divisões, seções, livros, capítulos e itens. Grosso modo e num viés interpretativo da obra, podemos convenientemente entendê-la a partir de suas bipartições, sobre as quais evidenciamos duas categorias, a saber, a negação e a afirmação.

No primeiro polo citado, essencialmente negativo ou desconstrutivo, concentrado sobretudo na seção da dialética transcendental, Kant visa apontar os equívocos que a filosofia precedente teria cometido ao não traçar com precisão os limites da racionalidade em sua relação com os entes. De pronto, Kant irá acusar a racionalidade filosófica produzida

[5] Tradicionalmente, convenciona-se a referência à primeira edição como edição "A", e à segunda como edição "B".

até então do que chamará de um dogmatismo, caracterizado pelo abuso da apreensão indevida de temas que não poderiam ser alçados por esta racionalidade:

> A crítica não se opõe ao procedimento dogmático da razão no seu conhecimento puro, enquanto ciência (pois esta é sempre dogmática, isto é, estritamente demonstrativa, baseando-se em princípios a priori seguros), mas sim ao dogmatismo, quer dizer, à presunção de seguir por diante apenas com um conhecimento puro por conceitos (conhecimento filosófico), apoiado em princípios, como os que a razão desde há muito aplica, sem se informar como e com que direito os alcançou. O dogmatismo é, pois, o procedimento dogmático da razão sem uma crítica prévia da sua própria capacidade. (Kant, 2005, B XXXV)

Este abuso denunciado por Kant identificar-se-ia nas hipóteses precipitadas que a razão tomaria para estabelecer sua relação com os objetos do conhecimento. Esta razão filosófica, ao lidar com o fato da heterogeneidade entre pensamento e as coisas do mundo, assumiria a possibilidade de uma espécie de isomorfismo entre tais campos, o que permitiria um acesso do entendimento às coisas em si mesmas. Dada essa compatibilidade, as determinações dos seres externos à pensabilidade poderiam, consequentemente, ser alcançadas através do desenvolvimento de uma razão interna. Desta maneira, segundo Kant, o projeto metafísico desta filosofia, por ele denominada de pré-crítica, visaria, através de um desenvolvimento das regras da lógica ou da pensabilidade, estabelecer os critérios sob os quais os entes ou os objetos ou as coisas do mundo podem ser captadas em sua essência fundamental. Tais regras basear-se-iam, portanto, em procedimentos fundamentais da pensabilidade, tais como o princípio da não contradição e o da causalidade.

Entretanto, é na problematização a essa possibilidade de isomorfismo que trabalha a crítica kantiana. Segundo ele não se deveria, da coerência interna do pensamento, concluir pela consistência ontológica dos objetos que são externos à própria racionalidade. Evidentemente, Kant se dirige a Descartes[6] e à tradição racionalista, aqui conduzida, sobretudo, por Leibniz e Wolff:

> "A filosofia de Leibniz e de Wolff indicou uma perspectiva totalmente errada a todas as investigações acerca da natureza e origem dos nossos conhecimentos, considerando apenas puramente lógica a distinção entre o sensível e o intelectual, porquanto essa diferença é, manifestamente, transcendental e não se refere tão-só à sua forma clara ou obscura, mas à origem e conteúdo desses conhecimentos. (Kant, 2005, A 44 / B 61-62)

Assim, ao não estabelecer com rigor as fronteiras entre as regras da lógica e as regras da existência, a filosofia poderia incorrer em círculos, não sendo capaz de cumprir ao que

[6] Exemplarmente nas refutações às provas cartesianas da existência de Deus.

fundamentalmente se propõe caso a realidade não possa, de fato, ser concebida logicamente.

O segundo polo da bipartição proposta, essencialmente positivo, construtivo ou reconstrutivo, pretende o tratamento de uma razão "comedida" ou crítica, no sentido de produzir um projeto racional limitado ao escopo de possibilidades da própria racionalidade. Neste sentido, de saída Kant afirmaria pela impossibilidade de acesso cognitivo às coisas em si mesmas, tal será a marca de sua virada epistemológica. Opõe-se, entretanto, da mesma forma que faz com a tradição racionalista, à tradição empirista de Hume que, de certa forma, assume esse preceito de maneira, segundo Kant, estritamente negativa. Referindo-se a esse não acesso em Hume, nos *Prolegômenos* diz Kant:

> embora [Hume] jamais tenha suspeitado da existência dessa possível ciência formal, mas ancorou seu barco, para mantê-lo seguro, na praia (no ceticismo) para lá jazer e decompor-se; ao passo que pretendo dar-lhe um piloto que, segundo os princípios seguros que a arte da navegação obtém de um conhecimento do globo, e equipado com uma carta marítima completa e uma bússola, possa dirigir o navio com segurança para onde lhe aprouver. (Kant, 2014, p. 30)

Tal positividade do pensamento kantiano se identifica numa "mudança de foco" do fazer filosófico, de modo que a relação das coisas com sua pensabilidade sutilmente renegaria o fazer ontológico em vista do fazer fenomenológico. De outro modo, isso significará dizer que as representações dos seres não se regulam pelos seres em si mesmos, mas pelas nossas condições e modos de representação. Desse modo, para Kant, o que acessamos dessas coisas ou objetos do mundo é o seu fenômeno, ou seja, aquilo que delas acessamos de acordo com nossas condições de possibilidade de conhecê-las. O estudo dessas condições de possibilidade torna-se, portanto, o elemento privilegiado da teoria do conhecimento transcendental de Kant, tal como este a define:

> Chamo transcendental a todo o conhecimento que em geral se ocupa menos dos objetos, que do nosso modo de os conhecer, na medida em que este deve ser possível a priori. Um sistema de conceitos deste gênero deveria denominar-se filosofia transcendental. (Kant, 2005, B 25)

Nesta mudança de referencial consistirá a virada epistemológica de Kant, a qual seria por ele próprio entendida como uma "revolução copernicana" do pensamento. Diante desta, na qual o sujeito torna-se o elemento central do conhecimento, os objetos passam a ser regulados pelas condições de conhecimento do sujeito, estas últimas relacionadas às suas estruturas cognitivas *a priori*.

Kant então iniciará todo um sistema de concepções obtidas a partir do ato reflexivo em torno destas condições. O ato de reflexão aqui visa sempre buscar sobre os fundamentos sobre os quais repousam a consistência dos objetos do conhecimento. Seu objetivo, em parte, se volta à possibilidade de produção de uma ciência que segue o que chama de uma "via segura". O que assegura portanto a validade de uma ciência para Kant? Inicialmente, a distinção do tipo de juízo que essas ciências emitem, bem como na correspondência dos conceitos gerados com intuições. O termo" intuição" (*Anschauung)* na filosofia de Kant terá um papel central e nem sempre relativo à sua acepção do senso comum, sobretudo quando este se refere à intuição pura (*Reine Anschauung)*.

O que nos será importante aqui é entender que a matemática, no sistema kantiano, se conceberá como elemento fundamental do conhecer. Na verdade, para Kant, os entes matemáticos constituem-se enquanto objetos da intuição pura, e como tais, terão papel orientador da razão humana. A grosso modo, em Kant, a geometria euclidiana estudaria não as propriedades do espaço que nos é externo e existe em si mesmo, mas as condições que a razão humana possui para conhecer, espacialmente, aquilo que lhe é externo. Com efeito, Kant se esforça em demonstrar que o espaço não seria um conceito, mas uma intuição pura, ou seja, um fundamento da nossa capacidade de conhecer.

Dessa maneira, ao constituir um dos fundamentos regulativos da razão, a Matemática se apresentaria, na doutrina kantiana, como o exemplo paradigmático de ciência. É bem conhecida sua enunciação nos Princípios Metafísicos da Ciência da Natureza de 1786, a qual diz que em qualquer teoria particular, há nesta tanta ciência quanto há de matemática[7]. Tal concepção de legitimação viria a impulsionar os processos de matematização das ciências, reconceitualizando a matemática e a posicionando num lugar privilegiado na organização do saber.

Nesse sentido, é preciso introduzir algumas das questões e concepções iniciais da Crítica, em vias de esclarecer o que estes termos vem a significar na doutrina kantiana e, de maneira mais geral, para o entendimento de suas amplas recepções na filosofia e nas ciências. Assim, a próxima subseção tem as seguintes tarefas: (1) enunciar o "problema geral da razão pura" levantando por Kant e (2) caracterizar a sinteticidade *a priori* da matemática e o que ela significa para sua concepção.

---

[7] *Ich behaupte aber, daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist.* (Kant, 1786, p. VIII, prefácio)

2.3.1 Matemática e a Crítica da Razão

Nas concepções iniciais da Crítica, consta a distinção entre conhecimentos empíricos, ou seja, conhecimentos originados na experiência, dos conhecimentos anteriores ao elemento da experiência, denominados *a priori*. Que tipo de saber caracterizaria um conhecimento *a priori*? Segundo Kant, todo conhecimento que identifica uma espécie de regra geral, sob a qual casos particulares são subsumidos, denota um conhecimento *a priori*. Assim, a proposição segundo a qual toda mudança possui uma causa não é mais do que um juízo *a priori*, uma vez que concentra em si duas características intrínsecas, a saber, a universalidade e necessidade. Com efeito, tais características jamais poderiam se extrair de juízos empíricos, uma vez que da experiência não se produz universalidade verdadeira e rigorosa, apenas suposta e comparativa (Kant, 2005, B3). Assim, a própria possibilidade de produção de certezas consumariam a existência de juízos *a priori*:

> Poder-se-ia também demonstrar, sem haver necessidade de recorrer a exemplos semelhantes, a realidade de princípios puros a priori no nosso conhecimento, que estes princípios são imprescindíveis para a própria possibilidade da experiência, por conseguinte, expor a sua necessidade a priori. Pois onde iria a própria experiência buscar a certeza, se todas as regras, segundo as quais progride, fossem continuamente empíricas e, portanto, contingentes? (Kant, 2005, B 5)

Mais significativo do que a existência de conhecimento *a priori*, parece ser a extensibilidade de tal campo de conhecimentos, ou seja, a possibilidade de gerar novos conhecimentos deste tipo. A esse respeito, Kant estabelece uma segunda distinção, a saber, entre os juízos explicativos do conhecimento, os quais atuam sobre as determinações internas dos objetos, orientadas sobretudo por sua definição, e juízos extensivos do conhecimento, os quais devem transcender os objetos para além de suas determinações internas.

Essa distinção, em especial, é apresentada por Kant do ponto de vista linguístico. Segundo ele, o conhecimento se organiza por juízos, os quais estruturam-se na forma sujeito-predicado. Todo juízo no qual o predicado deriva do sujeito denomina-se analítico, sendo este um juízo do tipo explicativo, ou seja, que se produz a partir das próprias características e determinações internas do objeto do conhecimento, como na proposição "todo triângulo possui três lados". Ora, o fato de possuir três lados é interno à própria noção de triângulo, de onde se conclui pela analiticidade deste juízo. Por outro lado, caso o

predicado não derive do sujeito, marca-se uma extensão deste, caracterizando o que se denomina por juízos sintéticos.

Com efeito, juízos empíricos são sempre sintéticos, uma vez que para se formular quaisquer juízos analíticos não haveria necessidade alguma de recorrer à experiência. Assim, caso um juízo se apresente como analítico, sua verificação pode ser sempre feita *a priori*. Portanto, é sobre a experiência que parece se fundar a mera possibilidade de síntese destes conhecimentos. Entretanto, e aqui reside o ponto de inflexão destas distinções, a existência de juízos sintéticos *a priori*, caso admitida, negaria essa primazia da experiência na sinteticidade dos juízos. Por definição, juízos sintéticos *a priori* não poderiam de forma alguma fundamentar sua sinteticidade na experiência. Ora, o que fundamentaria, pois, sua sinteticidade? Assim se formula o que Kant chama de "problema geral da razão pura", o qual está contido na seguinte pergunta: como são possíveis os juízos sintéticos *a priori*?

Fica claro, então, que a "via segura" de uma ciência legitimado pelo projeto crítico de Kant, concentra-se na produção de juízos desta natureza:

> Ora é sobre estes princípios sintéticos, isto é, extensivos, que assenta toda a finalidade última do nosso conhecimento especulativo a priori, pois os princípios analíticos sem dúvida que são altamente importantes e necessários, mas apenas servem para alcançar aquela clareza de conceitos que é requerida para uma síntese segura e vasta que seja uma aquisição verdadeiramente nova. (Kant, 2005, B 13-14)

De antemão, a existência de juízos desta natureza, segundo Kant, assegura-se por uma inspeção, em particular, de duas ciências apresentadas por ele: a Matemática e a Física. Em relação à primeira, cabe observar inicialmente que suas proposições são todas juízos *a priori*, uma vez que comportam a necessidade e universalidade requeridas.[8] A sinteticidade da matemática, por outro lado, parece contrariar a concepção comum sob a qual as proposições matemáticas são admitidas sob o princípio da não contradição. Não seriam elas por conseguinte analíticas? Tal questão é posta por Kant em duas situações distintas, uma geométrica e outra aritmética.

Como exemplo geométrico, Kant traz a proposição simples sob a qual a linha reta é a distância mais curta entre dois pontos. Ora, não haveria no conceito de reta uma noção intrínseca de distância, de onde tal fato não se poderia concluir das determinações internas

[8] Curiosamente, Kant aqui admite uma possível objeção a essa inferência e para isso, comenta por uma limitação desta tese à matemática pura (Kant, 2005, B14). O termo "matemática pura", no entanto, aqui não se refere aos objetos que nos referimos na apresentação do texto, mas ao domínio teórico da geometria euclidiana e da aritmética. Se distingue, por exemplo, da agrimensura ou da óptica que são aqui entendidas enquanto "ciências mistas".

desse conceito. Sendo a reta essencialmente um conceito qualitativo, este fato quantitativo não seria menos do que um juízo sintético.

Em relação a aritmética, Kant se volta à proposição de uma soma simples, tal como 7+5=12. Segundo ele, ao contrário do que poderia se pensar à primeira vista, não se trata de uma proposição analítica, uma vez que não se encontra no conceito da soma de sete e cinco o seu resultado:

> (…) o conceito da soma de sete e de cinco nada mais contém do que a reunião dos dois números em um só, pelo que, de modo algum, é pensado qual é esse número único que reúne os dois. O conceito de doze de modo algum ficou pensado pelo simples fato de se ter concebido essa reunião de sete e de cinco e, por mais que analise o conceito que possuo de uma tal soma possível, não encontrarei nele o número doze. Temos de superar estes conceitos, procurando a ajuda da intuição que corresponde a um deles, por exemplo os cinco dedos da mão ou (como Segner na sua aritmética) cinco pontos, e assim acrescentar, uma a uma, ao conceito de sete, as unidades do número cinco dadas na intuição. (Kant, 2005, B 15) [9]

Dessa maneira, Kant caracterizaria a sinteticidade dos juízos da matemática. O que se pretende entender disso, novamente, é que tais juízos são expansivos, e portanto, abarcam uma ampliação direta daquilo que se conhece. E como tais juízos são também a priori, tal expansão se dá, de forma pertinente, para os conhecimentos que se estabelecem de forma necessária.

Por sua vez, as formulações da Física, enquanto ciência da natureza (*Naturwissenschaft)*, também incorreriam em juízos sintéticos a priori. Com efeito, os princípios de ação e reação e da conservação de matéria, por exemplo, para além de seu caráter de necessidade, relacionariam a matéria a algo a ver com sua permanência, o que não seria da natureza de suas determinações internas. Portanto, tratam-se aqui de juízos sintéticos a priori.

Também a Metafísica, nas suas formulações, deve incorrer em juízos desta natureza quando, por exemplo, ajuíza sobre o mundo ter ou não um início. No entanto, segundo Kant, diferentemente da Matemática e da Física, ciências essas que ao final do século XVIII encontravam-se em pleno desenvolvimento, a Metafísica parece não ter êxito em suas formulações. Isto ficaria claro, segundo ele, na posição de dissenso dos filósofos quanto aos princípios que norteariam esse domínio do saber, à distinção dos outros. Encontra-se, no prefácio à segunda edição da Crítica, uma posição bastante austera de Kant, segundo o qual:

[9] Dentre as objeções à teoria kantiana, a sinteticidade da aritmética seria especialmente questionada. A esse respeito, destaca sobretudo a aritmética de Frege, em *Die Grundlagen der Arithmetik*, de 1884.

> no que respeita ao acordo dos seus adeptos, relativamente às suas afirmações, encontra-se a metafísica ainda tão o longe de o alcançar, que mais parece um terreiro de luta, propriamente destinado a exercitar forças e onde nenhum lutador pôde jamais assenhorear-se de qualquer posição, por mais insignificante, nem fundar sobre as suas vitórias conquista duradoura. (Kant, 2005, B XV)

Esse problema oferecido pela Metafísica, de certa forma, irá motivar essa inspeção das outras ciências e o levará, por consequência, a formular o problema geral da razão pura, previamente referido. Dito de outra forma: porque a Matemática e a Física teriam êxito na produção de juízos sintéticos a priori, mas a Metafísica não? De forma geral, o que fundamentaria a sinteticidade dos juízos dessas primeiras em detrimento desta última?

Kant fornece, como dito anteriormente, duas situações que exemplificam a presença de juízos sintéticos a priori da matemática. Do exemplo geométrico, poderíamos supor que a sinteticidade do juízo que diz que "a reta é a distância mais curta entre dois pontos" decorre de uma relação empírica do espaço. No entanto, já concluímos que esta sinteticidade não poderia provir da experiência, uma vez que trata de um juízo a priori. A chave para a solução desta questão parece estar na própria concepção deste espaço que, distinto de um conceito, será entendido como uma intuição pura.

Conceitos e intuições, no sistema kantiano, são representações distintas. A bem dizer, as representações dizem respeito às relações de conhecimento que estabelecemos, dividindo-se entre as representações imediatas, as intuições (*Anschauungen*), através das quais os objetos nos são dados e as representações mediatas, os conceitos (*Begriff*), através dos quais esses objetos são pensados. Conceito e intuição, bem como a sensibilidade e o entendimento, portanto, compõem as dualidades sob as quais os objetos são concebidos.

As intuições dizem respeito à maneira imediata com a qual nos relacionamos com os objetos. Os sentidos, por exemplo, associam-se às intuições à medida que produzem sensações, que são aqui entendidos como elementos materiais da percepção desse objeto. Tais intuições, provenientes das sensações, denominam-se empíricas e referem-se ao que chamamos de fenômenos.

Uma vez que fenômenos podem ser distinguidos entre si, conclui-se que deve haver algo anterior a ele que possibilite sua diferenciação, o que Kant denomina “forma do fenômeno”. Segue daí que a existência de tais formas deve dar-se *a priori* no espírito, ordenando e estruturando as possibilidades das intuições empíricas. Tais são, portanto, o

que Kant chamará de intuições puras (*Reine Anschauung*), também denominadas formas puras ou *a priori*.

Dessa maneira, na doutrina kantiana, os objetos dos sentidos remetem, de maneira imediata, às intuições, estas últimas subsumidas pelas formas *a priori*. Intuições puras são, por consequência, os fundamentos ou princípios de toda intuição sensível que se possa imprimir sobre tais objetos. Não obstante, observa-se que há uma reciprocidade no que concerne esta noção. Objetos da intuição sensível são intuídos de acordo com a formas da sensibilidade, encontradas na intuição pura. Por outro lado, intuições que são possíveis a priori não podem jamais dizer respeito a outras coisas além dos objetos de nossos sentidos. (Kant, 2014, §9 IV 282)

Ora, uma ciência se constitui de conceitos e não de intuições. Entretanto, a legitimidade de uma ciência dependerá de sua correspondência com estas intuições, dado que estas compõem o fundamento das condições de possibilidade do conhecer. Essa enunciação de dependência, em Kant, fica clara em sua "Resposta a Eberhard", de 1790:

> a nenhum conceito pode ser garantida a realidade objetiva a menos que possa ser representado numa intuição que lhe corresponda (sempre sensível para nós); consequentemente, além dos limites da sensibilidade e, por decorrência, além de toda experiência possível, nenhum conhecimento pode se dar, isto é, nenhum conceito que possa ser afirmado como não vazio. (Kant, 1975, p. 16)

Quais são, pois, as intuições *a priori* com as quais o entendimento deve se relacionar? Tais intuições devem, via de regra, referir-se a sentidos externos, mediante os quais o espírito intui os objetos, e a sentidos internos, nos quais o espírito intui a si mesmo. Disto concluirá Kant que tais estruturas são, respectivamente, o espaço e o tempo, uma que todo objeto que é intuído exteriormente a nós deve estar necessariamente localizado no espaço, bem como toda determinação interna é representada segundo relações de tempo.

As determinações e propriedades determinadas por este espaço, aqui concebido enquanto intuição, e não como conceito, são portanto por uma ciência do espaço, ou seja, a geometria:

> A geometria é uma ciência que determina sinteticamente, e contudo a priori, as propriedades do espaço. Que deverá ser, portanto, a representação do espaço para que esse seu conhecimento seja possível? O espaço tem de ser originariamente uma intuição, porque de um simples conceito não se podem extrair proposições que ultrapassem o conceito, o que acontece, porém, na geometria. Mas essa intuição deve-se encontrar em nós a priori, isto é, anteriormente a toda a nossa percepção de qualquer objeto, sendo portanto intuição pura e não empírica. (Kant, 2005, B 40)

Nesse sentido, a sinteticidade da geometria é concebida porque seus objetos se fundamentam na intuição pura do espaço, e não ao espaço "real" ou fenomênico. A justificação de suas verdades, portanto, independe da experiência, o que torna a geometria um saber *a priori* do espaço puro. Paralelamente, teremos a aritmética enquanto saber fundado na intuição pura do tempo:

> "O tempo e o espaço são portanto duas fontes de conhecimento das quais se podem extrair a priori diversos conhecimentos sintéticos, do que nos dá brilhante exemplo, sobretudo, a matemática pura, no que se refere ao conhecimento do espaço e das suas relações." (Kant, 2005, B 55)

Residiria aqui, portanto, a principal distinção entre os conceitos da Matemática e os da Metafísica ou, propriamente, da Filosofia. Enquanto ciência fundamentada na própria intuição pura, a Matemática se faz por princípios constitutivos do conhecimento, de forma a fundar e *construir* seus conceitos. Já os princípios da Filosofia seriam essencialmente regulativos, ou seja, princípios de ordenação daquilo que é dado.

Com efeito, a construção de um conceito remete à apresentação *a priori* da intuição que corresponde a esse conceito, ou seja, a apresentação da regra geral que produz esse conceito: sua definição. Ora, definições, axiomas e demonstrações serão então instrumentos próprios da Matemática, os quais garantem a realidade objetiva de seus conceitos e com isso sua legitimidade enquanto ciência. Assim, a próxima subseção pretende aprofundar o sentido dessa construção e como ele se relaciona às práticas matemáticas.

2.3.2 A construção de conceitos

Na Doutrina Transcendental do Método, Kant especifica as distinções entre o conhecimento filosófico e o matemático. Assim o faz para determinar que o primeiro não poderia nem deveria comportar-se como o segundo, ato pelo qual a filosofia se confundiria em seu método e, por consequência, portaria-se abusivamente. Sobre tal distinção, Kant apresenta a tradicionalmente citada passagem da Doutrina:

> O conhecimento filosófico é o conhecimento racional por conceitos, o conhecimento matemático, por construção de conceitos. Porém, construir um conceito significa apresentar a priori a intuição que lhe corresponde. Para a construção de um conceito exige-se, portanto, uma intuição não empírica que, consequentemente, como intuição é um objeto singular, mas como construção de um conceito (de uma representação geral), nem por isso deve deixar de exprimir qualquer coisa que valha universalmente na representação, para todas as intuições possíveis que pertencem ao mesmo conceito. (Kant, 2005, B 741)

Construir um conceito, portanto, é expressar sua intuição pura correspondente. Veremos que isso pode significar, dentre outras possibilidades, a expressão imagética desse conceito. Entretanto, como poderia uma figura singular inscrever em si mesma a universalidade proposta pelo conceito, uma vez que este é um ente *a priori*? Apresenta-se, assim, uma tensão entre a singularidade da intuição e a universalidade do conceito, a qual deverá ser resolvida por sua construção. A passagem então, continua:

> Assim, construo um triângulo, apresentando o objeto correspondente a um conceito, seja pela simples imaginação na intuição pura, seja, de acordo com esta, sobre o papel, na intuição empírica, mas em ambos os casos completamente a priori, sem ter pedido o modelo a qualquer experiência. A figura individual desenhada é empírica e contudo serve para exprimir o conceito, sem prejuízo da generalidade deste, pois nesta intuição empírica considera-se apenas o ato de construção do conceito, ao qual muitas determinações, como as da grandeza, dos lados e dos ângulos, são completamente indiferentes e, portanto, abstraem-se estas diferenças, que não alteram o conceito de triângulo. (Kant, 2005, B 741-42)

A figura de um triângulo feita sobre o papel, apesar de singular e empírica, torna-se universal uma vez que é construída mediante uma regra que abstrai deste triângulo suas determinações contingentes e concentra-se apenas no que nele é necessário. Ora, esta não é uma construção qualquer, mas segue a especificidade de uma matemática que se propõe e se constrói mediante a universalidade dos seus procedimentos. No prefácio da segunda edição da CRP, Kant localiza a emergência histórica dessa Matemática, tal como faz com a Física que considera seguir tais preceitos necessários a uma ciência legítima:

> Desde os tempos mais remotos que a história da razão pode alcançar, no admirável povo grego, a matemática entrou na via segura de uma ciência. (...) Creio antes que. por muito tempo (sobretudo entre os egípcios), se manteve tateante, e essa transformação definitiva foi devida a uma revolução operada pela inspiração feliz de um só homem, num ensaio segundo o qual não podia haver engano quanto ao caminho a seguir, abrindo e traçando para sempre e a infinita distância a via segura da ciência. (...) Aquele que primeiro demonstrou o triângulo isósceles (fosse ele Tales ou como quer que se chamasse) teve uma iluminação; descobriu que I não tinha que seguir passo a passo o que via na figura, nem o simples conceito que dela possuía, para conhecer, de certa maneira, as suas propriedades; que antes deveria produzi-la, ou construí-la, mediante o que pensava e o que representava a priori por conceitos e que para conhecer, com certeza, uma coisa a priori nada devia atribuir-lhe senão o que fosse conseqüência necessária do que nela tinha posto, de acordo com o conceito. (Kant, 2005, B X-XII)

Efetivamente, será a geometria euclidiana o cânone da Matemática referenciada por Kant na Crítica, de forma que, em geral, quando este se refere a um método matemático, o fará sobre o método euclidiano de construção apodítica dos objetos da geometria. Não se trata de dizer que Kant não aborda a aritmética ou a álgebra: veremos mais à frente que ele o fará, ainda que de maneira distinta. Entretanto, a geometria será, em definitivo, a disciplina

matemática privilegiada por Kant na Crítica, sobretudo no desenvolvimento da noção de *construção*. Isto fica bem notado pela filósofa da matemática americana Lisa Shabel, que constata na introdução de seu livro *Mathematics in Kant's critical philosophy: Reflections on mathematical practice* (2003):

> Indeed, Euclid's Elements figures prominently in Kant's Critique', nearly every one of Kant's mathematical examples is taken from among the propositions of Euclidean geometry. Furthermore, elementary mathematics as Kant conceived it relies fundamentally on the paradigmatically ostensive constructions of plane geometry: these "constructions of mathematical concepts" justify the synthetic a priori judgments of mathematics and distinguish mathematical from philosophical cognition. (Shabel, 2003, p. 5)

Nesta obra, Shabel propõe uma análise contextual da filosofia kantiana da matemática, à luz da influência não só dos elementos de Euclides, mas também dos *Elementa* de Christian Wolff. Como já citado em seção anterior, os livros-texto de Wolff teriam um grande alcance em territórios de lingua alemã, sendo estes bastante representativos da matemática da época. Tendo Kant lecionado matemática elementar a partir dos *Elementa*[10], é pertinente assinalar tal influência sobre suas concepções.

É de se notar, na análise de Shabel, que as concepções racionalistas da matemática no início do período moderno, baseavam-se na percepção clara e distinta de seus objetos, tal como enuncia Descartes. Tal percepção, entretanto, se refere não ao método empregado, ou às relações estabelecidas pelos entes, mas à construção geométrica empreendida:

> It is important to realize that the clear and distinct perception invoked by various mathematicians of the early modern period is always a perception of a geometrical construction, or the possibility of such. (...) Nevertheless, the clear and distinct perception is not of the symbolic expressions that represent the objects of mathematics, but of the constructed objects themselves; for this reason, the early moderns cannot be understood as investigating patterns or abstract mathematical structures. Upon development of the field of Cartesian geometry known as "the application of algebra to geometry," mathematical practice is still fully engaged in the study of constructible geometric objects. (...) Although the mid-eighteenth century saw increasing sophistication in the use of algebraic techniques, the common understanding of these techniques remained geometrical. (Shabel, 2003, p. 87)

Assim, ainda que fundamentalmente um crítico do racionalismo de Wolff e Descartes, deve se ter em vista que Kant fundamenta boa parte de seu entendimento da matemática no paradigma de sua época.

Por outro lado, seria a partir das referências oferecidas por essas fontes que Kant desenvolveria suas distinções metodológicas. Em particular, Shabel analisa duas

[10] cf. Kant-Studien, 1987, p. 152-153

demonstrações de uma mesma proposição, a saber, a proposição I.32 dos Elementos, a qual afirma que, dado um triângulo, (1) a medida do ângulo externo a um ângulo dado é equivalente aos dois ângulos opostos e (2) os três ângulos internos equivalem a dois retos. Tal proposição é citada diretamente por Kant também na Doutrina, de forma a exemplificar a distinção na produção do conhecimento filosófico e matemático.

> Dê-se a um filósofo o conceito de um triângulo e o encargo de investigar, à sua maneira, como pode ser a relação da soma dos ângulos desse triângulo com o ângulo reto. Nada possui a não ser o conceito de uma figura que está limitada por três linhas retas e nessa figura o conceito de igual número de ângulos. Pode então refletir tanto quanto quiser sobre esse conceito, que, a partir dele, nada produzirá de novo. (Kant, 2005, B 744)

Segundo análise de Shabel, Wolff apresenta duas demonstrações deste teorema. A primeira é bem conhecida e análoga à de Euclides: dado um triângulo ABC e a extensão CD do segmento AC, constrói-se um segmento CE, paralelo ao segmento AB. Dado que AB e CE são paralelos, a transversalidade de BC às paralelas AB e CE implica na equivalência entre os ângulos BAC e ACE. Analogamente, temos a equivalência de ABC e ECD. Disso se conclui que o ângulo externo ACD é equivalente aos ângulos internos ABC e BAC. Por conseguinte, como ACD e ACB equivalem a dois retos por construção, também equivalerão os três ângulos internos ACB, ABC e BAC.

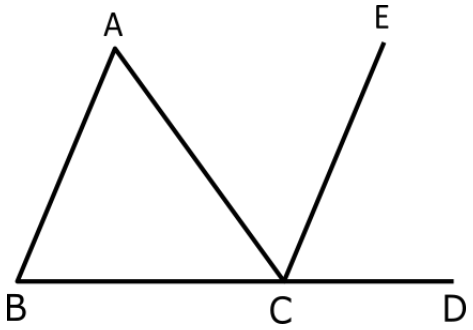

Figura 2.1: Proposição análoga à I.32 de Euclides

A segunda demonstração oferecida por Wolff é denominada por ele de "mecânica"[11] e baseia-se na mera translação dos ângulos, de forma a também verificar a equivalência proposta. Com efeito, dado um triângulo ABC e a extensão CD do segmento AC, é possível construir uma semi-circunferência de centro C, com extremo em D, de forma que contenha o arco ACB. Em seguida, transladam-se os arcos ABC e BAC, para a semicircunferência, de forma a mostrar que tais ângulos somam 180º.

[11] "ein mechanischer Beweis"

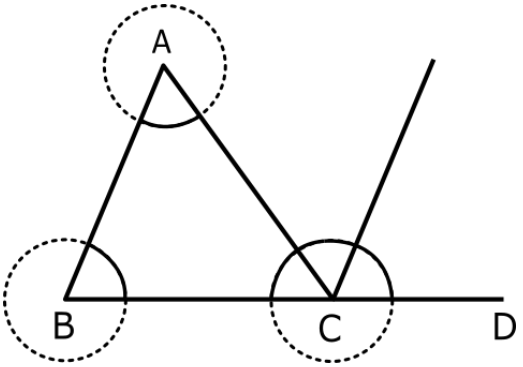

Figura 2.2: Demonstração “mecânica” de Wolff

Na análise comparativa das duas demonstrações, nota-se que ambas oferecem procedimentos sintéticos de prova. Com efeito, ambas oferecem uma verificação do fato a ser demonstrado, dado que as figuras em questão são arbitrariamente construídas. No entanto, diferem-se não apenas na sua relação com seus instrumentos construtivos, mas na universalidade produzida por seus métodos de construção. Ora, a demonstração mecânica de Wolff assegura-se na verificação empírica de uma figura que, por mais que arbitrariamente construída, não possuiria em si nenhum caráter de universalidade, uma vez que a demonstração trabalha diretamente com suas determinações particulares, tais como as medidas dos ângulos ABC e BAC. Se, por um lado, seu procedimento é geral, por outro lado o produto desse procedimento é sempre particular. Em contrapartida, a primeira demonstração não depende de uma relação direta com seu diagrama, a menos de sua orientação, uma vez que não trabalha com suas determinações, tais como a medida de seus ângulos. Pelo contrário, se vale apenas de suas determinações universais, dadas por suas relações, tais como a equivalência entre ângulos determinados por segmentos paralelos e uma transversal.

Ora, segundo Shabel, é na distinção desses dois métodos de demonstração que Kant baseia sua concepção de *construção* matemática. Tal construção assegura-se não apenas na arbitrariedade de seus objetos, mas na universalidade de seus métodos, os quais devem constituir-se *a priori*, em intuição pura. A sinteticidade, embora presente em ambos os casos, ao emergir distintamente na segunda demonstração, torna distinta a natureza do objeto tratado. Sobre a sinteticidade dessas demonstrações, afirma Kant:

> Com efeito, não devo considerar aquilo que realmente penso no meu conceito de triângulo (este não é mais do que a mera definição); pelo contrário, devo sair dele

> para alcançar propriedades que não residem nesse conceito, mas contudo lhe pertencem. Ora isso não é possível a não ser que determine o meu objeto segundo as condições, seja da intuição empírica, seja da intuição pura. No primeiro caso (medindo os ângulos do triângulo) terei apenas uma proposição empírica, que não encerra nenhuma generalidade e muito menos universalidade, e da qual não é aqui o caso. O segundo procedimento é a construção matemática, e precisamente aqui a construção geométrica, mediante a qual acrescento numa intuição pura, tanto como numa intuição empírica, o diverso que pertence ao esquema de um triângulo em geral, por conseqüência ao seu conceito; neste modo de proceder devem absolutamente ser construídas proposições sintéticas universais. (Kant, 2005, A 718/B 746)

Seria nessa distinção essencialmente metodológica, exemplificada nas demonstrações expostas, que reside o caráter sintético *a priori* das proposições da Matemática. Se, por um lado, elas relacionam-se diretamente a uma figura ou objeto, este nada mais é do que um conceito universal *in concreto*, ou seja, um conceito passível de ser exposto em uma intuição pura, o que denota sua construção.

Também na álgebra os objetos são construídos. Kant refere-se à álgebra em duas passagens pontuais, localizadas na doutrina. Assim, sobre a construção da álgebra, diz Kant:

> A matemática, porém, não constrói simplesmente grandezas (*quanta*) como na geometria. Constrói também a pura grandeza (*a quantitas*), como acontece na álgebra, em que faz inteiramente abstração da natureza do objeto que deve ser pensado segundo um tal conceito de grandeza. Escolhe então uma certa notação de todas as construções de grandezas em geral (números), como as da adição, da subtração, extração de raízes, etc. e, depois de ter indicado o conceito geral das grandezas segundo as suas diferentes relações, representa na intuição, de acordo com certas regras gerais, toda a operação pela qual é engendrada ou modificada a quantidade. (Kant, 2005, A 717 / B 745)

Nota-se que o termo “grandeza” (*Größe*) possui aqui duas expressões distintas: a grandeza enquanto objeto (*quanta*), construída na geometria, que possui em si determinações quantitativas, ou seja, que podem ser medidos; e a grandeza enquanto quantidade (*quantitatem*), ou relação quantitativa, que seria na álgebra considerada em sua forma pura, ou seja, abstraída de qualquer caráter qualitativo.

Ora, a construção dessa pura grandeza seria a princípio distinta da construção ostensiva da geometria:

> Quando uma grandeza deve ser dividida por outra, combina os caracteres de ambas segundo a forma que designa a divisão, etc., e alcança assim, mediante uma construção simbólica, tal como a geometria por uma construção ostensiva ou geométrica (dos próprios objetos), aquilo que o conhecimento discursivo, mediante simples conceitos, nunca poderia alcançar. (Kant, 2005, A 717/B 745)

Tal distinção, entre a construção simbólica da álgebra e a construção ostensiva da geometria, se dá pela própria natureza dos objetos destas. Ao passo que na geometria se

constroem *quantas*, os quais representam-se nas figuras porém constroem-se universalmente *a priori*, na álgebra os *quantitas* são universais simbólicos construídos, cuja contrapartida intuitiva se dá por sua significação quantitativa, ou seja, pelo fato de que são expressões arbitrárias de quantidades reais.

Dessa forma, a manipulação dos símbolos algébricos não seria tão somente um manejo fútil de conceitos vazios uma vez que esses símbolos de fato se referem a *algo*, que é indiretamente intuído. Tal como o triângulo na geometria, os símbolos algébricos são representações universais *a priori* que expressam representações particulares subsumidas, estas representáveis empiricamente. O fato dessa intuição ser indireta caracteriza a construção simbólica, mas a mantém dentro da esfera da construção como relação e exposição intuitiva.

Cabe salientar também a significação que o próprio termo *álgebra* teria para Kant. Segundo Shabel (2003), temos que para Kant, tal como para Wolff, a álgebra constituiria-se de um método, o qual em última instância se refere a problemas da aritmética e da geometria, e não de um corpo próprio de objetos ontologicamente distintos. Ora, isto justificaria o argumento de autores como Abel Lassalle Casanave, para o qual, apesar a distinção simbólica da álgebra deve ter necessariamente uma contrapartida ostensiva:

> Assim, a construção de conceitos, a resolução de problemas, é ostensiva ou simbólica, mas neste último caso a legitimidade da resolução exige a contrapartida ostensiva. O conhecimento por construção ostensiva de conceitos é intuitivo; o conhecimento por construção simbólica é conhecimento sub-rogatório de conhecimento intuitivo e, portanto, conhecimento intuitivo também (ao menos no sentido de Kant). (Lassale Casanave, 2019, p. 172)

De maneira geral, portanto, para Kant, as disciplinas da matemática trabalham com conceitos os quais são construídos *a priori*. No sentido estrito desta construção se fundaria a sinteticidade da matemática, ou seja, a extensibilidade dos conhecimentos produzidos por esta. Por conseguinte, a determinação da validade dos juízos matemáticos é extra conceitual, ou seja, não se dá pela mera análise dos conceitos, mas por sua correspondência com a intuição pura (*Reine Anschauung)*. Assim sendo, estas relações com a intuição, suas representações e a noção de construção se impõem como a marca da filosofia kantiana da matemática. Tal filosofia concebe a matemática como fundamento formal do pensar e assim a posiciona de maneira privilegiada no campo das ciências.

2.3.3 Restrição ou generalidade da filosofia kantiana da matemática?

Evidentemente, ainda que não se trate essencialmente da intenção de Kant de produzir propriamente uma filosofia da matemática, pode-se avaliar a natureza desta matemática que é aqui produzida. Em primeiro lugar, nota-se que o fato de o espaço ser concebido enquanto intuição, e não como conceito, parece implicar na unicidade e universalidade do espaço e, portanto, na unicidade da geometria euclidiana enquanto ciência do espaço. Com efeito, segundo Kant, a intuição espacial encontra-se em nós a priori sendo ela mesma a condição de possibilidade de conhecimento, uma vez que todos os objetos externos do conhecimento encontram-se inseridos no espaço. Assim, enquanto condição subjetiva, este espaço deve fundar de maneira recíproca e única todo entendimento acerca dos objetos externos. Caso contrário, ou não poderia ser ela mesma a condição de conhecimento, ou bem negaria-se a própria unidade da razão cognitiva e com ela a possibilidade de produção e comunicação do conhecimento.

Por conseguinte, a unicidade do espaço seria também a unicidade da geometria. Com efeito, dado que a produção de uma ciência demanda a realidade objetiva de seus conceitos e esta última é condicionada à correspondência com a intuição, a ciência da geometria condiciona-se ao espaço puro, que é único, e portanto, deverá esta ciência ser única também.

Fica evidente que não só a geometria, mas toda ciência, para Kant, possui em si um componente extraconceitual, ou de outro modo, extralógico. Devemos lembrar que Kant opõe-se à mera coerência interna do pensamento enquanto critério de existência ou de síntese do conhecimento. Em particular, na Crítica, esta oposição direciona-se sobretudo às formulações da Metafísica, mas podemos tomá-las, de maneira aqui conveniente, à quaisquer formulações de geometrias alternativas. Assim, em Kant, mesmo que se pudesse apresentar como logicamente válida e coerente uma geometria em quatro dimensões, ela seria em si objetivamente vazia por não possuir relação com o espaço intuitivo. Da mesma forma, Kant se refere à possibilidade de um biângulo, ou seja, uma espécie de polígono de dois lados:

> "É certo que é condição lógica necessária, que tal conceito não encerre contradição; mas não suficiente, longe disso, para constituir a realidade objetiva do conceito, isto é, a possibilidade de um objeto tal qual é pensado pelo conceito. Assim, no conceito de uma figura delimitada por duas linhas retas não há contradição, porque os conceitos de duas linhas retas e do seu encontro não contém a negação de uma figura; a impossibilidade não assenta no conceito em si

> mesmo, mas na sua construção no espaço, isto é, nas condições do espaço e sua determinação; estas, por sua vez, têm a sua realidade objetiva, isto é, referem-se a coisas possíveis, porque contêm em si, a priori, a forma da experiência em geral." (Kant, 2005, A 220/B 268)

Torna-se notório, portanto, a tensão que surgiria posteriormente entre esta filosofia da matemática e a emergência das chamadas geometrias não euclidianas. Assim, parece se estabelecer uma espécie de contradição entre a doutrina kantiana e a emergência da matemática pura. Ora, por um lado, como observado, a doutrina kantiana parece negar a possibilidade de certas espécies de objetos da matemática pura que viriam a aparecer na segunda metade do século XIX, tais como as novas álgebras, a nova concepção de número e sobretudo as geometrias não euclidianas. Como veremos no capítulo 4, a resistência a essas geometrias outras terá em si argumentos que se relacionam diretamente à filosofia de Kant.

Por outro lado, o kantismo parece permitir, de maneira singular, uma abordagem distinta sobre o papel da axiomática em um sistema matemático, fato que a relaciona positivamente aos movimentos que fazem emergir os sistemas da matemática pura. Com efeito, a axiomática em Kant deixa de ser um conjunto de proposições ontológicas, ou seja, que se relacionam objetivamente com a realidade em si mesma, para adentrar ao status de proposições fenomenológicas, referentes à condição possibilidade do conhecimento do sujeito cognoscente e, por isso mesmo, sintéticas *a priori*. Assim, o próprio entendimento de um axioma como uma *verdade a priori* se modifica. Com efeito, a noção de *verdade* de uma proposição desliga-se da correspondência entre conhecimento e objeto, e passa a ser um julgamento interno do juízo, uma vez que "a verdade ou a aparência não estão no objeto, na medida em que é intuído, mas no juízo sobre ele, na medida em que é pensado". (Kant, 2005, B350). Consequentemente, uma axiomática fundamenta não a realidade em si mesma, mas o funcionamento interno do espírito. Consequentemente, o kantismo geraria um tipo de concepção sem a qual as reflexões típicas sobre a axiomática no século XIX não seriam concebíveis.

Essas duas faces do pensamento kantiano parecem se rivalizar, sobretudo quando tomadas a partir dos novos objetos da matemática na segunda metade do século XIX. A medida que o kantismo torna-se paradigmático no pensamento filosófico no contexto da Alemanha, e especialmente após a ascensão do idealismo de Hegel, essa tensão interpretativa geraria a rejeição e, em última instância, o abandono das considerações filosóficas sobre os métodos matemáticos. Nesse contexto - e ainda hoje -, chega-se a

postular a emergência das geometrias não euclidianas como a refutação inevitável da doutrina kantiana, apresentando matemáticos como Gauß como exemplos de oposição à Kant.

Em um artigo de 1923, o matemático alemão Heinrich Emil Timerding (1873-1945) mostra o quão controversa se tornaria essa visão. Abordando as raras considerações de Gauß sobre a filosofia de Kant, Timerding mostra que dificilmente haveria qualquer desvio entre as opiniões de ambos. Na verdade, na análise de Timerding, vemos uma interpretação de concordância entre as concepções de Gauß e Kant. Isso é notável, uma vez que, tradicionalmente, Gauß é tomado na literatura como um opositor ao kantismo, sobretudo do ponto de vista do conceito de espaço. Como exemplo, podemos tomar a afirmação de Otto Neurath (1882-1945), na *International Encyclopedia of Unified Science*, de 1955:

> The evolution of non-Euclidean geometry, for instance, which prepared modern theories of measuring time and space, was hardly supported by modern philosophers-another example of the inadequacy of philosophers. One can rather assume that the ideas of Gauss, Bolyai, Lobachevski, and others were impeded by Kantianism: they had to start by opposing all kinds of apriorism. (Neurath, 1955, p.11)

Curiosamente, então, o que Timerding afirma é que, apesar de declarar não concordar com o kantismo, um olhar mais atento identificaria a concordância de Gauß com as concepções de Kant. Para Timerding, essa suposta discordância residiria explicitamente no equívoco ou desentendimento, por parte de Gauß e de seus intérpretes, sobre a distinção kantiana entre realidade empírica e idealidade transcendental do espaço.

Com efeito, a interpretação da controvérsia entre Gauß e Kant se basearia em declarações do próprio Gauß. Em uma carta a Bessel de 9 de abril de 1830, Gauß afirmaria:

> "De acordo com minha convicção mais profunda, a teoria do espaço toma, a priori, uma posição completamente diferente em nosso saber da teoria das grandezas puras (reine Grœßenlehre); nosso conhecimento do primeiro carece da convicção completa de sua necessidade (ou seja, também de sua verdade absoluta) que é inerente ao último. Devemos admitir humildemente que, caso o número seja meramente um produto de nossa mente, o espaço tem também, fora de nossa mente, uma realidade à qual não podemos prescrever à priori completamente suas leis." (Gauß, Werke Vol. VIII, p. 201 apud Timerding, 1923, p. 36)

Assim, Gauß estaria afirmando que o espaço categoricamente pertence à natureza, o que, segundo estes intérpretes, implicaria na negação do caráter *a priori* do espaço. Timerding nega essa implicação, uma vez que a aprioricidade do espaço diz respeito apenas a sua independência dos fenômenos particulares. Na verdade, Gauß se refere ao fato de que

haveria algo de extralógico no espaço, relativo a um caráter da realidade. Mas essa realidade não seria negada por Kant, a menos do fato que ele a caracteriza como “empírica”.

Com efeito, na Estética Transcendental, Kant distingue realidade empírica, aqui atribuída ao espaço, de uma realidade absoluta. Como intuição *a priori*, o espaço “não é mais do que a forma de todos os fenômenos dos sentidos externos, isto é, a condição subjetiva da sensibilidade, única que permite a intuição externa” (Kant, 2005, A26/B42). Dessa maneira, o espaço não poderia ser considerado como propriedade objetiva das coisas em si mesmas, mas sua realidade é concebida intrinsecamente como condição subjetiva do sujeito cognoscente, sendo, portanto, realidade empírica. Assim, diz Kant:

> Afirmamos, pois, a realidade empírica do espaço (no que se refere a toda a experiência exterior possível) e, não obstante, a sua idealidade transcendental, ou seja, que o espaço nada é, se abandonarmos a condição de possibilidade de toda a experiência e o considerarmos com algo que sirva de fundamento das coisas em si. (Kant, 2005, A28/B44)

Segundo Timerding, essa distinção da realidade empírica seria mal compreendida não somente por Gauß, mas por outros matemáticos os quais veriam a validação empírica das geometrias não euclidianas como refutação do kantismo.

> A posição de Kant só pode ser explicada pelo fato de ele perseguir um objetivo metafísico desde o início. Ele quer e deve, portanto, ir além do conhecimento empírico da natureza e vê-lo desde um certo ponto de vista dado por sua consideração transcendental. Todos os seus enunciados só podem ser compreendidos se alguém adotar seu ponto de vista metafísico e assumir a expressão resultante dos conceitos. Os matemáticos e físicos que param na análise das percepções, portanto, muitas vezes encontraram uma contradição com as afirmações de Kant e seus seguidores, que se baseia basicamente apenas nos pontos de vista completamente diferentes de observação e concepção e teria deixado de existir ou pelo menos seria consideravelmente enfraquecida se houvesse entendimento mútuo.[12] (Timerding, 1923, p.34, tradução nossa)

Por outro lado, Timerding trata também da abordagem de Gauß e Kant a espaços com mais de três dimensões. Em uma carta a Gerling, de 8 de abril de 1844, Gauß mencionaria a expansão das noções de simetria e congruência à espaços de mais de três dimensões “para os quais nós, seres humanos, não possuímos intuição, mas que, visto em

---

[12] *“Kant's Stellungnahme ist überhaupt nur dadurch zu erklären, daß er von vornherein ein metaphysisches Ziel verfolgt. Er will und muß deshalb über die empirische Naturerkenntnis hinausgehen und sieht sie von Anfang an unter einem bestimmten, durch seine transzendentale Betrachtung gegebenen Gesichtswinkel. Alle seine Äußerungen sind nur zu verstehen, wenn man sich mit ihm auf den gleichen metaphysischen Standpunkt stellt und die dadurch bedingte Ausprägung der Begriffe nimmt. Bei den Mathematikern und Physikern, die bei der Analyse der Wahrnehmungen stehen bleiben, mußte sich daher vielfach ein Widerspruch gegen die Behauptungen Kants und seiner Anhänger zeigen, der im Grunde nur auf dem völlig verschiedenen Standpunkte der Betrachtung und Auffassung beruht und bei gegenseitigem Verständnis in Wegfall gekommen oder wenigstens erheblich gemildert worden wäre."*

abstracto, não é contraditório e poderia ser intuído apropriadamente por seres superiores"[13]. Ora, esta visão não seria necessariamente discordante à visão kantiana. De fato, Timerding toma ainda um trecho de um artigo de um "jovem" Kant de 1747, no qual este considera a possibilidade de espaços de mais de três dimensões, de forma que "uma ciência de todos esses tipos possíveis de espaço seria inevitavelmente a geometria mais elevada que uma mente finita poderia empreender", o que, para Timerding, não seria apenas uma opinião da qual Kant se desfaria posteriormente. Em verdade, Timerding mostra que na obra de Kant, a tridimensionalidade ocuparia uma relação estreita e lógica com a lei da gravitação de Newton (cf. Timerding, 1923, p. 38).

Assim, Timerding conclui que se o próprio Gauss sentiu tal contradição, ela se basearia em uma compreensão incompleta, ou até mesmo indevida, sobre o que Kant realmente quis dizer. E da mesma forma encontrariam-se, portanto, as interpretações que visam anular a filosofia kantiana da matemática diante dos novos elementos da matemática moderna, em particular as geometrias não euclidianas. A análise de Timerding, portanto, aponta um sintoma de uma possível dupla interpretação de Kant, sobretudo do ponto de vista de suas inferências sobre o espaço e sua adequação com as novas geometrias.

Essa dupla interpretação justificaria, portanto, as tentativas de renovação e compatibilização das doutrinas filosóficas com as da ciência, característica das escolas neokantianas e encontradas no século XIX, marginalmente na primeira metade do século e mais fortemente na segunda. É sobre esse movimento que falaremos nos capítulos 3 e 4.

[13] *wofür wir menschliche Wesen keine Anschauung haben, die aber in abstracto betrachtet nicht widersprechend ist und füglich höheren Wesen zukommen könnte"*

3 - Movimentos à matemática pura: primeira metade do século XIX

Na primeira metade do século XIX, sob a influência do romantismo, se apresenta na Alemanha um contexto de tensão entre filosofia e ciência. Essa tensão identificaria-se na predominância, no contexto universitário alemão, das correntes da filosofia idealista, e será ampliada sobretudo pela ascensão dos sistemas especulativos de Fichte, Schelling e Hegel. Em contraposição à concepção rígida de ciência em Kant, esses sistemas viriam a propor a dissolução da dicotomia entre conhecimento científico e não científico, sobre a qual a noção de verdade científica relativizar-se-ia. Ao longo das primeiras décadas do século XIX, isso se converteria em uma rejeição dos cientistas às produções filosóficas:

> "In contrast to Kant, later idealism, especially with Schelling and Hegel, rather constitutes a criticism of natural science (as formed by Galilei and Newton). This fact easily explains the negative attitude of some 19th century natural scientist towards post-kantian idealism as well as a growing interest in it which can be observed in several twentieth-century scientists during the crises of classical physics." (Gajdenko, 1981, p. 61)

O desenvolvimento dessa tensão ocasionaria em resposta, na segunda metade deste século, na formação de uma nova filosofia da ciência, orientada diretamente por praticantes das ciências e não mais tão somente pelas escolas filosóficas. Característicos dessa nova filosofia da ciência emergente do fim do século XIX são os nomes de Ernst Mach (1838-1916), Hermann von Helmholtz (1821-1894), Ludwig Boltzmann (1844-1906), e Heinrich Hertz (1857-1894).

Entretanto, paralela e um tanto alheia a essa narrativa historiográfica parece se encontrar a filosofia de Jakob Friedrich Fries (1773-1843). Fries teria desenvolvido logo no início do século XIX uma readaptação da filosofia crítica de Kant, em direção à uma extensão e aprofundamento da noção de ciência, relacionando-a às novas contribuições científicas do período. Além disso e em particular, Fries desenvolveria uma filosofia da matemática propriamente dita a partir de sua obra *Die Mathematische Naturphilosophie*, de 1822, de forma a estender as noções já introduzidas por Kant.

3.1 Jakob Friedrich Fries

> *Reine Mathematik schreibt allen Naturlehren mit Nothwendigkeit die obersten Gesetze der Bewegung und die Formen der Grundkräfte, durch welche alles bewirkt wird, so wie die obersten Formen aller Processe, unter denen die körperlichen Stoffe in Wechselwirkung kommen, vor. Dieses Recht der reinen Mathematik will ich hier mit philosophischen Hülfsmitteln zu vertheidigen suchen.*[14] (Fries, 1822, p. 32)

Nascido em 1773, filho de um pastor, Fries recebeu sua educação primária em Niesky, na *Herrnhuter Brüdergemeine*, uma rígida ordem religiosa protestante, de cunho majoritariamente pietista e missionário. Ainda jovem, ele teria rompido internamente com a orientação teológica da irmandade e ao ingressar no *Pädagogium*, Fries conheceria e se interessaria por matemática. Em particular é notável que, a despeito da rigidez da instituição religiosa da qual fazia parte, o acesso às obras de matemática era livre, permitindo que Fries se desenvolvesse excepcionalmente na disciplina. Também no seminário teológico em Niesky vem a ter contato com a filosofia de Kant, com a qual teria bastante entusiasmo. (cf. Schubring, 1999)

Em 1795, inicia estudos livres em Leipzig e em 1797 muda-se para Jena onde, além de ingressar em estudos modernos de filosofia, adquire nível avançado em química. É notável que Fries parece ter desenvolvido precocemente as questões relativas à psicologia na filosofia de Kant que viria a desenvolver. Ele teria, à época, assumido três tarefas à sua reelaboração da filosofia kantiana: demonstrar que a crítica da razão pura era um ramo da psicologia empírica; traçar a precisa relação entre a "psicologia geral" e a "psicologia empírica"; escrever uma nova e antropológica crítica da razão (Henke, 1867, p. 44-45).

Em 1805, Fries seria admitido à cátedra de filosofia e matemática elementar em Heidelberg. Neste período, torna-se um crítico do idealismo de Fichte e Schelling, o qual se tornará predominante na Alemanha até a segunda metade do século. Em 1807, publica sua obra mais importante, sua *Anthropologische Kritik der Vernunft*, sobre a qual estabelece sua conhecida fundamentação antropológica à filosofia crítica de Kant. Já em 1816, é contratado como professor na universidade de Jena, na cátedra de filosofia, matemática e física.

[14] "A matemática pura prescreve as supremas leis do movimento e as formas das forças básicas, pelas quais tudo é efetuado, a todas as doutrinas naturais com necessidade, e prescreve também as formas supremas de todos os processos sob os quais as substâncias físicas entram em interação. Vou aqui tentar defender o direito da matemática pura por meios filosóficos."

Os anos seguintes em Jena lhe são especialmente controversos. Políticamente, Fries era assumidamente um nacionalista liberal, de forma a apoiar as fraternidades estudantis (Burschenschaften). No ano de 1816, publicaria o texto "*Von deutschem Bund und deutscher Staats Verfassungs*" o qual dedicava à juventude alemã, bem como em outubro de 1817 teria participado do Wartburg Fest, um festival nacional organizado pelas fraternidades estudantis, o qual reuniu cerca de 500 estudantes de todo território alemão. Em 1819, Karl Ludwig Sand (1795-1820), um integrante da fraternidade de Jena, assassinaria August von Kotzebue (1761-1819), um escritor alemão declaradamente opositor às ideias liberais. Por suas supostas relações com Sand, que era estudante de Jena, Fries e outros professores seriam perseguidos, acusados de conspiração. Como reação à ação das fraternidades, em 1819 são instaurados os decretos de Karlsbad, os quais dissolvem as *Burschenschaften*, estabelecendo censura e inspeção nas universidades. Como resultado, Fries é deposto de sua cátedra, retornando apenas em 1824 como professor de matemática e física, e impedido de assumir uma cadeira em filosofia. Somente em 1838 ele recuperaria seu direito irrestrito ao ensino.

A recepção da obra de Fries também é tema bastante controverso. Para o historiador e filósofo Helmut Pulte, o limitado impacto de Fries na filosofia da ciência posterior encontra-se em contraste com suas realizações nesta área. É possível apontar alguns motivos pelos quais Fries não seria suficientemente reconhecido. Em primeiro lugar, o banimento da cátedra de filosofia a partir de 1819 pode ser entendido como decisivo na influência de Fries. Além disso, é notável a hegemonia do idealismo alemão no contexto filosófico na primeira metade do século XIX, contra o qual Fries declaradamente se opunha:

> While German academic philosophy and its historiography stuck to the idea of the predominance of philosophical speculation over empirical research, most practicing scientists turned away from German “school philosophy” and considered science and its history from the point of view of naive positivism. Neither view could perceive and appreciate Fries’s peculiar approach and his achievements. (Pulte, 2006, p. 118)

Assim, por um lado, a primazia do idealismo de Fichte, Schelling e Hegel, contra os quais Fries se posicionava, teria prejudicado a recepção de sua reinterpretação kantiana da filosofia da ciência. Por outro lado, o neokantismo da segunda metade do século XIX, tendo em vista seu repetido esforço em um "retorno a Kant", acabaria por ignorar as produções pós Kantianas da primeira metade do século. Nesse sentido, a marca de um “psicologismo” na revisão antropológica da doutrina kantiana de Fries o tornaria desimportante aos

interesses dos filósofos do fim do século. Tal desenvolvimento histórico da filosofia da ciência teria negligenciado mesmo as propostas neofriesianas levantadas por Leonard Nelson no início do século XX, as quais serão tratadas em capítulo posterior.

Contudo, é possível encontrar o reconhecimento da obra de Fries nos meios científicos, e em particular, entre diversos matemáticos alemães da primeira metade do século XIX. Em especial, nota-se que matemáticos como August Leopold Crelle (1780-1855), Carl Jacobi (1804-1851), Karl Heinrich Schellbach (1805-1892), Hermann Graßmann (1809-1877), dentre outros matemáticos que viriam a contribuir com os processos de emergência da matemática pura, ao menos conheciam o trabalho de Fries (Schubring, 1999, p. 186). O caso de Gauß é ainda mais notável, uma vez que entende-se que ele rejeitaria as concepções da filosofia de sua época. Em uma carta a Fries em 1841, Gauß expressaria uma surpreendente admiração por sua obra de história da filosofia de 1837:

> Sempre tive um grande gosto pela especulação filosófica, e agora estou ainda mais satisfeito por ter em você um guia confiável para o estudo do destino da ciência desde os tempos mais antigos até os mais recentes, uma vez que não leio os escritos de muitos filósofos em particular, os escritos de vários filósofos bem conhecidos (talvez melhores, assim chamados) que apareceram desde Kant às vezes me lembraram da peneira de Bockmelker, ou, para usar a imagem moderna, da trança de Münchhausen, pela qual ele se puxou para fora da água. Esses amadores não ousariam fazer tal confissão diante de seus mestres; isso não aconteceria se eles considerassem o caso com base em seus méritos. Muitas vezes me arrependi de não morar em sua localidade, a fim de ser capaz de colher tanta satisfação quanto instrução de um discurso filosófico. (Gauß, 1841 apud Hermann, 1994, p. 7, tradução nossa)

Dessa maneira, buscamos aqui posicionar Fries como uma influência filosófica presente na produção matemática da primeira metade do século XIX. Nas próximas seções, portanto, abordaremos sua filosofia da ciência, a qual será aqui entendida como uma revisão e extensão direta da filosofia da ciência de Kant.

3.1.1 A filosofia da ciência de Fries: expansão do universo da ciência kantiana

A partir das bases do kantismo, Fries se posicionaria, como outros filósofos de sua época, à favor da produção de uma filosofia que desse conta da precisão e clareza que estes encontravam nas ciências matemáticas. Nesse sentido, Fries assumiria como fundamental o problema da fundamentação da observação empírica na construção de uma teoria científica.

Uma das primeiras discordâncias de Fries a Kant a esse respeito refere-se à noção e definição de legitimidade de uma ciência. A partir, sobretudo, de seus Princípios Metafísicos

da Ciência da Natureza de 1786, Kant estabeleceria uma rígida demarcação de uma ciência legítima, demandando desta três condições, a ele, necessárias: sua matematização, apoditicidade e sistematicidade, as quais deveriam estar intrinsecamente relacionadas. A combinação destas condições, em Kant, conduziria à necessidade de uma parte pura, onde estariam fundadas a certeza apodítica de seus princípios.

Tal programa científico de Kant teria sofrido certa resistência, tendo em vista que excluiria do campo de legitimidade das ciências diversas áreas de pesquisa da época, em especial, a química e a biologia. Além disso, algumas áreas da própria matemática e da física, como o caso da análise algébrica, mecânica analítica e da teoria das probabilidades, encontrariam problemas no enquadramento kantiano. Assim, seria possível ver em Fries um esforço de extensão da rígida concepção kantiana de ciência, em direção à aceitação e enquadramento destas ciências em desenvolvimento em sua época.

Segundo Pulte (2006), Fries aborda o problema a partir de um ataque a uma supostamente fraca distinção, em Kant, das faculdades do entendimento e da razão, sobretudo entre conhecimento e crença. A falta de uma distinção precisa resultaria em uma confusão entre teorias e ideias, noções essenciais à circunscrição da legitimidade da ciência natural. Dessa maneira, ao demarcar e fortalecer a noção de "teoria" como constituinte fundamental da noção de ciência, Fries enfraqueceria a noção totalizante de "sistema" de conhecimento em Kant. Com efeito, Kant afirma serem as ideias princípios estritamente regulativos e não constitutivos. Ora, um princípio constitutivo é um princípio condicional da intuição a priori, de forma que ele por si só funda, condiciona e determina os objetos do conhecimento. Princípios regulativos, por outro lado, ordenam aquilo que já é dado, e como tal, seriam meramente contingentes. Com efeito, enquanto princípios constitutivos permitem a construção de teorias, princípios regulativos permitem apenas generalizações. Contudo, para Fries, certas ideias não teriam papel estritamente regulativo, mas seriam potencialmente constitutivas:

> According to Fries, Kant did not realize the "potentially" constitutive function of certain regulative principles. By endowing ideas with a regulative function for judgment, Kant implicitly allowed them to function as "physical regulatives" and thus as constitutive of experience, "after he had initially denied them all claims to constitutiveness" (Pulte, 2006, p. 105)

Quanto a isso, portanto, Fries estabeleceria uma nova distinção interna aos princípios regulativos: regulativos *de* teorias e regulativos *em* teorias. Assim, princípios regulativos de

teorias, ou regulativos ideais, consistem em objetivos e formas teóricas e serviriam apenas para distinguir metodologicamente teorias e ideias. Por outro lado, princípios regulativos em teorias, suas "máximas heurísticas", teriam como função a subordinação dos particulares sobre o geral, e teriam, para Fries, uma potencialidade constitutiva à experiência. Tais máximas seriam guias *a priori* à construção de teorias, sendo assim princípios constitutivos de teorias particulares, mas, simultaneamente, teriam seu fundamento heurístico na observação empírica.

> Heuristic maxims, that is, maxims of the systematizing understanding, can become constitutive for experience. (...) the heuristic maxims operate on actual given experience, while the ideal regulatives operate on all possible experience - a difference that results from Fries's separation of natural and ideal worldview (Pulte, 2006, 105-106)

A construção de teorias a partir de máximas heurísticas e estas baseadas em observações de qualidades distintas, consequentemente, levaria à possibilidade de uma pluralidade teórica, em oposição à sistemática totalizante de Kant. Neste sentido, Fries deve ser entendido também como um representante das ciências em expansão, cuja prática ele, de maneira distinta de Kant, entenderia em maior profundidade. Assim, enquanto para Kant as ciências seriam certas extensões da própria filosofia, Fries as entenderia de maneira mais autônoma. O objetivo de Fries aqui, portanto, seria o de fornecer uma fundamentação filosófica às ciências emergentes de sua época.

Assim, esta expansão da noção de ciência por Fries se daria pela interação necessária entre a matematização e a experiência, através do estabelecimento de máximas heurísticas que, por um lado, sistematizam o conhecimento em teorias e, por outro lado, fazem uma espécie de "ponte" entre uma noção pura de ciência e sua aplicação. Teorias científicas, portanto, teriam de ser simultaneamente ancoradas tanto na experiência, cujo papel é o de fornecer a observação empírica necessária à obtenção de máximas, quanto *a priori*, relativas ao desenvolvimento de uma parte pura de ciência, necessária ao seu desenvolvimento, onde tais máximas de fato se manifestariam. Tal organização metodológica das ciências em Fries denotaria o aprofundamento entre seu sentido puro e o aplicado.

Em seu livro de 1822, Fries então apresenta sua *Mathematische Naturphilosophie.* Após uma recapitulação essencial da doutrina kantiana, tal como o papel fundamental da matemática na teoria do conhecimento e a natureza sintética e *a priori* de duas proposições,

e da análise de distinções relativas a ciências gerais e descritivas, Fries apresenta sua filosofia matemática da natureza, a qual, enquanto ciência, constaria de três partes (Fries, 1822, p. 9)

1. Uma parte puramente filosófica sobre as leis gerais da natureza, na legislação das categorias extraídas pela crítica da razão;
2. Uma parte puramente matemática, dada por estes princípios;
3. Uma parte relativa à teoria do movimento ou da matemática aplicada.

Uma vez que a primeira parte caberia à metafísica, restaria então duas tarefas, relativas às segunda e terceira partes:

> *Primeiro, uma filosofia da matemática pura, na qual a natureza das abstrações matemáticas está fundamentada e sua reivindicação de validade em todo o conhecimento humano deve ser determinada. Em segundo lugar, a investigação filosófica da teoria pura do movimento, a filosofia natural matemática de Newton ou a doutrina do princípio básico da igualdade de efeito e contra-efeito, desde que seja de uma investigação filosófica. Na verdade, essa ciência é o arsenal de todas as hipóteses a partir das quais as explicações subsequentemente sucedem na experiência.* (Fries, 1822, p. 9, tradução nossa)

A teoria do movimento, ou foronomia, teria um papel central sobre a experiência, norteando as leis válidas a qualquer objeto externo. Fries a definiria enquanto a "filosofia da matemática aplicada", ou seja, "uma matemática aplicada ao conhecimento metafísico. Nela está contido o conhecimento do todo, o conhecimento completamente científico do homem no que concerne à parte externa da natureza" (Fries, 1822, p. 397, tradução nossa). Assim, sem tornar-se efetivamente um sistema, as leis da teoria do movimento se tornariam espécies de fundamentos *a priori* e guias heurísticos às teorias da natureza assim subsumidas.

A matemática pura, por outro lado, teria um papel constitutivo às leis do próprio pensamento:

> Devemos afirmar que toda a visão do mundo de acordo com as leis da forma e do movimento é, por sua origem, puramente matemática. Diremos, portanto, para uma definição mais precisa das regras indicadas: as propriedades gerais dos corpos não são apenas aquelas que são encontradas em todos os corpos com os quais podemos experimentar, mas acima de tudo aquelas que, de acordo com as leis determinadas a priori, devem pertencer à intuição matemática. Portanto, temos que determinar o julgamento das forças materiais a priori não apenas de acordo com a experiência, mas acima de tudo de acordo com as leis matemáticas. (Fries, 1822, p. 23, tradução nossa)

Assim, sob tal distinção metodológica entre as matemáticas puras e aplicadas e, sobretudo, um novo posicionamento ontológico da matemática pura, Fries reivindica a necessidade de produção de uma filosofia fundamentadora desta matemática pura:

> A matemática pura prescreve as supremas leis do movimento e as formas das forças básicas, pelas quais tudo é efetuado, à todas as doutrinas naturais com necessidade, e prescreve também as formas supremas de todos os processos sob os quais as substâncias físicas entram em interação. Vou aqui tentar defender o direito da matemática pura por meios filosóficos. (Fries, 1822, p. 32, tradução nossa)

3.1.2 A filosofia da matemática de Fries

Em relação à produção de uma filosofia da matemática pura, é notável que a primeira metade da *Mathematische Naturphilosophie* de 1822 trate exclusivamente desse assunto. Parece plausível que isso fosse feito à luz de uma modernização da filosofia da ciência de Kant, uma vez que os matemáticos alemães do período estariam concentrados em avanços na matemática pura, seja por motivos externos, como a ascenção do neo-humanismo (tratada na seção 2.2), quanto por motivos internos, como a propagação dos métodos da escola combinatória de Carl Friedrich Hindenburg (1741-1808).

É possível, contudo, traçar algumas contribuições anteriores de Fries a esse assunto. Em um artigo de 1810, Fries faria uma pertinente crítica à *Géométrie de Position*, de Lazare Carnot, de 1803, complementando a crítica de outro matemático alemão, Friedrich Gottlieb Busse (1756-1835). Segundo Schubring (1999), Fries teria sido o primeiro a ressaltar o problema conceitual básico na refutação de números negativos em Carnot: a não separação consistente entre números e quantidades.

> Pensamos que o primeiro defeito, através da qual ocorrem tantos erros na teoria das quantidades opostas, reside no fato de que normalmente não se distinguem adequadamente quantidades e números, mas sim que os números designados ±7, ±a são chamados imediatamente de quantidades. Se, no entanto, considerarmos, números positivos e negativos por si mesmos e estabelecermos então as quantidades opostas apenas como casos de aplicação ao cálculo com números negativos, os argumentos da teoria ganham facilidade e clareza (Fries, 1810, p. 315 apud Schubring, 1999, p. 184, tradução nossa)

A crítica de Fries ressaltaria, com efeito, uma questão fundamental à admissão dos números negativos e, em linhas mais gerais de sua própria filosofia, a separação entre as matemáticas pura e aplicada. Veremos que esta consciência, expressa já em 1810, poderá ser identificada aos progressos alcançados pela obra de 1822, cujo cerne encontra-se nesta distinção.

A mais interessante contribuição que Fries apresenta no *Mathematische Naturphilosophie* identifica-se na introdução de uma disciplina básica independente da

matemática, denominada por ele de *Syntaktik*, a qual tem a tarefa de examinar e fundamentar procedimentos. É possível encontrar nesta concepção uma forte influência da escola combinatória, que desde 1780 se faria presente no contexto da matemática alemã. Inspirada pelo programa algébrico de Lagrange e inaugurada por Hindenburg, a abordagem da escola combinatória se caracteriza por um formalismo algébrico, orientado pelo teorema polinomial, uma generalização do teorema binomial. Tal abordagem se encontraria bastante conhecida não só no contexto universitário, mas também nas abordagens de ensino secundário (cf. Schubring, 2009). A *Syntaktik* de Fries, no entanto, daria um passo para além do simples entendimento da matemática como um jogo simbólico:

> [Fries] fez da relação entre signos e significado a dimensão fundamental de sua reflexão sobre a matemática pura, uma vez que a diferenciação entre o significado sintático e o aritmético das expressões matemáticas é um dos elementos essenciais do seu programa. (Schubring, 1999, p. 185, tradução nossa)

Assim, nos voltamos, aqui, à análise dos aspectos apresentados na obra. Na primeira seção da introdução, denominada "da tarefa de uma filosofia da matemática", Fries afirma que a base para a construção de uma filosofia da matemática encontra-se no projeto de uma razão crítica:

> A Crítica da Razão[15] mostra em suas deduções por que e como as formas de nosso conhecimento matemático, em virtude da sensibilidade de nosso espírito, tornam-se formas básicas necessárias de todo nosso conhecimento sensível. Mostra também que todo o conhecimento científico do homem só pode ser formado quando subordinamos o conteúdo da experiência às verdades filosóficas fundamentais por meio de formas matemáticas. (Fries, 1822, p. 35, tradução nossa)

Tal projeto, novamente, localiza a matemática como elemento fundante da organização do pensamento humano. A distinção da matemática em termos de sua plausibilidade ou assertividade não estaria, assim, baseada apenas na sua rigidez lógica, mas na sua ligação intrínseca com a própria pensabilidade ou, em outras palavras, à sua construtividade em termos da intuição pura:

> A intuição matemática une, através de uma concepção intuitiva da conexão de todos os objetos em um todo, todas as concepções sensoriais umas com as outras e as sujeita de acordo com todos os tipos de intuição pura em ordem, número, forma e duração às formas necessárias de condensar todas as coisas. (Fries, 1822, p. 38, tradução nossa)

Essas considerações sobre a natureza do conhecimento matemático são então condensadas em três afirmações:

[15] O termo "Crítica da Razão" (*Kritik der Vernunft*) não deve ser entendido como uma referência direta à obra de Kant, mas com uma conotação mais geral de um projeto inaugurado por ele. Deve-se ter em mente que o próprio Fries, em 1807, viria a publicar sua "*Neuer oder Anthropologische Kritik der Vernunft*".

(1) "*Todas as explicações de conceitos em matemática são consideradas construções de conceitos em intuição pura*" (Fries, 1822, p. 39, tradução nossa): Todo conhecimento matemático não é dado, mas construído a priori, na intuição pura. Por meio de uma definição, tais conceitos são construídos e por ela completamente compreendidos. Além disso, tal definição deve gerar uma representação mental (geral e a priori) de forma clara. Isto se mostraria tanto na geometria na construção de formas geométricas quanto na aritmética, nas designações de variáveis por letras.

(2) *O sistema em qualquer ciência matemática é hipotético* (Fries, 1822, p. 41, tradução nossa): Estruturas matemáticas comportam-se causalmente, sob o julgo de demonstrações as quais se valem da própria estrutura de proposições verdadeiras, estas com caráter de necessidade, ou seja, a priori. Ainda sobre essa afirmação, Fries argumenta contra um programa de construção empirista da matemática. Para isso, se referencia, e o fará outras vezes no texto, na obra *Philosophisch-mathematische Abhandlungen* de 1807, de Abraham Kästner[16] (1719-1800) e Georg Klügel[17] (1739-1812).

> Locke afirma que só deduzimos esses princípios de percepções individuais por indução, Leibniß o refuta e Kästner expressa esse contra-argumento muito clara e definitivamente da seguinte maneira: "Nenhuma indução é a maneira pela qual alguém chega aos axiomas matemáticos. Esta é a abstração. Um par de postes, colocados um em cima do outro, é uma imagem para a mente reconhecer que um par de linhas retas só pode se cruzar uma vez. Essa consciência repousa na capacidade do entendimento de abstrair, de pensar algo sobre as barras que pensaria tão bem sobre vigas ou sobre cordas esticadas umas sobre as outras ou linhas desenhadas" (Fries, 1822, p.45-46)

De fato, tais questões fariam parte das novas concepções emergentes na Alemanha, sobretudo a partir do movimento de ascensão do método analítico. Outros autores representativos deste período são Christian Wolff (1679-1754), autor do livro-texto alemão de maior alcance no oeste europeu, Christian Hausen (1693-1743), Johann Segner (1704-1777) e Wenceslaus Karsten (1732-1787) (cf. Schubring, 2005).

(3) *O método de ensino da matemática é sempre dogmático, mas em grande parte baseado na investigação segundo o método da crítica especulativa para a invenção de teorias* (Fries, 1822, p. 47, tradução nossa): Aqui, numa alusão à dicotomia dos métodos sintéticos e analíticos, Fries atribui à sua filosofia da matemática também a tarefa desta

[16] Nota-se que Kästner era professor de matemática na universidade de Göttingen, autor da série de livros-texto de matemática mais divulgada da época.

[17] Professor de matemática na universidade de Halle e discípulo de Kästner, autor de uma famosa tese de doutorado, aparentemente a primeira com o caráter de pesquisa, analisando todas as tentativas de prova do 5º axioma de Euclides e mostrando o fracasso destes.

investigação analítica, ou seja, a investigação dos fundamentos últimos dos procedimentos matemáticos.

Fries então parte para uma separação pragmática entre o que entenderá por matemática pura e aplicada, em vista a desenvolver o objeto privilegiado de sua filosofia da matemática. No sentido de Fries, apesar de distinguíveis, matemáticas pura e aplicada são indissociáveis, à semelhança da relação entre intuições e conceitos, na obra kantiana. Assim, por um lado, a matemática pura trata das formas puramente intuitivas, de maneira que estas precisam de algum elemento sobre o qual se manifestam para serem identificadas. A matemática aplicada, por outro lado, precisa de uma fundamentação abstrata sob a qual se subordina em sua organização.

Portanto, o "acesso", por assim dizer, à matemática pura não dar-se-ia sem a ingerência da matemática aplicada, uma vez que seria preciso uma espécie de "campo de ação" para que essas formas puras possam ser caracterizadas. Essa relação intrínseca entre matemática pura e aplicada teria, segundo Fries, gerado mal entendidos sobre a própria natureza dos objetos da matemática, como a confusão entre grandeza (*Größe*) e número (*Zahl*). Tais equívocos viriam da não diferenciação entre a forma do pensamento e sua representação sensível:

> Todo conhecimento humano surge de modos sensíveis de percepção, e os modos abstratos de percepção são sempre, em primeiro lugar, produtos artificiais do entendimento, apenas suas ferramentas de auto-observação. No começo, entretanto, seu significado será inevitavelmente confundido com o de um modo perceptivo de conhecimento e, assim, os conceitos gerais de um modo abstrato de representação são julgados como objetos de percepção. O misticismo consiste nessa confusão de nossos conceitos com o próprio ser. (Fries, 1822, p. 53)

Objetos da matemática pura, portanto, careceriam de uma representação sensível, sendo entendidos a partir de suas inserções nestas, ou seja, são formas de conexão ou formas relacionais. Seus fundamentos representacionais seriam então o tempo e o espaço:

> Todo o nosso conhecimento matemático é baseado nas representações do tempo e do espaço como formas nas quais recebemos uma combinação de todos os objetos de percepção em um todo. [...] Portanto, todo o desenvolvimento científico abstrato do conhecimento puramente matemático surge para nós por meio de construções arbitrárias realizadas no pensamento, ou seja, representações na percepção pura de tais invasões no tempo e no espaço. (Fries, 1822, p. 55-56)

Aqui, o tempo se estabelece como a conexão perceptiva dos sentidos internos, em uma dimensão, bem como o espaço se impõe como conexão perceptiva dos sentidos externos, com suas três dimensões. O modo de conexão de ambos é semelhante,

caracterizando o que entendemos como grandeza. Uma grandeza em abstrato, portanto, é aqui entendida como uma concepção estrutural de organização:

> A abstração matemática vai ainda mais além aqui das concepções de tempo e espaço in abstracto, na medida em que só entende esse tipo de conexão por si mesma, e chegamos em parte à consideração da própria grandeza in abstracto, em parte às meras concepções de organização em geral na medida em que a abstração apenas enfatiza para si as atividades da construção voluntária da imaginação. (Fries, 1822, p. 57)

Cada modo distinto de representação nos fornece uma conexão contínua distinta, aqui chamado de "série contínua". A ideia é que cada série apresente uma forma peculiar de delimitação, ou seja, distintas formas relacionais. Fries apresenta então três tipos de séries ou conexões puras: (1) a série descritiva do tempo (a ideia temporal do anterior e do sucessor); (2) a série descritiva das formas espaciais, que contém três séries interconectadas: a linha como uma série de pontos, a superfície como uma série de linhas e a expansão espacial como uma série de superfícies; (3) a série de tamanhos (a ideia comparativa entre maiores e menores). As duas primeiras séries são obtidas pela abstração pictórica enquanto a terceira é esquemática, uma vez que não se representa isoladamente.

A distinção entre tais tipos de abstração caracterizaram as distinções, por exemplo, entre a geometria e a aritmética. Fries tensiona as distinções usuais, as quais considera inadequadas. Ele cita a distinção de Kästner, por exemplo, a qual distingue aritmética e geometria a partir de suas características discretas e contínuas, respectivamente. A definição de uma grandeza discreta, por exemplo, enquanto “aquela que consiste de partes simples”, poderia ser substituída por “aquele em que distinguimos as partes, e consideramos composto por estas”, a qual retorna às noções primeiras dos arranjos e combinações dadas pela abstração esquemática. Nesse sentido, os postulados da aritmética retomariam casos particulares dessas formas conectivas:

> Mas só podemos trazer noções de tamanhos para os conceitos se pensarmos na forma numérica como um todo como uma combinação de partes semelhantes e iguais, ou seja, de unidades. Consequentemente, os postulados da aritmética só retornam a um caso especial dos postulados da *Syntaktik*. (Fries, 1822, p. 68)

Com efeito, Fries então apresenta a *Syntaktik*, ou teoria combinatória, como tal ciência básica das formas conectivas:

> *Syntaktik* contém a abstração mais geral que pode ser feita para o conhecimento matemático. Baseia-se unicamente nos postulados do arranjo arbitrário de determinados elementos e em sua repetição arbitrária sem fim. Visto que não conhece axiomas, também não tem teoria própria; suas operações são diretamente

> compreensíveis em si mesmas e em sua apresentação científica tudo depende da flexibilidade de arranjo e designação. (Fries, 1822, p. 70)

A tarefa geral da *Syntaktik* é especificar as combinações que podem se formar a partir de um certo índice, formando o que é chamado "*complexion*". Na prática, as regras da *Syntaktik* são nada menos do que as regras da análise combinatória de Hindenburg. Fries defende que essas operações da *Syntaktik* "intervêm em tudo o que pensamos e conhecemos nas mais variadas coisas da vida, como na ciência":

> As operações sintáticas da imaginação produtiva são as mais gerais de todas e, portanto, afetam as mais diversas coisas na vida, como na ciência, em tudo o que pensamos e conhecemos. Onde existe uma situação na vida que não exige o arranjo e a seleção do melhor arranjo? Por exemplo, toda a arte da memória é de natureza sintática. Na lógica, toda explicação e divisão de um conceito, bem como toda listagem de um sistema de acordo com a forma, é uma operação sintática, e em todo comércio isso é imediatamente evidente. (Fries, 1822, p. 72-73)

As próprias operações aritméticas serão entendidas como casos particulares de operações da *Syntaktik*, de maneira que uma soma é definida pela indexação de valores aos elementos do índice e agrupamentos de combinações que possuem os mesmos valores. Analogamente, a subtração é entendida como a involução desses elementos. Assim, ao definir sua soma aritmética, Fries afirma:

> Um todo composto de partes simples do mesmo tipo é chamado de soma. De duas partes que juntas formam uma soma, cada uma é chamada de diferença ou diferença entre a soma e a outra parte. Essa soma é objeto de aritmética. Mas a soma nada difere da complexion da Syntaktik, com a previsão da semelhança de seus elementos. (Fries, 1822, p. 79)

A partir dessa fundamentação gnosiológica, Fries trará distinções específicas e que considera problemáticas, como a distinção entre o número (*Zahl*) e a grandeza (*Größe*). Assim, uma grandeza, no sentido de Fries, surge apenas posterior à identificação de semelhanças:

> Chamamos as coisas de uma origem ou da mesma espécie se as observarmos de acordo com as propriedades que têm em comum umas com as outras. Se olharmos agora apenas para a semelhança de coisas de um tipo, na medida em que ou são completamente semelhantes ou não levamos em conta as diferenças que existem entre elas, então só resta considerar a diferença de tamanho [*Größe*] (quantidade), a que chamamos diferença numérica [*numerisch*], multiplicidade. (Fries, 1822, p. 77-78)

O número, por outro lado, emergeria do ato da medida e assim se caracterizaria como um elemento relacional entre uma grandeza e sua unidade:

> Medir uma quantidade significa apresentá-la comparando-a com outra, pela sua relação definitiva com outra. Esta relação, porém, é sempre a da combinação de partes iguais. A mente deve extrair diretamente a ideia de uma certa magnitude, a

> medida, da sua percepção e, por meio da forma numérica, pensar na relação de outras magnitudes com a medida. Uma unidade é a parte dada de uma quantidade por meio da qual as quantidades [*Größen*] são medidas. Uma unidade, que é em si mesma uma quantidade, identifica uma medida. Número [*Zahl*] é a representação gráfica da relação específica entre uma quantidade e uma unidade. (Fries, 1822, p. 80)

Essa concepção "relacional" de número, à medida que o distingue de uma grandeza, o "desontologiza", o que permitirá uma concepção distinta sobre alguns casos particulares, como os números negativos:

> Se alguns, como Carnot, encontraram contradições nesta noção de diminuição de números independentes, foi apenas porque confundiram grandeza e número. Não existem grandezas negativas independentes para além dos números; uma grandeza só se torna negativa em relação a outra, mas lidamos facilmente com números decrescentes independentes. (Fries, 1822, p. 124)

De forma semelhante, caberá aqui também o tratamento de números imaginários (*eingebildete Zahlformeln*). Fries apresenta-os inicialmente como uma impossibilidade, ao discutir a contingência da operação inversa às potências, denotando o caso geral $\sqrt[2n]{-a}$.. Porque, no entanto, denotar uma impossibilidade? Com efeito, segundo ele, existirão tipos de cálculo (*Rechnungsarten*) com tais termos que resultam, de fato, em números reais. Esses tipos de cálculo distinguem-se na relação entre o cálculo numérico (*Ziffernrechnung*) e o cálculo de letras (Buchstabenrechnung):

> O cálculo numérico combina os próprios números em seus tipos de cálculo por meio de seus sinais e nunca pode chegar a resultados inaplicáveis para quantidades contínuas de sementes opostas. O cálculo de letras, por outro lado, combina em seus modos de cálculo as próprias operações aritméticas em geral e deve, portanto, proceder em geral como se todas as operações pudessem ser revertidas em geral e completamente. (...) Em outras palavras: as operações de cálculo de letras denotam por si mesmas, além de números, apenas operações sintáticas e, de forma geral, devem ser comparadas como tais. Seu significado aritmético para números reais só pode ser determinado com maior precisão para casos individuais de aplicação. (Fries, 1822, p. 157)

De maneira geral, portanto, observamos que o novo tratamento dado por Fries à fundamentação dos objetos matemáticos o permitiria conceber e destacar problemas conceituais relevantes de sua época. Denotam-se sobretudo os esclarecimentos acerca de números negativos e complexos, e as considerações à convergência de séries, funções e continuidade. Essa mudança fundamental, em direção à uma concepção abstrata do número, não viria sem uma reconceitualização da própria matemática, sua posição e seu papel na teoria do conhecimento. Tais questões assim se identificam não somente na proposta

apresentada por Fries na introdução, como nas práticas de sua fundamentação a partir da *Syntaktik*.

Na próxima seção, abordaremos a obra de outro matemático, Hermann Graßmann, o qual, de maneira semelhante à Fries, discutiria o fundamento da prática matemática em relação à teoria do conhecimento, oferecendo também uma disciplina básica, sobre a qual sua ciência se respalda.

3.2 Hermann Graßmann

Hermann Günther Graßmann (1809-1877) foi um professor secundário e cientista alemão, atuante em diversas áreas do conhecimento, em especial, a linguística, a física e a matemática. Seu pai, Justus Graßmann (1779-1852), um pastor protestante, seria também um professor e cientista. Seriam determinantes no trabalho de Graßmann a influência familiar dos trabalhos não só de seu pai, como também de seu irmão mais novo, Robert Graßmann (1815-1901). Hermann Graßmann seria reconhecido na linguística por suas produções sobre sânscrito, na física por seus trabalhos sobre a teoria das marés e, particularmente, na matemática, através de sua obra *Die Lineale Ausdehnungslehre* de 1844.

Em 1827, Hermann Graßmann iniciaria seus estudos em filologia e teologia em Berlin. Em 1831, qualifica-se a professor de filologia e, não tão satisfatoriamente, a professor de matemática, onde lecionaria, a princípio, apenas nas classes iniciais. Esse fato é notável, uma vez que, como veremos, Graßmann só desenvolveria conhecimentos em matemática tardiamente, e de maneira autodidata. Em 1834, Graßmann qualifica-se em teologia, e em 1836 torna-se professor de alemão e matemática em uma *Bürgerschule* em Stettin, sua cidade natal. Entre os anos de 1839 e 1840, Graßmann preparar-se-ia para o exame de professor pleno em matemática. Esses anos seriam especialmente interessantes ao desenvolvimento de Graßmann, uma vez que aqui desenvolveria sua maturidade matemática, na produção de sua dissertação de 1840 sobre a teoria das marés, cuja abordagem vetorial precederia certos aspectos da obra de 1844 (cf. Lewis, 1996).

A partir de 1840, é possível notar uma cooperação entre Hermann Graßmann e seu irmão Robert. À época, Robert, que desde jovem se dedicaria aos conhecimentos de matemática e física, estaria trabalhando em seu exame admissional à carreira de professor. Seu envolvimento com a filosofia da matemática se daria por exigência da tarefa a ele

atribuída na dissertação do exame. Dado que ambos os irmãos estariam preparando-se às dissertações dos exames admissionais em assuntos correlatos, aponta-se aqui o início da contribuição intelectual entre eles. Em um artigo de 1996, Schubring argumenta que, ao contrário da opinião de outros autores na qual seria Friedrich Schleiermacher (1768-1834) o principal influenciador da concepção matemática de Graßmann, o ímpeto essencial à formação das concepções apresentadas no *Ausdehnungslehre* viria das contribuições de seu irmão Robert - em especial, certas concepções extraídas da obra de Fries (cf. Schubring, 1996). Schubring sustenta ainda que haveriam diversas correlações entre a obra de Fries e a de Graßmann, que apontariam a uma concepção comum dos autores em direção à abstração das formas matemáticas:

> There are several pivotal elements in Fries's philosophy of mathematics which are in structural agreement with Graßmann's conceptions. Fries stands, like so many German philosophers, in the tradition of Kant but he has independently analysed the process of concept formation in mathematics and the sciences. A preeminent task for him is to develop a philosophy of pure mathematics. This means primarily the study of the "laws of the connection forms" ["Verknüpfungsformen"]. And Fries emphasizes: "Mathematics is the complete system of the mathematical forms." Among all abstraction processes, pure mathematics finds its ultimate success in detecting "the pure forms of the composition of things" for the mind (Fries 1822, pp. 49-50). The correspondence between Fries's and Graßmann's conception of mathematics as "Formenlehre," hence, is striking. (Schubring, 1996, p. 66)

Em 1842, Graßmann torna-se professor na Friedrich-Wilhelms-Schule, uma *Realschule* em Stettin. Em 1852, ele se tornaria *Oberlehrer* em Stettin, posição na qual sucederia seu pai e lecionaria por mais 25 anos. Graßmann nunca se tornaria professor universitário, posição a qual se candidataria em 1847 e em 1862, ambas sem sucesso. No entanto, como é sabido, a posição dos professores secundários na Alemanha, à época de Graßmann, permitir-lo-ia uma posição na pesquisa acadêmica (ver seção 2.2).

Em 1844, Graßmann publicaria sua principal obra sobre a matemática: *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*. Nele, Graßmann apresentaria uma nova proposta de fundamentação da matemática, de um ponto de vista conceitual. De forma geral, o *Ausdehnungslehre* apresentaria uma visão essencialmente abstrata dos elementos fundamentais da matemática, sendo, neste sentido, bastante inovador. O livro teria uma fraca recepção, que seria atribuída a sua introdução eminentemente filosófica, aqui rejeitada pela querela estabelecida entre a prática matemática e a filosofia idealista de sua época, além da falta de elementos intuitivos no corpo do texto. É curioso que no prefácio da edição de 1844, Graßmann pareça projetar a consciência dessa possível rejeição:

> De fato, ao apresentar uma nova ciência, para que sua posição e significado possam ser devidamente reconhecidos, é indispensável mostrar de uma vez sua aplicação e sua relação com objetos afins. A introdução também deve servir a esse propósito. Na natureza das coisas, isso é mais de natureza filosófica, e quando o separei do contexto de toda a obra, fiz isso para não assustar imediatamente os matemáticos com a forma filosófica. Pois ainda há uma certa rejeição entre os matemáticos, e em parte não erroneamente, diante das discussões filosóficas de assuntos matemáticos e físicos. (Graßmann, 1844, XV, tradução nossa)

No final da década de 1850, Graßmann trabalharia com seu irmão Robert em uma reformulação do *Ausdehnungslehre*, republicando-o em 1862. Neste sentido, distinguem-se aqui as publicações de 1844 e 1862 pelas denominações *A1* e *A2*. No *A2*, é notável a alteração na estrutura do texto, em particular a completa omissão da introdução de cunho filosófico, bem como uma reestruturação metodológica do texto, em favor de um formato mais próximo à organização proposicional, caraterística do estilo euclidiano. Fica claro que, nesse movimento, Graßmann estaria buscando se adequar e ter uma boa recepção de sua proposta que, novamente, não teria sucesso ao menos na década de 1860.

Como aponta Tobies (1996) a boa recepção e valorização do *Ausdehnungslehre* se daria sobretudo após sua morte, em 1877, a partir da iniciativa de matemáticos como Alfred Clebsch (1833-1872) e Felix Klein (1849-1925). Este último, em particular promoveria a publicação da coletânea de seus trabalhos. Curiosamente, em comparação a outros poucos grandes matemáticos que tiveram a coletânea de seus trabalhos publicados - é o caso de Gauss (após 1870), Riemann (1876), Steiner (1881), Jacobi (1881), Möbius (1885), Borchardt (1888), Dirichlet (1889) e Schwarz (1890) -, este torna-se um fato notável, uma vez que Graßmann não seria ativo na academia ou na universidade (Schubring, 1996, p. XII).

Já no fim do século XIX, seria possível observar um reconhecimento e declaradas influências de Graßmann nas práticas matemáticas. É bem conhecido o fato de que a centralidade da noção de sucessor na fundamentação dos números nos trabalhos de Dedekind e Peano, seriam extraídas do *Lehrbuch der Arithmetik*, livro de Graßmann de 1861. Por outro lado, Graßmann inspiraria a concepção dos fundamentos da matemática para filósofos como Cassirer e Whitehead.

A próxima seção deste texto pretende fazer uma apresentação dos pontos apresentados no *Ausdehnungslehre*, ressaltando sua relevância para uma nova concepção ontológica dos objetos da matemática.

3.2.1 *Die Lineale Ausdehnungslehre*

O *Ausdehnungslehre* de Hermann Graßmann, de maneira geral, pretende apresentar um novo ramo da matemática, a teoria das extensões, a qual ele deriva de uma sistemática do conhecimento científico. Tais distinções serão aqui discutidas e se encontram na introdução do *A1*, entendida aqui como um texto eminentemente filosófico.

Além de deduzir a teoria das extensões, uma das principais ideias de Graßmann é a introdução de uma teoria das formas (*Formenlehre)*, a qual se identificaria a uma disciplina fundamental da matemática, e cujos elementos se mostrariam puramente abstratos.

Em primeiro lugar, Graßmann apresenta uma primeira divisão das ciências, sendo elas reais ou formais:

> A principal divisão das ciências se dá entre o real e o formal. As ciências reais tratam dos seres que são pensados externos à pensabilidade, e sua verdade consiste na correspondência do pensamento com o ser. As ciências formais, por outro lado, têm por objetos os produtos internos do próprio pensamento, e sua verdade consiste na correspondência formal entre os próprios processos da pensabilidade. (Graßmann, 1844, XIX, tradução nossa)

As ciências formais, por sua vez, dividem-se em ciências gerais, relativas à lógica e a dialética, e as particulares, relativas à matemática pura. Conclui-se aqui que a matemática pura se refere aos objetos particulares internos ao pensamento (*Die reine Mathematik ist daher Wissenschaft das besonderen Seins als eines durch das Denken gewordenen).* A matemática é, portanto, uma teoria das formas. Nota-se, logo de cara, que Graßmann entende e apresenta os elementos da matemática como elementos da consistência interna do pensamento, opondo-se, a um sentido ontológico externo ao sujeito do pensamento. Com isso, Graßmann negaria prontamente uma concepção da matemática enquanto ciências das quantidades ou das grandezas:

> O nome "teoria da grandeza" é impróprio para toda a matemática, uma vez que não se encontra uso para a grandeza em um ramo substancial dela, a saber, a teoria combinatória, e mesmo na aritmética apenas em um sentido incidental. Por outro lado, o termo "forma" pode parecer muito ampla, e assim a expressão "forma de pensamento" é mais apropriado; ora, a forma em seu significado puro, desprovida de todo conteúdo real, nada mais é do que a forma de pensamento e, portanto, a expressão é adequada. (Graßmann, 1844, p. XX)

Desta asserção, segue um corolário bastante intrigante. Graßmann declara que a geometria, por consequência desta definição, não faria parte da matemática pura:

> Antes de prosseguirmos com a divisão da teoria das formas, temos que separar um ramo que foi equivocadamente atribuído a ela. Este ramo é a geometria. A partir dos conceitos expostos acima, é evidente que a geometria, como a mecânica, se

> refere a entes reais; para a geometria, este ente é o espaço. Isso é claro, pois o conceito de espaço não pode ser produzido pelo pensamento, mas surge como algo dado. Qualquer um que sustente o contrário deve assumir a tarefa de deduzir a necessidade das três dimensões do espaço das leis do pensamento puro, um problema cuja solução é patentemente impossível. (..) A posição da geometria em relação à teoria das formas depende da relação da percepção do espaço com o pensamento puro. (Graßmann, 1844, p. XX-XXI, tradução nossa)

Esta afirmação é bastante interessante e devemos nos ater a ela um momento. Por um lado, o fato de que Graßmann pretende excluir a geometria do ramo das matemáticas nos mostra o ímpeto e a orientação fundacional proposta no *Ausdehnungslehre*[18]. Nesse sentido, ele não propõe apenas uma sistemática na qual derivará o ramo científico que deseja iniciar, mas uma que revisa o próprio entendimento dos fundamentos constitutivos da matemática. Por outro lado, o argumento apresentado por Graßmann propõe que o espaço é um ente externo à pensabilidade e, dessa forma, a necessidade de suas propriedades não poderia ser deduzida. Isso, portanto, parece concluir que as propriedades do espaço, tal como a tridimensionalidade, seriam contingentes e dependentes da relação estabelecida entre percepção e pensamento puro. A passagem então continua:

> Embora tenhamos acabado de dizer que essa percepção [*Anschauung]* confronta o pensamento como algo dado independentemente, não é com isso afirmado que a percepção do espaço emerge apenas da consideração de objetos sólidos; antes, é aquela percepção fundamental [*Grundanschaauung*] que nos é transmitida pela abertura de nossos sentidos ao mundo sensível, que adere a nós tão intimamente quanto o corpo e a alma. O mesmo ocorre com o tempo e com a percepção do movimento baseada no tempo e no espaço, pelo que se poderia identificar a teoria pura do movimento (forometria) entre as ciências matemáticas tais como a geometria. O conceito de força motriz flui da ideia de movimento por meio do contraste entre causa e efeito. Assim, a geometria, a forometria e a mecânica aparecem como aplicações da teoria das formas às percepções fundamentais do mundo sensível. (Graßmann, 1844, p. XXI, tradução nossa)

Graßmann busca, portanto, distinguir e afastar sua teoria das formas de quaisquer percepções sensíveis. Assim, se por um lado ele levanta a ressalva de que a percepção (*Anschauung)* a qual se refere não é mero registro empírico - mas se refere à própria condição de conhecimento dos objetos da percepção -, a produção de conhecimento a partir delas dependeria de sua relação com o pensamento puro, que aqui independe dessas percepções. A teoria das formas seria, portanto, pura abstração interna, como constata o filósofo Ernst Cassirer:

[18] Não se infere, entretanto, que Graßmann seria pioneiro nesse sentido. A concepção de geometria como aplicação de um ramo anterior (algébrico) da matemática encontra-se no trabalho de Prestet, por exemplo. (cf. Schubring, 2005)

> The goal, which Graßmann set himself, was to raise the science of space to the rank of a universal science of form. The character of a pure science of form is defined by the fact that in it proof does not go beyond thought itself into another sphere, but remains entirely in the combination of different acts of thought. (Cassirer, 1910/1953, p.97)

Esse fato, notável na obra de Graßmann, teria consequência sobretudo à sua abordagem do espaço. Como veremos mais adiante, Graßmann abandonaria o espaço empírico em direção a um espaço abstrato, com *n* dimensões, coerente à sua teoria das formas como uma produção interna do pensamento.

Seguindo com a sistematização do conhecimento em Graßmann, chega-se a uma terceira distinção: a de formas contínuas e discretas. Tal distinção é apresentada aqui de uma maneira um tanto enigmática:

> Cada ente particular do pensamento [forma] pode vir a ser uma das duas maneiras: ou por um simples ato de geração [*Erzeugens]* ou por um ato duplo de posicionar [Setzens] e conectar [Verknüpfens]. Aquilo que surge da primeira maneira é a forma contínua, ou grandeza no sentido estrito, enquanto que o que surge da segunda maneira é a forma discreta ou conectiva. (Graßmann, 1844, pp. XXIII-XXIV, tradução nossa)

A quarta distinção de Graßmann diz respeito à relação fundamental entre as formas, a qual é inerente à existência delas enquanto seres particulares. Tais distinções são aquelas entre o Diferente e o Igual. Assim, Graßmann define por *formas algébricas* aquelas que são gerenciadas pelo Igual, e *formas combinatórias* aquelas que o são pelo Diferente.

Grosso modo, podemos assim entender a sistemática do conhecimento de Graßmann: ciências distinguem-se entre reais e formais, sendo esta distinção característica da natureza externa e interna ao próprio pensamento, respectivamente. As ciências formais dividem-se em gerais, relativas à conhecimentos totalizantes do pensamento, como a lógica, e particulares, relativos à matemática, aqui entendida como uma teoria das formas, ou seja, uma teoria dos entes particulares internos ao pensamento. Tais formas particulares são caracterizadas por duas dicotomias paralelas: a distinção entre formas particulares contínuas e discretas, e a entre formas particulares algébricas e combinatórias. Um esboço do sistema de Graßmann encontra-se na figura 3.1.

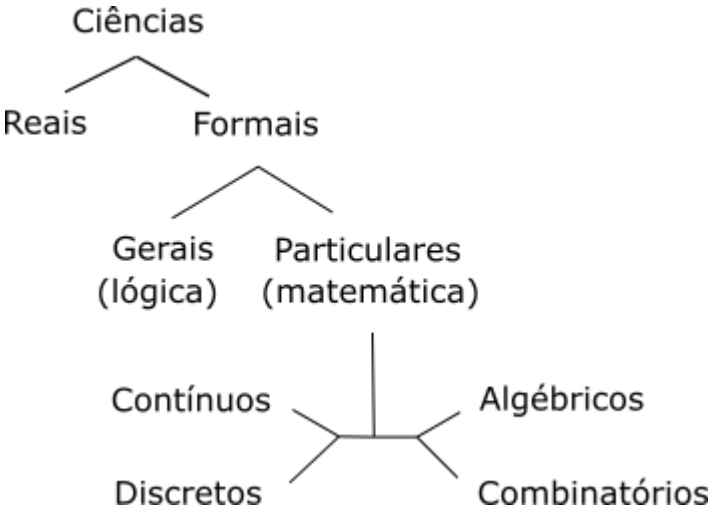

Figura 3.1: o sistema do conhecimento de Graßmann

Graßmann então propõe categorias que emergem das combinações destas últimas distinções e destas categorias, ramos científicos próprios. Assim, formas algébricas discretas referem-se, na sistemática tradicional do conhecimento matemático, referem-se a números, enquanto formas combinatórias discretas referem-se a combinações. Tais formas constituem os objetos, respectivamente, da teoria dos números (*Zahlenlehre)* e da teoria combinatória (*Kombinationslehre*). Formas algébricas contínuas, por sua vez, identificam-se a grandezas intensivas, as quais são tratadas devidamente no Cálculo. Finalmente, formas combinatórias contínuas referem-se a grandezas extensivas. Estas fazem partes de um novo ramo, o qual Graßmann pretende introduzir, e que ele denomina de teoria das extensões (Ausdehnungslehre). Na base das ciências matemáticas, anterior a todas essas, encontra-se a teoria das formas (*Formenlehre)*.

3.2.2 A *Formenlehre* como fundamento da matemática

Graßmann inicia definindo, de maneira um tanto informal, a que ele se refere com a "teoria geral das formas" (*allgemeinen Formenlehre*), como uma espécie de fundamento ou ciência precedente à todos os ramos da matemática:

> Pela teoria geral das formas entendemos aquela série de verdades que se relacionam com todos os ramos da matemática da mesma forma, e que assim assumem apenas os conceitos gerais de igualdade e diferença, conjunção e separação. A teoria geral das formas deve, portanto, preceder todos os ramos especiais da matemática. (Graßmann, 1844, p. 1)

Curiosamente, Graßmann admite que um tal ramo geral na verdade "ainda não existe", ou não teria sido devidamente desenvolvido. Estabelecem-se então dois conceitos básicos: a equidade (*Gleichheit*) e a distinção (*Verschiedenheit*). Esses conceitos apresentam-se de acordo com relações estabelecidas entre objetos, de forma que uma certa dupla pode ser equivalente segundo uma certa relação ou distinta segundo outra. Essas relações não dizem respeito à equidade em si, mas aos objetos que estão sendo comparados. Por exemplo, duas distâncias (*Strecken*) de mesmo tamanho não seriam, assim, absolutamente iguais, mas iguais apenas em tamanho. Define-se então o conceito de equidade: "*Serão iguais aqueles sobre os quais se pode sempre afirmar o mesmo ou, mais genericamente, aqueles que podem ser substituídos um pelo outro em cada juízo.*" (Graßmann, 1844, p. 2)

Graßmann considera então uma segunda oposição, entre a conexão (*Verknüpfung*) e a separação (*Sonderung*). Pela primeira temos uma espécie de operação, sobre a qual duas formas, enquanto termos (*Glieder*) da conexão, geram uma terceira forma resultante (*Ergebniss*). Havendo necessidade de distinção entre os termos, distinguem-se o anterior (*Hinterglied*) do posterior (*Vorterglied*). A conexão denota-se pelo símbolo $\frown$, sendo o resultante entre os fatores a e b denotado por $(a \frown b)$.

Graßmann considera que os tipos de conexões podem ser especificados de acordo com as circunstâncias com as quais elas mantêm o mesmo resultante. Tais circunstâncias se orientam a partir das propriedades da comutatividade e da associatividade. Ele as define separadamente e, a partir da presença de ambas as propriedade, ele define conexões simples (*einfachen Verknüpfungen*), que as possuem:

> Se uma conexão é de tal ordem que se pode, sem alterar o resultado, posicionar os parênteses arbitrariamente no caso de três conexões, e alterar a ordem no caso de duas, assim também no caso de qualquer número de ligações a colocação dos parênteses e a ordem das conexões é indiferente ao resultado. Por uma questão de brevidade, chamaremos a essa conexão, à qual se aplicam as disposições declaradas, uma conexão simples. Já não é possível uma maior determinação do tipo de conexão, se não se voltar à natureza das formas conectadas, e por isso procedemos à resolução da conexão obtida, ou ao procedimento analítico. (Graßmann, 1844, p. 4)

Um procedimento analítico (*analytische Verfahren*) consiste na determinação de um termo de uma conexão a partir do outro termo e de seu resultante. Nota-se que, para uma conexão particular, existem a princípio dois processos analíticos, a determinar os fatores anterior e posterior. Caso essa conexão seja intercambiável, este processo é o mesmo.

Denota-se, de maneira oposta à conexão sintética (*synthetische Verknüpfung*), previamente referida, com o símbolo $\smile$.

Assim, o termo ($a \smile b$) refere-se à forma que em conexão com o fator b gera o fator a, ou seja, ($a \smile b \frown b$)=a. De forma análoga, temos que ($a \smile b \smile c$) refere-se à forma que, em conexão com os fatores c e b, nesta ordem, gera o fator a. Assim, para o caso de conexões simples, temos a dedução da seguinte propriedade:

> Se a conexão sintética for simples, e a correspondente analítica for inequívoca, então, após um símbolo sintético, o parêntese pode ser definido ou omitido conforme desejado. Chamamos então (se esta singularidade ocorre de uma forma geral) a conexão sintética é chamada adição, e a correspondente analítica subtração. (Graßmann, 1844, p. 7)

Em outros termos, o que fica definido por Graßmann em sua teoria geral das formas, são operações abstratas, pelas quais se identificam propriedades fundamentais. Apesar de caracterizadas pela conexão sintética, tais relações fundamentais carecem de uma caracterização particular, como determinações qualitativas das conexões. Tais determinações vêm a ter papel determinante em tais relações, uma vez que orientam as propriedades que estas venham a ter.

O interessante, neste caso, é o fato de que, mesmo que Graßmann venha a canonizar as conexões simples, fica evidente que sua teorização considera a possibilidade de conexões não associativas ou não comutativas. Graßmann não seria o primeiro a fazê-lo, uma vez que em 1770 o trabalho do matemático francês Étienne Bézout (1730-1783) já havia considerado produtos não comutativos (cf. Ferreira, 2021). Bézout, no entanto, trabalha com números "concretos", relacionados à grandezas reais, com naturezas distintas. O que parece diferenciar o trabalho de Graßmann, nesse sentido, é o fato de que ele considera este caso para operações abstratas do pensamento, que antecedem e fundamentam as operações usuais, como este se refere à sua nova ciência, no prefácio:

> Através da nova análise, foi dada a possibilidade de desenvolver um ramo da matemática puramente abstrato; de fato, esta análise, desenvolvida sem pressupor qualquer teorema que já tivesse sido provado em outro lugar, e movida puramente em abstração, era em si mesma uma ciência própria. A vantagem essencial alcançada por esta concepção é, em relação à forma, que todos os princípios que expressavam opiniões sobre o espaço foram agora completamente omitidos, tornando o início tornou-se tão imediato quanto o da aritmética, e, em relação ao conteúdo, que se omite a restrição a três dimensões. (Graßmann, 1844, p. VII)

De fato, operações multiplicativas não comutativas seriam efetivamente abordadas em sua teoria da extensão, cujos objetos e operações, à semelhança do que apresenta para a

aritmética, serão inicialmente definidos em termos das conexões. Curiosamente, podemos entender que, a condição de "outsider" de Graßmann, enquanto um autodidata e com posições desfavoráveis à certas convenções da pesquisa matemática, o permitiriam aceitar essa propriedade com menor estranheza. Com efeito, Graßmann define uma conexão multiplicativa geral, que será indicativa tanto ao produto aritmético quanto aos produtos da teoria da extensão:

> [...] as leis da multiplicação, tal como estabelecidas pela aritmética, que declaram a permutabilidade e compatibilidade dos termos, não decorrem desta relação geral, pelo que também não são determinadas pelo conceito geral de multiplicação. Pelo contrário, na nossa ciência conheceremos tipos de multiplicação em que pelo menos a permutabilidade dos termos não tem lugar, mas em que todas as propostas até agora estabelecidas têm no entanto a sua plena aplicação. (Graßmann, 1844, p. 13)

Novamente, o principal objetivo de Graßmann é introduzir um novo ramo da matemática, o qual opera de maneira distinta dada a natureza de seus objetos. Não é nosso objetivo aqui, contudo, a análise das operações de produto na teoria das extensões. Nos interessa o fato de que, ao construí-las, Graßmann negaria princípios básicos das operações usuais. Para que esses objetos e operações sejam entendidos como matemáticos, é necessário que o próprio corpo de conhecimentos matemáticos os abarque como tal. Ferreira (2021) cita a crítica de Ampère, no qual este condena as operações não comutativas de Bézout de "derrubarem princípios básicos". A superação desse tipo de acepção, em Graßmann, teria de repassar a revisão dos próprios princípios básicos que, na esteira de Fries, tornam-se derivados de uma nova fundamentação.

4 - O neokantismo e a matemática moderna: segunda metade do século XIX

4.1 A emergência da matemática moderna

A segunda metade do século XIX representa um marco de virada na história da matemática tanto por motivos internos, como o aprofundamento das noções de rigor, de fundamentação e de novas perspectivas ontológicas de seus objetos, quanto por motivos externos, como o processo de institucionalização e profissionalização científica de matemáticos do período. O intuito desta seção é apresentar e comentar esses novos elementos internos da matemática, sobretudo a partir de suas produções.

Os tópicos aqui abordados devem contemplar, sem grandes detalhes, as contribuições da matemática do século XIX que sejam representativas dessa "guinada" à matemática pura. Dentre elas, podemos destacar as contribuições de Gauß à teoria dos números, as produções de Dirichlet, Riemann e Weierstrass na teoria de funções e no processo de aritmetização da análise, além da emergência das geometrias não euclidianas e os processo de generalizações com a teoria de grupos e a teoria de conjuntos. Em particular, enfatizamos como essas novas áreas se relacionam com uma visão "relacional" ou "desontologizada", no sentido de aderir às concepções de Gauß sobre uma ciência das relações e, de maneira geral, à emergência de uma matemática pura.

Será preciso, portanto, algumas breves introduções biográficas de alguns personagens do período a fim de localizar seus papéis neste contexto. O caso de Gauß talvez seja o mais evidente, uma vez que, na historiografia da matemática, ele representa uma das maiores personalidades do período. Nascido em 1777 em Braunschweig, na Alemanha, Gauß teria sido um prodígio em sua infância, de forma que se propagam diversas anedotas em torno de seus primeiros anos. Filho único de pais da classe trabalhadora, Gauß seria apoiado financeiramente pelo Duque de Braunschweig e estudaria em Göttingen durante os anos de 1795 a 1798, doutorando-se em 1799 em Helmstedt. No ano de 1801, com apenas 24 anos, Gauß publicaria seu mais conhecido trabalho, *Disquisitiones Arithmeticae*, considerado um marco na teoria dos números. Em 1807, tornar-se-ia professor e diretor do observatório astronômico de Göttingen, posição a qual manteria até o ano de seu falecimento, em 1855.

São diversos os campos de atuação da prolífica pesquisa de Gauß, de forma a serem bem conhecidos seu legado e enorme influência sobre a matemática produzida na Alemanha no século XIX.

Notavelmente, desde o início de seus trabalhos Gauß seria um dos primeiros matemáticos - em particular, o primeiro matemático influente - a defender publicamente a legitimidade das quantidades imaginárias e negativas, desde sua tese doutoral de 1799, sobre a demonstração do teorema fundamental da álgebra. Com efeito, seu ponto de vista contrariaria o estatuto destas quantidades à época, sobretudo no contexto de produção da matemática francesa que, em um retorno ao método sintético ao fim do século XVIII, as considerava "absurdas" ou "impossíveis". O contexto filosófico alemão, no entanto, possibilitaria que esse entendimento fosse gerado e propagado de forma distinta, como aponta Roque (2012):

> As discussões sobre o estatuto dos números negativos durante o século XVIII e início do XIX na França mostram que somente números absolutos eram admitidos como objetos da matemática. (...) Na Alemanha, a influência da filosofia de Kant fazia com que os matemáticos se baseassem em concepções epistemológicas diferentes dos franceses. (Roque, 2012, p. 449)

Uma abordagem significativa à concepção dos números é dada, na Alemanha, por um professor de um *Gymnasium* em Danzig: Wilhelm Förstemann (1791-1836). De fato, Förstemann apresentaria uma reflexão epistemológica em torno do conceito de número bastante inovadora para sua época. Com efeito, como mostra Schubring (2005), o passo decisivo das ideias de Förstemann se daria pela separação conceitual entre a grandeza e o número. Para Förstermann, grandezas são "linhas, extensões, planos, sólidos, pesos, extensões do tempo, conjuntos de pessoas ou de livros''. Números, no entanto, são apenas expressões das relações entre grandezas da mesma espécie" (Föstemann, 1817, p. 1 apud Schubring, 2005, p. 499). O que impressiona na abordagem de Förstemann, na verdade, é sua abordagem conceitual, investindo na fundamentação de noções de oposição nas operações, o que encontraria disseminação posteriormente.

Assim, a compreensão dos números negativos levaria em conta, de forma geral, um novo entendimento do próprio conceito de número. De fato, a compreensão de oposição entre termos de uma contagem, como a oposição entre lucro e prejuízo, apesar de importante, não basta para a compreensão e operação do conceito. Schubring (2005) mostra que esse entendimento, apenas, levaria a casos em que quantidades opostas seriam

qualitativamente heterogêneas, de maneira a gerar um problema operacional. Na verdade, seria preciso considerar que a contagem produza não substâncias ou objetos em si mesmos, mas relações entre os objetos contados, e nesse ponto avançaria Gauß. A partir da noção de número como uma relação e não como um objeto, fará sentido falar não apenas de números negativos, mas da noção de um conjunto homogêneo, que inclua positivos e negativos em uma mesma natureza numérica.

Essas mesmas considerações permitirão a Gauß também reconhecer a legitimidade de números complexos. A própria denominação proposta por Gauß - números complexos ao invés de números imaginários - parece mostrar uma preocupação com sua autenticidade, buscando acabar com sua contraposição ao real (Grimberg, 2014, p. 149). Em um artigo de 1831, sobre resíduos biquadráticos, ele identifica a ambivalência entre a extensão dos domínios numéricos e o processo de generalização da álgebra. Nisto, ele constata na abstração a característica essencial da matemática, de forma que as extensões desses domínios fariam parte do progresso teórico e científico da matemática: números inteiros seriam suplementados por frações, números racionais por irracionais, positivos por negativos e números reais por números imaginários (Gauß, 1831, p. 175).[19]

Assim, após considerações sobre números negativos, acima citadas, ele apresentará os números $+\,i$ e $-\,i$ a partir de um plano, esquadrinhado em um sistema de retas paralelas, sobre os quais as interseções representarão os termos numéricos. Com efeito, dado um certo ponto A, ele é cercado por quatro pontos vizinhos: B, C, B' e C'. A relação de A com qualquer um de seus vizinhos, digamos o ponto B, pode ser representada pelo número $+\,1$, de modo que esta relação determina também a relação de A com o oposto B', que será representada por $-\,1$. A relação entre A e C, por outro lado, não poderá ser representada por número real, sendo ela identificada pelo complexo $+\,i$. Por conseguinte, $-\,i$ representará a relação entre A e C'. Nota-se, portanto, que a "existência" dos números, nessas considerações, está associada à sua possibilidade e definição enquanto relação de objetos. Gauß observa ainda que a escolha de B como referencial inicial é meramente arbitrária, o que confirma este caráter relacional. Esta justificativa, portanto, integraria uma nova visão geral sobre os objetos da matemática:

[19] Vale notar que tal artigo é publicado na revista *Anzeigen*, que reunia artigos de todos os domínios científicos. Isto explicaria a rara exposição filosófica desta publicação, que assim distingue-se do que seria comumente feito por Gauß. (cf. Grimberg, 2014)

> Na tentativa de justificar os números negativos e imaginários como relações abstratas, Gauß formulou argumentos para defender o novo caráter teórico da matemática, que não deveria, segundo ele, se basear na realidade das substâncias e sim na concepção relacional dos objetos matemáticos: "O que é contado não são substâncias (objetos imagináveis por si mesmos), mas relações entre dois objetos." As quantidades negativas e complexas passam a ser objetivas, contudo, conforme a definição de objetividade proposta por Gauß, elas serão entendidas como relações. Na realidade, esse ponto de vista participará da ideia mais geral de Gauß sobre a realidade matemática. (Roque, 2012, p. 452)

Veremos que essas ideias gerais se manifestariam, também, em outros objetos tratados na matemática, como o tratamento da teoria das funções e a emergência das geometrias não euclidianas, configurando uma mudança epistemológica sobretudo na segunda metade do século XIX. Na verdade, em termos de recepção, tais ideias acerca dos números só teriam grande impacto a partir das décadas de 1860 e 1870. Um dos primeiros trabalhos a, de fato, se basear no conceito de número abstrato seria o texto *Theorie der complexen Zahlensysteme*, de 1867, de Hermann Hankel (1839-1873). Em parte, em oposição à atitude mais reservada de Gauß, podemos atribuir o desenvolvimento e divulgação dessas ideias e modos de produzir matemática, por um lado, à escola de Berlin e, por outro, à presença de Dirichlet em Göttingen.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) estudaria em Paris, nos anos 1820, retornando à Prússia em 1826. Ele tornaria-se professor na Universidade e na Academia Militar de Berlin, em 1831, onde ficaria até 1855, quando assumiria uma cadeira em Göttingen, em função da morte de Gauß, tornando-se seu sucessor. Roque (2012) assinala a chegada de Dirichlet em Göttingen como um marco para as práticas da universidade, a ressaltar a junção entre ensino e pesquisa, característica das universidades prussianas desde o século anterior:

> A presença de Dirichlet, juntamente com Riemann e Dedekind, que se via como seu discípulo, mudaria a matemática praticada na Universidade de Göttingen. Os três inspiravam-se em Gauss e propunham uma visão abstrata e conceitual dessa disciplina. Apesar das diferenças entre seus campos de pesquisa, eles convergiam nas preferências metodológicas e teóricas e podem ser considerados um grupo. (Roque, 2012, p. 455)

Dirichlet tornar-se-ia conhecido particularmente por suas contribuições à teoria das séries de Fourier e por sua definição moderna do conceito de função. Desde a definição de Bernoulli, em 1718, o conceito de função sofreria diversas extensões, à vista dos contextos nos quais estaria inserido. Em particular, questões físicas como o problema das cordas vibrantes tensionariam decididamente o conceito, contribuindo para sua evolução. A

subordinação de uma função à sua expressão analítica, que fazia parte de seu estatuto à época, restringiria, em parte, a abrangência das condições as quais uma função poderia ser admitida. Em 1807, Joseph Fourier (1768-1830) submete um artigo à Academia de Ciências de Paris, acerca da propagação do calor, no qual afirmava a expressão de qualquer função sob uma série trigonométrica, o que contestaria diversos entendimentos sobre as funções à época. Em 1829, Dirichlet então publicaria um artigo investigando as condições sobre as quais uma função poderia ou não ser expressada por uma série trigonométrica, investigando suas condições de integrabilidade, e apresenta uma função que nega esta possibilidade, não sendo essa integrável, derivável ou contínua em qualquer ponto. De forma geral, o que aparece como relevante na noção de função de Dirichlet, é que ela independe de qualquer recurso geométrico (Schubring, 2005, p. 559).

O tipo de discussão proposta por Dirichlet, tensionando os limites conceituais dos objetos internos da matemática, seria bastante representativa do traço da matemática produzida na Alemanha na segunda metade do século XIX. Com Riemann e Dedekind, essa tendência seria reforçada, com construções teóricas mais internas, sem recurso a representações. Essa ausência de referência externa pode ser vista como a inauguração de uma nova fase da abstração, que transformaria definitivamente a matemática em matemática “pura” (Roque, 2012, p. 460).

Por volta da década de 1860, a Universidade de Berlin alcançaria grande destaque em relação às outras universidades alemãs, sobretudo a partir da atuação de Weierstraß e seus colaboradores, que suscitariam sobre a matemática uma nova visão sobre a análise. Recebendo, em 1854, um título de doutor honorário, Karl Weierstraß (1815-1897) alcançaria uma cadeira, em 1856, em um colégio técnico em Berlin e, posteriormente, tornar-se-ia professor da *Friedrich-Wilhelms-Universität*, após 15 anos lecionando como professor secundário. Na década de 1860, ele já constava de grande prestígio na Alemanha, tornando-se uma grande referência em Berlin. Roque (2012) destaca o papel de Weierstraß, sobretudo a partir de seus seminários na universidade de Berlin a partir de 1860, que estabeleceriam um modo distinto e rigoroso de produzir matemática em torno da teoria de funções. Desta "escola de Weierstraß", destacam-se importantes matemáticos do período, como Hermann Schwarz (1843-1921), Georg Frobenius (1849-1917), Ludwig Stickelberger (1850-1936), Wilhelm Killing (1847-1923), Hans von Mangoldt (1854-1925), Arthur Schoenflies (1853-1928), Ernst Kötter (1859-1922) e Friedrich Schottky (1851-1935).

Em um conhecido artigo de 1896, bastante retrospectivo, Felix Klein aponta para uma tendência da matemática da segunda metade do século XIX, encabeçada por Weierstraß e sua escola, que ficaria conhecida como o programa de aritmetização da análise. Esse programa consistiria na fundamentação da análise a partir da construtividade dos domínios numéricos, abandonando a fundamentação geométrica do cálculo infinitesimal e instaurando novos padrões de rigor.

Representativo desta escola de Weierstraß seria o trabalho de Georg Cantor (1845-1918) sobre números irracionais. Seu artigo de 1874, "*Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahle*n" seria considerado um marco da teoria dos conjuntos. São bem conhecidas também suas asserções em torno de conjuntos infinitos, a partir de seu artigo de 1883, "*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre"*, no qual ele desenvolve uma teoria de números cardinais transfinitos. Associado à pesquisa de Cantor está também o trabalho de Dedekind, a partir do livreto *"Stetigkeit und irrationale Zahlen"*, de 1872, na qual introduz a noção de continuidade, definida em termos de "cortes", e do livro "*Was sind und was sollen die Zahlen?"*, de 1888, onde ele apresenta uma construção dos números naturais a partir da teoria de conjuntos[20].

Tais ideias, contudo, gerariam grande resistência e debate no fim do século. São bem conhecidas a resistência de Leopold Kronecker (1823-1891) às ideias de Cantor, bem como os paradoxos da teoria de conjuntos, como os fornecidos por Burali-Forti e Russell. Esse ambiente de controvérsia levaria ao que alguns historiadores nomeiam uma "crise" dos fundamentos, bastante presente sobretudo no fim do século XIX e início do século XX. Nesse sentido, a efervescência em torno dos fundamentos incitam descrições desse período como a "idade do rigor", sobretudo em relação à análise, que constariam ainda da emergência de programas diretamente filosóficos da matemática, como o logicismo de Russel, o intuicionismo de Brouwer e o formalismo de Hilbert.

Por outro lado, também na geometria do século XIX ocorreriam grandes controvérsias, marcadas por obstáculos epistemológicos. Com efeito, as geometrias não euclidianas (GNEs), enquanto empreendimento teórico particularmente desafiador à tradição matemática, sofreriam grande resistência. Imre Tóth (2011) mostra que, ao contrário do que diz parte da historiografia, esta oposição às GNEs não constaria apenas de "filósofos ignorantes em matemática" ou de "matemáticos esclerosados", mas de

[20] Essas publicações estão um pouco melhor exploradas na seção 4.2.4.

intelectuais de sólida formação. Segundo ele, mesmo grandes matemáticos como Cayley, um grande nome da matemática pura inglesa, apresentariam ressalvas com as GNEs. Tóth assim distingue os momentos de *criação* das GNEs de sua *descoberta*, de forma que esta segunda se identificaria com a sua recepção e integração ao edifício matemático, ocorrida mais de quarenta anos depois, entre as décadas de 1870 e 1880:

> Muitos geômetras tinham já demonstrado teoremas não euclidianos e por conseguinte tomado conhecimento da estrutura e propriedade do futuro espaço não euclidiano. Mas, embora conhecida, a GNE não era reconhecida. Filósofos e matemáticos consideravam que o espaço não euclidiano era uma pura impossibilidade e não concordavam nem na verdade nem na realidade da GNE. Nesse sentido, podemos dizer que o conhecimento do espaço não euclidiano precedeu sua existência. (Tóth, 2011, p. 38)

É bem conhecido que este movimento de criação das GNEs se daria na primeira metade do século XIX, com os trabalhos independentes de Nicolai Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) e Gauß, este último não tendo publicado a respeito. Estes trabalhos remetem-se às numerosas tentativas de demonstração do quinto postulado de Euclides, o que levaria à discussão de sua contingência. O caminho às geometrias não euclidianas, portanto, constaria da negação do quinto postulado e da decorrente construção de uma geometria logicamente consistente. Em termos de recepção, no entanto, as GNEs só alcançariam uma abrangência a partir da década de 1870, a partir dos trabalhos de Riemann, a influência de Helmholtz e com Felix Klein, a partir do programa de Erlangen.

Durante os anos antecedentes, e mesmo após a década de 1870, as GNEs sofreriam forte resistência. Tóth (2011) cita a fala de Mikhail Ostrogradski (1801-1862), considerado um dos maiores matemáticos da Rússia, que rejeitaria a geometria de Lobachevski em um relatório de 1834, considerando-a incompreensível e marcada por erros:

> Geometria imaginária? Por que com efeito não se imaginar que o preto é branco, o quadrado redondo e a soma dos ângulos do triângulo menor que dois retos? Pergunta-se porque se escreve e sobretudo se publica tais fantasmagorias. O verdadeiro alvo do sr. Lobatchevski foi certamente jogar uma farsa aos matemáticos. E por que então o título “os Fundamentos da geometria”, e não “a Sátira da geometria” ou “a caricatura da geometria”? (Ostrogradski, 1834 apud Tóth, 2011)

Também Bolyai sofreria diversas críticas, sobretudo de seu pai, Farkas Bolyai (1775-1856), um grande perito no problema das paralelas. Tóth cita ainda relatos "irônicos e malevolentes" publicados na imprensa alemã sobre a habilidade de Lobachevski. Parece plausível, portanto, o receio de Gauß quanto a publicações sobre as GNEs. Em correspondência com Farkas Bolyai sobre o trabalho de seu filho, Gauß refere-se a já

conhecer inteiramente o tema. Não teria ele publicado em receio à "gritaria dos ignorantes", como diz numa carta a Bessel, em 1829. Também viria de Gauß a recomendação, em 1842, de Lobachevsky para a *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften*, a sociedade científica de Göttingen.

É interessante notar como as GNEs impactam a relação entre matemática e realidade, de maneira a localizar a posição de Gauss frente a essa relação. É notável que as críticas direcionadas às GNEs se refiram pejorativamente a elas como "imaginárias", "transcendentais" ou "pseudo-ciências". Tóth expõe ainda as exposições materialistas de Eugen Dühring, que considerava as GNEs como "insanidade demencial, semi-poesia e total absurdo, produto da alucinação matemática, teoremas e figuras místicas e delirantes de um pensamento doentio". Certamente, tais críticas não buscam apenas preservar a tradição euclidiana, mas uma noção específica de produção científica, centrada numa relação ontológica da matemática com a realidade.

A partir de 1868, com a publicação da *Habilitationsschrift* de Riemann e de 1872, com o *Erlanger Programm* de Felix Klein, as GNEs viriam a iniciar sua fase de *descoberta*, como descreve Tóth, integrando-se ao corpo teórico matemático de maneira mais efetiva. Klein viria a propor a unificação das diferentes geometrias a partir da teoria de grupos, desenvolvida por ele juntamente com Sophus Lie. Nos termos de Klein, uma geometria, de forma geral, seria definida por um espaço S e um grupo G de transformações, de forma que diferentes geometrias eram relacionadas a diferentes espaços e transformações.

Segundo Cassirer (1910/1953), as GNEs tensionariam - e seriam resolvidas - de formas distintas nos campos da filosofia e da matemática, por oferecerem problemas distintos: o primeiro no campo ontológico, e o segundo no campo lógico-estrutural. Essa separação, na verdade, parece também sintomática dessa nova maneira de assumir a matemática. Klein, ao se referir à questão ontológica, é bem enfático neste afastamento:

> Completamente independente dos pontos de vista desenvolvidos é a questão de quais as razões que apoiam o axioma dos paralelos, se queremos considerá-lo como absolutamente dado - como alguns querem - ou como apenas provado aproximadamente pela experiência - como dizem outros. Se houver razões para assumir esta última, então as investigações matemáticas em questão fornecem-nos um guia sobre como devemos então construir uma geometria mais exacta. Mas a questão é obviamente filosófica, que diz respeito aos fundamentos mais gerais do nosso conhecimento. O matemático enquanto tal não está interessado nesta questão; ele não quer que as suas investigações sejam consideradas como dependentes da resposta que pode ser dada à pergunta de um lado ou do outro. (Klein, 1872, p. 96, tradução nossa)

Com efeito, após a década de 1870, os matemáticos alemães comandariam o desenvolvimento da teoria de grupos, bem como a teoria de Galois (Grattan-Guinness, 1998, p. 533), que teriam um papel de síntese sobre diversos trabalhos da álgebra e da geometria, além dos trabalhos na área de teoria de funções.

No campo da filosofia alemã, nesta segunda metade do século XIX, emergiria o movimento filosófico neokantiano, em reação ao idealismo alemão e promovendo um retorno aos princípios da filosofia de Kant. Tal movimento seria dominante na filosofia alemã até o início da segunda guerra mundial, tendo como precursores autores como Hermann von Helmholtz (1821-1894), Eduard Zeller (1814-1908), Kuno Fischer (1824-1907), Friedrich Lange (1828-1875) e Otto Liebmann (1840-1912).

A filosofia neokantiana seria bastante influente academicamente na Alemanha, sobretudo após a década de 1870 (Heis, 2018). Seus integrantes ocupariam cargos de importância nas universidades, tendo influência no currículo e na formação de diversos filósofos proeminentes do século XX, como é o caso de Carnap, e Reichenbach.

De forma geral, o movimento neokantiano seria composto de escolas cujas distintas fundamentações as distanciam de uma unidade concisa e homogênea. Suas doutrinas diferiam e não raramente se antagonizavam em certas posições. Ainda assim, é possível concebê-las a partir de seus elementos comuns, sobretudo no que diz respeito à defesa, renovação e extensão da filosofia kantiana, sua oposição ao hegelianismo e seus profundos estudos referentes à filosofia da ciência, a teoria do conhecimento e a história da filosofia.

Dos grupos de filósofos neokantianos alemães podemos destacar a Escola de Baden, centrada nos nomes de Wilhelm Windelband (1848-1915) e Heinrich Rickert (1863-1936), a escola de Marburg, representada pelos nomes de Hermann Cohen (1842-1918), Paul Natorp (1854-1924) e Ernst Cassirer (1874-1945) e, em Göttingen, a escola Neo-Friesiana, centrada na figura de Leonard Nelson (1882-1927). Neste trabalho, falaremos sobre as duas últimas, em especial, sobre a filosofia de Cassirer, da escola de Marburg, e de Leonard Nelson, precursor de uma revitalização da filosofia de Jakob Fries.

4.2 Leonard Nelson

Em uma palestra em 1903, o matemático Gerhard Hessenberg (1874–1925) evidenciaria, na matemática, a necessidade de uma revisão crítica de seus pressupostos. No

sentido de Hessenberg, uma matemática crítica deveria empreender então três tarefas: demonstrar a consistência lógica dos sistemas axiomáticos, deduzir os axiomas matemáticos e determinar a natureza da origem do conhecimento matemático. (Hessenberg, 1904, 21-22,25-28 apud Gregory, 1983)

A versão impressa do discurso, publicada em 1904, conteria uma nota ressaltando que um estudante de filosofia de Göttingen havia escrito a Hessenberg, alertando que um tal programa já teria sido empreendido no início do século XIX, referindo-se aos trabalhos de Jakob Fries. Esse estudante de filosofia era Leonard Nelson, que no ano de 1903 inaugurava, em Göttingen, uma escola de pensamento neo-Friesiana.

Leonard Nelson (1882-1927) iniciaria seus estudos doutorais em filosofia e matemática, em 1901, na Universidade de Berlim, cidade onde nasceu. É notável, em sua família, a ascendência de grandes pensadores alemães: ele era bisneto do matemático Peter Gustav Lejeune Dirichlet (185-1859) e descendente do filósofo iluminista Moses Mendelssohn (1729-1786). Em 1903, Nelson muda-se para Göttingen, onde conclui seu doutorado no ano seguinte, com uma dissertação sobre Fries intitulada *Jakob Friedrich Fries und seine jüngsten Kritiker*.

Descrito como um jovem controverso e agitador, Nelson teria tido dificuldades iniciais na carreira em Göttingen. A antipatia de grandes figuras da faculdade de filosofia, como Edmund Husserl (1859-1938), teria incorrido na rejeição de sua *Habilitation* em 1906, que só seria aceita em 1909 após intervenção de David Hilbert (1862-1943), com quem desenvolveria amizade e parceria intelectual. Constance Reid, uma biógrafa de Hilbert, descreve este início de relação entre os dois:

> One young friend of long standing was Leonard Nelson, a philosophy docent 20 years Hilbert's junior. Their acquaintance had begun several years earlier when Nelson, having received his doctor's degree at Berlin, was attempting to habilitate at Göttingen. Nelson was a young man with a strong leaning toward controversy, personal, philosophical, and political. He had incurred the dislike of Husserl, the philosophy professor; and his habilitation thesis was rejected by the majority of the Philosophical Faculty, which also included the mathematicians. Afterwards, when Nelson had received the bad news and was sitting dejectedly in his room, there was a knock on his door. "And to my astonishment," he wrote to his parents, "there was Hilbert in his own person. He invited me to supper at his house...." In the next letter he reported, "Hilbert is 'racking his brains' how we can get my habilitation paper accepted." As it turned out, this project had taken even Hilbert several years; but now Nelson was a docent and he and the professor were frequently seen "walking the wall" together, deep in discussion of that area of knowledge where philosophy, mathematics and logic meet. (Reid, 1986, p. 122)

Em 1919, também com o apoio de Hilbert, Nelson torna-se professor em Göttingen. Nesse ínterim, apesar de ser uma figura controversa e mal vista por diversos filósofos, Nelson se tornaria uma espécie de referência à filosofia da matemática em Göttingen. É de se notar que a rede de relações de Nelson incluía grandes matemáticos de sua época Paul Bernays (1888-1977), Richard Courant (1888-1972) e Felix Klein (1849-1925), além do já citado Hilbert, mas também cientistas como o bioquímico Otto Meyerhof (1884-1951), e filósofos como Rudolf Otto (1869-1937) e Kurt Grelling (1886-1942). Muitos desses nomes tornar-se-iam participantes ativos de sua escola neo-Friesiana.

Nelson seria também um intenso ativista político. Em 1917, em meio a Primeira Guerra, Nelson fundaria a *Internationale Jugendbund* (IJB) juntamente com Minna Specht. Ele se filiaria brevemente ao Partido Social Democrata (SPD) em 1923, de onde seria expulso em 1925. Funda então o *Internationalen Sozialistischen Kampfbund* (ISK), uma organização socialista integrada principalmente por intelectuais, e que teria atuação direta na resistência alemã contra a emergência do nazismo na década de 1930.

Em 1922 fundaria também a *Philosophisch-Politische Akademie* (PPA), que teria sua sede no centro de educação rural[21] *Walkemühle*, em Melsungen, a partir de 1924. A academia funcionaria como uma espécie de comuna e quartel da ISK, sobre a qual se desenvolveriam ideias educacionais alinhadas à filosofia de Nelson, a partir de seu Método Socrático. Em 1933, com a ascensão do nazismo alemão, haveria a dissolução da PPA, bem como a expropriação de sua sede pelo governo. Após a Segunda Guerra, em 1949, a PPA seria refundada por antigos membros, de forma que os ideais da associação ainda influenciariam as reformas educacionais da década de 1960 (Schubring, 1981, p. 25).

Em meio a seu legado intelectual e político, Nelson viria a falecer precocemente, ainda no ano de 1927, em decorrência de uma pneumonia. Nelson sofria de insônia, o que explicaria em parte sua intensa produção e seria uma das causas para seu falecimento.

4.2.1 A filosofia neofriesiana

O trabalho filosófico de Leonard Nelson concentra-se sobre sua filosofia crítica, orientada a partir de Kant, mas sobretudo por um resgate e extensão da filosofia de Jakob Fries. Entre suas contribuições à filosofia da matemática, nos interessam dois textos: o primeiro, publicado em 1905 e intitulado "*die Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung*

[21] No alemão, *Landerziehungsheim.*

der mathematischen Gewissheit", e o segundo, publicado em 1928, "*Kritische Philosophie und mathematische Axiomati*k"[22]. Além disso, é notável sua colaboração sobre o trabalho de Hilbert, que será identificada em seu programa axiomático das primeiras décadas do século XX.

No primeiro artigo, de 1905, Nelson discute diretamente a emergência das geometrias não euclidianas, no sentido de debater seu impacto sobre a produção de verdades matemáticas. De certa forma, Nelson aqui insere-se em um intenso debate acerca do tema, uma vez que datam dessa década a axiomática de Hilbert, bem como a emergência dos paradoxos de Russell. Além disso, muito se afirmava, desde o surgimento das GNEs, sobre a tensão que estas causariam sobre a doutrina de Kant. Este é o primeiro texto de Nelson que busca, portanto, adequar a filosofia de Kant e Fries a estes novos objetos da matemática.

Logo no início do texto, Nelson apresenta e localiza o problema da origem da certeza matemática como de interesse permanente da tradição filosófica aristotélica. Segundo esta, o rigor e a certeza do conhecimento matemático, provenientes de seu caráter lógico e puramente intelectual, seriam objetivo também da tradição filosófica, que tentaria proceder da mesma maneira desde Aristóteles. O impacto da filosofia kantiana sobre tal tradição recairia justamente no fato de que a origem desta certeza não poderia vir da ordem lógica ou intelectual da matemática ou, em outras palavras, do abandono da pressuposição de que a matemática seria um saber analítico.

Por outro lado, a percepção sobre a qual se baseia o conhecimento matemático não poderia ser empírica, uma vez que esta tem apenas a capacidade de gerar conhecimentos contingentes. Sendo o saber matemático um saber necessário, a matemática deve basear-se em outro tipo de percepção, a que Kant chama de percepção/intuição pura. Com efeito, recapitulam-se aqui as conclusões kantianas sobre o saber matemático: os juízos da matemática não pertencem à lógica nem à experiência sendo estes, em terminologia kantiana, sintéticos a priori. Com efeito, a certeza matemática teria sua origem não no rigor de sua forma lógica, mas na fundamentação de suas premissas, provindas da intuição pura:

> A razão da evidência dos conhecimentos matemáticos, por um lado, e da sua estrita necessidade, por outro, reside na peculiaridade da sua fonte de conhecimento, que une a sensibilidade [*Anschaulichkeit*] e a aprioridade [*Apriorität*]. [...] Pois a aplicação bem-sucedida deste método já pressupõe para a sua possibilidade a fonte

[22] Utiliza-se aqui a tradução inglesa, encontrada na compilação "*Socratic Method and Critical Philosophy: Selected Essays by Leonard Nelson"*, de 1949.

> de reconhecimentos particulares à matemática. A verdadeira razão para a certeza matemática reside na natureza desta fonte primordial de reconhecimento, na percepção pura [*Reine Anschauung]*, e não na forma lógica das deduções. (Nelson, 1905, p. 381, tradução nossa)

Dadas as devidas introduções ao debate kantiano, Nelson então traz uma nova questão: a discussão sobre a independência entre as premissas matemáticas. Segundo os postulados da lógica, a quantidade de premissas em um sistema axiomático deveria ser a mínima possível. Esta questão teria sido tensionada na matemática sobretudo a partir do quinto postulado de Euclides. Esse contexto teria, segundo Nelson, levado Lobachevsky a desafiar as tentativas de demonstração do quinto postulado a partir de sua negação, mas na medida de provar sua independência. O desenvolvimento da geometria de Lobachevsky seria, portanto e em primeiro lugar, uma tentativa de demonstração de inconsistência interna de uma geometria em contradição com o quinto postulado de Euclides, o que, em outras palavras, seria uma prova convincente de sua impraticabilidade (Nelson, 1905, p. 383). No entanto, o que Lobachevsky teria encontrado seria a realização de uma geometria de forma sistemática sem, no entanto, encontrar contradição lógica em suas conclusões.

O sucesso da geometria de Lobachevsky e posteriormente a de Riemann, seria então o primeiro e clássico exemplo de uma investigação crítica dos fundamentos da matemática a partir de um método estritamente lógico.

> Desde Lobachevsky, Gauß e Riemann, a aplicação estendida deste método levou à fundação de uma nova disciplina da matemática, extensiva e independente. Em tempos recentes, o mesmo princípio de investigação foi também alargado com sucesso aos fundamentos da aritmética[23]. Aqui, a prova de independência é realizada através do estabelecimento de "sistemas de números complexos", ou seja, provando a inconsistência lógica de um sistema de números que não preenche todos os requisitos do sistema completo de axiomas aritméticos. (Nelson, 1905, p. 385, tradução nossa)

A discussão feita aqui por Nelson então, finalmente, adentra a polêmica entre as questões levantadas pela emergência das GNEs e a filosofia de Kant:

> É bem sabido que surgiu uma disputa feroz sobre esta questão desde a publicação do trabalho de Helmholtz sobre o assunto. Esta disputa diz respeito principalmente à relação das novas investigações matemáticas com a doutrina de Kant de julgamentos sintéticos a priori. Por um lado, pensava-se que a doutrina de Kant sobre a origem puramente conceptual dos axiomas podia ser refutada com base na geometria não euclidiana, enquanto por outro lado, acreditava-se que todo o empreendimento da geometria não euclidiana tinha de ser rejeitado com base na doutrina de Kant. Após as exposições precedentes da doutrina kantiana, por um

[23] Nelson claramente se refere aqui à escola de Göttingen, e ao programa de Hilbert, o qual desde 1904 se propõe a fundamentar axiomaticamente a aritmética e a matemática de forma mais geral. Para além do que já foi visto, veremos que Nelson se aproximará essencialmente desta abordagem.

> lado, e do método de geometria não euclidiana, por outro, não encontraremos qualquer dificuldade em eliminar os mal-entendidos que obscurecem a questão em disputa, e assim chegar a uma solução extremamente simples para o problema. (Nelson, 1905, p. 386, tradução nossa)

Sobre esta discussão, é notável a maneira com a qual Nelson se refere ao problema, reduzindo a complexidade de sua solução. Com efeito, deve-se ter em mente as tensões existentes entre filósofos e cientistas desde a segunda metade do século XIX. O tópico das geometrias não euclidianas, em particular, sofreriam especial resistência de ambos os lados, ressaltada por Tóth (2011) e aqui discutida na seção 4.1. No entanto, tendo Nelson uma aproximação com os matemáticos e cientistas da escola de Göttingen, não é surpreendente que ele trate com certa jocosidade aquilo que considera um mal entendido dos filósofos de sua época, uma vez que isso refletiria a posição dos matemáticos perante os problemas propostos pela filosofia.

Desse modo, o argumento de Nelson sobre as tensões entre a filosofia kantiana e as geometrias não euclidianas é o de que tais controvérsias se originariam de uma má interpretação das conclusões de Kant. Segundo ele, tais interpretações concluiriam que a natureza necessária dos axiomas da geometria, afirmada por Kant, teriam por consequência direta a impossibilidade de uma geometria não euclidiana, uma vez que o oposto do necessário seria o impossível. O erro desta conclusão estaria na rasa interpretação do termo "impossível":

> A impossibilidade do oposto de uma proposta pode ter a sua razão no facto de o seu oposto conter uma contradição interior, ou seja, que a negação do seu conceito predicado contradiz a definição do seu conceito de sujeito. Este é o caso da negação de julgamentos analíticos. Mas a impossibilidade do oposto de uma proposta pode também dever-se ao facto de a sua negação contradizer alguma outra verdade, caso contrário já estabelecida, por exemplo, a opinião que temos sobre o objecto. Este último é, evidentemente, o caso da negação dos julgamentos sintéticos. A necessidade do primeiro tipo é de natureza puramente lógica e pertence exclusivamente aos juízos analíticos. A necessidade do segundo tipo é de natureza sintética e de modo algum implica a impossibilidade lógica do oposto. (Nelson, 1905, p. 387, tradução nossa)

Retirado o mal entendido lógico sobre as geometrias não euclidianas, Nelson traz à discussão as suas possibilidades imaginativas, ou sua proximidade da percepção. Ele faz então uma distinção entre o que é imaginável daquilo que faz parte de uma "imaginação sensível":

> Se compreendermos o pensamento pela imaginação, consideramos tudo como imaginável que não envolve uma contradição lógica. Mas se for necessária sensibilidade para a possibilidade de imaginação, então, para chamar uma estrutura matemática imaginável, teremos de exigir a viabilidade da sua construção para

> além da inconsistência interior do seu conceito. O campo da sensibilidade imaginável é portanto necessariamente mais estreito do que o imaginável, e a diferença essencial entre os dois não pode ser transformada numa diferença de grau. (Nelson, 1905, p. 388-389, tradução nossa)

Nelson então argumenta pela superioridade do imaginável sobre o sensivelmente imaginável e tal argumento busca afirmar que a capacidade do matemático de calcular espaços não euclidianos seria suficiente.

O último ponto levantado por Nelson nesse artigo diz respeito ao que se pode concluir da afirmação de possibilidade das geometrias não euclidianas. Segundo ele, a opinião generalizada seria a de que tal possibilidade invalidaria todas as geometrias, uma vez que se todas são verdadeiras, nenhuma o seria. Esta postulação, para ele, também se assenta na tradição aristotélica, a qual identifica as distinções entre verdades necessárias e contingentes e as entre o lógico e o empírico. A possibilidade das geometrias não euclidianas, por outro lado, evidenciaria a origem não lógica dos axiomas:

> Do fato de o espaço euclidiano ser apenas um caso especial de um múltiplo estendido triplo, apenas se segue que, como Riemann coloca, "as proposições de geometria não podem ser derivadas de conceitos gerais de magnitude". Por outras palavras, a possibilidade de uma geometria não euclidiana é uma prova irrefutável do caráter sintético das verdades geométricas. (Nelson, 1905, p. 391, tradução nossa)

Por conseguinte, pelo caráter não analítico das verdades geométricas, seria impossível concluir sobre a decidibilidade a priori entre as geometrias. As investigações matemáticas acerca das geometrias não euclidianas pouco poderiam ter a ver com essa questão, uma vez que esta seria eminentemente filosófica. Assim, segundo Nelson, as afirmações de Kant não são desafiadas pelas geometrias não euclidianas mas, do contrário:

> Na medida em que as questões de geometria não euclidiana em geral tocam as da doutrina de Kant, nomeadamente no que diz respeito à descoberta, por Kant, dá origem não lógica dos axiomas, podemos afirmar que a matemática recente forneceu uma brilhante confirmação da descoberta de Kant de uma forma independente. (Nelson, 1905, p. 392, tradução nossa)

É de se notar que, à semelhança do que acontecera com Fries no início do século, os trabalhos de Nelson teriam recepções distintas entre filósofos e cientistas, reflexo da tensão existente entre os campos, em ambos os casos. Em 1906, Ernst Cassirer (1874-1945) publica um comentário sobre a obra de Nelson, em particular seu *Kritische Methode* e seus comentários sobre a obra de Hermann Cohen (1842-1918), iniciando seu texto de maneira bastante irônica:

> Surgiu um novo salvador para a filosofia de Kant. Se até agora tem sido distorcido ao ponto de ignorância pelas querelas das escolas, se a abundância e a oposição de interpretações ameaçou obscurecê-lo cada vez mais, a solução para o enigma que nos atormentou durante um século foi finalmente encontrada. E esta solução é tão clara e plausível que toda a contradição se calará perante ela. (Cassirer, 1906, p. 1, tradução nossa)

Em 1907, seria o próprio Cassirer a publicar um texto relacionando as tensões entre os objetos da matemática moderna e a doutrina kantiana, no artigo *Kant und die Moderne Mathematike*, o qual será comentado na seção 4.3.

O segundo texto de Nelson, entregue em 1927, ano de seu falecimento, e publicado em 1928, é marcado por uma apologia ao trabalho de Hilbert, com o qual possuía amizade e afinidades intelectuais. O prefácio deste texto é assinado pelo próprio Hilbert, exaltando o trabalho de Nelson e lamentando sua morte:

> All earnest endeavor to exalt philosophy to the rank of and exact science has always laid the greatest stress on a mathematical orientation; and of the various fields of mathematics the study of its fundamental principles holds the deepest interest for philosophers. Throughout his life Leonard Nelson followed the development of these principles with profound attention. Ever conscientious in his search for truth, he turned the entire acuity of his thought to furthering an understanding between philosophy and mathematics, for he was thoroughly convinced of the profound scientific connection between his philosophy and the results of axiomatics. His address, "Critical Philosophy and Mathematical Axiomatics," bears eloquent witness to this fact.
>
> An inexorable fate decreed that this eminent savant was not to finish his most important work. The world of science has suffered a grave loss in his untimely death. May his friends and disciples remain faithful to the lofty goals he set himself; may they carry to fruition the ideas embodied in his work. (Hilbert, 1949 apud Nelson, 1949, p. 158)

Como já mencionado, o ingresso de Nelson em Göttingen, nas ocasiões de sua habilitação, em 1909 e sua admissão à cadeira de professor em 1919, foram possibilitadas a partir da intervenção de Hilbert que, em 1917, após a saída de Husserl de Göttingen para Freiburg no ano anterior, adere à escola Neo-Friesiana de Nelson. A escola possibilitaria encontros, em Göttingen, entre cientistas e filósofos, o que atraía Hilbert sobretudo a partir do contexto da Primeira Guerra, segundo Reid:

> The lack of contact with foreign mathematicians was extremely frustrating to Hilbert. Just before the war Bertrand Russell, with A.N. Whitehead, had published his *Principia Mathematica*. Hilbert was convinced that the combination of mathematics, philosophy and logic represented by Russell should play a greater role in science. Since he could not now bring Russell himself to Göttingen, he set about improving the position of his philosopher friend Leonard Nelson.
>
> Nelson was also a champion of the axiomatic method. His philosophical work treated two main problems: the laying of a scientific foundation for philosophy and the systematic development of philosophical ethics and a "philosophy of right." He was still firmly opposed by Husserl, the philosophy professor; and Hilbert's files

> contain an extremely bulky item labeled "The Nelson Affair," recording his efforts to obtain an associate professorship for Nelson during this time. (Reid, 1986, p. 144-145)

É de se conjecturar, portanto, que as concepções trazidas por Hilbert e pela escola de Göttingen na década de 1920 seriam diretamente influenciadas por Nelson. Nesse sentido, também Paul Bernays, citado em diversos artigos de Hilbert como um grande colaborador, é descrito por Reid como um integrante do círculo de Nelson:

> In the spring of that year [1917], on a visit to Zürich, he arranged for two of the young mathematicians in the circle around Hurwitz to accompany him on a walk. One of these was Weyl's friend Pólya. The other was a reserved, shy and somewhat nervous man named Paul Bernays. To the surprise of Pólya and Bernays the subject of conversation on the walk to the top of the Zürichberg was not mathematics but philosophy. Neither of them had specialized in that field. Bernays, however, had studied some philosophy and, during his student days at Göttingen, had been close to Leonard Nelson. In fact, his first publication had been in Nelson's philosophical journal. Now, in spite of his quietness, Bernays had much more to say than the usually voluble Pólya. At the end of the walk Hilbert asked Bernays to come to Göttingen as his assistant. Bernays accepted. (Reid, 1986, p. 150-151)

Voltando ao texto, Nelson inicia, novamente, ressaltando o papel e a importância de Kant no contexto filosófico e matemático, em sua demonstração de que a origem do conhecimento matemático não se encontrava na lógica ou na experiência, mas na intuição pura.

Na sequência, Nelson destaca a participação de Fries no processo, indicando-o como o único sucessor de Kant que de fato aderiu à proposta Kantiana. Com efeito, Fries teria percebido que a descoberta do caráter sintético a priori da matemática formaria a base de uma nova ciência: a filosofia da matemática. Esta ciência teria como particular interesse a determinação total do escopo e da possibilidade do saber matemático, traçando seus limites e sistematizando seus princípios. Assim, por um lado, essa ciência propõe as distinções disciplinares dentro da matemática, de acordo com seus princípios particulares e, por outro lado, promove uma atenção maior aos axiomas, tendo em vista sua necessidade e suficiência. Fica evidente, portanto, que, na visão de Nelson, o projeto da filosofia da matemática de Fries culminaria no projeto moderno da matemática no início do século XX, em particular as reformulações axiomáticas características do período, como a axiomática de Hilbert. Não apenas isto, Nelson infere, portanto, pela originalidade de Fries como precursor fundamental da axiomática moderna:

> Thus Fries is really the true founder of modern mathematical axiomatics, for he was not only the first to give the problems of this science a universal formulation but also the first to elaborate them systematically. (Nelson, 1949, p. 161)

Nelson então localiza, nesta linha que traça entre Fries e a axiomatização moderna, o papel da descoberta das geometrias não euclidianas. Segundo ele, tais desenvolvimentos seriam independentes entre si, relacionando-se à medida dos tensionamentos que produzem. Com efeito, as geometrias não euclidianas, ao evidenciar a possibilidade de construção de sistemas logicamente válidos que negavam o postulado das paralelas, levantariam questões relacionadas à independência dos axiomas. Por outro lado, uma vez que isso demandaria a não contradição dessas geometrias, critérios de consistência desses sistemas também seriam levantados. Ora, essas questões seriam, segundo Nelson, resolvidas pela axiomática moderna, uma vez que ficaria provado que uma contradição em quaisquer geometria representaria, na verdade, uma contradição também nas outras.

O que mostra-se importante aqui, no entanto, é como tais problemas seriam antecipados, segundo Nelson, por Fries e Kant, reforçando a linha sucessória aqui proposta:

> The results of modern axiomatics are a completely clear and compelling corroboration of Kant's and Fries's assertion of the limits of logic in the field of mathematical knowledge, and they are a conclusive proof of the doctrine of the "synthetic" character of the mathematical axioms. For if it is proved that the negation of one axiom can lead to no contradiction even when the other axioms are introduced, it is certainly proved that the axiom leads to no contradiction when the other axioms are not introduced. And this was just the criterion that Kant had already specified for the synthetic character of a judgment: the uncontradictory character of its negation. (Nelson, 1949, p. 164)

Por outro lado, seria possível aproximar a axiomatização moderna da filosofia de Fries a partir do ponto de vista metodológico. No sentido moderno, as proposições em si mesmas, dentro dos sistemas teóricos, passam a ser objeto de investigação, de maneira que o seu conteúdo e sua validade são secundários, em vista de sua demonstrabilidade e consistência. Isso identificaria-se à crítica da razão de Fries, sobretudo a seu procedimento particular de dedução, que consta de sua verificação:

> Thus modern axiomatics presents us with a relation which is altogether analogous to that between Fries's critique of reason and the metaphysical system, since the principles of the system are made the object of the critique; since, further, critique, particularly "deduction", has in view something quite different from a proof of the principles in question; and since, finally, the proposition that has the proposition from the system as its object is proved. (Nelson, 1949, p. 166)

Em tempo, Nelson refere-se aqui, nas duas últimas passagens, ao programa de Hilbert e ao desenvolvimento de sua Teoria da Prova, sobretudo na década de 1920. Após a publicação de 1899 sobre a axiomatização da geometria, Hilbert localiza a consistência do sistema de números reais como um dos grandes problemas matemáticos do século XX, a

constar de sua lista no Congresso Internacional de Paris, no ano de 1900. Tal problema ficaria particularmente conhecido a partir dos paradoxos de Russell. O processo de obtenção da consistência passaria, portanto, pela axiomatização da aritmética, que é inicialmente tratada em um texto de 1904.

Após um certo hiato em relação a este assunto, Hilbert o retoma em 1917, em parceria com Paul Bernays, apresentando na década posterior textos bem amadurecidos sobre o tema, nos anos de 1922, 1925 e 1927, sob uma perspectiva finitista, a fim de representar conceitos não-finitos, como o contínuo e o infinito, bem como métodos de demonstração a partir de uma teoria axiomática formal. Grosso modo, Hilbert acreditaria que, por mais não-finitos que fossem os conceitos ou métodos tratados na teoria matemática, nosso entendimento e nossa abordagem seriam necessariamente finitárias. Objetos e abordagens "finitárias", nos textos de Hilbert, serão identificados a objetos da intuição, ainda que seja questionável o entendimento preciso, para ele, do termo "Anschauung"[24]. Assim, não seria surpreendente, ainda que seja notável, que Hilbert deliberadamente atribua Kant como precursor de seu método:

> Is it not clear, rather, that when we believed we had discovered that the infinite was in some sense real we were only allowing ourselves to be led to that belief by the circumstance that we so often actually encounter in reality such immeasurable dimensions in the large and in the small? And has the contentual logical inference ever deceived and abandoned us anywhere when we applied it to real objects or events? No, contentual logical inference is indispensable. It has deceived us only when we accepted arbitrary abstract notions, in particular those under which infinitely many objects are subsumed. What we did, then, was merely to use contentual inference in an illegitimate way; that is, we obviously did not respect necessary conditions for the use of contentual logical inference. And in recognizing that such conditions exist and must be respected we find ourselves in agreement with the philosophers, especially with Kant. Kant already taught—and indeed it is part and parcel of his doctrine—that mathematics has at its disposal a content secured independently of all logic and hence can never be provided with a foundation by means of logic alone; that is why the efforts of Frege and Dedekind were bound to fail. Rather, as a condition for the use of logical inferences and the performance of logical operations, something must already be given to our faculty of representation [in der Vorstellung], certain extralogical concrete objects that are intuitively [anschaulich] present as immediate experience prior to all thought. (Hilbert, 1925, p. 376)[25]

Assim, o desenvolvimento de uma teoria da prova em vista a provar a consistência da aritmética será, de fato, o "grande feito" do percurso narrado por Nelson, que aqui antecipa, inclusive, o sucesso do programa de Hilbert:

[24] Para esta discussão, ver Kitcher (1976) e Parsons (1998).
[25] É curioso que esta última frase figure, com a mesma exata formulação, em ambos os textos de 1925 e 1927.

> The crowning achievement of modern axiomatics is the proof of the consistency of arithmetic, long held to be impossible but finally furnished by Hilbert. The affinity of the method that has produced this proof with Fries's method of deduction is so close that we may confidently assert: If there is even the slightest justification to the well-known and oft-raised objections to Fries's method of deduction, then for the same reasons Hilbert's proof of the consistency of arithmetic must irremediably collapse. (Nelson, 1949, p. 167)

Ironicamente, sabemos que tal programa seria razoavelmente frustrado a partir dos teoremas de incompletude de Gödel, apresentados em 1931 e 1934, que estabeleceriam limitações definitivas aos sistemas axiomáticos. No entanto, ainda que as ambições mais gerais do programa encontrem-se minadas, deve-se ter em mente seu legado e a herança deixada pelo programa e seus pressupostos. Dessa forma, por um lado, não haveriam teoremas de Gödel sem que houvesse o desenvolvimento do programa de Hilbert e, por outro lado, é de se notar que os desenvolvimentos da teoria da prova pós-Gödel, bem como as práticas de formalização axiomática usadas na matemática até hoje encontram-se influenciadas diretamente por Hilbert.

Nesse sentido, é possível atribuir, sem dúvida, a influência da escola de Nelson nesse panorama. Uma vez que, evidenciadas suas relações e ingerências em Göttigen justamente sobre Hilbert e Bernays, é possível inferir que as ideias de Nelson seriam diretamente participativas nas concepções filosóficas do programa.

Na próxima seção, estudaremos outra escola neokantiana do início do século XX, produtora de análises contundentes e profundas sobre a ciência de seu tempo: a escola de Marburg, centrada sobre as figuras de Paul Natorp, Hermann Cohen e, em particular, no jovem Ernst Cassirer.

4.3 Ernst Cassirer

> "The meaning of the generalized concepts of number cannot be grasped as long as we try to indicate what they mean with regard to substances, with regard to objects conceivable in themselves. But the meaning at once becomes intelligible when we regard the concepts as expressing pure relations through which the connections in a constructively produced series are governed." (Cassirer, 1910/1953, p.56)

O início da escola de Marburg data da década de 1870, sobretudo após a publicação, por Hermann Cohen, da obra *Kants Theorie der Erfahrung* de 1871, e posteriormente a chegada de Paul Natorp à universidade de Marburg, em 1876. Outro nome importante

associado à escola é Ernst Cassirer, aluno de Cohen, que apresenta importantes trabalhos na história da filosofia (*Das Erkenntnisproblem in der Philosophie*, 1906-1907) e na filosofia das ciências exatas (*Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, 1910).

Uma ideia fundamental desta escola baseia-se numa reinterpretação de Kant, sobretudo na concepção de sua lógica transcendental (Heis, 2011). Na abordagem de Natorp e Cohen, a filosofia se fundamentaria não na especulação metafísica a priori, mas nas ciências da natureza, as quais constituem o *Faktum* sobre o qual a filosofia se pré condiciona. Sendo assim, diante de novos fatos da ciência, o sistema filosófico recondicionar-se-ia, possuindo, assim, um caráter essencialmente histórico e dinâmico. Neste sentido, as categorias kantianas da percepção e do entendimento perdem seu caráter fixo, sendo preciso sua constante redeterminação.

Um aspecto essencial da escola de Marburg é a de que as condições de possibilidades da experiência (*Erfahrung)* são entendidas aqui como ativas e associadas ao dinamismo dos fatos culturais. O *locus* desta objetividade não seriam as mentes individuais dos cientistas, mas nos artefatos produzidos que, enquanto conteúdos objetivos, se entendem dinâmicos e relativos. A noção kantiana de "*a priori*" aqui é reconduzida por Cohen em termos de aspectos culturais que possibilitam o entendimento e, portanto, a validade objetiva de uma cultura. Tal acepção do termo se distinguiria, assim, de interpretações inatistas.

Do dinamismo dos fatos culturais procederia então o aspecto predominantemente histórico do método transcendental. Se os fatos culturais condicionam a experiência, as condições a priori são relativas às teorias atuais da ciência, de forma que é preciso entendê-las atualmente para analisar suas condições. Por outro lado, se tais ciências são dinâmicas, é preciso entender como tais mudanças são objetivamente válidas, ou seja, uma epistemologia da ciência se faz necessária.

Com efeito, os filósofos da escola de Marburg situam-se em um comprometido engajamento na filosofia da ciência de seu tempo. Cohen, Natorp e Cassirer apresentariam profundas reflexões sobre os fundamentos da física e da matemática e produziriam interpretações filosóficas relevantes sobre os trabalhos dos quais são contemporâneos. Portanto, do ponto de vista da aproximação entre filosofia e ciência, nosso foco neste trabalho, a perspectiva das escolas neokantianas torna-se bastante pertinente, em detrimento de um afastamento metodológico entre essas áreas. Em especial, serão

analisados aqui os trabalhos de Cassirer, no que concerne ao trabalho em filosofia da ciência, sobretudo suas reflexões em filosofia da matemática.

Quando ainda um jovem estudante de literatura e filosofia da universidade de Berlin, Ernst Cassirer teria conhecido a obra de Cohen em 1893, por intermédio de uma palestra sobre Kant ministrada por Georg Simmel (Skidelsky, 2008). Impressionado pela interpretação de Cohen sobre a doutrina kantiana, Cassirer ingressaria no doutoramento em 1896 na universidade de Marburg. Em 1899 defenderia sua tese sobre a matemática de Descartes, entitulada *Descartes' Kritik der mathematischen und naturwissenschaftlichen Erkenntnis*, orientado por Natorp e Cohen.

A partir de 1906, Cassirer trabalharia como *Privatdozent* na universidade de Berlin, até que de 1919 até 1933 ocuparia a cadeira de filosofia na universidade de Hamburgo. Por sua origem judaica, seria levado a deixar a Alemanha com a subida dos nazistas ao poder. Lecionaria em Gotemburgo, na Suécia, até 1941, de onde sairia novamente, indo morar nos Estados Unidos. Trabalharia então nas universidades de Yale e posteriormente Columbia até 1945, ano de seu falecimento.

A obra de Cassirer pode ser convenientemente dividida em duas fases, as quais identificamos um "jovem Cassirer", ainda bastante vinculado à escola de Marburg e atuante em suas análises da história da filosofia e na filosofia das ciências exatas. Em sua fase madura, a partir de 1920 e 1930, encontramos obras que propõem um escopo mais aberto, em torno de sua filosofia das formas simbólicas. Nesse sentido, a análise dos objetos ideais da matemática se apresentaria como exemplo primário, em relação ao qual se apresentariam diversos outros âmbitos, como o pensamento religioso, a linguagem, a arte e a história. Este presente estudo tratará sobretudo das obras da primeira fase, em especial, a obra *Substanzbegriff und Funktionsbegriff,* de 1910[26].

4.3.1 Substância e Função: A filosofia do jovem Cassirer

Em *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (1910), sua obra de referência, Cassirer segue os preceitos da escola de Marburg, sobretudo no que concerne à relação entre lógica e ontologia na teoria do conhecimento. Um dos pontos cruciais da obra é que ele busca substituir uma noção tradicional de uma lógica essencialmente vinculada à ontologia,

[26] A partir de sua tradução em inglês de 1953, por Swabey e Swabey.

presente sobretudo em Aristóteles, por uma lógica relacional ou funcional, que identifica na matemática e nos novos empreendimentos das ciências exatas. A fim de apresentar e justificar essa lógica, ele apresenta uma extensa análise das concepções da matemática, a qual apresentaremos nas próximas seções.

É notável, ao longo do livro, a capacidade de Cassirer de integrar influências entre as áreas da matemática e da filosofia. Fica evidente que Cassirer se inspiraria nos trabalhos matemáticos, em especial, nas concepções de Gauß sobre a matemática. É bem conhecida a formulação de Gauß para quem a matemática constitui-se de uma "ciência das relações", à despeito de ser uma "ciência das quantidades". Essa chave de leitura dos trabalhos modernos de matemática, em Cassirer, parece se constituir em uma virada epistemológica que ele pretende empreender de maneira mais geral à própria filosofia.

O primeiro texto relevante à análise de Cassirer sobre os objetos da matemática trata-se de uma crítica, publicada em 1907, a um trabalho de Louis Couturat (1868-1914) sobre os fundamentos da matemática: *Les Principes des Mathématiques: avec un appendice sur la philosophie des mathématiques de Kant*, de 1905. Tal texto trata-se, originalmente, de uma tradução do livro "*The Principles of Mathematics*", de 1903, de Bertrand Russell (1872-1970), porém com adaptações e, tal como expresso no título, um apêndice sobre a filosofia da matemática de Kant. A grosso modo, na obra de 1903, Russell apresenta sua tese que identifica os fundamentos da matemática aos da lógica, equiparando assim as duas ciências. Ao fazê-lo, Russell defronta-se diretamente com a filosofia kantiana, uma vez que esta se opõe a subjugar a matemática à lógica, concebendo-as como ciências demarcadamente distintas. Couturat pretende, então, estender a análise de Russell, sobretudo em relação à tensão que esta propõe à doutrina kantiana.

Cassirer caracteriza a visão de Couturat como insuficiente e, por outro lado, contraditória com o próprio Russell. Nas notas conclusivas, Cassirer aponta as considerações de Couturat, as opõe a declarações de Russell e questiona que se dois pensadores, uma vez de acordo em suas premissas, chegam em conclusões distintas, é possível que sua interpretação esteja em desacordo. Por outro lado, a crítica de Couturat, segundo Cassirer, será insuficiente uma vez que ele não consideraria a distinção entre juízos analíticos e sintéticos a fundo, atacando tão somente o esquema predicativo dos juízos sintéticos e ignorando as considerações fundamentais e posteriores sobre o significado destes juízos bem como seu papel no sistema de conhecimento transcendental de Kant.

Para além desta crítica mais direta e conclusiva ao trabalho de Couturat, Cassirer apresenta, ao longo do texto, análises pertinentes sobre a matemática de seu tempo, por um lado demonstrando um domínio bastante notável dos assuntos em questão e, por outro lado, indicando uma adequação das problemáticas à filosofia de Kant. É um trabalho que se opõe às concepções de Russell, não apenas na identidade entre matemática e lógica, mas na fundamentação do conceito de número oferecido por este. Com efeito, neste segundo aspecto serão antecipados elementos da sua obra de 1910, que visará o estabelecimento de uma nova teoria de formação de conceitos científicos, a qual ele identificaria nas ciências exatas sua epítome.

Assim, após uma breve caracterização das ideias de Russell e Couturat, no âmbito da identificação entre lógica e matemática, Cassirer estende-se em uma apresentação e análise do conceito de número como proposto por eles. Tomando como ultrapassada a construção da matemática a partir do mero conceito de número, uma vez que a matemática em si transcenderia o escopo quantitativo, Russell e Couturat buscariam, segundo Cassirer, fundamentar o número a partir de um esquema subjacente a uma lógica de relações. Nota-se que Cassirer é elogioso à essa ênfase, uma vez que se criticaria aqui, a princípio, o caráter "substancialista" da lógica tradicional.

> A lógica permanece vinculada ao ponto de vista da substância e, portanto, à forma básica do julgamento da predicação, enquanto o pensamento científico vivo visa cada vez mais claramente o conceito de função como seu verdadeiro centro sistemático. Neste contexto, reconhece-se o valor e a necessidade da nova fundação sobre a qual Russell procura colocar a lógica. Em seu relato, a matemática nada mais é do que uma aplicação especial da lógica geral das relações; o conceito de relações, no entanto, por sua vez, volta à ideia mais fundamental de 'funcionalidade'.[27] (Cassirer, 1907, p. 7, tradução nossa)

Em seguida, no entanto, Cassirer virá a caracterizar a obra de Russell como insuficiente nesse sentido, sobretudo no que se refere à concepção de número a partir da noção de "classe". Ao longo da exposição, Cassirer irá opor as concepções métricas e cardinais, postuladas por Russell, à concepção ordinal de número, sob a luz das discussões em torno da definição de continuidade. Com efeito, sua crítica se baseará nesta oposição, reivindicando a superioridade da concepção ordinal.

---

[27] *Die Logik bleibt an den Gesichtspunkt der Substanz und somit an die Grundform des Urteils der Prädikation gebunden, während das lebendige wissenschaftliche Denken immer deutlicher auf den Funktionsbegriff als seinen eigentlichen systematischen Mittelpunkt hinzielt. Man erkennt in diesem Zusammenhang den Wert und die Notwendigkeit der neuen Grundlage, auf die Russell die Logik zu stellen sucht. Die Mathematik ist in seiner Darstellung nichts anderes als eine spezielle Anwendung der allgemeinen Logik der Relationen; der Relationsbegriff aber geht seinerseits auf den fundamentaleren Gedanken der „Funktionalität" zurück.*

Cassirer chega a considerar os números transfinitos de Cantor, que são apresentados após a exposição detalhada das noções de enumerabilidade e equivalência. A consideração dos transfinitos, aqui, irá levantar uma questão mais geral acerca do conceito numérico: a de que este definitivamente não decorre de uma multiplicidade empírica dada, mas "de uma função mental geral, com a qual relacionamos uma multiplicidade a uma unidade, em virtude de sua lei geradora, que nos é imediata e que visualizamos completamente" (Cassirer, 1907, p. 25-26). De maneira mais geral, isso nos dirá da maneira com que formamos e consideramos conceitos:

> Para saber o que significa qualquer conceito geral, não precisamos apresentar todos os espécimes que se enquadram nele individualmente, a fim de então "abstrair" uma característica comum de sua totalidade; mas é suficiente para este propósito se - sem considerar o escopo do conceito - apenas visualizarmos seu conteúdo, ou seja, as características constitutivas que sua definição contém.[28] (Cassirer, 1907, p. 26, tradução nossa)

Por outro lado, seria justamente a impossibilidade de comparar infinitos distintos em termos de sua cardinalidade numérica que provaria que o conceito de número não pode se basear em uma definição métrica ou cardinal. Em outras palavras, o número não deveria ser considerado como algo em si mesmo, mas como relação possível:

> É a lei da relação que estabelece claramente sua "área" - seja ela finita ou infinita - e a torna um conteúdo de pensamento intrinsecamente determinado. (cf. esp. Russell §§ 330, 338, 342). Os números transfinitos trazem assim à expressão mais clara e concisa apenas uma visão lógica básica, que deve ser constantemente pressuposta por todos os conhecimentos matemáticos em geral, especialmente pela análise do infinito: eles são uma nova prova inequívoca de que o conceito de número não é um conceito de coisa, mas um puro conceito funcional de pensamento.[29] (Cassirer, 1907, p. 27, tradução nossa)

Essa distinção do número como "coisa" e o número como relação será bastante característica na filosofia de Cassirer, e servirá de base de uma proposta metodológica mais geral, que Cassirer apresenta de forma esquemática em seu livro de 1910: *Substanzbegriff und Funktionsbegriff.*

---

[28] Um zu wissen, was irgend ein allgemeiner Begriff bedeutet, brauchen wir nicht sämtliche Exemplare, die unter ihn fallen, einzeln vorzustellen, um aus ihrer Gesamtheit sodann ein gemeinsames Merkmal zu „abstrahieren"; sondern es genügt hierzu, wenn wir uns — ohne den Umfang des Begriffs irgend in Betracht zu ziehen — lediglich seinen Inhalt, d. h. die konstitutiven Merkmale, die seine Definition enthält, vergegenwärtigen.

[29] Das Gesetz der Relation ist es, das ihr „Gebiet" — es sei endlich oder unendlich — eindeutig feststellt und zu einem in sich bestimmten Inhalt des Denkens macht. (vgl. bes. Russell §§ 330, 338, 342). Die transfiniten Zahlen bringen somit nur eine logische Grundeinsicht, die von aller mathematischen Erkenntnis überhaupt, insbesondere von der Analysis des Unendlichen, beständig vorausgesetzt werden rauss, zu klarstem und prägnantesten Ausdruck: sie sind ein neuer unzweideutiger Beleg dafür, dass der Zahlbegriff kein Dingbegriff, sondern ein reiner Funktionsbegriff des Denkens ist.

No primeiro capítulo desta obra, Cassirer visa estabelecer oposição à teoria de formação de conceitos aristotélica tradicional e a proposição de uma nova teoria, a qual este identifica na prática das ciências exatas, em especial a matemática. É um capítulo denso à medida que concentra-se justamente nas questões epistemológicas de sua crítica e não em uma exposição das práticas que ele identifica, as quais são abordadas nos capítulos subsequentes.

Preliminarmente, Cassirer entende que durante anos, a lógica formal teria sido identificada a uma firme fundação. Nota-se que este tipo de tratamento identifica-se mesmo na obra de Kant, para o qual a lógica:

> desde remotos tempos, seguiu a via segura, pelo fato de, desde Aristóteles, não ter dado um passo atrás, a não ser que se leve à conta de aperfeiçoamento a abolição da algumas subtilezas desnecessárias ou a determinação mais nítida do seu conteúdo, coisa que mais diz respeito à elegância que à certeza da ciência. (Kant, 2005, B VIII)

No entanto, com os novos problemas do final do século XIX, sobretudo no tratamento dos novos objetos da matemática, a lógica teria sido renovada com novos horizontes, questões e reformulações. Num sentido crítico, é de se notar que a lógica, em Aristóteles, estaria profundamente ligada à metafísica. Com efeito, a própria estrutura e concepção do Ser em Aristóteles estaria ligada à concepção das formas do Pensar, de forma que os fundamentos básicos da lógica estariam permeados de pressuposições metafísicas, as quais tornariam-se evidentes no seu desenvolvimento.

Segundo Cassirer, mediante à natureza de seus novos problemas, as reformas modernas da lógica perceberiam tais interdependências, o que levaria à tentativa de inverter os processos de concepção, trazendo a teoria dos juízos como premissa da teoria dos conceitos. A dificuldade desta tarefa residiria, no entanto, na inerência metodológica da formação de conceitos aristotélica sobre a teoria de juízos, mesmo quando considerada separadamente. Neste cenário, uma reforma efetiva da lógica deve, precisamente, concentrar-se sobre a reformulação da teoria de formação de conceitos, visando esse desvinculamento:

> The intellectual tendency still shaping these new attempts revealed itself in that features crept into the theory of judgment itself, which could only be understood and justified by the traditional theory of the generic concept (Gattungsbegriff). The primacy of the concept, which they sought to lay aside, was once more implicitly acknowledged. The actual center of gravity of the system had not been changed but merely the external arrangement of its elements. Every attempt to transform logic must concentrate above all upon this one point: all criticism of formal logic is

> comprised in criticism of the general doctrine of the construction of concepts (Begriffsbildung). (Cassirer, 1910/1953, p. 4)

Aqui é então exposta, de maneira breve, tal doutrina geral de construção de conceitos. Seus pressupostos são dois: a existência das coisas com sua multiplicidade interminável e a capacidade da mente de selecionar particularidades dos seres que lhes são comuns. Esse processo de seleção pode então ser reiterado, gradualmente alcançando ordens superiores de divisão do ser, sob os quais as coisas particulares são subsumidas.

As funções essenciais do pensamento, nesse sentido, são meramente as de comparar e diferenciar multiplicidades dadas. Tal ato de reflexão dos objetos leva, ele mesmo, à abstração, que formará os conceitos. Cassirer aponta um mérito peculiar deste processo, que é o de não abandonar a realidade, mas fazer parte essencial desta:

> The concept does not appear as something foreign to sensuous reality, but forms a part of this reality; it is a selection from what is immediately contained in it. In this respect, the concepts of the exact mathematical sciences stand upon the same plane as the concepts of the descriptive sciences, which are merely concerned with a superficial ordering and classification of what is given. (Cassirer, 1910/1953 p. 5)

Assim, se estabelece uma série de categorias, de maneira que é possível ascender a níveis superiores ou mais gerais e, reversamente, particularizar ou especificar a níveis inferiores de abstração. Entendendo o número de propriedades como uma grandeza dos conceitos, esta diminui à medida que ascendemos a conceitos mais gerais, de maneira que os conceitos superiores tendem à restrição definitiva de conteúdo.

Emergem, pois, as primeiras questões acerca deste procedimento. Se o objetivo final do método consiste em um objeto essencialmente vazio, levanta-se uma suspeição sobre sua efetividade. A construção deste processo levaria inevitavelmente ao ininteligível, o que seria contraditório com os pressupostos. Em outras palavras, o problema inicial desta tradição lógica, segundo Cassirer, reside no fato de que, por hipótese, o produto final deste procedimento abstrativo é um “objeto geral” vazio de conteúdo.

Por outro lado, há uma espécie de confusão em torno das atribuições entre parte e todo e, em última instância, entre abstração e determinação:

> If all construction of concepts consists in selecting from a plurality of objects before us only the similar properties, while we neglect the rest, it is clear that through this sort of reduction what is merely a part has taken the place of the original sensuous whole. This part, however, claims to characterize and explain the whole. The concept would lose all value if it meant merely the neglect of the particular cases from which it starts, and the annihilation of their peculiarity. The act of negation, on the contrary, is meant to be the expression of a thoroughly positive process; what

> remains is not to be merely an arbitrarily chosen part but an "essential" moment by which the whole is determined. (Cassirer, 1910/1953, p. 6)

Assim, infere-se aqui que a caracterização ou determinação dos seres não fica garantida pelo processo de abstração em si mesmo. Toma-se aqui um exemplo evidente: se reuníssemos carnes e cerejas em torno dos atributos "vermelho", "suculento" e "comestível", não chegaríamos a nenhuma categoria ou conceito válido à compreensão dos particulares envolvidos, apenas a uma espécie de combinação de palavras sem sentido. Na verdade, deve haver outros processos intelectuais que estabeleceriam critérios tácitos a esse procedimento. Ora, as "lacunas" ou critérios do procedimento de caracterização dos seres seriam preenchidas pelas inserções tácitas da metafísica de Aristóteles em sua lógica. Assim, em princípio, conceitos deixam de ser meros esquemas subjetivos ou jogos de ideias à medida que identificam as Formas que garantem as conexões causais e teleológicas destes entes particulares. O procedimento de comparação e diferenciação não levaria, portanto, ao indefinido, mas encerra no descobrimento da essência real dos seres. Com efeito, a teoria aristotélica da construção de conceitos se fundamenta, necessariamente, na pressuposição das essências da realidade:

> The logical doctrine of the construction of the concept and of definition can only be built up with reference to these fundamental relations of the real The determination of the concept according to its next higher genus and its specific difference reproduces the process by which the real substance successively unfolds itself in its special forms of being. Thus it is this basic conception of substance to which the purely logical theories of Aristotle constantly have reference. The complete system of scientific definitions would also be a complete expression of the substantial forces which control reality. (Cassirer, 1910/1953, p. 7-8)

Cassirer visa provar, portanto, que a lógica de Aristóteles fica permeada por sua metafísica, de forma que o entendimento da lógica aristotélica fica condicionado ao entendimento de sua concepção do Ser. Por consequência, categorias de quantidade e qualidade, bem como determinações espaciais e temporais, não existiriam em si ou para si mesmas, mas somente como propriedades de uma realidade absoluta. Em particular, a categoria de “relação”, fica intrinsecamente subordinada, ainda que se torne elemento central da determinação do Ser.

Cassirer sustenta que mesmo os projetos filosóficos mais críticos ao realismo conceitual de Aristóteles não seriam atravessados por este ponto decisivo, relativo à formação de conceitos. Nesse sentido, os conflitos da filosofia entre nominalismo e realismo, e com eles a questão dos universais, ainda assim assumiriam o essencialismo como um

pressuposto. Nem mesmo Berkeley, apesar de seu ataque aos universais, à abstração e a ideia de substância, alcançaria o cerne da questão, segundo Cassirer. Na verdade, o imaterialismo de Berkeley meramente transferiria a noção de substância de um campo externo para um campo psíquico, não se livrando, portanto, da prática dogmática em torno da construção do conceito.

Em contraste, Cassirer identificaria na matemática um tensionamento desta lógica, ao que seus conceitos subvertem o esquema usual de construção, sob um esquema sintético:

> From the beginning, the concepts of geometry, especially, resist reduction to the customary schema. The concept of the point, or of the line, or of the surface cannot be pointed out as an immediate part of physically present bodies and separated from them by simple "abstraction." Even in this example, which is the simplest offered by exact science, logical technique faces a new problem. Mathematical concepts, which arise through genetic definition, through the intellectual establishment of a constructive connection, are different from empirical concepts, which aim merely to be copies of certain factual characteristics of the given reality of things. (Cassirer, 1910/1953, p.12)

Na verdade, se nos voltarmos à matemática, encontramos uma ciência na qual as definições alcançam elevada clareza conceitual. Segundo Cassirer, a matemática em seu processo de formação de conceitos, alcança o que se espera de um conceito científico ideal, cuja generalidade e universalidade leva à determinação dos particulares e não o abandono da particularidade:

> The genuine concept does not disregard the peculiarities and particularities which it holds under it, but seeks to show the necessity of the occurrence and connection of just these particularities. What it gives is a universal rule for the connection of the particulars themselves. (Cassirer, 1910/1953, p. 20)

Assim, por exemplo, é possível obter, a partir da fórmula geral das curvas de segunda ordem, determinações sobre curvas particulares deste tipo, como elipses, círculos e parábolas, ao considerar a alteração de parâmetros dessa fórmula geral. Por outro lado, e de maneira ainda mais abrangente, nossa intuição sobre o espaço tridimensional euclidiano somente torna-se claramente compreendida a partir das geometrias modernas, quando ascendemos à formas superiores do espaço, à medida que estas subsumem formas particulares.

Dessa forma, conceitos mais gerais não esvaziam-se de conteúdo, mas enriquecem-se. Com efeito, casos particulares não são excluídos de consideração, mas tornam-se estágios bem determinados do sistema. O que mostra-se aqui, segundo Cassirer, é que o que caracteriza a formação do que este chama de um “conceito genuíno” não é a

obtenção de uma imagem representativa de uma universalidade, tal qual uma "substância" aristotélica, mas a validade universal de um princípio da ordem de uma série:

> We do not isolate any abstract part whatever from the manifold before us, but we create for its members a definite relation by thinking of them as bound together by an inclusive law. And the further we proceed in this and the more firmly this connection according to laws is established, so much the clearer does the unambiguous determination of the particular stand forth. (Cassirer, 1910/1953, p. 20)

Assim, ao contrário de uma universalidade abstrata, a matemática comportaria uma universalidade concreta, a qual abarca todos os particulares e os determina segundo uma regra. Como exemplo, Cassirer toma uma espécie de equação diofantina de primeiro grau, a qual possuirá infinitas soluções, ainda que determinadas por uma fórmula. Esta fórmula é universal pois comporta todas as soluções possíveis e, simultaneamente, concreta, uma vez que as soluções particulares são diretamente determinadas por esta. De forma mais geral, toda função de uma ou mais variáveis comporta este tipo de universalidade concreta. Cassirer opõe então, o conceito de gênero, provindo da concepção de substância, ao conceito matemático de função, o qual se fundamenta na noção de relação:

> In opposition to the logic of the generic concept, which, as we saw, represents the point of view and influence of the concept of substance, there now appears the logic of the mathematical concept of function. However, the field of application of this form of logic is not confined to mathematics alone. On the contrary, it extends over into the field of the knowledge of nature; for the concept of function constitutes the general schema and model according to which the modern concept of nature has been molded in its progressive historical development. (Cassirer 1910/1953, p. 21)

Nas próximas seções, descreveremos como esta nova lógica, ou estrutura metodológica da teoria da formação de conceitos, é identificada no Cassirer nas ciências exatas, em especial a matemática. Além disso, veremos como Cassirer ampara os novos objetos da matemática pura dentro dessa lógica.

4.3.2 O conceito de número

A partir do segundo capítulo do *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, Cassirer irá descrever as fundamentações e desenvolvimentos da teoria dos campos numéricos. Um de seus maiores objetivos aqui, evidentemente, é identificar a lógica relacional que apresenta no primeiro capítulo nas práticas e concepções da matemática moderna, em oposição à lógica substancial. Essa oposição será encontrada justamente na distinção entre as

fundamentações cardinal, proposta por Frege e Russell, e ordinal, proposta por Dedekind, encontrando na primeira o tipo de formação de conceito que deseja superada

Há duas obras de relevância em Dedekind no que diz respeito ao conceito de número: *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, de 1872 e *Was sind und was sollen die Zahlen?* de 1888. Na primeira, ele introduz a noção de continuidade, definida em termos dos seus chamados "cortes". Dedekind então propõe um sistema de cortes racionais, o qual será um campo ordenado e contínuo e, por fim, ele apresenta os números reais enquanto um sistema puro isomorfo ao sistema de cortes. Nesta obra, estão implícitos os procedimentos que justificam a existência de um sistema infinito de números racionais, bem como a possibilidade de agir logicamente sob este sistema em termos da teoria de conjuntos. Tais imprecisões seriam melhor discutidas na obra de 1888, onde este define sistemas "simplesmente infinitos", os quais quaisquer dois são isomorfos entre si. Tal sistema representará os números naturais, que aqui justificam-se enquanto uma livre criação da mente[30]. O termo "criação livre", citado por Dedekind e criticado por Frege por carregar um suposto psicologismo, é interpretado por Cassirer não a partir de uma acepção ontológica, mas metodológica. Uma "livre criação" deve ser aqui entendida como uma passagem de uma abstração de um sistema concreto de objetos a um novo sistema isomorfo ao anterior, porém distinto por sua construção "pura", definida estruturalmente.

Dedekind apresenta uma construção dos números ordinais, baseada na teoria dos conjuntos e na noção de sucessor, que baseará a axiomatização dos naturais, proposta por Giuseppe Peano (1858-1932) em 1889. Entretanto, curiosamente, Dedekind não parte aqui de uma axiomatização dos naturais, mas de sua construção lógica. Após uma rigorosa sequência estrutural, na qual Dedekind constrói conjuntos infinitos e demonstra o método de indução, ele define, na proposição 73, os números naturais:

> "Se, ao considerarmos um sistema simplesmente infinito N ordenado por um mapeamento φ, desconsideramos completamente a natureza especial dos elementos, apenas mantendo a sua distinguibilidade e levando em consideração apenas as relações nas quais eles são colocados uns com os outros pelo mapeamento de ordenação φ, então tais elementos são chamados números naturais ou números ordinais ou simplesmente números, e o elemento básico 1 é

[30] "*eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes"* (Dedekind, 1888, prefácio)

> chamado de número básico da série de números N."[31] (Dedekind, 1888/1961, p.17, tradução nossa)

Cassirer defenderia a posição de Dedekind desde o texto de 1907, no qual critica as posições de Russell e Couturat. Cassirer levanta a dedução de Dedekind, sobre a qual a análise de uma contagem remonta o poder da mente de relacionar "coisas", correspondendo-as e identificando-as, sem a qual o próprio pensamento não seria possível. Tais "coisas" [Dings], no entanto, não são dadas em si mesmas, de forma a não terem existência independente ou isolada, mas são de acordo com a relação que as precede e as identifica. Tais são, portanto, termos de uma relação precedente e somente podem ser "dadas" em comunidade ideal com as outras que as diferenciam e identificam.

Com efeito, são aqui traçados os aspectos gerais da dedução de Dedekind. Apresentam-se as conformações iniciais de uma relação *R*, a qual relaciona elementos *a* e *b*, no sentido de formar o elemento relacional *aRb*. Caracterizam-se a comutatividade (simetria) e a transitividade de uma relação.

Se então, fica estabelecida uma série a partir de um primeiro membro, de forma que todo membro esteja relacionado a um "sucessor" a partir de uma relação não-comutativa (assimétrica) e transitiva, estabelecemos uma espécie de base para o desenvolvimento da aritmética, de forma que as definições operatórias podem desenvolver-se desta. Cassirer refere-se aqui à conhecida fundamentação da aritmética a partir da noção de sucessor, ressaltando o fato explicitamente expresso por Dedekind, que esta baseia os números não em sua existência prévia, mas uma "criação livre da mente humana". Cassirer comenta brevemente o uso do termo "abstração" em Dedekind que, segundo ele, não estaria de acordo com o uso corrente, mas teria então um novo significado:

> From a logical standpoint, it is of special interest that here the concept and term "abstraction" is obviously applied in a new sense. The act of abstraction is not directed upon the separating out of the quality of a thing, but its aim is to bring to consciousness the meaning of a certain relation independently of all particular cases of application, purely in itself. [...] Here abstraction has, in fact, the character of a liberation; it means logical concentration on the relational connection as such with rejection of all psychological circumstances, that may force themselves into the subjective stream of presentations, but which form no actual constitutive aspect of this connection. (Cassirer, 1910/1953, p. 39)

---

[31] *"Wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch eine Abbildung φ geordneten Systems N von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehungen suffaßt, in die sie durch die ordnende Abbildung φ zueinander gesetzt sind, so heißen diese Elemente natürliche Zahlen oder Ordinalzahlen oder auch schlechthin Zahlen, und das Grundelement 1 heißt die Grundzahl der Zahlenreihe N."*

Em face de sua reivindicação da concepção ordinal como geradora primordial do conceito de número, Cassirer irá aqui confrontar as linhas que utilizam o conceito de classe como pressuposto necessário e suficiente, identificadas aqui à Frege e Russell. A principal crítica de Cassirer a essas linhas se refere à maneira “substancialista” com a qual estes conceitos são construídos. Cassirer atribuirá, portanto, a concepção cardinal ao tipo abstrativo aristotélico que critica no primeiro capítulo: *here again, the formation of concepts means nothing but the collection of objects into species and genera by virtue of subsumption under general attributes.* (Cassirer, 1910/1953, p. 44)

Segundo Cassirer, na concepção cardinal parte-se da noção de equivalência, aproximando dois grupos ou conjuntos, que são numericamente iguais de acordo com a possibilidade de coordenação um a um de seus elementos. Em virtude deste processo, se estabelece uma conexão entre quaisquer conjuntos que possam ser assim identificados, unindo-os em uma totalidade. A partir daí, qualquer grupo ou conjunto individual torna-se representativo de toda essa espécie, a qual deverá ser unida por esta qualidade. Evidentemente, a abstração desta produz exatamente o conceito que conhecemos como número.

Cassirer então reconhece, elogiosamente, algumas peculiaridades positivas próprias desta concepção: enquanto uma visão "tradicional" pressupõe os números para depois reconhecer sua igualdade, aqui esta última torna-se critério de construção do número, invertendo o processo. Este passo é descrito por Frege como "dar forma a um conteúdo de um juízo, o qual pode ser interpretado como uma equação, de forma que dos dois lados desta haja um número." Há aqui o reconhecimento de uma tendência metodológica, fundamental à matemática: a constituição de um conceito a partir das relações que o perfazem. Resta saber, no entanto, se a construção via equivalência de classes é logicamente simples o suficiente e se completa a dedução ou recai em algum tipo de argumento circular.

No entanto, e com efeito, a conclusão do método não parece decorrer tão diretamente quanto o procedimento sugere, mas possuiria pressupostos tácitos:

> Our thought could run through any number of "equivalent" groups and consider their mutual relations without any characteristic consciousness of the pure numerical concepts resulting from the process. The specific meaning of "four" or "seven" could never result from the bare placing together of any number of groups of "four" or "seven" elements; the individual groups must first be determined as ordered sequences of elements, thus as numbers in the sense of the ordinal theory. (Cassirer, 1910/1953, p. 48)

Por outro lado, enquanto um número ordinal ganha significado mediante sua posição no sistema total, o número cardinal emerge de forma isolada. Portanto, a conexão entre elemento ordinal e sistema é imediata, enquanto na dedução cardinal, essa conexão fundamental é posterior. Ao considerar a natureza das propriedades dos números, portanto, o que parece ser definido não é um número no sentido científico:

> What the mathematician considers in number are merely the properties on which rest the order of the positions. Number in itself may be what it will; for analysis and algebra it only comes into consideration in so far as it can be purely and completely developed in the form of a "progression." Strictly speaking, once this is admitted, the dispute as to the methodological precedence of the ordinal number is over. (Cassirer, 1910/1953, p. 49)

Ao estabelecer tal conexão, entretanto, estaríamos nos aproximando, na verdade, da concepção ordinal:

> it is at least necessary that we comprehend a term x as identical with itself, while at the same time we relate it to another term y and judge the former as agreeing with or differing from the latter, according to special circumstances. Now if we take this process of positing (Setzung) and differentiation as a basis, we have done nothing but presuppose number in the sense of the ordinal theory. (Cassirer, 1910/1953, p. 51)

Por outro lado, definições simples, como a unidade e a nulidade, evidenciariam o caráter circular da dedução cardinal.

> Thus here the progress from unity to what next follows it is founded on the same intellectual synthesis in principle as that upon which it rests in the theory of the ordinal number; and the only difference in method consists in that these syntheses appear, in the ordinal theory, as free constructions while here they depend upon given classes of elements. (Cassirer, 1910/1953, p. 52)

Finalmente, a consideração decisiva de Cassirer analisa que a concepção cardinal de número pressupõe que as próprias classes são dadas em uma pluralidade. Assim, a própria enumeração de classes que devemos comparar para produzir a concepção de número deve necessariamente entender tais classes como "duas" distintas. Eis, portanto, a circularidade definitiva do argumento cardinal.

> From this point, however, it is evident that the system of the numbers as pure ordinal numbers can be derived immediately and without the circuitous route through the concept of class; since for this we need assume nothing but the possibility of differentiating a sequence of pure thought constructions by different relations to a certain fundamental element, which serves as a starting-point. The theory of the ordinal number thus represents the essential minimum, which no logical deduction of number can avoid; at the same time, the consideration of equivalent classes is of the greatest significance for the application of this concept, yet does not belong to its original content. (Cassirer 1910/1953, p. 53)

De forma conclusiva, Cassirer entende que nas definições da matemática pura, o mundo sensível não é reproduzido a partir de suas impressões sensíveis, mas transformado e suplantado por uma ordem de outro tipo. O ato da quantificação aqui será pensado não como a abstração de um atributo quantitativo dos seres, mas de uma relação inferida sobre os objetos. As coisas por si mesmas não se apresentariam enquanto unidades independentes. Sua singularidade se daria através de sua inserção em uma sistemática relacional, uma espécie de arranjo intelectual orientado por uma regra lógica de relação. O número surgiria assim, por uma progressão de relações sucessivas e desta concepção se poderiam deduzir suas propriedades aritméticas.

Tais asserções completam-se na obra de Cassirer quando este retoma as proposições de Gauß sobre as extensões do conceito de número. A formalização lógica relacional sob a qual se fundamentariam os números em Dedekind se integrariam às ideias de Gauß, para o qual a matemática se apresentava como ciência das relações:

> "Positive and negative numbers can only find application where what is enumerated has an opposite, to be united with which is identical to annihilation. In strictness, this presupposition is only realized where not substances (things conceivable by themselves) but relations between two objects are enumerated. (...) every real whole number represents the relation of any member arbitrarily chosen as a beginning to some definite member of the series" (Gauß, 1831 apud Cassirer, 1910/1953, p. 56).

Dessa forma, Cassirer infere pela necessidade desta passagem conceitual do número, efetuada por Gauß, da noção de quantidade à noção de relação para uma efetiva compreensão destes novos objetos. Da mesma maneira, somente assim seria possível abarcar o entendimento dos números irracionais e complexos:

> Thus the new forms of negative, irrational and transfinite numbers are not added to the number system from without but grow out of the continuous unfolding of the fundamental logical function that was effective in the first beginnings of the system. A new direction in principle comes in, however, as soon as we advance from the complete and closed system of the real numbers to the more complex number systems. According to the "metaphysics of the imaginary," which Gauß founded and developed, we are no longer concerned here with the establishment of the most general laws of the order of a single series, but rather with the unification of a plurality of series, of which each one is given by a definite generating relation. With this transition to a multidimensional manifold, there appear logical problems, which find their complete formulation beyond the limits of the pure doctrine of numbers in the field of general geometry. (Cassirer, 1910/1953, p.67)

4.3.3 A síntese das novas estruturas geométricas

Até aqui, podemos afirmar que o ponto central da virada identificada por Cassirer, e que fundamenta sua análise, é o tensionamento entre ontologia e lógica, sobretudo do ponto de vista da construção de conceitos. Sua constituição relacional de conceitos, com efeito, visa a distinção metodológica entre estas partes, de forma que, por exemplo, "o significado do conceito de número somente é apreendido de forma completa quando o pensamento se livra da busca, na experiência concreta, de um correlato de sua construção" (Cassirer, p. 68). Isto posto, fica evidente que tal entendimento se associa de forma mais dificultosa àquelas ciências nas quais a relação com a concretude da realidade se apresenta mais imediata. De fato, enquanto a álgebra se mostra mais "aberta" a essa abordagem, pela natureza mesma de seus objetos, sua aplicação à geometria ou à física aparece muito mais problemática.

Esta é uma discussão, pois, que perpassa justamente a concepção de espaço e a maneira com que este se relaciona com a concretude da realidade. Naturalmente, este debate fica intimamente associado à emergência das geometrias não euclidianas (GNEs), uma vez que estas desafiam diretamente tais relações entre geometria e realidade. Basta lembrar que parte relevante da resistência dos matemáticos do século XIX se daria por sua falta de concretude, sendo classificadas como meramente "imaginárias" (ver seção 4.1).

Do ponto de vista de Cassirer, já no início do século XX, a emergência das geometrias não euclidianas afetaria de maneiras distintas o campo da matemática e o da filosofia. De certa forma, a voluntária rejeição dos matemáticos às questões ontológicas contribuiriam para a aceitação das GNEs. A partir do Erlanger Programm de Felix Klein (ver seção 4.1), haveria uma conformação matemática das GNEs, sobretudo dos pontos de vista estrutural e lógico, ao mostrar que os distintos sistemas geométricos seriam equivalentes sob a ótica da teoria de grupos. Com isso, ao menos na matemática, os maiores problemas oferecidos por esta questão parecem se dissolver.

No campo da filosofia, entretanto, as questões permaneceriam. A tradição newtoniana predominante sobre a teoria do conhecimento nos séculos XVIII e XIX postulava a existência absoluta do espaço, o que tornava essas concepções severamente paradoxais. O estabelecimento das geometrias não euclidianas, na segunda metade do século XIX, demandaria um novo entendimento do conceito de espaço e de sua relação com a realidade.

Além disso, haveria uma relação tradicional entre as proposições geométricas e a própria noção de verdade, a qual remete diretamente às relações, justamente abordadas, entre ontologia e lógica. Sobre a luz das GNEs e em compasso com as mudanças do conceito de número, a compreensão do conceito de espaço perpassaria, assim, por um afastamento metodológico de sua correlação com a realidade. Esta seção de nosso texto, portanto, comenta a análise e proposta de Cassirer sobre este tema em específico.

Em sua reconstrução histórica, Cassirer mostra que a associação entre as ideias da geometria e a noção filosófica de verdade se iniciaria na Grécia antiga, sobretudo na obra Platônica. A equivalência entre forma e conceito, presente em Platão, propõe uma concepção das categorias ontológicas a partir de sua distinção morfológica, tornando os objetos intimamente associados à sua forma, de maneira que a multiplicidade do ser é organizada e dividida por suas formas espaciais. Seria, portanto, a partir da análise do fluxo de objetos sensíveis que podemos extrair as categorias invariantes do ser, identificadas ao "eterno inteligível" platônico (Cassirer, 1910/1953, p.68).

Assim, caracteristicamente na geometria sintética clássica, a distinção conceitual se guiaria por distinções perceptivas, de forma a agir necessariamente pela particularização de seus objetos. Essa forma não confina-se a uma questão metodológica, mas estende-se à concepção e ao desenvolvimento da geometria:

> The synthetic geometry of antiquity is dominated by the same fundamental view that is given general expression in formal logic. The genera of existence can only be clearly grasped when they are strictly distinguished from each other and limited to a fixed circle of content. Thus also each geometrical form possesses an isolated and unchanging character. (...) A problem, which modern synthetic geometry solves by a single construction, was analyzed by Apollonius into more than eighty cases, differing only in position. The unity of the constructive principles of geometry is hidden by the specialization of its particular forms of which each is conceived as irreducible." (Cassirer, 1910/1953, p. 70)

Tais concepções seriam alteradas, segundo Cassirer, a partir da obra de Descartes. O método cartesiano visará, sobretudo, a determinação do ser a partir de conexões de expressões próprias do pensar. Haveria, em Descartes, uma concepção estrutural que contém os objetos, orientada por princípios universais. O conhecimento geométrico, portanto, não se encontraria no estudo particular de objetos mas na construção sistemática de um todo, onde esses objetos particulares podem ser construídos a partir de uma gênese comum. A associação entre o conceito de espaço e o de número na geometria analítica de Descartes possuiria, portanto, este propósito universalizante. Além disso, encontra-se aqui,

no conceito de número, o fundamento representativo da legitimidade que se deseja imprimir sobre a geometria. A determinação ontológica dos objetos se daria pelo conceito da "extensão", a qual é expressa numericamente. Submete-se, aqui, a ontologia à análise lógica, de forma que a inteligibilidade do espaço somente seria atingida quando expressa em um patamar lógico que, neste momento, pertence ao número. As figuras geométricas, nesse sentido, são representações sensíveis de um arranjo lógico, resolvido em uma lei aritmética que as descreve.

Contudo, apesar da ruptura estrutural da proposta cartesiana, Cassirer ressalta que, tal como na antiguidade clássica, o critério de verdade identifica-se aqui à conformidade entre ideia e objeto por via da intuição, ainda que em Descartes se explore a "clareza e distinção" de tais ideias. Nesse sentido, os axiomas da geometria seriam exemplos categóricos de verdades por sua validade na concretude real, com caráter de necessidade, e indicariam uma vinculação cartesiana à intuição e à sensibilidade. Por outro lado, curiosamente, será também nos limites da aritmética que Descartes traçaria os limites de sua geometria. Curvas "transcendentes" são excluídas de sua geometria, justamente por terem sua definição prejudicada pela não associação à totalidade que as determina. Além disso, a própria dificuldade de intuir tais curvas confirmaria sua exclusão.

A partir de Leibniz, segundo Cassirer, se estabeleceria um ceticismo sobre a intuição enquanto critério da verdade geométrica. Aqui, a mera impressão psicológica não seria suficiente, sendo passível de indução ao erro. Assim, mesmo tais proposições geométricas a princípio auto-evidentes pela intuição tal como "o todo é maior do que a parte" deveriam ser firmemente conduzidas à análise racional. O conhecimento intuitivo em Leibniz não é descartado, mas se faz enquanto limite interno do pensamento simbólico, marca essencial do pensamento leibniziano. Não por acaso, em Leibniz haveria uma nova concepção de espaço. A concepção newtoniana de espaço absoluto é aqui convenientemente contrastada com a concepção de Leibniz, para o qual o espaço se concebe enquanto uma ordem de coexistência. "Ordem" aqui é uma relação específica e contingente, que postula a estrutura de uma multiplicidade e sob a qual se fundamenta a concepção espacial.

O desenvolvimento desta noção de espaço se daria, segundo Cassirer, pela geometria projetiva, nas obras de Poncelet, Steiner e Staudt, onde o espaço projetivo tenderia a uma conformidade com o espaço leibniziano (Cassirer, 1910/1953, p. 91). Na verdade, os desenvolvimentos da geometria moderna, a partir de Descartes e em direção às geometrias

projetivas do século XIX, parecem formar, para Cassirer, uma espécie de antessala epistemológica aos problemas que surgiriam com a emergência das geometrias não euclidianas. A extrapolação projetiva das coordenadas do plano euclidiano tornava possível a construção de uma generalidade geométrica, sob a qual a métrica usual euclidiana estava contida. A universalidade proposta pela geometria projetiva é descrita por Cassirer como um dos primeiros indícios de superação dos limites epistemológicos da geometria euclidiana, compreendida aqui, pela primeira vez, como uma espécie de caso particular. Em uma obra tardia, Cassirer o colocaria de forma mais clara, quando diz:

> Projective geometry turned out to be the truly universal language, to which the ordinary metric geometry of measurement bore the relationship of a single idiom. The universal significance of projective geometry was expressed above all in the fact that it ignored the bounds within which Euclidean geometry was confined. A way had now been opened for the founding of a geometry without the postulate of parallels for, as Klein showed, it was possible to construct projective geometry without this postulate. (Cassirer, 1950, p. 50)

Por outro lado, emergiria uma nova perspectiva metodológica, sob a qual as relações fundamentais que caracterizam o sistema constituem o objeto essencial da geometria e não as formas em si mesmas. Com efeito, o estudo da geometria projetiva se daria não sobre as propriedades das formas, mas sobre a rede de correlações sob as quais estas são compreendidas, as invariâncias de um sistema projetivo. Com efeito, duas formas projetivas estão correlacionadas quanto é possível deduzir uma da outra a partir de uma transformação contínua de um ou mais de seus elementos posicionais. As propriedades destas figuras poderiam então ser correlacionadas, pelo princípio de continuidade de Poncelet. Tais formas podem constituir categorias que do ponto de vista intuitivo-sensorial pertenceriam a tipos totalmente distintos. Há, portanto, um elemento imaginário admitido aqui, sob o qual estas formas continuam invariantes idealmente. São, portanto, correlações ideais. Desse modo, residiria na geometria projetiva a possibilidade de superação de uma metodologia cujos objetos demandam uma correspondência necessária com o real, mas de uma uniformidade entre o real e o imaginário:

> The new view is obliged to break with this procedure, since from the beginning it defines as the real object of geometrical investigation not the individual form in its sensuous existence, but the various species of dependency that can subsist between forms. From this point of view, real and imaginary elements are essentially similar (Cassirer, 1910/1953, p. 83)

Também sob esta nova perspectiva, a noção de ordem passa a preceder a noção de medida. Parece significativo, para Cassirer, que nas ciências modernas o procedimento da

medida se apresentasse cada vez mais como uma questão epistemológica e não mais como uma hipótese (Cassirer, 1950, p. 51). Novamente, a concepção leibniziana de espaço enquanto "ordem de coexistência" emergiria enquanto pressuposto básico da geometria moderna. Sua significação em relação à experiência, portanto, se faz a partir da especificação de suas relações métricas. A noção de medida passa a ser, com efeito, uma espécie de "ponte" entre a geometria pura e o conhecimento sensível que, cada vez mais no século XIX, se distanciam entre si.

Nesse sentido, a geometria no século XIX se identificaria cada vez mais ao tipo relacional de ciência que Cassirer propõe. Tal conformação da ciência do espaço se daria, de maneira definitiva, a partir dos axiomas geométricos de HIlbert, nos quais a natureza dos objetos geométricos originais são assumidas mediante as condições de relações as quais estão subordinadas (Cassirer, 1910/1953, p. 93). Por conseguinte, as propostas modernas do cálculo, como o *Ausdehnungslehre* de Graßmann e a teoria de *Quaternions* de Hamilton são exemplos distintos de um mesmo procedimento universal.

Evidentemente, a emergência dos sistemas não euclidianos daria um salto muito maior no que diz respeito à relação entre espaço, intuição e geometria. A multiplicidade de sistemas oferece um desafio à unidade da razão, à medida em que o espaço geométrico seja tido como absoluto e sua concepção esteja vinculada à sua conformidade com o espaço real. No entanto, é justamente esta conformidade que seria aos poucos abandonada, sobretudo do ponto de vista metodológico, nos empreendimentos da geometria moderna.

> It is only the pure system of conditions, which mathematics erects, that is absolutely valid, while the assertion, that there are existences corresponding to these conditions in all respects, possesses only relative and thus problematic meaning. The system of universal geometry shows that this sphere of problems does not affect the logical character of mathematical knowledge as such. It shows that the pure concept on its side is prepared and fitted for all conceivable changes in the empirical character of perceptions; the universal serial form is the means by which every order of the empirical is to be understood and logically mastered. (Cassirer, 1910/1953, p. 111)

Assim, por um lado, o fortalecimento do caráter idealista nas práticas da matemática moderna, cujos objetos não se validam senão por sua própria consistência teórica e assim não podem ser confirmados ou refutados pela experiência, tenderia à suspensão dos problemas ontológicos associados às GNEs. Curiosamente, isso não se daria apenas pela já citada recusa dos matemáticos à questões do tipo, mas pela natureza de seus objetos, que

não necessitam de correlato concreto na realidade, e de seus métodos, cujas determinações, portanto, absolutamente não caberiam à experiência.

Com efeito, tal situação implicaria também na suspensão das refutações à teoria kantiana a partir da emergência das GNEs. Isto porque, segundo estas, a multiplicidade de geometrias se caracterizaria em um ataque direto à concepção única do espaço em intuição pura. Ora, se a concepção de espaço geométrico desloca-se de sua relação com a concretude do real, tais objeções refletem uma expectativa contrária. Essa perspectiva, segundo Cassirer, se dá devido a um "resíduo sensualista" vinculado à Kant:

> It is to be noted that two opposite objections, based upon the same premises which are taken from metageometry, have been expressed against the Kantian theory of geometry. On the one hand, the pure apriority of space is contested on the basis of these premises, while on the other hand, it is objected that in Kant's own exposition, the a priori freedom of the mathematical concept and its possible separation from all sensuous representation is not satisfactorily expressed. Kant's view that the axioms were "given" in "pure intuition" can only be explained by that residuum of sensualism which still attached to the Kantian idealism. (Cassirer, 1910/1953, p. 106)

Em resposta a estas colocações, Cassirer pretende uma adequação ou modernização da teoria kantiana, demandada pelos novos fatos da ciência. Já no texto de 1907, ele expõe esta necessidade:

> O desenvolvimento moderno da matemática realmente criou um novo "fato" que a filosofia crítica, que não domina as ciências mas tenta compreender, não pode mais ignorar. E é importante e significativo que o desenvolvimento posterior imanente da doutrina kantiana por si só tenha levado ao mesmo resultado que é exigido cada vez mais claramente pelo progresso da ciência. Como a "logística", a lógica crítica moderna também foi além da doutrina de Kant da "pura sensibilidade". (Cassirer, 1907, p. 31, tradução nossa)[32]

Assim, ao buscar simultaneamente a conformação e superação da doutrina kantiana, Cassirer notará que é possível entender tal conformidade centrada no fato de que a matemática se constrói por um ato de síntese. Tal síntese, na matemática moderna, se operaria em termos de sua estrutura, a partir de suas extensões.

Com efeito, na síntese kantiana, os objetos matemáticos não são dados em si mesmos, mas gerados arbitrariamente *a priori*. Um objeto deve necessariamente estar associado a um conceito, do qual dependem suas determinações. Um conceito é, portanto, a

[32] *Die moderne Entwickelung der Mathematik hat somit in der That ein neues „Faktum" geschaffen, an dem die kritische Philosophie, die die Wissenschaften nicht meistern, sondern verstehen will, nicht mehr vorbeigehen kann. Und es ist wichtig und bezeichnend, dass die immanente Fortbildung der Kantischen Lehre von selber zu dem gleichen Ergebnis geführt hat, dass durch den Fortgang der Wissenschaft immer deutlicher gefordert wird. Wie die „Logistik", so ist auch die moderne kritische Logik über Kants Lehre von der „reinen Sinnlichkeit hinweggeschritten.*

condição de possibilidade de um objeto e o precede necessariamente. Esse ponto de vista será generalizado por Cassirer, de forma que sistemas inteiros serão concebidos enquanto espécies de objetos tais como os acima definidos. Tais sistemas são estruturas predeterminadas não por seus conceitos, mas pelas formas relacionais expressas por seus axiomas, e assim serão geradas sinteticamente:

> Wherever a definite form of connection is given, which we can express in certain rules and axioms, there an identical "object" is defined in the mathematical sense. The relational structure as such, not the absolute property of the elements, constitutes the real object of mathematical investigation. (Cassirer, 1910/1953, p. 93)

Dessa forma, a nova visão sobre os sistemas axiomáticos na segunda metade do século XIX são expressas por Cassirer como uma espécie de generalização da síntese kantiana, de forma a postularem suas próprias condições *a priori*. Tal entendimento afirma por uma logicismo que nega o papel da intuição na construção sistemática das ciências e é reforçado por Cassirer a partir da equivalência lógica dos sistemas não euclidianos demonstrada pelo programa de Felix Klein.

Por outro lado, e aqui mais curiosamente, a partir da década de 1910, com o desenvolvimento da teoria da relatividade, as quais se utilizam de um sistema não euclidiano quadridimensional, as questões epistemológicas envolvendo as GNEs sofreriam um novo ponto de inflexão. Em 1921, Cassirer publica o texto "*Zur Einstein'schen Relativitätstheorie Erkenntnistheoretische Betrachtungen*", no qual analisa alguns impactos da nova teoria.

> Thus a question seems answered physically which had concerned the epistemology of the last decades most vitally and which had been answered most diversely within it. Physics now proves not only the possibility, but the reality of non-Euclidean geometry; it shows that we can only understand and represent theoretically the relations, which hold in "real" space, by reproducing them in the language of a four-dimensional non-Euclidean manifold. (Cassirer, 1921/1953, p. 430)

Ao concluir pela contingência dos sistemas geométricos perante a concretude da realidade, Cassirer confirmaria, portanto, sua leitura do caráter idealista e relacional dos métodos e possibilidades das ciências exatas.

> "The structures of geometry, whether Euclidean or non-Euclidean, possess no immediate correlate in the world of existence. They exist as little physically in things as they do psychically in our "presentations" but all their "being," i.e., their validity and truth, consists in their ideal meaning. The existence, that belongs to them by virtue of their definition, by virtue of a pure logical act of assumption is, in principle, not to be interchanged with any sort of empirical "reality." (Cassirer, 1921/1953, p. 433)

Restaria dessa leitura, portanto, o que justificaria a possibilidade de aplicação à realidade: se todas as geometrias são igualmente distintas da realidade, o que legitimaria seu empreendimento? A esse respeito, analisaremos na próxima seção a análise epistemológica de Cassirer sobre a física do século XIX, de forma a inferir nesta uma mudança análoga à operada na matemática. Tal relação parece feita por Cassirer tendo em vista um caminho de idealização das ciências naturais, o qual é por ele descrito. Neste sentido, a dessubstancialização das concepções físicas trariam em si uma concepção metodológica simbólica, sob as quais se operaria em uma rejeição da objetividade ontológica. Uma reflexão e significação efetiva desta concepção simbólica se faria, portanto, necessária.

Por último, é interessante notar que sua análise da física encontrará reciprocidade na geométrica. Ao compreender o papel da idealização nas ciências naturais, Cassirer refere-se também ao embate sobre a priorização das geometrias. Nesse sentido, a geometria euclidiana emerge como uma hipótese conceitual em meio a outras hipóteses possíveis. A respeito desta concepção de ciência natural concordaria também Poincaré, segundo o qual a equivalência de possibilidade lógica dos sistemas não euclidianos infere em sua verdade enquanto conformidade com o real, de forma que nenhuma geometria se encontraria em condição de verdade superior às demais. Dessa forma, se estabelece uma distinção entre o "fato científico" e o "fato bruto", e a axiomática se entende por uma "escolha" de onde reside uma "liberdade" científica. Nesse sentido, o que justificaria a escolha da geometria Euclidiana seria sua simplicidade relativa (Cassirer, 1910/1953, p. 109), onde esta se destaca das demais.

Por outro lado, a questão do simbolismo implicaria também na possibilidade de renúncia às representações intuitivas das teorias científicas. Segundo Cassirer, este passo seria bem representado nos avanços da teoria quântica, sob a qual se assumiria a fraqueza na sobrevalorização das representações de modelos atômicos. De outro modo, a teoria da relatividade, ao se utilizar de construções de sistemas não euclidianos, mostraria a validade de uma metodologia simbólica e não intuitiva.

4.3.3 Verdade e realidade nas ciências da natureza

A lógica funcional de formação de conceitos aqui proposta por Cassirer é inicialmente identificada e desenvolvida por ele nos sistemas matemáticos por ser, justamente, o campo onde esta se encontra na sua expressão mais nítida. Sobretudo na matemática pura, os conceitos construtivos (*Konstruktionsbegriffe*) manifestam-se livremente, de forma legítima e plausível.

Com efeito, a plausibilidade desta proposta na matemática parece se dever ao caráter de desvinculamento ontológico, que caracteriza esta formação funcional dos conceitos em Cassirer. Esta é, na verdade, a oposição decisiva às concepções do modo aristotélico, que aqui se antagoniza. Assim, posto que parte da retórica de Cassirer se guia pelo fato de que os objetos da matemática são autorreferenciados e, portanto, internos aos modo "puros" desta ciência, sua associação fica plenamente satisfeita.

No entanto, é justamente da consciência dessa natureza idealista e construtiva dos conceitos em Cassirer que emerge uma nova problemática: como, de fato, estes relacionam-se com a realidade, no sentido concreto? Dito de outra forma, como pode este modo de formação de conceitos lidar com a ciência natural?

À primeira vista, segundo Cassirer, a solução desse problema parece favorecer a construção tradicional de conceitos. Isto porque os conceitos naturais dizem respeito a uma identidade com os fatos da percepção. Dito de outra forma, uma concepção fundamentalmente descritiva das ciências naturais faria de seus conceitos meras cópias de objetos dados na observação. A "boa ciência" natural, neste sentido, é produzida à medida que tais conceitos representam adequadamente os fenômenos, de forma a estarem estritamente correlatos a estes. Hipóteses teóricas, nestes casos, seriam válidas somente à medida que são validadas por essa correlação com alguma percepção sensível.

Isto posto, poderíamos interpretar que o desenvolvimento da física moderna contempla consistentemente tal construção de conceitos. Em estrita oposição à explicação metafísica e teleológica da natureza, por Aristóteles, emergiria a nova tarefa descritiva da ciência moderna, cuja produção se encerra em identificar cada conceito a uma soma de percepções.

Cassirer, no entanto, opõe-se a esta interpretação. Segundo ele, tal concepção descritiva encerra uma confusão entre a expressão da ciência e a demanda que esta propõe fundamentalmente:

> Is it merely the actual procedure of science itself that is here brought to its simplest and shortest expression, or, on the contrary, is this procedure measured by a general theory of knowledge and of reality, which decides concerning its value? (...) Is this theory, as it is historically presented, really only a collection of observations strung together as if on a thread, or does it contain elements, which belong to another logical type and therefore demand another foundation? (Cassirer, 1910/1953, p. 115)

Evidentemente, Cassirer será enfático em argumentar pelo contrário, ou seja, de que o método da Física e das ciências naturais não pode se tratar de um procedimento simplesmente descritivo ou reprodutivo. Em linhas gerais, trata-se de um processo ativo, sob o qual os elementos acessados pela sensibilidade são "transportados" a uma nova esfera lógica, onde os conceitos são, justamente, construídos.

Um dos pontos principais da linha argumentativa de Cassirer é o fato de que a matemática se impõe como elemento fundante das ciências naturais. Há aqui um claro alinhamento, portanto, com a visão kantiana no que esta considera a matematização um processo necessário à produção de qualquer ciência (cf. seção 2.3).

Em primeiro lugar, evidencia-se aqui que as formas da matemática fundamentam os processos descritivos mais básicos da física, e que são, a eles, necessários. Com efeito, as funções de contagem e medida são indispensáveis em tais procedimentos, e sua abdicação prejudicaria qualquer possibilidade de certeza e clareza dos fatos em questão.

Ora, uma vez que os conceitos matemáticos são evidentemente construídos, o empirismo sustentado até aqui, de certa forma, entraria em contradição. De fato, uma problemática se estabelece: se os conceitos da física são fundamentados matematicamente e, portanto, idealmente, não estariam eles, distantes das determinações empíricas e sujeitos à liberdade e os caprichos do de um "livre pensar"? O problema que se coloca é, justamente, sobre as conexão das construções ideais com o factual concreto ou, como coloca Cassirer, a transferências das estruturas:

> Even here it appears that it is upon a peculiar interweaving of "real" and "not-real" elements, that every scientific theory rests. As soon as we take one step beyond the first naive observation of isolated facts, as soon as we ask about the connection and law of the real, we have transcended the strict limits prescribed by the positivistic demand. In order even to indicate this connection and law clearly and adequately, we must go back to a system that develops only universal hypothetical connections of grounds and consequences, and which renounces in principle the "reality" of its

> elements. That form of knowledge, whose task is to describe the real and lay bare its finest threads, begins by turning aside from this very reality and substituting for it the symbols of number and magnitude. (Cassirer, 1910/1953, p. 117)

Cassirer atacará esse problema a partir do caráter mecanicista das ciências, dado que o conceito de natureza, na física moderna, fica restrito à uma visão mecanicista do mundo. O conceito de movimento, aqui construído a partir desta visão mecanicista, aponta, segundo ele, para uma negação das determinações empíricas que a princípio demanda. Cassirer aponta que a noção de movimento, construída a partir da visão mecanicista, aponta para uma negação das determinações empíricas que a princípio demanda. A questão se coloca da seguinte maneira: à medida que a compreensão do espaço se dá como um somatório de percepções sensíveis, o movimento só torna-se possível a partir da postulação da continuidade e homogeneidade deste espaço, ou ele encontraria "lacunas" no espaço. A noção de continuidade do espaço, no entanto, não se coaduna com as impressões sensíveis, e deve necessariamente ser assumida idealmente. Portanto, e em princípio, a noção de movimento ficaria mergulhada numa circularidade conceitual, demandando ela mesma determinações ideais, e não empíricas. Torna-se falso que a noção de espaço se manifesta empiricamente, uma vez que ela demandaria pressuposições ideais envoltas, sobretudo, nos conceitos de continuidade e infinito:

> Every assertion concerning the unitary path of a moving body involves the assumption of an infinity of possible places; however, the infinite obviously cannot be perceived as such, but first arises in intellectual synthesis and in the anticipation of a universal law. Motion is gained as a scientific fact only after we produce by this law a determination that includes the totality of the space and time points, which can be constructively generated, in so far as this determination coordinates to every moment of continuous time one and only one position of the body in space.
> Thus, from a new angle it is revealed that even the first approach to mechanics depends upon presuppositions, which go beyond possible sensuous experience. (Cassirer, 1910/1953, pp. 118-119)

Fica evidente, neste ponto, a relevância com que o conceito de limite se impõe sobre tal debate. Na esfera metodológica da formação dos conceitos de Cassirer, ele se tornará fundamental, uma vez que servirá à idealização referencial necessária. Novamente, portanto, temos que um conceito da matemática se impõe como fundamental à discussão física.

A análise do conceito de limite, aqui, se dá através de considerações sobre a obra de Paul du Bois-Reymond, matemático do fim do século XIX e irmão do fisiologista Emil du Bois-Reymond. Neste contexto, é notável que Du Bois-Reymond seja entendido como um membro representativo da escola de Weierstraß. É bem conhecido o fato característico de

que diversos resultados obtidos por Weierstraß não eram expressamente publicados, mas somente expostos oralmente por ele em seus cursos presenciais. Como mostra Schubring (2014), Du Bois-Reymond seria um dos acadêmicos atuantes, junto a Weierstraß, que levariam a publicação de resultados, em particular, sobre a questão dos fundamentos.

Na análise de Cassirer, o conceito matemático de limite, para Du Bois-Reymond, remete justamente às questões metafísicas as quais, por sua natureza, "não se resolvem por critérios objetivos, mas por inclinação subjetivas do investigador" (p. 122). Ao indagar pela existência de um certo limite, devemos fazer, segundo ele, uma tal escolha subjetiva:

> We must choose between these two views of the world: either with empiricism we must assume as existent only what can be pointed out as an individual in the real presentation, or with idealism, affirm the existence of structures, which constitute the intellectual conclusion of certain series of presentations, but which can never themselves be directly presented. The mathematician is not in a position to grant the victory to either one of these fundamental views; all that he can and must do, in order to bring clarity into the foundations of analysis, is to follow them to their ultimate intellectual roots. The solution of the riddle is that it remains and will remain a riddle. (Cassirer, 1910/1953, p. 122)

A questão, naturalmente, volta-se para a determinação da noção de existência, que para Du Bois-Reymond, parece necessariamente presa a esta disjunção. Cassirer nega, no entanto, que isto ao menos se aplique de fato. Em verdade, a própria prática matemática revelaria esta negação:

> The manner, in which the concept of existence alone appears within mathematics, confirms this exclusive direction of interest. The student of algebra, who speaks of the "existence" of the numbers e and pi, undoubtedly intends to signify no fact of outer physical reality; but just as little is the presence of certain contents of presentation in any perceiving and thinking subjects, that is to be thereby affirmed. If this were the meaning of the assertion, the mathematical standpoint would lack any means of testing and verifying it; for only experiment and generalizing induction warrant us in making a decision concerning real events in the psychic life of individuals. The existence of the number e means nothing else than that, within the ideal number system, one and only one position is determined definitely and with objective necessity by the series, which we apply in its definition. (Cassirer, 1910/1953, p. 124)

Fica claro, portanto, que a "existência" aqui, torna-se a determinação inequívoca de um elemento dentro de um sistema ideal. Por um lado, em relação a números transcendentes como o número *e*, esta afirmação parece completamente plausível. Com efeito, postula-se inicialmente a série infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ \ldots$$

sob a qual se determina uma cisão do sistema dos racionais, um corte, separando membros que excedem a série, em sua extensão, daqueles que não o fazem[33]. Esta disjunção formaliza determinações desta série em meio ao próprio sistema, uma vez que permite relacioná-la a posição de outros membros "anteriores" ou "posteriores", ou seja, "menores" ou "maiores". Tais determinações são o que, de fato, constituem a "existência" do número *e*, e são feitas de maneira puramente ideal, sem ao menos levantar considerações sobre sua possibilidade empírica.

Por outro lado, é evidente que a noção de existência parece se alterar quando migramos do campo algébrico ao campo geométrico, uma vez que a noção de "representação" em geometria, remete a existência como algo concreto. A determinação de um ponto, aqui, ainda que seja determinado como um limite de uma sequência convergente, parece demandar sua representação, muito mais do que tecer considerações acerca da sequência que o determina.

Segundo Cassirer, tais contradições surgem, justamente, a partir das ambiguidades e indefinições em torno da noção de existência na geometria. No entanto, o "ser" dos elementos geométricos não distingue-se dos elementos numéricos e, portanto, não deveria ser entendido como de outra natureza. Nota-se que o procedimento metodológico é o mesmo: postular uma unidade ideal e sistematizar os elementos a partir de procedimentos relacionais. E a idealidade destes procedimento que acaba por garantir a efetividade de suas soluções:

> We saw how the paradoxes of imaginary and infinitely: distant points were solved from this standpoint little as these points could claim for themselves any sort of mysterious "reality" in space, they proved themselves, on the other hand, an expression of valid spatial relations. Their being is exhausted in their geometrical meaning and necessity. It is this necessity which the true "idealism" can alone demand and claim for the structures of pure mathematics. (p. 126)

A dissolução dessas contradições, em Cassirer, perpassa a análise da função desta idealização. À medida que o procedimento do pensamento se compreende como uma espécie de montagem de um "mosaico de percepções", como o faz Du Bois-Reymond, essa composição fica evidentemente restrita à sensações dadas e nunca podem ser "completadas" por elementos não perceptivos. Na verdade, do contrário: tais elementos ideais servem à orientação da construção empírica, como o sistema onde a percepção se

[33] É de se notar o quão a par Cassirer estava dos desenvolvimentos recentes de sua época. Em particular, as demonstrações da transcendência de *e*, em 1873, e de π em 1882.

organiza e são, portanto, elementos constitutivos desta construção. Considera-se aqui que o meio ideal não é uma extrapolação do meio empírico, mas é, antes disso, o sistema de princípios da análise dos fenômenos:

> For this very discrimination of different stages of exactitude presupposes comparison with the exact idea, whose fundamental function is thus here throughout confirmed. The "being" of the idea, however, consists in this function and needs no other support and no other proof. Also the ideal concepts of natural science affirm nothing regarding a new realm of separate absolute objects, but they would only establish the inevitable, logical lines of direction, by which alone complete orientation is gained within the manifold of phenomena. They only go beyond the given, in order to grasp the more sharply the systematic structural relations of the given. [...] As soon as the empiricist, along with du Bois-Reymond, characterizes idealization as throughout justifiable, and explains that he only refuses to accept the ideal itself, all conflict is removed in principle. For the existence of the ideal, which can alone be critically affirmed and advocated, means nothing more than the objective logical necessity of idealization. (Cassirer, 1910/1953, pp 128-129)

De forma conclusiva, portanto, vemos que Cassirer nega veementemente a concepção da ciência da natureza a partir de um modus operandi descritivo. Na verdade, para ele, o procedimento destas ciências caracteriza-se pela idealização, que precede quaisquer reproduções ou identificação de elementos da realidade. A noção de "verdade" dentro da teoria, aqui, é discutida como um valor de necessidade dentro da idealização e não mais como uma associação entre ideia e realidade, uma vez que a própria noção de oposição entre ideia e realidade é questionada.

Ao traçar sua análise sobre a ciência da natureza, Cassirer irá trabalhar a necessária pressuposição dos elementos matemáticos. Aqui, enfatizamos, ele se coloca como um defensor do processo de matematização, entendendo a matemática como um procedimento fundamental à análise científica. Com efeito, a pertinência de sua análise do conceito de limite se estenderá sobre sua teoria do conhecimento, com contornos de definição:

> Knowledge realizes itself only in a succession of logical acts, in a series that must be run through successively, so that we may become aware of the rule of its progress. But if this series is to be grasped as a unity, as an expression of an identical reality, which is defined the more exactly the further we advance, then we must conceive the series as converging toward an ideal limit. This limit "is" and exists in definite determinateness, although for us it is not attainable save by means of the particular members of the series and their change according to law. (Cassirer, 1910/1953, p. 315)

No sentido da idealização da natureza, não haveria também uma separação clara entre conceitos e fatos na física. Com efeito, tomada a interpretação descritiva da física, o experimento nada mais é do que uma ferramenta de intermediação entre conceitos e fatos.

Em última instância, será a ferramenta decisiva de legitimidade de uma hipótese, em vias de afirmá-la ou refutá-la. Entretanto, contrariamente ao que se poderia pressupor de uma separação dos domínios da teoria e da prática, toda tentativa de comprovação de conformidade de uma teoria com a realidade está condicionada aos instrumentos de experimentação. Tais instrumentos, contudo, se fazem também inseridos em um sistema de hipóteses, estando estes mesmos submetidos às concepções de sua construção. Já no capítulo sobre geometria, Cassirer antecipa estas considerações:

> Abstract theory never stands on one side, while on the other side stands the material of observation as it is in itself and without any conceptual interpretation. Rather this material, if we are to ascribe to it any definite character at all, must always bear the marks of some sort of conceptual shaping. We can never oppose to the concepts, which are to be tested, the empirical data as naked "facta"; but ultimately it is always a certain logical system of connection of the empirical, which is measured by a similar system and thus judged. (Cassirer, 1910/1953, p. 107)

O *experimentus crucis* de Bacon, o qual permitiria distinguir a "teoria correta" por meio de sua conformidade objetiva, portanto, se mostra impossível. A teoria física assim parece abandonar a pretensão de universalidade, de forma que a legitimidade absoluta de uma teoria não poderia jamais ser alcançada em sua totalidade. Esta discussão retorna posteriormente apontando, de forma ainda mais decisiva, os erros deste empirismo:

> We do not have physical concepts and physical facts in pure separation, so that we could select a member of the first sphere and enquire whether it possessed a copy in the second; but we possess the "facts" only by virtue of the totality of concepts, just as, on the other hand, we conceive the concepts only with reference to the totality of possible experience. It is the fundamental error of Baconian empiricism that it does not grasp this correlation; that it conceives the "facta" as isolated entities existing for themselves, which our thought has only to copy as faithfully as possible. (Cassirer, 1910/1953, p. 147)

De maneira conclusiva, portanto, entendemos que a análise de Cassirer no livro *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, de 1910, se caracteriza por sua profundidade filosófica e científica. Cassirer não só acompanha o desenvolvimento das ciências que o são contemporâneas, mas as posiciona dentro de um quadro filosófico em vias de compreender e empreender seus fundamentos. É bastante impressionante, aliás, a competência com que Cassirer é capaz de incluir desenvolvimentos recentes da análise moderna em suas reflexões.

Comparativamente ao trabalho de Nelson, Cassirer nos parece aprofundar de maneira muito mais completa os problemas que se apresentam no enquadramento da matemática moderna às concepções de Kant. Na verdade, enquanto Nelson classifica as controvérsias entre a doutrina kantiana e as geometrias não euclidianas como meros

“mal-entendidos” de parte de tais acusadores, Cassirer recusa a simplificação do problema, ocorrendo em uma readaptação do kantismo em vista de tais considerações.

Apesar disso, ambos os trabalhos nos parecem fundamentais à medida que aproximam campos que, à época, estariam em plena tendência de se distanciar. Mesmo tendo em vista as possíveis querelas entre os autores em um âmbito geral da filosofia (cf. Cassirer, 1906; Kubalica, 2016), é notável a concordância entre tais autores de que os novos objetos da matemática não isentar-se-iam de possíveis análises da filosofia. Do contrário, suas produções comprovam a necessidade deste tensionamento, considerando os problemas ontológicos e metodológicos que surgem da produção matemática, e que são, costumeiramente desde o século XIX, ignorados em seu interior.

5 - Considerações Finais

Uma das motivações e intenções deste trabalho é o de aproximar os - cada vez mais - distintos campos da filosofia e da matemática. Nosso mote inicial, citado na apresentação do texto, mostra a fala de Stephen Hawking, proeminente cientista do século XX, que constata que as produções da filosofia "não têm sido capazes de acompanhar o avanço das teorias científicas, principalmente, porque a ciência se tornou muito técnica e matemática para os filósofos". Se, por um lado, Hawking parece correto à medida que a profunda tecnicidade das ciências torna difícil a análise filosófica, por outro lado esta afirmação também parece refletir a falta de diálogo que os próprios cientistas possuem com a filosofia. Em certa medida, pode-se dizer que também a tecnicidade afasta os próprios cientistas de uma reflexão de seus próprios fundamentos.

Assim, buscamos aqui nos aproximar de contextos históricos e produções que mostrem que tal diálogo não é apenas possível quanto relevante à produção científica. Ressaltando o caso da emergência da matemática pura, procuramos mostrar o quão necessárias as considerações filosóficas seriam para a própria fundamentação de seus novos objetos. Essa fundamentação não teria consequências somente para uma aceitação consensual das teorias, mas para a própria reflexão e consequente produção interna de seus objetos. O caso de Graßmann talvez seja a síntese desta convicção, uma vez que a produção de suas concepções passa necessariamente pela superação conceitual da própria matemática por uma via declaradamente filosófica. Nesse sentido, destaca-se também a contribuição de Gauß para uma nova concepção da matemática como ciência das relações. Grosso modo, poderíamos dizer que a própria emergência da matemática pura se baseia nessa nova maneira relacional de fundamentar seus elementos.

No sentido de entender as tensões produtivas entre filosofia e matemática, destacamos a forma como elementos como as geometrias não euclidianas representam problemas conceituais que entrelaçam ambos os campos. Com efeito, os problemas que emergem dessas geometrias não são técnicos ou metodológicos, mas ontológicos, e sua "resolução", por assim dizer, deve perpassar uma análise tanto matemática quanto filosófica.

Por outro lado, trabalhos como os de Cassirer e de Nelson destacam a potencialidade em aprofundar entendimentos conceituais para além das práticas internas das ciências. Ao abordar a fundamentação dos números por Dedekind, por exemplo, Cassirer parece trazer à

tona elementos subentendidos nas práticas dos matemáticos e que possuem estreitas relações com considerações metodológicas não declaradas por estes. Neste sentido, a análise filosófica não serviria apenas como justificação objetiva dos métodos, mas de uma prática reflexiva que traz clareza às ideias que encontram-se pressupostas.

Se no campo da produção científica se mostra possível e potencialmente produtivo colher frutos da reflexão filosófica, no campo da educação esse diálogo nos parece imprescindível à profundidade conceitual que se deveria almejar na formação de professores. Na verdade, os resultados de uma análise histórico-filosófica são ainda mais latentes ao campo do ensino, à medida que permitem processos de metaconhecimento muito pertinentes à discussão didática dos conteúdos. O historiador da matemática Luis Radford propõe, em um artigo de 1997, que a interação entre ensino e história deveria dar-se, em detrimento de abordagens anedóticas ou contextuais, a partir de "uma espécie de laboratório epistemológico, no qual explora-se o desenvolvimento do conhecimento matemático" (Radford, 1997, p. 26). Nesse sentido de se pensar a história no ensino, a análise da emergência de conceitos a partir de suas interações com a filosofia nos parecem especialmente pertinente.

Bibliografia

Cassirer, Ernst. *Der kritische Idealismus und die Philosophie des "gesunden Menschenverstandes''. Giessen: Töpelmann, 1906*

Cassirer, Ernst. *Kant und die moderne Mathematik*: *Mit Bezug auf Bertrand Russells und Louis Couturats Werke über die Prinzipien der Mathematik*. Kant Studieren, vol. 12, no. 1-3, pp. 1-49, 1907.

Cassirer, Ernst. *Substanzbegriff und Funktionsbegriff, Untersuchungenuber die Grundfragen der Erkenntniskritik*. Berlin: B. Cassirer, 1910.

Cassirer, Ernst. *The Problem of Knowledge*. Chicago: Yale University Press, 1950.

Cassirer, Ernst. *Substance and Function*. Translated by William & Maria Swabey. Dover Publications Inc., 1953.

Cassirer, Ernst. Hermann Cohen and the Renewal of Kantian philosophy: translated by Lydia Patton. *ANGELAKI journal of the theoretical humanities*, v. 10, n. 1, p. 95-108, 2005.

Dedekind, Richard. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg & Sohn, 1961.

Ferreira, Débora; Schubring, Gert. “Complex numbers” and the problem of multiplication between quantities. *Historia Mathematica*, 2021.

Frege, Gottlob. *The Foundations of Arithmetic*. Translated by J. L. Austin. New York: Northwestern University Press, 1960.

Fries, Jakob Friedrich. *Von Deutschem Bund und Deutscher Staatsverfassung*. Mohr u. Winter, 1816.

Fries, Jakob Friedrich. *Die mathematische Naturphilosophie nach philosophischer Methode bearbeitet: ein Versuch*. CF Winter, 1822. Heidelberg

Gajdenko, P. Ontologic Foundation of Scientific Knowledge in Seventeenth-and Eighteenth-Century Rationalism. In: *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*, p. 55-63. Springer, Dordrecht, 1981.

Gauß, Carl Friedrich. Notice on the theory of biquadratic residues, in: *From Kant to Hilbert: A SourceBook in the Foundations of Mathematics* ,Volume 1, Ed. W. B. Ewald (Oxford UniversityPress, Oxford, 1996). pp. 306-313.

Gillies, Donald. *Frege, Dedekind, and Peano on the foundations of arithmetic*. Assen: Van Gorcum, 2011.

Grattan-Guinness, Ivor. On the role of the Ecole Polytechnique 1794–1914, with special reference to mathematics. In: BUCHWALD, J.Z. (Ed.) *A master of science history.* New York: Springer, 2012. (New studies in the history of science and technology, v. 30)

Grattan-Guinness, Ivor. *The rainbow of mathematics: A history of the mathematical sciences.* WW Norton & Company, 2000.

Graßmann, Hermann. *Die Wissenschaft der extensiven Größe oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disziplin.* Leipzig, 1844.

Graßmann, Hermann. *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*. Th. Chr. Fr. Enslin, 1861.

Graßmann, Hermann. *A new branch of mathematics: the “Ausdehnungslehre” of 1844 and other works*. Translated by Lloyd C. Kannenberg. Chicago: Open Court Publishing Company, 1995

Gregory, Frederick. Extending Kant: the origins and nature of Jakob Friedrich Fries’s philosophy of science. In: Friedman M, Nordmann A (eds) *The Kantian legacy in nineteenth-century science*. The MIT Press, Cambridge, MA, pp 101–121, 2006.

Heis, Jeremy. Ernst Cassirer's Neo-Kantian Philosophy of Geometry. *British Journal for the History of Philosophy*, 19:4, 759-794, 2011.

Heis, Jeremy, "Neo-Kantianism", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/neo-kantianism/>, 2018.

Henke, Ernst Ludwig Theodor. *Jakob Friedrich Fries. Aus seinem handschriftlichen Nachlasse dargestellt*. Leipzig: Brockhaus. 1867

Herrmann, Kay. Jakob Friedrich Fries (1773-1843): Eine Philosophie der exakten Wissenschaften. *Tabula Rasa*. Jenenser Zeitschrift Für Kritisches Denken (6), 1994

Hilbert, David. On the foundations of logic and arithmetic. In: *From Frege to Gödel, a Source book in Mathematical Logic*, van Heijenoort (1967), pp. 129-138, 1904.

Hilbert, David. On the Infinite. In: *From Frege to Gödel, a Source book in Mathematical Logic*, van Heijenoort (1967), pp. 367–92, 1925.

Hilbert, David. The foundations of Mathematics. In: *From Frege to Gödel, a Source book in Mathematical Logic*, van Heijenoort (1967), pp. 464–79, 1927.

Kant, Immanuel. *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft.* Felix Meiner Verlag: 1786.

Kant, Immanuel. *Da utilidade de uma nova crítica da razão pura: resposta a Eberhard.* Tradução, introdução e notas por Márcio Pugliesi e Edson Bini. Hemus: São Paulo, 1975.

Kant, Immanuel. *Crítica da razão pura.* Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. 5º edição. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2005.

Kant, Immanuel. *Prolegômenos a qualquer metafísica futura que possa apresentar-se como ciência.* Tradução de José Oscar de Almeida Marques. Estação Liberdade: Lisboa, 2014.

Klein, Felix. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Verlag von A. Deichert, Erlangen, (JFM 4, pp 229-231), 1872.

Klein, Felix. The Arithmetizing of Mathematics. In: *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 2, n. 8, pp.2419, 1896.

Krohn, Wolfgang; Küppers, Günter. *Die Selbstorganisation der Wissenschaft*. Suhrkamp, 1989.

Kubalica, Tomasz. The polemic between Leonard Nelson and Ernst Cassirer on the critical method in the philosophy. *Folia Philosophica,* 35, pp. 53-69, 2016.

Lassalle Casanave, Abel. *Por Construção de Conceitos: Em torno da filosofia kantiana da matemática*. Loyola: São Paulo, 2019.

Lewis, Albert C. The Influence of Graßmann's Theory of Tides on the Ausdehnungslehre. In: *Hermann Günther Graßmann (1809–1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar*, p. 29-36. Springer, Dordrecht, 1996.

Mill, John Stuart. *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive*. Toronto: University of Toronto Press, 1974. [obra original publicada em 1843]

Natorp, Paul. Ueber objektive und subjektive Begründung der Erkenntnis. *Philosophische Monatshefte* 23: 257–286, 1887.

Nelson, Leonard. *Socratic Method and Critical Philosophy: Selected Essays.* Translated by Thomas K. Brown III. New Haven: Yale University Press, 1949.

Neurath, Otto. Unified Science as Encyclopedic Integration. In: O. Neurath, R. Carnap & C. Morris (eds.): *International Encyclopedia of Unified Science*. The University of Chicago Press, 1955.

Pulte, H. Kant, Fries and the Expanding Universe of Science. In: Friedman, M. and Nordmann, A. (eds.) *The Kantian Legacy in Nineteenth-Century Sciences*, p. 101–122. (Harvard: MIT Press), 2006

Radford, Louis. On psychology, historical epistemology, and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the learning of mathematics*, 17(1), 26-33, 1997.

Reid, Constance. Hilbert-Courant. Springer Science & Business Media, 1986.

Roque, Tatiana. *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Zahar: Rio de Janeiro, 2012.

Russell, Bertrand. *Principles of Mathematics*. Nova York, W.W. Norton & Cia, 1963.

Sarukkai, Sundar. *Translating the world*. University Press ofAmerica, Inc., 2002

Schubring, Gert. The conception of pure mathematics as an instrument in the professionalization of mathematics. In: *Social history of nineteenth century mathematics*. p. 111-134. Birkhäuser, Boston, MA, 1981.

Schubring, Gert. The cooperation between Hermann and Robert Graßmann on the foundations of mathematics. In: *Hermann Günther Graßmann (1809–1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar*, p. 59-70. Springer, Dordrecht, 1996.

Schubring, Gert. Philosophie der Mathematik bei Fries, *Jakob Friedrich Fries – Philosoph, Naturwissenschaftler und Mathematiker*,Hrsg. Wolfram Hogrebe, Kay Hermann. p. 175–193 Frankfurt am Main: Peter Lang, 1999.

Schubring, Gert. A framework for comparing transmission processes of mathematics to the Americas. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 2, n. 3, p. 45-63, 2002.

Schubring, Gert. *Conflicts between generalization, rigor, and intuition: number concepts underlying the development of analysis in 17th-19th century France and Germany*. New York: Springer, 2005.

Schubring, Gert. The way from the combinatorial school to the reception of Weierstrassian analysis. In: Dalla pecia all'e-book. *Libri per l'Università: stampa, editoria, circolazione e lettura*. Atti del Convegno internazionale di studi, Bologna, 21–25 ottobre 2008, ed. Gian Paolo Brizzi and Maria Gioia Tavoni, 431–442. Bologna: CLUEB, 2009.

Schubring, Gert (Ed.). *Hermann Günther Graßmann (1809-1877): visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar.* Springer Science & Business Media, 2013.

Schubring, Gert. A correspondência de Karl Weierstrass: resultados de pesquisa em andamento. Anais/Actas do 6º Encontro Luso-brasileiro de História a Matemática, 225–240, 2014.

Schubring, Gert. O Que é e ao Que Serve a Hermenêutica?. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, v. 11, n. 2, p. 194-200, 2018.

Shabel, Lisa. *Mathematics in Kant's critical philosophy: Reflections on mathematical practice*. Routledge: New York, 2003.

Shabel, Lisa. Reflections On Kant's Concept Of Space. In: *Studies in History and Philosophy of Science,* Part A 34 (1):45-57, 2003.

Skidelsky, Edward. *Ernst Cassirer: The Last Philosopher of Culture*. Princeton: Princeton University Press, 2008.

Struik, Dirk. *A concise history of mathematics*. 4th edition. Dover Publications: New York, 1987.

Timerding, Heinrich Emil. Kant und Gauß. *Kant-Studien*, v. 28, n. 1-2, p. 16-40, 1923.

Tobies, R. The Reception of H. Graßmann's mathematical achievements by A. Clebsch and his school. In G. Schubring (ed.): *Hermann Günther Graßmann (1809–1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar* (pp. 117-130). Dordrecht: Springer, 1996.

Tóth, Imre. A Revolução Não-Euclidiana. *Caderno de Física da UEFS,* 09 (01 e 02): 37-52, 2011.

Turner, R. Steven. The Prussian Universities and the Concept of Research. *Internationales Archiv für Sozialgeschichte der Deutschen Literatur*, vol. 5, no. Jahresband, pp. 68-93, 1980.

Vaihinger, Hans. *Kant-Studien*, vol. 1, nº 1-3. W. de Gruyter, 1897.