

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CECILIA FERREIRA BORGES DE ALCANTARA

**UM ESTADO DA ARTE DA PESQUISA SOBRE ENSINO DE ANÁLISE
REAL NO BRASIL A PARTIR DE ARTIGOS**

RIO DE JANEIRO

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CECILIA FERREIRA BORGES DE ALCANTARA

**UM ESTADO DA ARTE DA PESQUISA SOBRE ENSINO DE ANÁLISE
REAL NO BRASIL A PARTIR DE ARTIGOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, sob orientação da Prof^a. Dr^a. Márcia Maria Fusaro Pinto.

RIO DE JANEIRO

Maio, 2022

CIP - Catalogação na Publicação

A347e Alcantara, Cecilia Ferreira Borges de
Um estado da arte da pesquisa sobre ensino de
Análise Real no Brasil a partir de artigos /
Cecilia Ferreira Borges de Alcantara. -- Rio de
Janeiro, 2022.
152 f.

Orientadora: Márcia Maria Fusaro Pinto.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa
de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2022.

1. Educação Matemática. 2. Análise Real. 3.
Análise Matemática. 4. Ensino de Análise. 5. Estado
da Arte. I. Pinto, Márcia Maria Fusaro, orient. II.
Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

**UM ESTADO DA ARTE DA PESQUISA SOBRE ENSINO DE ANÁLISE
REAL NO BRASIL A PARTIR DE ARTIGOS**

CECILIA FERREIRA BORGES DE ALCANTARA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada em: ____ / ____ / _____

Banca Examinadora:

Prof^ª. Dr^ª. Márcia Maria Fusaro Pinto (Orientadora)
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof^ª. Dr^ª. Luciane de Souza Velasque
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Silvio César Otero-Garcia
Instituto Federal de São Paulo

RIO DE JANEIRO

Maio, 2022

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, em primeiro lugar. Pela força e fé que me fortalecem e me fortaleceram para seguir a dissertação. Pela minha saúde e dos meus, em um período tão delicado para Humanidade. É a Ele que agradeço também a oportunidade de realizar este Mestrado, um sonho sonhado por mim e por minha família, que se tornou realidade.

Agradeço aos meus pais, pelo apoio e incentivo em todas as fases de minha vida e, particularmente, nesses anos de mestrado.

À minha irmã, por sua eterna companhia e amizade, durante toda minha vida.

Ao meu noivo, pelo carinho, companheirismo, parceria e compreensão. Por ser um dos meus maiores incentivadores.

Aos meus amigos, por serem um conforto nos momentos difíceis, e por vibrarem com minhas conquistas.

Ao PEMAT por ter aberto as portas para esse curso, possibilitando tanto conhecimento acadêmico, profissional e pessoal, através das atividades acadêmicas e acolhimento dos professores.

À minha orientadora Marcia Fusaro por todo direcionamento, disponibilidade, carinho e calma para me guiar neste processo.

A Cybele Vinagre, Simone Dantas e Anne Michelle Dysman, minhas professoras/orientadoras durante o período da Licenciatura em Matemática da UFF, por me incentivarem e acreditarem no meu potencial, pela confiança e desejos de sucesso e felicidade. Suas vibrações chegam em mim e me fortalecem.

A todos minha sincera e profunda gratidão. Este é um dos momentos mais felizes da minha vida.

RESUMO

Objetivamos, nesta dissertação, realizar *um* estado da arte da produção brasileira sobre o ensino de Análise Real, a partir de artigos publicados entre 2011 e 2020, em prosseguimento a um Estado da Arte sobre o mesmo tema desenvolvido anteriormente. Como objetivos específicos, elencamos: (1) investigar que metodologias vêm sendo empregadas nas ações didáticas em sala de aula no ensino de Análise Real e (2) identificar que temáticas sobre o ensino de Análise Real estão mais presentes nas pesquisas. A coleta de trabalhos para compor o corpus de pesquisa foi realizada em duas fontes: o Google Acadêmico, complementado pelas referências elencadas nos trabalhos selecionados. A análise dos artigos inicia com resumos das pesquisas selecionadas, elaborando a partir desses, e com o auxílio da Análise Temática, categorias temáticas para construir o Estado da Arte proposto. Incluindo os 24 artigos que atenderam aos critérios de seleção, quatro grandes temas foram identificados: (1) *Metodologias* alternativas; (2) *Análise na Formação de Professores*; (3) *O “fazer Matemática” em Análise* e (4) *Filosofia e História da Matemática*. O volume de pesquisas encontrado, bem como a variedade em suas temáticas surpreendeu em comparação ao Estado da Arte anterior. Em relação às temáticas, destaca-se o tema (1), evidenciando o interesse crescente do ensino e da pesquisa em Educação Matemática em experiências na sala de aula de Análise adotando metodologias alternativas à tradicional. Em relação à frequência de pesquisas que o contemplam, destaca-se o tema (2), sinalizando amplo interesse na discussão da disciplina de Análise Real em cursos de Licenciatura.

Palavras-chave: Educação Matemática; Análise Real; Análise Matemática; Disciplina de Análise; Ensino de Análise; Estado da Arte.

ABSTRACT

Our aim is to build a state of the art of the Brazilian research production on the teaching of Real Analysis, contemplating articles published between 2011 and 2020. It complements the previous state of the art already developed on the same topic a decade earlier. In particular, the research aims are: (1) to investigate which methodologies have been used in classroom pedagogical actions for teaching Real Analysis and (2) to identify which themes on teaching Real Analysis are raising research interest. The research was carried out in two data bases: in Google Scholar, and in the list of references of the articles selected from the previous source. The analysis of the research corpus started with the research summaries, followed by the elaboration of thematic categories using the Thematic Analysis methodology until finally building the state of the art aimed at. From the analysis of the 24 articles that met the selection criteria four major themes were identified: (1) alternative methodologies; (2) analysis within teacher training; (3) “doing mathematics” in analysis and (4) philosophy and history of Mathematics. The volume of research, as well as the variety in the themes corresponding to their research focus, was surprising when compared with the previous state of the art corpus. Regarding the frequency of research foci and themes, the theme (1) stands out, evidencing the growing interest of teaching and research in Mathematics Education on experiences and interventions in the analysis classroom, adopting methodologies alternative to the traditional one. In relation to the amount of research, the theme (2) stands out, too, signalling the broad interest in the discussion of teaching Real Analysis for prospective teachers.

Key words: Mathematics Education; Real Analysis; Mathematical Analysis; Analysis Course; Analysis teaching; State of Art.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|--|-----------|
| Figura 1: Mapa de Literatura | 43 |
| Quadro 1: Nomenclaturas de Análise em instituições brasileiras..... | 14 |
| Quadro 2: Critérios de inclusão. | 29 |
| Quadro 3: Pesquisas incluídas na revisão | 38 |
| Quadro 4: Distribuição de artigos encontrados por periódico..... | 39 |
| Quadro 5: Extrato Qualis dos periódicos contemplados | 41 |
| Quadro 6: Metodologias e abordagem dos artigos..... | 76 |
| Quadro 7: Instrumento de coleta de dados | 78 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|------------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 11 |
| 1.1 | Trajетórias pessoal e acadêmica e suas implicações na pesquisa | 11 |
| 1.2 | Uma caracterização da disciplina Análise Real | 13 |
| 1.3 | Estado da arte | 16 |
| 1.4 | O contexto da pesquisa em ensino de Análise descrito por Otero-Garcia | 17 |
| 1.5 | Objetivos da pesquisa | 22 |
| 2 | PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS | 23 |
| 2.1. | Etapa 1: PLANEJAMENTO DA REVISÃO | 23 |
| 2.2. | Etapa 2: CONDUÇÃO DA REVISÃO | 31 |
| 2.3. | Etapa 3: ANÁLISE DE DADOS | 32 |
| 3 | APRESENTAÇÃO DAS PESQUISAS | 35 |
| 3.1 | Seleção dos trabalhos para a análise e seus aspectos descritivos | 35 |
| 3.2 | Sobre o estado da arte | 42 |
| 4 | ESTADO DA ARTE – (1) METODOLOGIAS ALTERNATIVAS | 45 |
| 4.1 | SÍNTESES E REFLEXÕES | 45 |
| 5 | ESTADO DA ARTE – (2) ANÁLISE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES | 50 |
| 5.1 | SÍNTESES E REFLEXÕES | 50 |
| 6 | ESTADO DA ARTE – (3) O “FAZER MATEMÁTICA” EM ANÁLISE | 57 |
| 6.1 | SÍNTESES E REFLEXÕES | 57 |
| 7 | ESTADO DA ARTE – (4) FILOSOFIA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA | 61 |
| 7.1 | SÍNTESES E REFLEXÕES | 61 |
| 8 | QUESTÕES CRÍTICAS EM OTERO-GARCIA E O DESENVOLVIMENTO DA ÁREA DE PESQUISA | 64 |
| 9 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 73 |
| | REFERÊNCIAS | 82 |
| | APÊNDICE A – VERSÃO DETALHADA DAS METODOLOGIAS ALTERNATIVAS.. | 87 |
| | USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS | 87 |
| | DESENHO DE TAREFAS | 97 |
| | Desenho de tarefas: Sequência Fedathi | 97 |
| | Desenho de tarefas: Educação Matemática Realística | 99 |
| | METODOLOGIAS ATIVAS | 103 |
| | Metodologias ativas: Sala De Aula Invertida | 104 |
| | Metodologias ativas: Cenários para Investigação | 106 |
| | APÊNDICE B – VERSÃO DETALHADA DA ANÁLISE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES | 110 |
| | CURRÍCULO E PROGRAMAS | 110 |
| | Currículo e programas: Conhecimentos curriculares presentes nas disciplinas de Análise do Brasil | 110 |
| | Currículo e programas: A prática como componente curricular em Análise Real | 112 |
| | Currículo e programas: Por que Análise Real na Licenciatura? | 113 |
| | Currículo e programas Avaliações externas: ENADE | 120 |
| | PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM | 121 |
| | Processos de ensino e aprendizagem: Dificuldades na aprendizagem de seqüências numéricas | 121 |
| | Processos de ensino e aprendizagem: Educação a distância | 124 |
| | Processos de ensino e aprendizagem: A noção de cognição inventiva | 125 |
| | APÊNDICE C – VERSÃO DETALHADA DO “FAZER MATEMÁTICA” EM ANÁLISE | |

| | |
|--|------------|
| PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO..... | 131 |
| ARGUMENTAÇÕES MATEMÁTICAS..... | 133 |
| A INTERPRETAÇÃO DE SIGNOS NA MATEMÁTICA | 138 |
| APÊNDICE D – VERSÃO DETALHADA DA FILOSOFIA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA | 141 |

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo contextualizo a pesquisa, mostrando como as minhas trajetórias pessoais e acadêmicas implicaram em seu desenvolvimento. Caracterizo a *Análise Real* que o trabalho se refere, defino o que estamos considerando como “estado da arte” e, por fim, apresento o contexto sobre a pesquisa em ensino de Análise Real realizado pelo último mapeamento em Otero-Garcia (2011a).

1.1 Trajetórias pessoal e acadêmica e suas implicações na pesquisa

A motivação deste estudo vem da minha experiência como monitora de Análise Real na Universidade Federal Fluminense (UFF), no ano de 2018. Esta disciplina sempre foi considerada uma das mais difíceis do curso de Matemática da UFF, o que era atestado pelos altos índices de reprovação da Universidade. Mas algo chamou minha atenção para seu ensino: em 2018, mais precisamente no primeiro semestre letivo, foi implementado um projeto de ensino de Análise Real utilizando Metodologias Ativas de ensino em ambas as turmas oferecidas pelo Instituto de Matemática e Estatística da UFF.

Durante maior parte da minha trajetória acadêmica o ensino de matemática foi abordado usando metodologia tradicional, em que o professor era visto como detentor do conteúdo e os alunos apenas escutavam sua aula. Materiais manipuláveis e atividades em grupo, por exemplo, tiveram pouco lugar ao longo desse percurso. Sempre que tinha oportunidade de participar de aulas “diferentes”, me sentia mais motivada para aprender os conteúdos. Aulas que, infelizmente, foram mais centralizadas no ensino fundamental.

Na licenciatura, um fator que expandiu meus horizontes sobre o ensino foi o de me tornar monitora de Análise I, no mesmo período em que as Metodologias Ativas de ensino foram implementadas nas turmas. Durante a experiência como monitora pude ter maior contato com tais metodologias e, dessa vez, com o olhar de professora em formação.

Durante as aulas, ao invés das cadeiras enfileiradas, direcionadas para o quadro, os alunos sentavam-se em grupos. As aulas expositivas não eram o foco do processo de ensino e aprendizagem. Os alunos resolviam questões em grupo, levantavam conjecturas, exploravam teoremas e suas hipóteses, de acordo com o proposto pelas professoras regentes.

Para mim, o fato mais interessante de toda essa iniciativa do projeto de Metodologias Ativas era que estava sendo realizado justamente em uma das disciplinas mais temidas pelos

alunos. Esta proposta poderia auxiliá-los no entendimento e principalmente na desmistificação da Análise. Era a Análise saindo do status quo, de “intocável”.

Depois de breve estudo proposto como uma das atividades no projeto de monitoria de que participava – leitura e discussão de textos sobre o tema - comecei a ter mais contato com seus benefícios para a aprendizagem dos alunos e para as relações interpessoais, despertando um grande interesse em aprofundar o estudo do tema no Mestrado.

Todo este contexto me levou à elaboração de um primeiro projeto de pesquisa, intitulado *Metodologias Ativas De Ensino Como Instrumento Para O Desenvolvimento Do Pensamento Matemático Avançado No Contexto Da Disciplina De Análise Real*, apresentado no EBRAPEM 2019 (ALCANTARA, 2019) cujo objetivo geral era o de investigar como os processos de raciocínio matemáticos, observados no contexto de sala de aula da disciplina Análise Real em que Metodologias ativas de ensino são usadas, se constituem nas interações aluno-aluno e aluno-professor. A proposta consistia na investigação das aulas de Análise Real na UFF, que utilizam metodologias ativas de ensino, agora com um olhar de pesquisadora em formação. Como método ia observar as aulas, fazer anotações de campo e analisar as interações a partir de referencial teórico a ser escolhido e estudado.

Entretanto, com a pandemia da COVID-19 e, como consequência, a quarentena e o isolamento social, as aulas da Universidade em que seriam realizadas as investigações, bem como a da maioria absoluta das instituições de ensino, seguindo recomendações de órgãos de saúde, foram canceladas.

Até que no dia 12 de junho de 2020, o Conselho de Ensino, Pesquisa e Extensão (CEPEX) da Universidade aprovou a Resolução n.º 156/2020¹, que diz respeito Atividades Acadêmicas Emergenciais. Nesta resolução a Universidade declara a implementação de um período letivo especial, de forma que seriam oferecidas disciplinas remotamente apenas para alunos prováveis concluintes do período 2020.1, isto é, aqueles que tinham chance de se formar no semestre corrente.

As incertezas sobre a aplicabilidade e prosseguimento daquele projeto inicial levaram à necessidade de alterá-lo e pensarmos novas possibilidades. Aliado ao uso das metodologias ativas de ensino o primeiro projeto também ressalta outra questão intrigante para mim: o ensino de Análise Real por si, como acontece e o que vem sendo discutido sobre os resultados de tal curso. Esse foi o ponto de partida para a construção do segundo projeto.

¹ Disponível em <http://www.uff.br/?q=noticias/18-06-2020/uff-cria-calendario-especial-de-aulas-remotas-para-estudantes-concluintes> Acesso em 13 jun. 2020

Durante a pesquisa bibliográfica já iniciada, deparei-me com a dissertação de Otero-Garcia (2011a) – *Uma trajetória da disciplina de Análise e um estado do conhecimento sobre seu ensino* – que, como o título sugere, realizou uma pesquisa do tipo estado da arte, sobre o ensino de Análise Real da produção brasileira. Neste trabalho, em que foram incluídas pesquisas de 1987 a 2010, verificou-se que a área era pouco explorada. Sua metodologia de busca identificou apenas 17 pesquisas, o que é um número ínfimo se comparado a outras áreas da Educação Matemática no Ensino Superior.

Esse resultado já despertara desde então meu interesse em conhecer o movimento na área de 2011 até a presente data - se as lacunas expostas foram sanadas, se o número de trabalhos permanecia pequeno, se o foco das pesquisas atuais permanecia semelhante aos encontrados por Otero-Garcia. Buscando manter relações com meu primeiro projeto e dissociando-me das pesquisas de campo, que poderiam gerar ainda mais incertezas sobre o prosseguimento da investigação, elaboramos a proposta apresentada neste trabalho.

1.2 Uma caracterização da disciplina Análise Real

O parecer CNE/CES 1302/2001 (BRASIL, 2001)² apresenta diretrizes curriculares para cursos de Matemática, nas modalidades Bacharelado e Licenciatura. Tal documento prevê a disciplina *Análise Matemática*, para os cursos de Bacharelado, e *Fundamentos de Análise*, para os cursos de Licenciatura em Matemática, como parte das disciplinas comuns a todos os cursos de Bacharelado/Licenciatura do país.

Entretanto, quando nos referimos ao nome dado para estas disciplinas na grade curricular dos cursos mencionados, o que se percebe é a falta de uma uniformização nas universidades brasileiras. Ao analisarmos a grade curricular³ obrigatória de cursos de Licenciatura e Bacharelado de dez⁴ instituições brasileiras⁵, encontramos diversos termos relacionados a estas disciplinas, apresentadas no quadro a seguir:

² BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática Bacharelado e Licenciatura**, Brasília: MEC/SEF, 2001 (PARECER CNE/CES 1.302/2001).

³ Analisamos apenas as disciplinas equivalente à Análise Real, isto é, disciplinas como Análise em R^n ou Análise Complexa não estão sendo consideradas, uma vez que não é o foco desta dissertação.

⁴ Foram selecionadas as dez melhores universidades brasileiras de acordo com o ranking das melhores universidades mundiais de 2020 elaborado pelo grupo QS Quacquarelli Symonds. Disponível em <https://g1.globo.com/educacao/noticia/2020/11/11/usp-unicamp-e-ufjr-estao-entre-as-10-melhores-universidades-da-america-latina-aponta-ranking.ghtml>. Acesso em 06 jul. 2021.

⁵ A Universidade Federal de São Paulo (Unifesp) é a 9ª colocada no ranking, mas não tem curso de Matemática, Bacharelado ou Licenciatura.

| Universidade | Licenciatura em Matemática | Bacharelado em Matemática |
|--|-----------------------------------|------------------------------|
| Universidade de São Paulo (USP) | Introdução à Análise | Análise Real |
| Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) | Introdução à Análise | Análise Real I ⁶ |
| | | Análise Real II ⁷ |
| Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) | Análise Real | Análise I |
| | | Análise II |
| Universidade Estadual Paulista (Unesp) | Análise Matemática I | Análise Matemática I |
| | | Análise Matemática II |
| | | Análise Matemática III |
| Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) | Fundamentos da Análise | _ ⁸ |
| Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC Rio) | _ ⁹ | Introdução à Análise |
| | | Análise Real |
| Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) | Análise Real I Análise Real II | Análise Matemática A |
| | | Análise Matemática B |
| | | Análise Matemática C |
| Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) | Análise na Reta | Análise na Reta |
| | | Análise I |
| | | Análise II |
| Universidade de Brasília (UnB) | Análise 1 | Análise 1 |
| | | Análise 2 |
| | | Análise 3 |
| Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) | Análise Matemática para o Ensino | Análise na Reta |

Quadro 1: Nomenclaturas de Análise em instituições brasileiras.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2022).

⁶ Não ficou claro se este nome é exclusivo do Bacharelado.⁷ Não ficou claro se este nome é exclusivo do Bacharelado.⁸ Não foi encontrada a grade do curso.⁹ A instituição não tem este curso.

Além dos diversos títulos atribuídos, as nomenclaturas sugeridas pelo Parecer CNE/CES 1302/2001 (BRASIL, 2001) não são comuns nas instituições analisadas. Um elemento comum é a divisão da disciplina em mais de um componente curricular, gerando disciplinas como “Análise Real I” e “Análise Real II”. A autonomia das Universidades nessa divisão é amparada pelo documento, uma vez que descreve que os conteúdos comuns aos cursos de Bacharelado/Licenciatura, “podem ser distribuídos ao longo do curso de acordo com o currículo proposto pelas IES” (BRASIL, 2001, p. 5)

Entretanto, a ausência de uniformização de um termo que identifique a disciplina Análise, implica na falta de convergência e caracterização na pesquisa sobre seu ensino, como destacado por Otero-Garcia (2011a). O autor verificou que em apenas sete dos dezessete trabalhos analisados havia a citação da palavra *Análise* de alguma forma em sua lista de palavras-chave, a saber: *Análise Matemática* (4 ocorrências), *Análise Real* (1), *Ensino de Análise Real* (1) e *Análise Matemática Moderna* (1) e, que, além disso, o termo *Ensino de Análise* sequer foi mencionado. Esta falta de uniformização gerou dificuldades no seu processo de seleção de pesquisas – e também no nosso.

A respeito dos conteúdos que devem ser abordados na disciplina de Análise, o parecer CNE/CES 1302/2001 (BRASIL, 2001) não nos oferece sugestões. Explicitaremos, a seguir, qual será nosso entendimento sobre a disciplina de Análise Real e os conteúdos abordados.

A Análise Real, é entendida como uma formalização do *Cálculo Diferencial e Integral*. Reis (2001) aponta que as temáticas fundamentais em uma disciplina de Análise são as mesmas de uma disciplina de Cálculo e o que as diferencia é a abordagem: enquanto no Cálculo, os tópicos são “abordados sob uma perspectiva aplicada, com a interpretação intuitiva das noções, na Análise eles são abordados, geralmente, sob uma perspectiva lógico-formal, com a definição rigorosa dos objetos estudados” (REIS, 2001, p. 25).

Essa ideia nos leva a pensar quais conteúdos são estes. O livro *Curso de Análise* de Elon Lages Lima (LIMA, 1976), muito utilizado em disciplinas de Análise Real no Brasil (apontado por Reis (2001) e reiterado por Amorim (2011), no âmbito de universidades mineiras), tem em sua organização dez capítulos, cujos conteúdos são: Conjuntos e funções; conjuntos finitos, enumeráveis e não-enumeráveis; números reais; sequências e séries de números reais; topologia da reta; limites de funções; funções contínuas; derivadas; integral de Riemann e sequências e séries de funções. Sinteticamente, o autor pontua no prefácio, a obra se dedica ao estudo das funções reais de uma variável real.

Outro livro que também se encontra na bibliografia base de disciplinas de Análise é o livro de Djairo Guedes Figueiredo (FIGUEIREDO, 1996), intitulado *Análise I*. Nesta obra, os conteúdos elencados são: números reais; funções reais; funções deriváveis; funções trigonométricas; a

integral; funções logarítmica e exponencial; relações entre derivação e integração; integrais impróprias e sucessões e séries de funções. Ambos os autores pontuam que é desejável que os leitores tenham familiaridade com os conteúdos e técnicas do Cálculo Diferencial e Integral.

Entenderemos aqui que a Análise Real é a de uma disciplina cujo foco seja o estudo das funções reais de uma variável real, em que os conteúdos elencados são os mesmos do Cálculo, e dentro dos listados anteriormente, mas, cuja abordagem se configura de maneira mais formal.

1.3 Estado da arte

O estado da arte, também chamado de estado do conhecimento, é uma modalidade de pesquisa (MELO, 2006), que busca descrever “aspectos ou tendências gerais da pesquisa em um determinado campo de conhecimento, destacando seus principais resultados e conclusões e fazendo um balanço-síntese do conhecimento produzido no campo” (FIORENTINI et al, 2016, p. 19). Os autores completam dizendo que nesta modalidade de pesquisa, geralmente analisa-se uma ampla quantidade de estudos.

Ferreira (2002), em seu artigo *sobre* estado da arte, aponta que um pesquisador que irá produzir um trabalho desta modalidade passa por dois momentos bem distintos: no primeiro, o de mapeamento¹⁰ da produção, a partir de um recorte temporal, regional e por área de produção, por exemplo, interagindo com a produção acadêmica através de aspectos qualitativos e de identificação de dados. Neste momento é possível avaliar o movimento que a área realizou: se houve saltos ou publicações contínuas, se cresceram em número ao longo do tempo e etc.

Já no segundo momento o pesquisador se depara com a catalogação¹¹ dessa produção, buscando tendências, ênfases e escolhas metodológicas e teóricas. Nesta fase, Ferreira (2002) aponta que o pesquisador deve buscar responder, além das questões objetivas de “quando”, “onde” e “quem” produziu os trabalhos em determinados períodos ou locais, questões mais específicas, as perguntas que se referem a “o quê” e “o como” dos trabalhos realizados.

Entendemos que a modalidade estado da arte, além de objetivar unir e descrever aspectos atuais/passados de determinada área de conhecimento, busca apresentar uma visão do futuro da área, como destacado em Melo (2006):

Como o conhecimento é um estado em efervescência, em crescimento, com transformações e mudanças, o estado da arte consiste em olhar para o futuro a partir de traços e antecedentes imediatos do cenário atual da pesquisa (ERNEST, 1991, p. 1)¹² Portanto, esse tipo de pesquisa não é apenas uma revisão de estudos

¹⁰ Termo utilizado pela autora.

¹¹ Termo utilizado pela autora.

¹² ERNEST, Paul. **Mathematics teaching: the state of the art**. Reimpressão, 1991. Falmer Press, 1989

anteriores, mas busca, sobretudo, identificar as convergências e divergências, as relações e arbitrariedades, as aproximações e contrariedades existentes nas pesquisas e apresentam indícios e compreensões do conhecimento a partir de estudos acadêmicos, como teses e dissertações. (MELO, 2006, p. 62)

Percebemos também que o estado da arte se molda por um aspecto subjetivo, uma vez que o olhar do pesquisador atua sobre os estudos escolhidos para a interpretação da área de estudo, a exemplo da análise de um único trabalho, no qual sua compreensão pode diferir das intenções do autor, quando o escreveu. Assim, “cada leitor assimila, caracteriza e sistematiza o movimento do estado da arte de forma distinta, considerando o momento histórico e o contexto em que se encontra, o que lhe permite fazer uma apropriação diferente daquela produzida pelo próprio autor do estudo” (MELO, 2006, p. 66). Melo completa seu posicionamento, afirmando que diferentes perspectivas e objetivos refletem em impressões distintas sobre os objetos estudados, e ainda que conteúdo/objeto/tema/questão a ser desenvolvido sejam os mesmos, cada autor tem um olhar próprio sobre tais aspectos, o que faz com que as pesquisas sejam diferentes, com a personalidade do autor.

Utilizando dos objetos da metáfora de Melo (2006), é como se duas pessoas, sob a mesma paisagem, precisassem descrevê-la: cada um o descreveria de maneira distinta, apesar de estarem aparentemente sob as mesmas condições.

Dentro deste contexto, este trabalho propõe apresentar *um* estado da arte da pesquisa sobre ensino de Análise Real no Brasil. Os métodos utilizados para busca, seleção e análise das pesquisas serão descritos no Capítulo 2.

1.4 O contexto da pesquisa em ensino de Análise descrito por Otero-Garcia

Nesta seção apresento uma síntese da dissertação de Otero-Garcia (2011a), que além de motivar este trabalho, contribuiu para o campo do ensino de Análise, servindo como referência para inúmeras pesquisas nos últimos anos. Também se configura como o último estado da arte realizado da pesquisa em ensino de Análise.

Indicamos também outros trabalhos do autor publicados posteriormente à sua dissertação, em artigos de periódico ou anais de eventos, mas apresentando recortes de sua pesquisa.

Uma trajetória da disciplina de análise e um estado do conhecimento sobre seu ensino é o título da dissertação de mestrado de Otero-Garcia, sendo orientada por Rosa Lúcia Sverzut Baroni pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) e defendida em 2011. A pesquisa foi realizada em duas etapas. Na primeira, como o título sugere, é feita uma

pesquisa do tipo estado do conhecimento, realizando um mapeamento da produção brasileira sobre o ensino de análise e, na segunda, o autor apresenta uma trajetória da disciplina de análise e um panorama da disciplina na UNESP e na Universidade de São Paulo (USP). Neste resumo focarei apenas na etapa relacionada ao estado da arte sobre o ensino de Análise.

Para o estado da arte foram analisadas dissertações e teses defendidas a partir de 1987, cujos resumos constavam no banco de teses e dissertações da CAPES, artigos em oito periódicos e trabalhos completos publicados nos anais das quatro primeiras edições do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM). Os periódicos analisados foram: *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*; *Boletim GEPEN*; *Revista Ciência e Educação*; *Zetetiké*; *Educação Matemática Pesquisa*; *Educação Matemática em Revista*; *Revista do Professor de Matemática* e *Revista Matemática Universitária*.

Com seu método de busca, o autor encontrou 17 pesquisas que, ao se somar com livros que o autor tinha conhecimento, resultou em 21 trabalhos como objeto de estudo. A partir de sua leitura, foram elaboradas e apresentadas sínteses de acordo com agrupamentos temáticos dos textos (que coincidem com agrupamentos por autor).

Em seguida, o autor apresenta resultados intitulados como “Aspectos quantitativos e qualitativos”, em que faz uma análise focando nos aspectos descritivos das pesquisas, como ano de publicação, veículo (dissertação ou tese, periódico e anais de eventos), titulação do autor principal, estado das defesas (no caso das dissertações e teses), palavras-chave, forma de coleta de dados e subtemas mais discutidos, se baseando nos grupos de pesquisa do SIPEM. Tal discussão também é apresentada em Otero-Garcia (2011b). Focando nos conteúdos das pesquisas mapeadas, o autor faz uma categorização a partir de pontos que emergiram da leitura, apresentando como “questões críticas” sobre o ensino de análise.

Otero-Garcia aponta o caráter recente e tardio das publicações que versam sobre o ensino de análise nas instituições brasileiras, em que o primeiro trabalho publicado foi o de Reis (2001), quando iniciou-se um crescimento na quantidade de publicações.

Otero-Garcia analisou teses e dissertações desde 1987 e artigos de periódicos desde 1976 (publicação do primeiro volume do periódico brasileiro de educação matemática). Constatou que para o primeiro caso, não houve nenhuma publicação sobre o assunto por 14 anos e, para o segundo, somente 26 anos depois do primeiro volume, deu-se a publicação do primeiro artigo sobre ensino de análise, ou seja, em 2002.

Levando em conta que a maioria dos trabalhos tem publicações entre 2003 e 2006, que o tempo de doutoramento é em torno de 4 a 5 anos, e que Reis (2001) iniciou seu trabalho em 1997, Otero-Garcia conjectura se esta intensificação no crescimento do número dos trabalhos teria

alguma relação com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, de 1996. Tal lei propiciou grandes mudanças no sistema educacional brasileiro e, particularmente no Ensino Superior, maior abertura para investimento privado, gerando uma proliferação brusca de cursos superiores. O autor pontua que não seria de se “espantar que o interesse por esse nível de ensino tenha aumentado consideravelmente” (OTERO-GARCIA, 2011a, p.108).

Entretanto, esta conjectura acarretaria um crescente interesse também em outras áreas do ensino superior do curso de matemática, o que de fato aconteceu. No entanto, houve uma discrepância grande: há uma quantidade pequena de trabalhos produzidos na temática de ensino de Análise, quando comparado a outras áreas dentro da Educação Matemática no Ensino Superior. Problematizando este fato, Otero-Garcia compara a produção do ensino de Cálculo e ensino de Álgebra Linear, duas outras disciplinas do curso de matemática, nas edições do SIPEM analisadas, ponderando que as outras disciplinas podem ter ascendido por atender um número maior de pesquisadores, já que disciplinas como Cálculo e Álgebra Linear estão presentes na maioria dos cursos de ciências exatas, enquanto Análise Real é específica dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em matemática. Entretanto, também afirma que há possibilidade que o crescimento destas áreas tenha seguido simplesmente uma tendência, ou uma “moda”, que a partir dos primeiros estudos de ensino de cálculo, por exemplo, outras pesquisas tenham tomado a mesma direção. Seguindo este raciocínio, o autor conclui que “não nos espantaria, portanto, que dentro de algum tempo a quantidade de pesquisas em ensino de análise aumente consideravelmente, seguindo, assim, a tendência apresentada nos últimos anos” (OTERO-GARCIA, 2011a, p.109).

Dentro deste contexto, o autor acredita que o caráter recente da pesquisa sobre o ensino de análise, embora a disciplina já apresente questões problemáticas há tempos, pode estar associado ao movimento da própria educação matemática no Brasil, que, a título de exemplo, o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, o mais antigo do Brasil, tem sua primeira dissertação defendida apenas em 1987, mesmo ano que ocorreu o primeiro Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e um ano antes da fundação da SBEM.

A respeito das questões críticas levantadas, quinze categorias foram construídas, a saber: *Números reais; As relações entre o Cálculo e a Análise; Cálculo infinitesimal e Análise não-standard; A formação do professor de Análise; Livros didáticos de Análise; Bacharelado e Licenciatura; Dificuldades com o Cálculo e a Análise e o ensino anterior; Os conteúdos de Análise, sua sequência e abordagem; A armadilha do ensino de Análise; Avaliação em Análise; O ensino de Análise e a influência estrangeira; Formalismo e Análise; O uso de computadores no Ensino de Análise; A disciplina de Análise e as Pedagógicas e Análise e Interpretação.*

Nestas categorias, também apresentadas em Otero-Garcia e Baroni (2015) e Baroni (2015), o autor relaciona os textos incluídos no mapeamento e apresenta caminhos para futuras pesquisas, acreditando ter um cenário que ao mesmo tempo é reconfortante, é desesperador, já que ao mesmo tempo que foi possível vislumbrar possibilidades de pesquisas com a temática, seria necessário uma quantidade de pesquisas muito grande para que seja possível entender profundamente o papel, a importância e a relevância da disciplina de Análise em cursos de formação de professores, o que “nos mostra que até que tudo isso seja feito, estaremos numa situação experimental, para o bem ou para o mal, milhares de professores são formados, em relação à disciplina em questão, do jeito que tudo já está” (OTERO-GARCIA, 2011a, p. 140).

Tais lacunas e caminhos apontados por Otero-Garcia serão discutidos em conjunto com as contribuições deste trabalho, no capítulo 9 da presente dissertação.

Na segunda parte de seu trabalho, Otero-Garcia tem como objetivo central “traçar um panorama da trajetória da disciplina de análise em duas instituições públicas do estado de São Paulo: USP e UNESP” (OTERO-GARCIA, 2011a, p. 144), com foco nos objetivos, conteúdos e bibliografias. Para isso, são analisados programas de disciplina de análise da UNESP e, quando não localizados, foram analisados diários de classe elaborados por professores. Já na USP foram coletados guias, anuários e programas, mas não foram encontrados outros documentos que cobrissem lacunas temporais.

A discussão desse segundo momento de Otero-Garcia (2011^a) também é realizada em Baroni e Otero-Garcia (2011); Otero-Garcia (2013); Otero-Garcia (2015) e Otero-Garcia e Baroni (2011).

Otero-Garcia considera como disciplina de análise

tanto as disciplinas cujos nomes trouxessem no título a palavra ‘análise’ quanto aquelas que tratassem de conceitos da Análise, essa a área da Matemática (no sentido atual). Sendo assim, nosso interesse também recaiu, por exemplo, sobre disciplinas de cálculo¹³, quando essas não tratavam essencialmente de aplicações algorítmicas, como é feito hoje em dia (OTERO-GARCIA, 2011a, p. 145)

Inicialmente não haviam disciplinas específicas de Análise nos cursos analisados. Ela passou a tomar a forma que conhecemos hoje, na década de setenta. Por esse motivo, num primeiro momento tais disciplinas cumpriam tanto a parte rigorosa quanto algorítmica. Entretanto, Otero-Garcia destaca que a ênfase

Aparentemente era dada a analítica que, pouco a pouco se perdeu, migrando para as disciplinas optativas, até ser reincorporado novamente ao curso já em disciplinas específicas de análise. Paralelamente a isso, os antigos cursos de análise também

¹³ Tal decisão foi tomada por que, a priori, já era desconfiado que a disciplina de análise estava relacionada a outras como cálculo e topologia durante certo período (OTERO-GARCIA, BARONI, 2011)

paulatinamente foram se aproximando dos atuais cursos de cálculo (OTERO-GARCIA, 2011a, p. 218)

Sobre o movimento de separação da Análise do Cálculo (e, posteriormente, da Topologia), Otero-Garcia destaca que tal período coincide com o processo de institucionalização da Análise Matemática enquanto área de estudo no Brasil, gerando uma espécie de causa e consequência: “a especialização da área de Análise se reflete no ensino dessa, com consequências claras para as disciplinas que tratam dela” (OTERO-GARCIA, 2011a, p. 214)

Otero-Garcia ressalta movimento da disciplina nas duas instituições analisadas seguiu linhas similares, a menos de questões pontuais e temporais. Entretanto, a diferença fundamental surge posteriormente ao processo de especialização do ensino de análise¹⁴:

Enquanto que no curso da UNESP as disciplinas de análise mantiveram um núcleo comum com o bacharelado (*Análise Matemática I e Análise Matemática II*), no curso da USP essa separação já era completa desde os primeiros anos do IME: a licenciatura tinha *Introdução à Análise* e o bacharelado *Análise Matemática I e Análise Matemática II*, independentes dessa primeira. (OTERO-GARCIA, BARONI, 2011, p. 4564)

Em relação aos objetivos das disciplinas, Otero-Garcia conclui que nem sempre estiveram presentes nos programas analisados e, além disso, quando é mencionada, no IME-USP é feito sem “aprofundamento algum” (OTERO-GARCIA, 2011a, p. 219). Em Otero-Garcia e Baroni (2015) os autores ressaltam que tais programas “quase nunca destacavam o aspecto da formação do licenciando. Além disso, os pontos destacados nesses objetivos praticamente não mudaram, sempre falando da questão da formação do matemático e da retomada com mais rigor de conceitos do cálculo” (OTERO-GARCIA, BARONI, 2015, p. 4565).

Os conteúdos, que se mantém até os dias atuais, foram herdados dos primeiros cursos de Análise Matemática de ambos os cursos. Por outro lado, Otero-Garcia também assinala uma diminuição dos conteúdos:

[...] olhando-se sob um ponto de vista mais geral, qual seja, não dos conteúdos da disciplina de análise atual, mas das disciplinas de conteúdo analítico que foram ministradas para os cursos de licenciatura, a conclusão é outra: o enxugamento. Ano a ano o tratamento analítico vem sendo restrito a cada vez menos conteúdos, juntamente com o processo de algoritmização dos cursos. De um estado inicial onde ele era dado não só às funções de uma variável, mas até variáveis complexas, passando por funções de várias variáveis, equações diferenciais, chegamos a um ponto onde, na UNESP, está restrito às funções de uma variável e no da USP, nem a isso: apenas alguns pontos ‘mais importantes’ é que são destacados (OTERO-GARCIA, 2011a, p. 219)

¹⁴ Entendemos que está relacionado ao processo de separação do Cálculo, da Análise e, posteriormente também da topologia, enquanto disciplinas.

Pouca alteração foi feita em relação à bibliografia utilizada. Otero-Garcia destaca que inicialmente as obras estrangeiras, que predominavam, aos poucos foram sendo substituídas por obras nacionais.

Otero-Garcia (2011a) conclui que em ambos os cursos analisados, os conteúdos e sua sequência foram herdados dos primeiros cursos que indistintamente tratavam do cálculo e da análise, não havendo grandes alterações ao longo dos anos. A estrutura da disciplina também pouco se alterou desde sua separação em disciplinas específicas de análise na década de setenta.

1.5 Objetivos da pesquisa

O objetivo desta pesquisa é realizar *um* estado da arte da produção brasileira sobre o ensino de Análise Real, a partir de artigos publicados entre os anos de 2011 e 2020.

Como objetivos específicos, elencamos:

1. Investigar que metodologias vêm sendo empregadas nas ações didáticas em sala de aula no ensino de Análise Real.
2. Identificar que temáticas sobre o ensino de Análise Real estão mais presentes nas pesquisas.

Esta dissertação está dividida em 9 capítulos. O capítulo *Procedimentos Metodológicos* traz a descrição do planejamento, busca, seleção e análise das pesquisas.

No capítulo 3, *Apresentação das pesquisas*, exibo resultados iniciais, bem como um mapa de literatura, que organiza a análise das pesquisas em temáticas e categorias. Os capítulos 5, 6, 7 e 8 compõem o desenvolvimento do Estado da Arte desejado, em que apresentamos um diálogo das pesquisas incluídas. No Capítulo 8, apresentamos um comparativo das contribuições desta pesquisa e pontos importantes levantados na pesquisa de Otero-Garcia (2011), levantando lacunas na literatura. No Capítulo 9, *Considerações finais*, por fim, apresento sinteticamente os resultados e destaco as informações mais interessantes.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresento minhas decisões metodológicas¹⁵ para busca, seleção e análise das pesquisas, organizadas nas três etapas: (1) planejamento da revisão; (2) condução da revisão e (3) análise de dados.

Ressalto que o trabalho de Otero-Garcia (2011a) foi usado como ponto de partida e, portanto, suas escolhas metodológicas serão apontadas aqui, tornando possível uma comparação e um entendimento melhor sobre o que nos diferencia.

2.1. Etapa 1: PLANEJAMENTO DA REVISÃO

Nesta etapa de planejamento, apresento a justificativa para a realização desta revisão; as questões de pesquisa que norteiam toda a busca e o protocolo de revisão, que apresenta informações importantes para a condução prática da revisão.

Justificativa

Otero-Garcia (2011a) apresenta um estado da arte do ensino de Análise com estudos selecionados até meados de 2010, no âmbito das pesquisas que foram feitas e publicadas no Brasil. Minha pesquisa investigará o período de 2011 a 2020 e se justifica por: refletir sobre questionamentos deixados por Otero-Garcia, analisar o estado da arte atual comparando com o descrito por Otero-Garcia, e identificar as temáticas mais exploradas atualmente, bem como tendências e possíveis lacunas na área do ensino de Análise.

Questões de pesquisa

A fim de orientar a revisão sistemática de literatura, as duas questões de pesquisa serão enunciadas, para serem respondidas, relacionadas aos objetivos desta dissertação:

(Q1) Que metodologias vêm sendo empregadas nas ações didáticas em sala de aula no ensino de Análise Real?

(Q2) Que temáticas sobre o ensino de Análise Real estão presentes nas pesquisas?

¹⁵ Os procedimentos metodológicos realizados foram inspirados na Revisão Sistemática de Literatura. (SILVA, 2020; VICTOR, 2008; WOHLIN et al., 2012).

Protocolo de revisão

O protocolo de revisão é um plano em que o pesquisador apresenta e descreve de maneira detalhada os procedimentos que serão utilizados na revisão. Neste protocolo, apresentamos informações sobre as fontes de seleção de dados; qualidade dos estudos; palavras-chave e os critérios de inclusão e exclusão das pesquisas.

Sobre as fontes de seleção de dados

Otero-Garcia (2011a) descreve um estado da arte sobre ensino de Análise Real das produções brasileiras, incluindo dissertações e teses, oito periódicos¹⁶ e quatro anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM¹⁷.

Em nossa investigação a busca foi realizada em duas fontes de dados distintos (ou dois momentos): Google Acadêmico e lista de referências bibliográficas dos trabalhos incluídos pelo Google. A necessidade e justificativas dessas escolhas serão apresentadas a seguir.

Creswell (2010) aponta a facilidade proporcionada pelos bancos de dados computadorizados para a busca de materiais relevantes. Ressalta que tais fontes “podem proporcionar um acesso rápido a milhares de revistas, textos de conferências e materiais sobre muitos tópicos diferentes” (CRESWELL, 2010, p. 57). Como exemplos de bancos de dados digitais, cita o *Educational Resources Information Center (ERIC)*, *PsycINFO*, *Sociofile*, *Socieal Sciente Citation Index*, *Google Scholar* (Google Acadêmico) e o *ProQuest*.

Após a leitura de outros trabalhos (SILVA, 2020; WOHLIN et al, 2012; BARCELOS et al, 2015; PATROCÍNIO, SILVEIRA, CALEJON, 2016) e a partir das indicações de Creswell (2010) optamos por utilizar o Google Acadêmico¹⁸ como a primeira e a principal fonte de dados para esta pesquisa.

Uma das pesquisas que justifica esta decisão é a de Silva (2020), que realizou uma revisão sistemática sobre o ensino de Estatística na América Latina e considerou, além do Google

16 Boletim de Educação Matemática (BOLEMA); Boletim GEPEN; Revista Ciência e Educação; Zetetiké; Educação Matemática Pesquisa; Educação Matemática em Revista; Revista do Professor de Matemática e Revista Matemática Universitária.

17 Simpósio trienal promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM.

18 A plataforma reúne documentos de diversas áreas do conhecimento, incluindo artigos de jornais e conferências, teses e dissertações, livros acadêmicos, resumos e relatórios técnicos, além de editores acadêmicos, sociedades profissionais e repositórios universitários. Retirado no site do site <https://scholar.google.com.br/> Acesso em 06 set 2020.

Acadêmico, outras 10 fontes como base para busca de dados: Scopus; Web of Science; Academic Search Premier – ASP; Applied Social Sciences Index & Abstracts (ASSIA); Eric (Proquest), Gale – Academic One File; JSTOR Arts & Sciences -Collection (Humanities); JSTOR Arts & Sciences -Collection (Education); SCIELO.ORG e OASIS.BR. Entretanto o autor relata que as outras bases dão preferência a periódicos com nota mais alta no Qualis, nas quais “revistas com notas mais baixas ou sem nota dificilmente serão encontradas nas bases, fora o Google” (SILVA, 2020, p. 53). Por fim, e por este motivo, conclui sobre a eficácia do Google Acadêmico: “comparando o número de artigos encontrados nas bases (43) com os do Google (cerca de 200), conclui-se que o Google tem uma capacidade de localizar os textos maior do que as 10 fontes juntas” (SILVA, 2020, p. 53) e que “[...] é uma fonte que sozinha se mostra boa para a realização de uma revisão sistemática” (SILVA, 2020, p.86).

Ao escolhermos o Google Acadêmico como fonte de dados principal consideramos que há, de certo modo, uma ampliação das fontes de dados utilizadas em Otero-Garcia (2011a). A comparação se dá pelo número de periódicos contemplados. Aqui, como será discutido posteriormente, 19 revistas distintas foram contempladas, enquanto em Otero-Garcia (2011) apenas oito¹⁹. Evidente que para uma comparação real das fontes consultadas em ambas pesquisas, seria necessário que os procedimentos metodológicos fossem os mesmos, mas aqui destacamos a amplitude possibilitada pelo Google Acadêmico.

Gostaria de ressaltar que Molina, Montecino e Aguilar (2020) discorrem sobre a desvalorização de periódicos ibero-americanos frente a produção mundial e apresentam uma lista de dez jornais de relevância na área de Educação Matemática na Ibero-América, a partir de critérios por eles descritos (uma combinação entre opinião de especialistas e citações/referências em artigos). São eles, escritos na ordem de relevância da lista:

1. *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*;
2. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*;
3. *Educación Matemática*;
4. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*;
5. *ZETETIKÉ. Revista de Educação Matemática*;
6. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*;
7. *QUADRANTE: Revista de Investigación em Educação Matemática*;
8. *Educação Matemática Pesquisa*;
9. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*;

¹⁹ Destacamos também que além dos oito periódicos, Otero-Garcia (2011) inclui em suas fontes de dados o portal da Capes e quatro anais do SIPEM.

10. *NÚMEROS: Revista de Didáctica de las Matemáticas.*

Com objetivo de destacar e valorizar estes periódicos, saber se eles estão contemplados pelo Google Acadêmico, que será a fonte utilizada. Nesse site não há uma lista dos jornais incluídos: declaram apenas incluir “artigos e não periódicos”. Desta maneira, acessei o site de cada uma das revistas para identificar quais são as indexadas pelo Google Acadêmico.

Foi diagnosticado que seis dentre os dez periódicos são indexadas pelo Google Acadêmico, a saber: *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*; *Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa (RELIME)*; *ZETETIKÉ. Revista de Educação Matemática*; *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*; *QUADRANTE. Revista de Investigación em Educação Matemática e Educação Matemática Pesquisa*. A revista *Educación Matemática* não apresenta o Google Acadêmico listados entre seus índices, mas declaram ser “Índice H Google Scholar”.

Como esta pesquisa tem como recorte a produção brasileira, isto é, pesquisas realizadas no âmbito do ensino superior brasileiro, as revistas que atendem a esses critérios são três: *Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)*; *ZETETIKÉ. Revista de Educação Matemática e Educação Matemática Pesquisa*, as quais estão indexadas pelo Google Acadêmico.

Em resumo, com essas informações destacamos a amplitude desta pesquisa em relação a lista de Molina, Montecino e Aguilar (2020): os periódicos brasileiros contemplados pela lista, também foram contemplados por esta pesquisa, uma vez que estão indexados pelo Google Acadêmico, uma das fontes de dados escolhida.

A decisão inicial foi considerar o Google Acadêmico como a única fonte de dados desta pesquisa. Entretanto, durante a seleção de trabalhos, percebemos que algumas pesquisas diretamente relacionadas nas referências bibliográficas dos trabalhos incluídos pelo Google Acadêmico não haviam sido localizadas na revisão neste banco de dados. Como a proposta desta pesquisa é realizar um estado da arte do ensino de Análise, entendemos como necessário complementar esta busca, visando preencher lacunas e alcançar o maior número de trabalhos possível que atendessem aos critérios de inclusão e de exclusão.

Desta maneira, realizamos um segundo momento/fonte de seleção de trabalhos a partir da lista de referências bibliográficas dos trabalhos já incluídos no primeiro momento (Google Acadêmico). Para isso, utilizamos os mesmos critérios e etapas de seleção descritos nesse protocolo. Nosso objetivo com esta forma de obtenção de pesquisas, foi de criar uma espécie de “densidade” (no sentido matemático, de preencher lacunas) nos trabalhos incluídos, cujas

referências utilizadas por eles, também seriam incluídas, caso obedecessem aos critérios estabelecidos.

Sobre a qualidade dos estudos

Conforme já foi mencionado, questões sobre a qualidade dos estudos no campo Educacional é um ponto delicado e que vale reflexão.

Macêdo, Monteiro e Carvalho (2020) apresentam uma discussão sobre as múltiplas concepções de qualidade relativas ao ensino de Matemática na formação inicial de licenciandos em Pedagogia, a partir de uma revisão sistemática de literatura. Os autores consideram que mais importante do que lidar com a polissemia do conceito de qualidade, é entender as diversas perspectivas atreladas a ele. Os pesquisadores refutam o entendimento sobre qualidade que se pauta exclusivamente no ranqueamento e propõem que falemos de qualidade, ao tratar da Educação Matemática na formação de professores, assumindo que não visam construir um conceito único de qualidade, mas levantar uma discussão sobre as perspectivas diversas envolvidas nessa noção.

Molina, Montecino e Aguilar (2020) afirmam que os ranqueamentos de periódicos são entendidos como a “pedra filosofal” da/na academia e problematizam a suposição de que tais rankings (e, portanto, tais classificações) são capazes de retratar com precisão a qualidade, o impacto e a reputação dos periódicos de Educação Matemática, no cenário internacional.

O caráter político e econômico atrelado aos ranqueamentos é levantado pelos autores, uma vez que são usados como base para contratação, promoção e distribuição de recursos dentro das instituições o que, influencia nas práticas dos pesquisadores: sua forma de escolha de onde publicar seus trabalhos e como eles percebem e leem os periódicos.

Além disso, ressaltam ser gerada a exclusão de determinados grupos sociais, não apenas em termos de limitações de idiomas em publicações, mas a valores atribuídos à literatura que não é da língua inglesa. Stolerman e Stenius (2008)²⁰, citados por Molina, Montecido e Aguilar, apontam para a desvalorização estrutural de pesquisas em língua não inglesa como sendo não inovadoras, de qualidade pobre e, portanto, com resultados sem importância.

²⁰ STOLERMAN, I. P.; STENIUS, K. The language barrier and institutional provincialism in science. *Drug and Alcohol Dependence*, v. 92, n. 1-3, p. 1-2, 2008.

Apoiando-se em Nivens e Otten (2017)²¹, Molina, Montecino e Aguilar (2020) também apontam que rankings de fator de impacto métrico dos periódicos, como o *Web of Science's Impact Factor*, excluem alguns locais de divulgação científica em áreas como a Educação Matemática.

Os autores afirmam que a academia está pautada numa ideia de mercado de negócios no que tange às produções científicas, contribuindo para a visão dominante na Ibero-América que a qualidade do periódico e de seus artigos dependem de sua inserção em índices internacionais como *Scopus* e *Web of Science*.

Dentro deste contexto, posicione-me em não elencar critérios de seleção relacionados à qualidade das pesquisas. Dar visibilidade à pesquisas, independentemente da classificação do periódico em *rankings*, permite obter maior quantidade de resultados e, portanto, uma visão mais completa do estado da arte do tema em questão – o Ensino de Análise.

Sobre as palavras-chave

Não existe a convergência e caracterização homogênea em palavras chave sobre o Ensino de Análise Real, como já apontado por Otero-Garcia (2011a) e discutido na introdução deste texto. Dentro desse contexto, destaco aqui as opções tomadas para construir os termos utilizados para busca.

As expressões utilizadas por Otero-Garcia (2011a) em sua dissertação foram sete: *Análise Real*; *Análise Matemática*; *Ensino de Análise*; *Disciplina de Análise*; *Análise I*; *Análise na Reta* e *Fundamentos de Análise*.

Ao realizar breve busca por trabalhos relacionados ao ensino de Análise, concordo com o autor no sentido de que estas expressões aparecem com frequência nas palavras-chaves escolhidas por autores; porém, optei por realizar algumas alterações, de forma a contemplar a minha pesquisa e utilizar ferramentas de busca na plataforma escolhida.

Entendemos que a expressão *Análise I* é muito específica, é apenas uma nomenclatura “burocrática” dada para separar a disciplina de Análise Real em mais de um semestre nas instituições. Essa especificidade vai de encontro ao nosso interesse de ter palavras-chave mais abrangentes na busca. Portanto, a expressão foi retirada.

Como estratégia de busca nos bancos digitais, e visando obter resultados mais precisos na busca, utilizei do conectivo *E* acrescido da expressão *ensino* em cada um dos termos escolhidas,

²¹ NIVENS, R. A.; OTTEN, S. Assessing journal quality in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 48, n. 4. p. 348-368, 2017.

de forma a obter trabalhos de Análise cujo foco fosse o seu ensino. Desta maneira, a expressão *Ensino de Análise* também foi retirada, por ser um termo pouco preciso²². Entendo que já está contemplado nos outros termos escolhidos.

Além disso, na busca no Google Acadêmico selecionamos a configuração que as expressões pudessem ser localizadas “em qualquer parte do artigo”.

Em resumo, os termos utilizados na busca foram:

“Análise Real” E ensino
“Análise Matemática” E ensino
“Análise na Reta” E ensino
“Disciplina de Análise” E ensino
“Fundamentos de Análise” E ensino

Sobre os critérios de inclusão e exclusão

Os critérios para a inclusão dos estudos estão descritos no Quadro 2. A respeito dos critérios de exclusão, é interessante notar que não se reduzem à negação dos critérios de inclusão. Eles apresentam informações relevantes que auxiliam na seleção de estudos.

| CRITÉRIOS DE INCLUSÃO | |
|------------------------------|---|
| Tempo de busca | 10 anos: de 2011 a 2020. |
| Idioma | Português. |
| População-alvo | Ensino Superior; Licenciandos ou Bacharelados em Matemática. |
| Tipos de texto | Artigos de Periódicos. |
| Disponibilidade | Textos completos disponíveis em meio eletrônico, com acesso gratuito |
| Conteúdo matemático | Conteúdos lecionados em Análise Real, como sequências, limites, derivadas, integrais e séries (além de outros que podem surgir com a busca) |
| Foco | Pesquisas cujo foco seja o ensino de Análise Real. |

Quadro 2: Critérios de inclusão.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2022).

²² Ao fazer um teste com essa expressão na ferramenta de busca, encontramos trabalhos em diversas áreas do conhecimento, obtendo resultados como “ensino de análise térmica”; “ensino de análise de investimentos”, “ensino de análise estrutural”, “ensino de análise linguística”, dentre outras.

CRITÉRIOS DE EXCLUSÃO

- Trabalhos duplicados (no caso de ser o mesmo trabalho apresentado de formas diferentes em diferentes fontes serão incluídos a priori);
- Trabalhos cujo foco seja estabelecer relações entre Análise Real e outros níveis de ensino, se o foco for o ensino nesses outros níveis;
- Trabalhos de história da matemática que não tenham conexões explícitas com o ensino.
- Trabalhos na modalidade poster;
- Trabalhos que sejam resenhas de outros (já incluídos ou não);
- Mapeamentos ou outros estados da arte.

Acredito que a disciplina Análise tenha relações com a futura prática docente dos professores em formação. Entretanto, ressalto que o foco desta pesquisa é analisar trabalhos que sejam voltados para o licenciando (ou bacharelado) do que para o professor já em atuação. É por este motivo que acrescentamos o critério de exclusão sobre as relações da Análise Real com outros níveis de ensino: se o foco da pesquisa fosse em tais outros níveis, isto é, se o olhar da pesquisa não focasse o graduando ou a sala de aula na universidade, ela foi excluída.

Em referência a trabalhos de anais de eventos, as pesquisas na modalidade pôster, não apresentam muitas informações a respeito da pesquisa realizada, o que nos limita a realizar uma análise do trabalho. Neste contexto, esta categoria de trabalhos foi excluída, entendendo que se a pesquisa completa associada estiver aparecido durante a seleção de pesquisas, ela passará pelo mesmo processo de seleção descrito nesse protocolo.

A respeito de trabalhos do tipo artigo de periódicos, a exclusão das resenhas se deve ao fato de que esses não apresentam resultados novos para a área, além de não se configurarem como uma produção totalmente autoral do pesquisador em questão, uma vez que as resenhas, em sua maioria, são realizadas por pesquisadores diferentes dos autores originais.

Além dos critérios listados, destaco uma decisão tomada durante a análise das pesquisas incluídas: a dissertação de Otero-Garcia (2011a), que está sendo utilizada como ponto de partida e de comparação para este trabalho, gerou várias publicações do autor, em que, algumas se configuram como recortes da pesquisa mencionada. Portanto, optamos por excluir esses trabalhos (pesquisas que foram incluídas pelo processo de revisão, mas que fossem recortes da dissertação de Otero-Garcia), por entendermos que eles trariam as mesmas contribuições que são apresentadas por OTERO-GARCIA (2011A) e já apresentadas no capítulo 1 desta dissertação.

2.2. Etapa 2: CONDUÇÃO DA REVISÃO

Nesta etapa da revisão apresentamos: o método utilizado para selecionar os trabalhos nas fontes de dados escolhidas; as informações que serão extraídas das pesquisas selecionadas e, por fim, o método utilizado para organizar, sintetizar e analisar os estudos incluídos: a Análise Temática.

Selecionando as pesquisas

A seleção das pesquisas no Google Acadêmico seguiu um método composto por quatro estágios nos quais verifiquei se o trabalho atende aos critérios de inclusão. Uma pesquisa pode ser incluída em qualquer estágio ou também excluída em qualquer momento, caso revele não se relacionar com o foco deste trabalho quando estudada em maior profundidade.

No estágio 1, fiz a leitura do título dos artigos que retornaram da busca. Estudos duplicados ou que explicitamente não atendem aos critérios de inclusão, foram excluídos. No caso de título vago ou que, de alguma maneira não foi possível afirmar sua inclusão, ele permaneceu para análise no estágio 2. Esse consiste na leitura do resumo e palavras-chave, ainda em meio online. Se o trabalho não apresentou resumo ou se ainda houvesse dúvida quanto sua seleção, o trabalho foi baixado e mantido para ser analisado no estágio seguinte.

No estágio 3, foi realizada a leitura da introdução, metodologia e conclusão/considerações finais, de todos os trabalhos selecionados na etapa anterior. Por fim, chega-se ao estágio 4, consiste na leitura integral do texto. Após estas etapas, tive “em mãos” os trabalhos incluídos no primeiro momento desta pesquisa.

Para a busca na lista de referências bibliográficas das pesquisas incluídas pelo Google Acadêmico, o processo de seleção teve algumas adaptações: lemos a lista de referências de cada uma das pesquisas e selecionamos os trabalhos que, pelo título, poderiam se encaixar nos critérios de seleção, já excluindo os que formavam duplicatas com as pesquisas incluídos.

Com estes potenciais trabalhos, o primeiro passo foi encontrá-los nos meios digitais para podermos iniciar o processo de seleção. Para isso, utilizamos o Google, Google Acadêmico e alguns sites de periódicos.

Depois de encontrar as pesquisas (as que não foram encontradas, foram excluídas), iniciamos o processo de seleção: aplicamos os critérios de inclusão e exclusão de pesquisas descritos no protocolo e seguimos os 4 estágios de seleção.

2.3. Etapa 3: ANÁLISE DE DADOS

A partir das pesquisas incluídas, alguns aspectos descritivos foram catalogados, como título; autor(es); ano de publicação; revista de origem e etc.

Após a extração desses aspectos, foi feita a leitura dos trabalhos selecionados e um resumo de cada um, apresentando a pesquisa de maneira geral: exibindo o problema de pesquisa e os objetivos, informação sobre os participantes, metodologia de pesquisa, instrumento de obtenção de dados e os principais resultados. Além de também trazer informações sobre os autores e a revista em que o artigo foi publicado.

Analisando as informações: a Análise Temática

Assim, a partir dos resumos, utilizamos da análise temática nos moldes de Braun e Clarke (2006) para analisar os trabalhos incluídos. Com isso, categorias de análise foram construídas, visando construir o estado da arte proposto e responder às minhas questões de pesquisa: (Q1) Que metodologias vêm sendo empregadas nas ações didáticas em sala de aula no ensino de Análise Real? (Q2) Que temáticas sobre o ensino de Análise Real estão presentes nas pesquisas?

A análise temática é um método de análise de dados utilizado em pesquisas qualitativas e busca identificar, analisar e relatar padrões (temas) a partir de um conjunto de dados (BRAUN, CLARKE, 2006). É um método flexível e recursivo de análise, em que o pesquisador busca por padrões (temas) que capturem informações importantes dentro do conjunto de dados, visando responder às questões propostas. Um tema não precisa estar relacionado a muitos itens do conjunto de dados, pode até ter apenas uma ocorrência. É o julgamento do pesquisador que vai determinar o que é um tema, de acordo com a especificidade de sua pesquisa.

O método é dito recursivo, porque a análise não é um processo linear, saindo de uma fase para outra, sem volta. Na análise temática o pesquisador retoma ao seu conjunto de dados, seus temas potenciais e a análise que está sendo produzida por diversas vezes até chegar a versão final.

A análise se inicia quando o pesquisador observa e busca por padrões de interesse no conjunto de dados e termina quando ele relata o conteúdo e o significado dos padrões (temas) escolhidos. Não existem regras para realizar a análise temática, entretanto, Braun e Clarke (2006) elencam seis passos²³ para auxiliar o pesquisador que se interesse pelo método: familiarização

²³ Todos os passos apresentam tradução livre.

com os dados; (2) gerar códigos iniciais; (3) procurar por temas; (4) visitar temas; (5) definir e nomear temas e (6) produzir o relato.

Primeiramente, o pesquisador precisa se familiarizar com seu conjunto de dados, fazer uma imersão que permita conhecer os dados, em sua profundidade e amplitude. Esta fase requer, a leitura repetida do conjunto de dados e uma leitura ativa, já tomando notas e escrevendo ideias de codificação, as quais retomará em fases seguintes. A partir desse ponto o pesquisador inicia o processo formal de codificação. Ressalto que no caso desta dissertação, meu conjunto de dados são os 24 artigos analisados e os dados são cada um dos textos (representados pelos seus resumos).

No passo 2, depois de ter gerado uma lista de ideias sobre o que é interessante sobre os dados, o pesquisador gera códigos iniciais aos seus dados, que identificam características interessantes para o pesquisador. Nessa fase, os autores sugerem que o pesquisador codifique o maior número de temas/padrões potenciais possíveis para cada dado (maior número de códigos possível para cada texto) e, além disso, que não ignore as possíveis contradições ou inconsistências dentro dos dados.

O terceiro passo envolve classificar e agrupar os códigos elaborados na fase anterior em temas potenciais. Neste momento, os autores sugerem representações visuais para auxiliar esse processo de agrupamento, como mapas mentais ou tabelas. Alguns códigos podem ser transformados em temas, enquanto outros podem virar subtemas, ou ainda, ser descartados.

Na fase 4, é a hora de visitar e refinar os temas candidatos elencados no passo anterior. Os autores destacam que, nesse momento, ficará evidente quando algum tema não deveria ser tema, por faltar dados para dar suporte ou não representar, de fato, um padrão dos dados relacionados. Alguns temas podem se unir e outros podem ser quebrados ou separados em mais temas. Braun e Clarke ainda citam a sugestão de Patton (1990)²⁴, que sugere um critério para julgar essas categorias: homogeneidade interna e heterogeneidade externa. Dentro de cada tema, os dados devem ser significativamente coerentes, ao mesmo tempo que deve haver distinções claras e identificáveis entre os temas.

Essa fase envolve dois níveis de revisão e refinamento dos temas. No primeiro nível, dentro de cada tema, o pesquisador deve ler cada um dos códigos e seu dado associado, para analisar se eles formam um padrão coerente. Caso esteja coerente, passa para o nível 2. Caso não, ele deve investigar se o tema em si é problemático ou o que dentro dele não se encaixa. Esse trabalho envolve revisar o tema, criar um novo, realocar o dado problemático em outro tema, já existente

24 Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods* (2nd ed.). Newbury Park, CA: Sage.

ou não ou, ainda, descartá-lo. Uma vez que se está satisfeito com o mapa temático feito, o pesquisador deve passar para o nível dois.

O segundo nível analisa o mapa temático de maneira mais ampla: o pesquisador deve verificar a validade de cada tema em relação ao conjunto de dados e, também, se o seu mapa temático reflete os significados encontrados no conjunto de dados. Mais uma vez, caso essas condições não sejam satisfeitas, é necessário reler o conjunto de dados, buscando avaliar os temas e recodificar possíveis informações que tenham ficado perdidas nos estágios anteriores. Entretanto, os autores alertam: uma vez que já se está satisfeito com os temas candidatos, e que já foram feitos vários refinamentos, cada vez mais minuciosos, cabe ao pesquisador saber a hora de parar esses processos, para seguir em frente na análise.

No final da fase 4, o pesquisador deverá ter um mapa temático satisfatório, com boas ideias de seus temas, como se encaixam e a história que contam a respeito do conjunto de dados.

Na quinta fase, o pesquisador deve definir e refinar os temas e, além disso, analisar o conjunto de dados a partir dele. Braun e Clarke apontam que esse processo – definir e refinar – deve captar a essência presente em cada tema e indicar que aspecto do conjunto de dados o tema está capturando.

Para isso, o pesquisador deve retornar às codificações dentro de cada tema, organizá-los de maneira coerente e consistente, e tecer sua narrativa. Além disso, é importante identificar não somente a história que cada tema conta, mas como ela se encaixa na grande narrativa que está sendo realizada, visando responder às questões de pesquisa. Nesta fase, também, é a hora de identificar quando é necessário destacar subtemas, dentro de cada tema.

Ao final dessa fase, é importante que o pesquisador tenha definição clara do que são cada um dos temas. Braun e Clarke sugerem que o pesquisador faça um teste: tentar descrever um escopo do tema, em poucas frases. Se isso ocorrer, significa que está bom o suficiente.

Por fim, mesmo que os temas já tenham títulos sendo utilizados durante o processo de análise, os autores apontam que nesse momento é necessário pensar nos nomes dos temas, que estarão na análise final. Tais nomes precisam “ser concisos, incisivos e dar imediatamente ao leitor uma noção do que é o tema” (BRAUN, CLARKE, 2006, p. 23, tradução livre).

A última fase é a de produção do relato, que envolve a análise final e escrita do relatório. O relato precisa ser uma narrativa analítica consistente, coerente, lógica e bem contada sobre a história dos dados, dando evidências dos dados que exemplifiquem os temas e de maneira a convencer o leitor da validade da análise realizada.

A partir dos critérios e métodos expostos neste capítulo, os resultados e a análise das pesquisas incluídas serão apresentados no capítulo a seguir.

3 APRESENTAÇÃO DAS PESQUISAS

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira, apresentamos informações sobre o processo de busca e seleção dos trabalhos para a análise e discutimos sobre alguns aspectos descritivos encontrados nas pesquisas selecionadas. Na segunda, exibimos um mapa da literatura (CRESWELL, 2010), organizando o resultado da análise das pesquisas em temáticas e categorias, compondo, assim, o estado da arte desejado.

3.1 Seleção dos trabalhos para a análise e seus aspectos descritivos

Foram incluídos 24 trabalhos e as buscas foram realizadas entre os dias 06 de outubro de 2020 e 23 de junho de 2021.

Destacamos uma particularidade da busca no Google Acadêmico: devido à característica da plataforma, como também apontado por Silva (2020), não é possível ir além de determinado número de busca. Silva (2020) relata que em torno de 970 trabalhos considerados mais relevantes são disponibilizados pela plataforma, o que se aproxima do que pudemos acessar, uma vez que, configurando a busca para ofertar 20 resultados por páginas, só tivemos acesso às 50 primeiras páginas.

Apresentamos, no Quadro 3, a lista de todos os trabalhos incluídos nesta pesquisa e, em seguida, a justificativa para algumas decisões tomadas ao longo do processo de seleção dos trabalhos.

| | AUTOR (ANO) | Referência |
|---|--------------------------------|--|
| 1 | ALVES (2013) | ALVES, F. R. V. Reconhecimento de padrões gráficos com o apoio do Software Geogebra: os casos da convergência pontual e uniforme. #Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia, Canoas, v.2, n.2, p. 1-20, 2013. |
| 2 | ALVES (2014) | ALVES, Francisco Regis Vieira. EXPLORAÇÃO DIDÁTICA NO ENSINO DE SÉRIES: o caso dos softwares Geogebra e o CAS Maple. Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista, Santo Ângelo, v. 4, n. 1, p. 33-49, jan. 2014. |
| 3 | ALVES, FONTENELE, LUCAS (2016) | ALVES, F. R. V.; FONTENELE, F. C. F.; LUCAS, C. M. do N. Descrição gráfico-geométrica de exemplos e teoremas com |

| | | |
|----|--|--|
| | | apoio do Geogebra: convergência de funções. Essentia: Revista de Cultura, Ciência e Tecnologia, Sobral, v. 17, n. 2, p. 112-137, jun. 2016. |
| 4 | BISOGNIN, BISOGNIN, LEIVAS (2016) | BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V.; LEIVAS, J. C. P. Aprendizagem de sequências numéricas: pesquisa sobre dificuldades de licenciandos em Matemática. Zetetiké , Campinas, v. 24, n. 3, p. 361-377, dez. 2016. |
| 5 | CERRI, DIAS (2016) | CERRI, C.; DIAS, D. P. A prática como Componente Curricular em uma Disciplina de Análise Real. Educação Matemática em Revista , São Paulo, v. 49, p. 26-34, abr. 2016. |
| 6 | FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN (2020) | FLÔRES, M. V.; FONSECA, J. A. da; BISOGNIN E. Processos do pensamento matemático avançado revelados nas resoluções de tarefas envolvendo números racionais. Ensino da Matemática em Debate , São Paulo, v. 7, n.1, p. 217-238, 2020. |
| 7 | GOMES, 2019 | GOMES, D. O. Uma reflexão histórica acerca de rastros discursivos deixados pelo enunciado "Análise". Com A Palavra, O Professor , Vitória da Conquista, v. 4, n. 8, p. 377-400, jan. 2019. |
| 8 | GOMES, OTERO-GARCIA, SILVA, BARONI, 2015 | GOMES, D. O.; OTERO-GARCIA, S. C.; SILVA, L. D. da; BARONI, R. L. S. Quatro ou mais pontos de vista sobre o ensino de Análise. BOLEMA , Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1242-1297, dez. 2015. |
| 9 | JÚNIOR, ANDRARE, 2016 | JUNIOR, L. C. L.; ANDRADE, A. dos S. Ensino e aprendizagem de Análise Matemática como encontro com os signos na perspectiva de Gilles Deleuze. Inter-Ação . Goiânia, p. 545-564. set. 2010. |
| 10 | LACERDA ET AL, 2020 | LACERDA, G. K. S.; CARVALHO, T. R. S de; ESQUINCALHA, A. da C.; LUZ, V. da C. A compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo em uma atividade exploratória com o uso do GeoGebra. Revista do Instituto Geogebra de São Paulo . São Paulo, p. 35-51. jan. 2020. |
| 11 | MAZZI (2015) | MAZZI, L. C. Convergência de Sequências: uma abordagem com o software GeoGebra. Revista do Instituto Geogebra de São Paulo , Cidade, v.4, n.1, p.5-17. 2015. |

| | | |
|----|---|--|
| 12 | MAZZI, MOURA (2020) | MAZZI, L. C.; MOURA, A. Q. Cenários para investigação no Ensino Superior: explorando o Teorema do Valor Intermediário. Revista Paranaense de Educação Matemática , Campo Mourão, v.9, n.19, p. 219-236, jul-out. 2020. |
| 13 | MELO, 2019 | MELO, M. F. de. Os desafios da Análise Matemática em um curso de Licenciatura a Distância. Ead em Foco , Rio de Janeiro, v. 9, n. 1, p. 1-8, jan. 2019. |
| 14 | MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017 | MENDES, M. T.; OLIVEIRA, R. C.de; BURIASCO, R. L. C. de. O conceito de conjunto finito e infinito por meio de tarefas: uma proposta à luz da educação matemática realística. Vidya , Santa Maria, v. 37, n. 1, p. 239-252, jan. 2017. |
| 15 | MOREIRA, VIANNA, 2016 | MOREIRA, P. C.; VIANNA, C. R. Por que Análise Real na Licenciatura? Um paralelo entre as visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos. Bolema , Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 515-534, ago. 2016. |
| 16 | NACHTIGALL, DOMINGUES, FERREIRA, ALVES (2020) | NACHTIGALL, C.; DOMINGUES, A. M. B.; FERREIRA, S. de F.; ALVES, R. da S. Um estudo comparativo acerca da eficácia da sala de aula invertida nas disciplinas de Cálculo e Análise Real. Prociênci@s , v.3, n.2, p. 1-13, dez. 2020. |
| 17 | OLIVEIRA, REIS, 2017 | OLIVEIRA, J. L. de; REIS, F. da S. Utilizando o Geogebra para a construção do conceito de integral de Riemann no ensino de Análise Real. Vidya , Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 417-434, jul. 2017. |
| 18 | OTERO-GARCIA, BARONI, MARTINES, 2013 | OTERO-GARCIA, S. C.; BARONI, R. L. S.; MARTINES, P. T Uma trajetória da disciplina de Análise e o seu papel para a formação do professor de Matemática. Educação Matemática Pesquisa , São Paulo, v. 15, n. 3, p. 692-717, jan. 2013. |
| 19 | OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013 | OTERO-GARCIA, S. C.; CAMMAROTA, G. Releituras de um estado do conhecimento do ensino de Análise a partir da noção de Cognição Inventiva. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia , v. 6, n. 1, p. 235-260, abr. 2013. |
| 20 | PARÓDIA, PEREIRA, OTERO-GARCIA (2020) | PARÓDIA, D. P.; PEREIRA, P. de A.; OTERO-GARCIA, S. C. Conhecimentos de Análise Matemática presentes no Exame |

| | | |
|----|---------------------------------|---|
| | | Nacional de desempenho dos estudantes. Hipátia , v. 5, n. 2, p. 325-347, dez. 2020. |
| 21 | PINTO, SCHEINER, 2015 | PINTO, M. M. F.; SCHEINER, T. Visualização e ensino de Análise Matemática. Educação Matemática Pesquisa . São Paulo, v.17, n. 3, p.638-654, jan. 2015. |
| 22 | RIZZON, LIMA, SAUER, CURY, 2017 | RIZZON, B. M.; LIMA, I. G. de; SAUER, L. Z.; CURY, H. N. Conhecimento do conteúdo de sequências numéricas: uma pesquisa com professores em formação inicial ou continuada. Revista Ciências & Ideias , Rio de Janeiro, v. 8, n. 2, p. 1-15, maio 2017. |
| 23 | THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020 | THOMÉ, V. W.; DURO, M. L.; ANDRADE, C. L. História da Análise Matemática e Desenvolvimento Cognitivo. Bolema , Rio Claro, v. 34, n. 67, p. 399-420, ago. 2020. |
| 24 | VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020 | VIEIRA, W.; SOUZA, V. H. G. de; IMAFUKU, R. S. Sobre Justificativas em questões do tipo verdadeiro/falso de estudantes de Licenciatura em Matemática. Ciência & Educação , Bauru, v. 26, p. 1-17, jan. 2020. |

Quadro 3: Pesquisas incluídas na revisão

Fonte: Elaborado pelas autoras (2022).

É importante destacar as decisões sobre as contribuições de Otero-Garcia, em particular, da divulgação científica da sua dissertação de mestrado. Como mencionado no Capítulo 2, excluimos algumas pesquisas porque são recortes de tal dissertação. Essas publicações são apresentadas a seguir, em ordem alfabética de autores:

- OTERO-GARCIA, Sílvio Cesar. DISCIPLINAS DE ANÁLISE NA HISTÓRIA DE SEU ENSINO: uma trajetória no curso de Licenciatura em Matemática da Unesp de Rio Claro. **História da Ciência e Ensino**: Construindo Interfaces, Cidade, v. 7, p. 1-44, jan. 2013.
- OTERO-GARCIA, Sílvio Cesar. DISCIPLINAS DE ANÁLISE NA HISTÓRIA DE SEU ENSINO: uma trajetória no curso de Licenciatura em Matemática da Usp de São Paulo. **História da Ciência e Ensino**: Construindo Interfaces, Cidade, v. 11, p. 56-90, jan. 2015.

- OTERO-GARCIA, Sílvio Cesar; BARONI, Rosa Lúcia Sverzut. QUESTÕES CRÍTICAS EM ENSINO DE ANÁLISE MATEMÁTICA. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 617-636, jan. 2015.

Antes de falar a respeito do estado da arte, gostaria de fazer algumas pontuações.

Um fato que chamou a atenção é a variedade nos periódicos nacionais escolhidos pelos pesquisadores para a submissão de sua pesquisa: são 19 jornais distintos, apresentados no quadro a seguir, **Erro! Fonte de referência não encontrada.** em ordem alfabética.

| Periódico | Quantidade de artigos encontrados |
|---|-----------------------------------|
| ALEXANDRIA. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia | 1 |
| BOLEMA. Boletim de Educação Matemática | 3 |
| Ciência & Educação | 1 |
| Com a palavra, o Professor | 1 |
| EAD EM FOCO. Revista Científica em Educação a Distância | 1 |
| Educação Matemática em Revista | 1 |
| Educação Matemática Pesquisa | 2 |
| Ensino da Matemática em Debate | 1 |
| Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista | 1 |
| ESSENTIA. Revista de Cultura, Ciência e Tecnologia | 1 |
| HIPATIA | 1 |
| INTER-AÇÃO | 1 |
| PROCIÊNCIA@S | 1 |
| Revista Ciências & Ideias | 1 |
| Revista do Instituto Geogebra de São Paulo | 2 |
| Revista Paranaense de Educação Matemática | 1 |
| Vidya | 2 |
| ZETETIKÉ | 1 |
| #TEAR: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia. | 1 |

Quadro 4: Distribuição de artigos encontrados por periódico

Fonte: elaborada pelas autoras (2022).

Dos periódicos e suas ocorrências, os destaques ficam para os que tiveram mais de um artigo encontrado, a saber: BOLEMA, com 3 artigos, e Educação Matemática Pesquisa, Revista do Instituto Geogebra de São Paulo e Vidya com 2 artigos cada.

Ressaltamos que dentre periódicos citados encontram-se os três brasileiros elencados na lista dos dez periódicos ibero-americanos de relevância na Educação Matemática, elaborada por Molina, Montecino e Aguilar (2020), já citada anteriormente: BOLEMA, ZETETIKÉ e Educação Matemática Pesquisa, com destaque para a BOLEMA, que está em primeiro lugar dos periódicos mais relevantes e também em primeiro lugar de ocorrências desta pesquisa.

Comparando com os periódicos escolhidos por Otero-Garcia (2011a) para realizar sua revisão, quatro (dentre oito) delas também foram contempladas nesta pesquisa: BOLEMA, Zetetiké, Educação Matemática em Revista e Educação Matemática Pesquisa. Já o Boletim GEPEM, Revista Ciência e Educação, Revista do Professor de Matemática e Revista Universitária, incluídos em Otero-Garcia (2011a), não apresentaram resultados em nossas buscas no período escolhido.

Mesmo não tendo estabelecido critérios de seleção de pesquisas baseados em qualquer critério de qualidade, tivemos a curiosidade de saber como os periódicos incluídos por esta pesquisa estão identificados no extrato QUALIS da CAPES. Mesmo a partir dos questionamentos levantadas por Molina, Montecino e Aguilar (2020) a respeito da associação entre ranqueamentos de periódicos e qualidade das pesquisas – o que já foi discutido no capítulo 3 – o extrato QUALIS da CAPES ainda é uma referência importante entre os pesquisadores brasileiros no campo da Educação Matemática.

A avaliação de periódicos pela CAPES está disponível na Plataforma Sucupira²⁵. O qualis dos periódicos em nossa área varia entre os extratos: A1, A2, B1, B2, B3, B4, B5 e C, no qual os periódicos A1 são considerados mais influentes, tendo maior prestígio da comunidade acadêmica e os outros são hierarquicamente mais baixos.

Realizamos a busca na Plataforma Sucupira no quadriênio 2013-2016 no dia 24 de agosto de 2021. Apresentamos a identificação do QUALIS na área de Ensino das revistas contempladas no quadro:

²⁵ Disponível em:

<https://sucupira.CAPES.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/veiculoPublicacaoQualis/listaConsultaGeralPeriodicos.jsf> Acesso em? 24 ago. 2021.

| Periódico | Qualis em Ensino |
|---|------------------|
| ALEXANDRIA. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia | A2 |
| BOLEMA. Boletim de Educação Matemática | A1 |
| Ciência & Educação | A1 |
| Com a palavra, o Professor | B2 |
| EAD EM FOCO. Revista Científica em Educação a Distância | B1 |
| Educação Matemática em Revista | A2 |
| Educação Matemática Pesquisa | A2 |
| Ensino da Matemática em Debate | B4 |
| Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista | B1 |
| ESSENTIA. Revista de Cultura, Ciência e Tecnologia | B5 |
| HIPÁTIA | B2 |
| INTER-AÇÃO | B1 |
| PROCIÊNCI@S | Não avaliada |
| Revista Ciêncisa & Ideias | B1 |
| Revista do Instituto Geogebra de São Paulo | B4 |
| Revista Paranaense de Educação Matemática | B1 |
| Vidya | A2 |
| ZETETIKÉ | A2 |
| #TEAR: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia | B1 |

Quadro 5: Extrato Qualis dos periódicos contemplados

Fonte: elaborada pelas autoras.

Podemos observar que a maioria dos periódicos (15) apresentam seu extrato qualis entre A1 e B2, o que denota um bom posicionamento das revistas na área de pesquisa. As revistas com os extratos mais altos são BOLEMA e Ciência & Educação, com qualis A1.

Nenhum dos periódicos listados tem o qualis menor, que é o C. E apenas a revista PROCIÊNCI@S não foi avaliada, nesta categoria qualis, da Capes.

3.2 Sobre o estado da arte

Iniciando nossa análise, para cada artigo, elaboramos um resumo e optamos por fazê-lo por algumas razões: concordamos com a visão de Otero-Garcia (2011a) de que o autor, ao interpretar e escrever com as próprias palavras o resultado de uma investigação, tem mais clareza do que foi discutido, facilitando, futuramente, o processo de análise. Outro motivo é o de centralizar de maneira sintetizada as informações das pesquisas selecionadas.

Creswell (2010) elenca alguns pontos que bons resumos devem incluir:

- Mencionar o problema que está sendo tratado.
 - Declarar o objetivo central ou o foco o estudo.
 - Apresentar brevemente informações sobre a amostra, a população ou os indivíduos.
 - Examinar os resultados fundamentais relacionados ao estudo proposto.
- (CRESWELL, 2010, p. 64)

A partir dessas sugestões, cada resumo realizado busca apresentar a pesquisa de maneira geral, exibindo o problema de pesquisa e os objetivos, informação sobre os participantes, metodologia de pesquisa e teoria utilizadas, instrumento de obtenção de dados e os principais resultados.

A partir desses resumos (disponíveis nos Apêndices) prosseguimos nossas análises visando elaborar o estado da arte da pesquisa a partir da organização de um mapa da literatura (CRESWELL, 2010)²⁶.

Para organizar o mapa da literatura retomamos os objetivos dessa pesquisa, o objetivo geral desta dissertação é realizar *um* estado da arte da produção brasileira sobre o ensino de Análise Real, a partir de artigos publicadas entre os anos de 2011 e 2020. Como questões orientadoras enunciamos:

(Q1) Que metodologias vêm sendo empregadas nas ações didáticas em sala de aula no ensino de Análise Real?

(Q2) Que temáticas sobre o ensino de Análise Real estão presentes nas pesquisas?

A leitura e análise das 24 pesquisas resultou na organização da literatura estudada como a seguir.

²⁶ O mapa da literatura é um resumo visual que exhibe uma visão geral da revisão realizada. Geralmente é representado por uma figura e diversas são as maneiras de se organizá-lo: através de uma estrutura hierárquica, fluxograma ou interseção de círculos, por exemplo (CRESWELL, 2010).

Tendo como norte as questões formuladas e auxiliadas pela Análise Temática, identificamos 4 grandes temas a partir de uma categorização inicial: Metodologias Alternativas, Análise na Formação de Professores, O “fazer Matemática” em Análise e História da Matemática.

Na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, exibimos um mapa da literatura (CRESWELL, 2010), organizando o resultado da análise das pesquisas em temáticas e categorias.

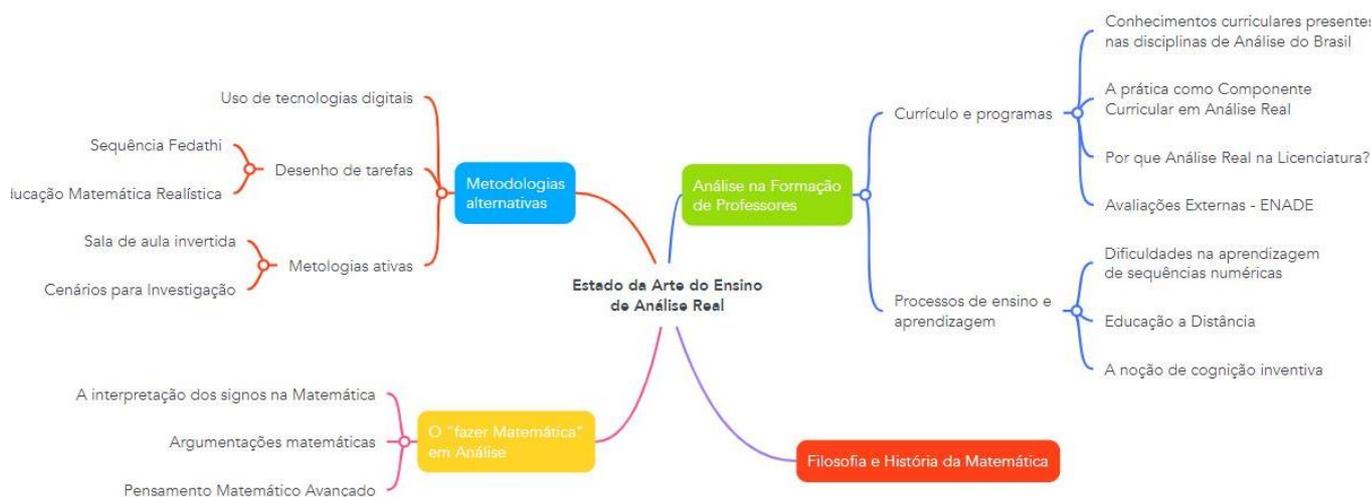


Figura 1: Mapa de Literatura

Fonte: elaborada pelas autoras (2022).

Destaco que todas os artigos estão representados em pelo menos uma temática nesse mapa. Tentamos extrair aspectos centrais nas pesquisas analisadas, de forma a incluí-las na menor quantidade de temas. Dessa forma, 22 artigos estão incluídos em apenas um tema dentro do mapa exibido, e apenas duas pesquisas estão incluídas em mais dois temas: Gomes, Otero-Garcia, Silva e Baroni (2015) e Alves, Fontenele e Lucas (2016).

O primeiro artigo, *Quatro ou mais pontos de vista sobre o ensino de Análise Matemática* (GOMES, OTERO-GARCIA, SILVA, BARONI, 2015), foi incluído no tema *Análise na Formação de Professores* e em dois subtemas distintos: “Análise como um elemento curricular” e Por que Análise Real na Licenciatura”. por trazer esses dois vieses dando-lhes a mesma centralidade na pesquisa.

Já o artigo *Descrição gráfico-geométrica de exemplos e teoremas com apoio do Geogebra: convergência de funções* (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016), foi incluído no tema *Metodologias Alternativas* e em dois subtemas distintos: “Uso de tecnologias digitais” e “Sequência Fedathi”. Por entendermos que ambos os temas são centrais e para destacar ambas metodologias apresentadas.

Para facilitar a leitura da revisão empreendida, o desenvolvimento do Estado da Arte é apresentado em quatro capítulos, que correspondem as respostas às questões norteadoras enunciadas.

No capítulo 5, discutiremos o tema “Metodologias alternativas”, que responde à segunda questão de pesquisa. Nos capítulos 6, 7 e 8 discutimos as outras temáticas presentes na pesquisa sobre Ensino de Análise Real e incluídas no mapa da literatura que, em conjunto com as “Metodologias alternativas”, compõem o Estado da Arte sobre o tema investigado: o ensino de Análise Real no Brasil.

4 ESTADO DA ARTE – (1) METODOLOGIAS ALTERNATIVAS

Este tema responde à primeira questão de pesquisa, que norteou a revisão sistemática: “*Que Metodologias vêm sendo empregadas nas ações didáticas em sala de aula no ensino de Análise Real?*”.

Aqui, incluímos 9 pesquisas sobre metodologias alternativas à metodologia tradicional para o ensino em Análise, identificados na literatura e selecionadas na revisão para compor o estado da arte sobre o tema proposto, a saber: Alves (2013); Alves (2014); Alves, Fontenele, Lucas (2016); Mazzi (2015); Oliveira, Reis (2017); Lacerda et al (2020); Mendes, Oliveira, Buriasco (2017); Nachtigall, Domingues, Ferreira, Alves (2020); Mazzi, Moura (2020).

A temática *Metodologias Alternativas* foi organizada em 3 subtemas:

- Uso de tecnologias digitais
- Desenho de tarefas
 - Sequência Fedathi
 - Educação Matemática Realística
- Metodologias ativas:
 - Sala de Aula Invertida
 - Cenários para Investigação

Apresentamos, a seguir, as reflexões geradas a respeito do tema, sintetizando nossos resultados. Informações mais aprofundadas acerca dos trabalhos incluídos neste tema encontram-se no Apêndice A.

4.1 SÍNTESES E REFLEXÕES

Em relação aos participantes das pesquisas desta temática, há predominância dos participantes relacionados à Licenciatura em Matemática. Dentre os seis trabalhos que realizam intervenções, a maioria dos participantes²⁷ eram licenciandos em Matemática (4 artigos), seguidos de professores recém-licenciados (2 pesquisas) e, por fim, uma pesquisa tinha como participantes professores universitários do Departamento de Matemática de suas respectivas Universidades.

Uma vez que não restringimos nossas buscas ao público envolvido com o curso de Licenciatura, nos questionamos: porque tais abordagens alternativas foram mais comuns em cursos que não envolviam alunos do Bacharelado em Matemática?

²⁷ Alguns trabalhos tem mais de um grupo de participantes.

Parece-nos haver a visão de que o uso de metodologias não tradicionais enfraquece o ensino, reduz o rigor característico da Análise e é desnecessário aos bacharelados. Essa inferência se intensifica quando refletimos sobre o uso de tecnologias digitais. Oliveira e Reis (2017), ao realizarem um experimento com o Geogebra, defendem que o entendimento dos conceitos matemáticos não deve ser reduzido ao conhecimento técnico simplista, seja por bacharelados ou licenciandos. Entretanto, um dos participantes da pesquisa argumentou que tais atividades, que exploram o Geogebra e seus aspectos visuais e intuitivos não devem contribuir significativamente na construção dos conceitos matemáticos para os bacharelados.

Por outro lado, ainda sobre o uso de tecnologias, Lacerda et al. (2020) e Alves (2014) defendem que o uso e o rigor no ensino não são mutuamente excludentes. Para os autores, a tecnologia deve ser entendida como algo a se acrescentar, complementar, auxiliando na ampliação da compreensão dos conceitos trabalhados.

Por que as metodologias não tradicionais ainda são pouco exploradas com alunos do Bacharelado? Não seria também interessante para esses alunos entender mais profundamente os conceitos que estão estudando e que vão mobilizar durante sua vida profissional? Não seria interessante explorar os diálogos possíveis entre intuição e rigor, representações visuais e representações algébricas? Uma pesquisa sobre a visão de matemáticos e bacharelados sobre o assunto seria interessante.

Em relação aos licenciandos, destacamos a importância de abordagens não tradicionais tanto para fortalecer sua aprendizagem enquanto alunos, quanto para que conheçam outras metodologias de ensino, de forma a contribuir para sua formação e futura prática docente.

Identificamos três grandes categorias de metodologias alternativas à metodologia tradicional de ensino: O *Uso de tecnologias*, o *desenho de tarefas* e as *metodologias ativas*.

A respeito do *Uso de tecnologias*, o software GeoGebra se mostrou uma excelente ferramenta para o ensino de Análise, em que é destacada a possibilidade de visualização dos conceitos²⁸, teste de conjecturas²⁹ e a exploração do caráter manipulatório e dinâmico³⁰. Outro ponto positivo levantado foi a respeito da discussão que as atividades geraram³¹.

²⁸ Alves, Fontenele e Lucas (2016), Mazzi (2015), Oliveira e Reis (2017), Lacerda et al. (2020).

²⁹ Mazzi (2015), Lacerda et al.(2020).

³⁰ Alves (2013), Oliveira e Reis (2017).

³¹ Mazzi e Moura (2020), Oliveira e Reis(2017), Lacerda et al. (2020).

Entretanto, também é preciso se atentar às suas limitações. Oliveira e Reis (2017), por exemplo, apontam que a finitude³² existente no software que pode acarretar formação de intuições errôneas dos conceitos trabalhados.

Ressaltamos que o professor tem um papel importante para o bom uso da tecnologia em sala de aula, principalmente na etapa de elaboração das atividades. Lacerda et al. (2020) destacaram alguns tópicos importantes para desenvolverem sua pesquisa com o GeoGebra: o planejamento da ferramenta digital e elaboração de atividades adequadas para a exploração de seu potencial pedagógico; a mediação do professor e o contexto educacional que envolve os estudantes. Cabe ao professor conhecer previamente as ferramentas utilizadas, para saber colocá-las em suas aulas e, quem sabe explorar suas limitações como objeto de aprendizagem.

O software CAS Maple também foi elencado para o trabalho com tecnologia, que atuou como complementar ao Geogebra (ALVES, 2014). Identificando uma limitação deste último no comportamento numérico-qualitativo das séries, o CAS Maple pôde atuar nessa frente de exploração. A pesquisa de Alves é de 2014, então seria interessante investigar também se o Geogebra já teve atualizações que possibilitem uma exploração maior dessa limitação.

Outro ponto a ser destacado é que a discussão do “Uso de Tecnologia” é mais ampla do que *uso de computadores* (como discutido em Otero-Garcia (2011)). Atualmente existe a versão para celulares do software Geogebra, o que abre um novo campo de pesquisa. Será que essa ferramenta é mais acessível aos estudantes? Há diferenças entre a versão para computador e para celular que gere impactos positivos/negativos no ensino e aprendizagem de Análise?

Identificamos uma dualidade muito interessante nas metodologias não tradicionais encontradas: na temática *Desenho de tarefas*, mesmo sendo uma abordagem não tradicional de ensino, ainda apresenta uma centralidade no professor, em sua importância na elaboração de tarefas para o ensino. Em contrapartida, na temática *Metodologias ativas*, há uma mudança de foco nos processos de ensino e aprendizagem e o aluno tem papel ativo na sua aprendizagem.

Dentro do tema *Desenho de tarefas*, as temáticas encontradas foram a *Sequência Fedathi* e a *Educação Matemática Realística*.

A *Sequência Fedathi* tem o foco na mediação docente e no estabelecimento de um ambiente de sala de aula que conduza o aluno a um papel de pesquisador, investigando e solucionando problemas. Por consequência, a participação ativa dos estudantes é nas aulas é

³² Os autores não definem o que consideram por finitude em seu trabalho. Este termo surge quando discutem sobre algumas limitações do Geogebra na representação de algumas funções, visando discutir conceitos relacionados à Integral de Riemann.

propiciado. Cabe ao professor motivar o pensamento reflexivo e o raciocínio do discente, oferecendo bons problemas ou situações desafiadoras.

Na *Educação Matemática Realística*, além da importância do professor na elaboração de tarefas para o ensino, e assim como na Sequência Fedathi, o estímulo ao papel ativo dos estudantes na realização dessas tarefas também é destacado. Dos princípios que sustentam a Educação Matemática Realística, destacamos a reinvenção guiada. Neste fundamento, os alunos experimentam um processo de aprendizagem similar ao ocorrido no desenvolvimento histórico da matemática, mas acontece de maneira simulada, guiada pela preparação das aulas pelo professor e utilizando mais dos conhecimentos já existentes.

Antes de iniciar as reflexões a respeito do subtema *Metodologias ativas*, apresentamos o que está sendo considerado nesta pesquisa. Entendemos as metodologias ativas como “estratégias de ensino centradas na participação efetiva dos estudantes no processo de aprendizagem, de forma flexível, interligada e híbrida” (BACICH, MORAN, 2018, p. 4). Nestas metodologias de ensino, o aluno é entendido como protagonista de sua aprendizagem, a partir do “seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor” (BACICH, MORAN, 2018, p. 3).

Tendo essa caracterização em mente, seguimos.

Na temática *Metodologias ativas*, os subtemas foram a *Sala de aula invertida* e os *Cenários para investigação*. No caso da *Sala de aula invertida*, Nachtigall et al. (2020) analisou e comparou a implementação da metodologia em duas turmas, uma de Cálculo e outra de Análise Real. Os resultados encontrados foram majoritariamente positivos, em que a autonomia discente e a otimização de tempo nos encontros presenciais foram destacadas. A falta de tempo de estudo prévio pode gerar impacto negativo no rendimento dos estudantes na disciplina, como apontado por um dos participantes.

Os *Cenários para Investigação* compõem uma metodologia baseada no diálogo e na investigação, contrapondo-se à cultura do silêncio existente em aulas de Matemática. Da sua investigação, Mazzi e Moura (2020) declaram que a metodologia e o roteiro de atividades utilizado, possibilitaram a elaboração e teste de conjecturas a respeito do conteúdo estudado e que o Geogebra foi importante aliado na manutenção do diálogo entre participantes e pesquisador. Os autores também defendem que os Cenários para Investigação proporcionaram um espaço para questionamentos dos participantes, incentivando a serem críticos e reflexivos.

Em relação aos conteúdos escolhidos pelos pesquisadores para desenvolver as pesquisas com metodologias alternativas às tradicionais, encontram-se: Convergência pontual e uniforme de funções (ALVES, 2013; ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016); séries infinitas e critérios de

convergência (ALVES, 2014); convergência de sequências (MAZZI, 2015); convergência de sequências e o Teorema do Valor Intermediário (MAZZI, MOURA, 2020); integral de Riemann (OLIVEIRA, REIS, 2017); integral de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo (LACERDA et al., 2020) e conjuntos finitos e infinitos (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017).

Consideramos que os conteúdos escolhidos foram bem diversificados, e contemplam grande parte de Lima (1976)³³. Temas como números reais, topologia da reta, continuidade de funções e derivadas são exemplos dos que ainda podem ser explorados na pesquisa.

A exploração de metodologias alternativas a tradicional se mostrou um tema relevante dentro da pesquisa em ensino de Análise, mas ainda existem muitos caminhos em aberto, alguns destacados aqui. Outras metodologias podem ser exploradas, ou ainda, novas pesquisas podem ser desenvolvidas com as mesmas metodologias listadas, mas com outros participantes, conteúdos e contextos, levantando novos resultados que fortaleçam a área.

³³ Como descrito no capítulo 1 desta dissertação.

5 ESTADO DA ARTE – (2) ANÁLISE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Neste tema foram incluídas 9 pesquisas que tem por foco o ensino de Análise na Formação de Professores, isto é, são pesquisas que discutem a disciplina de Análise em cursos de Licenciatura em Matemática ou em cursos de formação continuada, a saber: Gomes, Otero-Garcia, Silva, Baroni (2015); Cerri, Dias (2016); Moreira, Vianna (2016); Otero-Garcia, Baroni, Martines (2013); Paródia, Pereira, Otero-Garcia (2020); Bisognin, Bisognin, Leivas (2016); Rizzon, Lima, Sauer, Cury (2017); Melo (2019) e Otero-Garcia, Cammarota (2013).

Embora existam outros artigos incluídos nesta dissertação em que participantes são licenciandos, os trabalhos selecionados neste tema problematizam a presença e o ensino de Análise especificamente no contexto da Formação de Professores.

Identificamos dois subtemas, cada um com seus respectivos subtemas:

- Currículo e programas
 - Conhecimentos curriculares presentes nas disciplinas de Análise do Brasil
 - A prática como Componente Curricular em Análise Real
 - Por que Análise Real na Licenciatura?
 - Avaliações Externas: ENADE
- Processos de ensino e aprendizagem
 - Dificuldades na aprendizagem de sequências numéricas
 - Educação a Distância
 - A noção de cognição inventiva

Apresentamos, a seguir, as reflexões geradas, sintetizando nossos resultados. Para informações mais aprofundadas acerca dos trabalhos incluídos neste tema consulte o Apêndice B.

5.1 SÍNTESES E REFLEXÕES

A multiplicidade de temáticas identificadas dentro do tema *Análise na Formação de professores* mostra a complexidade e os múltiplos aspectos envolvidos quando se discute a disciplina de Análise em cursos de Licenciatura.

Em relação a *Currículos e programas*, três temáticas foram identificadas nas pesquisas analisadas: *Conhecimentos curriculares presentes nas disciplinas de Análise do Brasil*, *A prática como Componente Curricular em Análise Real* e *Por que Análise Real na Licenciatura?*

Em respeito dos *Conhecimentos curriculares presentes nas disciplinas de Análise do Brasil*, GOMES et al. (2015) investiga o projeto pedagógico de curso e o plano de ensino de 136 licenciaturas em Matemática, apontando quatro resultados parciais. O primeiro, reafirma a problemática já discutida aqui no capítulo 1: a falta de uniformização das nomenclaturas da disciplina, sendo encontradas 25 distintas. Dentre elas, as mais utilizadas são Análise Real, Análise Matemática, Introdução a Análise Real e Análise Matemática I e II. Seis das 25 fazem referência à modalidade do curso (Licenciatura ou Bacharelado), o que pode significar propostas de abordagem diferentes da disciplina em tais modalidades.

O segundo resultado revela a existência de mais de uma disciplina de Análise em vários programas analisados. O terceiro diz respeito à bibliografia da disciplina, com um baixo número de referências voltadas para a licenciatura. Os textos mais utilizados são: Ávila (2011), Lima (1997), Figueiredo (1996), Ávila (2013) e Lima (2010).

O último resultado constata que a disciplina sempre está alocada nos últimos períodos da matriz curricular dos cursos analisados e ressalta o fato de alguns cursos não apresentarem uma disciplina específica de Análise, contrariando o parecer CNE/CES 1302/2001 (BRASIL, 2001). Ficam as questões: Os conteúdos de Análise estão distribuídos em outras disciplinas? Como justificam sua interpretação do parecer mencionado? São alguns possíveis caminhos de investigação.

Cerri e Dias (2016) discutem *A Prática como Componente Curricular* em uma disciplina de Análise a partir de suas experiências como professores da disciplina e coordenadores de curso. Os pesquisadores apontam resultados positivos da abordagem de ensino, uma vez que permite ao licenciando refletir sobre temas que compõem o currículo tanto da Educação Básica – com destaque para a noção de limite, números irracionais e suas representações, comensurabilidade e incomensurabilidade de segmentos e sequências numéricas – sua abordagem em sala de aula e em livros didáticos. Para os autores, essas reflexões contribuem para a formação de professores críticos e autônomos e auxiliam os estudantes na compreensão dos conceitos, dando-lhes significado e aproximando da sua futura prática. Além disso, destacam que propostas como estas – da prática como componente curricular – justificam a presença dos temas abordados em um curso de Licenciatura.

A existência e o papel da disciplina de Análise em cursos de Licenciatura em Matemática são questionados na temática *Por que Análise Real na Licenciatura?* Moreira e Vianna (2016) consideram que três grupos estão envolvidos na discussão sobre o currículo e atividades de formação em cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil: (1) os matemáticos; (2) educadores matemáticos e (3) professores de matemática da Educação Básica e licenciandos em Matemática.

Nesta dissertação, os três grupos são contemplados, em diferentes pesquisas: Moreira e Vianna (2016) estabelecem comparações entre as visões de matemáticos e educadores matemáticos; Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) dão voz aos professores e coordenadores de cursos de Licenciatura e, por fim, licenciandos em Matemática e professores de Matemática da Educação Básica são contemplados em Gomes et al. (2015).

Apesar de diferenças entre matemáticos e educadores matemáticos, ambos os grupos concordaram com a obrigatoriedade da disciplina de Análise no currículo da Licenciatura em Matemática, em que as justificativas giram em torno do fato de ser considerada “fundamental para que os licenciandos tenham um contato mínimo com a matemática superior e possam construir um ponto de vista sobre a matemática atual” (MOREIRA, VIANNA, 2016, p. 533), além de propiciar. A cultura matemática propiciada pela Análise, o conhecimento da natureza do pensamento matemático e a organização da matemática como um conhecimento científico também foram justificativas apresentadas. Para os participantes, isto oportuniza aprofundamento dos conhecimentos matemáticos, permitindo ao futuro professor maior conhecimento dos conteúdos lecionados. As maiores divergências estão relacionadas à abordagem de alguns tópicos.

A obrigatoriedade da disciplina de Análise no currículo da Licenciatura também é apoiada pelos professores e coordenadores de curso de Licenciatura (OTERO-GARCIA, BARONI, MARTINES, 2013). Assim como os educadores matemáticos em Moreira e Vianna (2016), suas justificativas relacionam-se à fundamentação do conhecimento matemático; consolidação, e formalização de conteúdos, além da cultura e bagagem matemática propiciada. Reconhecem, no entanto, que não é uma disciplina com aplicações diretas na futura prática docente dos licenciandos. Além disso, os professores e coordenadores também defendem que o papel primordial da Análise deveria ser fundamentar o conhecimento dos licenciandos acerca dos números reais.

Se por um lado, matemáticos, educadores matemáticos, professores e coordenadores de curso de Licenciatura defendem a permanência da Análise em cursos de Licenciatura os depoimentos de licenciandos em Matemática e professores de Matemática da Educação Básica – apresentados em Gomes et al. (2015) – revelam duas direções: a primeira indica que a disciplina de Análise não é significativa para o professor de Matemática, contradizendo a visão dos professores e coordenadores (OTERO-GARCIA, BARONI, MARTINES, 2013).

Neste contexto, os participantes destacaram a reprodução e a memorização como técnicas essenciais para o bom rendimento na disciplina. Ao tentarem “atingir o nível esperado pelo professor”, palavras como “trauma” e “tortura” foram utilizadas para descrever a relação com a Análise. Outro aspecto negativo levantado pelos depoentes, é que a disciplina se configura como

uma matéria teórica, pesada, formal, em que seus diversos teoremas e demonstrações, tornam sua estruturação complexa, difícil e abstrata.

Outras características foram apontadas pelos participantes, entendidas como exigências de alunos que cursam Análise, endossando a dificuldade enfrentada na compreensão da disciplina: (1) a necessidade de ir estudar além do que é mobilizado em sala de aula (2) a necessidade de evocar conteúdos estudados em outras disciplinas e (3) a necessidade do uso de sua intuição nos processos de demonstração. Para Gomes et al. (2015) essas características garantem a crença da Análise como uma “disciplina formal”, e, por ser formal, é difícil.

O segundo caminho apontado pelos participantes, indica que a Análise permite ao futuro professor ter uma visão profunda dos conteúdos trabalhados na Educação Básica. Essa relação da Análise com a Educação Básica foi reafirmada diversas vezes pelos participantes, mesmo que tais relações ainda permaneçam veladas ou que sejam desenvolvidas de maneira individual e não institucional.

Neste sentido, reafirmamos a provocação de Gomes et al. (2015): será que a disciplina de Análise é, de fato, importante para a formação do professor? Será que tal discurso não se configura apenas como uma crença cristalizada dentro da Licenciatura? Além disso, pensar “Por que Análise na Licenciatura?” é também pensar “Por que não Análise na Licenciatura?” Ainda não temos respostas para essas perguntas, mas mantemos essas reflexões como sugestões para novas pesquisas.

Pontuamos que a escolha do título da temática “*Por que Análise Real na Licenciatura?*” foi feita em referência ao artigo de mesmo nome (MOREIRA, CURY, VIANNA, 2005) que, além de ser um dos trabalhos analisados em Otero-Garcia (2011a), serviu como base para Moreira e Vianna (2016) e marca a pesquisa no campo.

Dentre todas as pesquisas nesta temática, o único trabalho de cunho exclusivamente quantitativo é Paródia, Pereira e Otero-Garcia (2020), incluído na temática *Avaliações Externas: ENADE*. Os autores identificaram uma redução no número de questões de Análise, bem como na abrangência dos conteúdos, nas últimas duas edições do ENADE analisadas. Destacam-se as sequências e séries numéricas como temas na maioria das avaliações.

A característica da Análise de “oferecer maior rigor dos resultados do Cálculo” ficou evidenciada, uma vez que em todas as avaliações investigadas, há questões relacionadas a “Demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral”.

Será que o redirecionamento das questões indica uma “algoritmização no ENADE”, repetindo a histórica “algoritmização da Análise Matemática” presente nos cursos de licenciatura?

Paródia, Pereira e Otero-Garcia refletem fazem esse questionamento, uma vez que os conteúdos identificados na área de análise dos exames são os mesmos estudados nas disciplinas de Cálculo.

Os pesquisadores também afirmam que o nível de exigência dos conteúdos de Análise no ENADE é baixo e seu foco está na mobilização de procedimentos e no uso das ferramentas matemáticas e não no seu entendimento.

Sobre esses resultados da pesquisa, algumas questões podem ser postas: o baixo nível de exigência do ENADE confronta o excesso do rigor presente no ensino de Análise nas instituições brasileiras, ou pelo menos, o excesso de rigor narrado pela pesquisa em ensino de Análise. Em que direção devemos caminhar? Para uma diminuição do rigor no ensino de Análise? Para um ensino de Análise mais procedimental? Mas dessa forma não seria uma nova forma de Cálculo?

Quanto ao subtema *Processos de ensino e aprendizagem*, três temáticas foram identificadas: *Dificuldades na aprendizagem de sequências numéricas*, *Educação a Distância* e *A noção de cognição inventiva*.

As *Dificuldades na aprendizagem de sequências numéricas* são discutidas em Bisognin, Bisognin e Leivas (2016) e em Rizzon, Lima, Sauer e Cury (2017). O primeiro artigo traz resultados das dificuldades encontradas por licenciandos de Matemática de duas instituições de Ensino Superior do Estado do Rio Grande do Sul, na resolução de uma questão sobre sequências numéricas. Os participantes já tinham estudado o conteúdo antes da aplicação de questionário elaborado para a pesquisa.

Utilizando o referencial teórico dos Três Mundos da Matemática, os pesquisadores concluem que os participantes ainda se encontram no estágio da matemática prática, dado que utilizavam elementos corporificados nas justificativas das questões.

Uma das dificuldades encontradas pelos participantes é em relação à linguagem matemática. Em particular, é destacada a dificuldade na operação com o sinal de igualdade e o símbolo de limite. Os participantes estão ancorados no mundo corporificado, e mesmo evidenciando elementos do mundo simbólico, os pesquisadores afirmam que ainda precisam superar dificuldades para futuramente trabalharem tais conceitos com alunos da Educação Básica.

Os participantes em Rizzon et al. (2017), são alunos de licenciatura (que cursavam a disciplina Análise Real) e mestrados de um curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemáticas (que cursavam a disciplina Tópicos de Cálculo). Os erros encontrados nas respostas de duas questões sobre sequências, foram categorizados em quatro tipos: (I) o mau emprego da linguagem matemática, como a falta de parênteses, para indicar o conjunto de termos das sequências; (II) a confusão na indicação dos termos das sequências, como apenas a utilização dos coeficientes numéricos; (III) a interpretação equivocada do enunciado, alguma informação

oferecida é ignorada e (IV) as dificuldades ligadas ao desconhecimento da lei da soma dos termos de uma progressão geométrica ilimitada.

Os pesquisadores concluem que não houve diferenças significativas entre os tipos de erros cometidos por licenciandos e mestrandos.

Ambos os artigos revelam a necessidade de olharmos para a Licenciatura como um curso profissionalizante: um curso que deve oferecer subsídios e capacitação para os Licenciados e que, portanto, precisa articular melhor seus conteúdos com a futura prática docente dos estudantes.

Rizzon et al. (2017) aponta que é necessário elaborar atividades sobre sequências numéricas a partir dos erros identificados, visando aplicá-las a professores da Educação Básica e para gerar reflexões e discussões dentro dos próprios cursos de formação de professores. Neste contexto, pesquisas que interpretem o erro como oportunidade de aprendizagem e ressignificação de conceitos – não somente o de sequências numéricas – contribuirão positivamente para a pesquisa em ensino de Análise.

Bisognin, Bisognin e Leivas (2016), acreditam que os professores formadores devem fazer uma “jornada” pelos Três Mundos da Matemática, indo de atividades de matemática prática e chegando ao estágio de matemática formal, considerando e permitindo a consciência da especificidade de cada mundo. Além disso, os pesquisadores também atribuem aos professores universitários a necessidade de apresentar bons exemplos e abordagens metodológicas para os Licenciandos, independentemente dos conteúdos abordados.

Ainda sobre a Formação de Professores, o argumento em Rizzon et al. (2017) é que as disciplinas de conteúdo matemático não devem estar isoladas das pedagógicas, visando desenvolver o conhecimento matemático para o ensino. A importância da articulação entre conteúdos matemáticos e a futura prática docente dos licenciandos, também é destacada em trabalhos já mencionados em outras temáticas como Cerri e Dias (2016) e Gomes et al. (2015). Nesse contexto, ainda questionamos: como realizar essa articulação de conteúdos da Análise com conteúdos da Educação Básica? Todos os conteúdos de Análise são passíveis de articulações? Perguntas como estas ainda estão em aberto e podem gerar inúmeras novas pesquisas.

A temática *Educação a distância* é recente na literatura analisada. Melo (2019) investiga os desafios enfrentados em uma disciplina de Análise em um curso de Licenciatura em Matemática, ofertado a Distância pela Universidade Federal do Ceará. O autor ressalta a importância do tripé “fórum – portfólio – aula presencial” como estratégia para o ensino, aprendizagem e avaliação na educação a distância.

Da análise realizada, o autor identifica como negativas as atitudes dos alunos na participação nos fóruns e entrega dos portfólios. No primeiro caso, foi comum o plágio de trechos

encontrados na internet, sem referências adequadas e sem reflexões sobre a pertinência e contribuição de tais postagens para o tema da aula. Quanto aos portfólios, além do não cumprimento de prazos de entrega, foram recorrentes as soluções idênticas para as questões propostas, com a justificativa de realização das atividades em equipe.

Aspectos positivos resultaram de mudanças não previstas: por motivos financeiros, as aulas presenciais precisaram ser substituídas por aulas síncronas em formato de webconferências. Tal mudança resultou em uma boa interação ao vivo entre alunos e docente. Um material extra de consulta para os estudantes foi produzido, uma vez que os slides da aula e sua gravação ficam disponíveis para consulta.

O pesquisador também discute como pontos positivos a atitude dos tutores e professor regente durante o processo de aprendizagem. A rápida correção e lançamento de notas no sistema, permitiu ao aluno um acompanhamento do seu rendimento “em tempo real”. Um bom planejamento das aulas síncronas e a disponibilização dos materiais necessários pelo professor, gerou mais segurança e confiança nos alunos para a realização das avaliações.

A partir da análise das narrativas do professor regente, Melo conclui que o sucesso na aprendizagem de Análise Matemática depende principalmente do interesse de cada aluno. Esse interesse pode ser aferido quantitativamente pelos acessos à turma virtual, participações nos fóruns, prazos de entrega de atividades cumpridos, participação nas aulas de webconferências.

A pesquisa de Melo (2019), entretanto, discorre sobre o ponto de vista do professor regente. Consideramos que ela deixa em aberto a possibilidade de uma pesquisa que refletisse mais sobre as necessidades e motivações dos alunos público-alvo da educação a distância, investigando suas razões e contextos seria interessante, buscando metodologias, processos avaliativos ou outros recursos mais adequados a esses estudantes, visando diminuir os desafios encontrados.

Na temática *A noção de cognição inventiva*, Otero-Garcia e Cammarota (2013) fazem uma releitura de trabalhos analisados em Otero-Garcia (2011a), a partir da noção de cognição inventiva no ensino de análise. Tal noção é tida como uma teoria, uma caixa de ferramentas para pensar a aprendizagem. Os autores buscam entender a aprendizagem como um processo de invenção, ou de criação de problemas, em contraste com o entendimento comum de cognição como resultante de um processo de representação de dados e problemas. É nesse sentido que destacam a importância de não primazia do formalismo sobre outras formas existentes e presentes no processo de aprendizagem.

6 ESTADO DA ARTE – (3) O “FAZER MATEMÁTICA” EM ANÁLISE

Neste tema estão reunidas as pesquisas que discutem aspectos relacionados a práticas e habilidades matemáticas requeridas em Análise, entendida como uma área da Matemática A saber: Flôres, Fonseca, Bisognin (2020); Pinto, Scheiner (2015); Vieira, Souza, Imafuku (2020) e Júnior, Andrade (2016).

Três subtemas foram identificados nas pesquisas selecionadas:

- Pensamento Matemático Avançado
- Argumentações matemáticas
- A interpretação dos signos na Matemática

Apresentamos, a seguir, as reflexões geradas a respeito do tema, sintetizando nossos resultados. Para informações mais aprofundadas acerca dos trabalhos incluídos neste tema, consulte o Apêndice C.

6.1 SÍNTESES E REFLEXÕES

No tema *O “fazer Matemática” em Análise*, identificamos três temáticas: *Pensamento Matemático Avançado*, tratando aspectos cognitivos da aprendizagem, *Argumentação em Matemática*, trazendo a questão dos aspectos formais daquele conhecimento e a *Interpretação de Signos na Matemática*, colocando questões epistemológicas.

Na temática *Pensamento Matemático Avançado*, as participantes da pesquisa em Flôres, Fonseca e Bisognin (2020) são três estudantes de um curso de licenciatura em Matemática de um Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, que cursavam a disciplina de Análise Matemática. O objetivo da pesquisa é analisar os processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) mobilizados pelos estudantes, durante a realização de tarefas envolvendo representação decimal finita de números racionais.

Resultados destacam diferentes aspectos do processo de representação (mudança e tradução) do PMA sendo mobilizados pelos participantes da pesquisa durante a realização das tarefas. Em destaque, uma dificuldade recorrente na identificação de padrões, que é uma etapa importante da generalização, acaba limitando os processos do PMA que se seguem, de sintetização e abstração.

As pesquisadoras defendem realizar atividades que mobilizem os processos do PMA tanto no Ensino Superior quanto na Educação Básica, em seus diferentes graus de complexidade, de

maneira a priorizar o processo de abstrair, que é considerado o mais importante dos processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado.

Além disso, destacam a importância do uso de tarefas no ensino para o desenvolvimento do PMA, permitindo a descoberta do conhecimento matemático e possibilitando “ao aluno situações em que deve observar, elaborar e testar conjecturas, a partir de padrões e regularidades” (FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN, 2020, p. 219).

Dentre os dois artigos incluídos na temática *Argumentações Matemáticas*, ambos abordam o conteúdo de sequências numéricas.

Em *Visualização e ensino de Análise Matemática* (PINTO, SCHEINER, 2015), uma pesquisa teórica, tem como objetivo discutir o uso de representações visuais em argumentações matemáticas, apresentando a noção de abstração estrutural. A reanálise do trabalho de Pinto (1998)³⁴ usa essa noção de abstração para analisar a aprendizagem de conceitos matemáticos, destacando o papel das representações visuais na argumentação em matemática nesse processo. O conteúdo matemático em estudo é o conceito formal de limite de sequência de números reais.

A pesquisa empírica retomada nesse artigo é a única pesquisa nessa revisão em que participantes são exclusivamente alunos de bacharelado³⁵ em matemática. Neste artigo, a análise do material empírico retomado tem por foco os aspectos relacionados ao uso de representações visuais pelo participante Chris.

Procedimentos metodológicos da pesquisa empírica original em Pinto (1998) incluíram observação em sala de aula e entrevistas. Analisando as estratégias de aprendizagem usadas pelos participantes da pesquisa durante o curso, a pesquisadora identificou dois grupos de alunos. O grupo apresentado no artigo constrói “uma *representação de um conceito* (representações visuais, nos casos estudados) e, ao mesmo tempo, utilizam esta representação como *representação para produzir novos conhecimentos*, tais como a recuperação verbal de uma definição formal do conceito de limite de sequência” (PINTO, SCHEINER, 2015, p. 646). Identificados como estudantes que “atribuem significado”, o grupo inclui o estudante Chris.

Os autores argumentam que o aluno Chris usa as representações como instrumento para embasar a produção de argumentos formais e resolver problemas, o que se contrapõem ao uso da

³⁴ PINTO, M. M. F. (1998/2011) *Students' Understanding of Real Analysis*. PhD Thesis, Warwick University. Ann Arbor, Michigan: ProQuest-CSA, LLC.

³⁵ Os resultados referem-se a pesquisa desenvolvida em uma universidade inglesa. Os bacharelados tem seu primeiro contato com a disciplina de Análise em seu primeiro ano no Instituto de Matemática na universidade, sendo a disciplina de Cálculo cursada nos últimos anos do correspondente ao nosso Ensino Médio. Já a disciplina para os licenciandos é oferecida em outro Instituto, nos últimos períodos de sua formação.

visualização como meramente ilustrativa dos conceitos trabalhados, de maneira compartimentalizada do conhecimento produzido.

Os pesquisadores defendem o potencial das representações visuais como recurso alternativo para o estudo de sequências, apoiando mesmo o estudo das próprias definições, a resolução de problemas e formalização de argumentos, além de, por vezes construírem objetos para experimentações mentais. Das implicações para o ensino, destacam também que o uso de exemplos adequados pelos professores traz benefícios por que evitam a restrição da imagem conceitual dos alunos, que muitas vezes associam sequências convergentes unicamente a sequências monótonas.

Já Vieira, Souza e Imafuku (2020) tem por objetivo analisar as percepções de um grupo de licenciandos em Matemática sobre prova e justificativa em Matemática. Em abordagem que se assemelha à da pesquisa anterior, os pesquisadores retomam referências teóricas estudadas como Processos do Pensamento Matemático Avançado. Diferente da pesquisa anterior, aqui o foco é deslocado do uso da visualização durante o processo da formalização do conteúdo matemático para a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais em Matemática e de aspectos intuitivo-numérico e lógico-formal.

Os participantes da pesquisa responderam, individualmente, duas questões do tipo verdadeiro/falso, em dois momentos distintos do curso: uma, ao final da disciplina Sequências e Séries e a outra questão, ao final da disciplina Introdução à Análise Real (8º semestre). Não houve consulta a materiais externos e intervenção dos pesquisadores. As respostas foram analisadas e classificadas como Corretas, Erradas ou Em Branco. A partir das respostas das questões e visando discutir tais respostas, estudantes foram selecionados para a realização de entrevistas semiestruturadas individuais.

Os autores destacam que para auxiliar na elaboração da coleta de dados e identificar potenciais dificuldades dos alunos na aprendizagem do conteúdo, foram realizadas entrevistas com docentes que ministram as disciplinas citadas. As dificuldades relacionadas à elaboração de justificativas em Matemática apontadas pelos professores nas entrevistas foram confirmadas nas respostas dos estudantes, a saber: a definição de limite de sequências e a estrutura lógica de demonstrações.

As mesmas categorias de erros foram encontradas nas respostas em dois momentos de aplicação das questões: “(A1) Apresentar um exemplo para justificar uma afirmação considerada verdadeira; (B1) Confundir a expressão “limitada” com “ter limite”, (C1) Enquadrar limites

infinitos (divergência) na expressão “ter limite” e (D1) “Apresentar argumentos sem sentido das justificativas” (VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020, p. 11).

A expectativa dos pesquisadores era de maior maturidade matemática dos participantes ao final da disciplina de Introdução a Análise Real, em relação ao emprego de aspectos lógico-formais na construção de provas e argumentação matemática. Em sua avaliação, os erros, incompreensões e limitações apresentadas dificultam o desenvolvimento de processos do Pensamento Matemático Avançado, como generalização e síntese.

Vieira, Souza, Imafuku defendem que o trabalho com as demonstrações e as lógicas relacionadas devem ser estudadas em todas as disciplinas matemáticas da licenciatura, enfatizando que os processos de generalização, síntese e abstração do PMA não devem ser trabalhados apenas nas disciplinas de final de curso. Estas, “devem coroar o uso desses processos, para a compreensão da Matemática como uma construção lógica, inter-relacionada, coerente e consequente de conceitos e ideias” (VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020, p. 16)

Em relação ao ensino e aprendizagem de sequências, os autores defendem a necessidade de valorização de questões que explorem aspectos formais dos conceitos relacionados para que o entendimento sobre sequências não se restrinja ao uso de técnicas, algoritmos e ideias vagas que, para os autores, terão pouca contribuição na formação dos estudantes.

Junior e Andrade (2016), na temática *Signo da Matemática*, defendem a aprendizagem como uma relação entre os indivíduos e os signos ou, em outras palavras, a aprendizagem como um encontro com os signos do conhecimento que está sendo aprendido. Os autores sugerem uma mudança na abordagem de ensino de Análise, que ultrapasse as metodologias cristalizadas e do ato tradicional de ensinar e visa criar um ambiente em sala de aula que favoreça a decifração de signos e a singularidade (ou individualidade) dos alunos.

Entretanto, ao mesmo tempo que sugerem tal redirecionamento do ensino, também defendem que o papel do professor no ensino seria apenas “apresentar a matéria da forma mais competente que for possível, assim os signos se destacarão” (JUNIOR, ANDRADE, 2016, p. 561).

7 ESTADO DA ARTE – (4) FILOSOFIA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Esta temática é contemplada em duas pesquisas que utilizam a Filosofia e História da Matemática como perspectiva teórica para investigar o ensino e a aprendizagem de Análise, a saber: Gomes (2019) e Thomé, Duro, Andrade (2020).

Apresentamos, a seguir, as reflexões geradas a respeito do tema, sintetizando nossos resultados. Para informações mais aprofundadas acerca dos trabalhos incluídos neste tema consulte o Apêndice D.

7.1 SÍNTESES E REFLEXÕES

O tema *Filosofia e História da Matemática*, incluiu dois artigos, ambos abordam o tema teoricamente.

Gomes (2019) apresenta reflexões históricas sobre relações discursivas relacionadas ao enunciado “Análise”. Para isso, referencia-se teoricamente em Michel Foucault e usa a História da Matemática como ferramenta de investigação e compreensão.

Gomes identifica e descreve seis séries discursivas, apresentando relações com o enunciado “Análise”: Análise como função de práticas de decomposição; Análise como função de práticas de Geometria: análise e síntese; Análise como função de práticas algébricas; Análise como função de práticas metodológicas de Cálculo Diferencial e Integral; Análise como função de práticas limitantes infinitas e Análise como função de práticas estruturantes de um corpo ordenado completo.

Estas relações atravessam a História da Matemática e correspondem a mudanças de perspectiva do enunciado “Análise”: os processos analíticos e sintéticos mobilizados pelos gregos, em certo momento da história, tornam-se processos que se distanciam das perspectivas usadas por eles, indo em direção ao que é algébrico. Gomes (2019) destaca: “com o desenvolvimento das ideias relacionadas ao rigor, aquilo que é analítico passa a negar tais processos algébricos e a considerar somente aqueles aritméticos” (GOMES, 2019, p. 395).

Destacamos aqui, a última série discursiva descrita em Gomes (2019): *Análise como função de práticas estruturantes de um corpo ordenado completo*. Nessa, o autor trata das contribuições dadas à Matemática por Weierstrass, que defende a necessidade de tornar o sistema de números reais mais rigoroso, referindo-se à intuição presente nos trabalhos de Cauchy. Nessa direção, caminhando para formalização rigor crescente, os matemáticos Dedekind e Peano, ao final do século XIX, mostram de maneira axiomática o que estava sendo buscado. O trabalho de

Dedekind possibilitou um conjunto de postulados para os números reais a partir dos números naturais e Peano, introduziu um simbolismo e uma nova lógica matemática para operar com esses números.

Neste contexto, Gomes defende que tais ideias culminaram no que conhecemos atualmente por números reais e teoria de conjuntos, tendo impacto direto nas disciplinas de Análise oferecidas nos cursos de licenciatura em Matemática.

Vale destacar que neste momento do desenvolvimento das ideias sobre rigor, são valorizados os processos que se afastam dos recursos geométricos. A importância do trabalho de Dedekind também é por sua contribuição para a demonstração rigorosa dos teoremas sobre limites sem que, para isso, precisasse utilizar recursos intuitivos e/ou geométricos. Neste contexto, há uma contradição presente: atualmente alguns autores (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016; MAZZI, 2015; OLIVEIRA, REIS, 2017; PINTO, SCHEINER, 2015; LACERDA et al. 2020) defendem as abordagens visuais como recursos para o ensino e a aprendizagem de Análise. Tal proposta vai de encontro ao processo de constituição da Análise como área de conhecimento, porque ao longo desse buscou-se separar as bases da Análise das da Geometria. Abordagens visuais seriam ou poderiam ser consideradas abordagens geométricas? Uma pesquisa que confrontasse tais ideias seria interessante, talvez, discutindo as noções de rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise.

Gomes (2019) também ressalta as potencialidades de se trabalhar as contribuições de sua pesquisa ao ensinar Análise, questionando:

O que ocorreria se esse sujeito adentrasse em todo o emaranhado discursivo, o que este artigo começou a explicitar, e pudesse ir ao encontro de toda a multiplicidade com a qual o enunciado “Análise” manteve relação? O que poderia acontecer se, em cursos de licenciatura em matemática, toda essa metamorfose histórico-discursiva fosse apresentada aos alunos, de forma a deixar por conta deles a formação de suas próprias compreensões acerca do que sustenta os discursos que estão inseridos? (GOMES, 2019, p. 397).

Não seria proveitoso que os currículos da licenciatura incluíssem essas reflexões em seus planejamentos, visando aumentar o interesse e entendimento sobre a Análise para os licenciandos? Novas pesquisas que apresentem propostas didáticas, aplicações, estudos de caso utilizando a perspectiva histórica no ensino de Análise tem potencial para contribuir para o desenvolvimento da área de pesquisa.

Thomé, Duro e Andrade (2020) busca relacionar aspectos da construção da Análise (perspectiva histórica) aos processos de construção do conhecimento pelos sujeitos, utilizando a Epistemologia Genética, de Jean Piaget e R. Garcia, como lente teórica.

Os pesquisadores argumentam que o processo que levou à formalização da análise ocorreu em quatro etapas: desenvolvimento do cálculo diferencial e integral; organização do cálculo;

análise do cálculo e a aritmetização da análise, em que para cada uma das etapas, os autores encontraram semelhanças conceituais com os estádios³⁶ de desenvolvimento cognitivo.

Para os autores, a aprendizagem de Análise ocorre por meio de tomadas de consciência sucessivas, culminando em conceituação. Destacam que, com exceção dos alunos que já tomaram consciência das estruturas necessárias para assimilar um sistema axiomático, este modelo de ensino (de apresentação de um sistema axiomático, com axiomas, definições, propriedades e teoremas) “não representa potencial de aprendizagem para os estudantes que ainda não tomaram consciência das ações que são limitadas por esse sistema” (THOME, DURO, ANDRADE, 2020, p. 419), por estar por vezes sendo promovida em estádios superiores ao que os sujeitos se encontram.

Ficam as questões sobre que ações didáticas podem ser realizadas para que os sujeitos tomem consciência das ações e passem a transitar em estádios mais avançados de desenvolvimento? É possível incluir tais reflexões históricas na sala de aula de Análise? Como promover tais reflexões de maneira a auxiliar os alunos a atingirem estágios mais avançados de desenvolvimento? O que seriam, na verdade, esses estádios?

³⁶ “É importante não atribuir o significado de período cronológico ao termo estádio (atribuindo-lhe o significado de estágio ou substituindo por essa palavra), pois a ideia do termo é enfatizar a noção de construção em etapas sucessivas e dependentes entre si” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 409). Para evitar a confusão, existem quatro critérios que delimitam os estádios: 1) Ordem de sucessão constante com cronologia variável; 2) Caráter integrativo: as estruturas construídas em um estádio são integradas às estruturas do nível seguinte; 3) Totalidade inerente à organização das estruturas: a construção do conhecimento não consiste num somatório de conhecimentos, mas em uma complexificação de estruturas e 4) Noção de processo: cada estádio inclui um nível de preparação para o estádio seguinte e de finalização por si mesmo (DOLLE, 1987 apud THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020).

8 QUESTÕES CRÍTICAS EM OTERO-GARCIA E O DESENVOLVIMENTO DA ÁREA DE PESQUISA

Em resposta à dissertação de Otero-Garcia (2011a), que realizou o último estado da arte do ensino de Análise, levantando questões críticas e destacando lacunas na literatura, apresentamos, neste capítulo, um comparativo entre os resultados e contribuições realizadas com nossa pesquisa e as discutidas em Otero-Garcia (2011a) e Otero-Garcia e Baroni (2015).

A partir das pesquisas analisadas em seu estudo, Otero-Garcia (2011a) levanta quinze categorias, denominadas como “questões críticas” relacionadas ao ensino de análise. São elas: *Números reais; As relações entre o Cálculo e a Análise; Cálculo infinitesimal e Análise não-standard; A formação do professor de Análise; Livros didáticos de Análise; Bacharelado e Licenciatura; Dificuldades com o Cálculo e a Análise e o ensino anterior; Os conteúdos de Análise, sua sequência e abordagem; A armadilha do ensino de Análise; Avaliação em Análise; O ensino de Análise e a influência estrangeira; Formalismo e Análise; O uso de computadores no Ensino de Análise; A disciplina de Análise e as Pedagógicas e Análise e Interpretação.*

Otero-Garcia apresenta tais questões organizando-as em seções. Neste capítulo, essas são retomadas como temáticas, para tecer o diálogo entre elas e os nossos resultados.

Permanece a ausência de artigos sobre os temas *Cálculo infinitesimal e Análise não-standard; O ensino de Análise e a influência estrangeira; Análise e Interpretação; Livros didáticos de Análise e Dificuldades com o Cálculo e a Análise e o ensino anterior.*

Cinco temáticas tiveram continuidade nas investigações analisadas em nossa pesquisa: *Bacharelado e Licenciatura; Os conteúdos de Análise, sua sequência e abordagem; A armadilha do ensino de Análise; Formalismo e Análise e A disciplina de Análise e as Pedagógicas.* Apresentamos a seguir as reflexões de Otero-Garcia a respeito de tais questões e como nossa pesquisa contribuiu para seu desenvolvimento.

Na temática *Bacharelado e Licenciatura* Otero-Garcia discute a questão da separação da disciplina de Análise de acordo com cada uma das modalidades do curso de Matemática, refletindo em que medida deve ser pensada de modo diferenciado. Mesmo sendo a atuação profissional do Licenciado distinta da do Bacharel, o autor defende que é necessário pesar as prioridades dentro do curso de Matemática, levantando essa questão para as outras disciplinas. Ao seu ver “as tentativas de separação da disciplina de análise visam muito mais ‘facilitá-la matematicamente’ para a licenciatura que, de fato, trata-la com a especificidade de cada modalidade a fim de que o curso seja melhor para ambas” (OTERO-GARCIA, 2011, p. 127).

Neste contexto, entretanto, Otero-Garcia indica que no curso de matemática do ICMC/USP e da UFSCar o ensino é diferenciado por modalidade e sugere questões de investigação:

Como é feita tal diferenciação? Que professores dão essa disciplina, nesses casos específicos da licenciatura? Quais as diferenças de conteúdo dessa disciplina da licenciatura com relação a do bacharelado? Há alguma preocupação em articulá-la com as disciplinas pedagógicas ou com os conteúdos do ensino médio? E os livros didáticos, quais são adotados? Há uma real preocupação com a formação do professor ou o curso é apenas uma versão matematicamente mais leve da dada para o bacharelado? (OTERO-GARCIA, 2011, p. 128-129)

A crença na redução do conteúdo e do rigor na Análise, quando específico para a licenciatura também é citada em Gomes et al. (2015). Para os participantes da entrevista, existem dois pensamentos em relação a essa distinção: o primeiro, que vai ao encontro ao que já foi mencionado, é que a disciplina seria inferior à trabalhada com os bacharelados. Por outro lado, participantes também manifestaram a convicção que uma disciplina específica permitiria bons trabalhos sobre as aplicações da Análise na Educação Básica, o que não acontece quando a disciplina é oferecida em disciplinas compartilhadas com os bacharelados. Gomes et al. (2015) completam, afirmando que há uma dicotomia entre a análise oferecida separadamente para a Licenciatura e para o Bacharelado, operando uma

uma *logica binária* que arranja as duas disciplinas como zero e um, falso e verdadeiro, em que só se pode ter uma *ou* outra. Uma dualidade que desconsidera quase por completo a multiplicidade que constitui licenciando, licenciatura, bacharelado e bacharelado e armazena em recipientes próprios tudo o que a uma ou outra parece se relacionar, que não leva em consideração os vários uns que constituem um curso superior de matemática, independente da modalidade a que se destina (GOMES et al., 2015, p. 1252)

Entendemos que as questões propostas por Otero-Garcia são pertinentes para quaisquer cursos que realizem essa separação e, ainda, para aqueles que tem a intenção de fazê-la. Novas pesquisas são necessárias para investigar tais questões.

Em relação à temática *O conteúdo de Análise, sua sequência e abordagem* Otero-Garcia discute questões tais como que conteúdos são abordados em uma disciplina de Análise para a licenciatura, questionando algumas abordagens: questões de aplicação da matemática; o rigor e a intuição; a articulação com conteúdos da Educação Básica e a História da Matemática.

Sobre as aplicações na disciplina de Análise, Otero-Garcia indica:

Numa das categorias do trabalho de Moreira, Cury e Vianna (2005) é dito que a disciplina de análise é importante para a formação do professor de matemática por permitir uma maior compreensão dos fenômenos naturais. Isso nos remete imediatamente para as ideias de Djairo e Ávila em Reis (2001) que defendem uma maior aproximação entre a matemática e a física. Entretanto, como isso poderia acontecer de fato? Como seria um ensino de análise mais aplicado? (OTERO-GARCIA, 2011, p. 132).

Em relação ao rigor predominante na abordagem do conteúdo de análise, os professores participantes em Reis (2001) concordam que “um rigor excessivo não é benéfico para o futuro professor” (idem). No entanto, não há indicativos de alternativas:

[...] como seria um curso de análise ‘menos’ rigoroso e mais intuitivo? Como se daria, no ensino de análise, o ponto de equilíbrio entre o par tensional *intuição* e *rigor* apontado por Reis (2001)? Sendo ainda mais pragmático, como um professor de análise, ao ter contato com essas pesquisas, pode efetivamente alterar sua postura em sala de aula em relação ao rigor? (OTERO-GARCIA, 2011, p. 133).

A necessidade da articulação dos conteúdos de análise com os da Educação Básica é entendida como fundamental para 36% dos alunos entrevistados em Bolognizi (2006). Porém, Otero-Garcia traz uma crítica sobre sua existência:

É curioso notar como é possível notar a falta de algo sem que se saiba o que é esse algo. Dito de outra forma, se falta tal articulação, é por que ela existe, oras, se existe deve ser simples apontá-la, e se é, restaria saber por qual motivo ainda não foi feito. É evidente que não acreditamos nessa conclusão, mas não por falta de articulação. Acreditamos que não se deve atribuir o peso dos problemas da disciplina a ela se nem se sabe da sua existência de fato. (OTERO-GARCIA, 2011, p. 133).

A História da Matemática é discutida por Otero-Garcia com vistas a tratá-la como parte da Educação Matemática, incluindo-a no ensino de análise. Mais uma vez, o autor não apresenta claramente como efetivar tal abordagem.

Dentro desse contexto, porém, Otero-Garcia levanta uma provocação acerca da ordem dos conteúdos apresentados em Análise. Será que ela

[...] faria substancial diferença para o aprendizado dos alunos ou para a formação do professor de matemática? Já vimos que a dificuldade e o alto índice de reprovação dos alunos nas disciplinas de cálculo e de análise e, em especial nessa última, é aparentemente um fato histórico. Nesse contexto, já tivemos integral sendo abordada antes de derivada, temos hoje o contrário. O problema persiste. Será que esse tipo de questão realmente o âmago dos problemas existentes no ensino de cálculo e de análise? (OTERO-GARCIA, 2011, p. 131)

Acreditamos que nossos resultados contribuem com a literatura ao apresentar abordagens não tradicionais de ensino de Análise, organizadas em nosso tema *Metodologias Alternativas*. Discutimos o *Uso de tecnologias digitais*, o *Desenho de tarefas (Sequência Fedathi e Educação Matemática Realística)* e as *Metodologias Ativas (Sala de aula invertida e Cenários para investigação)*. Cada temática apresenta suas especificidades e diferentes papéis de professores e estudantes para o desenvolvimento das propostas. Discussões mais específicas foram realizadas no Capítulo 5 desta dissertação.

Pesquisas sobre o uso de aplicações da matemática ou modelagem no ensino de Análise não foram identificadas em nossa investigação. A articulação da Análise com conteúdos da Educação Básica será discutida posteriormente.

Quanto à História da Matemática, encontramos pesquisas com abordagens teóricas (GOMES, 2019; THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020), que investigam o desenvolvimento da Matemática e o surgimento da Análise e não como abordagens de ensino.

Acreditamos que ambos os aspectos merecem mais investigações. Como a História da Matemática, como abordagem de ensino, pode ser empregada em aulas de Análise? Quais os impactos dos processos históricos da Matemática para a constituição do currículo e sequência de conteúdos que atualmente estruturam os cursos de Matemática? Há experiências que mudam a ordem dos conteúdos realizados comumente em disciplinas de Análise? Como isso é feito? Existem materiais didáticos para auxiliar? Ainda não temos respostas para essas perguntas, ficam como caminhos de novas investigações.

Na temática *A armadilha do ensino de Análise* Otero-Garcia provoca sobre a necessidade da disciplina de Análise em cursos de licenciatura, traçando um paralelo entre o ensino de matemática na Educação Básica e questionando:

Será que a presença da disciplina de análise nas licenciaturas não é uma mera questão de mercado com o objetivo de selecionar os estudantes mais aptos a seguirem para o bacharelado? Não estaria assim incorporada às grades dos cursos de matemática apenas por conta do bacharelado e muitas vezes não seria mantida apenas por inércia ou então por uma espécie de tradição? (OTERO-GARCIA, 2011, p. 135)

Otero-Garcia indica que a preocupação com o papel da análise na licenciatura está apresentada em dois vieses: pelos objetivos da disciplina e pela sua especificidade com relação ao bacharelado. Neste contexto o autor sugere que

outro elemento que poderia trazer informações interessantes para essa discussão seria os projetos pedagógicos dos cursos de matemática. Como eles têm tratado a questão da disciplina de análise na formação do professor? [...] Daria para fazer uma pesquisa horizontal, a saber, uma pesquisa que contemplasse vários cursos, relativamente abrangente com relação a eles (OTERO-GARCIA, 2011, p. 226)

A “armadilha” do ensino de Análise para Otero-Garcia, estaria “[...] no fato de que a análise nos cursos de matemática não promove os objetivos que são mencionados com orgulho pelos matemáticos e não naquilo que ela poderia promover caso fosse trabalhada sob uma perspectiva ideal” (OTERO-GARCIA, 2011, p. 135).

Nossa pesquisa contribui na discussão sobre o papel da Análise em cursos de formação de professores, na temática *Por que Análise Real na Licenciatura?*, em que apresentamos a visão de diferentes grupos envolvidos no desenho curricular das licenciaturas brasileiras (MOREIRA, VIANNA, 2016; GOMES et al., 2015; OTERO-GARCIA, BARONI, MARTINES, 2013). A obrigatoriedade da disciplina é uma convergência entre matemáticos, educadores matemáticos, professores de Análise e coordenadores de curso e seus argumentos giram em torno de propiciar

uma cultura matemática, conhecer a natureza do pensamento matemático e aprofundar os conhecimentos matemáticos que futuramente serão lecionados pelos licenciandos. Entretanto, os coordenadores de curso e professores universitários reconhecem que não é uma disciplina com aplicações diretas na prática docente dos alunos (OTERO-GARCIA, BARONI, MARTINES, 2013).

Já os licenciandos e professores de Matemática da Educação Básica apontam duas direções: na primeira, a Análise é entendida como uma disciplina não significativa para o professor de Matemática, e a segunda, os participantes defendem positivamente a disciplina, afirmando que possibilita uma visão profunda dos conhecimentos futuramente trabalhados na Educação Básica (GOMES et al., 2015)

Dentro desse contexto, ainda há muito o que se investigar. Reafirmamos a provocação em Gomes et al. (2015): será que a disciplina de Análise é, de fato, importante para a formação do professor? Será que tal discurso não consiste apenas como uma crença cristalizada dentro da Licenciatura? Refletir “Por que Análise na Licenciatura?” é também refletir sobre “Por que não Análise na Licenciatura?”. Ficam essas provocações como sugestões para novas pesquisas.

As relações com o rigor e a intuição são tratados na temática *Formalismo e Análise*. Otero-Garcia destaca que “a concepção formalista da matemática e o processo de aritmetização da Análise, em certo sentido, confundem-se” (OTERO-GARCIA, 2011, p. 227), tendo forte influência no ensino da disciplina. Neste contexto, sugere que seja investigado como essa concepção formalista se deu do ponto de vista do ensino, questionando: “Por que não admitir uma concepção intuicionista ou logicista? Seriam tais opções plausíveis?” (idem, p. 137).

Concordamos com Otero-Garcia ao entendermos que o formalismo e o rigor e são intimamente relacionados. Abordagens históricas do formalismo, rigor e constituição da Análise foram tratados teoricamente em Gomes (2019) e Thomé, Duro e Andrade (2020).

O rigor e da formalização também foram discutidos em outras investigações.

Utilizando o Geogebra em uma atividade, Lacerda et al. (2020) observa a limitação da ferramenta para subsidiar o desenvolvimento de demonstrações. Os autores questionam a necessidade de demonstrações sugerindo que para evitar a perda do rigor e da formalização dos conceitos, o docente poderia apresentar as demonstrações necessárias após as atividades realizadas no Geogebra:

A referência ao formalismo da Análise por licenciandos em Matemática e professores de Matemática da Educação Básica em Gomes et al. (2015) levou à identificação de dois aspectos principais. Por um lado, enquanto alguns participantes sugerem que a formalidade da disciplina a torna difícil, associando a Análise a termos como “sofrimento”, “terrível” e “trauma” outros

ressaltaram a importância da formalidade para dar bases formais aos conhecimentos que irá lecionar em sua prática docente.

Por outro lado, dentre as justificativas da obrigatoriedade da disciplina de Análise em cursos de Licenciatura, destaca-se a formalização de conteúdos por matemáticos, educadores matemáticos (MOREIRA, VIANNA, 2016), professores universitários e coordenadores de curso de Licenciatura em Matemática (OTERO-GARCIA, BARONI, MARTINES, 2013), como já mencionado anteriormente.

Na temática *A disciplina de Análise e as Pedagógicas*, em que Otero-Garcia defende que tal articulação (entre a Análise e as disciplinas consideradas pedagógicas) seja realizada também outras disciplinas de conteúdo matemático, além da Análise. A articulação “disciplina de Análise e as disciplinas pedagógicas” está relacionada a articulação “disciplina de Análise com a Educação Básica”, já mencionada anteriormente. Otero-Garcia (2011a) questiona se essa última articulação é realmente possível:

Como é feita tal articulação com relação a todas as outras disciplinas de matemática da licenciatura? Ela existe? Se existe, como transpô-la para a análise? Se não existe, por que levantar essa bandeira só com relação a uma única disciplina em particular? (OTERO-GARCIA, 2011, p. 138).

Dentro desse contexto, identificamos o artigo *A prática como Componente Curricular em uma Disciplina de Análise Real* (CERRI, DIAS, 2016). Ele apresenta um relato de experiência, exibindo aspectos positivos da articulação da disciplina de Análise com a Educação Básica, consistindo em um caminho para que tal articulação seja feita.

Cerri e Dias (2016) discute a proposta a partir da experiência dos autores como coordenadores de curso e professores da disciplina e aponta que a proposta possibilita maior compreensão dos conceitos estudados, atribuindo-lhes significado e contribuindo para a formação de professores críticos e autônomos.

Por fim, *O uso de computadores no Ensino de Análise* foi elencada por Otero-Garcia (2011) como uma questão crítica, mas é marcado pela ausência de pesquisas que tratassem do tema no ensino de Análise, sendo numerosas no ensino de Cálculo (OTERO-GARCIA, 2011). Como já mencionado anteriormente, nossa pesquisa identificou diversas investigações sobre o uso de tecnologias digitais nas aulas de Análise, com destaque para o software Geogebra.

Assim as lacunas expostas em Otero-Garcia a respeito da ausência do uso de computadores/tecnologia no ensino de Análise, correspondem ao volume de pesquisas e experiências relatadas. Mesmo com o crescimento dessas experiências, permanece o interesse e importância de pesquisas que explorem o uso de tecnologias no ensino de Análise, buscando por

contribuições em outros conceitos/conteúdos, outras abordagens para os mesmos softwares, identificação de novas limitações e também novos softwares para o ensino.

Por fim, quatro temáticas também não foram identificadas nas pesquisas, mas merecem destaque: *Números reais; As relações entre o Cálculo e a Análise; A formação do professor de Análise e Avaliação em Análise.*

Na temática *Números reais* Otero-Garcia trata a questão de seu ensino como um ponto delicado, que exige atenção. O autor revela um movimento oscilatório na defesa de duas abordagens de ensino: a que constrói os números reais a partir dos números naturais e a que admite os reais como corpo ordenado completo. Dentro desse contexto o autor provoca:

Como seria o desempenho dos alunos em análise se antes desse curso houvesse na grade curricular uma disciplina que tratasse especificamente da construção dos conjuntos numéricos, com todos os seus detalhes, conforme defende Pasquini (2007)³⁷? [...] Não poderia ser mais profícua uma disciplina que tratasse dos conjuntos numéricos com riqueza em relação a uma de análise nos moldes como é dada atualmente? (OTERO-GARCIA, 2011, p. 121).

Indo além, Otero-Garcia (2011a) também sugere que pesquisas sejam feitas sobre as influências históricas e filosóficas para o ensino dos reais, partindo do pressuposto que o processo de aritmetização da Análise influenciou fortemente a adoção de abordagem de ensino dos reais através de sua construção.

Investigações sobre as abordagens de ensino para os números reais continuam sendo necessárias, acentuando-se pelo fato de que este não foi foco de discussão nas pesquisas analisadas. Por outro lado, os processos históricos de rigorização dos números reais são discutidos em Gomes (2019), ao tratar de sua construção a partir dos números naturais.

Na temática *As relações entre o Cálculo e a Análise*; Otero-Garcia discute diálogos possíveis entre as duas disciplinas, abordando, dentre outros, aspectos intuitivos e formais de suas abordagens. Analisando-as como elementos curriculares, suas relações também foram investigadas. A partir das grades da USP e UNESP, Otero-Garcia conclui que

[...] por muito tempo as duas disciplinas ‘coexistiram’, o que não só torna de certo modo natural a confusão que existe entre elas até hoje, como abre um precedente interessante sobre o qual refletir: por que não voltar a ensiná-las em conjunto? (OTERO-GARCIA, 2011, p. 223)

Nesta pesquisa não encontramos respostas para estas questões. Entretanto, um aspecto que aproxima ambas pesquisas é a discussão histórica dos processos de rigorização do Cálculo,

³⁷ PASQUINI, R. C. G. **Um Tratamento para os Números Reais via Medição de Segmentos**: Uma Proposta, Uma Investigação. 2007. 209 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UNESP, Rio Claro, 2007.

culminando na Análise. Como em Paquini (2007) analisada em Otero-Garcia (2011a), esse foi o foco das pesquisas em Gomes (2019) e Thomé, Duro e Andrade (2020)

A transição entre o Cálculo e a Análise que merece ser atenção e não surgiu como discussão nos artigos analisados, é a transição do Cálculo para a Análise, que é apontado por Pinto (2001)³⁸ como uma transição e por Reis (2001)³⁹ como uma tensão entre o rigor e a intuição.

Em *A formação do professor de Análise* também é uma investigação importante, uma vez que são eles os responsáveis pela formação dos licenciandos. Atualmente a pesquisa em ensino de Análise é majoritariamente realizada⁴⁰ por mestres em Educação Matemática, seguidos por doutores em Educação e doutores em Matemática. Será esse resultado um reflexo da formação dos professores que atuam na sala de aula de Análise?

Otero-Garcia questiona qual deve ser a formação do professor que ensina Análise na licenciatura. Deveriam ser educadores matemáticos? Neste caso, questiona:

[...] os educadores matemáticos formados nos programas brasileiros de pós-graduação em educação matemática, educação ou ensino de ciências e matemática têm formação suficiente para ministrar uma disciplina de análise na graduação? As estruturas curriculares dos programas de pós-graduação que formam os chamados educadores matemáticos foram pensadas para essas questões? [...] Qual é a formação matemática do educador matemático neste país? (OTERO-GARCIA, 2011, p. 125).

Caso contrário, deveriam ser matemáticos? Neste sentido, Otero-Garcia também propõe investigar a formação pedagógica dos matemáticos em cursos de pós-graduação. De maneira geral, o questionamento que fica é: “Os programas de matemática ou de educação matemática (ou educação, ou ensino de ciências e matemática) têm condições de formar um bom professor de análise?” (OTERO-GARCIA, 2011, p. 224).

Nossa pesquisa não identificou investigações com esse foco, mas questionamos: o que é necessário para a formação do professor formador? Qual e como é a formação dos professores que ensinam Análise nas instituições brasileiras? Seria necessário que o professor de Análise também tenha cursado licenciatura? Essas e outras questões ficam em aberto.

A *Avaliação em Análise* também não foi um tema presente nas pesquisas analisadas, entretanto, as avaliações externas e, em particular o ENADE, configurou-se uma nova vertente da pesquisa sobre avaliação, discutido em Paródia, Pereira e Otero-Garcia (2020).

³⁸ PINTO, M. M. F. Discutindo a Transição dos Cálculos para a Análise Real. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Org.). **A Prática Educativa sob o Olhar de Professores de Cálculo**. Belo Horizonte: Fumarc, 2001. p. 123-145.

³⁹ REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise**: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

⁴⁰ Resultados da primeira vertente de análise, em que investigamos a análise das titulações dos autores principais dos artigos de periódicos e anais de eventos.

Em relação ao tópico *Avaliação em Análise*; o autor questiona os métodos tradicionais de avaliação nas disciplinas de Análise, como as provas, e sugere que

uma pesquisa histórica sobre os métodos de avaliação usados nas disciplinas de análise pode trazer elementos esclarecedores para algumas das nossas questões, além, é claro, de possíveis alternativas. Já nos dias de hoje, uma pesquisa com professores de análise nos mesmos moldes, também. Quais são os métodos usados nos atuais cursos de análise? (OTERO-GARCIA, 2011, p. 227)

A questão da avaliação dentro de disciplinas de Análise não foi um tema presente nas pesquisas analisadas, configurando-se como lacunas ainda presentes na pesquisa. Entretanto, outra área da “Avaliação” surgiu: as avaliações externas, e em particular o ENADE, discutido por Paródia, Pereira e Otero-Garcia (2020).

De qualquer modo, as lacunas levantadas por Otero-Garcia continuam não contempladas pelas pesquisas.

Somando-se a isso, nesta dissertação apontamos metodologias alternativas às metodologias tradicionais de ensino; mas estas, por sua vez não discutiram possíveis avaliações alternativas. Os métodos de avaliação tradicionais, como provas, continuam sendo válidos se as abordagens de ensino são não tradicionais? E, por outro lado, além de identificar os métodos usados nos atuais cursos de Análise (como sugerido por Otero-Garcia (2011a)), seria interessante investigar possíveis métodos alternativos de avaliações, mesmo dentro de um contexto de ensino tradicional.

Algumas das reflexões geradas em Otero-Garcia (2011a) foram discutidas pelo próprio autor e seus colegas, em trabalhos (GOMES et al., 2015; OTERO-GARCIA, BARONI, MARTINES, 2013) e outras pesquisas geraram novos questionamentos (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013; PARÓDIA, PEREIRA, OTERO-GARCIA, 2020).

Após discutirmos sobre as lacunas observadas em Otero-Garcia (2011a) e compararmos tais ausências com os estudos analisados nesta dissertação, potencializamos novas reflexões, proporcionadas e geradas pelas categorias que construímos, apresentadas no capítulo 10.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos capítulos 5 a 8 apresentamos o Estado da Arte proposto. Neste capítulo apresentamos considerações finais a partir de reflexões geradas ao longo dessa pesquisa.

Reiteramos que nesta dissertação nos propomos a realizar *um* estado da arte da pesquisa em ensino de Análise, o que sinaliza o reconhecimento de um aspecto subjetivo na investigação (MELO, 2006). Outros pesquisadores e outros olhares para os mesmos artigos poderiam gerar outra categorização e organização dos mesmos, fica a sugestão.

Antes de iniciarmos sua apresentação gostaríamos de ressaltar algumas limitações e dificuldades encontradas para a realização desta pesquisa.

A primeira ressalva é a escolha das fontes de dados. O Google Acadêmico foi escolhido como fonte de dados principal, por seu amplo escopo e acesso a diferentes veículos de pesquisa. Essa sua amplitude, de fato, foi observada: os 24 artigos incluídos se originam de 19 periódicos distintos.

Entretanto, uma limitação observada no Google merece destaque, referente ao volume de trabalhos acessíveis: não é possível ir além da página 50 nas buscas⁴¹, o que pode ocultar pesquisas que atenderiam aos critérios de seleção.

A união dos artigos encontrados no Google Acadêmico e das referências bibliográficas dos trabalhos encontradas no Google, constitui nosso conjunto de fontes de dados. Reconhecemos que esta escolha talvez não tenha contemplado todas as fontes possíveis de artigos, mas representa certa ampliação da pesquisa em Otero-Garcia (2011a)⁴², como discutido.

Estas foram nossas escolhas e decisões. Outros pesquisadores podem optar por desvendar outros bancos de dados, como os sites de periódicos específicos ou outros bancos de dados acadêmicos.

Por fim, gostaria de destacar uma questão fundamental no meu processo de busca e seleção dos trabalhos, assim como na realização do Estado da Arte que é a organização. Pode parecer simplista, mas deixo esta reflexão para outros estudantes que queiram realizar Estados da Arte, ou, então, apenas a revisão de literatura de suas pesquisas: é fundamental desenvolver hábitos tais

⁴¹ Considerando que apareçam 20 pesquisas por página.

⁴² A comparação relativa se deu pelo número de periódicos contemplados nos dois trabalhos. Aqui, 19 revistas distintas foram contempladas, enquanto em Otero-Garcia (2011) apenas oito. Evidente que para uma comparação real das fontes consultadas em ambas pesquisas, seria necessário que os procedimentos metodológicos fossem os mesmos, mas aqui destacamos a amplitude possibilitada pela fonte de dados escolhida. Destacamos também que além dos oito periódicos, Otero-Garcia (2011) inclui em suas fontes de dados o portal da Capes e quatro anais do SIPEM.

como de nomear e separar os arquivos e pastas no computador evitando confusão e perda de tempo na busca pelos arquivos.

Nessa pesquisa, a prática foi identificar cada arquivo baixado com o nome dos autores e ano, assim como é utilizado em citações, por exemplo: *OTERO-GARCIA, 2011*. Depois da leitura do artigo e marcações no texto, o arquivo foi salvo como *OTERO-GARCIA, 2011_marcado*. Após a realização do resumo, salvava um documento *OTERO-GARCIA, 2011_resumo*. Essa foi a maneira que encontrei para organizar meus arquivos e resumos de maneira sintética e por proximidade. Outros pesquisadores podem ter outras formas de organização, mas deixo essa sugestão do que foi útil no decorrer desta pesquisa.

Após essas observações, trazemos nossas considerações finais.

Há uma variedade grande nos periódicos escolhidos pelos pesquisadores para publicação de suas pesquisas, sendo 19 jornais distintos. O destaque fica para *BOLEMA*, com 3 artigos, e *Educação Matemática Pesquisa*, *Revista do Instituto Geogebra de São Paulo* e *Vidya* com 2 artigos cada. A maioria dos periódicos (15) tem seu extrato Qualis entre A1 e B2, o que denota um bom posicionamento na área de pesquisa das revistas em que as pesquisas sobre o tema foram publicadas.

Todos os participantes⁴³ das pesquisas que realizam intervenções estão relacionados ao curso de licenciatura. Dentre os 24 artigos analisados, 14 deles realizam intervenções⁴⁴ e os participantes foram: licenciandos em Matemática (10 artigos); professores universitários (4); professores de Matemática da Educação Básica (3); coordenadores de curso de licenciatura em Matemática (2), educadores matemáticos (1) e mestrandos de um curso de ensino de Ciências e Matemáticas (1).

Das metodologias de pesquisa utilizadas, a maioria dos artigos analisados (11) não declaram⁴⁵ explicitamente a metodologia de pesquisa utilizada. Dos que declaram, a abordagem é majoritariamente qualitativa (10) e apenas um trabalho é quantitativo (*PARÓDIA, PEREIRA, OTERO-GARCIA, 2020*). O Quadro 6 traz as metodologias dos artigos do corpus da pesquisa, de acordo com a declaração dos autores e a abordagem da pesquisa, a partir de uma identificação nossa.

⁴³ Algumas pesquisas têm mais de um grupo de participantes.

⁴⁴ Pinto e Scheiner (2015) fazem uma reanálise de Pinto (1998). Embora o trabalho de 1998 tenha como participantes alunos do bacharelado, o foco do artigo de 2015 é a reanálise e, portanto, não consideramos como sendo um trabalho que realiza intervenção.

⁴⁵ A saber: Alves (2013); Otero-Garcia e Cammarota (2013); Alves, (2014); Pinto e Scheiner (2015); Alves, Fontenele e Lucas (2016); Cerri e Dias (2016); Júnior e Andrade (2016); Moreira e Vianna (2016); Mendes, Oliveira e Buriasco (2017); Gomes (2019) e Vieira, Souza e Imafuku (2020).

| Artigo | Metodologias | Abordagem da pesquisa |
|--|--|--------------------------------------|
| Alves (2013) | Não declarada | Proposta didática |
| Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) | Qualitativa; Análise documental | Intervenção: Entrevista |
| Otero-Garcia e Cammarota (2013) | Não declarada | Teórico: Releitura |
| Alves (2014) | Não declarada | Proposta didática |
| Gomes et al. (2015) | Qualitativa; Qualitativa com inspiração fenomenológica; Análise documental ⁴⁶ | Intervenção: Entrevista |
| Mazzi (2015) | Qualitativa | Intervenção: aplicação de atividades |
| Pinto e Scheiner (2015) | Não declarada | Teórico: Releitura |
| Alves, Fontenele e Lucas (2016) | Não declarada | Intervenção: aplicação de atividades |
| Bisognin, Bisognin e Leivas (2016) | Qualitativa | Intervenção: aplicação de atividades |
| Cerri e Dias (2016) | Não declarada | Relato de experiência |
| Júnior e Andrade (2016) | Não declarada | Teórico: Releitura |
| Moreira e Vianna (2016) | Não declarada | Intervenção: questionário |
| Mendes, Oliveira e Buriasco (2017) | Não declarada | Teórico: Releitura |
| Oliveira e Reis (2017) | Qualitativa; Estudo de caso | Intervenção: aplicação de atividades |
| Rizzon et al. (2017) | Metodologia de pesquisa não descrita, mas os autores apontam que as respostas foram analisadas qualitativa e quantitativamente | Intervenção: aplicação de atividades |
| Gomes (2019) | Qualitativa | Teórico |

⁴⁶ Pesquisas que tem mais de uma metodologia são artigos que foram divididos em momentos distintos.

| | | |
|--|---|--|
| Melo (2019) | Não declarada | Análise documental e intervenção: entrevista |
| Flôres, Fonseca e Bisognin (2020) | Qualitativa | Intervenção: aplicação de atividades |
| Lacerda et al. (2020) | Qualitativa inspirada na Engenharia Didática | Intervenção: aplicação de atividades |
| Mazzi e Moura (2020) | Qualitativa | Intervenção: aplicação de atividades |
| Nachtigall et al. (2020) | Qualitativa, natureza aplicada. Em relação aos objetivos é exploratória e quando aos procedimentos, pesquisa-ação | Intervenção |
| Paródia, Pereira e Otero-Garcia (2020) | Quantitativa e prioritariamente bibliográfica | Análise documental |
| Thomé, Duro e Andrade (2020) | Se intitulam como uma pesquisa teórica, bibliográfica, não sistemática e de perspectiva histórica | Teórico |
| Vieira, Souza e Imafuku (2020) | Não declarada | Intervenção: aplicação de atividades |

Quadro 6: Metodologias e abordagem dos artigos

Fonte: Elaborado pelas autoras (2022).

Em sua maioria, as abordagens realizadas são intervenções⁴⁷ (14 ocorrências), o que indica uma preocupação dos pesquisadores com o diálogo teoria e prática, da sala de aula.

As pesquisas teóricas em uma área com tradição predominantemente empírica também nos chamaram atenção.

A respeito dos instrumentos da coleta de dados, 14 artigos declararam⁴⁸ quais foram utilizados, contrapondo-se aos que não fizeram menção explícita a esses aspectos metodológicos. Apresentamos no Quadro 7. Dentre os instrumentos, os de maior ocorrência foram as entrevistas

⁴⁷ Entendidas aqui como métodos em que os pesquisadores entram em contato com os participantes, seja através de entrevistas, aplicação de atividades e etc.

⁴⁸ Não estamos considerando aqui os trabalhos que fazem releitura ou reanálises.

(6 ocorrências⁴⁹), seguidas de questionários (5) e análise documental (3). Também com 3 ocorrências tiveram atividades realizadas no GeoGebra, mas cujas formas de registro dos eventos dos encontros não foram destacadas pelos autores.

| Artigo | Instrumentos utilizados |
|--|---|
| Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) | O primeiro momento é uma pesquisa documental. No segundo momento foram realizadas entrevistas semiestruturadas. |
| Gomes et al. (2015) | Primeiro momento: entrevistas semiestruturadas. Segundo momento: entrevistas com gravação de áudio. Terceiro momento: análise documental. |
| Mazzi (2015) | Questionário. Gravação de áudio, vídeo e da tela do computador, simultaneamente. |
| Alves, Fontenele e Lucas (2016) | Atividades realizadas no Geogebra, mas não há informações da forma de registro dos dados. |
| Bisognin, Bisognin e Leivas (2016) | Questão a sobre o conteúdo, respondida com lápis e papel. |
| Moreira e Vianna (2016) | Questionário enviado por endereço eletrônico |
| Oliveira e Reis (2017) | Atividades no GeoGebra e materiais respondidos com lápis e papel, mas não foi declarado a forma de registro dos dados do encontro. Também foi feita entrevista semiestruturada. |
| Rizzon et al. (2017) | Teste ⁵⁰ |
| Melo (2019) | Análise documental e entrevistas |
| Flôres, Fonseca e Bisognin (2020) | Sequência de tarefas exploratórias escritas |
| Lacerda et al. (2020) | Observação participante, atividades exploratórias e questionário |

⁴⁹ Alguns artigos tiveram mais de uma ocorrência de entrevista, como o caso de Vieira, Souza e Imafuku (2020), que realiza entrevista com os docentes (para auxiliar na preparação dos instrumentos de dados

⁵⁰ Categorizei como questionário.

| | |
|--------------------------------|--|
| Mazzi e Moura (2020) | Dentro da proposta de experimento de ensino, as participantes realizaram explorações no Geogebra a partir de um roteiro fornecido pelos pesquisadores. A forma de registro de dados não foi declarada. |
| Nachtigall et al. (2020) | Questionário com perguntas abertas e fechadas. |
| Vieira, Souza e Imafuku (2020) | Questões do tipo verdadeiro/falso ⁵¹ e entrevistas semiestruturadas. Para elaborar tais instrumentos foram realizadas entrevistas com docentes das disciplinas em questão. |

Quadro 7: Instrumento de coleta de dados

Fonte: elaborado pelas autoras.

Esperávamos que as gravações de áudio seriam usadas em maior número, mas só 2 artigos destacaram esse recurso. Isso pode significar que os pesquisadores não gravaram/registram os encontros; ou, se gravaram, não informaram isso no texto, o que consideramos a hipótese mais provável.

Quanto aos referenciais teóricos utilizados, houve uma variedade entre os artigos, totalizando 11 distintos. O destaque é para os processos do Pensamento Matemático Avançado, que foi referenciado em três artigos (OLIVEIRA, REIS, 2017; (FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN, 2020; VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020). Outros referenciais teóricos foram utilizados apenas uma vez, listamos: Cognição inventiva (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013); Seres-Humanos-com-Mídias (MAZZI, 2015); Abstração estrutural (PINTO, SCHEINER, 2015); Teoria das Representações Semióticas (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016); Três Mundos da Matemática (BISOGNIN, BISOGNIN, LEIVAS, 2016); Gilles Deleuze (JÚNIOR, ANDRADE, 2016); Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise (OLIVEIRA, REIS, 2017); Michel Foucault (GOMES, 2019); Epistemologia genética (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020); Interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais em Matemática (VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020) e Aspectos intuitivo-numérico e lógico-formal (VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020).

⁵¹ Categorizei como questionário.

O objetivo geral desta pesquisa é realizar *um* estado da arte da produção brasileira sobre o ensino de Análise Real, a partir de pesquisas publicadas entre os anos de 2011 e 2020.

A fim de orientar o estado da arte, duas questões de pesquisa foram enunciadas, relacionadas aos objetivos específicos desta dissertação: (1) *Que metodologias vêm sendo empregadas nas ações didáticas em sala de aula no ensino de Análise Real?* e (2) *“Que temáticas sobre o ensino de Análise Real estão presentes nas pesquisas?”*. O objetivo da pesquisa foi cumprido e o Estado da Arte proposto foi apresentado nos Capítulos 5 a 8 deste

Em relação a análise dos artigos selecionados, realizamos resumos inspiradas em Otero-Garcia (2011a) e a partir deles e usando a análise temática (BRAUN, CLARKE, 2006) categorizamos as pesquisas e as organizamos em um mapa da literatura (CRESWELL, 2010), rerepresentado na Figura 1, rerepresentada a seguir.

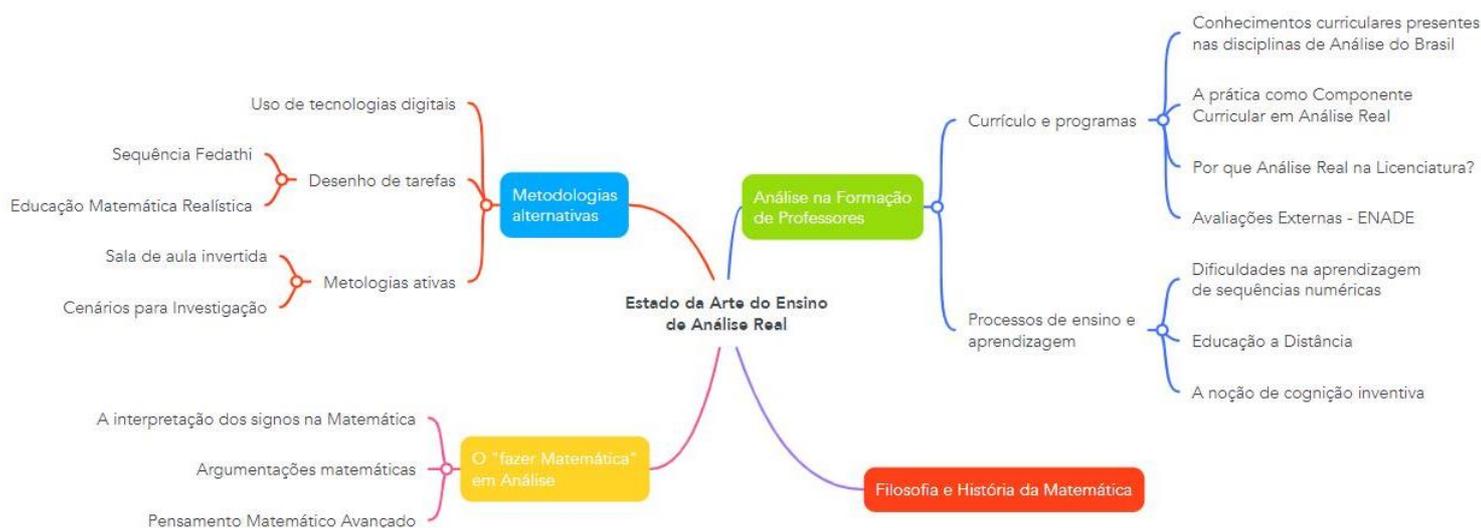


Figura 1: Mapa de literatura.

Fonte: Elaborado pelas autoras (2022).

Identificamos 4 grandes temas a partir de nossa categorização: (1) *Metodologias Alternativas*, (2) *Análise na Formação de Professores*, (3) *O “fazer Matemática” em Análise* e (4) *História da Matemática*. O conjunto de temáticas listado, bem como o estado da arte, respondem à primeira questão de pesquisa.

A primeira questão de pesquisa é *“Que metodologias vêm sendo empregadas nas ações didáticas em sala de aula no ensino de Análise Real?”*. É respondida ao configurar o tema (1) *Metodologias alternativas*, composta por artigos que discutem o uso de metodologias alternativas à metodologia tradicional no ensino de Análise.

A variedade de temáticas distintas nesse tema foi surpreendente, uma vez que há anos atrás, Otero-Garcia (2011a) sequer identificou trabalhos que discutissem metodologias alternativas à tradicional. Concluímos que a exploração de metodologias alternativas é recente na literatura, e se mostrou relevante e crescente dentro da área de pesquisa em ensino de Análise.

Dentre os 24 artigos analisados, 9 foram incluídos neste tema.

Os conteúdos matemáticos escolhidos para as abordagens alternativas foram diversificados, contemplam uma parte substancial do conteúdo proposto em Lima (1976), a saber: Convergência pontual e uniforme de funções (ALVES, 2013; ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016); séries infinitas e critérios de convergência (ALVES, 2014); convergência de sequências (MAZZI, 2015); convergência de sequências e o Teorema do Valor Intermediário (MAZZI, MOURA, 2020); integral de Riemann (OLIVEIRA, REIS, 2017); integral de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo (LACERDA et al., 2020) e conjuntos finitos e infinitos (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017). Além destes, outros temas ainda podem ser explorados pela pesquisa, tais como números reais, topologia da reta, continuidade de funções e derivadas.

Apesar da emergência das metodologias alternativas de ensino na última década, a questão da avaliação é uma lacuna na área. Não encontramos investigações com foco em avaliações alternativas. Seriam os métodos de avaliação tradicionais, tais como provas escritas, adequados quando as abordagens de ensino são não tradicionais? Além de identificar os métodos usados nos atuais cursos de Análise (como sugerido por Otero-Garcia (2011)), também seria interessante investigar métodos alternativos de avaliações, mesmo em contextos de ensino tradicional.

Dentro da temática das metodologias ativas de ensino, destacamos como tendência a Sala de Aula Invertida e outras abordagens de ensino que utilizem a tecnologia e os estudos prévios às aulas de Análise Real, visando otimizar o tempo nos encontros presenciais e potencializar o ensino e a aprendizagem. Tais investigações podem estar associadas às abordagens de ensino realizadas no ensino remoto, ocasionado pela pandemia.

Em particular, indicamos ainda como uma direção ou tendência do campo de pesquisa, as investigações sobre o uso de tecnologias digitais nas aulas de Análise. Como destaque, o software Geogebra que é uma ferramenta de grande potencial de ensino e pesquisa.

Outras temáticas recentes na literatura são analisadas em nossa pesquisa: *A interpretação dos signos na Matemática; Argumentações Matemáticas; os processos do Pensamento Matemático Avançado; A prática como Componente Curricular em Análise Real; Avaliações Externas (ENADE); Dificuldades na aprendizagem de sequências numéricas; Educação a distância e A noção de cognição inventiva.*

Dentre essas, acreditamos ser uma tendência a pesquisa sobre os processos de ensino e aprendizagem na/da disciplina de Análise para investigar as dificuldades e erros dos estudantes. Nessas pesquisas, o foco em processos do *Pensamento Matemático Avançado* parece uma tendência no campo, sendo utilizado em três artigos (OLIVEIRA, REIS, 2017; FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN, 2020; VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020).

Por fim, *Análise na Formação de Professores* merece um destaque. Reuniu o maior número de pesquisas dentro das tendências listadas – 15 dentre as 24 analisadas. Mostrou-se um campo bastante investigado, gerando múltiplas temáticas e, expondo a complexidade de aspectos envolvidos na discussão sobre a disciplina de Análise em cursos de Licenciatura. Apresenta-se com um grande potencial como campo de pesquisa e como tendência de pesquisa desde Otero-Garcia (2011). Ainda neste tema, outras temáticas recentes são tendências, tais como: o papel da Análise na Licenciatura; questões relacionadas ao currículo da Análise Real e a sua presença na Licenciatura e a formação do professor de Análise.

Além das reflexões levantadas nesta conclusão, outras questões também foram levantadas ao longo do estado da arte (capítulos 5 a 8), configurando-se potenciais caminhos para pesquisas futuras.

Esperamos que esta dissertação contribua para a pesquisa em ensino de Análise, inspirando estudantes que, assim como eu, se inspiraram na dissertação de Otero-Garcia (2011a). Trouxemos respostas, mas também levantamos diversas perguntas, que configuram caminhos para novas pesquisas.

REFERÊNCIAS

- ALCANTARA, C. F. B. de. Metodologias Ativas de Ensino como instrumento para o desenvolvimento do pensamento matemático formal: um estudo de caso no contexto da disciplina de Análise Real. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 23, 2019, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2019, p. 1-12.
- ALVES, F. R. V. Reconhecimento de padrões gráficos com o apoio do Software Geogebra: os casos da convergência pontual e uniforme. **#Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia**, Canoas, v.2, n.2, p. 1-20, 2013.
- ALVES, F. R. V. EXPLORAÇÃO DIDÁTICA NO ENSINO DE SÉRIES: o caso dos softwares Geogebra e o CAS Maple. **Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista**, Santo Ângelo, v. 4, n. 1, p. 33-49, jan. 2014.
- ALVES, F. R. V.; FONTENELE, F. C. F.; LUCAS, C. M. do N. Descrição gráfico-geométrica de exemplos e teoremas com apoio do Geogebra: convergência de funções. **Essentia: Revista de Cultura, Ciência e Tecnologia**, Sobral, v. 17, n. 2, p. 112-137, jun. 2016.
- AMORIM, L. I. F. A **(Re)Construção Do Conceito De Limite Do Cálculo Para A Análise**: um estudo com alunos do curso de Licenciatura em matemática. 2011. 134 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.
- ÁVILA, G. O. O Ensino do Cálculo e da Análise. **Revista Matemática Universitária**, São Paulo, n.33, p. 83-95, dez. 2002.
- BARCELOS, T.; MUNIZ, R.; VILLARROEL, R.; ISMAR, S. Relações entre o Pensamento Computacional e a Matemática: uma Revisão Sistemática de Literatura. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 4, 2015, Maceió. **Anais...** Maceió: 2015. p. 1369-1378.
- BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. Dois vieses para a disciplina de Análise em cursos de Licenciatura em Matemática. **Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Petrópolis., 2012.
- BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V.; LEIVAS, J. C. P. Aprendizagem de sequências numéricas: pesquisa sobre dificuldades de licenciandos em Matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 24, n. 3, p. 361-377, dez. 2016.
- BRASIL. Parecer CNE/CES n. 1302/2001, de 06 de novembro de 2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 05/03/2002.
- CERRI, C.; DIAS, D. P. A prática como Componente Curricular em uma Disciplina de Análise Real. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 49, p. 26-34, abr. 2016.

CORDEIRO, A. M.; OLIVEIRA, G. M.; RENTERIA J. M.; GUIMARÃES, C. A.; GERS-Rio. **Revisão sistemática:** Uma revisão narrativa. Revista do Colégio Brasileiro de Cirurgiões; v. 34, n.6, 2007.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3ª edição. Tradução Magda França Lopes. Porto Alegre: Artmed, 2010.

FERREIRA, N. S. de A. As pesquisas denominadas "Estado da Arte". **Educação & Sociedade**, Campinas, n. 79, p. 257-272, ago. 2002.

FIGUEIREDO, D. G. de. **Análise I.** 2. ed. Rio de Janeiro: Ltc - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1996

FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. de (org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática:** período 2001 - 2012. Campinas: Unicamp, 2016.

FLÔRES, M. V.; FONSECA, J. A. da; BISOGNIN E. Processos do pensamento matemático avançado revelados nas resoluções de tarefas envolvendo números racionais. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 7, n.1, p. 217-238, 2020.

GOMES, D. O. **A disciplina de Análise segundo licenciandos e professores de matemática da Educação Básica.** 2013. 268 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2013.

GOMES, D. O. Uma reflexão histórica acerca de rastros discursivos deixados pelo enunciado "Análise". **Com A Palavra, O Professor**, Vitória da Conquista, v. 4, n. 8, p. 377-400, jan. 2019.

GOMES, D. O.; OTERO-GARCIA, S. C.; SILVA, L. D. da; BARONI, R. L. S. Quatro ou mais pontos de vista sobre o ensino de Análise. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1242-1297, dez. 2015.

JUNIOR, L. C. L.; ANDRADE, A. dos S. Ensino e aprendizagem de Análise Matemática como encontro com os signos na perspectiva de Gilles Deleuze. **Inter-Ação**. Goiânia, p. 545-564. set. 2010.

KITCHENHAM, B. A., CHARTERS, S.: **Guidelines for performing systematic literature reviews in software engineering.** Versão 2.3. Inglaterra: Keele University e Durham University, 2007. Technical Report, EBSE Technical Report EBSE-2007-01.

LACERDA, G. K. S.; CARVALHO, T. R. S. de; ESQUINCALHA, A. da C.; LUZ, V. da C. A compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo em uma atividade exploratória com o uso do GeoGebra. **Revista do Instituto Geogebra de São Paulo**. São Paulo, p. 35-51. jan. 2020.

LIMA, E. L. **Curso de Análise.** 7. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.

MACÊDO, M. C.; MONTEIRO, C. E. F.; CARVALHO, R. N. Qualidades na Educação Matemática em cursos de Pedagogia: uma Revisão Sistemática da Literatura. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. v. 09, n. 19. p. 647- 664, jul-out. 2020.

MARTINES, P. T. **O papel da disciplina de Análise segundo professores e coordenadores**. 2012. 118 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2012.

MAZZI, L. C. Convergência de Sequências: uma abordagem com o software GeoGebra. **Revista do Instituto Geogebra de São Paulo**, v.4, n.1, p.5-17. 2015.

MAZZI, L. C. **Experimentação-com-GeoGebra**: revisitando alguns conceitos da análise real. 2014. 137 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2014.

MAZZI, L. C.; MOURA, A. Q. Cenários para investigação no Ensino Superior: explorando o Teorema do Valor Intermediário. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.9, n.19, p. 219-236, jul.-out. 2020.

MELO, M. F. de. Os desafios da Análise Matemática em um curso de Licenciatura a Distância. **Ead em Foco**, Rio de Janeiro, v. 9, n. 1, p. 1-8, jan. 2019.

MELO, M. V. **Três décadas de pesquisa em Educação Matemática na UNICAMP**: um estudo histórico a partir de teses e dissertações. 2006. f. 273. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Educação, Universidade estadual de Campinas, Campinas: 2006.

MENDES, M. T.; OLIVEIRA, R. C. de; BURIASCO, R. L. C. de. O conceito de conjunto finito e infinito por meio de tarefas: uma proposta à luz da educação matemática realística. **Vidya**, Santa Maria, v. 37, n. 1, p. 239-252, jan. 2017

MOLINA, M. A.; MONTECINO, A.; AGUILAR, M. S. Beyond quality metrics: defying journal rankings as the philosopher's stone of mathematics education research. **Educational Studies in Mathematics**. 103, 359-374, 2020.

MOREIRA, P. C.; VIANNA, C. R. Por que Análise Real na Licenciatura? Um paralelo entre as visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 515-534, ago. 2016.

NACHTIGALL, C.; DOMINGUES, A. M. B.; FERREIRA, S. de F.; ALVES, R. da S. Um estudo comparativo acerca da eficácia da sala de aula invertida nas disciplinas de Cálculo e Análise Real. **Prociênci@s**, v.3, n.2, p. 1-13, dez. 2020.

OLIVEIRA, J. L. de; REIS, F.da S. Utilizando o Geogebra para a construção do conceito de integral de Riemann no ensino de Análise Real. **Vidya**, Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 417-434, jul. 2017.

OTERO-GARCIA, S. C. **Uma trajetória da disciplina de Análise e um estado do conhecimento sobre seu ensino**. 2011. 528 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011a.

OTERO-GARCIA, S. C. Ensino de Análise: uma pesquisa do tipo Estado do Conhecimento. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011, Recife. **Anais...** Recife: 2011b. p. 1-12.

OTERO-GARCIA, S. C. DISCIPLINAS DE ANÁLISE NA HISTÓRIA DE SEU ENSINO: uma trajetória no curso de Licenciatura em matemática da Unesp de rio claro. **História da Ciência e Ensino: Construindo Interfaces**, v. 7, p. 1-44, jan. 2013.

OTERO-GARCIA, S. C. DISCIPLINAS DE ANÁLISE NA HISTÓRIA DE SEU ENSINO: uma trajetória no curso de Licenciatura em matemática da USP de São Paulo. **História da Ciência e Ensino: Construindo Interfaces**, Cidade, v. 11, p. 56-90, jan. 2015.

OTERO-GARCIA, S. C.; BARONI, R. L. S. A disciplina de Análise na formação inicial do professor de Matemática: uma constatação, várias questões. In: CONGRESSO ESTADUAL PAULISTA SOBRE FORMAÇÃO DE EDUCADORES, 11., 2011, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Unesp, 2011. p. 4559-4566.

OTERO-GARCIA, S. C.; BARONI, R. L. S. QUESTÕES CRÍTICAS EM ENSINO DE ANÁLISE MATEMÁTICA. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 617-636, jan. 2015.

OTERO-GARCIA, S. C.; BARONI, R. L. S.; MARTINES, P. T. Uma trajetória da disciplina de Análise e o seu papel para a formação do professor de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 692-717, jan. 2013.

OTERO-GARCIA, S. C.; CAMMAROTA, G. Aprendizagem e formação do professor de Matemática sob o viés da disciplina de Análise e da noção de Cognição Inventiva. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO (ENDIPE), 16., 2012, Campinas. **Anais...** Campinas: Unicamp, 2012. p. 006479-006490

OTERO-GARCIA, S. C.; CAMMAROTA, G. Releituras de um estado do conhecimento do ensino de Análise a partir da noção de Cognição Inventiva. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 1, p. 235-260, abr. 2013.

PARÓDIA, D. P.; PEREIRA, P. de A.; OTERO-GARCIA, S. C. Conhecimentos de Análise Matemática presentes no Exame Nacional de desempenho dos estudantes. **Hipátia**: v. 5, n. 2, p. 325-347, dez. 2020

PATROCÍNIO, G. de A. M.; SILVEIRA, I. F.; CALEJON, L. M. C. Uma análise sobre os modelos de Educação a distância (EAD) no cenário brasileiro por meio de uma revisão sistemática da literatura. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v.7, n. 1, p.74-85, jan. 2016.

PINTO, M. M. F.; SCHEINER, T. Visualização e ensino de Análise Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.17, n. 3, p.638-654, jan. 2015.

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos**. 2001. 302f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, UNICAMP, Campinas, 2001.

RIZZON, B. M.; LIMA, I. G. de; SAUER, L. Z.; CURY, H. N. Conhecimento do conteúdo de sequências numéricas: uma pesquisa com professores em formação inicial ou continuada.

Revista Ciências & Ideias, Rio de Janeiro, v. 8, n. 2, p. 1-15, mai. 2017.

SILVA, F. G. S. da. **Ensino de Estatística na Educação Básica em países da América**

Latina: uma revisão sistemática. 2020. 110 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

THOMÉ, V. W.; DURO, M. L.; ANDRADE, C. L. História da Análise Matemática e Desenvolvimento Cognitivo. **Bolema**, Rio Claro, v. 34, n. 67, p. 399-420, ago. 2020.

VICTOR, L. Systematic reviewing. In: **Social Research Update**. Reino Unido, 2008. University of Surrey.

VIEIRA, W. **Do Cálculo à Análise Real**: um diagnóstico dos processos de ensino e de aprendizagem de sequências numéricas. 2016. 452 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

VIEIRA, W.; SOUZA, V. H. G. de; IMAFUKU, Roberto S. Sobre Justificativas em questões do tipo verdadeiro/falso de estudantes de Licenciatura em Matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 26, p. 1-17, jan. 2020.

WOHLIN, C.; RUNESON, P.; HÖST, M.; OHLSSON, M. C.; REGNELL, B.; WESSLÉN, A. Systematic Literature Reviews. **Experimentation in Software Engineering**. Springer Berlin Heidelberg, 2012. p. 45–54.

APÊNDICE A – VERSÃO DETALHADA DAS METODOLOGIAS ALTERNATIVAS

Apresentamos, neste apêndice, uma versão mais detalhada da discussão a respeito das metodologias alternativas

USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS

Os seis artigos incluídos neste subtema são:

- *Reconhecimento de padrões gráficos com o apoio do software Geogebra: os casos da convergência pontual e uniforme* (ALVES, 2013)
- *Exploração didática no ensino de séries: o caso dos softwares GeoGebra e o CAS Maple* (ALVES, 2014)
- *Descrição gráfico-geométrica de exemplos e teoremas com apoio do Geogebra: convergência de funções* (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016)
- *Convergência de Sequências: uma abordagem com o software GeoGebra* (MAZZI, 2015)
- *Utilizando o GeoGebra para a construção do conceito de integral de Riemann no ensino de Análise Real* (OLIVEIRA, REIS, 2017)
- *A compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo em uma atividade exploratória com o uso do GeoGebra* (LACERDA ET AL, 2020)

Há peculiaridades em cada trabalho, bem como são diferentes os conteúdos abordados. No entanto, todos os trabalhos listados neste subtema utilizam a tecnologia digital em propostas de ensino; em sua maioria, o software Geogebra. O GeoGebra⁵² é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar.

O software Geogebra pode tanto ser utilizado de maneira online, quanto através de aplicativos para computadores e celulares. Seu site conta com tutoriais e diversos materiais didáticos disponíveis, além de ser gratuito.

Dentre os artigos incluídos, os trabalhos de Alves (2013; 2014) apresentam propostas para o ensino de Análise explorando os conceitos de séries infinitas e critérios de convergência, convergência pontual e uniforme de funções com o auxílio de dois softwares diferentes.

Alves (2014) explora as séries infinitas e critérios de convergência, utilizando a mediação tanto do Geogebra quanto do software de Computação Algébrica (CAS Maple). A pesquisa é teórica, e traz como resultado de uma leitura e análise de documentos o primeiro contato com o

⁵² Disponível em <https://www.geogebra.org/?lang=pt> . Acesso em 20 jan. 2022.

tema e a compreensão do uso dos softwares como ferramentas para a sala de aula, em contextos que priorizam a visualização.

Alves (2014) apresenta cinco conclusões: (i) a visualização e entendimento do comportamento da série é inviabilizado pela complexidade de determinados critérios de convergência; (ii) O CAS Maple se mostra como um forte aliado ao Geogebra, uma vez que permite inferir o comportamento numérico-qualitativo das séries, o que é uma limitação no Geogebra; (iii) é possível explorar características de convergência do termo geral das séries com o Geogebra, mesmo antes do trabalho com os critérios de convergência; (iv) o recurso computacional permite antever o comportamento de séries que apresentam uma descrição complexa e (v) a tecnologia permite um entendimento heurístico das séries.

O autor argumenta que o ensino de séries infinitas e de alguns critérios de convergência sem o auxílio computacional pode restringir o pensamento do aprendiz ao campo abstrato. Sugere que o professor conscientize os estudantes sobre três fatos:

(I) tais critérios [de convergência] podem, em determinados casos, indicar o comportamento da série; (II) por intermédio de sua aplicação, desconhecemos o comportamento numérico (e, portanto, qualitativo) de uma série; (III) sem o apoio da tecnologia, dificilmente conseguimos extrair uma interpretação geométrico-numérica (ALVES, 2014, p. 48)

O autor ressalta que no caso do software Geogebra, é possível realizar análises qualitativas do gráfico, explorando a monotonicidade, existência e limitação de séries e sequências. Em um segundo momento, o professor pode instigar o estudante a uma verificação formal, dentro do contexto de ensino.

Para o autor o uso do software discutidos não deve ser interpretado como uma redução no rigor no trabalho dos conceitos, e sim, como algo a se acrescentar no ensino, viabilizando a expansão do campo idiossincrásico de compreensão nas situações trabalhadas.

Já em Alves (2013) o foco é a convergência pontual e uniforme de funções, utilizando o Geogebra para auxiliar no reconhecimento de padrões gráficos. Assim como em Alves (2014), o autor elabora e reflete sobre explorações didáticas dos conteúdos no software. Não há aplicações em salas de aula.

Da exploração das potencialidades gráficas do Geogebra, o autor conclui: (i) a função rastro do programa permite a descoberta da candidata a função limite f , quando $f_n \rightarrow f$, sem o apelo analítico; (ii) a visualização do comportamento gráfico das funções permite conjecturar intervalos de convergência; (iii) a possibilidade de aplicar o critério de convergência apresentado

em Lima (2010, p. 364)⁵³ em variados exemplos; (iv) a rapidez com que teoremas e critérios de convergência podem ser analisados, utilizando da visualização antes do formalismo e (v) possibilidade de visualização da região do plano em que ocorre a convergência uniforme.

Alves (2013) destaca ainda a vantagem do caráter manipulatórios e de mobilidade dos gráficos no Geogebra, se contrapondo a modelos estáticos, criticados por alguns autores.

Esse mesmo conteúdo matemático é tratado em Alves, Fontenele e Lucas (2016). A pesquisa *Descrição gráfico-geométrica de exemplos e teoremas com apoio do Geogebra: convergência de funções* está também incluída no subtema *Sequência Fedathi*, mas aqui a ênfase analisada é o uso de tecnologias como ferramentas didáticas. Os autores realizam um experimento em 2 encontros envolvendo recém licenciados pela Universidade Estadual Vale do Acaraú (professores) em Matemática foi analisada. Não é mencionado se tais participantes haviam cursado a disciplina de Análise durante sua licenciatura.

As atividades elaboradas estão referenciadas na Teoria das Representações Semióticas – desenvolvida por Raymond Duval. Tal teoria destaca a importância de abordar representações diversificadas de um mesmo objeto matemático (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016, p. 120), argumentando que a “compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semióticas” (DUVAL, 2009⁵⁴, p. 15 apud ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016, p. 119).

Nas atividades propostas, os autores desenham uma Sequência Fedathi partindo de representações visuais das famílias de funções e suas especificidades, tais como aproximação pontual e aproximação uniforme. Concluem, solicitando que os alunos trabalhem a conversão entre essa representação de funções e a representação algébrica. Isso é justificado pelos autores porque, na teoria utilizada,

Devemos utilizar diversas formas de representar um objeto matemático e fazer com que o aluno tenha capacidade de mudar de registro de representação, pois os objetos matemáticos são acessíveis através de suas representações e a aprendizagem em matemática está na capacidade de mudar de registro de representação (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016, p. 120)

Apoiados na Sequência Fedathi e na teoria citada, foram realizados dois encontros com os participantes. Não há informações no artigo sobre local de aplicação, organização do ambiente e dos participantes ou forma de registro das atividades.

⁵³ LIMA, Elon. L.. Um curso de Análise. (2010). Rio de Janeiro: SBM. 431f.

⁵⁴ DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara(org). In: **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica**. 5. Ed. Campinas, SP: Papirus, 2009. p 11-33.

Quanto ao uso de tecnologias digitais na sequência didática elaborada, a familiarização com o software a ser utilizado acontece no primeiro encontro do experimento. Nele, o software Geogebra foi explorado, a partir de construções diversas e do uso das ferramentas (principalmente do “controle deslizante” e “rastros”) uma vez que os participantes não conheciam o programa. Nesse mesmo encontro foi iniciada a etapa 1 na Sequência Fedathi, quando os autores fizeram um diagnóstico sobre os conhecimentos dos participantes a respeito do conteúdo matemático a ser explorado e se surpreenderam com o fato de desconhecerem as noções de convergência de funções, convergência simples e convergência uniforme.

Os pesquisadores prosseguem propondo questões sobre a família de funções $f_n(x) = \frac{x}{n} + 2$. Na exploração inicial, os participantes constroem a sequência usando o Geogebra. Registros da observação em campo destacam que os participantes percebem que “quando o n cresce, os gráficos vão se tornando cada vez mais horizontais e que seu limite é $f(x) = 2$ ” (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016, p. 129). Argumentando visualmente, participantes concluem que a família de funções converge para $f(x) = 2$. Próximo de $x = 0$, a convergência simples é mais rápida, tornando-se mais lenta ao se afastar de $x = 0$.

Para finalizar o primeiro encontro, outras duas funções foram analisadas do mesmo modo, utilizando o Geogebra, que também convergem simplesmente, culminando na formalização do conceito de convergência simples⁵⁵.

O segundo e último encontro tinha como objetivo despertar a compreensão conceitual de convergência uniforme, bem como da diferença entre a convergência uniforme e a convergência simples. Para isso foi planejado que os alunos construíssem e analisassem a família de funções $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\log n}$. Os autores apontam que “os alunos perceberam que com o crescimento de n todas as funções tornam-se próximas a $f(x) = 0$, e que essa aproximação pode tornar-se tão pequena quanto se queira, dependendo do valor de n ” (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016, p. 130). Tal comportamento é denominado de convergência uniforme.

Ao final, os pesquisadores usam o Geogebra para formalizar o teorema que relaciona convergência uniforme e Sequência de Cauchy, mas sem explicitar como isso foi feito.

Teorema 1: Uma sequência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.

⁵⁵ A convergência simples também é chamada de convergência pontual e é definida pelos autores como: “Diz-se que a sequência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in X$, a sequência de números $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$ converge para o número $f(x)$ ” (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016, p. 122)

Os autores consideram que o experimento é bem sucedido pois participantes, que inicialmente não conheciam os conceitos de convergência de funções conseguiram compreender tais conteúdos e, com isso, construíram uma significação conceitual a partir das situações propostas. Em suas considerações finais, afirmam que: “não seria possível, para muitos, apenas fazendo inferências lógicas sobre as definições, postulados e teoremas formais” (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016, p. 134).

A respeito da ferramenta digital utilizada, Alves, Fontenele e Lucas (2016) apontam que o uso do Geogebra permite ao aluno visualizar rapidamente as representações gráficas das funções e tirar “conclusões a respeito de propriedades inerentes ao conteúdo abordado” (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016, p. 133).

O tema convergência de sequências é abordado em Mazzi (2015)⁵⁶, que avalia o papel desempenhado pelo Geogebra quando utilizado em uma atividade. O objetivo da pesquisa era experimentar e analisar uma abordagem para o ensino desse conceito usando tecnologias digitais.

Um questionário para diagnóstico foi respondido pelos participantes e, posteriormente, uma atividade no GeoGebra foi realizada com quatro alunas da Licenciatura em matemática da UNESP – Rio Claro. Uma das participantes era aluna do quarto ano e três cursavam o quinto ano. Todas já haviam concluído a disciplina de Análise Real.

A pesquisa, de cunho qualitativo, referenciou-se no constructo teórico Seres-Humanos-com-Mídias⁵⁷, para a elaboração das atividades. O autor pressupõe que “o conhecimento é produzido por um coletivo formado de humanos e não-humanos” (MAZZI, 2015, p. 7). Incluindo, portanto, neste coletivo, o computador e os softwares utilizados.

A metodologia de pesquisa do Experimento de Ensino foi utilizada, planejando e propondo uma série de encontros entre pesquisador e participantes, durante um período longo de tempo. As participantes, em duplas, realizaram as atividades em diferentes momentos. O pesquisador gravou áudio e vídeo das participantes, usando uma câmera fixa e do software Blueberry, que possibilita capturar a imagem da tela do computador, da webcam e o áudio do ambiente simultaneamente, permitindo comparar o que é dito pelas alunas com o que é feito no computador.

A atividade tinha como objetivo “compreender a relação entre ε e n_0 na definição de convergência de sequências numéricas” (MAZZI, 2015, p.9). A atividade foi elaborada de forma que “as alunas pudessem plotar sequências numéricas com o GeoGebra e, a partir da criação de

⁵⁶ A pesquisa é um recorte da dissertação do autor (MAZZI, 2014), que foi incluída na primeira parte desta dissertação.

⁵⁷ “Nesse constructo teórico, as mídias têm participação ativa na construção de significados atribuídos a resultados” (MAZZI, 2015, p. 7-8).

comandos deslizantes e de uma faixa poligonal⁵⁸ em torno dos pontos das seqüências, discutissem a noção do ε e n_0 presentes na definição” (MAZZI, 2015, p.9).

Da análise do questionário inicial o autor constatou que as alunas possuíam ideias sobre convergência, mas apresentavam dificuldades em sua formalização matemática.

Após responderam ao questionário, cada aluna recebeu uma ficha com procedimentos para a criação do applet, refletindo sobre os passos executados:

1. Plote a seqüência $x_n = n + 1$.
2. Para $k = 250$ e utilizando a ferramenta zoom, o que é possível observar sobre os pontos de x_n ?
3. Crie um comando deslizante x_0 no software.
4. Essa seqüência converge? Justifique.
5. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
6. Plote uma função $g(x) = L$, restrita ao intervalo $(0, +\infty)$.
7. Crie um comando deslizante $\varepsilon > 0$.
8. Pela definição de convergência, temos que uma seqüência x_n converge para L se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon$.
Vamos programar o software para realizar o cálculo $|x_n - L|$.
Dado $\varepsilon = 0,5$ existe um valor de n_0 de forma que $|x_n - L|$ seja menor que ε ? E para $\varepsilon = 0,2$? E para $\varepsilon = 0,002$?
9. Crie uma faixa, dependendo de ε em torno do ponto L .
10. Varie os valores de ε e analise a faixa e os pontos da seqüência (MAZZI, 2015, p. 10)

Sobre a realização das atividades no applet, Mazzi (2015) destaca o benefício do rápido feedback ofertado pela mídia, que permite que as alunas criem e experimentem rapidamente suas conjecturas.

A partir da Experimentação-com-GeoGebra⁵⁹ e da visualização, (usado a ferramenta zoom), a pesquisadora acredita que as alunas participantes do experimento compreenderam a definição de convergência de seqüências, o que permitiu a produção de significado para o conceito em questão. Analisando a compreensão da noção de raio de convergência, o autor também destaca a importância de uma abordagem geométrica, ou visual, no ensino de Análise, que foi possibilitado pelo contexto das atividades desenvolvidas.

O artigo *Utilizando o GeoGebra para a construção do conceito de integral de Riemann no ensino de Análise Real* (OLIVEIRA, REIS, 2017) traz um recorte da dissertação⁶⁰ do primeiro autor, orientada pelo segundo.

⁵⁸ O autor define como faixa poligonal o “polígono criado ao redor dos pontos da seqüência estudada” (MAZZI, 2015, p. 13)

⁵⁹ Borba e Villarreal (2005) defendem que “uma abordagem experimental em Educação Matemática implica no uso de tentativas e experimentos que são suporte a elaboração de conjecturas matemáticas; na descoberta de resultados matemáticos previamente desconhecidos; na possibilidade de testar diferentes caminhos para alcançar o objetivo (MAZZI, 2015, p.8). Associando a ideia de experimentação, Mazzi defende seu ponto de vista a respeito da tecnologia: usa o termo experimentação-com-tecnologia (e também, experimentação-com-GeoGebra) para indicar uma perspectiva que considera a tecnologia como atriz nesse processo e não apenas uma ferramenta.

⁶⁰ Oliveira (2016). Também incluído na primeira parte desta dissertação.

O objetivo é investigar as contribuições da utilização do GeoGebra para a construção do conceito de Integral de Riemann no ensino de Análise Real, à luz dos processos do Pensamento Matemático Avançado e da relação entre rigor e intuição.

A pesquisa compartilhada no artigo distingue-se da maioria das outras por incluir, como participantes, quatro professores universitários de Matemática: dois professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora e dois do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto. Na maioria das demais pesquisas desenvolvidas, participantes são licenciandos ou professores da Educação Básica.

Os participantes foram selecionados por suas experiências no ensino de Cálculo e Análise, currículos e outros. Todos eram doutores, mas em três áreas distintas: dois em Matemática Pura, um em Matemática Aplicada e um em Educação Matemática.

Um experimento incluiu quatro atividades exploratórias sobre Integral Inferior e Integral Superior, usando Geogebra além de outros materiais como lápis e papel. Ao final, uma entrevista semiestruturada retoma com os participantes suas respostas nas atividades. Estas foram realizadas em duplas, e não foi declarado o instrumento utilizado no registro dos encontros.

As atividades foram pensadas para serem realizadas por professores e alunos simultaneamente, dentro de uma sala de aula ou laboratório de informática. Nesse contexto, os autores sugerem que estes momentos sejam precedidos pela exposição da teoria em aula presencial para que no momento de exploração no computador, ambos momentos sejam relacionados.

Apenas a Atividade 1 *Integral Inferior e Superior da “Função Quadrática”* foi detalhada no artigo. O objetivo da atividade é “obter as Somas Inferiores e Superiores da “Função Quadrática”, a partir dos gráficos construídos no GeoGebra, intuir os valores da Integral Inferior e Integral Superior e, por último, concluir se a função em questão é integrável a Riemann” (OLIVEIRA, REIS, 2017, p. 424). Os autores destacam que em todas as atividades, utiliza-se intuitivamente a “Integral de função f como um problema de área abaixo de uma função contínua (descontínua)” (OLIVEIRA, REIS, 2017, p. 426).

A conclusão da análise realizada é organizada em três eixos: as relações entre rigor e intuição; os processos do pensamento matemático avançado e as contribuições e limitações do software GeoGebra.

No primeiro eixo, os autores pontuam a possibilidade de se explorar conceitos que motivarão a aprendizagem de outros conteúdos. E concluem afirmando que um bom uso da intuição no ensino e aprendizagem de análise permite levantar conjecturas a serem submetidas a provas formais, e a relacionar o rigor a ideias intuitivas visuais e conceituais geradas dentro desse contexto.

No segundo eixo de análise, defendem o uso da intuição de maneira isolada ou em conjunto, dentro dos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo e Análise, possibilitando uma interrelação com os aspectos rigorosos desenvolvidos, o que se une ao pensamento de Dreyfus (1991)⁶¹, que destaca elos entre os principais processos com os de intuir, definir, provar, visualizar, descobrir, dentre outros.

Os pesquisadores também defendem que o entendimento dos conceitos por bacharelandos ou licenciandos não deve estar reduzido ao conhecimento técnico simplista.

A respeito das contribuições do GeoGebra, os autores defendem o uso efetivo dos softwares como uma opção pedagógica inovadora e desafiadora para o professor de Análise Real. Além disso, ressaltam que se o forem realizadas boas abordagens do software, ele pode proporcionar a construção de imagens favoráveis à construção formal de conceitos.

Nas entrevistas, o fator visual e intuitivo possibilitado pelo uso do software foi levantado pelos participantes como positivo, uma vez que possibilita a construção e conjecturas sobre os conceitos trabalhados, levando a conclusões sobre a integrabilidade das funções.

Outro aspecto positivo levantado por um dos participantes é a dinamicidade proporcionada pelo GeoGebra, em comparação ao uso do quadro tradicional, principalmente em abordagens a alunos de Licenciatura. Em contraponto, argumentou que esse tipo de atividade talvez não contribua significativamente no sentido da construção dos conceitos matemáticos para a formação dos matemáticos. Os autores se posicionam e defendem que haja “uma resignificação por parte dos professores juntamente aos alunos nos processos de ensino e aprendizagem, possibilitando uma discussão e, em alguns momentos, a possibilidade de aprofundamento da teoria acerca de conceitos trabalhados, com a ajuda do *software*” (1993; 2000 apud OLIVEIRA, REIS, 2017, p. 431).

Aspectos negativos apontam para questões de finitude como limitações do GeoGebra, que pode levar à formação de intuições errôneas, embora ainda assim apoiem seu uso. Nesse sentido, reforçam a importância do trabalho de um conceito intermediado por diversas mídias, inclusive lápis, papel e livro, de forma a contribuir para a construção do conceito.

Os autores defendem ainda que as discussões geradas pelas atividades possibilitam a inserção do rigor já no Cálculo, suavizando a transição posterior para a Análise.

Também abordando conceitos de Integral, o artigo *A compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo em uma atividade exploratória com o uso do GeoGebra* (LACERDA ET AL, 2020) trata do estudo do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Tem por objetivo analisar

⁶¹ DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher, 1991. p. 25-41

as contribuições do uso do GeoGebra no estudo de tal teorema, em uma atividade exploratória sobre gráficos visando ressignificar sua aprendizagem. A metodologia da pesquisa é qualitativa, com inspiração metodológica na Engenharia Didática⁶².

As atividades foram realizadas em um encontro de duas horas com cinco participantes entre licenciandos do último ano do curso ou recém-licenciados em Matemática de uma universidade pública do Rio de Janeiro. Material empírico foi produzido a partir da observação participante durante a aplicação da atividade exploratória e de um questionário posterior. Embora os conceitos de Integral de Riemann e Teorema Fundamental do Cálculo façam parte da ementa da disciplina de Análise Real do curso de Licenciatura que os participantes cursavam, nenhum deles estudou tais temas nas disciplinas.

Os participantes utilizaram notebooks com o aplicativo instalado e foram organizados em uma dupla e um trio.

O experimento inicia com a revisão de alguns conceitos matemáticos, tais como partição de um intervalo, integral superior e integral inferior e funções integráveis. Segue a atividade em si, que consiste em três exemplos e dois exercícios de aplicação do TFC⁶³. Os exemplos exploram três funções reais de uma variável real e conceitos de soma inferior, soma superior, integral inferior e integral superior, visando “a compreensão das condições necessárias para que uma função seja integrável e para que, ao término do terceiro exemplo, seja possível compreender as condições necessárias para aplicação do TFC, passando-se assim, aos exercícios de aplicação” (LACERDA ET AL, 2020, p. 42-43).

Diferentemente dos outros artigos, em que os gráficos foram construídos pelos alunos, nessa pesquisa os gráficos já foram disponibilizados aos participantes. Os pesquisadores justificam sua decisão devido ao pouco tempo de aplicação da atividade, argumentando sobre situações de uma sala de aula real, em que “muitas vezes o conteúdo não é abordado por falta de tempo” (LACERDA ET AL, 2020, p. 43).

O artigo discute o primeiro exemplo trabalhado. Nele, o participante deve executar uma sequência de passos no Geogebra e responder a partir da visualização do software.

⁶² “A Engenharia Didática é uma metodologia de validação interna, pautada nas fases de análise prévias, concepções e análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação. A fase de análise a posteriori e validação se constitui no confronto da análise a priori e dos dados coletados na experimentação” (LACERDA ET AL, 2020, p. 41-42).

⁶³ A atividade foi disponibilizada no site do software GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/ypmrgfph> . Acesso em 20 jan. 2022.

Os autores apontam que as atividades foram propostas como um projeto de pesquisa, mas indicam que podem ser utilizadas por professores em suas aulas ou por estudantes que desejam complementar seus estudos.

A hipótese de pesquisa era a de que “uma atividade exploratória de gráficos com o GeoGebra pode influenciar positivamente a ressignificação da aprendizagem do TFC” (LACERDA ET AL, 2020, p.42).

Como resultado os autores declaram que houve sucesso na integração da tecnologia digital no contexto do ensino do TFC em Análise Real. Das análises das observações no ambiente em que foram desenvolvidas, concluem que a atividade contribuiu com a visualização dos conceitos, permitindo discussões entre participantes e professores pesquisadores, e para a compreensão dos conceitos de soma inferior e soma superior através dos exemplos fornecidos.

Os participantes tiveram a oportunidade de estudar o tema de maneira diversificada e ter o acesso a conhecimentos prévios, a trocar e a discutir conjecturas e a manipular e observar gráficos utilizando o software.

Resultados da análise das respostas ao questionário, indicam que a prática das demonstrações é considerada a maior dificuldade no estudo de Análise. Os pesquisadores destacam que “a palavra demonstração já os assusta” (LACERDA ET AL, 2020, p. 46-47).

Das limitações do estudo, os pesquisadores observam que da exploração gráfica não embasaria possíveis demonstrações, embora tenha auxiliado a compreensão do TFC. Neste contexto os pesquisadores questionam sobre tal necessidade de solicitar demonstrações e o rigor no ensino de Análise:

[...] para que a atividade fosse considerada sob o ponto de vista do ensino de Análise, seria necessário solicitar demonstração? Ou seja, em Análise eu não posso trabalhar uma atividade exploratória com o uso da tecnologia sem cobrar o rigor que a Análise exige? Mais ainda, pode-se considerar o rigor em explicações informais ou apenas em demonstrações com épsilons e deltas? (LACERDA ET AL, 2020, p. 47).

Os autores consideram que, para evitar a perda do rigor e sua formalização, o professor poderia, em um contexto de sala de aula, apresentar as demonstrações necessárias após o trabalho com as atividades referidas, utilizando o GeoGebra paralelamente a outras tecnologias, como quadro, lápis e papel. Aqui há um diálogo parcial com Alves (2014), ao defender que o uso de tecnologias não deve ser entendido como redução do rigor do ensino, mas como algo a se acrescentar no ensino, visando ampliar a compreensão das situações trabalhadas. O autor, entretanto, não traz reflexões sobre as demonstrações em seu artigo.

Já em Lacerda et al. (2020), os pesquisadores afirmam que embora os participantes não tenham realizado as demonstrações, indicaram verbalmente os tópicos necessários para tal.

Os autores também destacaram que a organização dos participantes – em dupla e trio – se mostrou importante, uma vez que possibilitou a troca de ideia entre eles. Além da mediação dos professores-pesquisadores na condução da atividade, um elemento importante para o sucesso da integração do Geogebra no ensino de Análise.

Como resultado da análise realizada, os autores consideram que as dificuldades dos participantes na compreensão do TFC foram parcialmente superadas e a atividade contribuiu para a ressignificação dos conceitos relacionados à integral de Riemann e ao TFC, atendendo às expectativas iniciais. Desta maneira, a hipótese inicial foi validada.

Além disso, os autores destacam aspectos que foram importantes para o desenvolvimento da pesquisa: o planejamento da ferramenta digital e as atividades adequadas para a exploração de seu potencial pedagógico; a função mediadora e motivadora do professor e o contexto educacional que envolveria os participantes.

DESENHO DE TAREFAS

Desenho de Tarefas constitui-se como um tema dada a importância central da elaboração de material didático a ser experimentado em algumas pesquisas. Gusmão (2019)⁶⁴ as define tarefas como “um conjunto amplo de propostas, que englobam problemas, atividades, exercícios, projetos, jogos, experiências, investigações etc. que o professor leva para a sala de aula visando a aprendizagem matemática de seus alunos” (GUSMÃO, 2019, p. 1).

Nesse sentido, há um papel de centralidade do trabalho do professor no desenho de tarefas para aplicação em sala de aula.

Está organizada em dois subtemas, Sequência Fedathi e Educação Matemática Realística, cuja apresentação está a seguir.

Desenho de tarefas: Sequência Fedathi

Artigo contemplado:

Descrição gráfico-geométrica de exemplos e teoremas com apoio do Geogebra: Convergência de funções (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016)

⁶⁴ GUSMÃO, T. C. R. S. Do desenho à gestão de tarefas no ensino e na aprendizagem da matemática. In: ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 18., 2019. Anais [...] Ilhéus, Bahia, 2019.

Descrição gráfico-geométrica de exemplos e teoremas com apoio do Geogebra: convergência de funções (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016) é uma pesquisa desenvolvida no âmbito do Curso de Especialização em ensino de Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA). A pesquisa está incluída e seu resumo foi apresentado no subtema *Uso de tecnologia*. Aqui a ênfase é na proposta metodológica de ensino adotada.

O objetivo da investigação é explorar uma Sequência Fedathi utilizando o software Geogebra para o ensino de convergência de funções. Uma sequência de ensino apoiada em tal metodologia e na Teoria das Representações Semióticas foi elaborada, e uma intervenção em sala de aula envolvendo recém licenciados pela UVA (professores) em Matemática foi analisada. Não é mencionado se os participantes haviam cursado a disciplina de Análise durante sua licenciatura.

A Sequência Fedathi é uma proposta metodológica desenvolvida por docentes e discentes vinculados à Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará – FACED/UFC. Tem como foco: “a mediação docente em sala de aula, em que o professor deve conduzir o aluno a agir como um matemático na construção dos conceitos a serem estudados, oportunizando, portanto, a participação ativa do aluno nas aulas” (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016, p. 116). Portanto, o professor tem um papel central na proposta.

Nessa proposta, a sala de aula deve constituir um ambiente que permita ao aluno desempenhar o papel de pesquisador, investigando e solucionando problemas, transitando pelas etapas diversas de uma pesquisa. O papel do professor não é o mesmo do ensino tradicional: cabe ao docente motivar o pensamento reflexivo do aluno e estimular o raciocínio do discente, oferecendo bons problemas ou situações desafiadoras.

A Sequência Fedathi é planejada em quatro etapas: (1) Tomada de posição; (2) Maturação; (3) Solução e (4) Prova.

A etapa (1) consiste na colocação do problema pelo professor, devendo estar relacionado ao conteúdo que será foco de aprendizagem. Esta apresentação pode se dar por meio de jogo, material concreto, software ou outros, não necessariamente por escrito. Cabe ao professor diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes e, identificar o nível em que se encontram. Na etapa (2) o estudante deve interpretar o problema dado, compreender a situação e explorar caminhos para a solução. Questionamentos podem partir tanto dos alunos quanto do professor.

A etapa (3) é caracterizada pela mediação do professor. Aqui, as ideias são formalizadas, e os modelos matemáticos são construídos e confrontados. A validade de conjecturas deve ser examinada para o problema específico colocado e para problemas mais gerais. A mediação docente deve garantir o modelo mais apropriado para a situação e os autores apontam que o

professor deve ficar à frente da discussão, por ser o “detentor do conhecimento matemático” (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016, p.117).

A etapa (4) é a etapa de finalização do processo. Nela, o professor pode avaliar a aprendizagem dos alunos, como julgar conveniente. Nesta etapa “a solução é formalizada e cria-se o modelo prático que torna-se conhecimento e pode ser utilizado para resolver aquele problema específico e outros problemas semelhantes (ALVES, FONTENELE, LUCAS, 2016, p.117).

Adotando essa metodologia da Sequência Fedathi, dois encontros com o uso do Geogebra foram realizados. Não há informações no artigo sobre local de aplicação, organização do ambiente e dos participantes ou forma de registro das atividades.

Os registros dos experimentos já foram discutidos no subtema *Uso de Tecnologia*⁶⁵ e para não ficar exaustivo para o leitor, não rerepresentaremos.

Como já mencionado, os autores concluem o êxito do experimento, uma vez que os participantes conseguiram compreender os conteúdos estudados, previamente desconhecidos, construindo uma significação conceitual a partir das situações propostas.

Desenho de tarefas: Educação Matemática Realística

Artigo incluído:

O conceito de conjunto finito e infinito por meio de tarefas: uma proposta à luz da educação matemática realística (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017)

O conceito de conjunto finito e infinito por meio de tarefas: uma proposta à luz da Educação Matemática Realística (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017) é um artigo desenvolvido no contexto do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação – GEPEMA, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. O objetivo é discutir tarefas para o ensino do conteúdo matemático em diálogo com a abordagem da Educação Matemática Realística, através da releitura do capítulo *Ad infinitum* do livro *Perspectivas da Matemática*, em Freudenthal (1975).

Já o livro em que o artigo está embasado, *Mathematics Observed*⁶⁶ foi escrito por Hans Freudenthal em 1967 e é composto por sete capítulos, que abordam assuntos matemáticos distintos e independentes. Sua proposta é conduzir os leitores pela matemática, situando-os como

⁶⁵ Nas páginas 85 e 86.

⁶⁶ *Perspectivas da Matemática*, traduzido por Fernando C. Lima em 1975, pela Editora Zahar Editores, no Rio de Janeiro.

observadores matemáticos, sem promover a aprendizagem de conhecimentos matemáticos em si, mas buscando elaborar uma cadeia de pensamentos sobre determinados assuntos (fenômenos) para refletir sobre os conceitos matemáticos envolvidos.

Nesse sentido, a intenção dos autores com a utilização dos fenômenos do capítulo no contexto do ensino de Análise é a de situar o estudante na posição de um matemático, e retirá-lo da posição de observador e reproduzidor do conhecimento, o que são atitudes comuns em cursos do ensino Superior, e particularmente em aulas de Análise ou Cálculo.

A Educação Matemática Realística, constitui-se como uma abordagem para o ensino da Matemática. Freudenthal⁶⁷ argumenta que as pessoas deveriam aprender as ideias da matemática no fazer, como em uma atividade com um objetivo e que inclui instrumentos para alcançá-lo. Surge assim o conceito de *matematização* como: “a atividade de organizar uma situação (realidade)⁶⁸ usando ideias e conceitos matemáticos” (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017, p. 240).

A matematização é considerada uma atividade central na Educação Matemática por dois fatores: (1) por familiarizar os estudantes com abordagens matemáticas de situações cotidianas e (2) por pressupor que ensinar tendo os axiomas como ponto de partida deve ser considerado como uma inversão antididática, uma vez que o processo realizado por matemáticos para chegar às conclusões é o inverso. A sugestão é o ensino da matemática através de um processo de reinvenção guiada, no qual os estudantes experimentam um processo (simulado) parecido aos enfrentados pelos matemáticos na invenção da matemática.

Três princípios básicos sustentam a Educação Matemática Realística (GRAVEMEJER, 1994⁶⁹, apud MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017): a reinvenção guiada, a fenomenologia didática e os modelos emergentes.

Na reinvenção guiada o foco não são os objetos matemáticos, mas sim, a atividade, o realizar. Na reinvenção guiada os estudantes deveriam repetir o processo de aprendizagem matemática tal qual ocorrido no desenvolvimento da matemática, mas reconhecendo utilizar um pouco mais do que é sabido agora. Freudenthal (1971⁷⁰; 1973⁷¹) defende que esta é uma forma que permite que as ideias matemáticas sejam melhor aprendidas. O papel do professor na preparação

⁶⁷ Hans Freudenthal é o precursor da Educação Matemática Realística, mas tal abordagem ainda não estava estabelecida na época de publicação do livro. Portanto, os autores ressaltam a necessidade estudar o capítulo à luz dos princípios deste referencial.

⁶⁸ Os autores não definem qual conceito de realidade eles consideram, mas por nosso entendimento do artigo a “realidade” é entendida como em seu significado cotidiano.

⁶⁹ GRAVEMEIJER, K. P. E. Developing realistic mathematics education. Utrecht: Utrecht University, 1994.

⁷⁰ FREUDENTHAL, H. Geometry between the devil and the deep sea. Educational Studies in Mathematics, v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

⁷¹ FREUDENTHAL, H. Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1973.

das aulas é central, pelo desenho e elaboração do caminho a ser percorrido pelos estudantes durante o reinventar da matemática.

Já o segundo princípio, fenomenologia didática, destaca que “a aprendizagem matemática acontece a partir de fenômenos que são significativos para os estudantes, que precisam ser organizados e que estimulem o processo de aprendizagem” (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017, p. 241).

Por fim, o terceiro princípio – modelos emergentes – relaciona o conhecimento informal e o formal, entendendo a transição de um para o outro como a evolução de um para outro. Os estudantes devem desenvolver seus próprios modelos para lidar com as tarefas que, de início lhe são familiares; mas estas vão se tornando entes matemáticos, após processos de formalização e generalização.

A releitura feita pelos pesquisadores, como já mencionado, é do capítulo *Ad Infinitum*, que aborda propriedades dos números reais, sua infinitude, não enumerabilidade, alguns de seus subconjuntos enumeráveis e suas respectivas propriedades. Os autores visaram reorganizá-lo por meio de tarefas que permitam o desenvolvimento de habilidades além da reprodução e memorização, abrangendo níveis de conexão⁷² e de reflexão⁷³. Além disso, as tarefas propostas visam matematizar os conceitos abordados no capítulo.

A proposta apresentada é composta por três tarefas chaves, identificadas como: Problema do Hotel (Tarefa 1); Racionais por Cantor (Tarefa 2) e Segmentos (Tarefa 3). Apresentaremos apenas os dois primeiros itens da Tarefa 1.

Na primeira tarefa, que mobiliza conceitos de conjunto infinito, cardinalidade e de enumerabilidade, o objetivo é permitir que os estudantes lidem com tais conceitos por meio de situações realísticas⁷⁴. Ela é composta por cinco itens. A seguir, o contexto da tarefa:

Em 2010, na África do Sul, aconteceu a Copa do Mundo de Futebol e enfrentaram-se problemas com a acomodação dos turistas, faltaram quartos de hotéis, albergues. Os brasileiros, na tentativa de prevenir o mesmo problema para a Copa de 2014, deram seu famoso “jeitinho” e propuseram a construção de dois hotéis com uma infinidade de quartos numerados 1, 2, 3, ... (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017, p. 244).

⁷² As características das habilidades requeridas são: “além de formulação e solução de problemas e situações, o desenvolvimento de estratégias, a previsão e a verificação de soluções; lidar com linhas curriculares diferentes; utilizar diferentes representações do mesmo problema” (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017, p. 243).

⁷³ As características das habilidades requeridas são: “analisar, interpretar, desenvolver seus próprios modelos e estratégias; apresentar argumentos matemáticos incluindo provas e generalizações” (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017, p. 243).

⁷⁴ Os autores consideram que “realístico é entendido como aquilo que pode ser imaginado pelo estudante” ((MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017, p. 243).

Os autores destacam que a situação, embora baseada na realidade, é fantasiosa pela impossibilidade da construção de um hotel com uma infinidade de quartos. Tal enunciado é uma adaptação do paradoxo do Hotel de Hilbert, elaborado por David Hilbert (1862-1943) visando o aprofundamento no seu conhecimento sobre o conceito de infinito.

A primeira tarefa é proposta em cinco itens. Vamos apresentar apenas alguns deles, visando não estender muito esta discussão e entendendo que tais itens representam o que é realizado nos outros.

O primeiro item “Explique por que a proposta brasileira pode ‘resolver’ esse problema de acomodação dos turistas durante a Copa do Mundo em 2014?” (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017, p. 244) aconselha o professor a exploração de conjuntos finitos e infinitos com os alunos, orientando-os. O cenário criado traz um problema real ocorrido na África do Sul resultado do número de quartos ser menor do que o número de turistas e configurando então conjuntos finitos com cardinalidades diferentes. Propõe como solução a construção de hotéis com uma infinidade de quartos. Nesse contexto, pode-se fazer uma correspondência de cada quarto com os números naturais, concluindo que o conjunto dos números naturais tem um número infinito de elementos (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017 p. 245).

No segundo item a intenção é destacar que a intuição de conjuntos finitos não pode ser utilizada ao se tratar de conjuntos infinitos:

b) Após a liberação das reservas, em um deles, em pouco tempo, todos os quartos estavam reservados, mas ainda havia uma pessoa precisando de acomodação. O que poderia ser feito para que essa pessoa se hospedasse nesse hotel, sem colocar duas ou mais pessoas em um mesmo quarto ou despejar alguém? (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017, p. 245).

Para os autores, a discussão da solução, partindo das falas dos estudantes, pode levar à formalização e à generalização do resultado que expressa que “infinito mais um ainda é igual ao infinito” (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017, p. 245).

A segunda tarefa refere-se ao item f do contexto anterior: “Estabeleça uma relação de quantidade entre o número de elementos do conjunto dos números naturais e dos números racionais, isto é, mostre que há mais naturais que racionais, ou mais racionais que naturais, ou a mesma quantidade de naturais e racionais” (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017, p. 247).

Seu objetivo é dar continuidade à discussão de conjuntos enumeráveis com a enumerabilidade dos racionais, estimulando habilidades de reflexão, “uma vez que requer que os estudantes analisem, interpretem, desenvolvam seus próprios modelos e estratégias e apresentem argumentos matemáticos incluindo provas e generalizações” (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017, p. 248). Neste momento os estudantes são convidados a matematizar.

Por fim, a terceira tarefa mobiliza os conjuntos não enumeráveis. Os autores apontam que neste momento os estudantes já estarão familiarizados com o conceito de enumerabilidade, o que poderá levá-los à formalização de outros resultados envolvendo conjuntos infinitos. De acordo com Freudenthal, “a instrução não deve se iniciar a partir dos resultados, mas por meio de uma reinvenção guiada que favoreça aos estudantes experimentar um processo similar aos processos pelos quais a matemática foi inventada pelos matemáticos” (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017, p. 248).

Os autores concluem que os princípios da Educação Matemática Realística permitem interpretar a Análise Real e o Cálculo “como disciplinas dinâmicas e historicamente construídas a partir de problemas da humanidade” (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017, p. 250) o que se opõe ao seu entendimento como “disciplinas historicamente organizadas e estruturadas, em que conteúdo encontra seu lugar próprio e estático em suas ementas e programas” (MENDES, OLIVEIRA, BURIASCO, 2017, p. 250).

Nesse sentido, defendem as aulas baseadas em resolução de tarefas, que permitem o desenvolvimento do papel ativo dos estudantes, em tarefas planejadas especialmente para desencadear discussões que contribuam para elaborações conceituais são defendidas pelos autores. O papel do professor, nesse contexto é de incentivo para que os alunos apresentem e discutam suas ideias durante a realização das tarefas, além de explicar e conduzir a sistematização dos conceitos implícitos.

Também é interessante pontuar que, mesmo sem a intenção, os autores acabaram desenvolvendo tarefas que possibilitam a exploração dos principais resultados dos dois primeiros capítulos do livro de Análise de Lima (2001)⁷⁵. Para os autores, isso constata uma disciplina de Análise pode ir além da premissa de “conhecer os teoremas e aprender a reproduzi-los”.

METODOLOGIAS ATIVAS

Neste subtema consideramos pesquisas que investigam as denominadas metodologias ativas de ensino, entendidas como “estratégias de ensino centradas na participação efetiva dos estudantes no processo de aprendizagem, de forma flexível, interligada e híbrida (BACICH, MORAN, 2018, p. 4), como apresentado no Capítulo 5.

Tendo essa caracterização em mente, incluímos aqui dois artigos, divididos em subtemas: Sala de aula Invertida e Cenários para Investigação.

⁷⁵ LIMA, E. L. Análise Real. Vol. I. Coleção Matemática Universitária (IMPA). Rio de Janeiro, 2001.

Metodologias ativas: Sala De Aula Invertida

Artigo contemplado:

Um estudo comparativo acerca da eficácia da sala de aula invertida nas disciplinas de Cálculo e Análise Real (NACHTIGALL, DOMINGUES, FERREIRA, ALVES, 2020).

Nachtigall, Domingues, Ferreira e Alves (2020) traz resultados de uma pesquisa em que os pesquisadores propõem o uso da metodologia Sala de Aula invertida em turmas de Cálculo I e Análise Real I, com o objetivo de investigar diferenças referentes à receptividade da metodologia, contrastando e comparando as respostas das turmas envolvidas no experimento.

A metodologia Sala de Aula Invertida pretende uma mudança no papel de alunos e professores. Os conteúdos são estudados previamente pelos alunos e na aula presencial são realizados exercícios e tarefas propostas pelo professor, visando encontros presenciais mais produtivos para ambos.

Os autores entendem a metodologia como uma forma de ensino híbrido, mesclando atividades presenciais e a distância, e usando tecnologias digitais de informação e comunicação. O objetivo é centrar o protagonismo do processo de ensino e aprendizagem no aluno (VALENTE, 2015 apud NACHTIGALL, DOMINGUES, FERREIRA, ALVES, 2020).

Os participantes da pesquisa foram 12 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas, cursando o semestre 2019.1, dos quais 6 cursavam a disciplina de Cálculo I e outros 6, a disciplina de Análise Real I.

Nas turmas de Cálculo I, o estudo prévio incluiu leituras e vídeos, gravados pelo docente. Os vídeos consistiam na gravação simultânea da tela do computador com a imagem do livro digital e um áudio com a explicação do conteúdo. O recurso do Geogebra foi utilizado em alguns deles, como auxílio na interpretação gráfica. Já a proposta para a disciplina de Análise Real I ficou restrita a leituras prévias sobre o conteúdo a ser discutido nas aulas presenciais. Foram criados grupos no Whatsapp visando agilizar a comunicação entre os componentes das turmas e incentivar a colaboração e compartilhamento de materiais didáticos e vídeos, etc. O texto base utilizado em Cálculo I foi o livro *Cálculo*, de James Stewart. Na disciplina de Análise foi adotado o *Análise Real: Funções de uma variável real*, de Lioudmila Bourchtein e Andre Bourchtein.

Um questionário, com perguntas abertas e fechadas visou obter informações sobre a eficácia da metodologia e, foi respondido pelos participantes ao final da experimentação. A metodologia Sala de Aula Invertida foi novidade para o grupo e 11 dentre os 12 participantes

avaliaram que dela resultaram melhores condições para a aprendizagem se comparada a abordagens tradicionais.

A hipótese inicial dos pesquisadores era a de que os estudantes de Cálculo I poderiam encontrar dificuldades para estudarem sozinhos, por ser uma disciplina alocada no primeiro ano do curso. Em relação aos alunos de Análise, a hipótese era a de que participantes enfrentariam dificuldades com os estudos antecipados e individualizados pelo nível de complexidade em algumas definições e demonstrações no conteúdo a ser estudado.

No entanto, em relação à receptividade da metodologia, os autores destacam que não houve discrepância significativa das respostas dos alunos das duas disciplinas, e que ela se mostrou igualmente adequada para alunos de estágios tão distintos de amadurecimento matemático. Contrariando sua hipótese inicial.

Na turma de Cálculo I, todos os alunos declararam que a metodologia experimentada se mostrou mais produtiva do que as aulas tradicionais. Em destaque, os benefícios da otimização do tempo em sala de aula, possibilitando a discussão de dúvidas e resolução de exercícios com auxílio do docente, o que não costuma ocorrer na metodologia tradicional. Em contrapartida à hipótese dos autores sobre as dificuldades dos alunos, a turma também destacou a independência e autonomia desenvolvidos ao estudarem sozinhos e entenderem o conteúdo sem auxílio externo.

Ainda como característica positiva da metodologia, um aluno apontou para o respeito ao seu ritmo de estudo, o que não ocorre em aulas expositivas tradicionais, devido à abordagem padronizada. Outros alunos apontaram para a criação de hábitos de estudo, pela necessidade de participar na sala de aula. Apenas, um aluno declarou que nem sempre pôde estudar sozinho, mas ainda assim ressaltou a importância da independência no aprendizado.

Por fim, um estudante destacou outro aspecto positivo na reorganização do espaço da sala de aula. O auxílio dos vídeos e a interação com os colegas em sala de aula.

No mesmo sentido, os estudantes da turma de Análise Real I também se adaptaram bem à metodologia. Um aluno destacou a autossuficiência para compreensão de parte das definições e demonstrações, otimizando o tempo no encontro presencial, uma vez que o professor não precisava transcrever elementos no quadro, como geralmente acontece em aulas expositivas. Outro estudante destacou que a metodologia poderia ser utilizada em outras disciplinas, e apontou a importância de conhecer uma metodologia alternativa à tradicional na sua formação docente, o que permite comparações e críticas.

Apenas um estudante declarou que disciplinas que envolvem demonstrações deveriam ser trabalhadas seguindo o método tradicional de ensino, dando o exemplo da disciplina Aritmética – também do segundo semestre do curso. Para esse aluno, os calouros não teriam maturidade

suficiente para cursar tal disciplina no modelo de Sala de Aula Invertida, por ser um momento de grande impacto para o estudante, em que ele aprende a realizar demonstrações. Todavia, não é apresentado no artigo a visão deste aluno sobre a metodologia em turmas de Análise.

Ainda um dos alunos de Análise Real I declarou que a metodologia se mostrou menos produtiva, em comparação a metodologia tradicional expositiva. O estudante pontuou que sua falta de tempo para o estudo prévio impactou no seu rendimento na disciplina.

Os autores concluem que ambas as turmas contrariaram suas hipóteses sobre as possíveis dificuldades dos alunos com a metodologia. Os estudantes de Cálculo I não revelaram dificuldades em estudar sozinhos, sem explicação prévia do docente e os de Análise Real I também não manifestaram dificuldades significativas no estudo das definições e demonstrações. Os autores pontuam autonomia como uma das habilidades que devem ser incentivadas e exploradas nas disciplinas, “qualificando e otimizando os encontros presenciais, proporcionando espaços de discussão acerca do conteúdo estudado e não apenas um espaço de explanação no quadro” (NACHTIGALL, DOMINGUES, FERREIRA, ALVES, 2020, p. 12).

Para os autores reflexões como estas são importantes ao adotar novas metodologias de ensino, principalmente as que incentivam desenvolver a autonomia discente.

Metodologias ativas: Cenários para Investigação

Artigo contemplado:

Cenários para investigação no ensino superior: explorando o Teorema do Valor Intermediário (MAZZI, MOURA, 2020)

O artigo de Mazzi e Moura (2020)⁷⁶ tem como objetivo apresentar e analisar uma atividade desenvolvida a partir de construções com o GeoGebra⁷⁷, sobre conceitos relacionados ao Teorema do Valor Intermediário. Como lente teórica os autores retomam Skovsmose (2000)⁷⁸ e a noção de Cenários para Investigação.

Os autores criticam o modelo de ensino tradicional, apontando que

não há espaços para questionamentos ou justificativas sobre a importância dos exercícios, quais implicações para a aprendizagem ou possíveis aplicações. Estes exercícios geralmente apresentam uma única solução e a atuação do professor se dá por meio do seu

⁷⁶ Assim como Mazzi (2015), também está relacionado a dissertação de Mazzi (2014).

⁷⁷ Embora este trabalho também utilize o Geogebra em sua proposta, e até considere o software com um papel de “atriz” junto às estudantes e ao mediador, entendemos que este trabalho aborda de maneira mais central os Cenários para Investigação.

⁷⁸ SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema*, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

poder em determinar o que está certo ou errado. [...] também não há espaço para que os estudantes justifiquem, defendam ou explicitem os caminhos para chegar aos resultados, fazendo com que eles assumam pouca ou quase nenhuma responsabilidade e participação no processo de construção de seu conhecimento (MAZZI, MOURA, 2020, p. 221)

Dentro desse contexto, exploram uma metodologia que contraponha o modelo de ensino tradicional. Apresentam os Cenários para Investigação, elaborada por Skovsmose (2000), como metodologia que propõe um ensino de Matemática baseado no diálogo e na investigação, contrapondo-se à cultura do silêncio existente em aulas de Matemática. Referenciadas em Skovsmose (2000) os autores acreditam que, “a investigação contribui para que os estudantes sejam os responsáveis pelo seu processo de aprendizagem, uma vez que permite aos estudantes a realização de experimentações” (MAZZI, MOURA, 2020, p. 221). Tais experimentações, para o autor, oportunizam descoberta de fatos matemáticos, teste de hipóteses, refutações, reflexões e produção de novos significados.

Mazzi e Moura também apresentam o Modelo de Cooperação Investigativa, construído por Alrø e Skovsmose (2010)⁷⁹ para analisar os diálogos nos ambientes constituídos. Este modelo apresenta oito atos dialógicos, que são entendidos como “diferentes ações dos participantes que contribuem para o desenvolvimento da manutenção de um diálogo” (MAZZI, MOURA, 2020, p. 225). Uma interação que inclua estes atos é chamada de interação dialógica. Os oito atos dialógicos são: estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar.

O diálogo⁸⁰ é uma das premissas da metodologia, sendo considerada o principal padrão de comunicação entre os participantes. Ele também será responsável pela imprevisibilidade presente em um Cenário para Investigação, uma vez que as perspectivas dos estudantes não são previsíveis, mesmo levando em conta perguntas previamente formuladas. Dessa maneira é importante para o desenvolvimento da metodologia, que os estudantes estejam ativamente engajados nas atividades propostas, que são apresentadas como um convite a eles para que o cenário para investigação seja constituído. A interação dialógica possibilita que os participantes exponham e defendam suas perspectivas, contribuindo para a construção do pensamento coletivo.

Os autores reconhecem que os Cenários para Investigação nem sempre é simples de ser constituído em uma sala de aula comum, por questões curriculares, questões de tempo e questões

⁷⁹ ALRØ, H; SKOVSMOSE, O. Diálogo e aprendizagem em educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

⁸⁰ Os autores entendem diálogo como “uma conversação que visa a aprendizagem” (ALRO, SKOVSMOSE, 2010, apud MAZZI, MOURA, 2020, p.224).

formativas, por exemplo. Entretanto, destacam a proposta como uma possibilidade de ressignificação de práticas, contribuindo para promover a investigação e o diálogo em disciplinas no Ensino Superior.

As participantes da pesquisa foram quatro alunas do curso de licenciatura em Matemática da Unesp – Rio Claro, que já tinham sido aprovadas na disciplina de Análise Matemática I, mas apenas duas serão o foco do artigo, que realizaram as atividades em dupla.

O experimento de ensino⁸¹ consistiu de três atividades intituladas: Convergência de Sequências; Resultados de Convergência e Teorema do Valor Intermediário (TVI). Os resultados referem-se à análise das discussões desenvolvidas a partir da terceira atividade, cujo objetivo era possibilitar a investigação do TVI, discutindo suas hipóteses e sua importância para a validade do resultado.

A atividade propunha construções no GeoGebra a partir de um roteiro e, em seguida, as participantes foram convidadas a elaborar conjecturas matemáticas com base na construção realizada. Nesse instante a expectativa era a de constituir um cenário para investigação como um ambiente de aprendizagem. Assim como em Mazzi (2015), foram utilizadas câmeras para a filmagem das alunas, assim como o software Blueberry, permitindo a gravação da tela do computador.

Os autores concluem que o roteiro de atividades proposto permitiu que as participantes pudessem elaborar e testar conjecturas a respeito das hipóteses do Teorema do Valor Intermediário, através de uma interação dialógica entre elas.

As alunas expressaram alguns dos atos dialógicos (como estabelecimento de contato, a ação de perceber, o pensar alto, o reformular e o reconhecer) e, com a mediação do processo investigativo pelos pesquisadores, incentivando outros atos dialógicos (como posicionar-se, desafiar e avaliar). Ao final os oito atos dialógicos constituintes do Modelo de Cooperação Investigativa puderam ser identificados, indicando que as alunas interagiram dialogicamente e construíram modos próprios de aprendizagem. Ressalta-se que o GeoGebra foi importante na manutenção do diálogo entre participantes e pesquisador.

Os autores defendem que proporcionar novas formas de aprendizagem a estudantes do Ensino Superior e, em particular, da Licenciatura, por meio da investigação é “uma forma de

⁸¹ Cunhado por Steffe e Thompson (2000), os experimentos são encontros entre pesquisadores e estudantes os quais os pesquisadores visam elaborar uma compreensão sobre a Matemática dos estudantes (MAZZI, 2014; STEFFE, THOMPSON, 2000).

romper com o absolutismo burocrático⁸² instituído nas disciplinas, e de contribuir para que tal modelo de educação seja transposto para a educação básica” (MAZZI, MOURA, 2020, p. 234).

Por fim, os autores defendem que a Matemática deve ser trabalhada de forma que os alunos possam produzir seus próprios significados. Enfatizam que a proposta de Cenários para Investigação proporciona espaço para questionamentos dos estudantes, o que os incentiva a serem críticos e reflexivos, o que, segundo os autores, é necessário promover em aulas de Matemática, independentemente do nível escolar.

⁸² “estabelece em termos absolutos o que é certo e o que é errado sem explicitar os critérios que orientam tais decisões” (ALRØ, SKOVSMOSE, 2010, p. 26 apud MAZZI, MOURA, 2020, p. 222).

APÊNDICE B – VERSÃO DETALHADA DA ANÁLISE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Apresentamos, neste apêndice, uma versão mais detalhada da discussão a respeito da Análise na formação de professores.

CURRÍCULO E PROGRAMAS

Neste subtema foram incluídos artigos que tratem da disciplina de Análise, entendendo-a como um elemento dentro do currículo do curso de Licenciatura em Matemática, a partir de perspectivas distintas. Os cinco artigos foram incluídos dividem-se em quatro sub(sub)temas, indicando focos potenciais para futuras pesquisas: Conhecimentos curriculares presentes nas disciplinas de Análise do Brasil; A prática como Componente Curricular em Análise Real; Por que Análise Real na Licenciatura? e Avaliações Externas – ENADE.

Currículo e programas: Conhecimentos curriculares presentes nas disciplinas de Análise do Brasil

O artigo incluído neste subtema é:

Quatro ou mais pontos de vista sobre o ensino de Análise Matemática (GOMES, OTERO-GARCIA, SILVA, BARONI, 2015).

Em Gomes et al. (2015)⁸³, os autores trazem reflexões sobre resultados parciais encontrados em Silva (2015)⁸⁴, com a pesquisa em andamento. O objetivo central é de identificar que conhecimentos são abordados na disciplina de Análise em cursos de licenciatura em Matemática no Brasil.

Para isso, o autor investigou o projeto pedagógico de curso e o plano de ensino de 136 licenciaturas em Matemática e, utilizando a análise de conteúdo, aponta quatro resultados parciais.

Primeiro, foram encontradas 25 nomenclaturas distintas dentre as utilizadas para nomear a disciplina. As mais frequentes são Análise Real, Análise Matemática, Introdução a Análise Real e Análise Matemática I e II. Embora a nomenclatura não determine o direcionamento da disciplina,

⁸³ Esta pesquisa foi desenvolvida no âmbito do projeto de pesquisa *A disciplina de Análise em Cursos de Formação de Professores de Matemática* e está dividindo em três momentos: o primeiro está relacionado a pesquisa de Martines (2012), o segundo, faz referência a pesquisa de Gomes (2013), em que ambos serão contemplados em temática posterior. O que estamos abordando nessa temática está posto no artigo como o terceiro momento, e trata de resultados encontrados em Silva (2015).

⁸⁴ Para maiores aprofundamentos da pesquisa em questão, seria necessário adentrar na pesquisa em questão. Entretanto, optamos por continuar na fonte de dados do recorte, que são os artigos.

o autor argumenta sua importância para a institucionalização do contexto e foco de formação. Outro dado interessante é que dentro desse conjunto, seis delas fazem referência a modalidade do curso (licenciatura ou bacharelado), o que pode significar propostas de abordagem diferentes da disciplina em tais cursos.

O segundo resultado revela que em vários programas há mais de uma disciplina de Análise, o que o autor atribui à carga horária destinada à disciplina, que em geral é de sessenta, cento e vinte ou noventa horas.

O terceiro destaque são os livros utilizados como bibliografia da disciplina: Ávila (2011)⁸⁵, Lima (1997)⁸⁶, Figueiredo (1996)⁸⁷, Ávila (2013)⁸⁸ e Lima (2010)⁸⁹. Nessa pesquisa o autor destaca o baixo número de referências voltadas ao contexto da licenciatura.

Por fim, o último resultado parcial é que além da disciplina sempre estar alocada nos últimos períodos da matriz curricular, há alguns cursos que não apresentam uma disciplina específica de análise, o que levanta questionamentos sobre a interpretação do parecer CNE/CES 1302/2001 (BRASIL, 2001) pelos órgãos colegiados desses cursos.

Inúmeras questões são colocadas nesse cenário, como deveria ser uma disciplina de Análise para um curso de licenciatura em Matemática? Quais conteúdos contemplados? Metodologia empregada? Qual deve ser a atuação dos docentes? Quais especificidades de uma turma de licenciandos, em comparação a uma de bacharelados? Gomes, Otero-Garcia, Silva, Baroni (2015) parte dessas questões e discorre sobre a proposta de ensino de Análise em fase de implementação⁹⁰ pelo segundo autor, como um estudo de caso. Trata-se, de uma disciplina de Introdução à Análise Real oferecida no curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) com o objetivo de

Possibilitar ao licenciando um contato mais próximo com a cultura matemática específica e o desenvolvimento do *pensar matematicamente*; proporcionar uma compreensão sólida e um aprofundamento de alguns conceitos básicos da matemática escolar e do cálculo; desmistificar, com o auxílio da história, a matemática e, em particular, a análise, como uma ciência essencialmente abstrata, um edifício de estruturas dadas a priori; desenvolver a percepção da matemática como um conjunto de conhecimentos que são úteis para uma melhor compreensão dos fenômenos da natureza (GOMES, OTERO-GARCIA, SILVA, BARONI, 2015).

⁸⁵ ÁVILA, G. Introdução à Análise Matemática. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2011.

⁸⁶ LIMA, E. L. Análise Real. v. 1. IMPA: Rio Janeiro, 1997.

⁸⁷ FIGUEIREDO, D. G. Análise I. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996.

⁸⁸ ÁVILA, G. Análise Matemática para a Licenciatura. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2013.

⁸⁹ LIMA, E. L. Curso de Análise. Volume 1. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

⁹⁰ No momento em que a pesquisa foi escrita.

Com tais objetivos, o docente/pesquisador propõe como bibliografia o livro de Ávila (2013)⁹¹, Baroni e Otero-Garcia (2015)⁹², Villanueva (2014)⁹³, Hairer e Wanner (2008)⁹⁴ e Ripoll, Ripoll e Silveira (2011)⁹⁵. Como conteúdos: “a análise matemática no século XIX; números reais; formalização dos principais conceitos e resultados do cálculo diferencial e integral; noções de teoria da medida; as relações entre a análise matemática e a matemática escolar” (idem, p. 1263).

Currículo e programas: A prática como componente curricular em Análise Real

O artigo incluído neste subtema é:

A prática como componente curricular em uma disciplina de Análise Real (CERRI, DIAS, 2016)

O autor retoma o parecer CNE/CES 1302/2001 (BRASIL, 2001)⁹⁶, assim como a resolução CNP/CP 2 de fevereiro 2002⁹⁷ que são alguns dos documentos oficiais que balizam o ensino de Análise no Brasil. A resolução CNP/CP 2 de 2002, estabelecendo a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, garante quatro componentes comuns aos cursos de licenciatura: estágio curricular supervisionado; conteúdos curriculares de natureza científico-cultural; atividades acadêmico-científico-culturais e a prática como componente curricular (PCoC).

Abordando esta última componente, o artigo *A prática como componente curricular em uma disciplina de Análise Real*, de Cerri e Dias (2016) apresenta relatos de experiências dos autores sobre a prática como componente curricular introduzida na disciplina Introdução à Análise do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da USP. Resulta de suas experiências como coordenadores do curso de licenciatura em Matemática e professores da disciplina de Introdução à Análise, em semestres distintos.

Na Instituição em que a pesquisa foi conduzida, parte das horas obrigatórias para a PCoC estão inseridas na forma de créditos trabalho em disciplinas obrigatórias do Instituto, dentre elas,

⁹¹ ÁVILA, G. *Análise Matemática para a Licenciatura*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2013.

⁹² BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. *Aspectos da História da Análise Matemática de Cauchy a Lebesgue*. 1. ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2015.

⁹³ VILLANUEVA, D. A. Z. *Princípios de Análise e Exercícios de Cálculo*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

⁹⁴ HAIRER, E.; WANNER, G.. *Analysis by its History*. New York: Springer, 2008

⁹⁵ RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA; J. F. P. *Números Racionais, Reais e Complexos*. 2. ed. Porto Alegre: UFRGS, 2011.

⁹⁶ BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática Bacharelado e Licenciatura**, Brasília: MEC/SEF, 2001 (PARECER CNE/CES 1.302/2001).

⁹⁷ BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **Duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior**, Brasília: MEC/SEF, 2002. (RESOLUÇÃO CNP/CP 2 2002).

a disciplina Introdução à Análise. O projeto pedagógico do curso também prevê⁹⁸ a articulação de conteúdos específicos e profissionais, permitindo uma visão integrada da profissão, para o futuro professor.

Os autores destacam que temas estudados em Análise, tais como a noção de limite, números irracionais e suas representações, comensurabilidade e incomensurabilidade de segmentos e sequências numéricas dialogam com temas trabalhados na Matemática da Educação Básica. Como exemplos, a área do círculo, as representações dos números irracionais, razão entre comprimentos de segmentos e a soma infinita de progressões geométricas.

A Prática como Componente Curricular permite ao licenciando refletir sobre o ensino de tais temas, sua abordagem em sala de aula e em livros didáticos. Os autores acreditam que isso contribui para a compreensão dos conceitos discutidos na disciplina, dando-lhes significado, e para a formação de professores críticos e autônomos.

Os autores concluem que outra contribuição desta prática na Análise é que os alunos se apropriam melhor dos conteúdos propostos por perceberem sua relevância e sua relação com a Matemática ensinada nas escolas. Para os autores, questões como estas justificam a presença de tais temas em um curso de Licenciatura.

Currículo e programas: Por que Análise Real na Licenciatura?

Os artigos incluídos neste subtema são:

- *Por que Análise Real na Licenciatura? Um paralelo entre as visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos* (MOREIRA, VIANNA, 2016);
- *Quatro Ou Mais Pontos De Vista Sobre O Ensino De Análise Matemática* (GOMES, OTERO-GARCIA, SILVA, BARONI, 2015);
- *Uma trajetória da disciplina de Análise e o seu papel para a formação do professor de Matemática* (OTERO-GARCIA, BARONI, MARTINES, 2013).

A essa presença do curso de Análise Real no programa é o foco do artigo *Por que Análise Real na Licenciatura? Um paralelo entre as visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos*

⁹⁸ Visando adequar seus cursos de formação de professores as legislações novas, a USP criou o Programa de Formação de Professores da USP (PFPUSP) em 2004, que aborda a organização das disciplinas e atividades curriculares de todas os cursos de licenciatura da USP. Em 2006 chegou a vez do currículo de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da USP ser reformulado para atender ao PFPUSP (CERRI, DIAS, 2016).

de Moreira e Vianna (2016), ao discutir o papel da disciplina de Análise Real na Licenciatura em Matemática.

Os autores consideram três grupos como envolvidos na discussão sobre o currículo e atividades de formação em cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil: (1) os matemáticos; (2) educadores matemáticos e (3) professores de matemática da Educação Básica e licenciandos em Matemática. Um estudo em 2005⁹⁹ investiga o primeiro grupo, visando conhecer e analisar as visões dos matemáticos participantes a respeito do papel da disciplina de Análise Real em cursos de Licenciatura em Matemática. Neste segundo artigo de 2016 os autores investigam a visão do segundo grupo – os educadores matemáticos. Retomam resultados da pesquisa anterior, estabelecendo comparações entre as visões do primeiro e segundo grupos (matemáticos e educadores matemáticos).

Um questionário é endereçado eletronicamente a 18 educadores matemáticos, selecionados dentre orientadores de doutorado em Educação Matemática, entre os anos de 2006 e 2011. As três questões elaboradas versam sobre a ementa e o papel da disciplina Análise Real nos cursos de Licenciatura.

Uma informação interessante é sobre o caminho percorrido até se chegar ao conjunto de 18 educadores matemáticos participantes. O questionário foi endereçado inicialmente a 80 educadores matemáticos, dos quais 28 responderam ao convite. Dentre estes, 10 não se dispuseram a participar da pesquisa, por justificativas diversas, tais como não acreditar no tipo de pesquisa realizada (restrições de natureza metodológica); não estar com “a menor vontade” de pensar sobre o assunto ou ainda por não se sentirem capacitados a opinar, seja por não terem experiência docente com a disciplina na Licenciatura, seja por não terem formação adequada. Já no estudo de 2005, dentre os 80 matemáticos contatados, 31 responderam a mensagem e nenhum deles declarou não estar habilitado a comentar sobre o assunto.

Apesar de notórias diferenças entre matemáticos e educadores matemáticos, os autores destacam que houve uma aproximação surpreendente de suas visões: a obrigatoriedade da disciplina no currículo da licenciatura em matemática não motivou de discordâncias e as maiores divergências centram-se na forma de abordagem de alguns tópicos. As convergências sobre a obrigatoriedade giram em torno do fato de ser considerada “fundamental para que os licenciandos tenham um contato mínimo com a matemática superior e possam construir um ponto de vista sobre a matemática atual” (MOREIRA, VIANNA, 2016, p. 533).

⁹⁹ MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que análise real na Licenciatura? Zetetiké, Campinas, SP, v.13, n. 23, p. 11-42, jan./jun. 2005.

Duas categorias a partir da visão dos educadores matemáticos e três, no caso dos matemáticos foram criadas para contemplar os argumentos que fundamentam a obrigatoriedade da disciplina. As duas primeiras categorias construídas a partir da visão de educadores matemáticos e de matemáticos foram muito próximas, com pequenas diferenças.

A primeira categoria de respostas está relacionada à cultura matemática. Os participantes afirmaram que é necessário que o licenciando conheça a natureza do pensamento matemático e a maneira como a matemática se organiza como um conhecimento específico¹⁰⁰.

A segunda categoria está relacionada à necessidade de um aprofundamento dos conhecimentos matemáticos do licenciando, justificada pela crença na necessidade do futuro professor perceber problemas epistemológicos importantes ao abordar determinados conceitos na Educação Básica. O argumento é que isso permitiria ao futuro professor discutir de maneira mais ampla o conhecimento que vai lecionar.

A terceira categoria (criada no grupo dos matemáticos) está relacionada a aplicações da Matemática propiciadas pela Análise. Essa visão não gerou a criação de uma categoria equivalente no grupo dos educadores matemáticos, sendo citada apenas por um profissional.

Como em Moreira e Vianna (2016), e contribuindo para este debate, os artigos¹⁰¹ *Quatro Ou Mais Pontos De Vista Sobre O Ensino De Análise Matemática* (GOMES, OTERO-GARCIA, SILVA, BARONI, 2015) e *Uma trajetória da disciplina de Análise e o seu papel para a formação do professor de Matemática* (OTERO-GARCIA, BARONI, MARTINES, 2013), analisam as visões de diferentes grupos sobre a presença da disciplina de Análise em cursos de Licenciatura em Matemática.

Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) trazem¹⁰² a visão de professores de Análise, incluindo um novo grupo nesse debate: o de coordenadores de cursos de Licenciatura. Tem como ponto de partida a pesquisa de Martines (2012), que será apresentada a seguir.

Os participantes do estudo – docentes de Análise e coordenadores de cursos de licenciatura – foram escolhidos por Martines (2012) por sua proximidade com os licenciandos. A autora acredita que o envolvimento com os licenciandos amplia sua compreensão do papel da disciplina

¹⁰⁰ Aproximam-se, deste modo, das visões expressas em Cerri e Dias (2016).

¹⁰¹ Ambos os trabalhos apresentam resultado de pesquisas realizadas no âmbito do projeto de pesquisa *A disciplina de Análise em Cursos de Formação de Professores de Matemática*.

¹⁰² A pesquisa foi realizada no contexto do projeto de pesquisa *A Disciplina de Análise em Cursos de Formação de Professores de Matemática* e está dividida em dois momentos: no primeiro, traz recortes da pesquisa em Otero-Garcia (2011a) que, por já estar presente nas fundamentações deste trabalho não será discutido aqui. O que está sendo discutido se refere ao segundo momento do artigo, em que são levantados recortes da pesquisa em Martines (2012).

de Análise, aproximando-a da realidade dos cursos de Licenciatura. O que, contribui para as reflexões sobre o papel dessa disciplina na Formação de Professores.

A formação Acadêmica dos entrevistados não é descrita, mas acreditamos que eles estejam incluídos (como categoria) nos grupos analisados por Moreira e Vianna (2016): matemáticos e educadores matemáticos, por serem formações comuns aos profissionais que atuam na licenciatura em Matemática. A diferença é que em Martines (2012) os participantes são identificados por sua posição profissional no curso de licenciatura (docentes e coordenadores de curso) enquanto que em Moreira e Vianna (2016) os educadores matemáticos foram escolhidos a partir de suas orientações de doutorado nos anos anteriores à pesquisa, não revelando sua relação com a licenciatura.

A pesquisa em Martines (2012) propôs entrevistar os participantes, que foram quatro professores e quatro coordenadores, de quatro instituições distintas, em que a disciplina de Análise é ministrada especificamente para a Licenciatura.

Resultados em Moreira e Vianna (2016) se alinham aos de Martines (2012): os professores e coordenadores de curso também concordam que a disciplina de Análise deva estar presente no currículo da Licenciatura. Entretanto, seu papel na formação dos licenciandos não foi claramente evidenciado pelos participantes na segunda pesquisa.

Dos resultados, três categorias de respostas dos participantes evidenciam o papel da disciplina de Análise no currículo. A primeira categoria destaca seu papel de fundamentar o conhecimento matemático, não sendo uma disciplina com aplicação direta imediata na prática docente. A análise dos autores considera tal justificativa como um equívoco, argumentando que a essência da disciplina de Análise é o conjunto dos números reais, que é um conteúdo estudado no ensino Fundamental.

A segunda categoria aponta que o papel da análise é consolidar e formalizar conteúdos, além de fornecer cultura e bagagem matemática, o que, para os autores, reforça a existência da tensão entre o rigor e a intuição, indicada por Reis (2001)¹⁰³. Tal categoria está em concordância com resultados em Moreira e Vianna (2016), articulando as duas primeiras categorias elencadas por aqueles pesquisadores.

Na terceira categoria, os professores e coordenadores de curso indicam o papel de fundamentar o conhecimento sobre os números reais. Todavia, os autores apontam uma contradição encontrada nos textos didáticos, com abordagens essencialmente axiomática.

¹⁰³ REIS, F. S. A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

Contribuindo para este diálogo, a visão de licenciandos em Matemática e professores de Matemática da Educação Básica é o foco em Gomes et al. (2015)¹⁰⁴. Os autores trazem resultados em Gomes (2013), que entrevista três licenciandos e três professores da Educação Básica. Com um viés que se afasta da proposta dos outros dois artigos discutidos, que investigam a visão de formadores de professores, a questão de pesquisa aqui é “Como licenciandos e professores de Matemática da Educação Básica veem a disciplina de Análise?” buscando as vivências dos sujeitos na disciplina em questão.

Os depoimentos revelam caminhos a princípio paralelos, que se conectam em alguns trechos. O primeiro caminho – que contradiz a visão dos professores e coordenadores de curso entrevistados em Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) – indica que a disciplina de Análise não é significativa para o professor de Matemática. O segundo aponta que a disciplina permite ao licenciando/futuro professor ter uma visão profunda dos conteúdos trabalhados na Educação Básica, sem, no entanto, discorrer sobre o significado desta.

Esses dois caminhos constituem-se a partir de uma multiplicidade de discursos e pontos de reflexão levantados em três categorias de investigação: “*a presença da análise na licenciatura em matemática*”, “*A análise como corpo de conhecimento*” e “*A análise e a abertura de horizonte de possibilidades do professor*”.

A primeira categoria “a presença da análise na licenciatura”, tem um título que se aproxima com o subtema em questão. Ele reúne experiências dos participantes que tratam das relações da Análise e a Licenciatura.

O primeiro ponto levantado pelos depoentes foi a coexistência da Análise com outras disciplinas e, particularmente, sua relação estreita com o Cálculo Diferencial e Integral. Para os entrevistados, o bom entendimento em Cálculo determina um bom rendimento em Análise. Entretanto outras questões são levantadas, tais como a ordem das disciplinas: entendendo que alguns conteúdos do Cálculo são revistos e aprofundados em Análise e outros são exclusivos desta, o que impede de ser apresentada em momento anterior?

Para a maioria dos depoentes, o fato de cursar Análise como um expectador é insuficiente para que ocorra a compreensão da disciplina; é preciso que o aluno se empenhe além das aulas. Os participantes apontaram técnicas essenciais para o bom rendimento, em que se destacam a

¹⁰⁴ Esta pesquisa foi desenvolvida no âmbito do projeto de pesquisa *A disciplina de Análise em Cursos de Formação de Professores de Matemática* e está dividindo em três momentos: o primeiro está relacionado a pesquisa de Martines (2012), que já foi contemplada pelo artigo analisado anteriormente. O segundo momento faz referência a pesquisa de Gomes (2013), a qual está sendo abordada aqui e o terceiro momento trata de resultados encontrados em Silva (2015), e que será discutida em outra temática.

reprodução e a *memorização*. Também foi destacada uma meta na trajetória acadêmica pautada na premissa “é preciso ser aprovado”. Para isto, entendiam ser necessário “atingir o nível esperado pelo professor”. A frustração e palavras como “trauma” e “tortura” são utilizadas para descrever a relação com a disciplina.

O último tópico nesta categoria diz respeito à dualidade entre a Análise ofertada para licenciandos e para bacharelados, distinção realizada em alguns cursos. Há uma crença de que no caso da Análise exclusiva para a Licenciatura, há bons trabalhos sobre suas possíveis aplicações na Educação Básica. Entretanto, existe um preconceito envolvendo essa disciplina específica para licenciandos, como se fosse inferior à trabalhada com os bacharelados. Os autores indicam que há uma dicotomia entre a Análise oferecida para a Licenciatura e para o Bacharelado, ou ainda

uma *logica binária* que arranja as duas disciplinas como zero e um, falso e verdadeiro, em que só se pode ter uma *ou* outra. Uma dualidade que desconsidera quase que por completo a multiplicidade que constitui licenciando, licenciatura, bacharelado e bacharelado e armazena em recipientes próprios tudo o que a uma ou outra parece se relacionar, que não leva em consideração os vários uns que constituem um curso superior de matemática, independente da modalidade a que se destina (GOMES et al., 2015, p. 1252)

A segunda categoria “A análise como corpo de conhecimento”, evidencia um aspecto negativo. Para os depoentes, a Análise se mostra como uma matéria teórica, pesada, formal e seus diversos teoremas e demonstrações, tornam sua estruturação complexa, difícil e abstrata.

Geralmente, os primeiros momentos da disciplina são considerados fáceis, por terem relações mais diretas com conteúdos já estudados em Cálculo, por exemplo. O desconforto começa a surgir com as primeiras demonstrações, tidas como a manifestação do discurso matemático e presente em grande parte da disciplina.

Outro ponto também citado pelos participantes, é a crença de que a Análise seja mais formal por “tradição”, fato que é confirmado pelos autores, entendendo-a como herança cultural do desenvolvimento histórico da Análise. Essa tradição do formalismo é instaurada nas disciplinas de Análise e se une a um regime de verdade do discurso matemático, entendendo que “a disciplina de análise é formal por tradição, sendo essa tradição a garantia de que o discurso abordado na disciplina seja verdadeiro” (GOMES, OTERO-GARCIA, SILVA, BARONI, 2015, p. 1254).

Também ficou claro nas falas dos entrevistados três características que são exigidas de alunos que cursam análise, endossando a dificuldade na compreensão da disciplina: (1) a necessidade de ir além do que é feito em sala de aula, como já mencionado na primeira categoria; (2) a necessidade de se recorrer a conteúdos estudados em outras disciplinas, principalmente nas de Cálculo e na disciplina de Análise oferecida aos bacharelados e (3) a necessidade de utilizar a intuição nos processos de demonstração. Para os pesquisadores, tais características garantem “que

a disciplina continue sendo formal e, sendo formal, continue sendo difícil” (GOMES, OTERO-GARCIA, SILVA, BARONI, 2015, p. 1255).

Por fim, uma reivindicação que surge é a de desviar o foco puramente formal característico da disciplina, mesmo que por poucos momentos, para, por exemplo, aproximá-la da futura prática docente dos licenciandos. Nesse sentido, os autores se questionam: ao desconsiderar as formalizações é possível termos uma “disciplina de Análise”?

Na terceira categoria intitulada “A análise e a abertura de horizonte de possibilidades do professor”, o foco é a relação entre o conteúdo de Análise e a futura prática docente dos licenciandos. Foi identificada a crença que mesmo que as relações entre a disciplina de Análise e a Educação Básica ainda permaneçam veladas, a disciplina é considerada importante para a formação do professor de Matemática, o que foi diversas vezes afirmado nas falas dos participantes. Em sua análise, os pesquisadores trazem outra provocação: “A disciplina de análise é, de fato, importante para a formação do professor de matemática ou o que foi constatado é uma mera repetição de um discurso cristalizado no interior dos muros da universidade?” (GOMES, OTERO-GARCIA, SILVA, BARONI, 2015, p. 1259).

Os discursos revelam relações entre a Análise e a Educação Básica sendo desenvolvidas individualmente pelos sujeitos – e não de maneira institucional – e, os que não conseguem alcançar esse objetivo acabam concluindo sobre a falta de significância da disciplina na formação do professor. Neste contexto, há uma dualidade nas visões dos entrevistados: alguns encaram a disciplina como sendo muito difícil por sua formalidade, e relacionam a disciplina a termos como “sofrimento”, “terrível” e “trauma”; enquanto outros apontaram essa formalidade como sendo algo importante, justamente pela visão formal do que irá ser lecionado pelo professor da Educação Básica, associando a disciplina a algo calmo, tranquilo e simples. Neste último caso, entende-se a disciplina como subsídio que permite ao professor uma visão mais abrangente do que utilizará em sala de aula, e não como um conhecimento a ser diretamente aplicado. Além disso, os autores percebem outros pontos:

[...] o primeiro mostra que a disciplina de análise proporciona certa autonomia ao professor atuante na educação básica. O segundo coloca a disciplina de análise dentre aquelas que elevam o nível de pensamento do licenciando/futuro professor da educação básica a um patamar superior. (GOMES, OTERO-GARCIA, SILVA, BARONI, 2015, p. 1260).

Mesmo que de uma perspectiva distinta, a pesquisa contempla o terceiro grupo citado por Moreira e Vianna (2016): os licenciandos e professores de Matemática da Educação Básica, importantes na discussão da disciplina sobre Análise na Licenciatura, por trazer vozes em um processo a que também pertencem. É o outro lado da moeda: os licenciandos e professores

formados nos cursos de formação de professores, externam seu ponto de vista, sua vivência sobre a realização do que foi pensado (pelos matemáticos, educadores matemáticos, professores e coordenadores de curso...) para a disciplina de Análise.

Mesmo que estes estudos tenham como participantes uma parcela pequena dos sujeitos envolvidos no processo do ensino de Análise em cursos de formação de professores no Brasil, Moreira e Vianna (2016) consideram que as respostas trazem reflexões importantes sobre a estrutura geral do curso de licenciatura e para diversas outras discussões frutíferas na área.

Currículo e programas Avaliações externas: ENADE

O artigo incluído neste subtema é:

Conhecimentos de Análise Matemática presentes no Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (PARÓDIA, PEREIRA, OTERO-GARCIA, 2020).

Paródia, Pereira e Otero-Garcia (2020)¹⁰⁵ apresenta *Conhecimentos de Análise Matemática presentes no Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes*, a única pesquisa de cunho quantitativo. O objetivo é investigar quais são os conteúdos da disciplina de Análise Matemática são avaliados nas provas do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE).

Os autores constataram que em todas as avaliações aplicadas, há questões relativas à temática “Demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral”. Para eles, configura-se como razoável, dado a característica da Análise de oferecer maior rigor de resultados do Cálculo. Além disso, Sequências e Séries numéricas também foi um conteúdo encontrado na maioria das avaliações (3 dentre 4).

Resultados sinalizam uma redução no número de questões de Análise nas últimas duas edições do ENADE e também uma abrangência menor dos conteúdos relacionados. Os conteúdos identificados na área de Análise – a partir do programa de curso da USP – também são estudados nas disciplinas de Cálculo. Os autores questionam se esse redirecionamento sinaliza uma “algoritmização no ENADE”, da mesma maneira que houve uma “algoritmização da Análise Matemática” nos cursos de Licenciatura. Também refletem se as avaliações aplicadas à licenciatura em Matemática atribuem um papel importante para a Análise, uma vez que a visão predominante¹⁰⁶ entre matemáticos e educadores matemáticos é a de obrigatoriedade da disciplina

¹⁰⁵ Parte do projeto de pesquisa *A Disciplina de Análise Matemática em Cursos de Formação de Professores*

¹⁰⁶ Se refere ao trabalho de Moreira e Vianna (2016), também incluído nesta revisão.

em tal curso. Entretanto, consideram a resposta relativa, em que a baixa quantidade de questões em cada avaliação, somado ao seu caráter interdisciplinar são fatores a serem considerados.

Outro aspecto interessante levantado é do foco das questões, voltado para procedimentos resolutivos das questões, o uso da matemática como ferramenta e destacam que:

Embora o conhecimento formal e rigoroso auxilie no entendimento dos problemas apresentados, não é obrigatório, na maioria das vezes, que o estudante conheça a demonstração dos teoremas. Além disso, pode-se considerar que saber demonstrar não é condição necessária ou suficiente para garantir seu entendimento. Afinal, até que ponto os professores permitem a experimentação, a tentativa, a construção das demonstrações pelos estudantes? Em que medida essas demonstrações são apresentadas como algo definitivo ou que precisa ser reproduzido nas provas? (PARÓDIA, PEREIRA, OTERO-GARCIA, 2020, p. 344)

Os autores afirmam que o nível de exigência em relação aos conteúdos de Análise Matemática no ENADE é baixo, com o foco está no uso das ferramentas matemáticas, ou seja, na resolução de exercícios, e não no seu entendimento.

PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Neste subtema concentramos artigos que discutem a questão dos processos de ensino e aprendizagem, ou seja, artigos que têm o foco na aprendizagem dos alunos em disciplinas de Análise. Quatro pesquisas foram incluídas em três sub(sub)temas: Dificuldades enfrentadas no estudo de sequências numéricas; Educação a Distância e A noção de Cognição Inventiva. Discorreremos em seguida sobre cada um desses subtemas.

Processos de ensino e aprendizagem: Dificuldades na aprendizagem de sequências numéricas

Os artigos incluídos neste subtema são:

- *Aprendizagem de sequências numéricas: pesquisa sobre dificuldades de Licenciandos em Matemática* (BISOGNIN, BISOGNIN, LEIVAS, 2016);
- *Conhecimento do conteúdo de sequências numéricas: uma pesquisa com professores em formação inicial ou continuada* (RIZZON, LIMA, SAUER, CURY, 2017).

O artigo *Aprendizagem de sequências numéricas: pesquisa sobre dificuldades de Licenciandos em Matemática* (BISOGNIN, BISOGNIN, LEIVAS, 2016) analisa dificuldades dos licenciandos em Matemática ao resolver uma questão sobre sequências numéricas.

A pesquisa, de caráter qualitativo, propõe a realização da questão (com lápis e papel) a 15 alunos de licenciatura em Matemática do último semestre de duas instituições de Ensino Superior do Estado do Rio Grande do Sul. Os participantes já tinham estudado o conteúdo na disciplina de Análise Matemática.

Os autores utilizam os Três Mundos da Matemática (TALL, 2004¹⁰⁷, 2013¹⁰⁸) como referencial teórico, propondo que o desenvolvimento cognitivo de um sujeito em Matemática, acontece em três mundos: o mundo conceitual corporificado, o mundo proceitual simbólico e o mundo formal axiomático. O mundo conceitual corporificado refere-se à nossa percepção e ação sobre o mundo real; a elementos provenientes da nossa visualização ou imaginação.

Já o mundo proceitual simbólico relaciona-se ao uso de símbolos como forma de indicar ações e percepções no mundo corporificado. Tais símbolos representam tanto o significado dado aos conceitos quanto as ações efetuadas. Gray e Tall (1994)¹⁰⁹ distinguem os termos “processo” e “procedimento”. O primeiro refere-se, de modo genérico, ao conjunto de procedimentos – como o processo de adição; já o segundo relaciona-se a algoritmos específicos para implementar um processo. Gray e Tall cunham a noção de “proceito”, como um amálgama de “processo” e “conceito”. Esse ocorre, por exemplo, ao entendemos que a notação $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ “indica tanto o processo de tender a um limite de uma sequência quanto o conceito do valor do limite” (BISOGNIN, BISOGNIN, LEIVAS, 2016, p. 365).

Por fim, o mundo formal axiomático é baseado em propriedades, expressas como um sistema axiomático, através de definições, axiomas e teoremas.

Tall (2013) considera ainda a existência de três estágios não hierárquicos de desenvolvimento cognitivo: matemática prática, matemática teórica e matemática formal.

A matemática prática consiste de atividades práticas corporificadas e simbólicas, como reconhecimento e descrição de figuras; atribuição de símbolos a elementos envolvidos; cálculos aritméticos ou algébricos e outras atividades que não envolvem características do mundo formal axiomático. O estágio da Matemática teórica envolve “os níveis mais sofisticados de corporificação e simbolismo” (TALL, 2013, p. 19; apud BISOGNIN, BISOGIN, LEIVAS, 2016) e o estágio da matemática formal refere-se ao “desenvolvimento de provas axiomáticas formais, baseadas em definições da teoria dos conjuntos e provas matemáticas de teoremas” (Ibid, p. 19).

¹⁰⁷ Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. Proceedings of the 28th Meeting of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Bergen, Norway. p. 281-288.

¹⁰⁸ Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

¹⁰⁹ Gray, E. M. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (2), 115-141.

Bisognin, Bisognin e Leivas (2016) pontuam que nem todos os sujeitos transitam da mesma maneira pelos Três Mundos da Matemática, por suas influências diversas, tais como seu ambiente, formação escolas e dificuldades encontradas no aprendizado.

Resultados da análise das respostas dos licenciandos à luz da teoria adotada, indicam que os participantes ainda encontram-se no estágio da matemática prática, uma vez que utilizavam elementos corporificados para justificar suas respostas.

Outra dificuldade identificada foi em relação à linguagem matemática. Os autores apontam que talvez ela não tenha sido trabalhada suficientemente durante as aulas. Em destaque, “o sinal de igualdade e o símbolo de limite, em seus significados como operadores, podem ter influenciado negativamente as respostas” (BISOGNIN, BISOGNIN, LEIVAS, 2016, p. 273)

Para os autores, os alunos – futuros professores – estão ancorados no mundo corporificado, e mesmo evidenciando alguns elementos do mundo simbólico, precisam superar dificuldades para trabalharem tais conceitos com alunos da Educação Básica.

O trabalho de Rizzon, Lima, Sauer e Cury (2017) – *Conhecimentos do conteúdo de sequências numéricas: uma pesquisa com professores em formação inicial ou continuada* – tem como participantes, além de alunos de licenciatura (que neste caso cursavam a disciplina Análise Real), mestrandos de um curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemáticas que cursavam a disciplina Tópicos de Cálculo.

Um teste composto por duas questões sobre sequências numéricas foi respondido pelos participantes. Da análise das respostas, os erros foram categorizados em quatro tipos: (I) o mau emprego da linguagem matemática, como a falta de parênteses, para indicar o conjunto de termos das sequências; (II) a confusão na indicação dos termos das sequências, como apenas a utilização dos coeficientes numéricos; (III) a interpretação equivocada do enunciado, alguma informação oferecida é ignorada e (IV) as dificuldades ligadas ao desconhecimento da lei da soma dos termos de uma progressão geométrica ilimitada.

Em suas considerações finais, os autores consideram não haver diferenças significativas entre os tipos de erros cometidos por licenciandos e mestrandos, e reafirmam que as disciplinas de conteúdo matemático não devem estar isoladas das pedagógicas, para que seja desenvolvido o conhecimento matemático para o ensino.

Ambos os artigos sugerem intervenções nos cursos de formações de professores. Levando em conta que o estudo de sequências numéricas também está presente na Educação Básica, Rizzon, Lima, Sauer e Cury (2017) apontam a necessidade de elaborar atividades sobre tais conteúdos a partir dos erros identificados, visando aplicá-las a professores da Educação Básica e gerando reflexões e discussões dentro dos próprios cursos de formação de professores. Bisognin, Bisognin

e Leivas (2016), refletem sobre os Três Mundos da Matemática, acreditando que os docentes formadores devem fazer uma “jornada” pelos Três Mundos da Matemática, indo de atividades de matemática prática e atingindo o estágio de matemática formal, para permitir a consciência da especificidade de cada mundo. Além disso, bons exemplos e abordagens metodológicas devem ser oferecidas para esses futuros professores, independentemente dos conteúdos abordados.

Processos de ensino e aprendizagem: Educação a distância

O artigo incluído neste subtema é:

Os desafios da Análise Matemática em um curso de licenciatura a distância (MELO, 2019).

O artigo em Melo (2019) intitulado *Os desafios da Análise Matemática em um curso de licenciatura a distância* é o único artigo que tem por foco a Educação a Distância. O objetivo é “investigar o que acontece em uma disciplina de Análise Matemática num curso de licenciatura ofertada a distância” (MELO, 2019, p. 1). A pesquisa foi realizada em um curso de licenciatura a distância da Universidade Federal do Ceará e foram analisados documentos referentes à disciplina de Introdução à Análise, realizadas entrevistas com o professor regente e atividades virtuais e presenciais envolvendo alunos do curso nos semestres 2012.1; 2013.1; 2016.2 e 2017.2.

O maior desafio na Análise Matemática, para o autor é “fazer com que os estudantes de licenciatura em Matemática consigam abrir a mente para as abstrações, adquiram maturidade em generalizações, façam bom uso das notações e compreendam as demonstrações dos teoremas clássicos” (MELO, 2019, p. 4) Na modalidade de ensino a distância, esse desafio se intensifica, uma vez que essa maturidade precisa ser adquirida quase autonomamente, através de ferramentas virtuais de aprendizagem.

Nesse contexto, é necessário que o ensino a distância propicie “maior articulação e efetiva interação e complementaridade entre a presencialidade e a virtualidade “real”, o local e o global, a subjetividade e a participação democrática nos processos de ensino e aprendizagem em rede” (BRASIL, 2016 apud MELO, 2019, p. 4). Entretanto, a média da idade dos estudantes do EaD – 10 anos a mais do que a dos alunos de cursos presenciais – é um fator que compromete o alcance desses objetivos, uma vez que “esses estudantes tardios não possuem hábitos de estudo e proficiência em leitura e interpretação de textos” (GATTI, 2012; 2014 apud MELO, 2019, p. 4) contribuindo para a evasão nos cursos de licenciatura.

Melo aponta para a importância do tripé “fórum – portfólio – aula presencial” na educação a distância, principalmente por serem instrumentos avaliativos nos referidos cursos.

A respeito da participação nos fóruns, foi identificado que alguns estudantes apenas copiam e colam trechos encontrados na internet, sem refletir sobre a pertinência sobre tais contribuições no tema da aula. No caso dos portfólios, é recorrente que o professor receba várias resoluções idênticas, mudando apenas os nomes dos alunos. Estes, por sua vez, se justificam falando que realizaram as atividades em equipe. Além disso, o cumprimento no prazo de entrega dos portfólios também foi um problema enfrentado pelas turmas.

Outra problemática diz respeito às aulas presenciais, realizadas presencialmente pelos alunos e mediadas pelos tutores, e que por crises financeiras, precisaram ser transformadas em aulas síncronas em forma de webconferências. O autor destaca dois aspectos positivos da webconferências: (1) a interação ao vivo entre alunos e professor e (2) o material utilizado na aula (slides), bem como a gravação da aula ficam disponíveis para consulta posterior.

Mesmo com os desafios enfrentados, a maioria dos alunos consegue aprovação na disciplina (o pesquisador destaca que parte significativa dos alunos só consegue após a realização da avaliação final¹¹⁰). Melo destaca uma adaptação dos alunos ao modelo semipresencial de ensino, identificado pelo aumento no percentual de alunos aprovados com média superior a 7,0.

Da análise das narrativas do professor regente, Melo acredita que o sucesso na aprendizagem de Análise Matemática em um curso semipresencial depende majoritariamente do interesse de cada aluno. Este pode ser aferido pela quantidade de acessos à turma virtual, participações nos fóruns, entrega de atividades dentro dos prazos, presença e participação significativa nas aulas de webconferências.

Também é citado o papel importante desempenhado pela atitude positiva de tutores e do professor responsável: a correção e notas lançadas prontamente no sistema, permite que o aluno acompanhe “em tempo real” seu rendimento.

Por fim, o pesquisador destaca que os alunos se sentem mais seguros com a aprendizagem e confiantes para a realização das avaliações presenciais quanto o professor tem um bom planejamento das aulas por webconferências e disponibiliza o material necessário.

Processos de ensino e aprendizagem: A noção de cognição inventiva

O artigo incluído neste subtema é:

¹¹⁰ Esta prova é uma segunda chance dada para os alunos que não obtém aprovação direta e ficam com média entre 4,0 e 7,0.

Releituras de um Estado do Conhecimento do Ensino de Análise a partir da Noção de Cognição Inventiva (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013).

O artigo *Releituras de um Estado do Conhecimento do Ensino de Análise a partir da Noção de Cognição Inventiva*¹¹¹ (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013)¹¹² tem como objetivo realizar uma nova leitura dos resultados do trabalho de Otero-Garcia (2011a), a partir da noção de cognição inventiva no ensino de análise.

A noção de cognição inventiva é tida como uma teoria, uma caixa de ferramentas para pensar a educação matemática e, em particular, o ensino de análise. Tal noção contrapõe-se à ideia de que a cognição é o resultado de um processo de representação de dados e problemas a priori e comunga com o ideal que a cognição é também um processo de criação de problemas. Nessa perspectiva, ela é utilizada como forma de problematizar os resultados em Otero-Garcia (2011a), de modo a colocar a questão da invenção.

Como já descrito nessa dissertação, Otero-Garcia (2011a), elenca quinze questões críticas relacionadas ao ensino e aprendizagem de análise, a partir das pesquisas incluídas em seu estado da arte. No artigo de 2013, Otero-Garcia e Cammarota vão utilizar a noção de cognição inventiva para discutir duas dessas questões: *o ensino-aprendizagem de análise matemática* e *a formação matemática do professor*.

A respeito do tópico *ensino-aprendizagem de análise matemática*, o autor problematiza trabalhos de Pinto (1998¹¹³, 2001¹¹⁴, 2009¹¹⁵). Em particular, os artigos de 2001 e 2009, que apresentam caracterizações de diferentes estratégias desenvolvidas por alunos que cursam a disciplina de análise, exibindo algumas dificuldades enfrentadas por eles¹¹⁶.

Pinto (2001) destaca um impacto na transição do Cálculo para a Análise, uma vez que no primeiro são enfatizadas características computacionais e de manipulação simbólica, com foco no

¹¹¹ Parte desse trabalho foi apresentado no XVI Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2012) – trabalho também encontrado e selecionado a partir de nossa busca.

¹¹² Trabalho realizado no âmbito do projeto de pesquisa A Disciplina de Análise em Cursos de Formação de Professores de Matemática, coordenado por Rosa Baroni.

¹¹³ PINTO, M. M. F. *Students' understanding of real analysis*. Tese de Doutorado em Educação Matemática – University of Warwick, Warwick, 1998.

¹¹⁴ PINTO, M. M. F. Discutindo a Transição dos Cálculos para a Análise Real. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Org.). *A Prática Educativa sob o Olhar de Professores de Cálculo*. Belo Horizonte: Fumarc, 2001. p. 123-145.

¹¹⁵ PINTO, M. M. F. Re-visitando uma Teoria. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior*. Recife: SBEM, 2009. Cap. 2, p. 27-42.

¹¹⁶ Os resultados referem-se a pesquisa desenvolvida em uma universidade inglesa. Os bacharelados tem seu primeiro contato com a disciplina de Análise em seu primeiro ano no Instituto de Matemática na universidade, sendo a disciplina de Cálculo cursada nos últimos anos do correspondente ao nosso Ensino Médio. Já a disciplina para os licenciandos é oferecida em outro Instituto, nos últimos períodos de sua formação.

resultado das operações; enquanto a Análise está fundamentada em princípios axiomáticos e sistemáticos, e o conteúdo introduzido por definições formais.

A pesquisa foi dividida em duas etapas: na primeira foram analisados trabalhos individuais escritos de vinte estudantes de licenciatura em Matemática e entrevista com sete deles; e na segunda, onze bacharelados e quatro licenciandos foram entrevistados e acompanhados durante seus primeiros cursos de análise real. Pinto (2001) conclui que os estudantes terminam a disciplina de análise sem ter um domínio da teoria formal.

A primeira problematização de Otero-Garcia e Cammarota (2013) vem dessa conclusão, elencando dois pressupostos implícitos n que se denomina por aprendizagem.

O primeiro pressuposto aponta que a “aprendizagem concorre para a aquisição de um saber dado de antemão, *a priori* dos processos de conhecer” (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 241). Aqui, ocorre a primazia dos resultados do saber sobre os processos de seu desenvolvimento, e tudo que se desvia desse objetivo é tido como erro ou uma falha a ser superada.

O segundo pressuposto aponta que “aprender matemática significa pensar e produzir como um matemático” (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 241). Neste caso a finalidade dos processos cognitivos são os modos de pensar dos matemáticos, em que as imagens de pensamento são tomadas como hierarquicamente superior às demais imagens. Os autores apontam que estes dois pressupostos juntos, são forma e conteúdo atribuído às aulas de Análise: “Se, por um lado o conteúdo ao qual os sujeitos devem se adaptar é a teoria formal, por outro, a forma como o devem fazer segue os rastros dos modos de pensar do matemático” (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 242).

A análise das estratégias cognitivas utilizadas pelos estudantes em Pinto (2001) os divide em dois grupos: (1) os que extraem significados: que “são aqueles que ‘aceitam as novas regras do jogo’, partem das definições formais dos conceitos e trabalham com as novas noções de prova” (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 242) e (2) os que atribuem significado: aqueles que dialogam com as novas ideias resgatando suas experiências anteriores. Este contexto resulta da análise de três temas: as definições, os argumentos e as imagens, como expressas e utilizadas pelos participantes ao longo do período de observação.

Otero-Garcia e Cammarota (2013) sugerem um movimento na literatura consultada: as pesquisas tratam a caracterização dos processos cognitivos em sala de aula de Análise como uma representação do saber matemático formal. Sobre este aspecto, em particular, questionam se a produção do conhecimento deve ser pensada através dos mecanismos de representação, retornando a proposta de entender cognição como invenção.

Os autores argumentam que pensar a aprendizagem de Análise de uma perspectiva de representação, pressupõe que um conteúdo estará melhor aprendido quando estiver mais próximo da identidade, da natureza da teoria formal. Neste aspecto são valorizados o uso da linguagem simbólica, o rigor do encadeamento lógico das demonstrações, entre outros aspectos.

Retomam Kastrup (2007)¹¹⁷ que propõe uma psicologia da invenção, como um processo que opera transversalmente entre os processos de linguagem, percepção, aprendizagem ou memória, produzindo bifurcações e diferenciações. Nesse sentido, a aprendizagem inventiva “é potência de diferenciação que opera uma rachadura nas formas cognitivas cristalizadas, uso divergente das faculdades de entendimento, invenção de problemas” (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 244). A invenção de problemas “garante que as soluções não interrompam os processos cognitivos, que não sejam uma finalidade do processo de aprendizagem. Ao contrário, sustenta uma cognição que opera por pontos de bifurcação e resultados que não podem ser previstos” (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 245).

Pinto (1998) categoriza o desempenho dos estudantes em dois grupos: natural e formal. Os estudantes no segundo grupo – que adotam a estratégia “extrair significados” – “reconhecem uma verdade matemática quando ela é estabelecida por meio de argumentação formal e simbólica (externa). Entretanto, muitas vezes não se sentem convencidos (internamente) dela” (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 246). Já os estudantes incluídos no grupo denominado natural – identificados com os que adotam a estratégia “atribuir significado” – confiam em sua intuição “mesmo quando suas teorias não são consistentes como as apresentadas pelo professor” (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 245). Pinto (2009) defende que essa confiança tem raízes nas percepções desses estudantes, apoiadas em experiências anteriores, que são significativas para eles. Mas, para a autora, isso não significa que tais alunos não sejam capazes de produzir conhecimento como os matemáticos profissionais. Neste grupo, encontra-se o aluno Chris, “que se relaciona com os conteúdos de uma forma natural e produz conhecimento de modo a constituir representações para os objetos matemáticos, e não por meio de definições e provas dedutivas” (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 245).

Dentro desse panorama, os autores destacam alguns aspectos: inicialmente, nas situações descritas, a aprendizagem inventiva “se inicia (quando se inicia, já que não há garantias) com uma violência colocada pelos signos da análise” (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 246). Um segundo aspecto diz respeito ao formalismo da análise: a disciplina “instaura um ponto de tensão entre ela e a experiência matemática anterior dos alunos, que não incluía o formalismo de

¹¹⁷ KASTRUP, V. *A invenção de si e do mundo*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

maneira tão veemente” (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 246). A aprendizagem inventiva pode se dar nesse estranhamento, na produção de resultados não previstos, a citar o aluno Chris, cujas entrevistas denunciam tais tensões.

O aluno Chris foi classificado por Pinto e Tall (2001)¹¹⁸ como “aquele com maior sucesso dentre os estudantes de desempenho natural (atribuem significado)” (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 246) e completam: “no estágio mais avançado de desenvolvimento [...] a tensão é superada em favor, sempre da teoria formal (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 245).

Nesse sentido, Otero-Garcia e Cammarota dentro do contexto da invenção, destacam que não se pode

admitir um primado do formalismo sobre outras formas que aparecem ao longo do processo de aprendizagem, pois qualquer primado nos levaria novamente a pensar a aula de análise com base numa teleologia cognitiva, uma finalidade que põe fim aos processos de problematização (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 246).

A respeito do tópico “formação matemática do professor”, os autores problematizam a formação dos professores e a existência da disciplina de análise nela. Os autores defendem que o “tornar-se professor é uma prática que comporta um viés político, implica numa aprendizagem de si, na produção de subjetividades” (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 250), uma vez que a formação do professor é pensada atrelada ao problema do conhecer (DIAS, 2009)¹¹⁹.

Neste contexto, a cognição inventiva propõe que a formação de professores deve ser pensada como uma produção de *subjetividade-professor* e não de uma *forma-professor*:

Pensar o professor numa forma final que pode – e deve ser alcançada nos cursos de formação, uma constituição, uma forma-professor ideal e universal. É nisso que implica a formação pensada por meio de suas finalidades: a constituição das condições de leitura do mundo enquanto representação de formas.

Por outro lado, a *subjetividade-professor* aponta para a constituição que opera na configuração de forças que compõe a subjetividade – portanto dinâmica e nunca terminada, fiando-se, assim, a um mundo pensado enquanto relações de forças e suas hierarquizações provisórias em formas (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2012, p. 251).

Uma vez deslocada a discussão sobre a formação matemática do professor, os autores também apontam para novos contornos na abordagem dos conteúdos em sala de aula. Entretanto, os autores defendem:

¹¹⁸ PINTO, M. M. F.; TALL, D. Following students’ development in a traditional university analysis course. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. *Proceedings...*. Amersfoort: Drukkerij Wilco, 2001. p. 57-64.

¹¹⁹ DIAS, R. O. Formação inventiva de professores e políticas de cognição. **Informática na Educação**, Porto Alegre, v. 12, n. 2, p. 164-174, jul./dez. 2009.

Para nós, ao pensarmos a formação do professor de matemática, porém, os efeitos que essa disciplina pode ter para o futuro professor são mais importantes que uma aprendizagem de análise no sentido do domínio de seus conteúdos, como as relações de conhecimento são estabelecidas, que políticas cognitivas ela ajuda a cultivar (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 252)

Em suas considerações finais, Otero-Garcia e Cammarota destacam que mais do que responder as questões propostas, sua intenção era de deslocar a colocação dos problemas postos em Otero-Garcia (2011a), levando em consideração a invenção cognitiva.

Sobre as abordagens de cunho representacional, os autores finalizam declarando que

colocam o problema do conhecimento em termos unicamente epistemológicos – quer no sentido de uma teoria do conhecimento, quer no sentido de uma história/filosofia da ciência – a cognição inventiva chama a atenção para a produção do conhecimento imbricada na constituição de sujeitos e mundos correlatos (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p. 257).

A invenção cognitiva como um referencial teórico se revela como um problema que extrapola a própria teoria, caracterizando-se como uma questão ético-estético-política: “por envolver um cultivo de si e do mundo, é ética; por envolver uma atitude que advém do cultivo, é política; por envolver um processo de criação, é estética” (OTERO-GARCIA, CAMMAROTA, 2013, p.257).

APÊNDICE C – VERSÃO DETALHADA DO “FAZER MATEMÁTICA” EM ANÁLISE

Apresentamos, neste apêndice, uma versão mais detalhada da discussão a respeito do “Fazer matemática” em Análise.

PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Nesse subtema incluímos o artigo:

Processos do pensamento matemático avançado revelados nas resoluções de tarefas envolvendo números racionais (FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN, 2020)

Seu objetivo é analisar que processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) são mobilizados por estudantes de um curso de formação inicial de professores de Matemática, ao realizarem tarefas exploratórias envolvendo representações de números racionais.

O uso de tarefas¹²⁰ tem importância especial na pesquisa, uma vez que a proposta

[...] favorece o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, visto que possibilitam ao aluno situações em que deve observar, elaborar e testar conjecturas, a partir de padrões e regularidades. Com essa prática, deixamos de apresentar o conhecimento matemático como algo pronto, para possibilitar ao aluno sua descoberta (FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN, 2020, p. 219)

O Pensamento Matemático Avançado, é apresentado em dualidade com o Pensamento Matemático Elementar. Os pesquisadores os distinguem ressaltando a possibilidade de definição formal e dedução (TALL, 2002)¹²¹. Destacam uma transição envolvida

da descrição à definição, do convencimento à prova, de maneira lógica com base nessas definições. Essa transição requer uma reconstrução cognitiva [...] é a transição da coerência da matemática elementar à consequência da matemática avançada, baseada em entidades abstratas que o indivíduo deve construir através de deduções formais (TALL, 2002, p. 20 apud FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN, 2020, p. 220).

Dreyfus (2002)¹²² descreve que o Pensamento Matemático Avançado (assim como o Elementar) “consiste em uma interação dos processos de representação e de abstração que se complementam” (FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN, 2020, p. 221), em que a representação inclui três subprocessos relacionados (a representação, a mudança e a tradução entre representações diferentes e a modelagem) e a abstração, que envolve dois subprocessos indissociáveis (generalização e sintetização).

¹²⁰ A partir da perspectiva proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), mas que não é explicitada no artigo.

¹²¹ TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: _____. Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 3-21.

¹²² DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D.(Ed.). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 25-41.

O processo da representação, envolve a representação simbólica, a mental e a visualização. A simbólica é importante, mas não suficiente: ela deve incluir as relações entre signos e significado (DREYFUS, 2002). As representações mentais “são o cerne para aprender e pensar em Matemática” (FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN, 2020, p. 222) e por dependerem das relações mentais estabelecidas pelos indivíduos, não são as mesmas e podem variar de indivíduo para indivíduo.

A habilidade de utilizar as várias representações na resolução de problemas não ocorre apenas pelo fato de um mesmo indivíduo apresentar representações diversas do mesmo conceito matemático. Aqui entram também os processos de mudança e tradução, que estão intimamente interligados, em que o último, significa justamente “a passagem da formulação de um problema matemático de uma representação à outra (DREYFUS, 2002 apud FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN, 2020, p. 222).

A modelagem, último subprocesso do processo de representação, está relacionada à “determinação de uma representação matemática para um objeto ou processo não matemático” (FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN, 2020, p. 221). Os autores destacam a analogia entre os processos de representação e modelação, mas defendem que esses ocorrem em níveis distintos: “Ao modelar, a situação é física, e o modelo é matemático; ao representar, o objeto a ser representado é uma estrutura matemático e o modelo, uma estrutura mental” (FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN, 2020, p. 222).

Durante o processo de abstração, é o subprocesso de generalizar que realiza a transição dos casos particulares para o geral. Refere-se à habilidade de “[...] derivar ou induzir a partir de particularidades, identificar semelhanças, expandir domínios de validade” (DREYFUS, 2002, p. 35, apud FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN, 2020, p. 222). Já o segundo processo envolvido, o subprocesso de sintetização, “é a combinação ou composição de diferentes partes, de modo a formar um todo” (FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN, 2020, p. 223).

Para os pesquisadores, o processo de abstração é o mais importante dentre processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado, argumentando que:

Abstrair é um processo em que se busca “a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, a partir de propriedades e relações entre objetos matemáticos (DREYFUS, 2002, p. 37, tradução dos autores). Nessa construção mental, o aluno deve atentar para as estruturas que fazem parte do conceito abstrato, abandonando aquelas que são irrelevantes, permitindo, dessa maneira, uma redução da complexidade da situação proposta.

Logo, constata-se que a generalização, a sintetização e a abstração estão intimamente ligadas. Entretanto, de acordo com o autor, nem a generalização nem a sintetização exigem as mesmas estruturas cognitivas que a abstração. Enquanto a generalização envolve uma expansão da estrutura do conhecimento, a abstração abrange uma reconstrução mental (FLÔRES, FONSECA, BISOGNIN, 2020, p. 223).

Para os autores, a habilidade de abstrair corresponde a atingir um nível avançado de pensamento matemático.

Na pesquisa desenvolvida e relatada no artigo, os participantes são três estudantes de um curso de licenciatura em Matemática de um Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, que cursavam a disciplina de Análise Matemática. Os dados foram coletados a partir de sua produção escrita de uma sequência de seis tarefas exploratórias relacionadas à representação decimal finita de números racionais.

Durante a realização de tarefas, as pesquisadoras observaram que os estudantes mobilizaram diferentes aspectos do processo de representação (mudança e tradução) do PMA.

Da análise do material empírico, quanto aos processos de sintetização, generalização e abstração, as pesquisadoras identificaram uma dificuldade recorrente dos estudantes em relação a identificação de padrões, etapa importante para o processo de generalização, o que limita os processos seguintes, de sintetização e abstração.

As autoras defendem a importância de atividades como estas tanto no Ensino Superior quanto na Educação Básica, levando em conta o grau de complexidade em cada nível, e priorizando o processo de abstrair.

ARGUMENTAÇÕES MATEMÁTICAS

Dois artigos estão incluídos neste subtema:

- *Visualização e ensino de Análise Matemática* (PINTO, SCHEINER, 2015);
- *Sobre justificativas em questões do tipo verdadeiro/falso de estudantes de Licenciatura em Matemática* (VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020).

Em *Visualização e ensino de Análise Matemática* (PINTO, SCHEINER, 2015), os pesquisadores reelaboram um artigo apresentado no III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil. O objetivo é discutir o uso de representações visuais em argumentações matemáticas, apresentando a noção de abstração estrutural. Para isso, os autores reanalisam a pesquisa em Pinto (1998)¹²³. A pesquisa referencia-se na noção de abstração estrutural para analisar a aprendizagem de conceitos matemáticos e o uso de representações visuais na argumentação em matemática, especificamente no estudo do conceito

¹²³ PINTO, M. M. F. (1998/2011) *Students' Understanding of Real Analysis*. PhD Thesis, Warwick University. Ann Arbor, Michigan: ProQuest-CSA, LLC.

formal de limite de sequência de números reais. Destaca o potencial analítico do quadro teórico apresentado, refinando noções propostas.

No estudo apresentado nesse artigo, o foco são os aspectos relacionados ao uso de representações visuais por um estudante, identificado como Chris. Para obter os dados, Pinto (1998) realizou observações em sala de aula e entrevistas. Participantes são exclusivamente alunos de bacharelado em matemática, sendo esse artigo o único cujos participantes são exclusivamente estudantes desse curso. Onze alunos são acompanhados durante vinte semanas do seu primeiro ano cursando Análise Real.

Os autores indicam que o aspecto fundamental na perspectiva da abstração estrutural “está na ideia de que vários objetos específicos que se enquadram no âmbito de um conceito particular complementam-se mutuamente (processo de complementarização); de modo que uma abstração individual, de cada um deles, é superada” (PINTO, SCHEINER, 2015, p. 645).

A teoria descreve a busca por “promover ou produzir estruturas de conhecimento mais complexas” (Ibidem), ao identificar “promove uma reestruturação de aspectos do conhecimento construídos por meio do processo de complementarização” (Ibidem). Nesse contexto, “as representações ou os *modelos de objetos* produzidos (por exemplo, uma representação visual) são utilizados como *modelos para* produzir novos conhecimentos, sendo incorporados à argumentação matemática” (Ibidem).

Tal perspectiva, para os autores, é consistente com a análise em Pinto (1998) que identificou entre seus participantes, um grupo de alunos que “constroem uma *representação de* um conceito (representações visuais, nos casos estudados) e, ao mesmo tempo, utilizam esta representação como *representação para* produzir novos conhecimentos, tais como a recuperação verbal de uma definição formal do conceito de limite de sequência” (PINTO, SCHEINER, 2015, p. 646). Tal grupo de estudantes, identificado como alunos que “atribuem significado”, inclui o estudante Chris, um caso apresentado neste artigo.

Resultados da análise das entrevistas destacam, que ao mesmo tempo que “Chris constrói em sua figura uma representação visual do conceito de sequência convergente, faz uso desta representação para construir um novo conhecimento – a enunciação da definição formal do conceito de limite” (PINTO, SCHEINER, 2015, p. 648). Os autores ressaltam que assim como Chris, no caso dos alunos que *atribuem significado*,

as *representações de objetos* são constantemente utilizadas de modo semelhante, para construir novos conhecimentos. Em outras palavras, *representações de* (objetos matemáticos) são constantemente utilizadas como *representações para* construir (conhecimentos novos), para dar sentido à experiência matemática, sendo incorporadas à argumentação matemática (PINTO, SCHEINER, 2015, p. 648).

Entretanto, os autores argumentam que o uso de uma *representação para* a construção de novos conhecimentos não implica necessariamente na consistência de uma imagem de conceito e nem uma coerência da representação em si mesma.

No caso de Chris, sua representação visual de sequência convergente ainda reflete “interpretações comuns, tais como a de que talvez o limite está inacessível; sugerindo que a estrutura do conceito ainda não está completa, neste momento” (PINTO, SCHEINER, 2015, p. 648). Tal imagem evocada está em conflito com a definição formal de limite mobilizada. Neste sentido, os pesquisadores defendem que não houve “primazia da definição formal em relação a outras representações, no sentido da exclusão imediata de imagens anteriores ao tomar conhecimento da definição formal” (PINTO, SCHEINER, 2015, p. 649). Em contrapartida, uma análise do processo de aprendizagem evidencia “o *poder complementar* da nova representação (formal) sendo integrada progressivamente ao longo de um *novo discurso* (formal), evidenciando e resolvendo os conflitos entre esta e as imagens anteriores” (Ibidem).

Os autores concluem que o aluno Chris usa as representações como instrumento para embasar a produção de argumentos formais, resolver problemas e não como “objetos que tornam autoevidente propriedades e fatos que necessitam dedução no contexto da matemática formal” (PINTO, SCHEINER, 2015, p. 651). Os autores ressaltam que tais resultados contrapõem o uso da visualização como meramente ilustrativa dos conceitos trabalhados, compartimentalizada do conhecimento produzido.

Assim as representações visuais são um recurso alternativo interessante para o estudo de sequências, apoiando o estudo de definições, a resolução de problemas e a formalização de argumentos. Tais representações são entendidas pelos pesquisadores como instrumentos para resolver problemas e objetos para experimentações mentais.

Os autores sugerem que representações semelhantes como as elaboradas por Chris podem ser utilizadas por professores em sala de aula, a partir de exemplos adequados, evitando uma restrição da imagem conceitual dos alunos, por exemplo, associando sequências convergentes unicamente a sequências monótonas.

Já o artigo *Sobre Justificativas em Questões do Tipo Verdadeiro/Falso de Estudantes de Licenciatura em Matemática* (VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020)¹²⁴ tem por objetivo analisar

¹²⁴ Este trabalho apresenta recortes da tese de doutorado de Vieira (2016).

as percepções de um grupo Licenciandos em Matemática sobre prova e justificativa em Matemática, focando, como o artigo anterior, o conteúdo Sequências Numéricas¹²⁵.

A perspectiva teórica adotada, também no artigo anterior, retoma Processos do Pensamento Matemático Avançado. No caso deste estudo, ao invés do papel da visualização, a pesquisa considera a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais em Matemática e aspectos intuitivo-numérico e lógico-formal.

Quanto aos instrumentos de coleta de dados, os pesquisadores entrevistaram sete docentes que ministram as disciplinas de Sequências e Séries e Introdução à Análise Real. Todos trabalham em uma instituição pública de ensino do Estado de São Paulo, já ensinaram Sequências Numéricas no Ensino Superior e tem mais de 10 anos de experiência docente. A formação desses professores também é mencionada: 4 deles têm Mestrado em Matemática – e dentre eles uma cursava Doutorado em Educação Matemática – um tem doutorado em Matemática e uma tem Mestrado e Doutorado em Computação Matemática. Além de identificar as dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem, nas entrevistas os pesquisadores também visaram identificar “o papel que cada um deles atribui à elaboração de justificativas em Matemática” (VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020, p. 6).

Durante as entrevistas com os docentes foram identificadas duas fontes principais de dificuldades dos estudantes, relacionadas à elaboração de justificativas em Matemática: (1) a definição de limite de sequências e (2) a estrutura lógica de demonstrações. Tais dificuldades foram retomadas na elaboração das questões para os alunos. Da análise das respostas dos estudantes, ambas as dificuldades foram confirmadas.

Duas questões do tipo verdadeiro/falso foram elaboradas e propostas em dois momentos distintos do curso: uma, ao final da disciplina Sequências e Séries (6º semestre) – em que participaram 17 estudantes – e a outra questão, ao final da disciplina Introdução à Análise Real (8º semestre) – que participaram 15 alunos, sendo 10 os mesmos. As questões foram respondidas individualmente, sem consulta a materiais externos e sem intervenção dos pesquisadores. As questões foram analisadas no intuito de avaliar a percepção dos estudantes acerca da construção de justificativas em Matemática. Ao final de cada aplicação, e a partir das respostas às questões, estudantes foram selecionados para participar de entrevistas semiestruturadas individuais, visando discutir suas respostas. Para a análise das respostas das questões, foi utilizada a Análise de erros

¹²⁵ O trabalho de Vieira, Souza e Imafuku (2020) também trata das dificuldades de licenciandos na aprendizagem de sequências, assim como os trabalhos da temática de mesmo nome. Entretanto, o foco deste trabalho está em analisar a maturidade matemática frente a demonstrações, que será o foco aqui.

(CURY, 2007)¹²⁶ como procedimento metodológico. As respostas foram classificadas como Corretas, Erradas ou Em Branco.

Na primeira questão, realizada ao final da disciplina Sequências e Séries, dos sete itens nos quais os alunos deveriam atribuir como verdadeiro ou falso, apenas um item exigia uma “uma demonstração, um pouco mais trabalhosa” (VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020, p. 8). Nos outros, em 5 eram esperados contraexemplos e em 1, o reconhecimento de uma definição.

Da análise das respostas erradas resultam quatro categorias: (A1) Apresentar um exemplo para justificar uma afirmação considerada verdadeira; (B1) Confundir a expressão “limitada” com “ter limite”, (C1) Enquadrar limites infinitos (divergência) na expressão “ter limite” e (D1) “Apresentar argumentos sem sentido das justificativas” (VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020, p. 11).

Na questão 2, realizada ao final da disciplina Introdução à Análise Real, alguns itens foram repetidos e dois outros foram acrescentados com objetivo de “avaliar se houve progresso dos participantes em aspectos lógico-formais, relacionados à elaboração de justificativas e de argumentações matemáticas (VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020, p. 11), além de observar a evolução nos processos do Pensamento Matemático Avançado, como generalização e síntese e se as dificuldades identificadas na primeira questão permaneceram no segundo momento da pesquisa.

A análise das justificativas da questão 2, indicou as mesmas classes de erros encontradas na análise da questão 1, acrescida de um aumento no percentual de itens que não apresentaram justificativas e da porcentagem dos alunos que não responderam nenhum item (33%, em comparação aos 12% na primeira questão).

Os autores apontam que esperavam maior maturidade matemática dos participantes ao final da disciplina de Introdução a Análise Real, no que diz respeito ao emprego de aspectos lógico-formais na construção de provas e argumentação matemática, uma vez que é uma disciplina de final do curso de Licenciatura.

Para eles, os erros, incompreensões e limitações apresentadas pelos estudantes na elaboração de justificativas e argumentações são elementos dificultadores no desenvolvimento de processos mais sofisticados do Pensamento Matemático Avançado, tais como generalização e síntese.

¹²⁶ CURY, H. N. Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

Vieira, Souza, Imafuku ressaltam que o trabalho com as demonstrações e as lógicas relacionadas devem ser estudadas em todas as disciplinas matemáticas da licenciatura, e que as dificuldades encontradas indicam a necessidade de novas investigações sobre a formação lógico-formal de licenciandos em Matemática. Sobre os processos do Pensamento Matemático avançado os pesquisadores defendem que “generalização, síntese e abstração não devem ser trabalhados apenas nas disciplinas finais que, como Análise, devem coroar o uso desses processos, para a compreensão da Matemática como uma construção lógica, inter-relacionada, coerente e consequente de conceitos e ideias” (VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020, p. 16)

Neste contexto os autores ressaltam a importância das propostas apresentadas no artigo, porque permitem aos alunos uma visão aprofundada sobre a natureza do pensamento matemático, através de demonstrações e construção de contraexemplos. Além disso, pontuam a necessidade de valorização de questões que explorem aspectos formais dos conceitos relacionados ao estudo de sequências no processo de ensino e aprendizagem, para que o conteúdo não se constitua “em um amontoado de técnicas, algoritmos e ideias vagas, que pouco contribuirão para a formação dos estudantes” (VIEIRA, SOUZA, IMAFUKU, 2020, p. 16).

A INTERPRETAÇÃO DE SIGNOS NA MATEMÁTICA

O artigo incluído neste subtema é:

Ensino e aprendizagem de Análise Matemática como encontro com signos na perspectiva de Gilles Deleuze (JÚNIOR, ANDRADE, 2016)

O artigo apresenta reflexões sobre a disciplina de Análise Matemática para cursos de ciências exatas a partir de uma perspectiva filosófica. O objetivo é chamar atenção para questões críticas do ensino e da aprendizagem da Análise. É uma pesquisa teórica, fundamentada nas ideias de Gilles Deleuze.

Os pesquisadores argumentam que a Análise é “um meio repleto de simbolismos e de uma gramática próprios, que, considerando os modos e a problemática que ecoam de suas propostas de ensino e aprendizagem, reafirmam e intensificam o *status quo* da processualidade que a cerca” (JÚNIOR, ANDRADE, 2016, p. 547). Destacam sua crença sobre a relação da Análise com a Matemática, afirmando que “nela [na Análise] e por meio dela os signos da Matemática são constituídos e percebidos” (JÚNIOR, ANDRADE, 2016, p. 547).

A noção de Signo é presente em obras de Deleuze. Junior e Andrade retomam tal noção, bem como sua relação com a aprendizagem:

Aprender diz respeito essencialmente aos signos. Os signos são objeto de um aprendizado temporal [...], não de um saber abstrato. Aprender é, de início, considerar uma matéria, um objeto, um ser, como se emitissem signos a serem decifrados, interpretados. Não existe aprendiz que não seja “egiptólogo” de alguma coisa. Alguém só se torna marceneiro tornando-se sensível aos signos da madeira, e médico tornando-se sensível aos signos da doença. A vocação é sempre uma predestinação com relação a signos. Tudo que nos ensina alguma coisa emite signos, todo ato de aprender é uma interpretação de signos ou de hieróglifos (DELEUZE, 2003, p. 4 apud JUNIOR, ANDRADE, 2016, p. 550)¹²⁷.

A perspectiva de Deleuze enfatiza o aprender como um processo, passagem, acontecimento; é uma relação entre os indivíduos e os signos, sendo necessárias a convivência, a presença e a aplicação a essa relação com todo o corpo. Em outras palavras, “a aprendizagem [...] se dará no encontro com os signos” (JUNIOR, ANDRADE, 2016, p. 551).

Entretanto, os pesquisadores apontam que na atual perspectiva da disciplina de Análise, as práticas de ensino podem ser prejudiciais para a aprendizagem dos alunos:

Se focarmos, neste momento, o encontro dos estudantes com os signos da Matemática, percebemos que, baseados nessa teoria, as turmas de Matemática incorrem num ato que pode prejudicar quaisquer encontros ou relacionamentos dos estudantes com os signos que permearão sua vida, pelo menos no sentido profissional, porque, na atual perspectiva dessa disciplina, isso acontece num processo mecânico, temporal e abstrato, podendo prejudicar o aprendizado daqueles (JUNIOR, ANDRADE, 2016, p. 555).

Dentro desse contexto, Junior e Andrade questionam: “como criarmos condições favoráveis para que os estudantes se tornem sensíveis aos signos da Matemática?” (idem)

A respeito da aprendizagem de Análise, os autores defendem que um aluno só aprenderá Análise Matemática quando “seu corpo (mente ou pensamento) estiver/entrar em contato com os signos da quantitabilidade¹²⁸, da qualitabilidade e da potencialidade¹²⁹ constituintes de um processo de construção e aprendizagem que leva à Análise Matemática” (JUNIOR, ANDRADE,

¹²⁷ DELEUZE, G. **Proust e os Signos**. Tradução Antônio Carlos Piquet e Roberto Machado. Cidade: Ed. Forense, 2003.

¹²⁸ A qualitabilidade, a quantitabilidade e a potencialidade são entendidas pelos autores (na perspectiva de Deleuze (1998)) como três classes de signos da Matemática que, juntas, completam a Análise. É uma tentativa de Deleuze de fundamentar a Análise ontologicamente. A qualitabilidade está relacionada à álgebra, a quantitabilidade, à aritmética e geometria elementar.

¹²⁹ Sobre a potencialidade, Deleuze (1998) afirma: “Ao elemento da potencialidade corresponde um princípio de determinação completa. Não se deve confundir a determinação completa com a determinação recíproca. Esta concernia às relações diferenciais e seus graus, suas variedades na Ideia correspondendo a formas diversas. A determinação completa concerne aos valores de uma relação, isto é, à composição de uma forma ou à repartição dos pontos singulares que a caracterizam, por exemplo, quando a relação se torna nula, ou infinita, ou 0/0. Trata-se de uma determinação completa das partes do objeto: agora, é no objeto, na curva, que se deve encontrar elementos que apresentam a relação “linear” precedentemente definida. E é somente aí que a forma serial na potencialidade adquire todo seu sentido; torna-se mesmo necessário apresentar o que é uma relação como uma soma, pois uma série de potências com coeficientes numéricos cerca um ponto singular, e um só de cada vez” (DELEUZE, 1998, p. 168 apud JUNIOR, ANDRADE, 2016, p. 554).

2016, p. 559). Para eles, a aprendizagem em Análise deve ser entendida como signos a serem decifrados e não somente como uma componente curricular, com conteúdos recognitivos a serem transmitidos.

Do ponto de vista do professor e seu trabalho em sala de aula, os autores questionam se somos capazes de reconhecer e valorizar as diferenças dos alunos, ou se apenas tentamos encaixar todos no mesmo patamar, buscando uma homogeneização do aprendizado, o que pode prejudicar as experiências e as relações dos alunos com os signos mobilizados.

Dentro desse contexto, o ato de ensinar, para Deleuze

consiste em emitir signos, sem que tenhamos controle em relação ao que será feito com eles, por aqueles que com eles se encontrarem; e para isso temos que abdicar de nossa vontade de controlar o aprendizado de cada um de nossos alunos, a despeito de nossas “boas” intenções nesse processo. [...] a emissão dos signos se dá por uma apresentação da matéria, na qual os signos se destacam, independentemente de qualquer ação de quem ensina. Cabe apenas apresentar a matéria da forma mais competente que for possível, assim os signos se destacarão (JÚNIOR, ANDRADE, 2016, p. 561).

Na perspectiva do ensino de Análise, por fim, os autores enfatizam a necessidade de renovação na forma com que ela está sendo trabalhada e sugerem que essa mudança vá na direção da criação de um ambiente que favoreça heterogeneidade e multiplicidade, da invenção de novos ambientes, e na decifração de signos pelos aprendizes e completam, defendendo que tal abordagem

Implica num desapego da importância dada ao ato tradicional de ensinar manifesto em metodologias cristalizadas, para que passemos a considerar a tarefa de emissão de signos de forma heterogênea e múltipla, de modo a favorecer a singularidade dos alunos, como fundamental condição de possibilidade da produção da aprendizagem efetiva (JUNIOR, ANDRADE, 2016, p. 561).

APÊNDICE D – VERSÃO DETALHADA DA FILOSOFIA E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Apresentamos, neste apêndice, uma versão mais detalhada da discussão a respeito da Filosofia e História da matemática.

Os artigos incluídos neste subtema são:

- *Uma reflexão histórica acerca de rastros discursivos deixados pelo enunciado “Análise”* (GOMES, 2019)
- *História da Análise Matemática e Desenvolvimento Cognitivo* (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020)

O primeiro traz uma discussão teórica, compondo por recortes da dissertação do autor (GOMES, 2013)¹³⁰ e o desenvolvimento inicial de sua pesquisa de doutorado.

O autor se dedica a entender o que é compreendido por *disciplina de análise*, ou ainda, “*o que pode uma disciplina de Análise?*”. Visa, também, se desvincular das dicotomias entre “certo e errado”, “útil ou não na formação”, buscando uma identidade para a disciplina. Em sua dissertação, o autor teve por objetivo “elucidar o significado de disciplina de Análise [...] uma procura por algo que parecia habitar o próprio termo e que, precisava [...] ser elucidado – uma espécie de essência” (GOMES, 2019, p. 383). Neste artigo, o autor diferencia seus objetivos:

não estamos tentando alcançar capturas de sentidos, estamos querendo mesmo o contrário: o que não faz sentido quando olhamos para uma disciplina de Análise, o que escapa, o que foge de sua transparência discursiva e pode trazer elementos para atualizarmos o que entendemos por *Análise?* (GOMES, 2019, p. 383)

O que se busca é “fazer aparecer o que a identidade deixou escapar, operar um escape de significados e descrever nas linhas e entrelinhas o que for possível encontrar acerca dessas pistas encontradas” (GOMES, 2019, p. 383-384). O autor destaca que a proposta “[...] é uma *fuga* daquilo que encontramos naquele momento (quando nos propusemos a dar um significado ao termo Disciplina de Análise), buscando por relações discursivas entre o enunciado “*Análise*” e objetos que com ele estabeleceram e/ou estabelecem relações (idem, p. 384).

Assim, o objetivo do artigo é

tecer reflexões acerca de uma história da problematização do que conhecemos por rigor, que se relaciona com disciplinas de Análise em cursos de licenciatura em matemática, tendo como principal motivação as divergências encontradas entre o que se espera daquela disciplina e o que, de fato, ocorre em salas de aula dos referidos cursos (GOMES, 2019, p. 377).

¹³⁰ Intitulada *A disciplina de Análise segundo licenciandos e professores de matemática da educação básica*.

Para o autor a pergunta “*o que pode* [uma disciplina de Análise]?” está relacionada a entender o acontecimento do que se questiona, sua potência, seu funcionamento, assim como “uma criança que desmonta seu carrinho de controle remoto e tenta compreender como todas aquelas peças podem fazer com que o carrinho se movimente” (GOMES, 2019, p. 380). Além disso, o autor destaca que

somente no momento em que nos dedicássemos a um estudo mais profundo acerca do que é compreendido por *Disciplina de Análise* – ou melhor, acerca do *que pode* uma disciplina de Análise – é que poderíamos operar escapes e vislumbrar linhas de fuga para essa aparente transparência discursiva (FOUCAULT, 2016)¹³¹, a qual teima em deixar a Análise acorrentada a um dos pratos da balança do certo e do errado, do útil e do não útil, do necessário e do não necessário, do ser e do não ser (GOMES, 2019, p. 380).

Para alcançar seu objetivo, Gomes utiliza os resultados de sua dissertação – sobre pesquisa envolvendo licenciandos e professores de Matemática da Educação Básica –, referenciando-se em Michel Foucault e na História da Matemática como “ferramenta de investigação e compreensão” (GOMES, 2019, p. 381).

O autor assume o pressuposto que “um acontecimento só tem sentido dentro de uma série, o número de séries é indefinido, elas não se ordenam hierarquicamente e veremos que também não convergem para um geometral de todas as perspectivas” (VEYNE, 1982¹³², p. 24 apud GOMES, 2019, p. 381). A noção de *enunciado* também é importante no artigo, tendo como principal característica, algo que possa ser repetido. Gomes apresenta uma discussão em Deleuze (2013, p. 22-23) ao explicar o pensamento de Foucault sobre tal noção:

[...] Uma frase pode ser começada ou reevocada, uma proposição pode ser reatualizada, só “o enunciado tem a particularidade de poder ser repetido”. No entanto, aparentemente as condições reais da repetição são bastante estritas. É preciso que haja o mesmo espaço de distribuição, a mesma repartição de singularidades, a mesma ordem de locais e de posições, a mesma relação com um meio instituído: tudo isso forma para o enunciado uma “materialidade” que o faz repetível. “As espécies evoluem” não é o mesmo enunciado quando formulado na história natural do século XVIII e na biologia do século XIX. E mesmo que de Darwin a Simpson não é certo que o enunciado permaneça o mesmo, pois a descrição poderá enfatizar unidades de medida, de distância de distribuição, e até instituições, completamente diferentes. [...] é que um enunciado se define sempre através de uma relação específica com uma *outra coisa* de mesmo nível que ele, isto é, uma outra coisa que concerne a ele próprio (e não a seu sentido ou seus elementos). Esta “outra coisa” pode ser um enunciado, caso em que o enunciado se repete abertamente. Mas, no limite, ele é necessariamente uma outra coisa que não um enunciado: é um “Lado de fora”. É a pura emissão de singularidades como pontos de indeterminação, pois elas ainda não estão determinadas e especificadas pela curva do enunciado que as une e que assume esta ou aquela forma de proximidade (DELEUZE, 2013, p. 22-23 apud GOMES, 2019, p. 381-382).

¹³¹ FOUCAULT, M. O belo perigo. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

¹³² VEYNE, P. M. Como se escreve a história; Foucault revoluciona a história. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1982.

Desta maneira, é muito difícil que um enunciado seja realmente repetido, “já que quando torna a ser proferido, há toda uma série diferente de acontecimentos, toda uma relação com outras coisas que difere daquelas estabelecidas no momento em que o enunciado foi proferido pela última vez” (GOMES, 2019, p. 382). Neste contexto, Foucault (2015)¹³³ assume *enunciado* como uma *função* “que cruza um domínio de estruturas e de unidades possíveis e que faz com que apareçam, com conteúdos concretos, no tempo e no espaço” (FOUCAULT, 2015, p. 105 apud GOMES, 2019, p. 382). Gomes, completa: afirmando que “tentar compreendê-los [os enunciados] depende de toda uma busca por suas próprias regras de formação e atos de formulação e disseminação em discursos” (GOMES, 2019, p. 382).

A partir de suas reflexões, o autor descreve seis séries discursivas, em que o enunciado “Análise” estabelece relações com outros objetos: *análise como função de práticas de decomposição*; *análise como função de práticas de Geometria: análise e síntese*; *análise como função de práticas algébricas*; *análise como função de práticas metodológicas de Cálculo Diferencial e Integral*; *análise como função de práticas limitantes infinitas* e *análise como função de práticas estruturantes de um corpo ordenado completo*.

A primeira série discursiva, *Análise como função de práticas de decomposição* discute brevemente o entendimento de processos analíticos e relaciona o enunciado “Análise” ao “ato de poder *decompor algo em seus elementos constituintes*” (GOMES, 2019, p. 384 grifo do autor). Na busca de mais elucidações, o autor segue para outras pistas.

Na série *Análise como função de práticas de Geometria: análise e síntese*, retoma-se o conhecimento mobilizado pelos gregos, e entende-se Análise como um processo, ou um método de busca e validação de verdades. Os métodos de análise e síntese utilizados pelos gregos que, embora sejam entendidos como opostos, para eles era considerados como complementares (CORRÊA, 2008)¹³⁴. Gomes sugere que

caso alguém perguntasse a Pappus o que compreendia pelo enunciado “Análise”, certamente a resposta seria algo relacionado a este método de descoberta e demonstração de soluções e verdades, algo como um *método em que se assume algo como encontrado e, através de procedimentos sucessivos e regressivos, encontra-se quais elementos conhecidos constituem aquilo que se assumiu* (GOMES, 2019, p. 386 grifo do autor)

Em *Análise como função de práticas algébricas*, é discutida a transição da análise de um *método* para um *estilo de abordagem*. Essa transição foi marcada por nomes como Viète, Descartes e Fermat, ao retomar o trabalho dos gregos – como Apolônio e Pappus – em seus estudos. Estes

¹³³ FOUCAULT, M. A Arqueologia do Saber. 8. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2015.

¹³⁴ CORRÊA, B. M. A Introdução à Arte Analítica de François Viète: comentários e tradução. 2008. 141 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

matemáticos passaram a dar uma aparência diferente ao método analítico dos gregos, como justificativa de sua álgebra. Neste sentido, Battisti (2010) destaca que os matemáticos “do início da modernidade, ao pretenderem recuperar o método dos antigos, tiveram de adaptá-lo aos ‘novos tempos’. Sob esse aspecto, o enunciado “*Análise*” que aparece em *A Geometria*¹³⁵ já não poderia, rigorosamente falando ser a mesma da dos gregos” (BATTISTI, 2010, p. 572¹³⁶ apud GOMES, 2019, p. 389).

A Análise como função de práticas metodológicas do Cálculo Diferencial e Integral discute as reformulações das bases do Cálculo. Seus métodos (do Cálculo), que muito utilizavam a intuição, passaram a ser questionados, uma vez que uma noção de rigor estava se fortalecendo no século XVII. George Berkeley foi um dos críticos dos trabalhos de Newton e Leibniz, ao questionar sobre a validade de se considerar “uma parcela tão pequena quanto se queira, de maneira que fosse possível desconsiderá-la em determinado momento do processo analítico” (GOMES, 2019, p. 391).

As técnicas da “nova análise” desencadeadas por Viète e Descartes ainda eram relacionadas majoritariamente a métodos geométricos, embora funcionassem nos problemas do Cálculo, e existia uma tendência em entender algo como analítico “apenas aquilo em que fosse possível empregar uma abordagem operacional algébrica” (ENROS, 1981¹³⁷, apud GOMES, 2019, p. 390). Neste contexto, o desenvolvimento do Cálculo caminhou para um afastamento de suas origens na geometria das curvas, se estabelecendo sobre bases analíticas (no sentido algébrico) (BERGGREN et al., 2011)¹³⁸. Ainda neste caminho, Euler realiza uma “separação sistemática entre o Cálculo e a Geometria e uma de suas mais preciosas contribuições foi ter colocado a noção de função como central no conceito da análise” (GOMES, 2019, p. 390-391)

O enunciado “Análise”, neste momento “relacionava-se aos processos algébricos empregados pelos matemáticos “novos”, [que] pouco a pouco passou a referir-se unicamente aos assuntos relacionados ao Cálculo” (GOMES, 2019, p. 391). O autor também destaca que além das mudanças referente aos objetos então relacionados ao enunciado “Análise”, os métodos analíticos começaram a fazer parte dos fundamentos da Matemática que estava sendo desenvolvida. Entretanto, havia ainda um obstáculo que intrigava os matemáticos e começava a ser questionado

¹³⁵ Um dos apêndices da obra *O Discurso do Método*, de Descartes.

¹³⁶ BATTISTI, C. A. O método de análise cartesiano e o seu fundamento. In: *Scientiæ Studia: Revista Latino-americana de Filosofia e História da Ciência*, São Paulo, v. 8, n. 4, p. 571-596, 2010.

¹³⁷ ENROS, P. C. Cambridge University and the adoption of analytic in early nineteenth century England. In: MEHRTENS, H.; ROS, H.; SCHNEIDER, I. (Edts.). *Social History of Nineteenth Century Mathematics*. Boston: Birkhäuser, 1981. p. 135-148.

¹³⁸ BERGGREN, J. L.; FOLKERTS, M.; FRASER, C. G.; GRAY, J. J.; KNORR, W. R. *Mathematics*. Academic Room, 2011.

pelos alunos, na medida que a “nova análise” passou a ser ensinada. É o que conhecemos hoje por *limite*.

Em *Análise como função de práticas limitantes infinitas*, é tratado do movimento acontecido no século XIX de definição de *limite*, o que “culminou no embasamento dos fundamentos do Cálculo em conceitos puramente aritméticos” (GOMES, 2019, p. 392), originando o movimento conhecido como aritmetização da Análise.

Um dos matemáticos responsáveis por esse movimento foi Cauchy, que deu uma nova forma ao que se entendia por rigor analítico, tentando se afastar da “generalidade algébrica”. Gomes explica a nova transformação do tratamento com a análise:

Vemos que todos aqueles esforços para desvencilhá-la de todo e qualquer apelo geométrico, adotando a álgebra como porto seguro para os fundamentos do Cálculo, convertem-se no empenho de negar todo fundamento algébrico e adotar a aritmética como nova sustentação, mas sempre com a visão de rigor geométrico, como uma retomada de ponto de vista. Este movimento foi denominado [...] de aritmetização da Análise (GOMES, 2019, p. 393).

Cauchy contribuiu para dar respostas julgadas como satisfatórias para os questionamentos de Berkeley. Os conceitos de limite e continuidade foram definidos, num esforço de apresentá-los de maneira puramente aritmética. Embora tais conceitos tenham sido considerados como fundamentais no raciocínio analítico da época, Reis (2001)¹³⁹ sugere que a maior contribuição de Cauchy

para a tentativa de tornar sólidas as bases dos conhecimentos advindos do Cálculo (evidentemente, dentro do que se julgava solidez naquele momento talvez não tenha sido a definição rigorosa e aritmética para o conceito de limite – que culminou nas definições conhecidas hoje por continuidade, diferenciabilidade e integral –, mas, sim, a maneira com que Cauchy tratou a ideia de infinitésimo (REIS, 2001 apud GOMES, 2019, p. 393).

Berggren et al. (2011) destaca que este “novo cálculo”, proposto por Cauchy, passou a ser visto como um objeto totalmente original, e passou a ser denominado como “análise matemática”.

A última série discursiva destacada por Gomes, é a de *Análise como função de práticas estruturantes de um corpo ordenado completo*. Os trabalhos de Cauchy, embora tenham sido avanços para a matemática, ainda se mostravam incompletos, pois ainda utilizavam ideias intuitivas do sistema de número real (REIS, 2001). Ainda faltava um passo em direção “a uma considerada completa solidificação das bases do que se denominava, e ainda se entende, por análise” (GOMES, 2019, p. 391).

¹³⁹ REIS, F. da S. A Tensão Entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302f. Tese (Doutorado) – FE/Unicamp, Campinas (SP), 2001.

Reis (2001) descreve que é neste contexto que Weierstrass defende a necessidade de tornar o sistema de números reais rigoroso. Isso se concretiza ao final do século XIX com Dedekind e Peano, que

mostraram como o sistema dos números reais pode ser deduzido de um conjunto de postulados par ao sistema dos números naturais; o primeiro com sua noção de “corte”, que permitiu a demonstração rigorosa dos teoremas fundamentais sobre limites sem utilizar recursos geométricos e o segundo, que introduziu um “simbolismo” uniforme, criando assim, uma nova forma de lógica matemática (REIS, 2001, p. 60 apud GOMES, 2019, p. 394).

Gomes defende que as ideias desenvolvidas pelos matemáticos citados, culminaram no que conhecemos hoje por números reais e teoria de conjuntos, levando esse entendimento para as disciplinas de Análise atualmente oferecidas nos cursos de licenciatura em Matemática:

Vemos que o exaustivo trabalho de colocar as ideias do Cálculo em bases consideradas firmes culminou na definição do que hoje conhecemos por número real e o estabelecimento de suas bases totalmente aritméticas abriu possibilidade para que a teoria dos conjuntos fosse concebida, de forma que as ideias analíticas pudessem ser deduzidas a partir do conjunto dos números naturais. Assim, podemos dizer que as disciplinas de Análise atualmente oferecidas na maioria dos cursos de licenciatura em matemática concebem o enunciado “Análise” desta forma (GOMES, 2019, p. 393-394).

Como considerações finais, Gomes defende que conseguiu realizar o que foi proposto no artigo: seguir as pistas discursivas relacionadas ao enunciando “Análise”. O autor pondera que há outras maneiras de se estabelecer essas relações, além das seis séries discursivas discutidas do artigo. O autor discute sobre a quase trivial premissa: “A Análise é aquela disciplina em que se estudam os fundamentos do Cálculo”. Entretanto, alerta para a armadilha que seria pensar a Análise unicamente como uma disciplina em que se estudam os fundamentos do Cálculo.

Um destaque feito pelo autor é a mudança dos processos analíticos ao longo da história:

Preferimos refletir que é, no mínimo, interessante que um método forjado no contexto da geometria grega, em certo momento da história, passe a designar processos que tendem a se distanciar deste ramo e conceber somente aquilo que é algébrico. Ainda mais, com o desenvolvimento das ideias relacionadas ao rigor, aquilo que é analítico passa a negar tais processos algébricos e a considerar somente aqueles aritméticos. Como tais mudanças ocorrem, visto que aprecem ser tão difusas? (GOMES, 2019, p. 395)

Foucault (2015) trata da necessidade de estarmos prontos para acolher cada discurso, dentro de seus contextos. Neste sentido Gomes afirma que existiram várias “Análises”, fruto das tentativas de compreensão das regras de funcionamento dos discursos e completa:

quando ideias novas são estabelecidas, a virtualidade daquele enunciado é atualizada e novas relações são estabelecidas. Em outras palavras, a partir do momento em que a História estabelece alguma função entre enunciado e outras coisas que a ele se relacionam, passa a existir outro enunciado, outra história (GOMES, 2019, p. 396).

Gomes também discute a formação de professores, dizendo que as visões que um estudante tem sobre a consolidação de um campo de conhecimento e sua institucionalização como disciplina “geralmente são carregadas para a sala de aula em que atuará, de forma que é grande a probabilidade de ele tentar reproduzir os mesmos discursos disseminados e interiorizados” (idem).

Gomes aponta para uma névoa no ensino de análise, que

todos escutam e continuam reproduzindo aquilo que escutaram, porque creem piamente que aquilo que está sendo proferido com tanta propriedade só pode ter sido estruturado daquela forma e de nenhuma outra: não haveria de existir outra possibilidade para aquilo que é tão formal e rigoroso dentro dos limites de um curso de licenciatura em matemática (GOMES, 2019, p. 397)

Para o autor, este artigo amplia as possibilidades de compreensão com relação à Análise, a medida que o indivíduo mergulha nessa névoa. O autor também destaca que a “desistência” dos alunos ao tentar entender e ter um bom relacionamento com a análise, “vem exatamente da perda de significado que a disciplina passa a ter para o aluno, de forma que resta a ele se esforçar para obter a aprovação” (GOMES, 2019, p. 397). Neste contexto, a proposta deste artigo, para Gomes, conseguiu trazer mais densidade para a disciplina, aumentando as possibilidades de compreensão a seu respeito e provoca:

O que ocorreria se esse sujeito adentrasse em todo o emaranhado discursivo, o que este artigo começou a explicitar, e pudesse ir ao encontro de toda a multiplicidade com a qual o enunciado “Análise” manteve relação? O que poderia acontecer se, em cursos de licenciatura em matemática, toda essa metamorfose histórico-discursiva fosse apresentada aos alunos, de forma a deixar por conta deles a formação de suas próprias compreensões acerca do que sustenta os discursos que estão inseridos? (GOMES, 2019, p. 397).

O segundo artigo neste tema, o *História da Análise Matemática e Desenvolvimento Cognitivo* (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020) também traz discussão teórica e investiga a aprendizagem da análise real a partir de uma perspectiva histórica e construtivista. Seu objetivo é compreender o processo de construção dos conhecimentos de análise real na história, comparado ao desenvolvimento cognitivo dos indivíduos, utilizando a epistemologia genética, de Piaget. Como objetivos específicos, os autores listam: (i) compreender a construção histórica da Análise Real; (ii) estabelecer relações entre os estádios¹⁴⁰ do desenvolvimento cognitivo de Piaget e a

¹⁴⁰ “É importante não atribuir o significado de período cronológico ao termo estágio (atribuindo-lhe o significado de estágio ou substituindo por essa palavra), pois a ideia do termo é enfatizar a noção de construção em etapas sucessivas e dependentes entre si” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 409). Para evitar a confusão, existem quatro critérios que delimitam os estádios: 1) Ordem de sucessão constante com cronologia variável; 2) Caráter integrativo: as estruturas construídas em um estágio são integradas às estruturas do nível seguinte; 3) Totalidade inerente à organização das estruturas: a construção do conhecimento não consiste num somatório de conhecimentos, mas em uma complexificação de estruturas e 4) Noção de processo: cada estágio inclui um nível

evolução dos conceitos referentes à Análise e (iii) discutir a implicação destas relações na aprendizagem destes conceitos.

Para embasar a pesquisa são estudados autores da História da Matemática, particularmente Boyer e Merzbach (2012)¹⁴¹ e Eves (2004)¹⁴².

Os autores do artigo sintetizam o desenvolvimento da Análise, começando com os egípcios e gregos em tentativas da quadratura do círculo¹⁴³ e culminando na Análise que conhecemos hoje. Atribui as origens da Análise, assim como em Gomes (2019), no momento em que os esforços foram fundamentar o que já se tinha do Cálculo.

A epistemologia genética é “a teoria que entende a aquisição de conhecimentos como processo de construção ativo, fruto da interação sujeito-objeto, sendo o objeto tudo aquilo que é conhecível pelo sujeito, do ponto de vista epistemológico, inclusive ele próprio” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 405).

A epistemologia genética foi escolhida como lente teórica pelos autores porque ela “explica a gênese do conhecimento do sujeito desde o seu nascimento até a elaboração dos pensamentos formais do adulto, buscando entender o processo que o ser humano realiza para transformar um conhecimento simples em um conhecimento complexo” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 400-401). Além disso, a teoria entende que mesmo que o ritmo de desenvolvimento cognitivo individual ou de grupos de indivíduos sejam diferentes, a ordem de construção das estruturas cognitivas permanecerá a mesma (PIAGET, GARCIA, 2011¹⁴⁴ apud THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020) e, com isso, “compreender a natureza e as características das estruturas cognitivas propostas por Piaget possibilita ao estudioso ter noção de como um indivíduo, enquanto sujeito, constrói o conhecimento ao longo do tempo” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 402).

A construção de novos conhecimentos, para Piaget,

é vista como adaptação, processo pelo qual o sujeito, em sua interação com o objeto, necessita modificar sua estrutura cognitiva prévia (processo de acomodação) para poder assimilar (processo de assimilação) informações novas, o que, por sua vez, resulta em

de preparação para o estágio seguinte e de finalização por si mesmo (DOLLE, 1987 apud THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020).

¹⁴¹ BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. História da matemática. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012. 504 p.

¹⁴² EVES, H. Introdução à história da matemática. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP: 2004.

¹⁴³ “Isto é, dado um círculo qualquer, quer-se construir um quadrado que possua a mesma área deste círculo, utilizando como ferramenta matemática apenas régua e compasso” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 403).

¹⁴⁴ PIAGET, J.; GARCIA, R. Psicogênese e história das ciências. Tradução de Giselle Unti. Petrópolis: Vozes, 2011. 376 p. (Coleção Textos Fundantes de Educação).

novo patamar de organização e de adaptação ao objeto (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 405).

Em outras palavras, “a construção de conhecimentos ocorre como um processo de adaptação, no qual o sujeito retira as informações que é capaz dos objetos que consegue assimilar por abstração, isto é, retira aquilo que seus esquemas de assimilação permitem tirar” (idem, p. 408).

Neste contexto, a construção do conhecimento é entendida como um “processo de equilíbrio e adaptação às perturbações do meio” (idem, p. 406). Neste contexto, apresenta-se a noção de conceituação, realizada “por meio de progressivas tomadas de consciência das ações” (idem, p. 408)

Piaget (1978b)¹⁴⁵ descreve quatro estádios de desenvolvimento cognitivo. O estádio é o sensório-motor, em que o autor destaca algumas de suas habilidades:

Com o exercício e o melhoramento da estrutura sensório-motora dos primeiros anos de vida, o sujeito será capaz de coordenar seu corpo (tomando consciência dessa estrutura) e utilizá-la para exercer seus primeiros esboços de linguagem (falando as primeiras palavras, por exemplo)” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 411).

No estádio pré-operatório, a capacidade de previsão de resultados, através da intuição começa a ser explorada, fruto das experiências sensório-motoras das quais o indivíduo já tomou consciência. Entretanto, tal intuição é parcial porque suas bases são sensoriais e não lógico-matemáticas (PIAGET, 2015 apud THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020).

Os estádios seguintes são chamados de operatórios, em que uma das principais características é a reversibilidade. No estádio operatório concreto, a “ação mental interna ocorre apoiada na manipulação concreta de materiais, propiciando a representação direta das ações e relações” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 411).

O último estádio vem da tomada de consciência das operações concretas: “o sujeito será capaz de agir sobre objetos mentais e hipotéticos por meio de operações formais, como ações mentais apoiadas nas representações das ações do plano concreto – representação da representação” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 412). Os autores continuam: “Dessa maneira estará construída a estrutura das operações formais, na qual todo o pensamento científico

¹⁴⁵ PIAGET, J. O nascimento da inteligência na criança. Tradução de Álvaro Cabral. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1978b. 389 p.

se baseia. [...] o sujeito será capaz de realizar, cada vez mais, generalizações e abstrações, tal como ocorre na construção da Matemática de Ensino Superior (idem). Os pesquisadores destacam que até as construções mais formais, como em Análise Real, “ocorrem por meio de ações sobre objetos, de abstrações e de tomadas de consciência sucessivas” (idem).

Os autores concluem que o percurso que levou à formalização atual da análise ocorreu em quatro etapas¹⁴⁶, a saber: desenvolvimento do cálculo diferencial e integral; organização do cálculo; análise do cálculo e a aritmetização da análise, em que para cada uma das etapas, os autores encontraram semelhanças conceituais com os estádios de desenvolvimento cognitivo.

A etapa *Desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral* inicia-se no rompimento com a geometria estática grega, pelo método da exaustão de Eudoxo e Arquimedes (EVES, 2004 apud THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020) e se “desenvolveu como resposta prática aos problemas da quadratura e das tangentes” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 413). Matematicamente, esta etapa é caracterizada pela ausência de conexão entre os dois problemas. Para ambas as abordagens, nota-se a praticidade imediata, em que não se preocupava com generalidades ou formalismos:

Enquanto o método da exaustão permitia calcular a área de uma figura “curva” por meio de aproximações poligonais, os métodos de obtenção de tangentes, propostos por Fermat e Descartes, calculavam a inclinação da reta tangente em ponto específico de uma curva polinomial. Ambos os métodos consistiam apenas em lista de passos que deveria ser seguidos para a resolução do problema *sem tomada de consciência desses passos, o que permitiria conceituação, que poderia implicar em generalização desses métodos.* (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 414 grifo nosso).

Os pesquisadores explicam que a praticidade desta etapa é coerente com a teoria de Piaget, uma vez que “há descompasso da conceituação em relação à ação (PIAGET, 1977) e do fazer em relação ao compreender (PIAGET, 1978a), pois a conceituação é obtida por progressivas tomadas de consciência dos mecanismos da ação (BECKER, 2012)” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 414-415).

A segunda etapa, de *Organização do Cálculo Diferencial e Integral* é composta pela

projeção, em estrutura superior, dos raciocínios mobilizados pelos métodos de cálculo de áreas e de tangentes utilizados anteriormente. Essa projeção consiste em abstrações que, ao tomar consciência dos métodos empregados, generalizam-nos e organizam-nos neste novo patamar, de forma a transformá-los, novamente, em objetos a serem aprendidos. Matematicamente, essa reorganização pode ser vista como axiomatização parcial, isto é, com as definições de derivada e integral criadas pelos matemáticos ((THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 416).

¹⁴⁶ “Não se deve cometer o equívoco de estabelecer correspondência biunívoca (um a um) entre essas quatro etapas e os quatro estádios descritos por Piaget” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 413).

Nesta etapa o sujeito já consegue partir do fazer ao compreender. Entretanto, mesmo em patamar superior, a compreensão dos métodos mobilizados ainda é parcial. Ainda eram utilizados pensamentos intuitivos e geométricos, o que gerava incerteza sobre algumas operações. Os pesquisadores destacam que assim como “a imprecisão pré-operatória teria exigido que o sujeito [...] organizasse estruturas operatório-concretas (diferentes agrupamentos), nesta etapa teria sido a imprecisão de algumas ações intuitivas dos matemáticos que fizeram com que o Cálculo exigisse uma reorganização” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 416). Essas inaptações são razões que possibilitam a tomada de consciência (INHELDER, PIAGET, 1976)¹⁴⁷.

A transição para a terceira etapa, *a Análise do Cálculo Diferencial e Integral* “pode ter ocorrido a partir dos exemplos de funções encontrados por Weierstrass e Riemann, que representaram incoerências com a formalização estabelecida até esta etapa” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 417). Ela permaneceria em equilíbrio até que a noção de continuidade tenha sido questionada, gerando novas incoerências e desequilíbrio. Os pesquisadores relacionam esta etapa à estrutura operatória de Piaget:

A hipótese central desse estudo, de que as imprecisões de algumas ações fundamentadas em noções intuitivas teriam exigido reorganização da Análise do Cálculo, faz analogia interessante com a construção da estrutura operatória [...] pois é imprecisão da intuição pré-operatória que exige reorganização das ações do sujeito na forma de operações (no caso, operações concretas). Portanto, a quarta etapa iniciar-se-ia com a conceituação da análise que, do ponto de vista histórico, ocorreu com o movimento de aritmetização da análise, isto é, a fundamentação do conceito de número (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 417).

Em busca do equilíbrio, foi necessária “a construção rigorosa e axiomática dos números reais e o estudo das propriedades do infinito, o que auxiliou na organização das estruturas construídas até o momento” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 417).

Na quarta etapa, *Aritmetização da Análise*, há, pelos sujeitos, a busca pela tomada de consciência das propriedades envolvidas nos números reais e conjuntos infinitos. Os pesquisadores destacam que a etapa representa um “grande distanciamento das ideias intuitivas que deram origem ao Cálculo, do ponto de vista da história do sistema conceitual focalizado, sob ótica da epistemologia genética” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 418).

Frente a estas reflexões, os pesquisadores defendem que sempre que o sujeito for desafiado por novos desequilíbrios cognitivos, “sua estrutura clamará por novas assimilações e acomodações” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 418). E completam: “dessa maneira, o

¹⁴⁷ INHELDER, B.; PIAGET, J. Da lógica da criança à lógica do adolescente. Tradução de Dante Moreira Leite. São Paulo: Pioneira, 1976. 259 p.

ciclo descrito seria iniciado a cada novo conhecimento construído, sem fim absoluto, dando sequência ao desenvolvimento da Matemática, enquanto ciência” (idem)

Também é resultado que a aprendizagem de análise acontece por meio de tomadas de consciência sucessivas, culminando em conceituação. Assim, “a axiomatização de um sistema matemático não representa potencial de aprendizagem par estudantes que ainda não tomaram consciência das ações que são limitadas por este sistema” (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 419). Ainda:

Estando a axiomatização de um sistema matemático em patamar superior às operações (ações) que o sujeito realiza nos objetos deste sistema (isto porque axiomatização é fruto de conceituação que ocorre tardiamente em relação à ação, que, neste caso, é ação operatória por conta de ser ação reversível sobre objetos mentais e formais), ela serviu como objeto de ensino apenas para aqueles estudantes que já possuem a estrutura epistêmica necessária para assimilar estes axiomas (THOMÉ, DURO, ANDRADE, 2020, p. 419).

Em outras palavras o modelo de ensino de apresentar axiomas e elaborar propriedades e teoremas a partir deles não é, em potencial, atividade de ensino para os alunos, à exceção dos alunos que já atingiram a estrutura necessária para assimilar tais axiomas.