UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PERLA CHRISTINA NUNES DA SILVA

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE GEOMETRIA NO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA EXPERIÊNCIA ALÉM DO MATERIAL INSTRUCIONAL

RIO DE JANEIRO

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PERLA CHRISTINA NUNES DA SILVA

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE GEOMETRIA NO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA EXPERIÊNCIA ALÉM DO MATERIAL INSTRUCIONAL

Relatório de Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Lilian Nasser

RIO DE JANEIRO

2021

CIP - Catalogação na Publicação

CHRISTINA NUNES DA SILVA, PERLA
CP451a APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE GEOMETRIA NO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA EXPERIÊNCIA ALÉM DO MATERIAL INSTRUCIONAL / PERLA CHRISTINA NUNES DA SILVA. -- Rio de Janeiro, 2021.
76 f.

Orientador: LILIAN NASSER.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2021.

1. O ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL. 2. REFERENCIAL TEÓRICO. 3. METODOLOGIA. 4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA. 5. APLICAÇÃO DO PÓS-TESTE E ANÁLISE DOS RESULTADOS. I. NASSER, LILIAN, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

PERLA CHRISTINA NUNES DA SILVA

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE GEOMETRIA NO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA EXPERIÊNCIA ALÉM DO MATERIAL INSTRUCIONAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Data da aprovação: __/ __ / ____

Banca Examinadora:

Prof.ª Dr.ª Lilian Nasser (Orientadora)
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Gerard Emile Grimberg
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof.ª Dr.ª Dora Soraia Kindel
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, devo agradecer imensamente a Deus por ter me acompanhado, me sustentado e me dado forças.

Agradeço à professora Lilian Nasser, pelo incentivo e pelo apoio, além de toda paciência e perseverança nas horas de trabalho que cumprimos juntas. Que seja sempre essa pessoa gentil e de caráter irrepreensível.

Agradeço também à minha família, meus pais Ana e Paulo, que sempre me incentivaram com palavras de carinho. Aos meus irmãos, Pamela, Paola, Peter e Polyana, que além do laço de sangue são meus melhores amigos e companheiros. Aos meus sobrinhos, Myllena, Arthur, Ana Luiza e Guilherme, que de vez em quando participam de algumas investigações prévias das minhas atividades de matemática. Ao meu marido, Fábio, por sua compreensão e deferência.

Por último, porém, não menos importante, agradeço aos amigos e colegas de mestrado, Renata Cardoso, Ana Gabriela, Fernando, Diego, Dione, Bruno, Carol Schiller, Carol Salviano, Wilza, Pedro, Alessandra, e mil desculpas a todos os colegas que não citei o nome, foram muitos cujos argumentos e visões contribuíram para a minha formação. Assim como, os demais professores que fizeram parte da minha jornada, Victor Giraldo, Agnaldo Esquincalha, Janete Bolite Frant, Márcia Fusaro, Luciane Velasque, Alexandre Sousa, Gert Schubring, Thiago Hartz, etc. Além, de Dora Soraia Kindel e Gerard Grimberg, por suas enriquecedoras contribuições para este trabalho, tanto na qualificação, quanto na defesa. Enfim, muito obrigada a todos!

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo investigar o desenvolvimento da aprendizagem significativa de alunos de 8° do Ensino Fundamental no que tange ao ensino de triângulos e suas propriedades. A pesquisa foi baseada na Teoria de Van Hiele para determinar o nível de aprendizagem antes e depois da aplicação de uma sequência didática em paralelo ao Ensino tradicional de Geometria. A sequência didática foi elaborada de maneira a induzir o estudante a compreender as propriedades características dos triângulos e sua generalização para qualquer triângulo e chegar à conclusão das condições necessárias e suficientes para a congruência de triângulos. Considerando a perspectiva de Zabala (1998) sobre sequências didáticas, foi necessário criar um bloco de atividades com o objetivo de explorar os conceitos característicos dos triângulos, proporcionando uma Aprendizagem Significativa, segundo Ausubel e Skemp. Na primeira etapa da pesquisa aplicamos um pré-teste baseado na Teoria de Van Hiele para verificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre triângulos e quadriláteros. Além disso, os alunos responderam a uma atividade discursiva para consolidar o nível atingido por cada um deles. A partir dos resultados obtidos, elaboramos uma sequência didática de acordo com o nível de pensamento geométrico da maior parte da turma, a ser aplicada em paralelo com as apostilas adotadas pela escola. As atividades da sequência didática aplicada se diferenciavam do texto instrucional pelo uso de material concreto e a constante demanda por argumentações e justificativas. Depois de algum tempo foi aplicado um pós-teste que mostrou o progresso de 71% dos alunos da turma nos níveis de van Hiele alcançados. Além disso, confrontando com os resultados do mesmo teste em outra turma que não vivenciou a sequência didática, foi possível verificar uma diferença significativa na retenção da aprendizagem dos alunos da turma experimental. Isso indica que as atividades da sequência didática contribuíram para que os alunos alcançassem uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Teoria de van Hiele; Sequências Didáticas; Triângulos; Aprendizagem Significativa.

ABSTRACT

This research aims to investigate the development of significative learning by 8th grade students in terms of the teaching of triangles and its properties. The research was based on the Van Hiele Theory to determine the level of learning before and after the application of a didactic sequence in parallel to the traditional of Geometry. The didactic sequence was designed in order to induce the student to understand the characteristic properties of triangles and their generalization for any triangle and to reach the conclusion of the necessary and sufficient conditions for the congruence of triangles. Considering the perspective of Zabala (1998) on didactic sequences, it was necessary to create a block of activities in order to explore the characteristic concepts of triangles, providing Meaningful Learning, according to Ausubel and Skemp. In the first stage of the research, we applied a pre-test based on the Van Hiele Theory to verify the students' previous knowledge about triangles and quadrilaterals. In addition, students responded to a discursive activity to consolidate the level reached by each of them. Based on the results obtained, we developed a didactic sequence according to the level of geometric thinking of most of the class, to be applied in parallel with the handouts adopted by the school. The activities of the applied didactic sequence differed from the instructional text by the use of concrete material and the constant demand for arguments and justifications. After some time a post-test was applied, showing the progress of 71% of the pupils of the class in the levels of van Hiele attained. Moreover, comparing with the results of the same test in another group who did not experience the didactic sequence, it was possible to verify a significant difference in the retention of learning of the pupils of the experimental group. This indicates that the activities of the didactic sequence have contributed for the pupils to achieve a significant learning. After some time it was possible to verify the learning retention, allowing the conclusion that the students achieved a significant learning, according to the responses to a post-test.

Keywords: Theory of van Hiele; Didactic Sequences; Triangles; Meaningful Learning.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 8
CAPÍTULO 1: O ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL 11
CAPÍTULO 2: REFERENCIAL TEÓRICO 16
CAPÍTULO 3: METODOLOGIA 24
CAPÍTULO 4: A SEQUÊNCIA DIDÁTICA 34
CAPÍTULO 5: APLICAÇÃO DO PÓS-TESTE E ANÁLISE DOS REULTADOS 59
CAPÍTULO 6: CONSIDERAÇÕES FINAIS 66
REFERÊNCIAS 68
ANEXO I / PRÉ-TESTE 70
ANEXO II / PÓS-TESTE 73

INTRODUÇÃO

Quando era aluna regular na Educação Básica tive pouco contato com geometria, sendo o meu primeiro relacionamento profundo com esse ramo da Matemática na graduação de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (2012-2017). À medida que fui “redescobrindo” a geometria, percebi que era incontestável como a minha formação era deficitária e como esse conhecimento é importante e me fez falta para o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo e no prosseguimento dos estudos. Além disso, preocupou-me a quantidade de estudantes com trajetórias similares à minha que estão se formando na Educação Básica sem construir o mínimo de conceitos geométricos.

Daí surgiu precocemente o interesse em desenvolver uma pesquisa em Educação Matemática que tivesse a Geometria como foco. Contribuiu para isso minha participação no Projeto PIBID de 2014 a 2016, no decorrer do curso de Licenciatura em Matemática, com intervenção no ensino de Matemática do 5°anodo Ensino Fundamental de uma Escola Municipal de Queimados-RJ.

As atividades de Geometria eram desenvolvidas em um dia de estudo dirigido orientado pela Drª Dora Soraia Kindel e aplicada em um segundo momento sob a abordagem de Atividades Investigativas. Buscávamos proporcionar aos estudantes experiências com material concreto, de recortar, colar, comparar, manipular, já que o trabalho feito anteriormente pelos professores das turmas era expositivo e concentrado no livro didático.

Desde o início ficaram nítidas as dificuldades dos alunos em descrever as figuras geométricas, já que o vocabulário era escasso, indicando pouco contato anterior com o conteúdo de Geometria e a ausência de discussão sobre as características dessas figuras, suas semelhanças e diferenças. Com o material concreto que levamos, os alunos puderam conhecer as figuras geométricas e, assim, juntos, nomeamos os polígonos e seus elementos, tais como, lado, diagonal, vértice. Algumas características, assim como o conceito de ângulo, emergiram na discussão das atividades.

Ainda na Graduação e entusiasmada com o trabalho desenvolvido no PIBID, escrevi a monografia em Ensino de Geometria, mas dessa vez objetivando o ensino Médio, pois assim como eu, os estudantes com os quais tive contato no estágio obrigatório estavam terminando a Educação Básica com escasso conhecimento em Geometria. Contudo, tal trabalho proporcionou uma sugestão ao professor de Atividades Investigativas, não sendo aplicado na prática.

Após a formatura, comecei a lecionar em uma escola privada que faz parte de um sistema de ensino e com as minhas próprias turmas da Educação Básica, pude observar que independente do ano e da idade, todos os alunos tinham dificuldades em Geometria, desde a identificação das formas, descrição ou classificação.

No material didático de uso obrigatório na escola, a geometria era exposta concomitantemente com as fórmulas prontas e algumas demonstrações, não dando oportunidade de explorar materiais concretos, nem formular hipóteses ou realizar construções geométricas. Como os alunos até então não tinham tido um momento para esse tipo de atividades, eles apresentavam muita dificuldade em desenvolver o Pensamento Geométrico, de acordo com a Teoria de van Hiele. Esta Teoria será apresentada no capítulo 2.

Além disso, não costumavam questionar os resultados ou teoremas que lhes eram apresentados, apenas aceitando que eram verdadeiros. Por esse motivo, percebi que havia um campo fértil para produzir um trabalho diferenciado como o que foi realizado no PIBID.

Ao ingressar no mestrado em Ensino de Matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro, decidi investigar possíveis propostas de intervir nesse ensino, levando esses alunos a uma aprendizagem significativa da geometria e fazê-los avançar nos níveis de van Hiele.

Portanto, este trabalho de pesquisa tem por objetivo principal construir e aplicar uma Sequência Didática para o desenvolvimento de aprendizagem significativa no Ensino de Geometria, principalmente no que tange aos conceitos de triângulos, em uma turma de 8° Ano do Ensino Fundamental.

Desse modo, a pergunta que queremos responder com esta pesquisa é:

Qual o impacto de uma Sequência Didática que explora o raciocínio e o uso de material concreto na aprendizagem significativa de alunos do 8º ano, envolvendo o conceito de triângulos e seus elementos?

Para responder a essa pergunta, pretendemos alcançar os seguintes objetivos:

1) Identificar os níveis de pensamento geométrico dos alunos da turma escolhida;

2)Desenvolver uma sequência didática acompanhando os conteúdos sobre triângulos do material didático adotado pela escola, de modo que seja dada oportunidade aos alunos de construção do conhecimento e compreensão dos resultados;

3) Aplicar a sequência didática, recolhendo as produções dos alunos, para análise do seu desempenho;

4) Depois de algum tempo, verificar a retenção da aprendizagem, por meio da aplicação de um pós-teste, observando o progresso dos níveis de van Hiele dos alunos e comparando com os resultados de outra turma que seguiu apenas o material didático adotado, não sendo exposta à sequência didática.

Sendo assim, o capítulo 1 desta dissertação apresenta uma revisão de literatura abordando o cenário do ensino de Geometria no Brasil nas últimas 6 décadas, como uma justificativa para o desenvolvimento desta pesquisa.

O capítulo 2 aborda o referencial teórico, abrangendo a Teoria de van Hiele como parâmetro de desenvolvimento do pensamento geométrico e as Sequências Didáticas como instrumento para alcançar a aprendizagem significativa, de acordo com as teorias de Ausubel e Skemp.

No capítulo 3 é apresentada a metodologia da pesquisa, que inclui suas etapas: a coleta de dados, a aplicação dos Testes de van Hiele a título de pré-teste, e de uma questão aberta, a fim de identificar os níveis dos alunos. As respostas dos alunos nessa etapa inicial permitiram identificar o nível de pensamento geométrico que deveria ser adotado na Sequência Didática a ser desenvolvida.

O capítulo 4 descreve a elaboração e aplicação de uma sequência didática abordando os conceitos relacionados a triângulos, acompanhando os conteúdos do material didático adotado pela escola. Essa sequência foi caracterizada de acordo com o nível de van Hiele alcançado pela maioria da turma, dando oportunidade aos alunos de compreender os resultados apresentados no material didático, por meio da exploração de material concreto e do desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Os resultados dessa experiência são analisados no Capítulo 5 em duas frentes: analisando o progresso dos níveis de van Hiele dos alunos e comparando com as respostas ao pós-teste dos alunos de outra turma. As considerações finais são discutidas no capítulo 6, seguido das referências bibliográficas e os anexos.

CAPÍTULO 1: O ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL

O ensino de Geometria no Brasil passou por diversas transformações ao longo do tempo. Neste capítulo comentamos alguns trabalhos que trazem levantamentos ou discussões sobre o ensino de Geometria, contribuindo para traçarmos um perfil do ensino de Geometria nas últimas décadas, a partir dos anos 60.

Seu ensino, baseado em estruturas, era de difícil abordagem para o professor e, com a reforma no ensino de Matemática que adveio com o Movimento da Matemática Moderna no fim da década de 60, culminou em um empobrecimento do ensino da Geometria em diferentes níveis, que ocorreu tanto na Educação Básica, quanto na formação de professores que ensinam matemática.

Segundo Furtado, Trópia e Baccar (2020), "a reforma evacuou uma parte significativa do conteúdo da geometria, esgotando-a de maneira essencial" (p.8). Em decorrência disso, mesmo com as mudanças curriculares ocorridas posteriormente, vários conceitos geométricos antes explorados na Educação Básica e na formação inicial sucumbiram. É recomendável que reformas no ensino deveriam ser produtos de uma profunda reflexão, em seu carácter epistemológico, metodológico e social, considerando suas consequências diretas.

O ensino de Geometria, portanto, como o conhecemos atualmente, é resultado das mudanças ocorridas na disciplina de Matemática e nos currículos. Essas mudanças foram influenciadas pelas ideias de Félix Klein, que conjecturou que os conteúdos que antes eram ensinados separadamente com os nomes de Aritmética, Álgebra e Geometria, poderiam ter seu ensino integrado, formando a disciplina de Matemática. E a Geometria escolar que seguia uma estrutura Euclidiana passou a ter uma formalização mais científica e lógica.

Com essas alterações o ensino de Geometria fica subjugado, em parte, ao ensino da Álgebra. E a integração da Geometria com outros ramos da Matemática, não ocorre de forma coerente, a Geometria não é ensinada em consonância com a Álgebra e a Aritmética, ela passa a ser conteúdo de fim de bimestre/semestre/ano, totalmente desconectada dos demais conceitos matemáticos e de outras ciências.

O abandono do ensino de Geometria no Brasil tem sido tema de pesquisas e artigos, refletindo a preocupação com a falta dos conteúdos geométricos na Escola Básica. Pavanello (1993) analisou causas e consequências do abandono do ensino de Geometria, com base num relato histórico do ensino dessa disciplina e afirma que

> existem fortes motivos para a inquietação dos professores com o abandono da geometria e sua insistência em melhorar seus conhecimentos com relação a ela. A ausência do ensino de geometria e a ênfase no ensino de álgebra podem estar prejudicando a formação dos alunos por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos (PAVANELLO, 1993, p.16).

Essa inquietação deu origem a muitos outros trabalhos de pesquisa, que focaram na ausência da Geometria na prática pedagógica de grande parte de professores (FONSECA, LOPES et al, 2002; NACARATO, 2007; GRANDO, 2009).

Segundo Pavanello e Andrade (2002, p. 80), "a geometria é pouco ensinada em nossas escolas, principalmente porque os professores consideram sua própria formação em relação a esse conteúdo bastante precária". Portanto, para o resgate da importância da Geometria no ensino, é preciso capacitar os professores em formação inicial e em exercício para se sentirem seguros para ensinar Geometria em suas turmas do Ensino Fundamental e Médio. Ou seja, ressignificar o ensino de Geometria na formação do professor, para que assim, a prática docente seja impactada futuramente.

Apenas após a década de 90 e com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) é que o ensino de Geometria foi revisto no currículo brasileiro. Contudo, levou um tempo para que os professores e as escolas de maneira geral se adaptassem a essa nova orientação curricular. Ou seja, essa importância dada à Geometria não gerou mudanças imediatas e nem reais na prática escolar dos professores no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Tal fato fica evidenciado em um levantamento de teses e dissertações sobre o Ensino de Geometria no Brasil entre os anos de 1991 e 2011, realizado por Sena e Dornelles (2013). As autoras destacam as alterações no ensino de Geometria ao longo do tempo, citando a substituição da disciplina de Desenho Geométrico por Educação Artística nos anos 70. As consequências foram desastrosas, visto que se deixou de lado o uso dos instrumentos usados no ensino de construções geométricas. Os professores dos anos iniciais limitaram-se a trabalhar aritmética e noções de conjunto, enquanto nos anos finais do Ensino Fundamental,

> sem o suporte do desenho geométrico e com a popularização do ensino, os alunos passaram a apresentar maiores dificuldades em geometria. Os conteúdos eram deixados de lado ou para o final do bimestre, se houvesse tempo. (SENA e DORNELES, 2013, p. 142)

O artigo é finalizado destacando que a Geometria não é uma das prioridades no ensino da Matemática, apontando para um descaso que parte do processo histórico e se faz presente no cotidiano atual e para a falta de preparo dos professores para trabalhar com a Matemática de forma geral, especialmente com a Geometria.

Andrade e Nacarato (2004) resgataram a trajetória dos trabalhos apresentados nos sete primeiros Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM). Segundo esses autores, embora a participação da Geometria nos encontros nunca tenha sido superior a 20% do total de trabalhos apresentados, já se constatava a presença de grupos/núcleos de pesquisa que vinham se consolidando e obtendo representatividade. Dentre as tendências para o ensino de Geometria é destacado o movimento ocorrido no final do século XX: da Geometria das Transformações à Geometria em ambientes Computacionais.

> Se, nos anos 1950/1960 a Geometria pelas Transformações não obteve a repercussão esperada – principalmente pelos dois grupos de maior representatividade nacional na época: o grupo do Rio Grande do Sul que trabalhava a Geometria pelas transformações difundida por Dienes; e o da UFBA liderados pelos professores Omar Catunda e Martha Dantas – a Geometria em ambientes Computacionais vem ganhando uma certa expressividade, a partir dos anos de 1990. (ANDRADE; NACARATO, 2004, p.11)

Os autores destacam ainda a influência dos softwares de Geometria Dinâmica para o processo de ensino e de aprendizagem que, implementados de fato em sala de aula, estão mudando a cultura da aula de Matemática. Infelizmente, a realidade mostra que atualmente o uso de tecnologias ainda não se faz presente no cotidiano de muitas escolas.

Numa perspectiva histórica, Furtado, Trópia e Baccar (2020) apresentam uma reflexão sobre as possibilidades pedagógicas para o ensino de Geometria na Educação Básica e na formação de professores que ensinam Matemática. Para construir essa reflexão, basearam-se no Programa de Erlangen (1892), de Félix Klein, nas ideias de Daniel Perrin (2012) sobre a formação de professores para o ensino de Geometria e no relatório da Comissão de Reflexão sobre o Ensino das Matemáticas, coordenada por Jean-Pierre Kahane (2000). As autoras relatam que as obras desses três autores apresentam pensamentos em comum acerca do ensino de Geometria, apresentando caminhos que podem potencializar a construção do pensamento geométrico e a formação cidadã dos educandos. Afirmam ainda que

> quanto à aprendizagem do raciocínio geométrico, a comissão ressalta que não é apenas a aprendizagem do método dedutivo, mas também argumentação, conjectura, dedução e demonstração. A capacidade de raciocínio faz parte da formação da cidadania, pois permite que as pessoas atuem de forma crítica e responsável na sociedade e participem dos debates políticos, sociais e econômicos. A importância do desenvolvimento do raciocínio geométrico é um tema muito presente na educação matemática. (FURTADO; TRÓPIA; BACCAR, 2020, p. 5)

A pesquisa de Teixeira e Jardim (2019) apresenta um estudo sobre a teoria de van Hiele e o currículo de Geometria na Educação Básica, relacionando o desenvolvimento do pensamento geométrico e a sequência de conteúdos a serem abordados, apresentadas pelos documentos oficiais. Segundo as autoras, o ensino de Geometria sofreu com as defasagens encontradas em sala de aula e com a falta da devida importância dada a ela durante as aulas de

Matemática, decorrente do Movimento da Matemática Moderna da década de 1960, que colocou a Geometria em segundo plano, tanto na Educação Básica quanto na formação de professores. Para reverter essa situação, os documentos oficiais mostram a importância dos conceitos geométricos no ensino. Dentre eles, citamos os PCN, que destacam a importância do ensino da Geometria na Educação Básica, ao afirmar que

> os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (MEC, 1998, p.51)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) destaca o ensino significativo de Geometria ao recomendar que, nos anos finais do Ensino Fundamental, esta

> não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume e nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras (p. 228).

Mesmo com algumas controvérsias a respeito da elaboração da BNCC e do seu desenvolvimento ter sido ou não um processo democrático, a base foi aprovada e está em vigor desde então. Algumas alterações estruturais a diferenciam dos PCN. Por exemplo, os PCN eram divididos em quatro blocos de conteúdos: Números e Operações, Espaço e Forma, Tratamento da Informação e Grandezas e Medidas. O Ensino de Geometria era contemplado tanto em Espaço e Forma, quanto em Grandezas e Medidas. Já na BNCC, existem cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade. Estas unidades temáticas aparecem em todos os anos do Ensino Fundamental e perpetuam a fragmentação dos conceitos matemáticos, uma vez que, as habilidades compartimentam o saber dissociando uma unidade temática da outra.

De acordo com Bigode (2019), embora os defensores da base sustentem que “a matemática é imune às ideologias” ou que “base não é currículo”, o documento não consegue esconder sua orientação ideológica expressa numa visão que reduz a Matemática a uma coleção estanque de itens que não passam de descritores de avaliação, agora rebatizados de “habilidades”.

O ensino de Geometria por sua vez continua seccionado em duas unidades temáticas, de Geometria e de Grandezas e Medidas, que podem ser exploradas com o auxílio de softwares e outras ferramentas digitais.

Podemos perceber que o ensino da disciplina escolar de Matemática, na qual a Geometria está inserida, fica sujeito a vários fatores e esbarra na formação do professor, em construções históricas e político-sociais, no currículo e no papel que a escola está desempenhando. Considerando essas variáveis, as políticas públicas devem ter a preocupação de preparar o professor para implementar as novas orientações curriculares, estabelecidas pela BNCC.

O ensino de Geometria possui papel fundamental no desenvolvimento do indivíduo em suas diversas dimensões, como a noção de espaço, distância, área, volume, suas propriedades e relações. Essas propriedades e relações auxiliam na resolução de problemas de natureza prática e no processo de abstração e dedução. Por esse motivo, o ensino de Geometria não pode ser reduzido à memorização de fórmulas e à resolução de exercícios repetitivos. É preciso que os alunos alcancem uma aprendizagem significativa. Este trabalho contribui no desenvolvimento de um conjunto de atividades que formam uma sequência didática, com esse objetivo.

O importante é fortalecer a autonomia desses estudantes, para que sejam capazes de argumentar, conjecturar e testar hipóteses, para confirmá-las ou refutá-las. A BNCC defende que “esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional” (BRASIL, 2017, p.266).

Dessa forma, seguindo as recomendações da BNCC, a aprendizagem nos anos finais do Ensino Fundamental deve consolidar os conhecimentos estabelecidos nos anos iniciais e promover a apreensão de significado dos objetos matemáticos, assim como destacar a importância da comunicação em linguagem matemática.

A Sequência Didática descrita nesta pesquisa segue esses requisitos, no sentido de buscar desenvolver nos alunos a consolidação da compreensão de objetos conhecidos nos anos anteriores com o apoio da manipulação de material concreto. Pretende-se que, ao desenrolar das tarefas, cada estudante tire suas próprias conclusões de acordo com seus processos individuais e seu nível de pensamento geométrico.

No próximo capítulo, estão expostos os motivos e as teorias que fundamentam a escolha da Sequência Didática como estratégia de ensino, a Teoria de van Hiele para identificar os níveis de raciocínio geométrico e a Aprendizagem Significativa para promover o alcance dos resultados desejados.

CAPÍTULO 2: REFERENCIAL TEÓRICO

Como este trabalho trata da aprendizagem de Geometria, é natural que use como referencial teórico o modelo de van Hiele, desenvolvido no início da segunda metade do século passado. A teoria de van Hiele foi tema de diversas pesquisas visando a sua validação e serviu como modelo para o desenvolvimento de currículos. Em relação à aprendizagem significativa, este trabalho se baseia nos estudos de Ausubel e Skemp, além de usar o modelo de sequências didáticas de Zabala.

2.1 - A Teoria de van Hiele

As dificuldades nas tarefas geométricas de seus alunos do Ensino Secundário levaram os professores holandeses Pierre e Dina van Hiele a conceber uma teoria para o desenvolvimento do pensamento geométrico (VAN HIELE, 1986). Este modelo estabelece que os alunos progridem através de uma sequência hierárquica de níveis de compreensão de conceitos enquanto eles aprendem Geometria. Van Hiele estabeleceu cinco níveis, descritos por Nasser (1992) como:

Nível 1 - Básico - Reconhecimento - o aluno reconhece as figuras geométricas por sua aparência global, mas não identifica explicitamente suas propriedades. Ex.: o aluno identifica a figura de um quadrado, e ao ser perguntado porquê, a resposta é do tipo: "porque se parece com um quadrado".

Nível 2 - Análise - o aluno conhece e analisa as propriedades das figuras geométricas, mas não relaciona explicitamente as diversas figuras ou propriedades entre si. Ex.: o aluno sabe que o quadrado tem quatro lados iguais e quatro ângulos retos.

Nível 3 - Ordenação - o aluno relaciona as figuras entre si de acordo com suas propriedades, mas não domina o processo dedutivo. Ex.: o aluno reconhece que todo quadrado é um retângulo, e que todo retângulo é um paralelogramo.

Nível 4 - Dedução - o aluno compreende o processo dedutivo, a recíproca de um teorema, as condições necessária e suficiente, mas não sente necessidade usar rigor matemático. Ex.: o aluno entende porque o postulado das paralelas implica que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Nível 5 -Rigor - o aluno compreende a importância do rigor nas demonstrações, e é capaz de analisar outras geometrias.

O Modelo de van Hiele foi muito utilizado, servindo de base para o desenho curricular em diversos países, já que estabelece que o progresso de níveis depende das atividades de ensino e não apenas da idade ou maturidade dos alunos. Professores responsáveis pelo ensino de Geometria devem estar cientes das seguintes implicações da teoria de van Hiele, para que a aprendizagem seja significativa:

> os alunos passam pelos níveis em ordem consecutiva, mas não no mesmo ritmo. É possível encontrar na mesma turma alunos em diversos níveis; em cada sala de aula deve-se tentar ter o professor, os alunos e o livro texto funcionando no mesmo nível. (NASSER, 1990, p.98)

Observa-se que o material didático de Geometria para o Ensino Fundamental segue, em geral, a linguagem e as características do terceiro nível, enquanto o aluno típico raciocina no primeiro nível, ou mesmo, nem consegue atingir esse nível, daí as dificuldades encontradas.

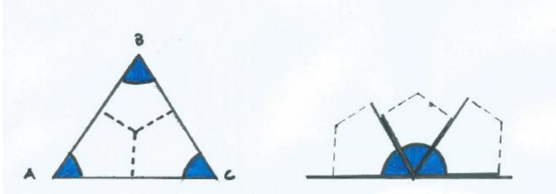
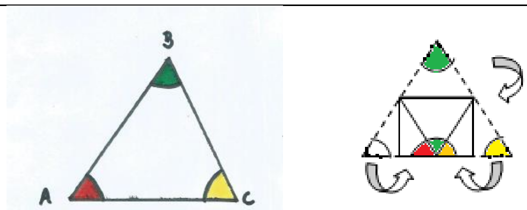
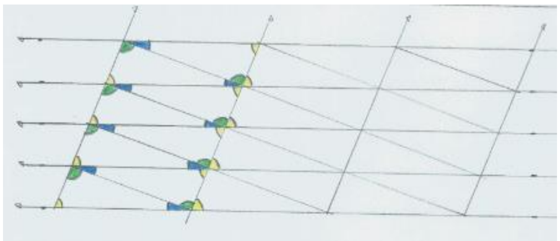
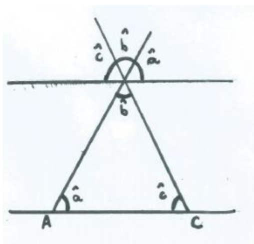
Quando se inicia um ano letivo ou um trabalho de intervenção é importante que se faça uma avaliação diagnóstica, para identificar os níveis dos alunos e para que seja possível oferecer tarefas adequadas ao nível atingido pela maioria da turma. Dessa forma, é possível desenvolver juntamente com os estudantes as habilidades necessárias para avançar aos demais níveis.

Segundo Crowley (1994), “nos escritos de van Hiele está implícita a noção de que seria apresentada às crianças uma variedade ampla de experiências geométricas” (pág.8).

Essas experiências variam de acordo com os níveis, ou seja, há uma série de experiências importantes para os alunos que raciocinam nos níveis iniciais consolidarem seu pensamento geométrico e assim terem a oportunidade de progredir para os próximos níveis. Entre essas experiências estão, por exemplo, manipular, colorir, dobrar e construir figuras geométricas, identificar uma figura ou uma relação geométrica, criar figuras, descrever figuras e resolver problemas manejando figuras, medindo e contando.

É importante ressaltar que um mesmo resultado pode ser vivenciado pelos alunos em diferentes níveis de raciocínio. Ao professor cabe escolher qual a abordagem mais adequada para a sua turma. Por exemplo, o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º pode ser abordada nos diversos níveis, como mostra o quadro 1.

Quadro 1 – Abordagens distintas para a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Nível de van Hiele	Soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º	Ilustração
1º Nível - Reconhecimento	Recorta-se as pontas do triângulo para juntá-las de modo formar um ângulo raso.	 *Cortando os ângulos com parte do triângulo e justapondo.*
2º Nível - Análise	Por meio de dobraduras adequadas, é possível visualizar que a soma dos ângulos do triângulo forma um ângulo raso.	 *Recorta-se o contorno do triângulo e dobra-se formando 2 linhas perpendiculares e uma paralela à base. Verifica-se que os ângulos se encaixam formando um ângulo raso.*
3º Nível - Ordenação	Usando feixes de retas paralelas que formam triângulos, é possível identificar ângulos adjacentes cuja soma é 180º.	 *Após realizar um estudo sobre retas paralelas cortadas por uma transversal, verifica-se que os ângulos alternos internos são iguais, portanto, os três ângulos de cada triângulo formam um ângulo raso.*
4º Nível - Dedução	Demonstração usando o 5º postulado de Euclides e as propriedades dos ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.	 *O 5° postulado afirma que: "Dado um ponto fora de uma reta é possível traçar uma única reta paralela a reta dada." Se as retas são paralelas, os ângulos correspondentes são iguais e ângulos opostos são iguais. Portanto, os três ângulos juntos formam um ângulo de 180°.*

Fonte: Elaborada pela autora

As propriedades do Modelo de van Hiele revelam generalizações além das características intrínsecas a cada nível. Segundo Crowley (1994), as propriedades são:

- **Sequencial:** estabelece que o estudante passa para o próximo nível após superar o nível anterior, ou seja, os níveis são hierárquicos, e o aluno progride na aprendizagem de geometria seguindo essa hierarquia;

-**Avanço:** depende especificamente do método e do conteúdo abordado, e não apenas da idade. Van Hiele estabeleceu também 5 fases de aprendizagem, que devem ser vivenciadas para propiciar o avanço para o nível seguinte. De acordo com Crowley (1994), essas fases são: informação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração.

- **Intrínseco e extrínseco**: emerge quando os objetos observados em um nível se tornam objetos de pensamento no nível seguinte.

-**Linguística**: cada nível tem uma relação linguística própria para os símbolos e as relações entre eles.

- **Combinação adequada**: o curso no qual o estudante está inserido deve estar de acordo com o seu nível. Sendo assim, se um curso de geometria está sendo ministrado em um nível 2 e os alunos estão raciocinando no primeiro nível, a compreensão dos conteúdos e a aprendizagem estarão comprometidas, pois o avanço é sequencial, como dito nas propriedades. Para que haja compreensão, é preciso ter o material didático e o ensino com características e linguagem combinando com o nível atingido pelos alunos da turma.

Segundo o resumo das pesquisas sobre a Teoria de van Hiele feito por Nasser (1993), constatou-se que os níveis podem ser flutuantes, ou seja, enquanto em determinado conteúdo o estudante está raciocinando no nível 1, em outro pode estar usando pensamento do nível 2. Portanto, os níveis são sequenciais, porém, não são discretos.

Além disso, Nasser (1992) verificou que o progresso de nível de fato independe da idade ou da maturidade, mas da instrução adequada. Sendo assim, existe uma dependência em relação às estratégias de ensino.

À medida que se desenvolve o pensamento geométrico, novos conceitos e novas palavras vão ganhando significado. Assim, provocando a expansão do vocabulário, o aluno progride de maneira gradual para os níveis subsequentes. Cada nível possui uma linguagem própria que depende dos objetos de pensamentos utilizados.

Da mesma forma, o nível de um curso de geometria deve estar de acordo com o nível da maior parte dos estudantes do curso, do contrário, essa discrepância de níveis pode ocasionar dificuldades na aprendizagem dos alunos.

Por esse motivo, deve-se realizar um teste diagnóstico antes de iniciar um determinado curso de geometria, para diminuir o ruído na comunicação, tanto em relação à linguagem, quanto ao nível e assim, elaborar atividades com estratégias de ensino adequadas.

2.2 - Aprendizagem Significativa e as Sequências didáticas

O objetivo principal desta pesquisa é investigar meios de proporcionar aos alunos uma aprendizagem significativa dos conceitos geométricos apresentados no material didático adotado pelo sistema de ensino a que pertence a turma.

Para isso, buscamos referenciais sobre "aprendizagem significativa" e as "sequências didáticas", que foram aplicadas com o objetivo de proporcionar aos alunos oportunidades de fazer experiências práticas, testar conjecturas e compreender os resultados apresentados laconicamente no material didático vivenciado.

A aprendizagem significativa foi tema das pesquisas desenvolvidas por Ausubel, segundo o qual, "o fator mais importante que influencia a aprendizagem é o que o aprendiz já sabe. Descubra isso e ensine-o adequadamente" (AUSUBEL, 1968, prefácio).

Segundo Ausubel, para que a aprendizagem seja significativa é necessário que o conteúdo faça algum sentido para o aluno e, nesse processo, a informação deverá interagir e ancorar-se nos conceitos relevantes já existentes na estrutura cognitiva na mente do aluno. Novas ideias e informações são aprendidas e retidas na medida em que existem pontos de ancoragem. A aprendizagem significativa ocorre quando uma nova informação se ancora em conceitos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva de quem aprende. É importante observar que a aprendizagem implica em modificações na estrutura cognitiva e não apenas em acréscimos (NASSER,1992).

À medida que a aprendizagem significativa ocorre, conceitos são desenvolvidos, elaborados e diferenciados em decorrência de sucessivas interações. Dependendo da experiência do indivíduo, alguns pontos de ancoragem podem ser mais desenvolvidos que outros. Esse fenômeno dá origem à diferenciação progressiva do conceito. Depois, ocorre a reconciliação integrativa, caracterizada pela exploração de relações entre ideias, identificação de diferenças e similaridades importantes e a consequente eliminação de inconsistências reais ou aparentes.

Com o objetivo de levar os alunos a uma aprendizagem significativa, será usada nesta pesquisa uma sequência didática para acompanhar o ensino-aprendizagem de geometria da turma investigada. Para isso, encontramos em Zabala (1998) os pressupostos teóricos das sequências didáticas, que constituem uma forma eficaz de encadear as atividades de modo lógico, para se alcançar os objetivos de uma unidade didática. Para esse pesquisador, as sequências didáticas são um “conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos" (ZABALA, 1998, p. 18).

Além disso, as sequências didáticas reúnem toda complexidade da prática. Nelas estão incutidas as três fases de intervenção reflexiva: planejamento, avaliação e reflexão (ZABALA, 1998).

De fato, toda prática docente deve ser reflexiva; o constante planejamento e a avaliação dos processos educacionais são inseparáveis da prática. Ademais, a intervenção pedagógica, que é a própria aula, deve levar em conta as intenções, previsões, expectativas e a avaliação dos resultados. Por isso, de acordo com Zabala (1998), a análise da intervenção pedagógica precisa compreender a realidade da aula, onde estão interligados o planejamento, a aplicação e a avaliação.

Para realizar o planejamento é importante que seja feito um levantamento; ou seja, uma diagnose a respeito do que os alunos já conhecem. Como afirma Ausubel, eles já trazem muitos conhecimentos para a sala de aula e, portanto, os professores devem organizar atividades para as crianças desenvolverem esses conhecimentos.

A sequência didática, dependendo da forma da sua organização é muito importante na prática educativa. Sequências de atividades podem provocar nos estudantes indagações, discussões, atitudes e ações que deverão ser mediadas pelo professor. Como isso, tanto o docente como o estudante adquirem novos conhecimentos (FRANÇA, 2019).

Nesse sentido, pode-se destacar, segundo Zabala (1998), que a chave de todo conhecimento são as relações entre professores, alunos e conteúdos de aprendizagem e que vão se estabelecendo ao longo da sequência didática. “Deste modo, as atividades, e as sequências que formam, terão um ou outro efeito educativo em função das características específicas das relações que possibilitam” (ZABALA, 1998, p.89).

Zabala adverte também sobre a diversidade que é própria da natureza humana, pois cada aprendiz ao se aproximar do objeto de estudo irá utilizar “[...] sua experiência e os instrumentos que lhe permitam construir uma interpretação pessoal e subjetiva do que é tratado” (ZABALA, 1998, p.90).

Nesse sentido, cada aprendiz constrói sua aprendizagem, estimulado por seus pares. Esse processo está intrinsecamente ligado ao interesse, disponibilidade, conhecimentos prévios e experiência. Assim, a partir das concepções de Zabala (1998), a sequência didática estruturada poderá ser um caminho metodológico para alcançar a aprendizagem significativa de uma unidade didática.

2.3– Diferentes tipos e níveis de compreensão de Skemp

Skemp (1971) desenvolveu uma teoria sobre a aquisição de conceitos matemáticos. Em seu livro: The Psychology of Learning Mathematics, ele estabelece que "compreender um conceito significa assimilá-lo a algum esquema apropriado" (SKEMP, 1971, p.46). Skemp afirma ainda que

> (a) Conceitos de ordem superior àqueles que o indivíduo já possui não podem ser comunicados a ele por meio de uma definição, mas pela observação de um conjunto adequado de exemplos;
> (b) Como na Matemática esses exemplos são, invariavelmente, quase todos outros conceitos, primeiro deve-se assegurar que estes já estejam formados na mente dos aprendizes. (SKEMP, 1971, p. 32)

Essas afirmativas estão de acordo com os pressupostos desta pesquisa. Não basta apresentar os conceitos geométricos aos alunos por meio de definições e resultados prontos, como consta no material didático. É preciso ajudar os alunos a construir os novos conceitos, para que sejam assimilados aos esquemas já adquiridos.

Alguns anos depois, Skemp (1979) distinguiu três tipos de compreensão: instrumental, relacional e lógica. A aprendizagem instrumental ocorre quando o estudante é capaz de aplicar uma regra decorada na resolução de um problema, sem saber explicar por que essa regra funciona. Por outro lado, a aprendizagem relacional se evidencia pela habilidade de deduzir procedimentos ou regras específicos, a partir de resultados matemáticos mais gerais. Já a compreensão lógica se caracteriza pela capacidade de demonstrar conjecturas a partir de uma cadeia de premissas conhecidas ou resultados matemáticos estabelecidos, como axiomas e teoremas.

De acordo com essas definições, observa-se que o tipo de ensino adotado na escola investigada, seguindo a aplicação do material didático, pode propiciar no máximo uma aprendizagem instrumental. A sequência didática desenvolvida nesta pesquisa pretende proporcionar a aprendizagem relacional dos alunos da amostra nos tópicos de geometria abordados, que é o tipo de aprendizagem adequado à Educação Básica.

Claramente, a geometria dedutiva pressupõe compreensão lógica, enquanto a compreensão relacional é desejada na Educação Básica, quando o estudante é capaz de relacionar as formas com suas propriedades, pelo menos no segundo nível de van Hiele.

Uma tentativa de relacionar as categorias de aprendizagem de Skemp com os níveis de aprendizagem de van Hiele foi feita por Lovett (1983). Uma adaptação dessa relação para a nossa pesquisa é apresentada na figura a seguir.

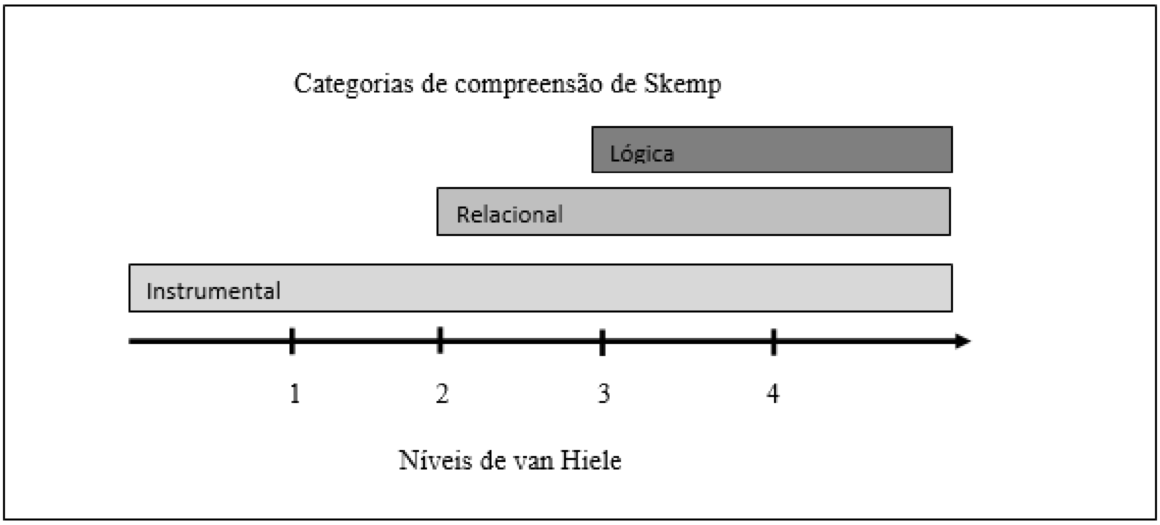


Figura 1: Relação entre as teorias de Skemp e van Hiele.
Fonte: Adaptado de Lovett (1983)

Essa relação indica caminhos para buscar a resposta à pergunta da nossa pesquisa. Para investigar se os alunos alcançaram uma aprendizagem significativa no tópico de triângulos, vamos observar seu progresso nos níveis de van Hiele, e se eles conseguem responder às questões de um pós-teste aplicado algum tempo após a experiência com a sequência didática demonstrando compreensão relacional. Ou seja, desejamos investigar se os alunos progridem da categoria de compreensão instrucional para relacional. Assim, as questões do pós-teste devem contemplar esse tipo de compreensão.

No capítulo 3 é apresentada a metodologia adotada nesta pesquisa, com a descrição da turma escolhida, assim como os processos usados para identificar os níveis de van Hiele dos alunos.

CAPÍTULO 3: METODOLOGIA

Neste capítulo apresentamos as principais características da investigação, assim como os sujeitos participantes, indicamos os objetivos que buscamos alcançar, e os procedimentos metodológicos adotados, buscando responder à pergunta da pesquisa.

3.1 – Descrição da pesquisa

Esta pesquisa pode ser classificada como qualitativa, por investigar processos de aprendizagem, ou seja, promove um estudo subjetivo. A proposta é observar se os estudantes do 8° Ano do ensino Fundamental desenvolvem uma aprendizagem significativa dos conceitos de triângulos a partir de uma sequência didática elaborada especificamente para este trabalho investigativo.

Segundo Alves (1991), as pesquisas qualitativas perpassam três etapas que podem ser distinguidas por: (1) período exploratório, (2) investigação focalizada e (3) análise final e elaboração do relatório. Sendo assim, vamos evidenciar cada uma dessas etapas neste trabalho.

O **período exploratório** iniciou-se com a observação do contexto, dos estudantes e verificamos que era necessário investigar uma melhor maneira de intervir no ensino. Nessa etapa, ficou decidido que a pesquisa seria desenvolvida em uma turma de 8° ano pela possibilidade de se fazer um trabalho paralelo ao ensino tradicional. Nessa escola a disciplina de matemática é dividida em duas "frentes", um professor ensina Álgebra, outro Geometria, e existe um terceiro professor de apoio, que dá suporte aos alunos como um reforço escolar de matemática, com tempos obrigatórios na grade curricular.

Portanto, como professora de apoio, eu não era a professora de Geometria ou Álgebra, e poderia aplicar a pesquisa sem a necessidade de trabalhar seguindo o material didático à risca e sem prejudicar o planejamento escolar. Dessa forma, a cada conteúdo administrado pelo professor de Geometria da turma, foi planejado que, em seguida, seria aplicada uma atividade da Sequência Didática, provocando os estudantes a refletir e repensar o conteúdo já abordado pelo professor.

A segunda etapa foi a **Investigação Focalizada**. Após a escolha da turma e a decisão de optar pela abordagem de uma sequência didática, iniciamos a aplicação do pré-teste. Este consistia em 3 folhas, cada uma de acordo com os três primeiros níveis de van Hiele. À medida que o estudante terminava a primeira folha, em seguida era entregue a segunda, e sucessivamente a terceira. Foi considerado em nível 1 o estudante que obteve 60% de acerto na folha 1, ou seja, acertou 3 das 5 questões. Para ser considerado nível 2, precisava obter acerto maior ou igual a 60% nas folhas 1 e 2. Similarmente, seriam considerados no nível 3 os alunos que obtivessem acerto igual ou superior a 60%, nas folhas 1, 2 e 3.

Para consolidarmos os resultados do pré-teste, adaptamos uma questão aberta, ou seja, uma tarefa que deveria ser respondida de forma discursiva, possibilitando diferentes respostas corretas, não seguindo necessariamente um gabarito ou uma única solução. Aliando os resultados, seria possível verificar o ponto de partida para a pesquisa, ou seja, a partir da identificação do nível de van Hiele predominante da turma, seria possível construir uma sequência didática que considerasse os conhecimentos prévios dos estudantes que participavam da pesquisa a fim de ampliar esses conhecimentos.

A sequência didática foi elaborada de modo a acompanhar o conteúdo do material escolar adotado, com atividades mais significativas, usando material concreto e induzindo o aluno a compreender e assimilar os resultados que tinham sido apresentados prontos. Devido ao curto tempo disponível para a pesquisa, a sequência didática foi planejada para seguir os seguintes tópicos: Triângulos (classificação e condição de existência); Lei angular de Tales; Teorema do ângulo externo; Cevianas (bissetriz, altura e mediana) e Congruência de triângulos.

A sequência era composta de 6 atividades, algumas se desdobrando em mais de uma parte, como no estudo das cevianas e dos casos de congruência. As atividades da sequência didática foram aplicadas em aulas semanais, pela pesquisadora, que era professora de apoio, num espaço de dois meses, paralelamente ao desenvolvimento do conteúdo pelo professor da turma, que seguia o material didático.

Na terceira etapa, que é **a análise final e a elaboração do relatório**, realizamos o pós-teste em 2 turmas, a primeira foi a turma experimental, na qual realizamos o pré-teste, a questão aberta e a sequência didática. A segunda turma, de controle, não teve nenhum contato com as atividades da pesquisa e, dessa forma, seus resultados poderiam ser comparados com a turma experimental, para assim, sabermos se a sequência didática colaborou de maneira diferenciada para a aprendizagem dos alunos. Além disso, o pós-teste da turma experimental se mostrou proveitoso para contrastar com o pré-teste e verificar o progresso de cada um dos alunos.

Por esse motivo, a análise final será feita em duas etapas, a primeira será a confrontação dos resultados das duas turmas e a segunda, será a confrontação dos resultados de cada aluno com ele mesmo. Essas dimensões da análise nos permitirão ter uma visão mais ampla dos resultados, uma vez que são observados coletivamente e individualmente.

O pós-teste seguiu o mesmo modelo do pré-teste com 3 folhas, cada folha de acordo com um nível de van Hiele abrangendo todo o conteúdo abordado na sequência didática e seguindo os mesmos critérios de avaliação. Para facilitar a organização de todos esses dados foram construídas tabelas, com os nomes fictícios dos alunos e os resultados alcançados em cada etapa.

Como não foi possível que todos os alunos realizassem todas as etapas, pois como já dito, a tarefas foram realizadas em dias distintos, foram considerados na amostra final apenas os estudantes que realizaram o pré-teste, a questão aberta e o pós-teste, o que totalizou 31 alunos.

3.2. Descrição da turma: os atores envolvidos.

A turma escolhida para o estudo era grande, com 40 alunos, que dividiam espaço em uma sala relativamente pequena, com corredores estreitos entre as carteiras. A turma era bastante falante, pois a maioria de seus integrantes já estudava na rede anteriormente e se conheciam há pelo menos dois anos, ou seja, desde o 6° ano, com exceção de uns 3 alunos novos na turma.

Alguns alunos são bastante dedicados e já começaram a decidir caminhos futuros, entre a universidade e os concursos militares, mesmo que não necessitassem fazer essa escolha nesse momento. Contudo, essa escolha delimita os grupos de amizades na turma.

A escola faz parte de um sistema de ensino com perfil de colégio e curso, no qual o material didático é de uso obrigatório e este deve ser seguido integralmente. Atividades além do livro podem ser trabalhadas, mas, dificilmente sobra tempo para realizá-las, pois o cronograma preenche todo o calendário escolar.

O material didático contém a parte de Geometria separada da algébrica, mas não exclusivamente. Ou seja, o conteúdo geométrico se apropria do algébrico e vice-versa, para favorecer o entendimento dos conteúdos matemáticos. É um material bem-apresentado com algumas propostas de atividades (não-obrigatórias). Contudo, pouco se trabalha as construções geométricas, as propriedades, a comparação, a argumentação e a generalização de padrões observáveis. O uso do material didático é obrigatório para os alunos e professores, todos os exercícios devem ser feitos e corrigidos em sala de aula.

Tem-se de maneira explícita as fórmulas e a memorização das características principais são incentivadas, não favorecendo a construção de conceitos matemáticos. Por todos esses motivos seria desafiador propor a esses alunos uma experiência além do livro didático, visando a uma aprendizagem significativa.

A turma iniciou o ano letivo com 41 alunos, contudo, tivemos algumas modificações, como a mudança de um aluno de turma nas primeiras semanas. Como a Sequência Didática foi aplicada em dias distintos, para cada atividade tivemos um quantitativo diferente de alunos. A tabela 1 apresenta o quantitativo de alunos que participou de cada etapa da pesquisa.

Tabela 1: Quantitativo de alunos em cada etapa da pesquisa.

Tarefa	Quantitativo de alunos
Pré – Teste	37
Questão Aberta	34
Atividade I	34
Atividade II	38
Atividade III	37
Atividade IV	35
Atividade V	35
Atividade VI	34
Pós -Teste	33

Para a análise dos resultados e comparação, focamos nos 31 alunos que realizaram o pré-teste, a questão aberta e o pós-teste, e participaram de praticamente toda a sequência didática, ou seja, foram os estudantes que participaram de toda a pesquisa.

3.3. Descrição da Coleta e Análise de dados preliminares.

A coleta de dados realizada focou na produção escrita dos estudantes, ou seja, foram recolhidas todas as folhas de atividades da Sequência Didática, assim como as folhas preenchidas do pré-teste e do pós-teste. Além disso, tínhamos as anotações do diário de campo elaborado ao alongo da aplicação das atividades da Sequência Didática e a tabela com todos os resultados.

3.3.1. Pré-teste de van Hiele

Para iniciar o processo de investigação, era necessário identificar os níveis de van Hiele atingidos pelos alunos da turma do 8° ano escolhida, de uma escola particular.

As atividades de Geometria a serem propostas para a turma deveriam ser elaboradas seguindo as características do nível em que a maioria dos alunos da turma estava raciocinando, de modo a unificar o patamar alcançado e promover a compreensão significativa dos resultados.

Os três primeiros testes de van Hiele (referentes aos níveis 1, 2 e 3) foram aplicados no mesmo dia. Cada teste só foi distribuído após os alunos terem terminado e entregue o anterior, para evitar que as respostas fossem influenciadas por consulta às questões anteriores.

O principal objetivo da aplicação dos pré-testes (em anexo) era verificar se os alunos sabiam identificar as figuras geométricas, descrever suas propriedades e perceber a inclusão de classes das figuras geométricas. Durante a aplicação dos testes os alunos perguntavam o que eram propriedades do quadrado e do retângulo, eles não assimilaram que eram características dessas figuras que as diferenciavam de outras. Ainda assim, a cada propriedade eles indagavam se o que estavam pensando servia para responder à pergunta. Como não receberam ajuda na resolução, eles ficaram bastante tentados a tirar dúvidas uns com os outros.

Quando alertados no início para que não fizessem consultas nem ao colega e nem ao material didático, foi nítida a expressão de confusão nas faces deles, só não se desesperaram porque foram informados que a tarefa não valeria ponto, era somente uma forma de conhecer um pouco melhor a turma. Assim, se tranquilizaram e fizeram da melhor maneira que podiam.

Ao analisarmos os resultados dos testes respondidos por 37 alunos (figura 1), percebemos que cerca de um quarto da turma não tinha alcançado nem o primeiro nível, 10 alunos (27%) estavam no nível 1, 11 alunos (30%) no nível 2, apenas um aluno alcançou o nível 3 e 6 alunos (16%) tiveram resultados discrepantes, no sentido de que não alcançaram o primeiro nível, mas conseguiram acertar pelo menos 3 questões do nível 2. Estes alunos demonstram ter lacunas na aprendizagem de Geometria, que devem ser cobertas com um ensino mais sistemático e significativo.

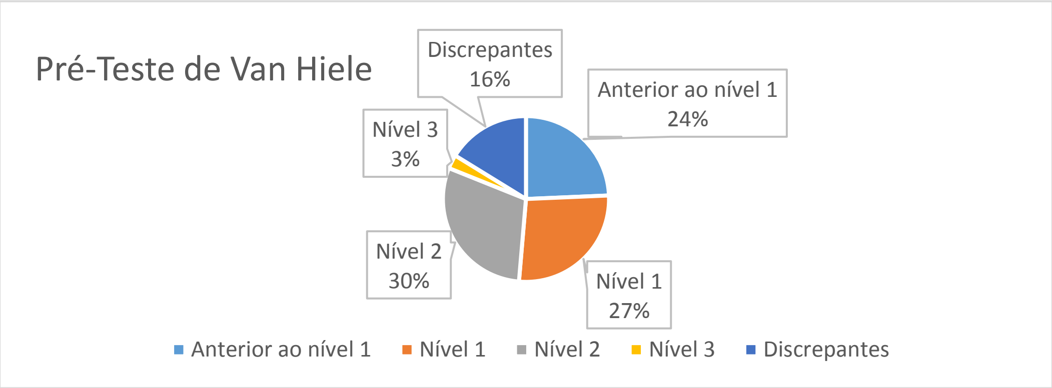


Figura 2: Níveis de van Hiele da turma.
Fonte: elaborada pela autora

Os alunos dessa turma estão em contato com a Geometria desde o 6° ano e ainda assim possuem diversas dificuldades para reconhecer e descrever figuras geométricas. Esse baixo rendimento pode ser explicado pelo tipo de abordagem adotado pelo material didático, apresentando os resultados, sem promover experiências para a construção do conhecimento. Portanto, torna-se necessário propor atividades que promovam a unificação dos níveis. Foi, então, aplicada uma nova atividade, discursiva. A seguir, é apresentada essa questão, assim como a análise das respostas, de acordo com os níveis dos alunos.

3.3.2. Respostas à questão aberta

A fim de consolidar os níveis de van Hiele alcançados pelos alunos, e de tentar entender as discrepâncias no perfil dos alunos que não seguiram a hierarquia dos níveis, foi aplicada a seguinte questão:

Você desenhou um retângulo. Seu colega desenhou uma figura de quatro lados que não é um retângulo. Nos espaços abaixo, desenhe como poderia ser a sua figura e a figura do seu colega:

SUA FIGURA:	FIGURA DO SEU COLEGA:

Justifique porquê:

Sua figura é um retângulo:	A figura do seu colega não é um retângulo:
______________________ ______________________	______________________ ______________________

Figura 3: Questão aberta aplicada na pesquisa.
Fonte: COSTA (2019).

Esta questão foi escolhida porque as respostas podem ser dadas no nível 1, se o aluno apenas distingue a figura de um retângulo de outras, no nível 2, se consegue explicitar as propriedades das figuras desenhadas e no nível 3, se reconhece que o quadrado não serve de exemplo para a figura do colega. Além disso, os alunos que não desenharam um retângulo, ou não identificaram a figura do colega, não alcançaram nem o nível 1. Dos 37 alunos que responderam aos testes de van Hiele, quatro faltaram e deixaram de responder à questão aberta.

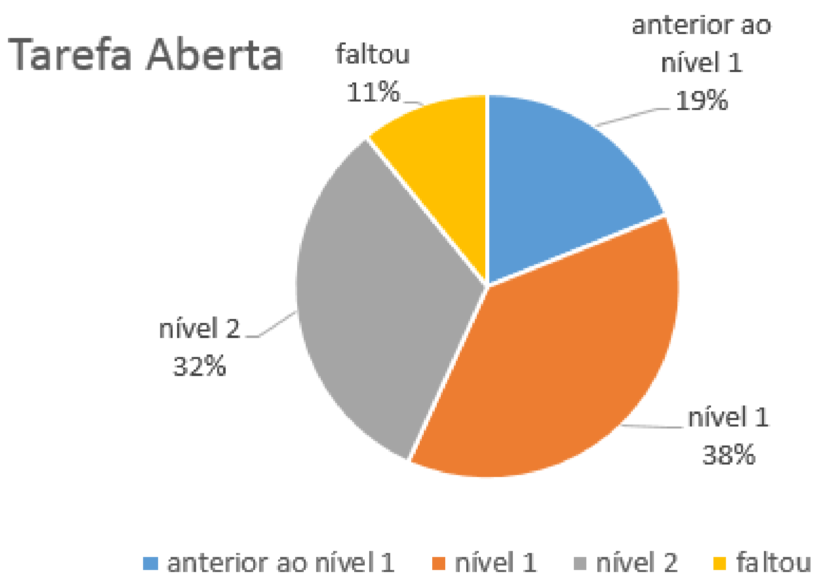
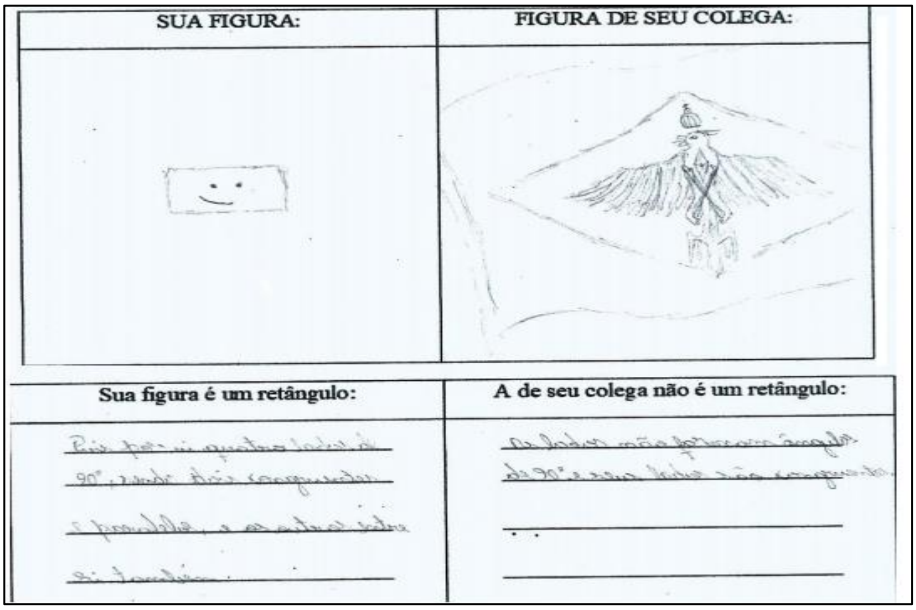


Figura 4: Níveis de respostas à questão aberta.
Fonte: a autora

A figura 4 mostra a distribuição das respostas de acordo com os níveis de raciocínio utilizados ao responder à questão aberta.

Analisando as respostas de cada aluno de acordo com o nível em que foi classificado, cerca de 70% da turma. Por outro lado, dez alunos responderam usando raciocínio superior ao do seu nível de pensamento geométrico.

A figura 5 mostra a resposta do aluno Jairo, a qual tem características de nível 1, mesmo nível em que foi classificado, embora tenha misturado os lados com ângulos na justificativa para a figura ser um retângulo. Este foi um dos poucos alunos que não desenhou um quadrado para representar uma figura que não é um retângulo. No entanto, não podemos afirmar que ele domina a inclusão de classes apenas por essa resposta.



"Pois possui quatro lados de 90°, sendo dois congruentes e paralelos e os outros entre si também".

"Os lados não formam ângulos de 90°, e seus lados são congruentes".

Figura 5: Respostas do aluno Jairo, no nível 2.
Fonte: a autora

Comparando as figuras 2 e 4, observa-se que a maioria das respostas foi dada no nível 1 ou no nível 2, mesmo perfil dos níveis alcançados pelos alunos da turma. No entanto, a porcentagem de respostas no nível 1 foi consideravelmente superior à de alunos classificados nesse nível de raciocínio. Isso se deve ao fato de três alunos que ainda não tinham alcançado esse nível e três que estavam sem nível por não obedecer à hierarquia dos níveis responderem mostrando características do nível 1. Assim, a porcentagem de alunos sem nível caiu de 16% para 5%. Esse foi o caso do aluno Mario, que respondeu à questão no nível 1, embora não tenha alcançado esse primeiro nível de acordo com os testes de van Hiele. As figuras desenhadas na sua resposta (figura 6) mostram claramente que ele reconhece o retângulo e o quadrado. No entanto, ele não domina as propriedades essenciais desses quadriláteros.

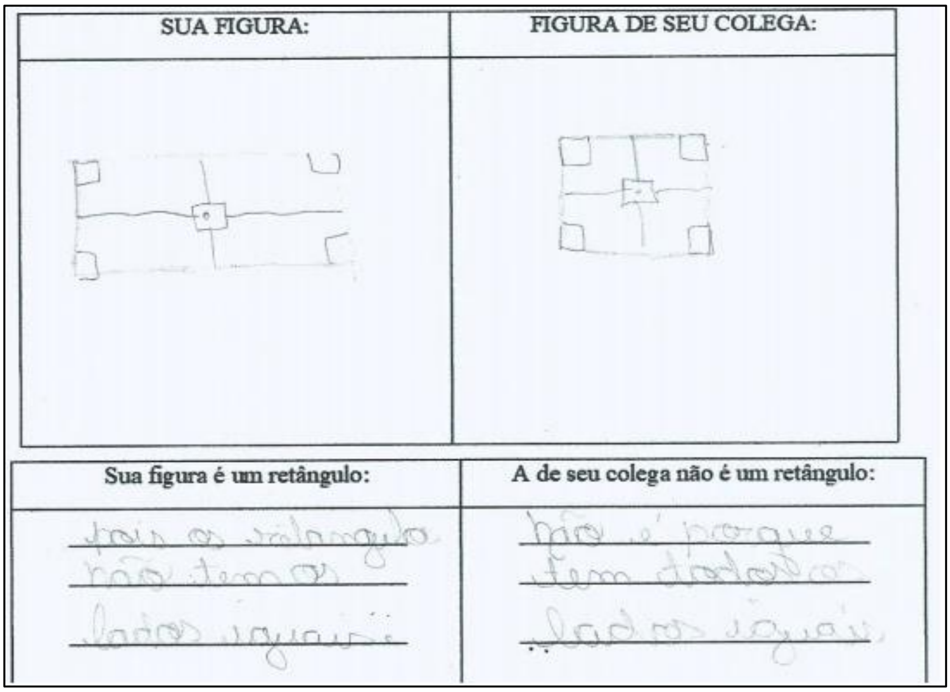


Figura 6: Respostas do aluno Mario, no nível 1.
Fonte: a autora

Dos 6 alunos que não seguiram a hierarquia dos níveis, e foram classificados como sem nível, apenas um manteve comportamento contraditório, com sua resposta à questão aberta não se enquadrando em nenhum nível.

A figura 7 mostra a resposta do aluno Pedro, que não teve nível de van Hiele identificado nos testes, mas respondeu à questão aberta no nível 2. Por ter desenhado um paralelogramo, quadrilátero que de fato não é um retângulo, há indícios de que pode estar em processo para alcançar o nível 3.

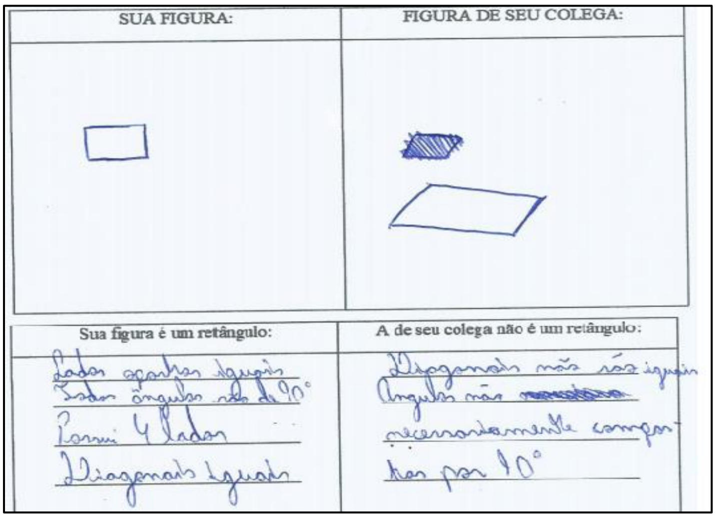


Figura 7: Respostas do aluno Pedro, no nível 2.
Fonte: a autora

Estes exemplos mostram três perfis distintos de estudantes, exemplificando bem a variedade de estágios de desenvolvimento geométrico dos alunos da turma.

Os resultados dos testes de van Hiele e das respostas à questão aberta mostram que a turma se dividia entre os dois primeiros níveis de van Hiele. Portanto, as atividades da sequência didática a ser desenvolvida para acompanhar os conteúdos de geometria do material didático deveriam se basear nesses níveis. Tais atividades deveriam promover o contato com materiais concretos para facilitar a compreensão e, ao mesmo tempo, incentivar o progresso para o terceiro nível.

CAPÍTULO 4: A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática foi construída a partir da ordem em que os conceitos e teoremas aparecem no livro didático. Tem como objetivo acompanhar o conteúdo do material didático propondo atividades mais significativas, usando material concreto e induzindo o aluno a compreender e assimilar os resultados que tinham sido apresentados prontos. Em concordância com o nosso planejamento, foi seguida a orientação de Teixeira e Jardim (2019), de que as atividades da sequência didática devem seguir o nível de van Hiele, atingido pela maioria da turma. Além disso, para promover uma aprendizagem significativa, as atividades da sequência didática deveriam requerer respostas no nível de compreensão relacional, de acordo com a teoria de Skemp, discutida no capítulo 2.

O quadro 2 a seguir mostra a ordem dos conteúdos apresentados no material didático adotado, que guiou a elaboração da sequência didática.

Quadro 2 – Conteúdos de geometria do material didático

Currículo de Geometria – 8ºano	
1. Ponto, Reta e Plano 2. Ângulos 3. Adição e Subtração de Ângulos 4. Multiplicação e Divisão de ângulos 5. Ângulos complementares, suplementares e Replementares 6. Ângulos nas paralelas: propriedades fundamentais **7. Triângulos (classificação e condição de existência)** **8. Lei angular de Tales** **9. Teorema do ângulo externo** **10. Cevianas (Bissetriz, altura e mediana)** **11. Congruência de triângulos**	12. Polígonos 13. Soma dos ângulos internos e externos de um polígono 14. Polígonos Regulares: Ângulo central, ângulo interno e ângulo externo 15. Diagonais de um polígono 16. Quadriláteros (elementos) 17. Quadriláteros: Paralelogramo 18. Quadriláteros: Trapézios 19. Quadriláteros: Base média e mediana de Euler 20. Circunferência e Círculo 21. Polígonos circunscritos 22. Posições Relativas entre duas circunferências 23. Ângulos na circunferência

Fonte: Elaborado pela autora, com base no material didático adotado pela escola.

De acordo com a época em que foi feita a intervenção didática, a pesquisa ficou restrita ao conteúdo de triângulos, destacado em negrito no quadro 2. Essa restrição é justificada pela imposição de seguir o calendário de provas, o que impossibilitaria acrescentar uma sequência didática muito longa. Esses cinco tópicos do material didático deram origem a uma sequência didática com 6 atividades, algumas desdobradas em 2 ou 3 partes.

A cada atividade da sequência didática, foi escrito um diário de campo descrevendo o desenvolvimento, as dificuldades encontradas e os objetivos alcançados. Além disso, foram recolhidas todas as tarefas com o objetivo de realizar uma posterior análise do desenvolvimento de cada aluno, que aparece no capítulo 5.

Tabela 2: Cronograma da aplicação da sequência didática.

Atividade	Data	Objetivo
Atividade I – Condição de Existência de triângulos	15/04/2019	Desenvolver nos alunos a capacidade de entender e aplicar a condição de existência de um triângulo.
Atividade II – Classificação de Triângulos	06/05/2019	Desenvolver a capacidade de classificar os triângulos quanto à medida dos lados e dos ângulos.
Atividade III – Teorema Angular de Tales	13/05/2019	Verificar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°.
Atividade IV – Teorema do Ângulo Externo	27/05/2019	Compreender o Teorema do Ângulo Externo.
Atividade V – Cevianas	03/06/2019	Identificar as alturas, medianas e bissetrizes internas dos triângulos, e perceber que as 3 cevianas se encontram em um único ponto.
Atividade VI – Congruência	17/06/2019	Identificar as características necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam congruentes.

Fonte: Elaborado pela autora.

Esses conteúdos abordados na sequência didática aparecem na BNCC (BRASIL, 2018, p. 303, 309, 315) em habilidades a partir do 6° Ano, em ordem distinta do material didático. A classificação de triângulos, abordada na atividade II, aparece na BNCC na habilidade "(EF06MA18) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos."

Os temas das atividades I e III aparecem no 7° Ano da BNCC, na habilidade "(EF07MA20) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.” Também no 7° Ano é abordado o tema da atividade IV na habilidade: “(EF07MA22) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, [...]”

Em relação às cevianas, abordadas na atividade V, a BNCC menciona apenas a bissetriz, tratada como lugar geométrico, juntamente com a mediatriz, no 8° Ano, na habilidade “(EF08MA14) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.”

Também no 8° Ano, uma aplicação da congruência de triângulos, tema da nossa atividade VI, aparece na habilidade: “(EF08MA12) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.”

A seguir serão descritas as atividades da sequência didática, com seus objetivos, expectativas, e algumas respostas obtidas.

ATIVIDADE I - CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA

Ficha de atividade com 5 tarefas.

Nome: ______________________________________ Turma: ____ Data: ___/___/_____

Atividade I – Condição de existência de um triângulo

Será possível construir triângulos com quaisquer medidas de lados? Siga as instruções e descubra:

1. Com os canudos em maos, meça-os com a regua e corte-os com as medidas: 8 cm, 5cm e 4 cm. Despois, tente montar um triângulo e registre-o aqui:
2. Agora corte-os com as medidas: 9 cm, 5 cm e 4 cm. Depois, tente montar um triângulo e registre-o aqui:
3. Agora corte-os com as medidas: 9cm, 5 cm e 3 cm. Despois, tente montar um triângulo e registre-o aqui:
4. Com as medidas dadas foi possivel montar um triangulo? Em quais exercicios voce conseguiu?
5. Como voce descreveria a condiçao para obter um triangulo?

Figura 8: Atividade 1

1.1. Objetivos da Atividade

O objetivo geral da atividade era desenvolver nos alunos a capacidade de entender e aplicar a condição de existência de um triângulo.

Os objetivos específicos são:

- Nos 3 primeiros itens da atividade os alunos deveriam medir, cortar os canudos e tentar formar triângulos com as medidas dadas e colar no papel como ficaram as suas figuras;

- No 4° item, deveriam verificar em quais dos itens anteriores eles conseguiram montar o triângulo;
- No 5° item, deveriam explicar o porquê de eles conseguirem montar o triângulo com algumas medidas e outras não.

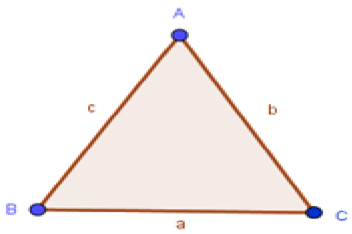
1.2. Desenvolvimento da Atividade

Nesse dia, todos os 40 alunos da turma estavam presentes, contudo, um grupo de 6 alunos pediram para serem dispensados da aula para pintar o quadro da disciplina de artes. Portanto, 34 alunos responderam esta atividade.

A atividade foi aplicada no último tempo de aula, foram distribuídas as fichas e algumas réguas, canudos e tesouras. Nos primeiros 3 itens da atividade, os alunos tiveram dificuldade de manusear a régua para medir os canudos e cortá-los no tamanho certo. Alguns, percebendo que não conseguiriam montar o triângulo com as medidas dadas, cortaram em outros tamanhos. Com o objetivo de deixar registradas as construções, optamos por pedir que os alunos colassem os triângulos formados em folhas de papel, em vez de usar linha. No entanto, essa estratégia não funcionou muito bem, já que a maioria deles soltou.

Sendo assim, decidimos prestar mais atenção nas questões 4 e 5. Como a professora de matemática 2 (Geometria) da turma já havia explicado a condição de existência como sendo cada lado menor que a soma dos outros dois lados e maior que o módulo da diferença dos outros dois lados, as respostas dos alunos foram bastante influenciadas por essa forma de verificar a condição de existência (Figura 9). Mas, com certeza, não entendiam o que estavam falando.

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA

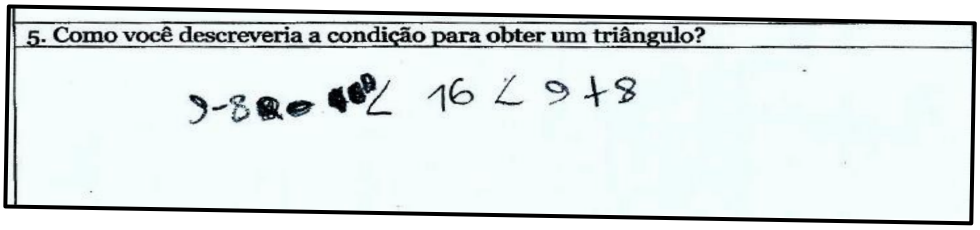


$$|b-c| < a < |b+c|$$
$$|a-c| < b < |a+c|$$
$$|a-b| < c < |a+b|$$

Figura 9: Condições de existência de um triângulo.

Fonte: Elaborado da autora

Não verificamos aluno que tenha percebido que bastava o maior lado do triângulo ser menor que a soma dos outros dois. Mesmo assim, ficou claro para nós que a maioria dos alunos, mesmo influenciados pela explicação da outra professora, não souberam argumentar com suas próprias palavras a condição de existência, tamanha a complexidade desse método utilizado. A maioria dos alunos aplicou de maneira equivocada o método dos módulos, como pode-se observar na figura 10:


5. Como você descreveria a condição para obter um triângulo?

9-8 < 16 < 9+8

Figura 10: Exemplo de resposta equivocada usando o método de módulos.

Podemos observar que o aluno tenta aplicar a fórmula, porém não sabe que medidas está comparando, além disso, os alunos acreditam que basta testar um lado com os outros para determinar se o triângulo existe ou não. De acordo com a fórmula, deveriam fazer cada um dos lados com a soma e a subtração dos outros dois lados.

Dessa forma, sentimos a necessidade de fazer um fechamento dessa tarefa com os alunos antes de aplicar a próxima tarefa, para que eles pudessem refletir sobre métodos diferentes de conceber o mesmo conteúdo. É importante os alunos perceberem que na matemática a resposta pode até ser única, mas o caminho para se chegar a ela não.

Nossa principal intenção com essas atividades era proporcionar experiências a esses estudantes que os levem além do material didático, que desenvolva a capacidade de argumentar matematicamente utilizando diferentes ferramentas.

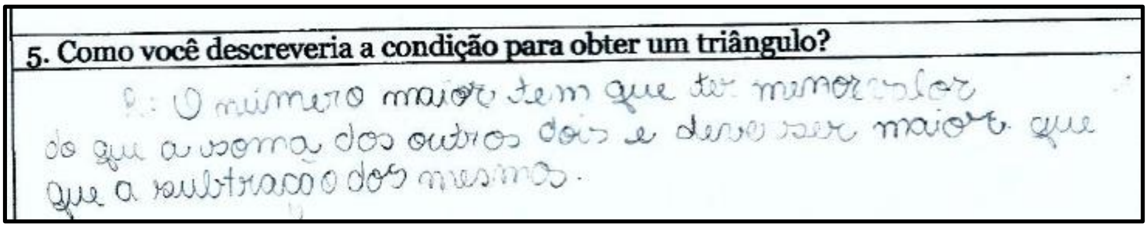
Ao fim da aula os alunos que não fizeram a atividade ficaram me pedindo para fazê-la e entregar no outro dia, porém disse-lhes, que haveria outras oportunidades e atividades para eles fazerem. O interesse em fazer a tarefa vem do fato dos alunos da turma realmente terem se empenhado a responder as questões, houve momentos de silêncio enquanto faziam a tarefa.

1.3. O que esperávamos como resultado:

Que todos os 34 alunos conseguissem escrever algum tipo de justificativa.

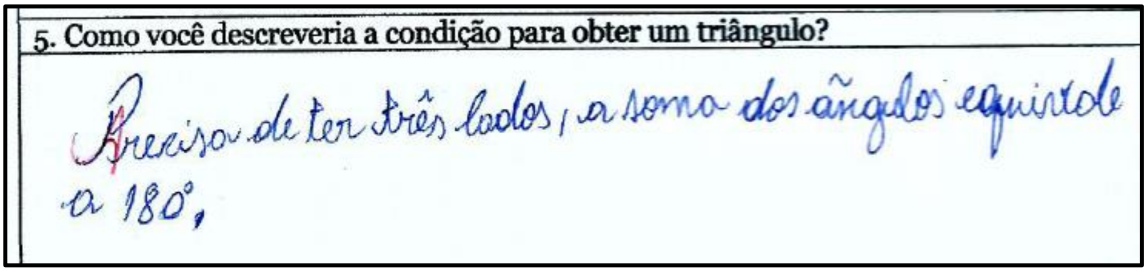
1.4. O resultado obtido:

Dos 34 alunos que fizeram a tarefa, 11 conseguiram escrever algum tipo de justificativa, como nos exemplos a seguir.


5. Como você descreveria a condição para obter um triângulo?

R: O número maior tem que ter menor valor do que a soma dos outros dois e deve ser maior que que a subtração dos mesmos.

Figura 11: Exemplo no qual o aluno conseguiu esboçar alguma resposta.

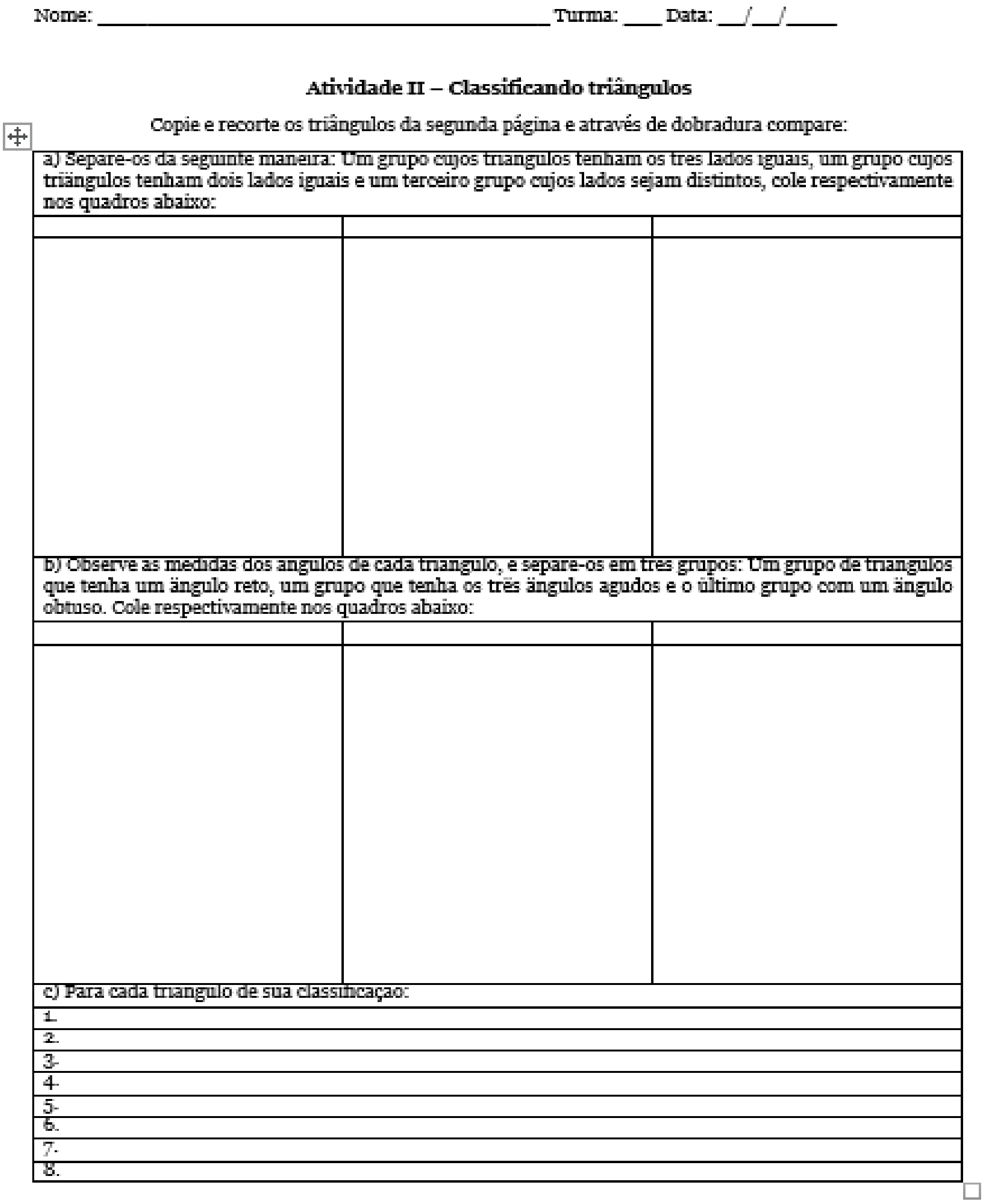

5. Como você descreveria a condição para obter um triângulo?

Precisa de ter três lados, a soma dos ângulos equivale a 180°,

Figura12: Exemplo de resposta que não relaciona a medida dos lados do triângulo.

Atividade II - CLASSIFICAÇÃO DE TRIÂNGULOS

Ficha de atividades com 3 tarefas.



Nome: ______________________ Turma: ____ Data: __/__/____

Atividade II – Classificando triângulos

Copie e recorte os triângulos da segunda página e através de dobradura compare:

a) Separe-os da seguinte maneira: Um grupo cujos triangulos tenham os tres lados iguais, um grupo cujos triângulos tenham dois lados iguais e um terceiro grupo cujos lados sejam distintos, cole respectivamente nos quadros abaixo:		
b) Observe as medidas dos angulos de cada triangulo, e separe-os em três grupos: Um grupo de triangulos que tenha um ângulo reto, um grupo que tenha os três ângulos agudos e o último grupo com um ângulo obtuso. Cole respectivamente nos quadros abaixo:		
c) Para cada triangulo de sua classificaçao:		
1.		
2.		
3-		
4-		
5-		
6.		
7.		
8.		

Figura 13: Atividade II

2.1. Objetivos da Atividade

O objetivo geral da atividade era desenvolver a capacidade de classificar os triângulos quanto à medida dos lados e dos ângulos.

Os objetivos específicos eram levar os estudantes a:

- comparar as medidas dos lados do triângulo e verificar se eram iguais ou diferentes;
- verificar os critérios de classificação dos triângulos em relação aos ângulos e percebessem a necessidade de medi-los com o transferidor.
- identificar que todos os triângulos podem ser classificados de duas maneiras, uma em relação aos lados e outra em relação aos ângulos.

2.2. Desenvolvimento da Atividade

Nessa atividade, entreguei aos 38 alunos presentes uma ficha e um envelope com todos os triângulos recortados, para que assim ganhássemos tempo na aula (os alunos não precisariam recortar os triângulos). Os triângulos estavam numerados de 1 a 8, e havia dois triângulos de cada número. Sendo assim, no envelope havia 16 triângulos.

Uma sequência de triângulos 1 a 8 deveria ser usada para a tarefa (a) e a outra sequência para a tarefa (b). Nesse início tive que explicar para toda a turma, mas também fui até a mesa tirar as dúvidas individualmente. Pedi também que conferissem se não estava faltando nenhum triângulo.

Depois de arrumados os triângulos em seus devidos lugares, solicitei que colassem na folha para que não perdessem os triângulos e eles deveriam responder a tarefa (c), que seria nomear os triângulos de acordo com a classificação dada.

No rótulo das colunas não foram colocados os nomes das classificações de propósito para verificar se eles conseguiriam lembrar. Nesse momento eles se ajudaram pois nem todos lembravam os nomes. Depois de identificar os nomes, ficou fácil fazer a tarefa (c).

Alguns alunos escreveram a classificação do ângulo, por exemplo, triângulo agudo ou triângulo obtuso, não sabendo o nome específico da classificação do triângulo, o que revela uma característica de primeiro nível de Van Hiele.

Figura 14: Exemplo de resposta da atividade II.

2.3: O que esperávamos como resultado:

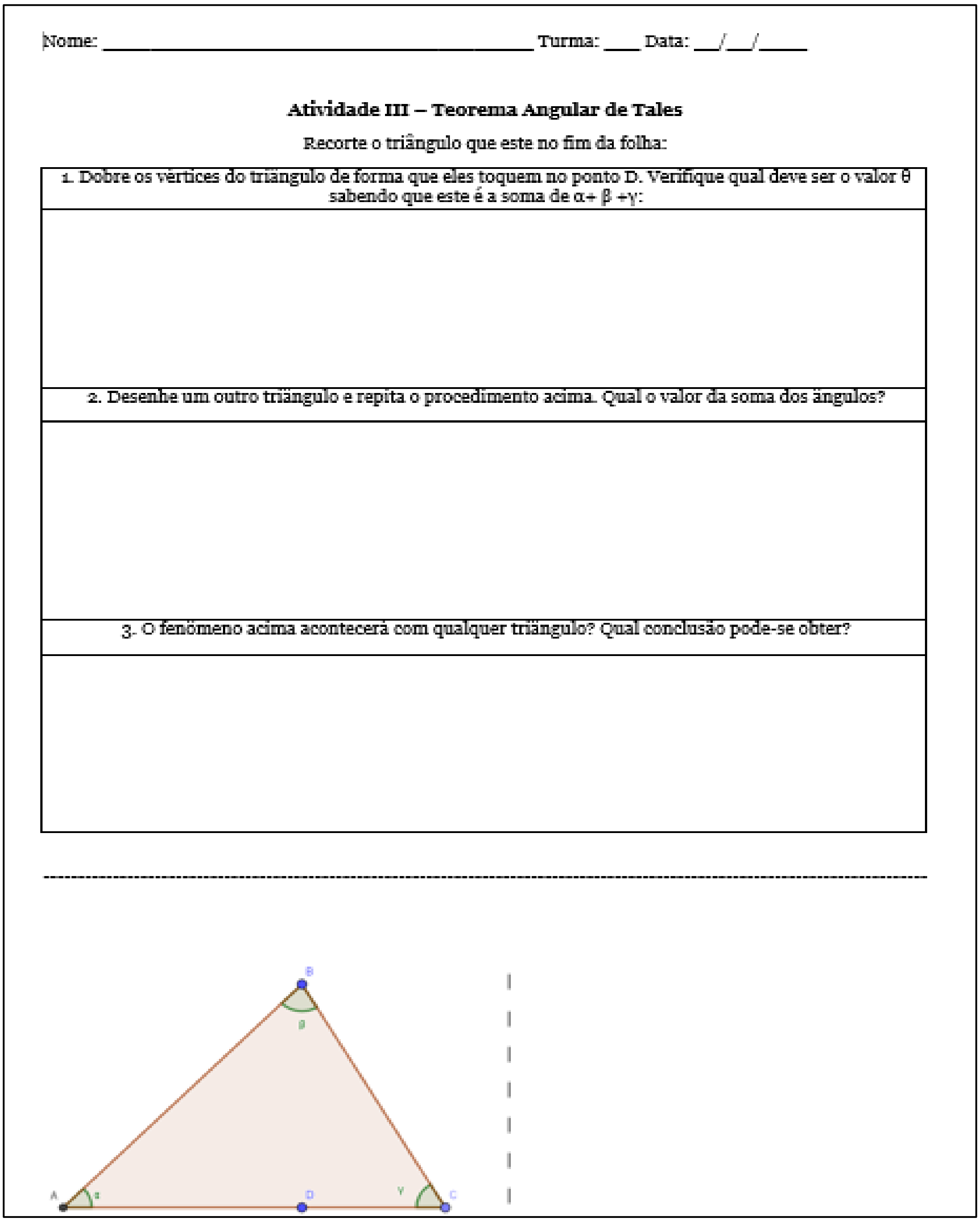
Que todos os 38 alunos classificassem corretamente os triângulos.

2.4: O resultado obtido:

30 alunos conseguiram rascunhar a classificação em relação aos lados e aos ângulos (mesmo com o nome do ângulo). Esse resultado indica comportamento do 2º nível de van Hiele, o que é positivo, já que a maioria dos alunos não tinha alcançado esse nível.

ATIVIDADE III - Teorema Angular de Tales

Ficha de atividades com 3 tarefas.



Nome: ______________________________ Turma: ____ Data: ___/___/_____

Atividade III – Teorema Angular de Tales

Recorte o triângulo que este no fim da folha:

1. Dobre os vértices do triângulo de forma que eles toquem no ponto D. Verifique qual deve ser o valor θ sabendo que este é a soma de α+ β +γ:
2. Desenhe um outro triângulo e repita o procedimento acima. Qual o valor da soma dos ângulos?
3. O fenômeno acima acontecerá com qualquer triângulo? Qual conclusão pode-se obter?

Figura 15: Atividade III

3.1: Objetivos da atividade:

O objetivo geral da atividade seria que os alunos verificassem que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo será 180°.

Os objetivos específicos eram levar os alunos a:

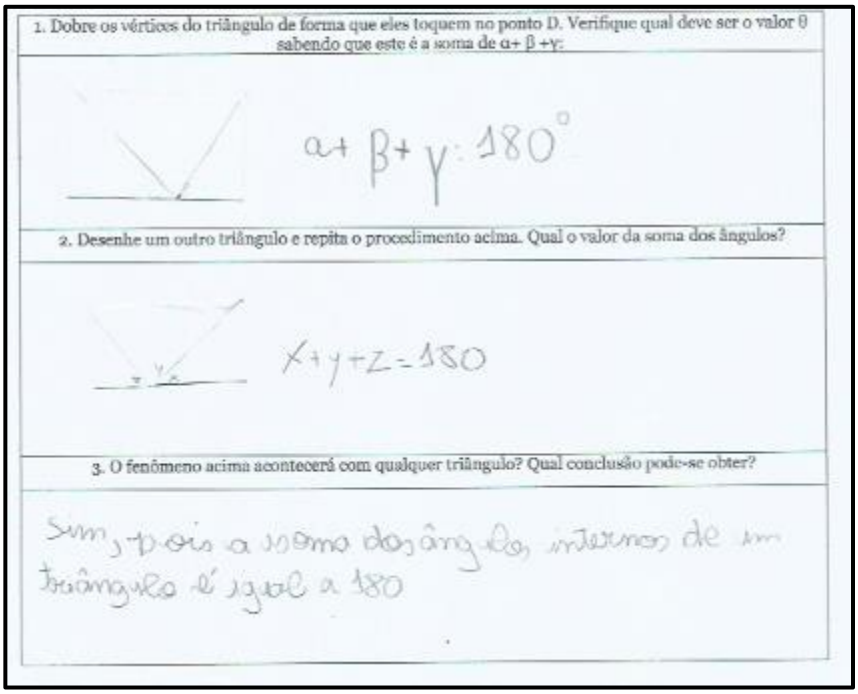
- perceber que para dobrar o triângulo, a primeira dobra deveria ser feita de maneira que a linha de dobra fosse paralela à base.
- refletir que se o triângulo dado fosse diferente, a propriedade continuaria valendo. Ou seja, que não importa quantos triângulos diferentes toda a turma possa fazer, sempre será possível repetir o procedimento e o resultado será o mesmo;

3.2: Desenvolvimento da atividade:

Após receberem a ficha já começaram a recortar o triângulo e tentaram dobrar de maneira que o encontro dos vértices ficasse em cima do ponto D.

Alguns alunos cortavam o triângulo com rebarba e por isso, quando dobravam o triângulo não conseguiam ver o ângulo formado. Os alunos foram instruídos a fazerem um corte rente para acertarem as dobras. Daí, todos conseguiram fazer essa etapa e colaram seu triângulo dobrado na folha.

Com a sobra da folha que não jogaram fora poderiam desenhar o triângulo que quisessem e verificar se ocorreria a mesma coisa.


1. Dobre os vértices do triângulo de forma que eles toquem no ponto D. Verifique qual deve ser o valor θ sabendo que este é a soma de α+ β +γ:

$\alpha + \beta + \gamma : 180^\circ$

2. Desenhe um outro triângulo e repita o procedimento acima. Qual o valor da soma dos ângulos?

$x + y + z = 180$

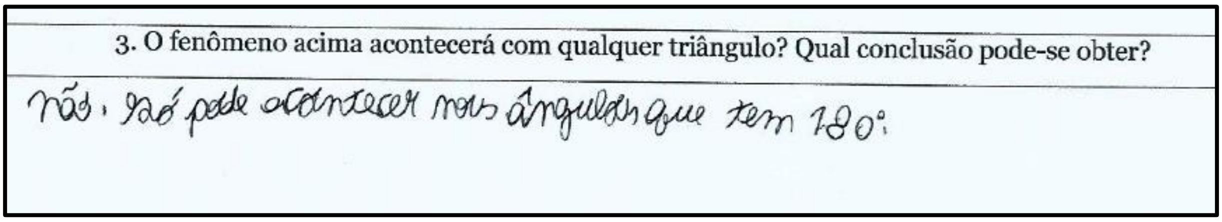
3. O fenômeno acima acontecerá com qualquer triângulo? Qual conclusão pode-se obter?

Sim, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180

Figura16: Exemplo de reposta atividade III

Nesse momento os alunos tiveram mais dificuldades, pois insistiam em construir o triângulo sem régua e, portanto, ficavam muito tortos, o que causava problemas quando dobravam o triângulo. Foi sugerido diversas vezes que utilizassem a régua (eles relutaram).

Outros alunos continuaram conjecturando que existirá algum triângulo que não terá a soma dos ângulos internos iguais a 180°.


3. O fenômeno acima acontecerá com qualquer triângulo? Qual conclusão pode-se obter?

Não. Só pode acontecer nos ângulos que tem 180°.

Figura 17: Exemplo de resposta incorreta da atividade III.

3.3: O que esperávamos como resultado:

Que a maioria dos 37 alunos conseguissem enunciar o Teorema Angular de Tales.

3.4: O resultado obtido:

De fato,33 alunos concluíram que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180° e 4 alunos concluíram que alguns triângulos possuem essa propriedade, mas pode ser que exista triângulos para os quais essa propriedade não se aplica.

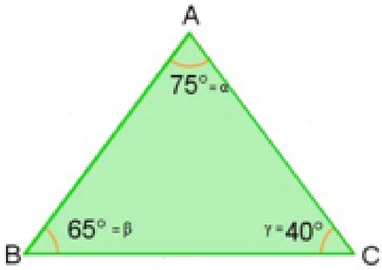
ATIVIDADE IV - Teorema do Ângulo Externo

Ficha de atividades com 5 tarefas.

Nome: ____ Turma: ___ Data:__/__/____

Atividade IV– Teorema do Ângulo Externo

Dado o triângulo abaixo:



1. Desenhe e Calcule as medidas dos ângulos externos do triângulo ABC, que são os suplementares de α, β, γ:
2. Somando as medidas dos três ângulos externos, qual o valor encontrado?
3. Desenhe um outro triângulo qualquer e repita os passos 1 e 2. Calcule a soma dos seus ângulos externos. O que podemos concluir? Você sabe explicar porque isso acontece?
4. Calcule $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ e $\beta+\gamma$. Compare com os ângulos externos de α, β, γ. O que podemos observar?
5. Como $\alpha+\beta+\gamma = 180º$, qual a relação de cada ângulo externo com os ângulos internos?

Figura 18: Atividade IV

4.1: Objetivos da atividade:

O objetivo geral era que os alunos compreendessem o Teorema do Ângulo Externo.

Os objetivos específicos eram calcular os ângulos externos, somar os ângulos internos dois a dois e depois comparar com os externos. Além disso, os alunos poderiam concluir que a soma dos ângulos externos é sempre 360°e que cada ângulo interno é suplementar do externo adjacente ou vice versa.

4.2: Desenvolvimento da atividade:

Após entregar as folhas com a atividade, foi explicitado aos alunos que deveriam seguir a sequência de tarefas 1 e 2 de acordo com o triângulo dado, mas na tarefa 3, deveriam responder de acordo com o triângulo que quisessem. Desse modo, deveriam perceber que o resultado vale para qualquer triângulo que testarem.

Novamente, os alunos relutaram em utilizar régua e transferidor para desenharem os triângulos e medirem os ângulos. Contudo, fizeram esboços mais compreensíveis, pois entenderam que o desenho auxilia na argumentação e conclusão, como ocorreu nas atividades anteriores.

Os alunos fizeram todas as contas solicitadas, pois apenas os desenhos não seriam suficientes para chegar à relação entre os ângulos internos e externos.

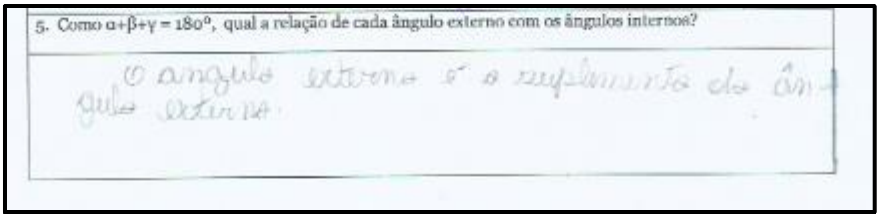
Notamos que nessa atividade o volume da escrita aumentou bastante, todos queriam descobrir alguma coisa no decorrer das tarefas. Sendo assim, apenas um aluno não registrou qualquer conclusão no trabalho embora tenha feito todo o desenvolvimento.

4.3: O que esperávamos como resultado:

Que os 35 alunos fizessem algum tipo de relação entre os ângulos internos e externos.

4.4: O resultado obtido:

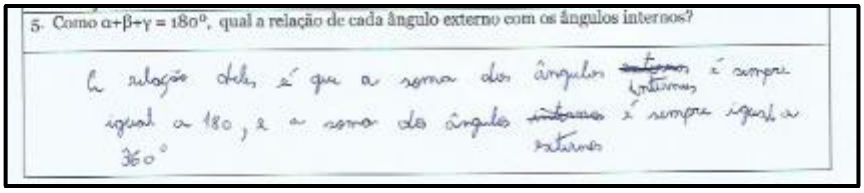
Dos 35 alunos, apenas um não escreveu justificativa. Onze alunos concluíram que o ângulo interno é suplementar ao externo, como o exemplo mostrado na figura 19.


5. Como $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, qual a relação de cada ângulo externo com os ângulos internos?

o angulo externo é o suplemento do ân- gulo externo

Figura 19: Exemplo de resposta para a atividade IV.

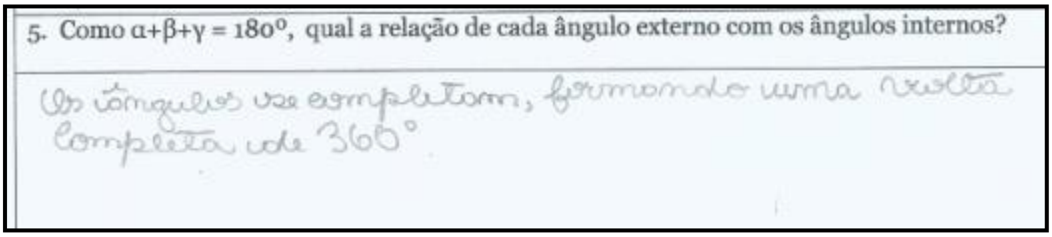
Dois alunos concluíram que a soma dos ângulos internos é 180° e a soma dos ângulos externos é 360°, mas não explicitaram a relação entre os ângulos internos e externos. Uma dessas respostas aparece na figura 20.


5. Como α+β+γ = 180°, qual a relação de cada ângulo externo com os ângulos internos?

A relação dele, é que a soma dos ângulos ~~externos~~ internos é sempre igual a 180, e a soma dos ângulos ~~internos~~ externos é sempre igual a 360°

Figura 20: Exemplo de resposta incorreta da atividade IV.

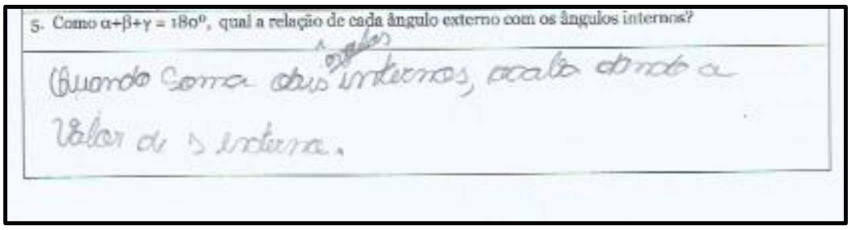
Três alunos concluíram somente que a soma dos ângulos externos é 360°, como o exemplo da figura 21.


5. Como α+β+γ = 180°, qual a relação de cada ângulo externo com os ângulos internos?

Os ângulos vão completam, formando uma volta completa de 360°

Figura 21: Exemplo de resposta da soma dos ângulos externos.

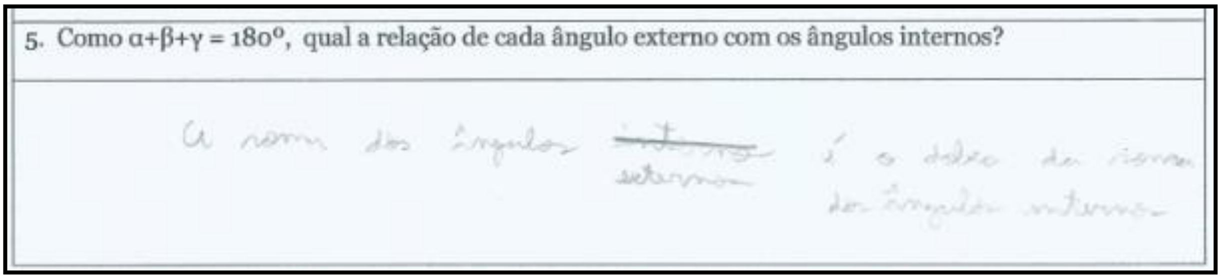
Quatorze alunos concluíram que a soma de dois ângulos internos é igual um ângulo externo, mesmo sem identificar que o ângulo externo é o não adjacente aos dois internos. Um exemplo desse tipo de resposta é mostrado na figura 22.


5. Como α+β+γ = 180°, qual a relação de cada ângulo externo com os ângulos internos?

Quando soma dois ângulos internos, acaba dando o valor do s externo.

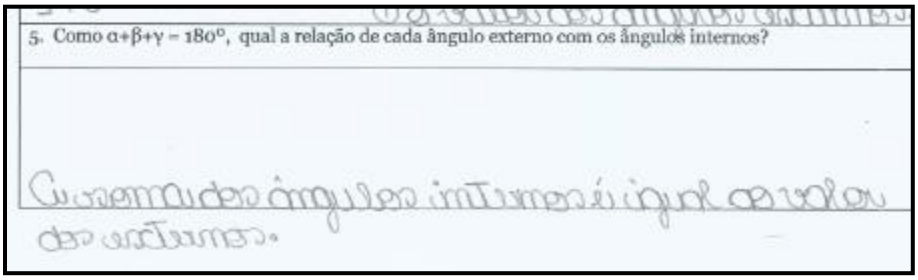
Figura 22: Exemplo de resposta quase completa.

Quatro alunos relacionaram a soma dos ângulos internos com a soma dos ângulos externos. Dois alunos fizeram relação de maneira correta, ou seja, A soma dos ângulos internos é metade da soma dos ângulos externos (figura 23) e outros disseram que as somas são iguais (figura24).


5. Como α+β+γ = 180°, qual a relação de cada ângulo externo com os ângulos internos?

a soma dos ângulos ~~internos~~ externos é o dobro da soma dos ângulos internos

Figura 23: Exemplo de resposta que relaciona a soma dos ângulos corretamente.

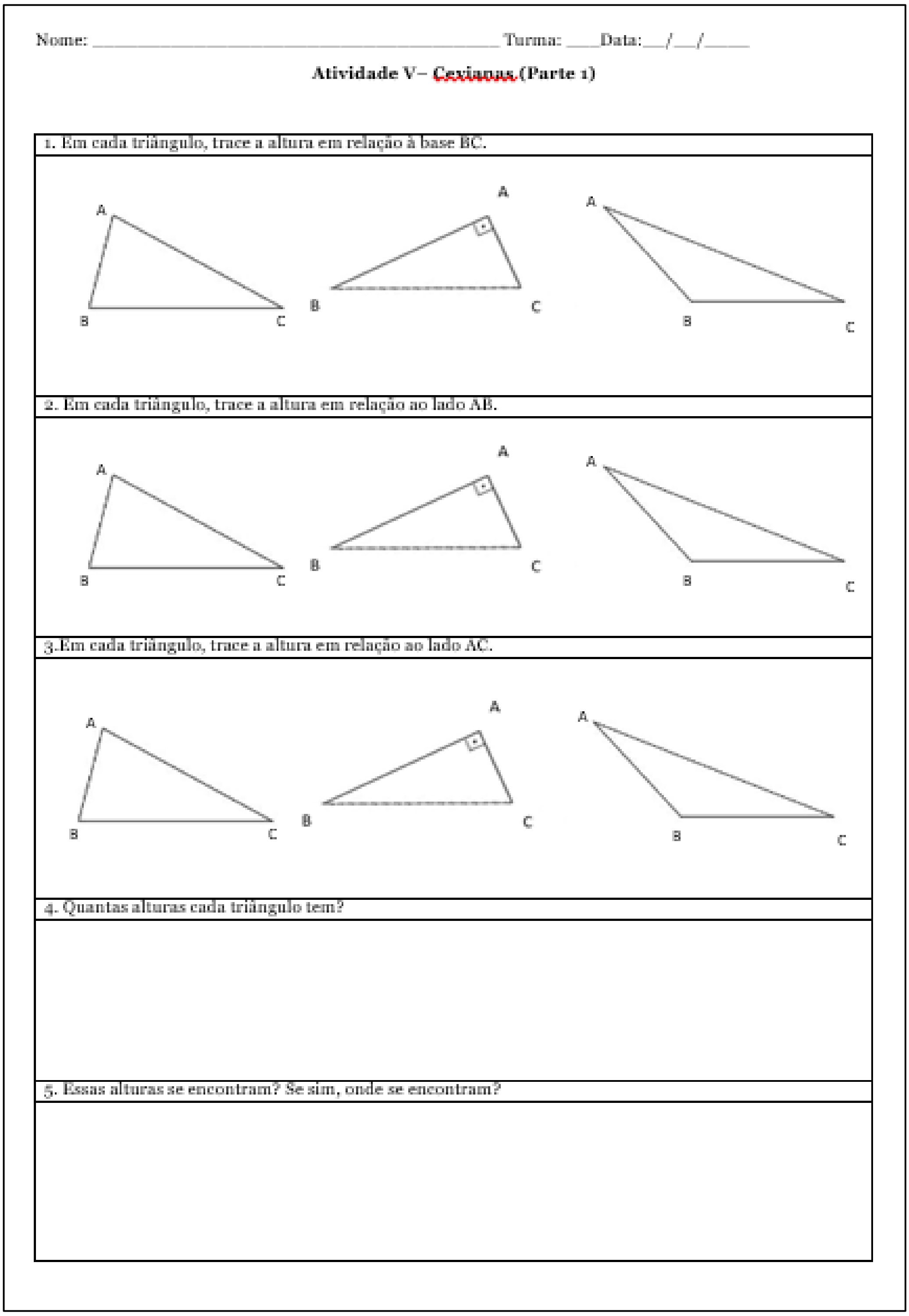

5. Como α+β+γ = 180°, qual a relação de cada ângulo externo com os ângulos internos?

a soma dos ângulos internos é igual ao valor dos externos.

Figura 24: Exemplo de resposta que relaciona a soma errado.

ATIVIDADE V - CEVIANAS

Na atividade V, as tarefas foram separadas em 3 fichas, uma para cada ceviana, com 5 tarefas cada. As fichas são mostradas nas figuras 23, 24 e 25 a seguir.



Nome: ______________________________ Turma: ____Data:__/__/_____

Atividade V– Cevianas (Parte 1)

1. Em cada triângulo, trace a altura em relação à base BC.

2. Em cada triângulo, trace a altura em relação ao lado AB.

3.Em cada triângulo, trace a altura em relação ao lado AC.

4. Quantas alturas cada triângulo tem?

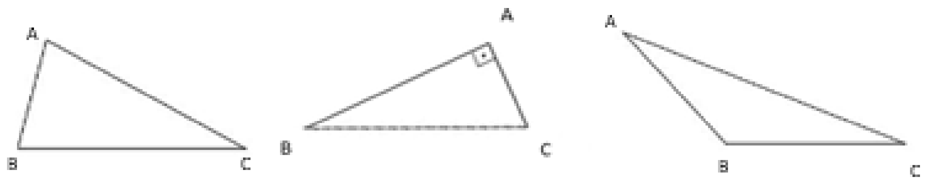
5. Essas alturas se encontram? Se sim, onde se encontram?

Figura 25: Parte 1 da atividade V: alturas

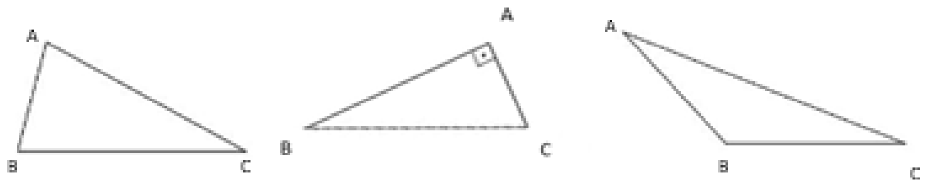
Nome: ____ Turma: ____Data:__/__/_____

Atividade V – Cevianas (Parte 2)

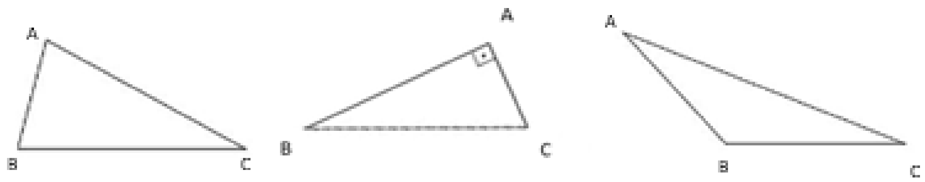
1. Trace um segmento de reta do vértice A ao ponto médio da base de cada triângulo.



2. Trace um segmento de reta do vértice B ao ponto médio do lado AC doe cada triângulo.



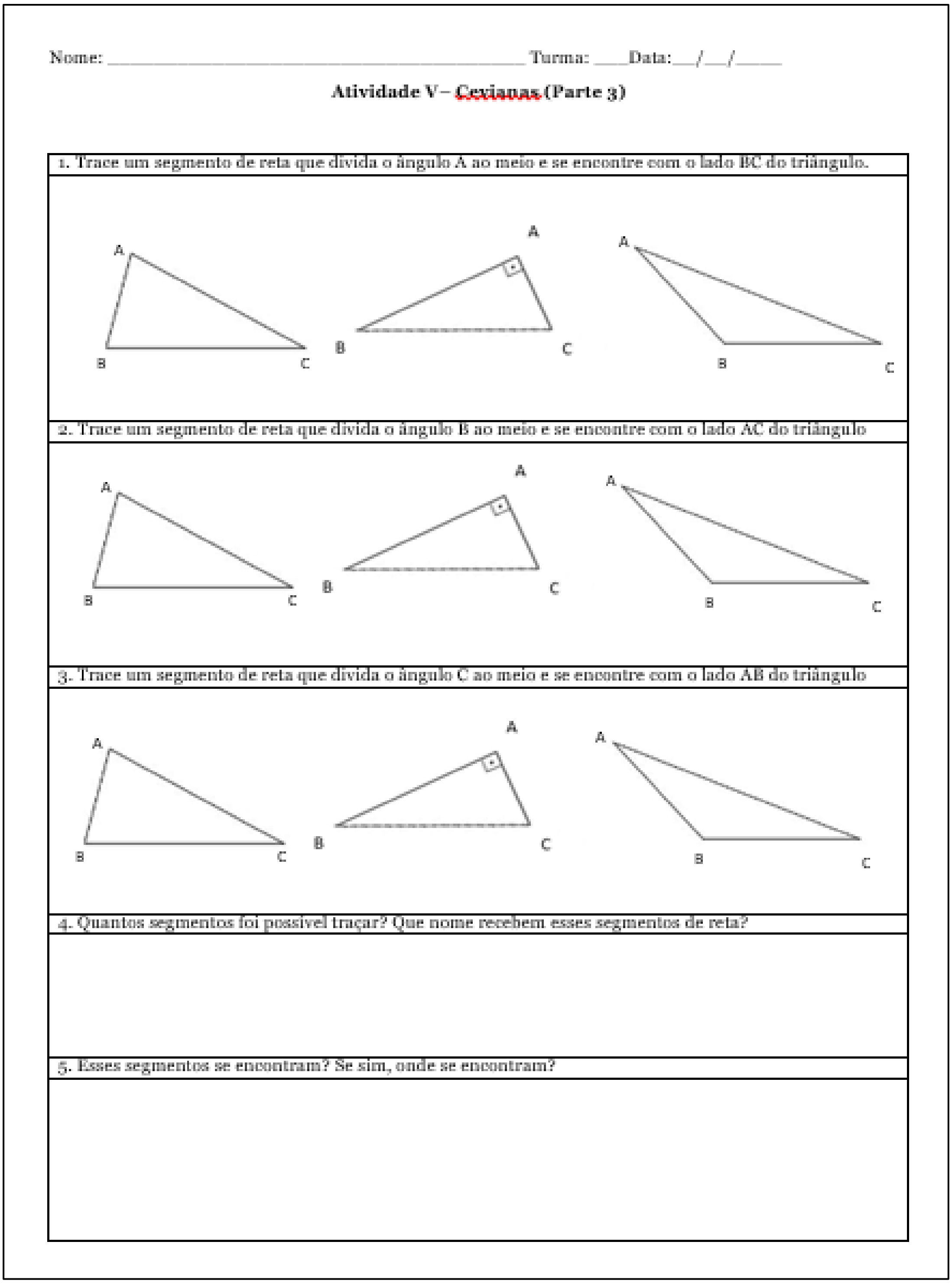
3. Trace um segmento de reta do vértice C ao ponto médio do lado AB do triângulo.



4. Quantos segmentos conseguiu traçar em cada triângulo? Que nome recebem esses segmentos de reta?

5. Esses segmentos se encontram? Se sim, onde se encontram?

Figura 26: Parte 2 da Atividade V: medianas.



Nome: ____ Turma: ____Data:__/__/_____

Atividade V – Cevianas (Parte 3)

1. Trace um segmento de reta que divida o ângulo A ao meio e se encontre com o lado BC do triângulo.
2. Trace um segmento de reta que divida o ângulo B ao meio e se encontre com o lado AC do triângulo
3. Trace um segmento de reta que divida o ângulo C ao meio e se encontre com o lado AB do triângulo
4. Quantos segmentos foi possível traçar? Que nome recebem esses segmentos de reta?
5. Esses segmentos se encontram? Se sim, onde se encontram?

Figura 27: Parte 3 da Atividade V: bissetrizes internas.

5.1: Objetivos da atividade:

O objetivo geral era que os alunos identificassem as alturas, medianas e bissetrizes internas dos triângulos, e percebessem que as 3 cevianas se encontram em um único ponto.

Os objetivos específicos:

- Perceber que cada triângulo tem 3 alturas, 3 medianas e 3 bissetrizes internas;

- Traçar as cevianas de acordo com as diferentes bases e encontrar o ponto de encontro entre elas, em cada caso.

5.2: Desenvolvimento da atividade:

Na primeira folha os alunos tiveram muita dúvida de como desenhar a altura relativa a um lado do triângulo, mesmo explicando para toda a turma, fiz um “atendimento” individual, pois eles não perceberam que poderiam girar a folha para melhor enxergar a base e consequentemente sua altura. Poderíamos ter feito triângulos em um círculo para que se desprendessem do estereótipo do triângulo.

No triângulo retângulo a altura era um dos lados e mesmo assim, os alunos tentaram fazer outra linha para ser a altura relativa à base. Reafirmou-se mais uma vez a importância do uso da régua, para que as linhas fossem marcadas perfeitamente. Essa primeira folha demandou um tempo de aula e, portanto, as demais ficaram para concluirmos na semana seguinte.

Após fazerem a primeira folha, compreenderam melhor como deveriam fazer as demais tarefas, mesmo as cevianas sendo diferentes.

Contudo, quando foram marcar a bissetriz, poucos alunos experimentaram medir a metade do ângulo com o transferidor.

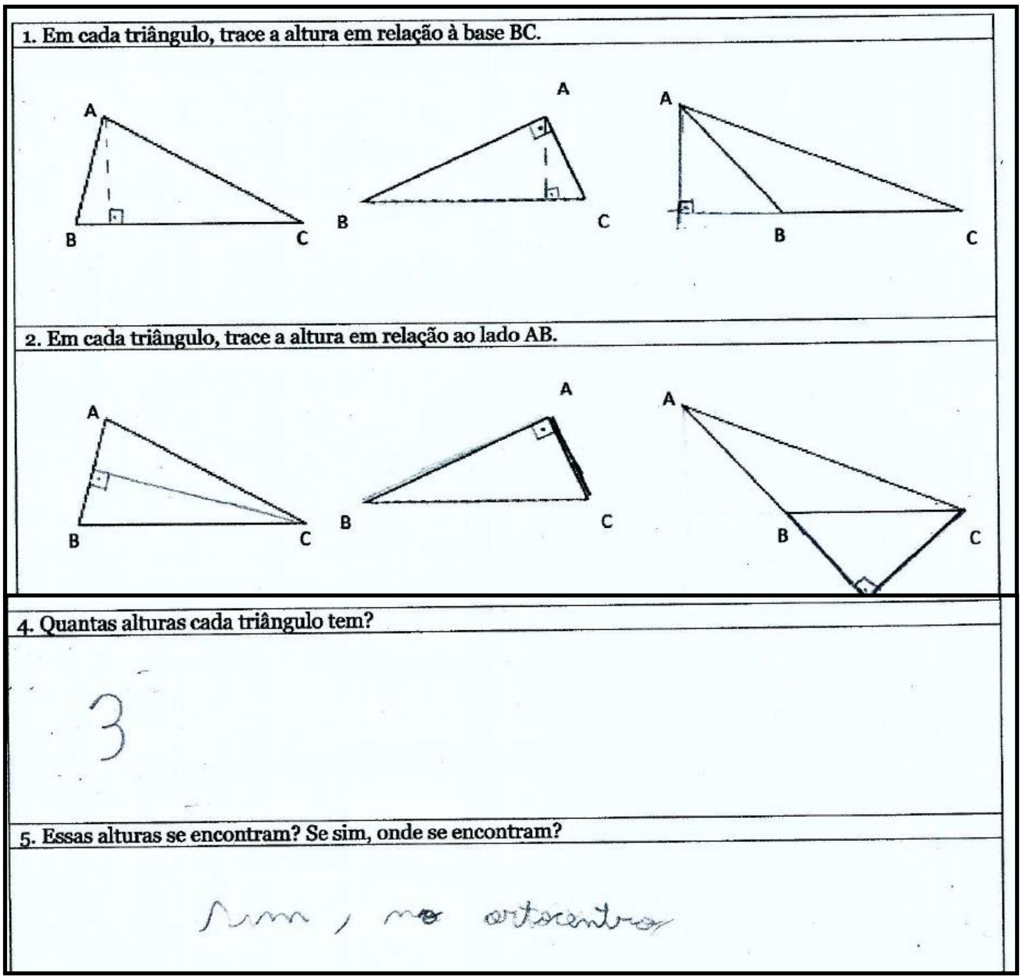


Figura 28: Exemplo de resposta de aluno que “girou a folha”.

A figura acima mostra a resposta de um aluno que tentou girar a folha para conseguir “enxergar” a linha ortogonal à base dada. Como as figuras são estáticas, os alunos queriam traçar uma linha qualquer do vértice sem a preocupação de estar ou não formando 90° com a base. Com as demais cevianas não foi diferente, para determinar a mediana resistiram em medir o meio do lado oposto e com a bissetriz não quiseram usar o transferidor.

5.3: O que esperávamos como resultado:

Que os 35 alunos conseguissem traçar algumas cevianas e encontrar o ponto de encontro entre elas.

5.4: O resultado obtido:

16 alunos conseguiram esboçar algum tipo de justificativa, mesmo com alguns traços incorretos.

ATIVIDADE VI - CONGRUÊNCIA

A atividade VI foi adaptada do livro "Geometria segundo a Teoria de Van Hiele, do Projeto Fundão (NASSER & SANT'ANNA, 1997). As tarefas da Atividade VI foram separadas em 2 fichas, com 7 tarefas no total.

Nome: ________________________________ Turma: ___ Data:__/__/____

Atividade VI– Congruência de triângulos (Parte 1)

1. Com a linha e os tres canudos construa quantos triangulos queira. Registre-os.
1.1. Esses triangulos sao todos distintos?
2. Construa um triangulo ABC com angulos medindo 40°, 60° e 80°. Use o transferidor.
2.1. Compare o seu triangulo com o de seus colegas. Os triangulos sao congruentes?
3. Construa um triangulo com um lado de 6 cm e um angulo de 60°. Registre-o.
3.1. E possivel montar outros triangulos distintos com as mesmas medidas?

Figura 29: Parte 1 da Atividade VI.

Nome: ____ Turma: ___ Data:__/__/____

Atividade VI– Congruência de triângulos (Parte 2)

4. Construa um triangulo com um lado 5 cm e outro lado 4cm. Registre-o e Compare-o com o triangulo de seu colega.
4.1. Dados os dois lados e possivel garantir que os triangulos sejam iguais?
5. Construa um triangulo ABC com lados 5 cm e 4 cm, de maneira que o angulo entre eles seja 50°. Registre e compare com os triângulos de seus colegas.
5.1. E possivel construir um triangulo que nao seja congruente aos triangulos construidos?
6. Construa um triangulo que tenha dois angulos de 40° e 80° e o lado entre eles tenha 5 cm. Registre-o e compare com os triângulos de seus colegas.
6.1. E possivel construir um triangulo que nao seja congruente ao triangulo construido?
7. Com as informaçoes obtidas nas atividades complete a tabela.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
N° de lados dados						
N° de angulos dados						
Ordem em que os elementos conhecidos aparecem						
O triangulo esta bem determinado?						

Figura 30: Parte 2 da Atividade VI.

6.1. Objetivos da atividade

O objetivo geral era que os alunos percebem as características necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam congruentes.

Os objetivos específicos eram:

- Usar régua e transferidor para construir triângulos de acordo com as informações dadas.

- Concluir os 3 casos de congruência de triângulos.

6.2: Desenvolvimento da atividade:

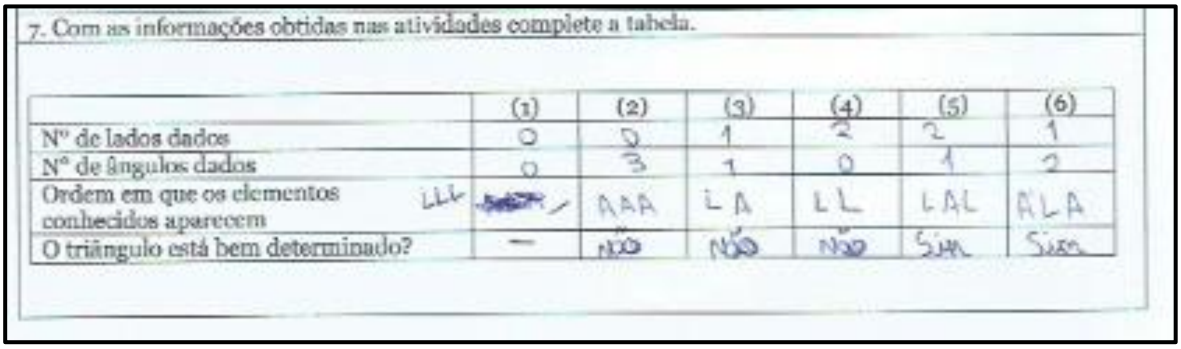
A tarefa consistia em verificar se as informações dadas eram suficientes para garantir que os triângulos fossem congruentes. Para auxiliar na investigação foram distribuídos canudos, transferidores e réguas. E essa foi a maior dificuldade da tarefa, pois eles não queriam respeitar as medidas dadas, principalmente dos ângulos. Acreditavam que fazendo "de olho" era o suficiente. Contudo, diante do questionamento se as medidas estavam corretas, somente então, solicitavam ajuda para fazê-las. Era necessário pegar nas mãos dos alunos para ensiná-los. Mesmo fazendo as tarefas anteriores com o auxílio do transferidor ainda demostravam resistência em utilizá-lo. A habilidade de uso e manuseio do transferidor se adquire usando, nos primeiros contatos alguns alunos não sabiam nem para que funcionava. À medida em que continuam a ter contato com o instrumento vão compreendendo a ferramenta e entendendo como usar e sua importância.

6.3: O que esperávamos como resultado:

Que os 34 alunos concluíssem os casos de congruência entre dois triângulos

6.4: O resultado obtido:

Vinte e sete alunos rascunharam algum tipo de justificativa.


7. Com as informações obtidas nas atividades complete a tabela.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Nº de lados dados	0	0	1	2	2	1
Nº de ângulos dados	0	3	1	0	1	2
Ordem em que os elementos conhecidos aparecem	LLL	AAA	LA	LL	LAL	ALA
O triângulo está bem determinado?	—	Não	Não	Não	Sim	Sim

Figura 31: Exemplo de resposta de aluno que tentou responder.

CAPÍTULO 5: APLICAÇÃO DO PÓS-TESTE E ANÁLISE DOS REULTADOS

Para responder à pergunta da pesquisa, foi elaborado um pós-teste envolvendo as propriedades de triângulo trabalhadas nas atividades da sequência didática. Em contraste com o enfoque do material instrucional adotado, as questões procuram investigar se o aluno conseguiu construir os conceitos e se houve retenção dessa aprendizagem.

Neste capítulo estão descritas duas análises. Uma delas trata da comparação do desenvolvimento que cada aluno da turma experimental apresentou durante a pesquisa. A outra investiga o desempenho de duas turmas no pós-teste. Esta compara os efeitos da sequência didática em uma turma que participou de todas as etapas da pesquisa com outra turma que teve apenas contato com o material didático adotado e a aula tradicional. Na segunda análise buscamos verificar quanto cada aluno da amostra experimental avançou desde a fase inicial até a fase final.

Dessa forma, buscamos ter um panorama geral e específico do impacto de uma Sequência Didática que explora o raciocínio e o uso de material concreto na aprendizagem significativa de alunos do 8º ano, envolvendo o conceito de triângulos e seus elementos.

5.1 – Elaboração e aplicação do pós-teste

O pós-teste foi elaborado de acordo com a abordagem da sequência didática, envolvendo as propriedades de triângulo trabalhadas nas atividades.

No dia 26/08/2019foi aplicado o pós-teste em duas turmas do 8° ano. Uma delas era a turma experimental (turma 813), que realizou as atividades da sequência didática. A outra turma (turma 811) respondeu ao pós-teste a título de comparação, já que as provas da escola são unificadas.

O teste levou em consideração todos os conteúdos abordados nas atividades aplicadas, divididas em 3 blocos. As atividades do 1° bloco podem ser resolvidas usando raciocínio do nível 1 de Van Hiele, o 2° bloco requer raciocínio do segundo nível 2, enquanto os itens do terceiro bloco exigem raciocínio do terceiro nível. Dessa forma, o aluno que acertasse 3 das 5 questões de um bloco teria aquele nível de van Hiele consolidado. Os três blocos do pós-teste estão no anexo 2.

5.2 – Análise dos resultados das turmas experimental e de controle

5.2.1. Pós-Teste (Turma 811)

A turma 811, com 39 alunos, foi a turma de comparação, que não teve qualquer contato com as atividades da sequência didática, recebendo o conteúdo apenas por meio de aulas tradicionais com o uso do material didático. Nessa turma foi aplicado o pós-teste apenas para confrontação de resultados, mostrados na tabela 3.

Esta turma apresentou resultados muito fora do padrão, sendo possível identificar o nível de apenas 25 dos alunos. Enquanto 12 alunos da turma, que corresponde a 30,8% não seguiram a hierarquia dos níveis, 2 alunos não conseguiram atingir nem ao menos o nível 1.

- No bloco 1: 25 alunos acertaram pelo menos 3 questões deste bloco, o que corresponde a um resultado de 64% da turma dominando as características do nível básico. No entanto, apenas 2 desses alunos não conseguiram alcançar os níveis superiores. Portanto, apenas 2 alunos da turma 811 foram classificados no nível 1.

- No bloco 2: neste segundo bloco, 33 alunos acertaram pelo menos 3 questões, o que corresponde a 84,6 % da turma com características de raciocínio no segundo nível de van Hiele. No entanto, 10 destes alunos apresentaram comportamento discrepante, não tendo acertando pelo menos 3 questões do bloco 1. Apenas 3 desses alunos foram classificados nesse nível, o que corresponde a 0,8% da turma.

- No bloco 3: 64% da turma, o que corresponde a 25 alunos, conseguiram acertar pelo menos 3 questões, mostrando raciocínio de acordo com o terceiro nível. No entanto, apenas 20 destes alunos, obedeceram à hierarquia dos níveis, com domínio dos níveis anteriores, puderam ser classificados no terceiro nível, o que corresponde a 51,3% da turma.

Tabela 3: Resumo da turma 811 (de comparação):

Classificação	Número de alunos	% da turma
Sem nível	2	5,1 %
Nível 1	2	5,1%
Nível 2	3	7,7 %
Nível 3	20	51,3%
Discrepantes	12	30,8%
Total	39	100%

Embora alguns pesquisadores admitam que é comum encontrar numa turma alguns poucos alunos não obedecendo a hierarquia dos níveis de van Hiele, este comportamento foi apresentado por cerca de 30% dos alunos nesta turma. Isso remete a uma formação inconsistente em geometria, com lacunas de aprendizagem e, possivelmente, resultados recebidos prontos, levando os alunos a decorar resultados sem compreensão.

5.2.2. Pós-Teste (Turma 813):

A turma 813, com 33 alunos, foi a turma experimental, cujos alunos vivenciaram as atividades da sequência didática. Desse modo, os alunos desta turma tiveram a oportunidade de manusear material concreto e usar raciocínio para construir seu conhecimento acerca das propriedades dos triângulos.

Nesta turma, foi possível identificar o nível de 26 dos33 alunos. Enquanto 2alunosda turma, que corresponde a 6,1%, não seguiram a hierarquia dos níveis, 5 alunos não conseguiram atingir nem ao menos o primeiro nível.

- No bloco 1: 27 alunos acertaram pelo menos 3 questões deste bloco, o que corresponde a um resultado de 81,8% da turma dominando as características do nível 1. No entanto, apenas um desses alunos não conseguiu alcançar os níveis superiores. Portanto, apenas um aluno da turma 813 foi classificado no nível 1.

- No bloco 2: neste segundo bloco, 26 alunos acertaram pelo menos 3 questões, o que corresponde a 78,8% da turma com características de raciocínio no segundo nível de van Hiele. No entanto, um destes alunos apresentou comportamento discrepante, não tendo acertado pelo menos 3 questões do bloco 1. Apenas 3 desses alunos foram classificados nesse nível, o que corresponde a 9,1% da turma.

- No bloco 3: 69,7% da turma, o que corresponde a 23 alunos, conseguiram acertar pelo menos 3 questões, mostrando raciocínio de acordo com o terceiro nível. No entanto, um destes alunos não obedeceu a hierarquia dos níveis. Portanto, 22 demonstraram domínio dos níveis anteriores, sendo classificados no terceiro nível, o que corresponde a 66,7% da turma.

Tabela 4: Resumo da turma 813 (experimental):

Classificação	Número de alunos	% da turma
Sem nível	5	15,1 %
Nível 1	1	3%
Nível 2	3	9,1 %
Nível 3	22	66,7%
Discrepantes	2	6,1%
Total	33	100%

Comparando os resultados dos alunos das duas turmas no pós-teste, observamos que:

- Os alunos da turma experimental tiveram um comportamento mais consistente, com 6,1% dos alunos fugindo à hierarquia dos níveis, enquanto o registro de alunos discrepantes na turma 811 foi de 30,8%.

- O índice de alunos raciocinando no nível 3 na turma experimental foi de 66,7%, superando o índice dos alunos neste nível na outra turma, que ficou em 51,3%.

- Essa diferença é consequência da aprendizagem ativa dos alunos ao longo da sequência didática, quando tiveram oportunidade de concluir as propriedades dos triângulos, ao invés de recebê-las como resultados prontos.

5.3 – Análise do progresso dos alunos da turma experimental

Nesta etapa descrevemos a análise dos resultados de cada um dos 31 alunos que participaram de todas as etapas da pesquisa. Esses resultados serão contrastados entre a fase preliminar (pré-teste e questão aberta) e o pós-teste, para assim podermos verificar se os estudantes desenvolveram uma aprendizagem significativa.

Primeiramente, realizamos um levantamento de todos os alunos que participaram das etapas preliminares e final, pois apenas com esses estudantes seria possível comparar o nível de van Hiele alcançado no início da pesquisa com o nível em que foi respondido o pós-teste após a Sequência Didática. Para facilitar a organização dos dados, estes estão dispostos na tabela 5 a seguir. Em cada linha desta tabela, consta o nome fictício dos estudantes da turma experimental, o nível de van Hiele obtido inicialmente, o nível em que respondeu a tarefa aberta e o nível obtido na etapa final, o pós-teste.

Estão assinalados como DISCREPOU, por exemplo, os estudantes que obtiveram acertos de 60% ou mais na folha de nível 2, mas não conseguiram o mínimo de 60% de acertos no nível 1, tanto no pré como no pós-teste. Os alunos classificados com a sigla S/N são aqueles que não atingiram nem o primeiro nível, ou que deixaram os testes em branco, ou ainda aqueles que apresentaram resposta muito confusa ou volume de escrita insuficiente para alcançar qualquer nível. As indicações de N1, N2 e N3correspondem respectivamente ao nível 1, nível 2 e nível 3 de van Hiele.

Para determinarmos quanto o aluno avançou ou não, precisamos levar em consideração o ponto de partida, ou seja, o pré teste e a Tarefa aberta. De acordo com a tabela 5, tivemos estudantes que obtiveram o mesmo resultado tanto no pré-teste quanto na tarefa aberta. Logo, seu nível de raciocínio no início da pesquisa estava consolidado. Por exemplo, o

estudante JONATHAN obteve N2 no pré teste e na Tarefa aberta, então inicialmente estava

no nível 2. No total podemos verificar que 21 alunos (67%) mantiveram seu nível na fase

preliminar.

Quando um aluno apresentou respostas ao pré-teste e à questão aberta em níveis distintos, este foi classificado de acordo com o maior desses níveis. Por exemplo, a aluna Monique obteve nível 2 nos testes de van Hiele, mas respondeu a tarefa aberta, no nível 1. Portanto, ela foi considerada como tendo atingido o nível 2 na fase inicial. Todos os 5 alunos que discreparam no pré teste, foram classificados de acordo com o nível de sua resposta à tarefa aberta.

Tabela 5: Fases preliminares e final

Nome Fictício	Pré-teste	Tarefa aberta	Pós-teste
ALICE	S/N	N1	N1
AMÉLIA	S/N	N1	N3
ANA	S/N	N1	S/N
BERNARDO	N1	N1	N3
CAIO	S/N	S/N	S/N
CÉLIO	N2	N2	N1
DOUGLAS	N1	N1	N3
EDUARDO	S/N	S/N	N3
ERICA	N2	N2	N3
FÁBIO	N1	N1	N2
FELIPE	N3	N3	N3
FERNANDO	N2	N2	N3
GERÔNIMO	S/N	S/N	N2
GUILHERME	N1	N1	N3
HENRIQUE	N1	N1	N3
HUGO	S/N	S/N	N3
JAIRO	N2	N2	N3
JÉSSICA	N2	N2	N3
JONATHAN	N2	N2	DISCREPOU
KAIO	DISCREPOU	N2	N3
MARIO	S/N	N1	DISCREPOU
MAIARA	S/N	S/N	S/N
MARINA	N2	N2	N3
MÔNICA	DISCREPOU	S/N	S/N
MONIQUE	N2	N1	N3
PEDRO	DISCREPOU	N2	N3
RICARDO	N2	N2	N3
ROBERTO	N1	N1	N3
RODRIGO	DISCREPOU	N1	N3
THIAGO	N1	N1	S/N
WILLIAM	DISCREPOU	S/N	N3

Uma síntese da tabela acima, de acordo com os alunos que progrediram, permaneceram ou responderam em nível inferior é consolidada na tabela 6 a seguir.

Tabela 6: Resumo dos resultados.

	Nº de alunos	(%)
Progrediram de nível	22	71%
Permaneceram no mesmo nível	4	13%
Discreparam no pós-teste	2	6,4%
Responderam em nível inferior	3	9,6%
Total	31	100%

Os resultados mostram que a grande maioria dos alunos progrediu de nível, o que indica o resultado positivo para a pesquisa. Dos 22 alunos que progrediram de nível, 3 constavam como sem nível e finalizaram o pós-teste em nível 3, estes foram os que mais evoluíram com a sequência didática. A evolução do nível 1 para o nível 3 foi registrada por 7 estudantes, enquanto 9 alunos passaram do nível 2 para o nível 3, um que estava sem nível alcançou o nível 2 e outro evoluiu do nível 1 para o nível 2. Apenas um aluno que já estava no nível 3 se manteve no nível 3.

Dos 4 alunos que permaneceram no mesmo nível, um se manteve no nível 1 e 3 continuaram sem nível. A tabela mostra ainda que 2 alunos discreparam no pós-teste, não sendo possível consolidar seu resultado final.

Vale registrar ainda que 3 alunos responderam o pós-teste num nível inferior ao seu nível na fase inicial. Isso indica que talvez esses alunos tenham mantido as lacunas na aprendizagem de geometria, devido ao grande número de faltas nas atividades da sequência didática.

Em resumo, podemos concluir que a experiência com a sequência didática teve um saldo positivo, possibilitando uma melhoria na aprendizagem de geometria da grande maioria dos alunos da turma experimental.

CAPÍTULO 6: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora os alunos da amostra tenham tido “contato” com a Geometria por pelo menos 2 anos, ou seja, desde o 6° Ano, alguns não tinham alcançado sequer o primeiro nível de van Hiele, deflagrando assim a inconsistência do ensino de Geometria nos anos anteriores.

Como comentado no Capítulo 2, pesquisadores em Ensino de Matemática relatam um abandono do ensino de Geometria desde a década de 60 no Brasil. Contudo, mesmo após os avanços tecnológicos, a implementação dos PCN e a consolidação da BNCC, percebemos que pouco ainda tem sido praticado em sala de aula. Em muitos casos, o ensino de Geometria continua sendo deixado para o fim do bimestre e às vezes sequer é mencionado. Além disso, as escolas não dispõem de material e infraestrutura (como um laboratório de informática) para realizar um trabalho menos superficial. Fica a cargo do professor adquirir o material que irá utilizar em suas aulas.

Os estudantes, de maneira geral, apresentaram pouca familiaridade com as ferramentas régua e transferidor e acreditavam que se fizessem de “olho” também obteriam o resultado correto, pois pareceria correto. Sendo assim, resistiram em realizar medições. Para obter um resultado mais consistente da nossa investigação, seria recomendável um trabalho anterior para que os alunos se habituassem a manusear esse material. Como já citado anteriormente, Sena e Dorneles (2013) salientam que os instrumentos usados no ensino de construções geométricas foram deixados de lado na substituição da disciplina de Desenho Geométrico por Educação Artística nos anos 70, e que as consequências disso foram desastrosas.

Foi observada a crença de que não é preciso escrever em Matemática, e de que para justificar uma afirmativa basta usar exemplos sem a necessidade de explicação. É preciso incentivar os professores a cobrar justificativas em cada etapa da resolução das tarefas matemáticas, desenvolvendo, assim, a habilidade de argumentação dos alunos.

Os estudantes também apresentaram dificuldades para concluir que um determinado padrão seria válido para todos os triângulos. Por exemplo, na atividade 3, todos receberam o mesmo triângulo para dobrar, logo todos deveriam concluir que a soma dos ângulos internos desse triângulo é 180°. Mas quando pedimos para desenhar um triângulo qualquer, os alunos verificaram novamente que o resultado dava 180°. Contudo, ainda assim ficaram receosos de concluir que esse resultado valeria para todos os triângulos. Na comparação dos triângulos construídos por cada aluno, encontrando sempre que a soma dos ângulos internos dava 180°, foi interessante verificar que, no fechamento da atividade, eles ficaram mais convencidos da validade dessa afirmativa.

A seguir vamos consolidar os resultados obtidos para responder à pergunta da pesquisa:

Qual o impacto de uma Sequência Didática que explora o raciocínio e o uso de material concreto na aprendizagem significativa de alunos do 8º ano, envolvendo o conceito de triângulos e seus elementos?

Os resultados do pós-teste indicam que a resposta à pergunta da pesquisa é positiva. A sequência didática desenvolvida, explorando justificativas, construções e manipulação de material concreto se mostrou útil na ajuda aos alunos em evoluir na compreensão dos conceitos geométricos abordados. O principal resultado foi a constatação de que, após a aplicação da sequência, com atividades explorando a aprendizagem significativa, o número de alunos raciocinando no Nível 3 de van Hiele subiu de apenas um para 22.

Comparando as respostas dos alunos da turma experimental com os alunos da outra turma no pós-teste, foi possível observar que seu desempenho foi superior, tanto na porcentagem de alunos que alcançaram o 3° nível, quanto na porcentagem menor de alunos que discreparam, não demonstrando aprendizagem consistente.

Portanto, esses dados mostram que o progresso causado pela aplicação da sequência didática proporcionou uma aprendizagem significativa, constatada pela evolução dos níveis de van Hiele da turma e pelo aumento do número de alunos que foram consistentes, seguindo a hierarquia dos níveis. Isso sugere que a resposta à pergunta da pesquisa é positiva.

Para além dos dados quantitativos, um ganho com a aplicação deste trabalho inclui a mudança de comportamento dos alunos. Deixaram de receber passivamente o conteúdo matemático e passaram a questioná-lo e discuti-lo, participando ativamente do processo de construção do conhecimento. Dessa forma, as aulas de Matemática passam a ser mais que um exercício de decorar fórmulas, transformando-se numa oportunidade para o aluno se expressar através da escrita e da oralidade.

Seria interessante ampliar esta investigação aos outros tópicos de Geometria constantes do currículo adotado, para comprovar a eficácia das sequências didáticas, desenvolvidas com o objetivo de alcançar uma aprendizagem mais significativa. É possível levar os alunos a construir os resultados por si mesmos, após manipular materiais concretos e responder a estímulos, argumentando e justificando suas estratégias de resolução e conclusões.

REFERÊNCIAS

ALVES, Alda Judith. **O planejamento de pesquisas qualitativas em educação.** Caderno de Pesquisa. São Paulo (77): 53-61, maio 1991.

AUSUBEL, D. P. (1968). **Educational Psychology: A Cognitive View.** Holt, Rinehartand Winston Inc. New York

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BIGODE, A. J. L. **"Base, que base? O caso da matemática."** ln: Educação é a base? 23 educadores discutem a BNCC. Organizado por Fernando Cássio e Roberto Castelli Jr. 123-143. São Paulo, BR: Ação Educativa, 2019.

COSTA, André Pereira. **A Construção de um Modelo de Níveis de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: o caso dos quadriláteros notáveis.** Tese de doutorado apresentada à Universidade Federal de Pernambuco, 2019.

CROWLEY, Mary L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST,** Mary & SHULTE, Albert P. (organizadores), Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

FRANÇA, R. C. **ISOLAR O X, ISOLAR O Y....E AGORA?** Recursos tecnológicos digitais como mediadores na resolução de equações do 1º grau. Dissertação de mestrado apresentada no Colégio Pedro II, 2019.

FONSECA, Maria da Conceição F. R. et al. **O Ensino da Geometria na Escola Fundamental: Três questões para formação do professor dos ciclos iniciais.** 2ªed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2002.

FURTADO, Karen Coutinho Campos. TRÓPIA, Flávia e BACCAR, Maria Helena Monteiro Mendes. **As contribuições da comissão de Jean-Pierre Kahane para as reflexões sobre o ensino de geometria na educação básica e na formação de professores**. ln: IX Seminário de Pesquisa em Educação Matemática. Rio de Janeiro – RJ. 2020.

GOMES, Maria Laura Magalhães. **O ensino da Geometria no Brasil nas últimas décadas: da ausência à presença com prevalência de abordagens experimentais**. In: I Seminário de Ensino de Geometria**. Anais**... Ouro Preto: Editora da UFOP, 2007. v. 1. p. 5-24.

GRANDO, Regina Célia. Investigações Geométricas. In: Lopes, C. A.; Nacarato, A. M. (org.): **Educação, matemática, leitura e escrita: armadilhas, utopias e realidades**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

LOVETT, J.: **"An interpretative description of the Van Hiele model of thinking in geometry".** Psychology of Mathematics Education Workshop, Chelsea College. Londres, 1983.

NACARATO, Adair Mendes. **O Ensino de Geometria Nas Series Iniciais**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, **Anais...** Belo Horizonte – MG, 2007.

NACARATO, Adair Mendes e ANDRADE, José Antônio Araújo. **Atuais tendências didático-pedagógicas no ensino de geometria: um olhar sobre os anais dos ENEM'S**. ln: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife - PE. 2004.

NASSER, Lilian. O Desenvolvimento do Raciocínio em Geometria. **Boletim do GEPEM**, 27, p. 93-99, 1990.

NASSER, Lilian. **Using the van Hiele Theory to Improve Secondary School Geometry in Brazil.** Tese de doutorado, King's College, Universidade de Londres, 1992.

NASSER, Lilian. Pesquisa e Aplicação, Anais Do I Seminário Internacional de Educação Matemática, Instituto de Matemática. UFRJ. 1993

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké,** Ano 1, número 1, CEMPEM/F.E.UNICAMP,1993, p..7-17, março de 1993.

PAVANELLO, Regina Maria; ANDRADE, Roseli Nozaki Grave. Formar professores para ensinar geometria: um desafio para as licenciaturas em Matemática. **Educação Matemática em Revista**, SBEM, v. 9, n. 11A, p. 78-87, 2002.

SENA, Rebeca Moreira; DORNELES, Beatriz Vargas. **Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011)**. *REVEMAT*. EISSN 1981-1322. Florianopolis- SC, v. 08, n. 1, p. 138-155, 2013.

SKEMP, R. R. **The Psycholology of Learning Mathematics**, London: Penguin. 1971.

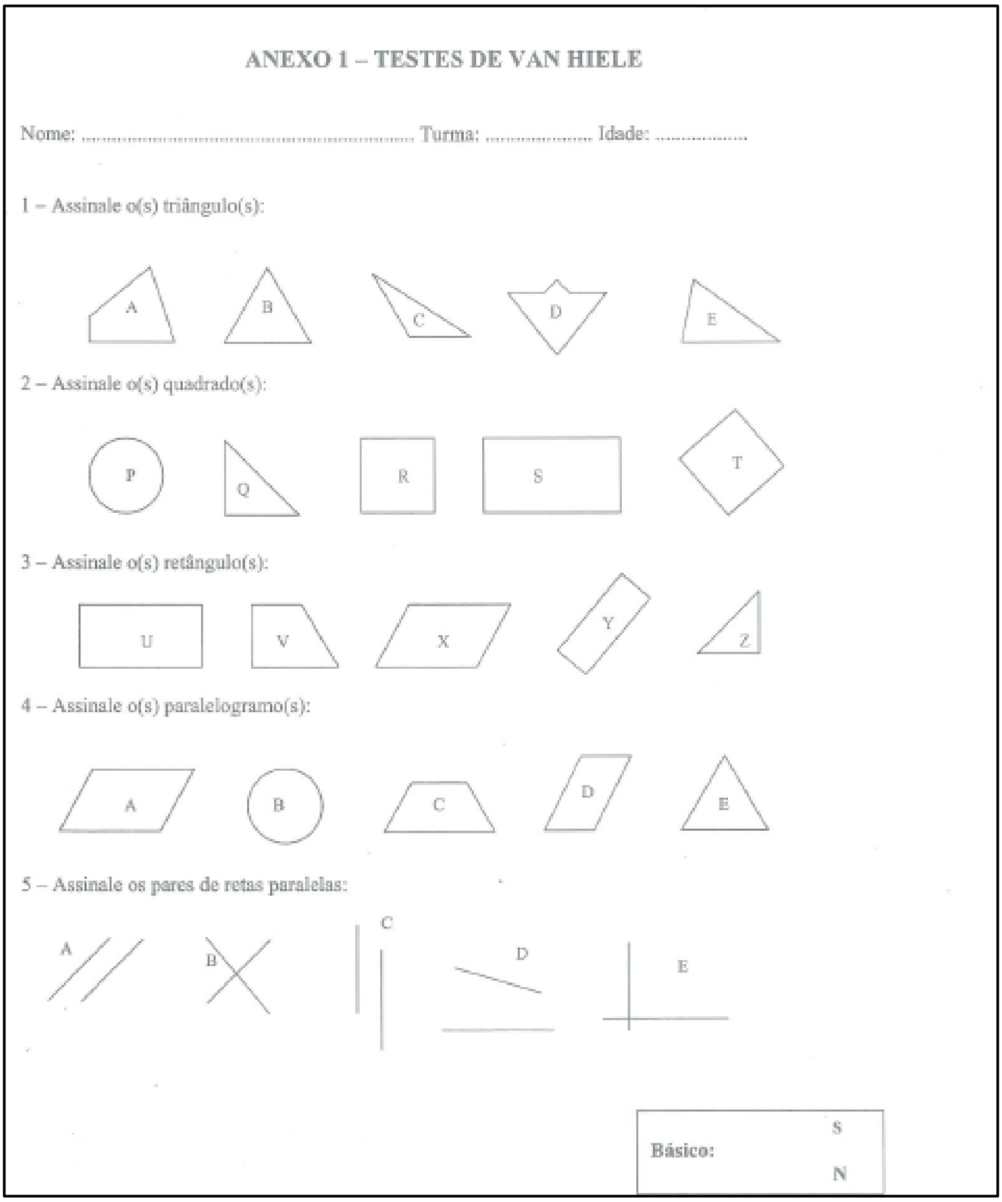
SKEMP, R.R. **Intelligence, Learning, and Action a Foundation for Theory and Practice in Education**. London: Wiley. 1979.

TEIXEIRA, Jéssica Andrade e JARDIM, Vania Batista Flose. **A Base Nacional Comum Curricular na perspectiva da Teoria de van Hiele**. ln: XII Encontro Nacional de Educação Matemática. Cuiabá. 2019.

VAN-HIELE, Pierre. **Structure and Insight**. Academic Press Orlando, FL, USA, 1986

ZABALA, Antoni. **A prática Educativa: Como Ensinar**/ Antoni Zabala: tradução Ernani F. da F. Rosa – Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 224; 23cm

ANEXO I / PRÉ-TESTE



ANEXO 1 – TESTES DE VAN HIELE

Nome: .... Turma: .... Idade: ....

1 – Assinale o(s) triângulo(s):

A B C D E

2 – Assinale o(s) quadrado(s):

P Q R S T

3 – Assinale o(s) retângulo(s):

U V X Y Z

4 – Assinale o(s) paralelogramo(s):

A B C D E

5 – Assinale os pares de retas paralelas:

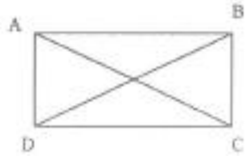
A B C D E

Básico: S N

Folha1 – nível 1 de van Hiele

Nome: .... Turma: .... Idade: ....

6 – No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:



a) Têm 4 ângulos retos.

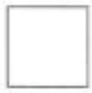
b) Têm lados opostos paralelos.

c) Têm diagonais de mesmo comprimento.

d) Têm os lados iguais.

e) Todas são verdadeiras.

7 – Dê 3 propriedades dos quadrados:



1 - ....

2 - ....

3 - ....

8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

(a) Pelo menos um dos ângulos mede 60°.

(b) Um dos ângulos mede 90°.

(c) Dois ângulos têm a mesma medida.

(d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.

(e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

9 – Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

1 - ....

2 - ....

3 - ....

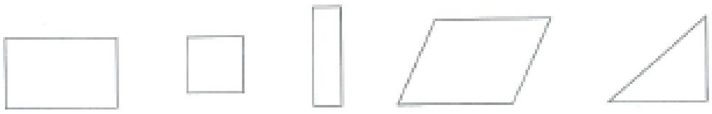
10 – Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

Nível 1:	S N

Folha 2 – nível 2 de van Hiele

Nome: .... Turma: .... Idade: ....

11 – Assinale a(s) figura(s) que pode(m) se considerada(s) retângulos:



12 – Os quatro ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.

(a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado? ....

(b) Por que? ....

(c) Que tipo de quadrilátero é ABCD? ....

13 – Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo?............................ Por que? ....

14 – Considere as afirmativas:

(I) A figura X é um retângulo.

(II) A figura X é m triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira:

(a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.

(b) Se I é falsa, então II é verdadeira.

(c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.

(d) I e II não podem ser ambas falsas.

(f) Se II é falsa, então I é verdadeira.

15 – Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados;

(a) qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.

(b) Uma propriedade dos quadrados nunca, é propriedade dos retângulos.

(c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.

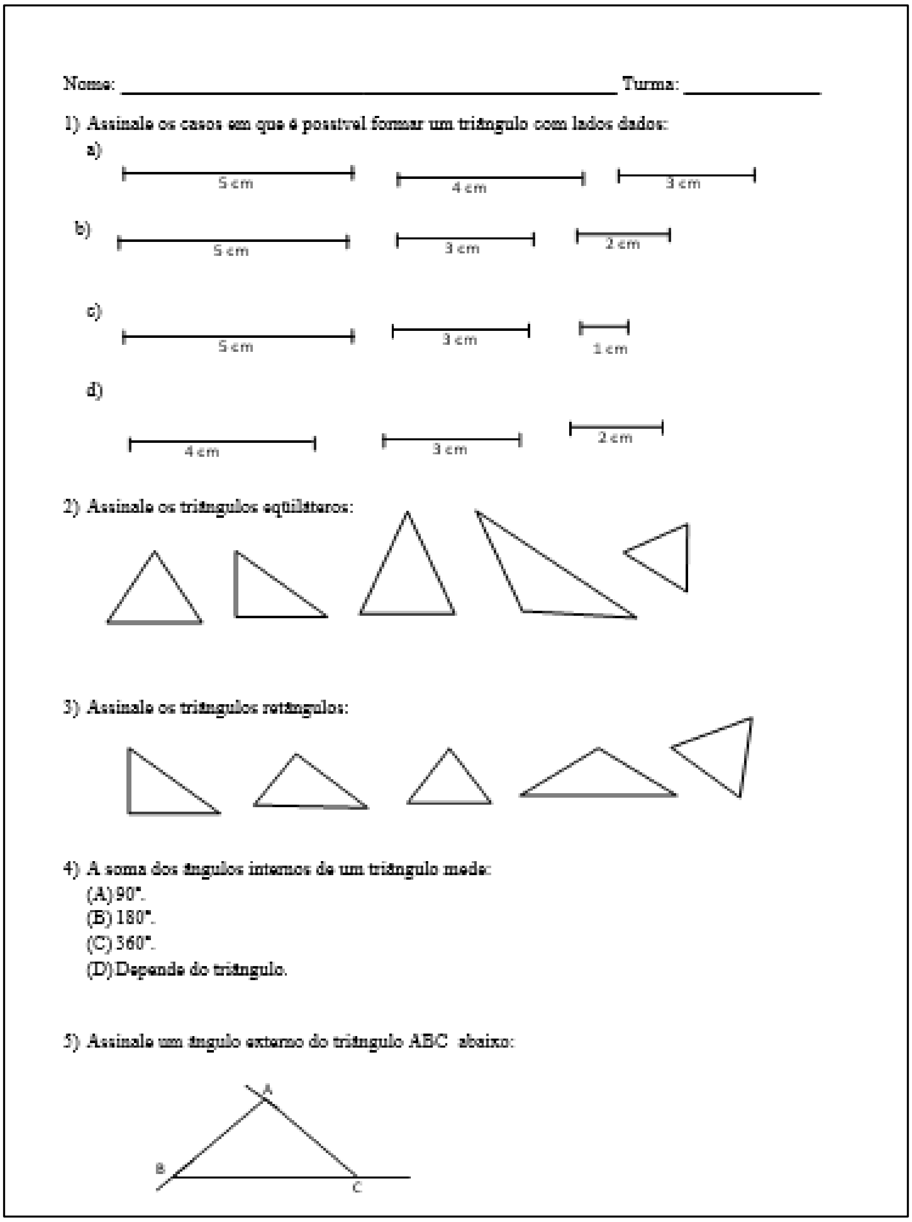
(d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.

(e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Nível 2:	S N

Folha 3 – nível 3 de van Hiele

ANEXO II / PÓS-TESTE



Nome: ______________________________ Turma: __________

1) Assinale os casos em que é possível formar um triângulo com lados dados:

a) 5 cm 4 cm 3 cm

b) 5 cm 3 cm 2 cm

c) 5 cm 3 cm 1 cm

d) 4 cm 3 cm 2 cm

2) Assinale os triângulos eqüiláteros:

3) Assinale os triângulos retângulos:

4) A soma dos ângulos internos de um triângulo mede:

(A) 90°.

(B) 180°.

(C) 360°.

(D) Depende do triângulo.

5) Assinale um ângulo externo do triângulo ABC abaixo:

Folha1 – nível 1 de van Hiele

Nome: ____ Turma: ____________

6) Para formar um triângulo, é necessário que:

(A) a medida do maior lado deve ser igual à soma das medidas dos outros dois lados.

(B) a medida do maior lado deve ser maior que a soma das medidas dos outros dois lados.

(C) a medida do maior lado deve ser menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

(D) Sempre é possível formar um triângulo, não importa a medidas dos lados.

7) Um triângulo isósceles tem sempre:

(A) três ângulos agudos.

(B) três lados iguais.

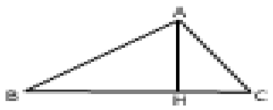
(C) dois lados iguais.

(D) um ângulo reto.

8) Num triângulo ABC, o ângulo A mede 70° e o ângulo B mede 80°.

Podemos afirmar que o ângulo C mede ....

9) Observe o triângulo:



O segmento AH é

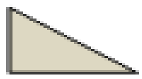
(A) altura relativa ao lado BC.

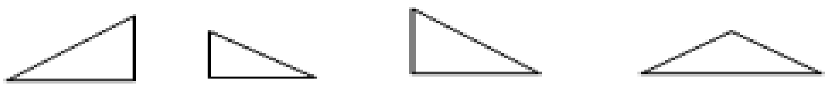
(B) mediana relativa ao lado BC.

(C) bissetriz interna do ângulo A.

(D) mediatriz do lado BC.

10) Assinale os triângulos que são congruentes ao triângulo ao lado.





Folha 2 – nível 2 de van Hiele

Nome: ____Turma: ______________

11) Que relação deve haver entre as medidas dos lados de um triângulo?

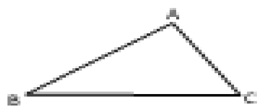
....

....

12) Um triângulo com ângulos de 30°, 60° e 90° é um triângulo ....

13) Um triângulo com os três lados iguais é um triângulo ....

14) Trace a mediana relativa ao lado BC do triângulo abaixo:



A mediana liga o vértice A a um ponto do lado BC que ....

....

15) Complete:

Dois triângulos são congruentes quando ....

....

....

Folha 3 – nível 3 de van Hiele