UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM/UFRJ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

DESCOBRINDO E ANALISANDO PRÁTICAS MATEMÁTICAS DESCONHECIDAS - O CASO DOS “NÚMEROS COMPLEXOS”

DÉBORA DE MELO LIMA FERREIRA

Orientador: Prof. Dr. Gert Schubring
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

RIO DE JANEIRO
AGOSTO DE 2018

DÉBORA DE MELO LIMA FERREIRA

DESCOBRINDO E ANALISANDO PRÁTICAS MATEMÁTICAS DESCONHECIDAS - O CASO DOS “NÚMEROS COMPLEXOS”

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino De Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Gert Schubring
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

RIO DE JANEIRO
AGOSTO DE 2018

DESCOBRINDO E ANALISANDO PRÁTICAS MATEMÁTICAS DESCONHECIDAS - O CASO DOS "NÚMEROS COMPLEXOS"

DÉBORA DE MELO LIMA FERREIRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino De Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Prof Dr. Gert Schubring
Orientador/UFRJ

Prof. Dr. Gérard Emile Grimberg
UFRJ

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho
UERJ

RIO DE JANEIRO
AGOSTO DE 2018

CIP - Catalogação na Publicação

F383d

Ferreira, Débora de Melo Lima
   Descobrindo e analisando práticas matemáticas desconhecidas - o caso dos "números complexos" / Débora de Melo Lima Ferreira. -- Rio de Janeiro, 2018.
   224 f.

   Orientador: Gert Schubring.
   Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2018.

   1. Números complexos. 2. Aritmética. 3. Sistema métrico. 4. Multiplicação de grandezas. I. Schubring, Gert, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Dedico essa pesquisa à pessoa mais curiosa que já conheci: meu filho, Tomás.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e à minha Mãe Divina, por tudo.

Agradeço especialmente ao meu orientador, professor Gert Schubring, por toda paciência, compreensão e incentivo. Obrigada por me ensinar tanto!

Ao meu marido, Andrey, por todo companheirismo e por me ajudar sempre a alcançar minhas metas, sempre que escolho uma nova.

Aos meus pais, Dalva e Eden, que fizeram tudo o que estava a seu alcance para que eu conseguisse realizar esse trabalho; ajudando no que eu precisasse, me apoiando e tantas vezes viajando de Petrópolis a Valença para que eu pudesse ir ao Rio. Sem vocês nada disso seria possível.

À minha irmã, Dani, por ser minha melhor amiga, conversar comigo e me aconselhar sempre que preciso.

Aos amigos que fiz no PEMAT, principalmente André, Elion, Jardel, Jeff, João, Jocilea, Luciano, Mara, Mário, Rodolpho, Shila, Sony, Tiago e Vinícius.

Agradeço aos professores do PEMAT por colaborarem na minha formação, com sua experiência e sabedoria.

Aos bibliotecários da Biblioteca de Obras Raras da UFRJ, do Núcleo de Documentação e Memória do Colégio Pedro II, da Biblioteca Nacional e da Biblioteca da Academia Militar das Agulhas Negras. Ao bibliotecário Rodrigo Garcia e à equipe do Serviço de Biblioteca e Documentação da Biblioteca Brasiliana Guita e José Mindlin.

"Há um menino, há um moleque
Morando sempre no meu coração
Toda vez que o adulto balança
Ele vem pra me dar a mão"
(Fernando Brant e Milton Nascimento)

Resumo

A motivação para o tema do presente trabalho surge a partir de uma crítica de Ampère a uma afirmação de Bézout, que declarava que a multiplicação de grandezas seria não comutativa. Encontramos o livro de aritmética de Bézout onde se encontra tal colocação e descobrimos, nesse momento, a existência de uma teoria dos chamados números complexos que, de modo distinto à teoria dos números complexos de Gauss, não é conhecida pelos matemáticos atualmente. Estudando intensamente livros didáticos em que esses números complexos eram contemplados, percebemos outro problema que não está bem estabelecido conceitualmente na matemática: a multiplicação de grandezas. Desse modo, essa dissertação procura analisar como esses números complexos eram ensinados, através da melhor documentação que temos para conceito: os livros didáticos. Também, como esses números complexos estão relacionados a sistemas metrológicos antigos, procuraremos analisar o impacto da implementação do sistema métrico decimal no ensino e difusão desses números, principalmente no Brasil e na França. Por outro lado, confrontaremos o problema da multiplicação de grandezas através da análise do que os principais autores disseram sobre esse tema, em diferentes países e épocas.

Palavras-chave: Números complexos. Aritmética. Sistema métrico. Multiplicação de grandezas.

Abstract

The motivation for the theme of the present work arose from a critique of Ampère to an affirmation of Bézout, who declared that the multiplication of quantities would be noncommutative. We found Bézout's book of arithmetic where such a position is exposed, and we then discovered the existence of a theory of so-called complex numbers which, unlike the complex number theory of Gauss, is not known by mathematicians today. Studying intensely textbooks in which these complex numbers were taught, we perceived another problem that is not well established conceptually in mathematics: the multiplication of quantities. Thus, this dissertation seeks to analyze how these complex numbers were taught, through the best documentation we have for concept: textbooks. Also, as these complex numbers are related to old metrological systems, we will try to analyze the impact of the implementation of the metrical, decimal system to the teaching and diffusion of these numbers, mainly in Brazil and France. On the other hand, we will confront the problem of the multiplication of quantities by analyzing what the main authors have said on this subject in different countries and times.

Keywords: Complex numbers. Arithmetic. Metric system. Multiplication of quantities.

Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Motivação

Quando me inscrevi para o mestrado em Ensino de Matemática no PEMAT da UFRJ tinha certeza de que, caso fosse admitida no programa, iria para a linha de pesquisa de Ensino de Matemática, e não para a linha de História da Matemática. Iniciando o mestrado, a partir da leitura de alguns textos na disciplina Tendências em Educação Matemática, com a professora Ana Teresa, da leitura também do livro da professora Tatiana Roque e da conversa com alguns alunos mais antigos do programa, meu interesse em História da Matemática aumentou significativamente e comecei a ficar em dúvida sobre que linha de pesquisa seguir: Ensino ou História? Essa dúvida perdurou até quando li um artigo do professor Gert Schubring (2002), publicado na Bolema, com o título curioso *A Noção de Multiplicação: um "obstáculo" desconhecido na História da Matemática*. Nesse artigo, o autor cita uma crítica feita por Ampère a Etienne Bézout, influente autor de livros didáticos de matemática na França do século XVIII: Bézout teria escrito, em seu manual de 1770 de Aritmética para a *artillerie*, que a multiplicação de dois fatores poderia não ser comutativa. De fato, a critica de Ampère revela um problema conceitual nas operações aritméticas que precisa ser refletido na matemática e pesquisado na história da matemática: a multiplicação entre grandezas pode ser não comutativa, ao contrário da multiplicação entre números. Essa dissertação pretende contribuir e aprofundar o entendimento conceitual do problema evocado. O exemplo de Bézout de uma multiplicação não-comutativa, com os seus cálculos, é destacado no artigo de Schubring. Primeiro, Bézout multiplica 34 # 10^s 2^d (34 *livres*, 10 *sous* e 2 *deniers*) por 17 *toises*:

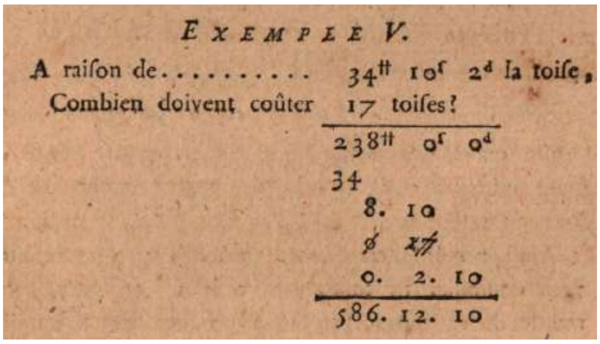

EXEMPLE V.
A raiſon de .... 34# 10ſ 2d la toiſe,
Combien doivent coûter 17 toiſes?
238# 0ſ 0d
34
8. 10
~~0~~ ~~17~~
0. 2. 10
586. 12. 10

Figura 1 – Bézout, 1770, p.89

Bézout efetua, também, a multiplicação de 17 *toises* por 34 # 10^s 2^d:

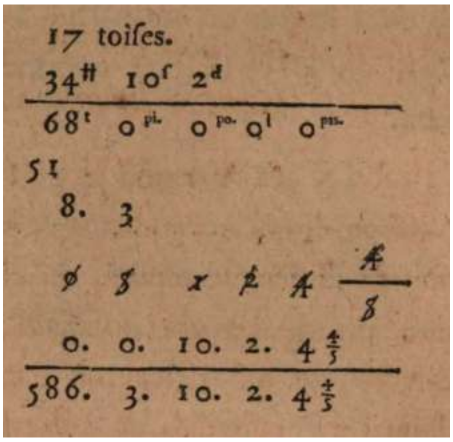

17 toiſes.
34# 10ſ 2d
68t 0pi. 0po. 0l 0pts.
51
8. 3
~~0~~ ~~3~~ ~~1~~ ~~2~~ ~~4~~ ~~4/5~~
0. 0. 10. 2. 4 4/5
586. 3. 10. 2. 4 4/5

Figura 2 – Bézout, 1770, p.90

O comentário de Bézout sobre essa multiplicação também se encontra no artigo de Schubring:

> Nós demos esse exemplo, principalmente para confirmar aquilo que nós dissemos (§45), que importa distinguir o multiplicando do multiplicador, quando são ambos concretos: com efeito, no exemplo anterior, assim como esse aqui, os fatores do produto são igualmente 17 toesas e 34# 10^s 2^d; entretanto os dois produtos são diferentes (Bézout, 1770, p.90-91 *apud* Schubring, 2002, p.39).

Pudemos perceber, então, que a não-comutatividade da multiplicação tem a ver com a natureza das quantidades envolvidas nos fatores, que seriam, nesse caso, grandezas utilizadas para preço (*livres*, *sous* e *deniers*) e para comprimentos (*toises*) em uma época sem os conceitos de medidas métricas. Bézout não se restringiu em apontar esse fenômeno de não-comutatividade - ele utilizou o termo "*nombres complexes*" (números complexos) para tais quantidades e ensinou detalhadamente como operar com eles: adição, subtração, multiplicação e divisão, além de operações "mistas" entre "*números complexos*" e "*números incomplexos*".

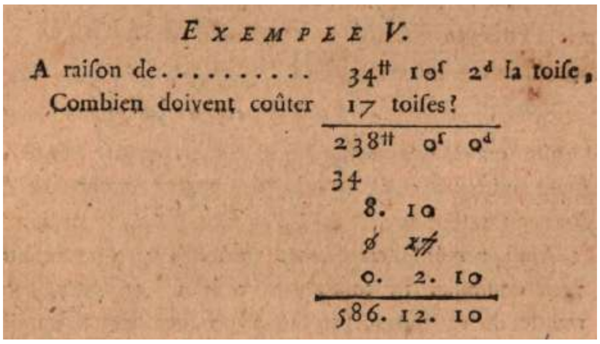
Observamos em nossa pesquisa que houve um uso extenso dos números complexos por diferentes países, como França, Inglaterra, Portugal, Brasil, Espanha e Itália. No entanto, na

Alemanha os "números complexos"não foram usados, o que possibilitou que Gauß[1] fosse capaz de propor em 1831 o termo números complexos no sentido que a gente conhece.

1.2 O problema

A crítica de Ampère a Bézout, citada no artigo de Schubring (2002, p. 36), é devida à afirmação de Bézout, em seu *Cours de mathématiques, à l'usage du corps royal de l'artillerie*, de que a multiplicação de duas grandezas poderia ser não comutativa. Bézout muliplica 17 toesas e 34# 10^s 2^d, alternando a ordem dos fatores, e obtém dois resultados distintos. Em contraposição, Ampère defende a invariabilidade do resultado quando se altera multiplicador e multiplicando.

No cálculo com os números complexos efetuado por Bézout em seu exemplo V, em que se propõe multiplicar 34 # 10^s 2^d (34 *livres*, 10 *sous* e 2 *deniers*) e 17 *toises*, nessa ordem, podemos concluir, observando o contexto do problema (exposto nesse trabalho na seção em que analisamos o *Cours de mathématiques, à l'usage du corps royal de l'artillerie*), que o multiplicando na verdade consiste em 34 # 10^s 2^d por toesa, enquanto o multiplicador é 17 toesas. Desse modo, o produto obtido deverá de fato estar em libras e suas subdivisões.


EXEMPLE V.

A raiſon de......... 34# 10ſ 2d la toiſe,

Combien doivent coûter 17 toiſes?

238# 0ſ 0d

34

8. 10

0. 2. 10

586. 12. 10

Figura 3 – Bézout, 1770, p.89

Analogamente, em um próximo exemplo em que é realizada a multiplicação de 17 *toises* e 34 # 10^s 2^d (nessa ordem), o contexto da questão sugere que o multiplicando é 17 toesas por libra, enquanto o multiplicador seria 34 # 10^s 2^d. Logo, a dimensão do produto deverá ser expressa em toesas e suas subdivisões.

1 Gauss.

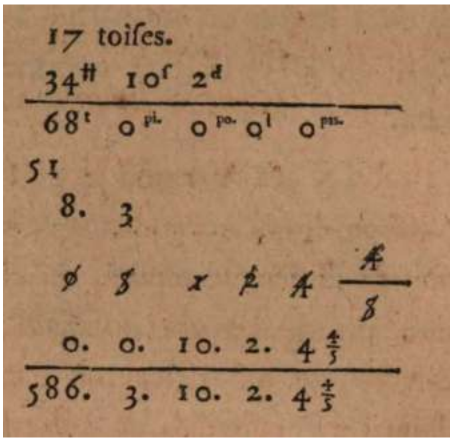


Figura 4 – Bézout, 1770, p.90

Examinando a natureza da diferença entre os dois resultados anteriores, verifica-se que a parte numérica difere um do outro apenas devido às subdivisões de cada uma das unidades. No sistema métrico decimal, essa diferença seria inexistente. A princípio, reflete-se então que o estudo dos números complexos deveria desaparecer com a introdução efetiva do sistema métrico; o que verificamos que não acontece.

Para analisarmos o problema conceitual da multiplicação envolvendo números complexos, que diz respeito ao produto de duas grandezas, começaremos refletindo sobre as definições de multiplicação que conhecemos e, em seguida, analisaremos o *Cours de mathématiques, à l'usage du corps royal de l'artillerie*.

1.2.1 A noção de multiplicação

A multiplicação é uma operação matemática binária, cuja estrutura consiste em multiplicador, multiplicando e produto (resultado da operação). Por exemplo, na conta 3x7 = 21, o número 3 é o multiplicador, enquanto o número 7 corresponde ao multiplicando e o número 21 ao produto da multiplicação. O multiplicador e o multiplicando são denominados fatores da operação de multiplicação e, quando esses fatores são números naturais, o multiplicador refere-se a quantas vezes deveremos repetir o multiplicando para a obtenção do resultado (produto). De acordo com Tropfke (1980, p. 210 e p. 225), as noções de multiplicador e multiplicando já podem ser encontradas na obra do matemático indiano Brahmagupta, nascido no final do século VI.

As definições que conhecemos atualmente sobre multiplicação de dois números abrangem: o produto de dois escalares, ou então o produto de uma grandeza por um escalar. Desse modo, a multiplicação de grandezas entre si é um problema ainda em aberto, que precisa ser refletido.

No livro VII de *Os Elementos*, de Euclides, a definição 15 nos diz que

> A number is said to multiply a number when that which is multiplied is added to itself as many times as there are units in the other, and thus some number is

> produced. [2] (Heath, 1956, p.278)

O conceito da comutatividade na multiplicação foi, não somente apresentado, mas postulado axiomaticamente, por Antoine Arnauld (1612-1694), padre, teólogo, filósofo e matemático francês, em sua obra Nouveaux Élémens de Géométrie (Schubring, 2002). É possível que esse seja o primeiro texto matemático a mencionar a comutatividade na multiplicação.

> Segunda suposição
> Em segundo lugar, que se saiba que é a mesma coisa na multiplicação começar pelo qual se quer dos dois números que se multiplica: assim 3 vezes 5 é a mesma coisa que 5 vezes 3, 4 vezes 6 é a mesma coisa que 6 vezes 4. (Arnauld, 1667, p. 2, tradução de Gert Schubring)

No entanto, essa alusão à comutatividade na multiplicação pode carecer de fundamentação.

> Mas a posição axiomática de Arnauld foi precipitada: de um lado, uma axiomática da Aritmética foi desenvolvida sistematicamente somente no século XIX e, de outro, ele afirmou tratar das grandezas em geral, mas o texto dele referiu-se realmente somente aos números.
> As grandezas, no entanto, apresentaram problemas profundos que nunca foram claramente resolvidos. (Schubring, 2002, p.39)

Segundo Schubring (2002), a multiplicação entre duas grandezas foi excluída da discussão porque uma grandeza não pode, em teoria, funcionar como multiplicador. No entanto, em algumas situações práticas, como na Física, vemos grandezas assumirem o papel de multiplicadores. Nesse sentido, Schubring destaca duas abordagens dadas a esse problema, a saber: a de François Viète (1540 - 1603) e a de René Descartes (1596 - 1650). Enquanto Viète admite a multiplicação entre grandezas heterogêneas (de espécies diferentes), e obtém como produto uma grandeza com dimensão superior; Descartes realiza uma multiplicação baseada em uma proporção entre grandezas geométricas: se $e : a :: b : c$ então $c = ab$, pois *e* seria a unidade de comprimento. Cada uma dessas grandezas representa um comprimento, como podemos ver na próxima imagem. Da forma como Descartes considera a multiplicação de grandezas geométricas, ela é uma operação entre grandezas homogêneas, que resulta em uma outra grandeza de mesma espécie. Por isso, a multiplicação de Descartes seria uma operação fechada (Schubring, 2002).

[2] Um número é dito multiplicar um número quando o número que está sendo multiplicado é adicionado a ele mesmo tantas vezes quantas unidades existirem no primeiro, e assim um número é produzido (tradução minha).

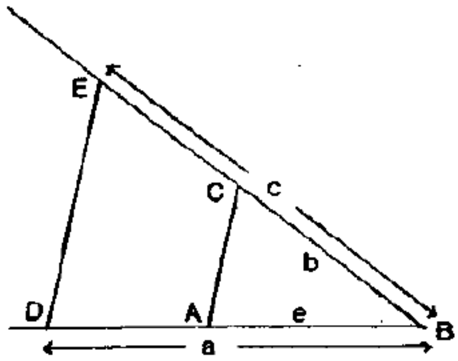


Figura 5 – Multiplicação de dois comprimentos, tendo como produto um comprimento, segundo o conceito de Descartes

(Schubring, 2002)

De fato, a natureza do problema de se multiplicar duas grandezas consiste em se esclarecer: como seria a definição de uma multiplicação desse tipo e, se for possível realizá-la, qual seria a dimensão do resultado (produto).

Em seu artigo sobre números negativos, Schubring (2007) destaca o ponto de vista do professor de matemática prussiano Wilhelm A. Förstemann (1791-1836), que considerava que operações algébricas deveriam ser realizadas apenas entre números, e não entre grandezas. Para ele,

> Grandezas são: linhas, extensões, planos, sólidos, pesos, extensões do tempo, conjuntos de pessoas ou de livros. Números, no entanto, são apenas expressões das relações entre grandezas da mesma espécie (Förstemann, 1817, *apud* Schubring, 2007)

Desse modo, Förstemann delineou as diferenças entre grandezas e números, estudando exclusivamente esses últimos. Suas reflexões sobre os fundamentos da Aritmética levaram-no a uma abordagem axiomática do problema da multiplicação e da soma de dois números, definindo o inverso de um número, seu oposto, o elemento neutro da multiplicação e o elemento neutro na adição.

Ainda segundo Schubring (2007), Gauß considerava que "o verdadeiro assunto da matemática são as relações entre as grandezas" (Gauss, 1929, p. 59 apud Schubring, 2007, p.6). Desse modo, destacando as relações entre grandezas como objeto de estudo da matemática, e não as próprias grandezas, Gauß apoia a abordagem epistemológica de Förstemann.

Dessa forma, mesmo com as novas abordagens epistemológicas advindas da análise de Förstemann sobre as operações de multiplicação e adição (que foram pouco difundidas, até na Alemanha), por ocasião de suas preocupações com os números negativos e, posteriormente, as considerações de Gauß sobre esse assunto, a multiplicação de grandezas permaneceu praticamente sem ser estudada, apesar de ser realizada na Geometria e na Física. Na Física, por exemplo, sabemos que uma distância dividida pelo tempo necessário para percorrê-la nos fornece uma terceira unidade, denominada velocidade.

Já na Itália, em 1794, o matemático Salimbeni (1752-1823) se dispôs a "clarificar as noções de multiplicação e de divisão", e declarou "que a definição de multiplicação em Euclides somente concerne aos números e que ainda falta uma definição rigorosa para grandezas"(Schubring, 2007).

Alterando em um pequeno ponto a abordagem dada por Descartes para a multiplicação de grandezas, Salimbeni sugere a proporção "se $1 : a :: b : c$ então $c = ab$ ", introduzindo a unidade concreta em sua definição de proporção:

> La vera e generale difinizione della moltiplicazione algebricha è questa: Una grandezza dicesi moltiplicare una grandezza, quando facciasi come l'unità concreta della grandezza moltiplicante alla stessa, così la grandezza moltiplicata ad un'altra grandezza che si produce.[3] (Salimbeni, 1794 *apud* Schubring, 2002)

Para Schubring (2002),

> a "pequena" mudança no sentido da unidade tem como conseqüência que a unidade agora somente mede a grandeza A, mas não mais a grandeza B, porque ela é medida por uma outra unidade concreta. (Schubring, 2002, p.33)

Dessa forma, o produto "c"teria a mesma dimensão do multiplicando "a", enquanto "b", que é um número, faz o papel de multiplicador.

Essa abordagem dada por Salimbeni à multiplicação de grandezas faz com que ele chegue a dois resultados notáveis: a multiplicação de grandezas seria uma operação fechada (o produto não teria uma terceira dimensão, diferente da de seus fatores) e não comutativa, pois a dimensão do resultado deveria ser igual à do multiplicando (Schubring, 2002). Salimbeni tece críticas à abordagem de Viète:

> Quantunque semplice e manifesto sia questo Teorema[4], egli è però contrario ad una idea comunemente ricevuta. chi è, che non abbia molte e molte volte letto: che una linea moltiplicando una linea produce uma superficie, e che una linea moltiplicando una superficie produce un solido? tutte cose falsissime. [...] poichè abbiamo dimostrato che la grandezza prodotta è dello stesso genere della moltiplicata.[5] (Salimbeni, 1794 *apud* Schubring, 2002)

E, ainda, exemplifica com um caso prático uma multiplicação entre grandezas, cuja abordagem nos recorda aquela dada por Bézout em seu *Cours de mathématiques*: "caso se multiplique os 3 pés pelas 70 libras, o produto será 210 pés; mas, caso se multiplique as 70 libras

[3] A definição verdadeira e geral da multiplicação algébrica é esta: Uma grandeza diz-se multiplicar uma grandeza, quando faça como a unidade concreta da grandeza multiplicante para a mesma, assim a grandeza multiplicada para uma outra grandeza que se produz (tradução de Gert Schubring).

[4] "Teorema: Se uma grandeza multiplica uma grandeza; o produto será homogêneo com a grandeza multiplicada."(Salimbeni, 1794 *apud* Schubring, 2002)

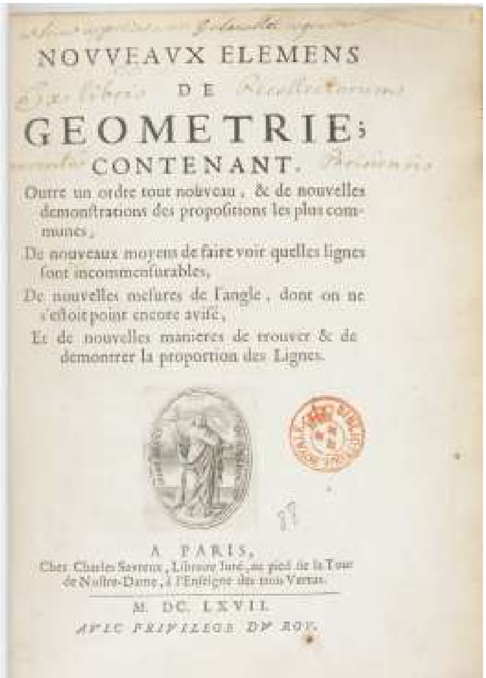
[5] Embora este teorema seja simples e óbvio, ele se opõe, no entanto, a uma ideia comumente aceita. Quem seria que não teria lido muitas e muitas vezes: que uma linha que multiplica uma linha produz uma superfície e que uma linha que multiplica uma superfície produz um sólido? Todas tais afirmações ficam totalmente falsas . [...] porque mostremos que a grandeza produto obtém a mesma espécie como aquela que foi multiplicada. (tradução de Gert Schubring).

por 3 pés, o produto será 210 libras” (Salimbeni, 1794 *apud* Schubring, 2002)(Tradução de Gert Schubring).

Na verdade, o que Salimbeni calcula é, na primeira multiplicação, 3 pés/libra x 70 libras = 210 pés; e, na segunda, 70 libras/pé x 3 pés = 210 libras. Desse modo, essa justificativa para sua afirmação de que o produto teria a mesma unidade do multiplicando é falsa.

Como revelaremos no quarto capítulo, acreditamos que a concepção de grandezas denominadas números complexos surge pela primeira vez com o livro de aritmética de Camus, no ano de 1753. Isto se pode afirmar com bastante certeza, visto que este termo esteve anteriormente associado a um outro significado na França.

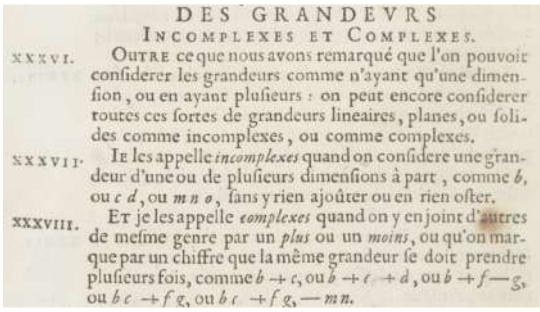
Essa utilização distinta do termo "números complexos"foi estabelecida por Arnauld, em seu *Nouveaux Élémens de géométrie*, de 1667 (em sua obra, "números complexos"são definidos como uma grandeza composta de dois ou mais termos unidos por uma adição ou uma subtração; como, por exemplo, a + b, assim como a + b - c), e foi recebida e aplicada por Deidier, no livro *Suite de L’Arithmetique des Géométres*, de 1739 - sendo este ano a última vez em que essa terminologia foi utilizada nesse sentido, segundo nossa pesquisa.



NOVVEAVX ELEMENS
DE
GEOMETRIE;
CONTENANT.
Outre un ordre tout nouveau, & de nouvelles demonstrations des propositions les plus communes,
De nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables,
De nouvelles mesures de l'angle, dont on ne s'estoit point encore avisé,
Et de nouvelles manieres de trouver & de demontrer la proportion des Lignes.

A PARIS,
Chez Charles Savreux, Libraire Juré, au pied de la Tour de Nostre-Dame, à l'Enseigne des trois Vertus.
M. DC. LXVII.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

Figura 6 – Folha de rosto do livro de Arnauld (1667).



DES GRANDEVRS
INCOMPLEXES ET COMPLEXES.

XXXVI. OUTRE ce que nous avons remarqué que l'on pouvoit considerer les grandeurs comme n'ayant qu'une dimension, ou en ayant plusieurs : on peut encore considerer toutes ces sortes de grandeurs lineaires, planes, ou solides comme incomplexes, ou comme complexes.

XXXVII. IE les appelle *incomplexes* quand on considere une grandeur d'une ou de plusieurs dimensions à part, comme *b*, ou *c d*, ou *m n o*, sans y rien ajoûter ou en rien oster.

XXXVIII. ET je les appelle *complexes* quand on y en joint d'autres de mesme genre par un *plus* ou un *moins*, ou qu'on marque par un chiffre que la même grandeur se doit prendre plusieurs fois, comme $b+c$, ou $b+c+d$, ou $b+f-g$, ou $bc+fg$, ou $bc+fg,-mn$.

Figura 7 – Página com a definição de números complexos (Arnauld, 1667, p. 8).

SUITE
DE
L'ARITHMETIQUE
DES
GÉOMÉTRES,

CONTENANT UNE INTRODUCTION A L'ALGEBRE & à l'Analyſe; avec la réſolution des Equations du ſecond & du troiſiéme degré; les Raiſons, Proportions & Progreſſions Arithmétiques & Géométriques; les Combinaiſons; l'Arithmétique des Infinis; les Logarithmes; les Fractions décimales, &c.

Par Monſieur l'Abbé DEIDIER.

IMPRIMÉ A PARIS,
Et ſe Vend
A AMSTERDAM,
Chez PIERRE MORTIER, Libraire.

M. DCC. XXXIX.

Figura 8 – Folha de rosto do livro de Deidier (1739).

Des grandeurs complexes & incomplexes, poſitives & négatives.

III. Par le mot de *grandeur* en général, on entend tout ce qui peut être augmenté ou diminué, & qui par conſéquent a des parties. On en diſtingue de deux ſortes, l'une qu'on appelle *ſucceſſive*, parce que ſes parties ſe ſuccedent les unes aux autres, ſans être jamais toutes à la fois, comme le tems & le mouvement; & l'autre qu'on appelle *permanente*, parce que ſes parties ſubſiſtent en même-tems. Celle-ci ſe diviſe encore en grandeur ou quantité *diſcrete*, c'eſt-à-dire dont les parties ne ſont pas liées, telles que ſont les nombres & les aſſemblages, où la continuité & la liaiſon des parties ne ſont pas néceſſaires; & en grandeur *continuë*, c'eſt-à-dire, dont les parties ſont infiniment liées enſemble, telles que ſont toutes les choſes matérielles.

Comme l'Algebre peut emploïer également ſon calcul ſur ces différentes eſpéces de grandeur, on donne le nom de *grandeur* en général aux lettres dont elle ſe ſert pour les repréſenter.

Ces grandeurs ſont *complexes* ou *incomplexes*, ou *poſitives* ou *négatives*.

Une grandeur complexe eſt une grandeur compoſée de deux ou de pluſieurs autres grandeurs jointes enſemble, avec le ſigne + ou le ſigne −; $a+b$ eſt une grandeur complexe, & de même $a+b-c$ ou $a-d+c-f$, & ainſi des autres.

Une grandeur incomplexe eſt une grandeur que l'on conſidére comme n'étant compoſée d'aucune autre grandeur; ainſi a, ou b, ou c, priſes chacune à part, ſont des grandeurs incomplexes.

Figura 9 – Trecho em que Deidier define números complexos e incomplexos (1739, p. 7).

1.2.2 Cours de mathématiques, à l'usage du corps royal de l'artillerie, tome premier, Contenant l'Arithmétique, la Géométrie & la Trigonométrie Rectilinea, de Étienne Bézout (1770)

Étienne Bézout (1730-1783) nasceu em Nemours, França. Segundo Gillispie et al. (1970), como Étienne Bézout era filho e neto de magistrados, era esperado pela sua família que ele seguisse a mesma carreira; no entanto, Bézout mostrou-se fortemente inclinado para a matemática, principalmente após ler os trabalhos de Leonhard Euler. Entre suas principais obras estão "Sur plusieurs classes d'equations de tous les degrés qui admettent une solution algébrique"(1762), "Cours de mathématiques a l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine"(1764-1767), "Cours complet de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie"(1770-1782), "Sur Ie degré des equations résultantesde l'évanouissement des inconnues" (1764), e "Théorie generalé des équations algébriques"(1779).

Conforme podemos ler em Gillispie et al.,

> In 1763, the due de Choiseul offered Bezout a position as teacher and examiner in mathematical science for young would-be naval officers, the Gardes du Pavillon et de la Marine. By this time, Bezout had become a father and needed the money. In 1768 he added similar duties for the Corps d'Artillerie. Among his published works are the courses of lectures he gave to these students. The orientation of these books is practical, since they were intended to instruct people in the elementary mathematics and mechanics needed for navigation or ballistics. The experience of teaching nonmathematicians shaped the style of the works: Bezout treated geometry before algebra, observing that beginners were

> not yet familiar enough with mathematical reasoning to understand the force of algebraic demonstrations, although they did appreciate proofs in geometry. He eschewed the frightening terms “axiom,” “theorem,” “scholium,” and tried to avoid arguments that were too close and detailed. [6] (Gillispie et al. , 1970)

Tendo tornado-se examinador da *École Gardes de la Marine* em 1763, foi encomendada a Bézout a criação de um livro didático (Schubring, 2005, p.122). Bézout então escreveu a série "*Cours de mathématiques a l’usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*"(1764), em seis volumes. Em 1768, com o falecimento de Camus, que era examinador do *Corps d’Artillerie*, Bézout foi nomeado para sucedê-lo. Desse modo, o "*Cours de mathématiques*"ganhou uma nova versão, destinada à *artillerie*, a partir de 1770. Conforme Schubring (2005, p. 122), até o ano de 1791 sua edição da marinha viu onze reimpressões, enquanto a versão da artilharia teve duas reimpressões. Ainda segundo Schubring (2005, p. 123), por volta do ano de 1800 quatro autores publicam reedições dos livros de Bézout: Peyrard, Reynaud, Lacroix e Garnier. Além disso, suas obras foram traduzidas para outros países no século XIX.

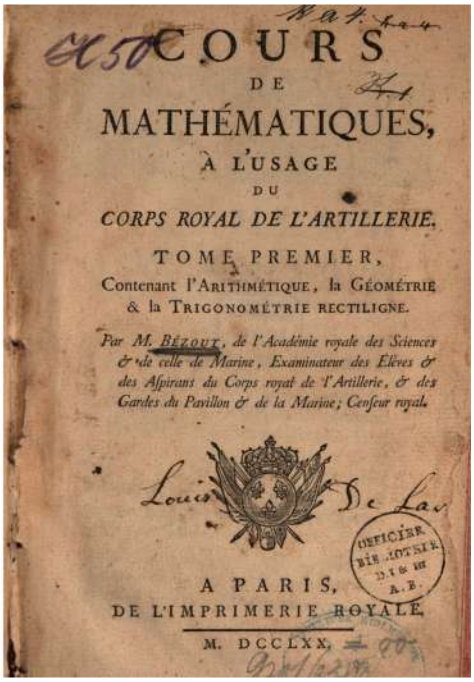


Figura 10 – Folha de rosto do livro *Cours de mathématiques, à l’usage du corps royal de l’artillerie, tome premier* (Bézout, 1770)

[6] Em 1763, o Due de Choiseul ofereceu a Bézout um cargo de professor e examinador em ciência matemática para jovens oficiais navais, o Pavilhão e os Guardas da Marinha. Por essa altura, Bézout tornou-se pai e precisava do dinheiro. Em 1768, ele trabalhou igualmente para o Corps of Artillery. Entre suas obras publicadas estão as notas de aulas dos cursos ministrados a esses alunos. A orientação desses livros é prática, uma vez que se destinava a ser instrumental na matemática elementar e possuir a mecânica necessária para a navegação ou a balística. Bézout priorizou a geometria em detrimento da álgebra, observando que iniciantes não se encontravam suficientemente familiarizados com o raciocínio matemático para entender a força das demonstrações algébricas, embora ele apreciasse demonstrações geométricas. Ele evitou deliberadamente o uso dos termos assustadores "axioma", "teorema", "scholium", e tentou se abster de argumentos densos ou com com muitos detalhes (tradução nossa).

Embora os livros didáticos escritos pelo próprio Lacroix a partir de 1797 tenham se tornado *best-sellers*, o "*Cours de mathématiques*"de Bézout continuou sendo publicado.

A edição de 1770 do *Cours de mathématiques, à l'usage du corps royal de l'artillerie, tome premier, Contenant l'Arithmétique, la Géométrie & la Trigonométrie Rectilinea* de Bézout não possui um índice usual dos tópicos abordados no livro. Há, porém, ao final de cada parte (aritmética, geometria e trigonometria retilínea) do *Cours de mathématiques*, um índice dos princípios contidos nessa parte do livro, que seriam como um conjunto de definições diversas, axiomas e técnicas ou métodos de resolução utilizados em algum momento na obra.

Concentraremos nossa pesquisa na primeira parte do livro, dedicada à aritmética. Cada uma dessas partes (aritmética, geometria e trigonometria retilínea) tem suas páginas numeradas separadamente e, a não ser que digamos o contrário, sempre que citarmos uma página dessa obra estaremos nos referindo às seções de aritmética. O conteúdo da Aritmética é composto por:

- Notions préliminaires sur la nature & les différentes espèces de Nombres
- Des Opérations de l'Arithmétique
- Des Fractions
- Des Nombres complexes
- De la formation des Nombres quarrés, & de l'extraction de leur Racine
- De la formation des Nombres cubes, & de l'extraction de leur Racine
- Des Raisons, Proportions & Progressions, & de quelques Règles qui en dépendent
- Des Logarithmes

Nos dois primeiros parágrafos do livro, Bézout esclarece ao leitor o que seriam as quantidades e qual seria o objeto de estudo da Aritmética - os números.

> On appelle, en général, *quantité*, tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminuition. L'étendue, la durée, le poids, &c. sont des quantités. Tout ce qui est quantité, est de l'objet des Mathématiques; mais l'Arithmétique qui fait partie de ces Sciences, ne considère les quantités, qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres.
>
> L'Arithmétique est donc la science des nombres: elle en considère la nature & les propriétés; & son but est de donner des moyens aisés, tant pour représenter les nombres, que pour les composer & décomposer, ce qu'on apelle calculer.
>
> [7] (Bézout, 1770, p. 1)

[7] Em geral, chamamos *quantidade* tudo que é suscetível de aumentar ou diminuir. Extensão, duração, peso, etc. são quantidades. Tudo o que é quantidade é objeto da Matemática; mas a aritmética, que faz parte dessas ciências, considera as quantidades apenas na medida em que são expressas em números. A aritmética é, portanto, a ciência dos números: considera sua natureza e propriedades; e seu objetivo é dar meios fáceis, tanto para representar números quanto para compor e decompor esses números, o que é chamado de *cálculo*. (tradução nossa).

A definição dada por Bézout para números complexos encontra-se no início da obra: [8]

> Um nombre qui est composé de parties rapportées, ainsi, à différentes unités, est ce qu'on apelle un nombre *complexe*; e par opposition, celui qui ne renferme qu'une seule espèce d'unités, s'apelle nombre *incomplexe*. $8^{\text{liv.}}$ ou 8 livres sont un nombre incomplexe. $8^{\text{liv.}}$ 17^{s} $8^{\text{ d}}$ ou 8 livres 17 sous 8 deniers, sont un nombre complexe. [9] (Bézout, 1770, p. 8)

Os parágrafos 40 a 49 do livro tratam da multiplicação em geral. No parágrafo 40, o autor define a operação de multiplicar o número a pelo número b como tomar o número a, uma quantidade b de vezes.

> Multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier de ces deux nombres, autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre. Multiplier 4 par 3, c'est prendre 4, trois fois[10] (Bézout, 1770, p. 23).

Bézout também define o número que está sendo adicionado como multiplicando e, a quantidade de vezes que esse número é tomado, como multiplicador; enquanto o resultado da operação é denominado produto. No entanto, destaca que quando os dois fatores da multiplicação são abstratos, tanto faz qual será considerado como multiplicando e qual será o multiplicador.

Já no parágrafo 45, Bézout reflete sobre a multiplicação entre duas grandezas, afirmando que, na multiplicação de dois números concretos é imprescindível distinguir quais deverão ser o multiplicando e o multiplicador; e que esse cuidado será necessário na multiplicação de números complexos.

> Mais lorsque par l'énoncé de la question, le multiplicateur & le multiplicande sont des nombres concrets, il importe de distinguer le multiplicande du multiplicateur: cette attention est principalement nécessaire dans la multiplication des nombres complexes, dont nous parlerons par la suite.
>
> Au reste, cela est toujours aisé à distinguer: la question qui conduit à la multiplication dont il s'agit, fait toujours connoître quelle est la quantité qu'il s'agit de répéter plusieurs fois; c'est-à-dire le multiplicande; & quelle est celle qui marque combien de fois on doit répéter le multiplicande; c'est-à-dire, quel est le multiplicateur. [11](Bézout, 1770, p. 25)

[8] Por algum tempo, essa havia sido a definição mais antiga de números complexos, com o significado estudado no presente trabalho, que havíamos encontrado. No entanto, em nossas pesquisas nos deparamos com uma definição de números complexos anterior a essa, no *Cours de Mathématique* de Charles-Étienne Camus (1699-1768), que será estudado no capítulo sobre os livros franceses.

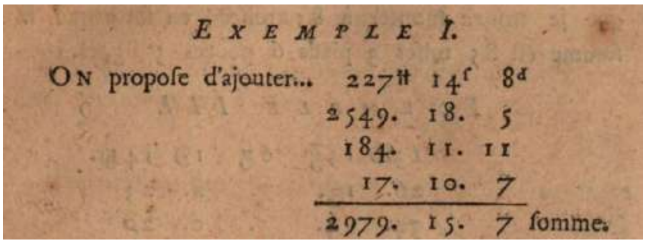
[9] Um número que é composto de partes, portanto, com unidades diferentes, é chamado de número complexo; em contraste, aquele que contém apenas um tipo de unidade, é chamado de número incomplexo. $8^{\text{liv.}}$ ou 8 *livres* é um número incomplexo. $8^{\text{liv.}}$ 17^{s} $8^{\text{ d}}$, ou 8 *livres* 17 *sous* 8 *deniers*, é um número complexo (tradução nossa).

[10] Multiplicar um número por outro é tomar o primeiro desses dois números, tantas vezes quantas unidades houver no outro. Multiplicar 4 por 3 é tomar 4, três vezes (tradução nossa).

[11] Mas quando, pela afirmação da questão, o multiplicador e o multiplicando são números concretos, é importante distinguir o multiplicando do multiplicador: essa atenção é principalmente necessária na multiplicação de números complexos, que discutiremos mais adiante. Para o resto, é sempre fácil de distinguir: a questão que leva à multiplicação em questão sempre faz saber qual quantidade deve ser repetida várias vezes; isto é, o multiplicando; e qual é o que marca quantas vezes é preciso repetir o multiplicando; isto é, o que é o multiplicador (tradução nossa).

Bézout inicia a seção destinada ao estudo dos números complexos dizendo que, ainda que as regras definidas até aquele instante também pudessem ser aplicadas para os números complexos, não deixava de ser conveniente estudar os números complexos separadamente, dado que as divisões de unidades desses números muitas vezes facilitavam os cálculos (Bézout, 1770, p. 79).

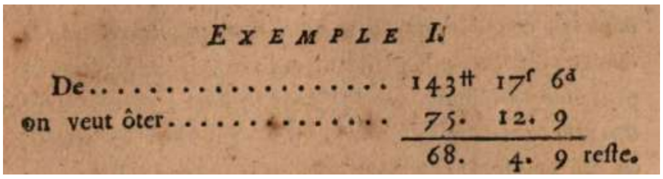
Na soma de números complexos, a indicação era que se escrevesse os números a serem somados uns embaixo dos outros, de modo que unidades de mesma espécie ficassem dispostas na mesma coluna vertical. O primeiro exemplo propõe a soma de quatro números complexos: 227 *livres* 14 *sous* 8 *deniers*, 2549 *livres* 18 *sous* 5 *deniers*, 184 *livres* 11 *sous* 11 *deniers*, e 17 *livres* 10 *sous* 7 *deniers*[12].


EXEMPLE I.

ON propofe d'ajouter... 227# 14ſ 8d
2549. 18. 5
184. 11. 11
17. 10. 7
2979. 15. 7 fomme.

Figura 11 – Adição de números complexos (Bézout, 1770, p. 81)

São fornecidos mais dois exemplos de somas de números complexos e, a seguir, Bézout inicia o estudo da subtração de números complexos. Nessa parte, a indicação do autor é similar à explicação da adição, orientando o leitor a escrever os números um embaixo do outro, de modo que unidades iguais fiquem na mesma coluna vertical, e a iniciar os cálculos pela unidade de menor espécie. Caso aconteça que, em uma certa unidade, o número que está disposto em cima seja menor do que o que está disposto embaixo, subtrai-se um da unidade imediatamente superior do número de cima, a fim de adicioná-la à unidade em que o cálculo está sendo efetuado.


EXEMPLE I.

De.................... 143# 17ſ 6d
on veut ôter.............. 75. 12. 9
68. 4. 9 refte.

Figura 12 – Subtração de números complexos (Bézout, 1770, p. 83)

Sobre a multiplicação de números complexos, Bézout inicia dizendo que a multiplicação dos complexos poderia ser feita reduzindo esses números a incomplexos e depois realizando-se a multiplicação de maneira análoga àquela que foi feita em seção anterior em que se estudava multiplicação de frações. Como exemplo, ele explica que a multiplicação de 54^{t} 3^{pi} por 42# 17^{s} 8^{d} [13] pode ser feita convertendo-se cada um desses números complexos a incomplexo,

---

[12] Na versão portuguesa do livro de Bézout (1791), *livres*, *sous* e *deniers* são traduzidos como libras, soldos e dinheiros, respectivamente.

[13] 54 toesas e 3 pés, vezes 42 libras, 17 soldos e 8 dinheiros.

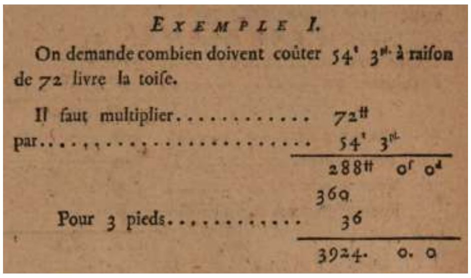
multiplicando-se então $\frac{327}{6}^{\mathrm{t}}$ por $\frac{10292}{240}\#$, o que seria igual a $\frac{3365484}{1440}\#$ ou, equivalentemente, $2337\#\ 2^{\mathrm{s}}\ 10^{\mathrm{d}}$. No entanto, acrescenta o seguinte parágrafo:

> Cette méthode s'étend à toute espèce de nombres complexes, mais elle exige plus de calcul que celle que nous allons exposer; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage. [14] (Bézout, 1770, p. 84)

Com a finalidade de iniciar a explicação do método utilizado para multiplicar números complexos, o autor define o que seria *partie aliquote* (parte alíquota) de um número.

> Un nombre qui est contenu exactement dans un autre, est dit *partie aliquote* de cet autre; ainsi 3 est partie aliquote de 12: il en est de même de 2, de 4 & de 6. [15] (Bézout, 1770, p. 84)

Após esclarecer o funcionamento do método das partes alíquotas, Bézout apresenta seu primeiro exemplo de multiplicação de números complexos: "*On demande combien doivent coûter 54^{t} 3^{pi} à raison de 72 livres la toise*. [16]"(Bézout, 1770).



EXEMPLE I.

On demande combien doivent coûter 54^{t} 3$^{pi.}$ à raiſon de 72 livre la toiſe.

Il faut multiplier............ 72$^{\#}$
par......................... 54^{t} 3$^{pi.}$
288$^{\#}$ 0^{f} 0^{d}
360
Pour 3 pieds............ 36
3924. 0. 0

Figura 13 – Multiplicação de números complexos (Bézout, 1770, p. 86)

Observe que, na verdade, a dimensão do multiplicando é libra/toesa, enquanto a dimensão do multiplicador é toesa (e suas subdivisões). Para chegar ao produto, primeiro Bézout realiza a conta 54 vezes 72, conforme as regras de multiplicação usuais. Depois, observando que 3 pés são iguais a $\frac{1}{2}$ toesa, o produto 3^{pi} vezes 72# ficaria igual à metade de 72#, isto é, 36#.

Dando continuidade à sua explanação, Bézout exibe mais dois exemplos similares a esse último, em que o multiplicando é incomplexo e o multiplicador é complexo.

---

[14] Este método se estende a todos os tipos de números complexos, mas exige mais cálculos do que o que exporemos; é por isso que não nos demoraremos nele (tradução nossa).

[15] Um número que está exatamente contido em outro, é uma *parte alíquota* dessa outra; assim, 3 é uma parte alíquota de 12: o mesmo é verdadeiro para 2, 4 e 6 (tradução nossa).

[16] Pergunta-se o quanto deve custar $54^{\mathrm{t}}\ 3^{\mathrm{pi}}$ à taxa de 72 libras por toesa (tradução nossa).

EXEMPLE II.

Si on avoit	72#
à multiplier par	54^t $5^{pi.}$
	288# 0^f 0.
	360
Pour 3 pieds	36
Pour 2 pieds	24
	3948. 0. 0

Figura 14 – Multiplicação de números complexos, em que o multiplicando é incomplexo e o multiplicador é complexo (Bézout, 1770, p.86)

EXEMPLE III.

Que l'on ait	72#
à multiplier par	5^t $4^{pi.}$ $8^{po.}$
	360# 0^f 0^d
Pour 3 pieds	36
Pour 1 pied	12
Pour 4 pouces	4
Pour 4 pouces	4
	416. 0. 0

Figura 15 – Multiplicação de números complexos, em que o multiplicando é incomplexo e o multiplicador é complexo (Bézout, 1770, p.87)

Posteriormente, o autor aborda o caso em que ambos, multiplicador e multiplicando, são complexos, através do exemplo IV.

EXEMPLE IV.

Si l'on a	72# 6^f 6^d
à multiplier par	27^t $4^{pi.}$ $8^{po.}$
	504# 0^f 0^d
	144
Pour 5 sous	6. 15. 0
Pour 1 sou	1. 7. 0
Pour 6 deniers	0. 13. 6
Pour 3 pieds	36. 3. 3
Pour 1 pied	12. 1. 1
Pour 4 pouces	4. 0. $4\frac{1}{3}$
Pour 4 pouces	4. 0. $4\frac{1}{3}$
	2009 0. $6\frac{2}{3}$

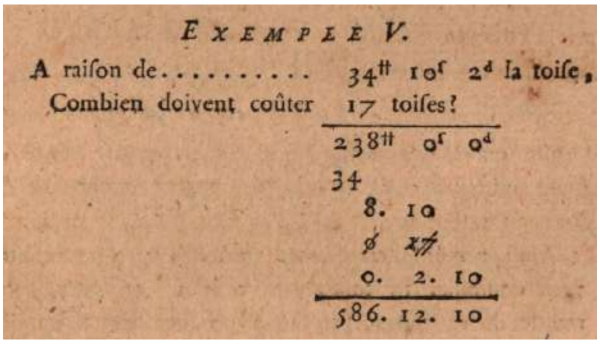
Figura 16 – Multiplicação de números complexos, em que multiplicando e multiplicador são complexos (Bézout, 1770, p.88)

Inicialmente, é feita a multiplicação de 72# por 27. Em seguida, multiplica-se 6^s por 27, decompondo os 6^s nas partes alíquotas 5^s e 1^s; e também 6^d por 27, notando-se que $6^d = \frac{1}{2}^s$.

Com o intuito de multiplicar todo o multiplicando por 4 pés, observa-se o produto do multiplicando inteiro pelas partes alíquotas $3^{pi} = \frac{1}{2}^{t}$ e $1^{pi} = \frac{1}{6}^{t}$. Por fim, as 8^{po} são divididas nas partes alíquotas 4^{po} e 4^{po}, cada uma igual a $\frac{1}{3}^{pi}$. Somando-se tudo, temos o total 2009# 0^{s} $6\frac{2}{3}^{d}$.

Bézout comenta, então, que até agora as partes do multiplicando a serem tomadas eram fáceis de se avaliar. Para o caso em que essas partes seriam mais difíceis de serem identificadas, ele apresenta dois exemplos.

> Jusqu'ici les parties du multiplicande qu'il a fallu prendre, ont été assez faciles à évaluer; mais dans les cas où ces parties seroient plus composées, on se conduiroit comme dans l'exemple suivant.[17] (Bézout, 1770, p.89)


EXEMPLE V.

A raison de......... 34# 10s 2d la toise,
Combien doivent coûter 17 toises?

238# 0s 0d
34
8. 10
~~0~~ ~~17~~
0. 2. 10
586. 12. 10

Figura 17 – Multiplicação de números complexos (Bézout, 1770, p.89)

Primeiro, multiplica-se 34 libras por 17, e em seguida os 10^{s} por 17, notando-se que $10^{s} = \frac{1}{2}$ #. Para realizar o produto de 2^{d} por 17, poderíamos observar que $2^{d} = \frac{1}{6}^{s}$, e portanto $\frac{1}{60}$ de 10^{s}. No entanto, para facilitar o cálculo, Bézout sugere que se tome primeiro a décima parte do produto dos 10^{s} por 17, risque esse resultado para que não seja considerado na soma do total, e que se calcule a sexta parte desse resultado.

No próximo exemplo, Bézout propõe: "*Combien pour 34# 10^{s} 2^{d} fera-t-on faire d'ouvrage à raison de une livre pour 17 toises?*"[18] (Bézout, 1770, p. 90).

[17] Até este ponto, as partes do multiplicando que eram necessárias tomar foram bastante fáceis de avaliar; mas nos casos em que essas partes estão mais compostas, procederíamos como no exemplo a seguir (tradução nossa).

[18] Quanta obra se deve fazer por 34 # 10^{s} 2^{d}, à razão de 17 toesas por 1 libra? (tradução nossa)

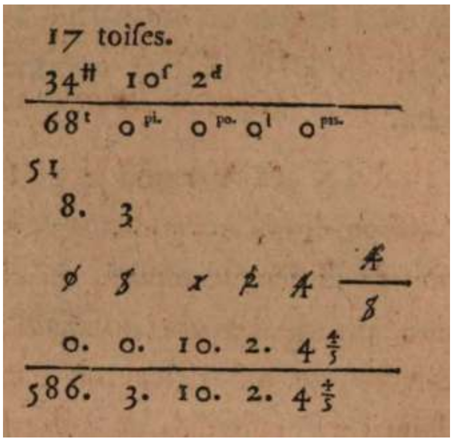


Figura 18 – Multiplicação de números complexos (Bézout, 1770, p. 90)

Note que, nesse caso, o multiplicando é na verdade 17 toesas/libra, enquanto o multiplicador consiste em $34 \# 10^{s} 2^{d}$.

Bézout inicia as contas a partir da multiplicação de 17 toesas por 34, para depois realizar o produto de 17 toesas por 10^{s}, tomando-se a metade das 17 toesas e obtendo-se 8^{t} 3^{pi}. Para facilitar os cálculos, divide-se esse último resultado por 10 (que seria equivalente à multiplicação de 17 toesas por 1^{s}). Esse resultado será riscado no fim para que não seja considerado no total. E, para obter o produto de 17 toesas por 2^{d}, divide-se o resultado anterior por 6.

Antes de concluir a seção dedicada à multiplicação de números complexos, Bézout afirma então que:

> Nous avons donné cet exemple, principalement pour confirmer ce que nous avons dit (45), qu'il importoit de distinguer le multiplicande, du multiplicateur, lorsqu'ils sont tous les deux concrets: en effet, dans l'exemple précédent, ainsi que dans celui-ci, les facteurs du produit sont également 17 toises & $34 \# 10^{s}$ 2^{d}, cepedant les deux produits sont différens. [19] (Bézout, 1770, p.90-91)

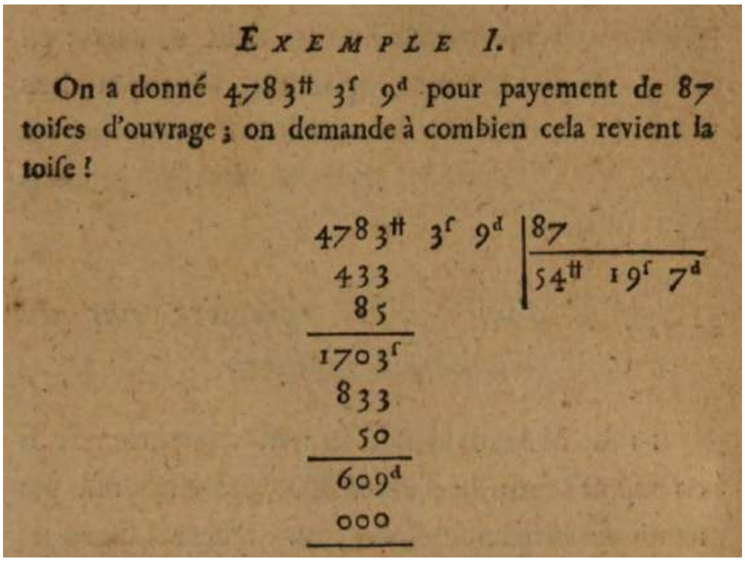
Nessa edição do livro de Bézout não é feito nenhum comentário adicional acerca da comutatividade ou não comutatividade da multiplicação. [20].

O estudo da divisão envolvendo números complexos é iniciado com o caso particular em que somente o dividendo é complexo. É proposto o exemplo seguinte: "*On a donné 4783 # 3^{s} 9^{d} pour payement de 87 toises d'ouvrage; on demande à combien cela revient la toise?* [21]"(Bézout, 1770)

[19] Damos esse exemplo principalmente para confirmar o que dissemos (45), que é importante distinguir o multiplicando e o multiplicador, quando ambos são concretos: de fato, no exemplo anterior, bem como neste, os fatores do produto são 17 toesas e $34 \# 10^{s}$ 2^{d}, mas os dois produtos são diferentes (tradução nossa).

[20] Uma observação é feita na tradução portuguesa do livro, de 1791.

[21] 4783 # 3^{s} 9^{d} foram entregues para o pagamento de 87 toesas de trabalho; quanto custa cada toesa? (tradução nossa).



EXEMPLE I.

On a donné $4783^{\#}\ 3^{f}\ 9^{d}$ pour payement de 87 toifes d'ouvrage; on demande à combien cela revient la toife!

$$
\begin{array}{r|l}
4783^{\#}\ 3^{f}\ 9^{d} & 87 \\
\cline{2-2}
433 & 54^{\#}\ 19^{f}\ 7^{d} \\
85 & \\
\hline
1703^{f} & \\
833 & \\
50 & \\
\hline
609^{d} & \\
000 & \\
\end{array}
$$

Figura 19 – Divisão de número complexo por incomplexo (Bézout, 1770, p.92)

A divisão é iniciada pelas libras. 4783# divididas por 87 resultam em 54# de quociente e resto 85#. Estas últimas, convertidas em soldos e somadas aos 3^{s} do dividendo são iguais a 1703^{s}, que por sua vez são divididos por 87, obtendo-se 19^{s} no quociente e 50^{s} no resto. Os 50^{s} são convertidos em dinheiros, e a eles são adicionados os 9^{d} do dividendo, obtendo-se 609^{d}. Dividindo os 609^{d} por 87, obtemos 7^{d}.

Bézout faz, então, a observação abaixo acerca da unidade do quociente no caso em que dividendo e divisor possuírem a mesma espécie de unidade.

> Mais si le dividende & le diviseur ont des unités de même espèce, il faut, avant de faire la division, examiner si le quotient doit être de même espèce qu'eux; ce que l'état de la question décide toujours.[22] (Bézout, 1770, p.93)

São apresentados para essa parte, em que dividendo e divisor possuem unidades da mesma espécie, dois exemplos. No primeiro, questiona-se "1243 livres ont produit un bénéfice de 7254 livres, à combien cela revient-il par livre?[23]"(Bézout, 1770, p.93). Bézout afirma ser evidente que a unidade do quociente deverá ser da mesma espécie do que as unidades do dividendo e do divisor. Divide-se então 7254# por 1243# de forma análoga ao que já foi feito no exemplo I exposto na figura acima.

No segundo caso, pergunta-se "*combien pour 7954# 11^{s} 7^{d} fera-t-on faire d'ouvrage à raison de 72 livres la toise?*[24]"(Bézout, 1770, p. 94). Nesse caso, o autor explicita que o quociente deverá ser dado em toesas, e partes da toesa. O cálculo consistiria em converter as 7954# 11^{s} 7^{d} em dinheiros (resultando em 1909099^{d}), assim como as 72# (que equivalem a 17280^{d}). Em seguida, far-se-ia a divisão desses dois valores, obtendo $110^{t}\ 2^{pi}\ 10^{po}\ 6^{l}\frac{19}{20}$.

[22] Mas se o dividendo e o divisor tiverem unidades do mesmo tipo, é necessário, antes de dividir, examinar se o quociente deve ser do mesmo tipo que eles; o que o enunciado da questão sempre esclarece (tradução nossa).

[23] Sabendo-se que 1243 libras produzirão um lucro de 7254 libras, qual a quantidade de lucro referente a cada libra? (tradução nossa.)

[24] Quantas toesas de obra devem ser feitas por 7954# 11^{s} 7^{d}, à razão de 72 libras por toesa? (tradução nossa).

Para o caso particular em que dividendo e divisor são complexos, Bézout orienta a transformar o divisor em número incomplexo, na unidade de sua ínfima espécie. Em seguida, multiplica-se o dividendo pela quantidade de vezes que essa ínfima espécie do divisor cabe na unidade principal do divisor, para depois realizar a divisão desse resultado pelo divisor escrito na unidade de sua ínfima espécie. Segue o exemplo: "*57^t 5^{pi} 5^{po} d'ouvrage ont été payées 854# 17^s 11^d; on demande à combien cela revient la toise?*[25]"(Bézout, 1770, p. 95)

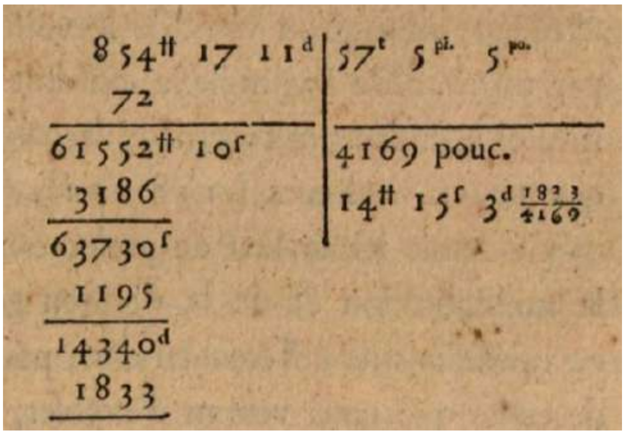


Figura 20 – Divisão de números complexos (Bézout, 1770, p. 95)

Primeiro, transformou-se o divisor 57^t 5^{pi} 5^{po} em 4169 polegadas. Como cada toesa é composta por 72 polegadas, multiplicou-se o dividendo por 72, obtendo 61552# 10^s. Daí, realiza-se a divisão de 61552# 10^s por 4169^{po}, da mesma forma como foi feita no caso particular em que o divisor era complexo.

Bézout explica que a razão da regra enunciada acima para a divisão de números complexos reside no fato de que dividir um número por uma fração é igual a multiplicá-lo pelo inverso dessa fração. Portanto, no nosso caso, dividir 854# 17^s 11^d por $\frac{4169}{72}^t$ é igual a multiplicar 854# 17^s 11^d por $\frac{72}{4169}^t$.

O autor termina a seção dedicada à divisão de números complexos com um parágrafo que abre uma nova dimensão, desconhecida, do problema da multiplicação: no trecho, transcrito abaixo, Bézout cita a existência do que chama multiplicação e divisão geométricas.

> Ce seroit ici le lieu de parler du toisé ou de la multiplication & de la division géométriques: ces opérations ne diffèrent en rien, pour le procédé, de celles que nous venons d'exposer; en sorte qu'il n'y auroit ici d'autre chose à ajouter que d'expliquer quelle est la nature des unités des facteurs & du produit, mais cela appartient à la Géométrie. Nous remettrons donc à en parler, jusqu'à ce que nous soyons arrivés à la Géométrie.[26] (Bézout, 1770, p. 96)

[25] Uma obra de 57^t 5^{pi} 5^{po} custou 854# 17^s 11^d; quanto terá custado cada toesa dessa obra? (tradução nossa).

[26] Esse seria o lugar para se falar também da multiplicação e da divisão geométricas: no entanto, estas operações não diferem em nada, em seu processo, daquilo que acabamos de explicar; a não ser a natureza das unidades dos fatores e do produto, mas isso pertence à Geometria. Então, conversaremos sobre esse assunto quando chegarmos à Geometria (tradução nossa).

Procuramos então, nesse mesmo volume, a parte em que Bézout trata da multiplicação geométrica. Nessa parte, ele afirma que dizer é errado dizer que uma linha multiplicada por outra gera uma superfície. Ele considera que, nessa multiplicação, o multiplicando já teria a unidade do produto, enquanto o multiplicador serviria para nos informar quantas vezes o multiplicando deverá ser repetido.

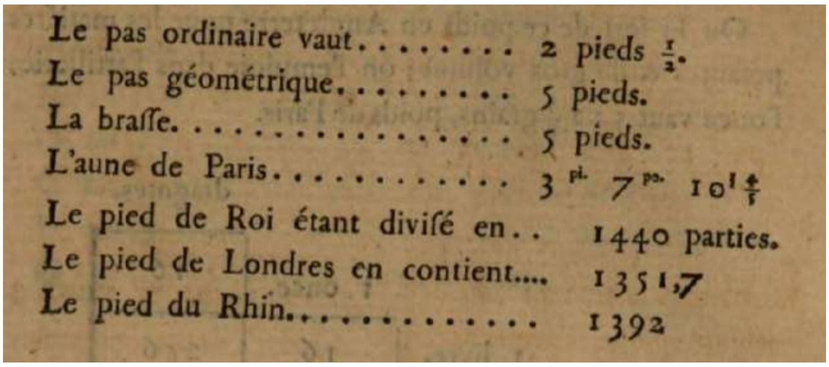
Bézout ainda afirma, alguns parágrafos depois, ao tratar "*Du Toisé des Surfaces*", que tudo isso se constitui um novo ramo da questão da multiplicação de grandezas (grandezas geométricas), ao qual não se aplicam as regras dadas na parte da Aritmética, no estudo sobre os números complexos. No entanto, pela amplitude desse assunto, iremos estudá-lo em um capítulo separado.

Os exemplos de Bézout, em que se multiplica 17 toesas por 34# 10^s 2^d, e vice-versa, são aqueles que foram criticados por Ampère:

> Antes de terminar essa pequena digressão, eu creio que devo dizer uma palavra de uma passagem de Bezout sobre a natureza da operação de que eu trato, e que tendia a derrubar o primeiro princípio, que consiste na invariabilidade do produto qualquer que seja aqueles dois fatores que servem de multiplicadores. Encontra-se no artigo 17 da Artilharia duas multiplicações de 17 toesas por 34# 10^s 2^d. Em uma delas o produto é exprimido em libras e em outra em toesa, e disse que somente deram esses dois exemplos de multiplicação para provar que mudando o multiplicando em multiplicador pode-se mudar o produto. (Ampère *apud* Schubring, 2002, p. 36) (Tradução de Gert Schubring)

O assombro de Ampère com a afirmação de Bézout de que a multiplicação de duas grandezas poderia ser não comutativa exprime bem os conceitos estabelecidos e explicitados por Arnauld sobre a natureza da operação da multiplicação. Estudaremos, nos próximos capítulos, a disseminação do ensino dos números complexos e o desenvolvimento da maneira de se operar com tais números.

Ao final dessa edição da Aritmética de Bézout há, ainda, uma tabela de medidas contemporâneas, em que se destacam as unidades monetárias (*livre*, *sou* e *denier*), unidades de tempo (*jour*, *heure*, *minute*, *seconde* e *tierce*); unidades de peso (*livre*, *marc*, *once*, *gros* ou *dragme*, *denier* ou *scrupule*, *grain*); pesos ingleses de Troy, utilizados na Inglaterra para materiais pequenos e preciosos (*livre*, *once*, *dragme*, *scrupule*, *grain*); pesos ingleses, utilizados na Inglaterra para materiais de grande volume ou pesados, e também na artilharia (*quintal*, *livre*, *once*, *dragme*); e, por último, unidades de comprimento (*toise*, *pied*, *poud*, *ligne* e *point*). (Bézout, 1770, p. 197-200). Em cada caso, informa-se ao leitor a forma abreviada de cada unidade, além de suas relações com a unidade principal e com a unidade imediatamente superior.



Le pas ordinaire vaut........ 2 pieds $\frac{1}{2}$.
Le pas géométrique......... 5 pieds.
La braſſe................ 5 pieds.
L'aune de Paris............ 3 $^{pi.}$ 7 $^{po.}$ 10 ^{l} $\frac{4}{5}$
Le pied de Roi étant diviſé en.. 1440 parties.
Le pied de Londres en contient.... 1351,7
Le pied du Rhin............. 1392

Figura 21 – Outras unidades de medida apresentadas ao final da Aritmética (Bézout, 1770, p. 200)

1.3 Metodologia

Apesar de existirem pesquisas e publicações para a área relacionada - como a introdução do sistema métrico em vários países e as resistências a esse sistema nas respectivas sociedades - o assunto principal dessa dissertação constitui praticamente uma área "virgem". Assim, o primeiro passo dessa pesquisa consiste em colecionar as fontes primarias, além das fontes já identificadas.

Fica patente dar um foco ao próprio país, o Brasil, e procurar fontes primárias em países com línguas para mim acessíveis, como Portugal, Inglaterra e EUA. Mas, visto a importância da França para a matemática escolar, procuramos por fontes relevantes também nesse país. Os tipos de fontes serão, basicamente, livros didáticos, enciclopédias (verbetes explicativos), orientações curriculares (programas), e reflexões sobre o ensino da matemática e sobre os fundamentos da aritmética.

Depois de constituirmos uma base de fontes primárias, pensamos em suas análises. O método principal utilizado foi a análise documental. No entanto, como era de se esperar, as fontes encontradas foram, em sua maior parte, documentos sobre as práticas de se ensinar o assunto "números complexos", enquanto houve poucas e raras reflexões teóricas sobre o assunto "números complexos". O desafio consistiu, assim, em revelar das práticas os conceitos subjacentes sobre os fundamentos da aritmética.

Também gostaríamos de ter utilizado a história oral para conhecer mais sobre o tema "números complexos" no ensino de matemática, entrevistando professores ou alunos que tenham vivenciado essa prática; o que não foi possível devido à dificuldade de se encontrar quem as tivesse vivenciado, por ser um assunto já obsoleto. Apesar de termos encontrado um livro brasileiro do século XXI em que esse assunto é tratado[27], não obtivemos sucesso em contactar seu autor.

[27] Estudaremos esse livro no capítulo 3.

Capítulo 2

O ensino dos números complexos no Brasil

Iniciaremos nossa análise de como ocorria o ensino dos números complexos no Brasil a partir dos programas curriculares do Colégio Pedro II dos séculos XIX e XX pois, na ausência de um ministério que determinasse os programas curriculares, os programas do Pedro II eram seguidos pelas demais instituições de ensino. A partir de 1931, a responsabilidade de expedir os programas de ensino passa a ser do recém criado Ministério dos Negócios da Educação e Saúde Pública.

Em seguida, apresentaremos algumas unidades pertencentes ao sistema metrológico antigo e suas relações com as unidades do sistema métrico decimal. Por último, estudaremos a introdução do sistema métrico no Brasil.

Há, ainda, dois fatores merecedores de destaque no que tange ao ensino dos números complexos no Brasil:

- Paralelismo no uso do termo números complexos, a partir da designação análoga de Gauss aos imaginários em 1831. Por exemplo, na série de manuais de matemática de Cecil Thiré (1892 - 1963), professor do Pedro II, podemos verificar que os números complexos, no sentido em que abordamos nesse trabalho, eram estudados no 1^o ano ginasial (atual 6^o ano); enquanto os números complexos, tendo o significado que conhecemos hoje, eram estudados no 3^o ano ginasial (equivalente ao 3^o ano do Ensino Médio atual) por meio de uma mesma série de livros.

- Longevidade do ensino dos números complexos com o significado que estamos estudando. Como já dissemos anteriormente, encontramos um livro didático brasileiro, destinado à preparação para escolas militares dos anos atuais (2004), onde o conceito números complexos ainda é contemplado (de modo breve, apenas três páginas ao todo).

Esses dois fatores serão vistos com mais detalhe em nosso próximo capítulo, onde estudaremos os livros didáticos adotados no Brasil.

2.1 Os programas curriculares do Colégio de Pedro II

A partir da dissertação *Os programas de ensino de matemática do colégio Pedro II: 1837 - 1932*, de Josilene Beltrame (2000), tivemos acesso aos programas de ensino dessa instituição, desde a sua fundação em 1837 até 1931, quando ocorre a Reforma Francisco Campos.

Do ano de 1837 a 1849, muito pouco é conhecido a respeito do que seria ensinado nas oito séries do Colégio. Sabe-se apenas que, de 1837 a 1840, a Matemática (Álgebra, Aritmética ou Geometria) era ensinada em todas as séries. A partir de 1841, o Decreto n^o 62 de 1^o de fevereiro alocou em 7 anos o curso de bacharelado no Pedro II, inclui o estudo da Trigonometria na disciplina Matemática e restringe as aulas de Matemática aos 3 últimos anos (Beltrame, 2000).

Segundo Doria, *em sua Memória histórica do Colégio de Pedro Segundo (1997)*, o primeiro documento curricular impresso do Colégio Pedro II é o programa de exame de 1850. Tanto no programa de 1850, assim como nos três programas seguintes, de 1851, 1854 e 1855, o estudo dos números complexos[1] é realizado no 5^o, o primeiro ano em que a Matemática é contemplada.

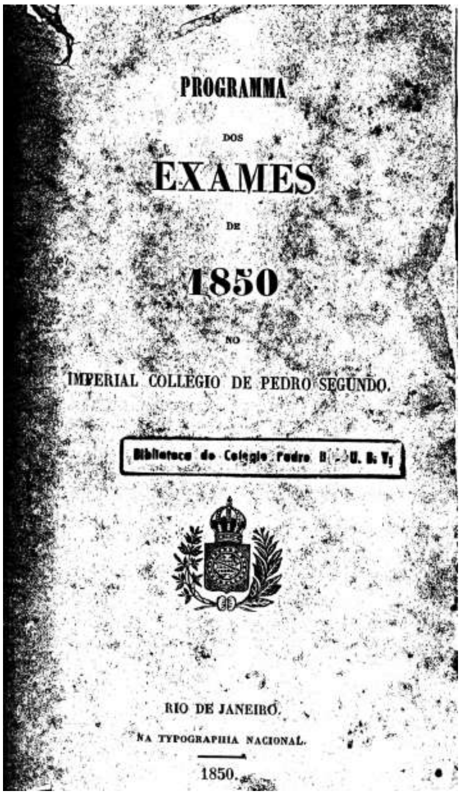

PROGRAMMA
DOS
EXAMES
DE
1850
NO
IMPERIAL COLLEGIO DE PEDRO SEGUNDO.
RIO DE JANEIRO.
NA TYPOGRAPHIA NACIONAL.
1850.

Figura 22 – Primeiro documento curricular impresso do Colégio Pedro II (1850) (Beltrame, 2000, p. 29)

Segundo Beltrame, o regulamento de 17 de janeiro de 1855 fixa o estudo da Aritmética

[1] Em todos os programas analisados na dissertação da Beltrame (2000), de 1837 a 1932, o termo "número complexo"refere-se ao objeto de estudo do presente trabalho. Os complexos de Gauß são denominados, nesses programas de ensino, como "números imaginários".

nos dois primeiros anos (do total de sete anos) do Colégio Pedro II, o que se reflete no Programa de Ensino de 1856, nos quais os números complexos são estudados durante o 1^o ano, sendo utilizado o livro de aritmética de Cristiano Brnedito Ottoni. Já o Decreto n^o 2006 de 24 de outubro de 1857, de Couto Ferraz, distribui a Aritmética aos três primeiros anos. No Programa de Ensino de 1858, percebemos que os números complexos são vistos no 2^o ano, também com o *Compendio de Arithmetica* de Ottoni.

O Programa de Ensino de 1860 altera o livro de Aritmética adotado no 1^o ano, passando a ser o *Elementos de Aritmética* de José Joaquim D'Avila, e institui a permanência do livro de Ottoni para os outros anos de Aritmética. O Programa de Ensino de 1861 mantém os mesmos livros de Aritmética, e também mantém o ensino dos complexos em seu 2^o ano.

Em 1862, um novo decreto determina que a Matemática será ensinada do 2^o ao 5^o ano, sendo a Aritmética estudada no 2^o e no 3^o ano. Esse programa se diferencia do anterior por contemplar o sistema métrico decimal pela primeira vez, no 5^o ano do curso, e por voltar a adotar apenas o livro de Ottoni em toda a Aritmética. Segundo Beltrame, os próximos Programas, de 1863 e 1865, são iguais ao de 1862, e neles vemos que os números complexos eram estudados ainda no 2^o ano.

Percebemos então que a introdução do sistema métrico decimal ocorre tardiamente nos programas do Pedro II, apesar de já existirem livros didáticos brasileiros que contemplavam o sistema métrico decimal desde 1832, pelo menos (a primeira edição do *Compendio de Arithmetica Composto para o Uso das Escolas Primarias do Brasil*, de Candido Baptista de Oliveira, já incluía o sistema métrico decimal). Nos programas dos próximos dez anos, o sistema métrico deverá estar incluído em todos os programas de ensino, de acordo com o que dita a Lei Imperial n. 1157, de 26 de junho de 1862 (vide p. 29 desse trabalho).

Já em 1870, conforme Beltrame,

> A reforma Paulino de Souza através do Decreto n^o 4468 de 1^o de fevereiro de 1870 reformou os estudos no Pedro II. O novo Regulamento manteve as matérias num curso único de 7 anos e estabeleceu que o 1^o ano do curso, apenas cobriria as lacunas do ensino elementar. Em contrapartida, criou os "exames de admissão" com o objetivo de garantir os esperados conhecimentos do ensino primário. Tal exame exigia como conhecimentos de matemática apenas as quatro operações fundamentais da Aritmética e o sistema decimal de pesos e medidas. (Beltrame, 2000, p.44)

No Programa de Ensino de 1870, a Matemática é contemplada nos cinco primeiros anos do bacharelado, e os complexos continuam sendo estudados no 2^o ano, assim como o sistema métrico decimal (comparado), mas o livro utilizado para esse último é o *Noções sobre o systema métrico decimal*, de João Bernardo de Azevedo Coimbra.

Beltrame ainda destaca que

> No ano de 1876, sofreria o Colégio a 1^o de março mais uma reforma curricular. Ela extinguiu as matrículas avulsas mas entretanto encontrou uma outra forma de apressar os estudos exigidos para a matrícula nos cursos superiores colocando

> as matérias necessária aos preparatórios nos anos iniciais. Juntando-se a essa redistribuição o sistema de exames finais, estariam os alunos após 5 anos de estudos aptos a matricular-se em qualquer faculdade. Ou seja, o Colégio acabaria por reduzir-se de uma vez a curso de preparatório. (Beltrame, 2000, p.46)

De acordo com o Programa de Ensino de 1877, a Matemática seria vista no 1^o, no 4^o e no 5^o ano. O livro de Aritmética adotado no 1^o ano foi o *Noções de Arithmetica* de Manoel Olympio Rodrigues da Costa, sendo que o 4^o ano que iria abranger em seus conteúdos o estudo de metrologia e operações sobre os números complexo, com a adoção do *Cours Complet d'arithmétique theórique e pratique*, de Charles Marie Adrien de Guilmin. O sistema métrico decimal não consta nesse programa.

Já em 1878, uma nova reforma foi realizada com o objetivo de melhorar o preparo científico dos alunos. No programa de 1879, a Matemática é incluída nos quatro primeiros anos, e a Aritmética encontra-se presente no 1^o e no 2^o ano, começando, curiosamente, com o estudo de frações (ao invés de se iniciar pelos números inteiros). No 1^o ano consta o tópico metrologia e operações sobre os números complexos, através do *Tratado de Arithmetica*, de Coqueiro (Beltrame, 2000). Assim como no programa anterior, o sistema métrico decimal não é citado.

A próxima reforma, em 1881, reorganizou matérias e disciplinas, instruindo que o ensino de Matemática abrangesse os quatro primeiros anos e que a Aritmética fosse estudada no 1^o ano, utilizando-se do *Noções de arithmetica*, de Manoel Olympio Rodrigues da Costa, além do *Tratado de Arithmetica*, do Coqueiro. No entanto, os números complexos não constam no programa de ensino do Colégio pela primeira vez desde 1850. Em contraposição, o sistema métrico decimal, assim como sua comparação com o sistema metrologico antigo, é visto no 1^o ano.

No programa seguinte, de 1882, os números complexos continuam excluídos do ensino de Matemática e são utilizados os mesmos livros que no ano anterior. O sistema métrico decimal permanece como conteúdo a ser estudado no 1^o ano.

A reforma Benjamin Constant[2], em 1890, foi responsável por reformar todo o ensino público, e em todas as esferas - primário, secundário e superior, do país. Em 1892, a Matemática é delegada aos quatro primeiros anos, com a seguinte distribuição: 1^o ano - *Noções de Arithmetica e Nomenclatura Geometrica*, 2^o ano - *Arithmetica*, 3^o ano - *Arithmetica e Álgebra* e, por fim, 4^o ano - *Trigonometria Rectilinea e Geometria Plana*. Apesar de permear os três primeiros anos, a Aritmética fica sem os números complexos e também sem o sistema métrico decimal. O livro utilizado para a Aritmética é o do Serrasqueiro. Segundo Beltrame, em 1892,

> foi extinto o Ministério da Instrução Pública, Correios e Telégrafos ficando os assuntos e interesses do ensino subordinados ao novo Ministério da Justiça e Negócios Interiores sob a presidência de Fernando Lobo Leite Pereira. (Beltrame, 2000, p.63)

[2] Na época, primeiro ministro da Secretaria de Estado dos Negócios da Instrução Pública, Correios e Telégrafos

Em 1893 os números complexos voltam a fazer parte do currículo do Colégio, durante os estudos de Aritmética do 1^o ano, sendo utilizado o livro do Serrasqueiro. No entanto, o sistema métrico decimal não é citado nesse programa. O 2^o ano é dedicado à Álgebra elementar, enquanto no 3^o e no 4^o ano são vistas tanto a Geometria, quanto a Trigonometria.

Já em 1895, a Matemática continua presente nos quatro primeiros anos do curso, porém com estrutura diversa da anterior: 1^o ano - *Arithmetica*, 2^o ano - *Arithmetica e Algebra*, 3^o ano - *Geometria e Trigonometria*, e 4^o ano - *Geometria geral, Calculo e Geometria descriptiva*. São utilizados para a aritmética os livros de João José Luiz Vianna e de Aarão e Luciano Reis. Consta no 1^o ano o tópico "*Metrologia em geral e especialmente a decimal*", mas os números complexos são excluídos.

O ensino dos números complexos volta a fazer parte no programa de ensino de 1897, sendo citado no tópico "*Metrologia - diversos systemas de pesos e medidas. Numeros complexos e metricos decimaes*"do 1^o ano, no qual era estudada a Aritmética. O livro utilizado era o *Elementos de Arithmetica*, de João José Luiz Vianna.

No ano de 1898, a Matemática passa a ser estudada em todos os 7 anos do curso. Os números complexos continuam fazendo parte do 1^o ano, assim como o sistema métrico decimal, sendo utilizados durante esse ano os compêndios de aritmética de João José Luiz Vianna e de Aarão e Luciano Reis.

Em 1899, ao invés de a Matemática ser estudada nos 7 anos, ela passa a ser vista durante 5 anos: 1^o ano - *Aritmética*, 2^o ano - *Álgebra e Aritmética*, 3^o ano - *Geometria e Álgebra*, 4^o ano - *Trigonometria, Geometria e Álgebra*, e 6^o ano - *Matemática*. O 1^o ano, em que se continua a ver a Aritmética, são ensinados os números complexos e o sistema métrico decimal .

A reforma Epitácio Pessoa ocorre em 1901. No entanto, o programa de 1901 não difere do anterior no que diz respeito ao nosso interesse.

Em 1911, foi empreendida uma nova reforma por Rividávia Correia, conhecida como a Lei Rividávia. No programa de 1912, o ensino de Matemática ficou distribuído da forma seguinte: 1^a série - *Aritmética*, 2^a série - *Aritmética e Álgebra*, 3^a série - *Geometria e Álgebra* e 4^a série - *Trigonometria, Geometria e Álgebra*, e 6^o ano - *Matemática*. Na 1^a série ainda eram estudados os números complexos, mas foi excluído o sistema métrico decimal.

De 1915 a 1924 esteve em vigor a reforma elaborada por Carlos Maximiliano. O programa de 1915 reduz a duração do curso para cinco anos, com a seguinte estrutura no que diz respeito à Matemática: 2^o ano - *Aritmética*, 3^o ano - *Geometria Plana e Álgebra*, 4^o ano - *Trigonometria e Geometria no espaço*. Nenhum livro didático é indicado nesse programa, para nenhuma disciplina, mas os tópicos que deverão ser ensinados em cada ano são descritos detalhadamente: na 49^a lição, são ensinadas

> Vantagens do systema metrico. Sua superioridade sobre os outros systemas. 1o Simplicidade. 2o Facilidade dos calculos, pelo facto do systema metrico ser decimal. 3o O systema metrico tem um base fixa. 4o Aos systemas antigos faltava a estabilidade e uniformidade. (Programa de Ensino de 1915 *apud* Beltrame, 2000, p.204)

Na próxima lição, 50^a, temos

> Numeros complexos. Operações sobre os numeros complexos. Transformações diversas dos numeros complexos. Primeira transformação: reduzir um numero complexo a unidades do menor submultiplo. Segunda transformação: dos submultiplos (ou dos multiplos inferiores) de um numero complexo extrahir os multiplos superiores. (Programa de Ensino de 1915 *apud* Beltrame, 2000, p.204)

Os conteúdos de matemática que constam no programa de 1919 não diferem muito dos de 1915. No entanto, a Aritmética passa a ser estudada nos três primeiros anos, com os números complexos e os sistemas métricos sendo vistos ainda no 1^o. O programa indica apenas o livro de Aritmética, que seria o Arithmetica da F.I.C., traduzido por Raja Gabaglia.

O programa de 1923 traz, diferente do que aconteceu desde 1912, os livros indicados para cada disciplina. Para a Aritmética, que passa a ser estudada nos dois primeiros anos, foi adotado o *Lições de Arithmetica*, de Euclides Roxo. Os números complexos e os sistema métricos constam nos conteúdos a serem abordados no 2^o ano (Beltrame, 2000). De acordo com Beltrame,

> A partir dessa época muitos professores de matemática do Colégio passaram a montar suas próprias apostilas de aula, que depois se tornariam livros adotados. Além desses livros de professores do Colégio, também observamos uma grande adoção dos livros da Coleção F. I. C. (Beltrame, 2000, p.106)

A reforma de 1925 aumenta a duração do curso secundário, que desde a Reforma Carlos Maximiliano era de cinco anos, para 6 anos; e distribui o conteúdo de Matemática do modo seguinte: 1^o ano - *Aritmética*, 2^o ano - *Aritmética*, 3^o ano - *Álgebra* e 4^o ano - *Geometria e Trigonometria*. Desse modo, o programa de 1926 traz o sistema métrico decimal e os números complexos no 1^o ano de curso, com a indicação dos livros *Lições de Arithmetica*, por Euclides Roxo; *Questões de Arithmetica*, por Cecil Thiré; e *Exercicios de Arithmetica*, por H. Costa, E. Roxo e O. Castro.

Conforme o programa de 1928, a Matemática continua presente nos quatro primeiros anos de curso, com a mesma distribuição. Os complexos e o sistema métrico decimal continuam no 1^o ano, e os livros indicados para a Aritmética são exatamente os mesmos.

Em 1929, um novo programa distribui a Matemática vista nos quatro primeiros anos do seguinte modo: 1^o ano - *Matemática*, 2^o ano - *Aritmética*, 3^o ano - *Álgebra* e 4^o ano - *Geometria e Trigonometria*. O conteúdo desse 1^o ano abrangia Aritmética, Álgebra e Geometria, englobando os números complexos e o sistema métrico decimal. Os mesmos livros continuam sendo adotados para a Aritmética. Além disso, o 6^o ano consistiria um

> curso complementar para os estudantes que se destinarem às Escolas Militares e Politécnicas: Álgebra elementar (incluindo estudos do Cálculo infinitesimal), Geometria elementar, Trigonometria, noções de Geometria analítica, Álgebra superior, noções de Geometria descritiva, Desenho geométrico. (Beltrame, 2000, p.120)

O programa de 1930 apresenta uma pequena mudança na distribuição dos conteúdos matemáticos: 1^o ano - *Matemática*, 2^o ano - *Matemática*, 3^o ano - *Álgebra* e 4^o ano - *Geometria e Trigonometria*. Os números complexos continuam sendo estudados no 1^o ano, assim como o sistema métrico decimal e sua comparação com outros sistemas metrológicos, e para a Aritmética são indicados o (*Curso de Mathematica Elementar,* 1^o *volume*, por Euclides Roxo; *Questões de Arithmetica*, por Cecil Thiré; e *Exercicios de Arithmetica*, por H. Costa, E. Roxo e O. Castro.). O 6^o ano permanece com a mesma finalidade que havis no programa anterior.

O Decreto n^o 19.890, de 1931, dividiu o ensini secundário em dois ciclos: o ciclo fundamental, com duração de cinco anos, obrigatório para o ingresso em qualquer escola superior; e o ciclo complementar, com dois anos de duração e obrigatório para as faculdades de Direito, Medicina, Odontologia, Farmácia, Engenharia e Arquitetura. Além disso, "o ensino da matemática continuava presente em todos os 5 anos do curso fundamental, no 1^o ano do complementar de Medicina, Odontologia e Farmácia e, no 1^o e 2^o anos do complementar de Engenharia e Arquitetura. A distribuição da Matemática no ciclo fundamental ficou do seguinte modo: 1^a série - *Iniciação geométrica, Aritmética e Álgebra*, 2^a série - *Iniciação geométrica, Aritmética e Álgebra*, 3^a série - *Aritmética, Álgebra e Geometria*, 4^a série - *Aritmética, Álgebra e Geometria* e 5^a série - *Aritmética, Álgebra e Geometria*. Os complexos não constam nos conteúdos desse programa. Na primeira série, é estudado o sistema métrico decimal, além do sistema inglês de pesos e medidas.

Desse modo, verificamos que o ensino dos números complexos consta na maioria dos programas do colégio Pedro II de 1850 a 1930 (com exceção dos programas de 1881, 1882, 1892, 1895 e 1901). Até 1879 (inclusive), os números complexos constavam em todos os programas de ensino do colégio.

2.2 Sistema metrológico brasileiro antigo

Antes da implantação do sistema métrico no Brasil, diversas unidades de medida foram aqui utilizadas. Desde a Independência, a maioria dessas unidades eram provenientes daquelas empregadas na Corte Portuguesa; no entanto, faltam pesquisas sobre a origem dessas unidades e suas denominações. O conteúdo inicial dessa seção, em que tratamos dessas medidas arcaicas, foi escrito baseado principalmente nos livros de aritmética de Ottoni (1855) e Vianna (1906), que contêm seções que abordam o sistema metrológico brasileiro antigo, logo antes iniciarem o estudo dos números complexos.

Após uma breve apresentação dessas unidades do sistema metrológico brasileiro anteriores ao sistema métrico, daremos alguns exemplos de textos ou documentos antigos em que tais unidades são mencionadas.

2.2.1 Unidades de comprimento

As principais unidades de comprimento utilizadas no Brasil eram a légua, a milha, a braça, a vara, o palmo, a polegada e a linha, sendo que a légua e a milha eram utilizadas como medidas itinerárias (utilizadas para distâncias entre lugares).

Légua = 3 milhas

Milha = 841 $3/4$ braças

Braça = 2 varas

Vara = 5 palmos

Palmo = 8 polegadas

Polegadas = 12 linhas

Linha

Figura 23 – Relações entre as principais unidades de comprimento utilizadas no Brasil.

Outras unidades também eram utilizadas, como a légua de sesmaria, que foi empregada na medição de estradas e equivalia a 3.000 braças.

Comparando com as atuais unidades do Sistema Internacional: uma légua equivalia a 5.555,55 m; uma milha correspondia a 1.851,85 m; uma braça, 2,2 m; uma vara, 1,1 m; um palmo, 22 cm; uma polegada, 2,75 cm; e, por último, uma linha media o equivalente a 2,3 mm. Alguns livros brasileiros trazem em seus exemplos cálculos envolvendo a unidade francesa antiga de comprimento toesa, além de suas subdivisões.

Toesa = 6 pés

Pé = 12 polegadas

Polegada = 12 linhas

Linha = 12 pontos

Ponto

Figura 24 – Relações entre as principais unidades de comprimento francesas.

2.2.2 Unidades de superfície

Eram utilizadas as medidas quadradas das unidades de comprimento (braças quadradas, palmos quadrados etc). Além delas, era usada a geira para medidas agrárias, que equivalia a 400 braças quadradas.

2.2.3 Unidades de capacidade

Para líquidos, eram empregados o almude, a canada e o quartilho.

Almude = 12 canadas
Canada = 4 quartilhos
Quartilho

Figura 25 – Relações entre as principais unidades de capacidade para líquidos.

Comparando com as atuais unidades do Sistema Internacional: um almude correspondia a 31,944 litros; uma canada equivalia a 2,662 litros; enquanto um quartilho era aproximadamente 665 mililitros.

Já para secos, as principais unidades eram o moio, o alqueire, a quarta e o selamim.

Moio = 60 alqueires
Alqueire = 4 quartas
Quarta = 4 selamins
Selamin

Figura 26 – Relações entre as principais unidades de capacidade para secos.

Confrontando com as atuais unidades do Sistema Internacional: um moio assemelhava-se a 217,62 litros; um alqueire correspondia a 36,27 litros; uma quarta, a 9,06 litros; e um selamim era equivalente a 2,26 litros.

Em sua obra *História econômica do Brasil: 1500-1820*, Roberto Simonsen destaca que as medidas de capacidade utilizadas no Rio e em Lisboa não eram exatamente as mesmas.

> As medidas lineares, agrárias e de peso eram idênticas no Rio de Janeiro e em Lisboa. As medidas de capacidade utilizadas no Rio de Janeiro diferenciavam das usadas em Lisboa. Assim, o moio, o alqueire, a canada e o quartilho, portugueses, eram bem menores dos que os utilizados no Rio. (Simonsen, 1937, p. 585)

Desse modo, percebe-se a falta de padronização entre algumas medidas brasileiras e as medidas homônimas portuguesas.

2.2.4 Unidades de peso

Eram empregados principalmente a tonelada, o quintal, a arroba, a libra, o marco, a onça, a oitava e o grão.

Tonelada = 13 1/2 quintais
Quintal = 4 arrobas
Arroba = 32 libras
Libra = 2 marcos
Marco = 8 onças
Onça = 8 oitavas
Oitava = 72 grãos
Grão

Figura 27 – Relações entre as principais unidades de peso.

Comparando com as atuais unidades do Sistema Internacional: uma tonelada correspondia a 792,99 kg; um quintal, 58,74 kg; uma arroba, 14,685 kg; uma libra, 458,9 g; um marco, 229,45 g; uma onça, 28,68 g; uma oitava, 3,58 g; e um grão, 0,049 g. As terminologias tonelada (ou tonelada métrica) e quintal (ou quintal métrico) são utilizadas, atualmente, como sendo equivalentes a 1.000 kg e a 100 kg, respectivamente.

Para o peso de metais e pedras preciosas eram usados a onça, a oitava, o escrópulo e o quilate.

Onça = 8 oitavas
Oitava = 3 escrópulos
Escrópulo = 6 quilátes
Quilate = 4 grãos
Grão

Figura 28 – Relações entre as principais unidades de peso empregadas para metais e pedras preciosas.

Confrontando com as atuais unidades do Sistema Internacional: uma onça era equivalente a 28,68 kg; uma oitava, 3,58 kg; um escrópulo, 1,19 kg; um quilate, 0,29 g; e, um grão era aproximadamente 0,0725 g.

2.2.5 Unidades de tempo

A principal unidade utilizada era o dia, sendo seus submúltiplos horas, minutos e segundos usados como atualmente.

2.2.6 Unidade angular

A circunferência era dividida em 360 partes iguais, sendo uma parte a unidade angular: o grau. Vianna (1906) aponta o grado, $\frac{1}{400}$ da circunferência, como nova unidade angular do sistema métrico, como podemos perceber a seguir.

> Sendo a circumferencia no systema metrico decimal dividida em 400 partes iguaes denominadas grados, segue-se que o quadrante tem 90 gráos ou 100 grados; por consequencia 1 gráo = 100/90 = 10/9 do grado, e 1 grado = 90/100 = 9/10 do gráo. (Vianna, 1906, p. 142)

A divisão da circunferência em 400 partes, ao invés de 360, fez parte do esforço na Revolução Francesa de introduzir um sistema decimal. Em algumas áreas da astronomia, a partição em 400 grados permanece em uso.

2.2.7 Unidade monetária

No Brasil, a unidade monetária utilizada era o real. As moedas existentes eram baseadas em seus múltiplos, sendo que: eram feitas de cobre as moedas de 20 réis e de 40 réis; existiam em moedas de níquel os valores de 50 réis, 100 réis, 200 réis e 400 réis; existiam em moedas de prata os valores 200 réis, 500 réis, 1.000 réis e 2.000 réis; e eram feitas de ouro as moedas de 5.000 réis, 10.000 réis e de 20.000 réis.

Em alguns livros brasileiros aparecem ainda as moedas portuguesas antigas libra, dinheiro e soldo, que seguiam a seguinte proporção:

Libra = 20 soldos
Soldo = 12 dinheiros
Dinheiro

Figura 29 – Relações entre unidades monetárias portuguesas antigas.

2.2.8 Exemplos de textos com algumas dessas unidades

Os contextos nos quais as unidades acima mencionadas podem ser encontradas em documentos sobre o Brasil anteriores ao ano de 1862 são diversos. Entre eles, podemos citar:

- O livro *Cultura e opulência do Brasil por suas drogas e minas*, do padre jesuíta André João Antonil (1649-1716), publicado pela primeira vez em 1711, descreve as condições socioeconômicas do Brasil da época. No capítulo VI dessa obra, por exemplo, denominado *Do rendimento dos ribeiros e de diversas qualidades de ouro que deles se tira*, o autor afirma que

> Das Minas Gerais dos Cataguás as melhores e de maior rendimento foram, até agora, a do ribeiro do Ouro Preto, a do ribeirão de Nossa

> Senhora do Carmo e a do ribeiro de Bento Rodrigues, do qual, em pouco mais de cinco braças de terra, se tiraram cinco arrobas de ouro. Também o rio das Velhas é muito abundante de ouro, assim pelas margens como pelas ilhas que tem, e pela madre ou veio da água, e dele se tem tirado e se tira ainda, em quantidade abundante. Chamam os paulistas ribeiro de bom rendimento o que dá em cada bateada duas oitavas de ouro. Porém, assim como há bateadas de meia oitava e de meia pataca[3], assim há também bateadas de três, quatro, cinco, oito, dez, quinze, vinte e trinta oitavas e mais, e isto não poucas vezes sucedeu na do ribeirão, ma do Ouro Preto, na de Bento Rodrigues e na do rio das Velhas. Os grãos de maior peso que se tiraram, foram um de noventa e cinco oitavas, ,outro de três libras, que repartiram entre si três pessoas com um machado, outro, que passou de cento e cinqüenta oitavas, em forma de uma língua de boi, que se mandou ao governador da Nova Colônia, e outro maior de seis libras. (Antonil, 2007, p. 76 (grifo nosso))

- Na obra *História econômica do Brasil: 1500-1820*, de Roberto Simonsen, encontramos referências a documentos históricos em que eram citadas antigas medidas:

> Uma certidão passada em 10 de maio de 1766, pelo escrivão do juízo da Intendência de Ouro da Casa de Fundição de São Paulo, a requerimento de mineiros, faiscadores, etc., mostra que em 10 anos e 9 meses recebeu essa Intendência 250.675 oitavas de ouro em pó, ou sejam 23.205 oitavas por ano, 5 arrobas e meia. Outra certidão, da Intendência e Conferência da Casa de Fundição de São Paulo, passada em 1772 e enviada ao Marquês de Pombal por D. Luís Antônio, demonstra que naquele ano entraram 240 barras, com 384 marcos, 2 oitavas e 50 grãos e 1/5 de ouro, ou sejam, quase 6 arrobas. (Simonsen, 1937, p. 282 (grifo nosso))

Nesse mesmo livro, descrevendo a escassez e preços elevados do sal durante o início do século XVIII, o autor cita que

> A história assinala a proeza de Bartolomeu de Faria, paulista de valor, natural de Jacareí, que, em 1710, reunindo a sua escravaria e agregados de confiança, partiu para Santos onde, de surpresa, assaltou os armazéns de sal, vendendo-o ao público pelo seu justo valor, de 1280 réis o alqueire, incluídos os 400 réis adicionais do Erário Real; carregou como pôde as suas tropas, pagou aos contratadores o sal retirado àquela base e voltou serra acima, destruindo pontes e pontilhões para se pôr ao abrigo da tropa que, de Santos, partiu no seu encalço. A colônia, que chegara a pagar, no momento, até 20$000 o alqueire do artigo, e mesmo 100$000, 200$000 e até 500$000 em certas zonas de mineração, compreendeu o gesto desesperado do ilustre filho de Jacareí; não foi este, contudo, o ponto de vista das autoridades do reino, que ordenaram "a perseguição e a prisão do audacioso paulista mesmo com alguma despesa da Fazenda Real". (Simonsen, 1937, p. 235 (grifo nosso))

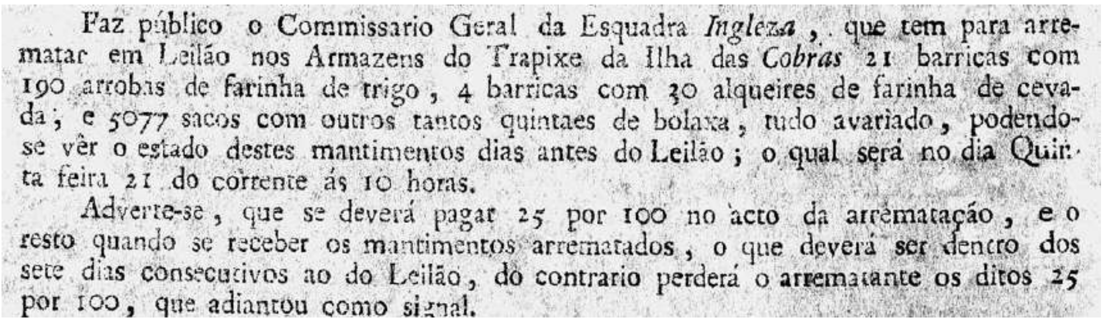
- Capistrano de Abreu, em Capítulos da História Colonial (2009), inclui em sua narrativa que:

> Só em 1721 chegou a primeira ferramenta para a mineração. Não havia pescadores e um dourado colhido acaso vendia-se por sete e oito oitavas. Muitos andavam opilados e hidrópicos, todos em geral com pernas e

[3] Moeda antiga de prata, cujo valor era de 320 réis.

> barrigas inchadas, com cores de defuntos; apetecia-se comer terra e muitos o faziam. Em 1723 apareceram os primeiros porcos e galinhas. Em 1725 chegou-se a dar por um frasco de sal meia libra de ouro (256$, a câmbio de 27). O milho, antes de brotado, era comido pelos ratos; depois de nascido caíam-lhe em cima os gafanhotos; se espigava, o sabugo saía sem grãos; o que granava tinha de ser colhido verde para os pássaros o não comerem. As ratazanas eram tantas que um casal de gatos foi vendido por uma libra de ouro, e os filhotes a vinte e trinta oitavas. Em 1729, por falta de fazendas, venderam-se camisas de alguns lençóis que se desfaziam a doze oitavas de ouro; a vara de algodão da terra a três e a quatro oitavas; sal não havia nem para batizado. (Abreu, 2009, p. 128 (grifo nosso))

- No jornal *Gazeta do Rio de Janeiro*, encontramos o trecho abaixo destacado, a respeito de um leilão, em que aparecem as unidades *arroba*, *alqueire* e *quintal*.

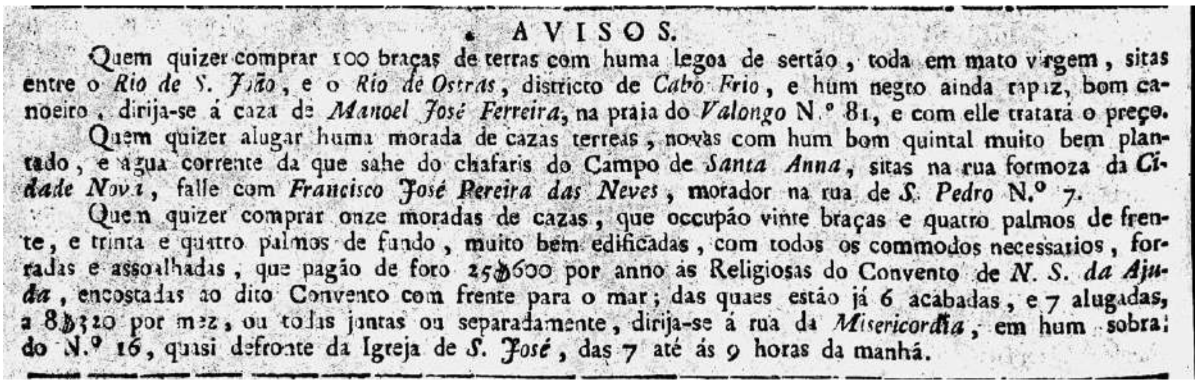


Faz público o Commissario Geral da Esquadra *Ingleza*, que tem para arrematar em Leilão nos Armazens do Trapixe da Ilha das *Cobras* 21 barricas com 190 arrobas de farinha de trigo, 4 barricas com 30 alqueires de farinha de cevada; e 5077 sacos com outros tantos quintaes de bolaxa, tudo avariado, podendo-se vêr o estado destes mantimentos dias antes do Leilão; o qual será no dia Quinta feira 21 do corrente ás 10 horas.

Adverte-se, que se deverá pagar 25 por 100 no acto da arrematação, e o resto quando se receber os mantimentos arrematados, o que deverá ser dentro dos sete dias consecutivos ao do Leilão, do contrario perderá o arrematante os ditos 25 por 100, que adiantou como signal.

Figura 30 – Edição n^o 48, Ano 1810, da *Gazeta do Rio de Janeiro*

- Já na edição n^o 41 do ano de 1813, encontramos os seguintes avisos, em que são mencionadas as unidades *braça*, *palmo* e *légua*.



AVISOS.

Quem quizer comprar 100 braças de terras com huma legoa de sertão, toda em mato virgem, sitas entre o *Rio de S. João*, e o *Rio de Ostras*, districto de *Cabo Frio*, e hum negro ainda rapaz, bom canoeiro, dirija-se á caza de *Manoel José Ferreira*, na praia do *Valongo* N.º 81, e com elle tratará o preço.

Quem quizer alugar huma morada de cazas terreas, novas com hum bom quintal muito bem plantado, e agua corrente da que sahe do chafaris do Campo de *Santa Anna*, sitas na rua formoza da *Cidade Nova*, falle com *Francisco José Pereira das Neves*, morador na rua de *S. Pedro* N.º 7.

Quem quizer comprar onze moradas de cazas, que occupão vinte braças e quatro palmos de frente, e trinta e quatro palmos de fundo, muito bem edificadas, com todos os commodos necessarios, forradas e assoalhadas, que pagão de foro 25$600 por anno ás Religiosas do Convento de *N. S. da Ajuda*, encostadas ao dito Convento com frente para o mar; das quaes estão já 6 acabadas, e 7 alugadas, a 8$320 por mez, ou todas juntas ou separadamente, dirija-se á rua da *Misericordia*, em hum sobrado do N.º 16, quasi defronte da Igreja de *S. José*, das 7 até ás 9 horas da manhã.

Figura 31 – Edição n^o 41 de 1813 da *Gazeta do Rio de Janeiro*

2.3 Introdução do sistema métrico no Brasil

O sistema métrico decimal, elaborado no final do século XVIII na França, foi gradativamente sendo adotado por outros países. Em Portugal, a adoção do sistema métrico ocorreu em

1852. Já no Brasil, a Lei Imperial n. 1157, de 26 de junho de 1862, promulgada por D. Pedro II, instituiu a utilização do sistema de pesos e medidas francês, e determinou que o sistema métrico decimal fosse ensinado nas escolas do Brasil. Como consta abaixo na Lei na íntegra, com a ortografia da época, o objetivo era que dentro de dez anos o sistema vigente fosse inteiramente substituído pelo sistema métrico, e que nesse prazo as escolas primárias deveriam contemplar a instrução da comparação entre os dois sistemas no ensino de Aritmética.

Lei n.º 1.157 de 26 de junho de 1862

Substitue em todo o Imperio o actual systema de Pesos e Medidas pelo systema Metrico Francez

D. Pedro ll, por graça de Deus e unanime acclamação dos povos, Imperador Constitucional e Defensor Perpetuo do Brasil:

Fazemos saber a todos os Nossos subditos que a Assembléia Geral Legislativa decretou, e Nós Queremos a Lei seguinte:

Art. 1º O actual systema de pesos e medidas será substituido em todo o Imperio pelo systema metrico francez, na parte concernente às medidas lineares, de superfície, capacidade e peso.

Art. 2º É o Governo autorisado para mandar vir da França os necessarios padrões do referido systema, sendo alli devidamente aferidos pelos padrões legaes; e outrossim para dar as providencias que julgar convenientes a bem da execução do artigo precedente, sendo observadas as disposições seguintes.

1º O systema metrico substituirá gradualmente o actual systema de pesos e medidas em todo o Imperio, de modo que em dez anos cesse inteiramente o uso legal dos antigos pesos e medidas.

2º Durante este prazo as escolas de instrução primária, tanto publicas quanto particulares, comprehenderão no ensino da arithmetica a explicação do systema metrico comparado com o systema de pesos e medidas que está actualmente em uso.

3º O Governo fará organizar tabellas comparativas que facilitem a conversão das medidas de um systema para outro, devendo as repartições publicas servir-se dellas em quanto vigorar o actual systema de pesos e medidas.

Art. 3º O Governo, nos regulamentos que expedir para a execução desta Lei, poderá impor aos infractores a pena de prisão até um mez e multa até 100$000. Mandamos portanto a todas as autoridades a quem o conhecimento e execução da referida Lei pertencer, que a cumprão e fação cumprir e guardar tão inteiramente como nella so contém. O Secretário de Estado dos Negócios da Agricultura, Commercio e Obras Publicas, a faça imprimir, publicar e correr.

Dada no Palacio do Rio de Janeiro aos vinte e seis de junho de mil oitocentos e sessenta e dois, quadragesimo primeiro da Independencia e do Imperio.

Imperador, em Rubrica e Guarda

João Lins Vieira Cansansão de Sinimbu

No entanto, adoção do sistema métrico não se realizou de forma branda. Principalmente no nordeste, ocorreram rebeliões contrárias a essa adoção; como foi o caso da Revolta do Quebra Quilos. Tendo início na Paraíba em outubro de 1874, a revolta se expandiu para as províncias de Alagoas, Pernambuco e Rio Grande do Norte. Seus manifestantes eram contrários ao aumento de impostos a serem pagos pelos comerciantes e à imposição de se trabalhar com o sistema métrico decimal. (Vicente et al., 2015, p. 3)

Santos et al. (2011, p. 3-4) salientam que o despreparo para a implantação do sistema métrico decimal e o fato de os comerciantes serem obrigados a comprar ou alugar os novos padrões da Câmara Municipal foram alguns dos fatores para a eclosão dessa revolta. Após esforços de contenção do movimento sem resultado, os governos da Paraíba e de Pernambuco requisitaram auxílio de D. Pedro II, que enviou tropas para reprimir a revolta; o que, de acordo com Santos et al. (2011, p. 3), aconteceu de modo violento.

Figura 32 – A revolta do Quebra Quilos (autoria desconhecida *apud* Carron, 2016, p. 29)

Em Portugal, a lei que determinava a adoção do sistema métrico previa igualmente um período de dez anos até a total substituição do sistema de pesos e medidas anteriormente utilizado, mas sua versão brasileira, a Lei n.º 1.157, se diferenciava daquela por prever o ensino escolar do novo sistema. Para Zuin (2007), "a Lei Imperial, ao determinar que o ensino do sistema métrico decimal deveria ocorrer nas escolas de instrução, tinha interesses econômicos e políticos". No entanto, a escolarização do sistema métrico não foi imediata conforme era designado:

> Após a promulgação da Lei 1157/1862, não houve uma ação imediata das províncias no sentido de se adotar o sistema métrico decimal, o qual era totalmente desconhecido em várias localidades brasileiras. Porém, no Rio de Janeiro, capital do Império, e também na Província de Minas Geraes, verificamos que atos legislativos recomendavam a inserção do sistema francês de pesos e medidas nas escolas, logo após a oficialização do novo sistema metrológico. (ZUIN, 2007, p. 198)

A escolarização do sistema métrico de medidas no Brasil é, no entanto, anterior à Lei 1157/1862. Como exemplos da prática desse ensino, temos os livros didáticos *Tratado Elementar de Aritmética* (1810), de Silvestre François Lacroix; *Compendio de Arithmetica Composto para o Uso das Escolas Primarias do Brasil (1832)*, de Cândido Baptista Oliveira; e a terceira edição de *Elementos de Arithmetica* (1856), do engenheiro José Joaquim d'Ávila. Sabendo-se da existência e acessibilidade desses e outros livros mesmo antes de 1862, Zuin afirma que

> o sistema francês de pesos e medida, através de autores franceses, portugueses ou brasileiros, chegava às mãos dos mestres antes da promulgação da lei que oficializava o novo sistema no Brasil em 1862, mesmo que eles não fizessem a opção de ensiná-lo aos seus alunos. Assim, se o sistema métrico decimal não constava dos programas escolares até os sessenta do Oitocentos, era seguro que alguns professores brasileiros estariam se apropriando deste novo saber escolar via manuais didáticos. (Zuin, 2007, p. 205)

CAPÍTULO 3

Livros didáticos adotados no Brasil

Tendo como base o artigo *Os livros didáticos de matemática na escola secundária brasileira no século XIX*, de Lorenz e Vechia (2004), e a dissertação *Os programas de ensino de matemática do colégio Pedro II: 1837 - 1932*, de Beltrame, obtivemos uma primeira lista de livros utilizados no Colégio Pedro II desde a sua fundação, em 1837, até o final do século XIX. Incluindo a essa lista outros livros utilizados no Brasil que consideramos importantes a essa pesquisa, e tendo em vista a disponibilidade dessas obras em bibliotecas ou outros meios, chegamos à seguinte relação de livros didáticos, cujo conteúdo estudamos detalhadamente:

- **Compendio de Arithmetica Composto para o Uso das Escolas Primarias do Brasil**, de Candido Baptista de Oliveira (1832 e 1863);
- **Elementos de Arithmética**, de Cristiano Benedito Ottoni (1855);
- **Elementos de Arithmetica**, de José Joaquim d'Avila (1856);
- **Curso Elementar de Matemática**, Volume 1, de Aarão e Luciano Leal de Carvalho Reis (1892);
- **Elementos de Arithmetica**, de João José Luiz Vianna (1906);
- **Manual de Matemática**, de Cecil Thiré (1944);
- **Geometria - Problemas sem problema**, Volume 1, de Eduardo Mauro (2001).

3.1 Compendio de Arithmetica Composto para o Uso das Escolas Primarias do Brasil, de Candido Baptista de Oliveira (1832 e 1863)

Cândido Baptista de Oliveira nasceu em Porto Alegre em 15 de fevereiro de 1801. Ingressou em 1817 no Seminário São José, no Rio de Janeiro, onde cursou Humanidades. Em

1820 foi para Portugal, tornando-se bacharel em Matemática e Filosofia pela Universidade de Coimbra. Em 1825 mudou-se para a França, onde chegou a frequentar a École des Ponts et Chaussées e a École Polytechnique (Massarini e Moreira, 1997).

Segundo Blake, em seu *Diccionario Bibliographico Brazileiro* (1883), regressando ao Brasil em 1827, Baptista de Oliveira tornou-se

> lente substituto da academia militar, passando logo a lente cathedratico de mecânica, em que se jubilou ao cabo de vinte annos. Serviu o logar de inspector do thesouro nacional desde a abdicação do primeiro Imperador até 1834, e de 1837 a 1838, sendo esta interrupção devida. a ter elle exercido neste interim o cargo de ministro residente em Turim. Foi deputado por sua provincia em diversas 1egislaturas desde a segunda, e senador escolhido em dezembro de 1848; foi encarregado de uma missão diplomatica á S. Petersburgo e depois á Vienna d'Austria; ministro da fazenda e interinamente dos negocios estrangeiros no gabinete de 1839; ministro da marinha em 1848; e depois disto serviu ainda os cargos de director do Banco do Brazil e de director do Jardim Botanico. Era conselheiro de estado, do conselho do Imperador, veador da casa imperial, commendador da ordem da Rosa e da de Christo, gran-cruz da. ordem russiana de Santo Estanislal, membro do Instituto historico e geographico brazileiro. etc. (Blake, 1883a, p. 25)

De acordo com Zuin (2017, p. 220), Baptista de Oliveira foi professor do imperador D. Pedro II e fazia parte do grupo de intelectuais que frequentemente estava em sua companhia. Para Moreira e Massarani (1997), Baptista de Oliveira foi o primeiro, além de mais insistente, proponente da adoção do sistema métrico decimal no Brasil. Ainda em 1830, Baptista de Oliveira apresentou na Câmara uma proposta de adoção do sistema métrico no Brasil; que foi rejeitada.

Em 1832, Baptista de Oliveira publica o Compêndio, incluindo conteúdo sobre o sistema métrico decimal. No prefácio desse livro, Baptista de Oliveira afirma que o livro "*foi escrito para professores e, originalmente, para instrutores do ensino mútuo. Com vistas a esse destino, a estrutura do compêndio é tal que o autor constrói um conjunto de tabelas para uso dos professores-instrutores e vai, ao longo do texto, explicando como utilizar cada uma*." (Valente, 1999, p. 124).

Silva (2000, p. 124) afirma que o Compêndio foi o primeiro livro de aritmética publicado no Brasil. O conteúdo do Compêndio em 1832 era: Números inteiros, fracionários, decimais e complexos; proporções, progressões, equações do primeiro grau; quadrado e raiz quadrada, regra de companhia e apêndice de metrologia.

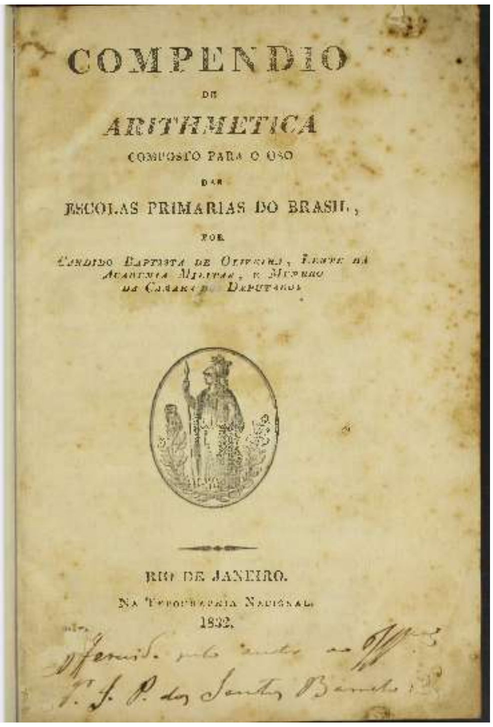


Figura 33 – Folha de rosto do Compêndio de Arithmetica composto para o uso das Escolas Primárias do Brasil, de 1832.

A aritmética é abordada nas duas primeiras seções dessa obra, sendo a 1^a seção destinada à numeração e representação dos números em geral, enquanto a 2^a trata do cálculo com esses números. Os números complexos são citados pelo autor em uma observação na segunda seção:

> Em conformidade com o systema metrologico, de que se faz uso nas questões práticas da Arithmetica, empregão-se muitas vezes no calculo numeros, que comprehendem differentes especies de unidades, subordinadas umas às outras, segundo a relação de grandeza, que ellas guardão entre si, aos quaes se dá o nome de *numeros complexos*. (Oliveira, 1863, p. 5)

Baptista de Oliveira termina sua menção aos números complexos afirmando que a adição e a subtração de números complexos é feita de modo semelhante ao que foi ensinado com números inteiros. No entanto, para realizar a multiplicação e a divisão, seria preciso inicialmente transformar os números complexos em frações ordinárias ou convertê-los à menor unidade da espécie. Baptista de Oliveira não ensina a fazer essas transformações, mas afirma que sempre é possível realizá-las e, feito isso, pode-se multiplicar e dividir esses números da forma usual. Terminando o parágrafo, ele arremata dizendo "é por esta razão, que no texto se não fez menção particular do calculo dos numeros desta especie"(Oliveira, 1832, p. 5).

Nessa primeira edição do Compêndio, publicada trinta anos antes da implantação do sistema métrico decimal no Brasil, o autor já declara seu posicionamento favorável à adoção desse sistema. No apêndice de metrologia, lemos que:

> O systema de unidades que vimos de expor foi organisado dela Academia das Sciencias em França, e admitido legalmente pelo governo francez em 1795; e

> he conhecido debaixo do nome de *systema métrico*. A sua perfeição sobre todos os outros systemas conhecidos, de pesos e medidas particulares as differentes Nações, o tem feito adoptar por algumas destas em todo, ou em parte, se bem que debaixo de outras denominações: e na esperança de que elle será hum dia geralmente adoptado, lhe havemos tambem dado a preferencia de exposição. (Oliveira, 1832, p. 6 (apêndice))

Ainda nesse apêndice, o autor discorre sobre o que denomina serem as cinco espécies de *unidades fundamentais*: de tempo, angular, de extensão, de peso e de valor. Sobre a adoção do sistema métrico decimal pela França, o autor elabora um breve resumo histórico, além de alguns parágrafos em que aborda as vantagens do sistema. Para dar fundamentação às suas opiniões sobre esse sistema, Baptista de Oliveira inclui em seu texto uma fala de Laplace:

> Não se póde ver o numero prodigioso de medidas, não sómente usadas por differentes povos, mas até por uma mesma nação; as suas divisões extravagantes e incommodas para os calculos; a dificuldade de as conhecer, e comparar; emfim o embaraço e as fraudes, que daqui resultão para o commercio; sem considerar, como um dos maiores serviços, que os governos podem fazer à sociedade, a adopção de um systema de medidas, cujas divisões uniformes se prestem facilmente ao calculo, e que são derivadas, da maneira menos arbitraria, de uma medida fundamental, indicada pela mesma natureza. (Laplace *apud* Oliveira, 1832, p. 6 (apêndice))

Já em 1834, Baptista de Oliveira integrou uma comissão que apresentou uma proposta de uniformização das unidades de medida e monetárias utilizadas no Brasil, que foi aprovada na Câmara, mas não no Senado.

A partir de 1850, o Compêndio é publicado em partes na *Revista Guanabara*. Em 1851, Baptista de Oliveira propõe na Câmara novamente a adoção do sistema métrico decimal, sem sucesso. Entre 1857 e 1861, Baptista de Oliveira publica textos sobre metrologia, em que defendia a adoção do sistema métrico decimal, na Revista Brazileira. (Massarani e Moreira, 1997, p. 6)

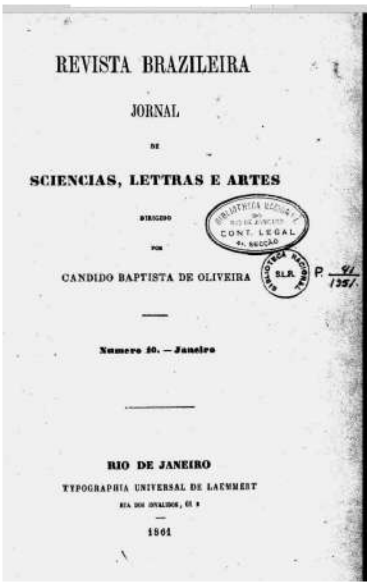

REVISTA BRAZILEIRA
JORNAL
SCIENCIAS, LETTRAS E ARTES
CANDIDO BAPTISTA DE OLIVEIRA
Numero 10. — Janeiro
RIO DE JANEIRO
TYPOGRAPHIA UNIVERSAL DE LAEMMERT
1861

Figura 34 – Capa da Revista Brazileira, n^o 10, dirigida por Cândido Baptista de Oliveira

Baptista de Oliveira escreve um parecer ao Ministro da Fazenda, em 1859, defendendo a utilização do sistema métrico decimal. (A lei promulgada em 1862 introduzindo o sistema métrico decimal no Brasil é baseada em suas ideias escritas nesse parecer).

Em 1863, é publicada uma nova edição do Compêndio, tendo sido adicionados a essa nova edição tópicos de Álgebra: Teoria dos Logaritmos, Progressões e suas propriedades, Resolução das equações, de primeiro e segundo graus, Fórmulas de Juros simples e composto. (Valente, 1999)

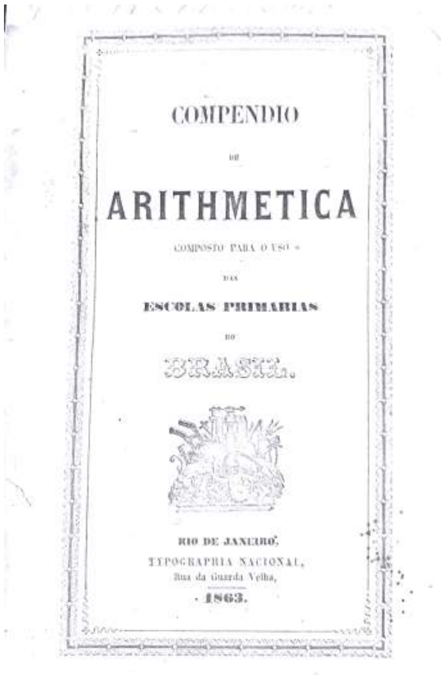


Figura 35 – Folha de rosto do Compêndio de Arithmetica composto para o uso das Escolas Primárias do Brasil (Oliveira, 1863)

No início do livro, como uma introdução, Baptista de Oliveira escreve uma *"advertência aos professores"*, onde afirma que

> Honrado pelo Governo Imperial com a incumbencia de organisar um Compendio adaptado ao ensino do Systema Metrico, nas Escolas Primarias do Brasil, em observancia da lei que o adoptára para ser usado no paiz, julgo haver preenchido esse fim do modo mais satisfactorio, apresentando o presente trabalho; no qual se encontrará em primeiro lugar uma abreviada compilação dos principios rigorosos em que se basêa o calculo numerico, explicados nos termos mais simples, e accommodados á commum intelligencia dos alumnos, na idade juvenil, como estudo preparatorio do complexo de noções concernentes á exposição do Systema Metrico, acompanhada da comparação numerica entre as suas unidades, e as que lhes correspondem no systema usual de Pesos e Medidas, que faz o objecto do Appendice, sob a denominação de Metrologia. (Oliveira, 1863, p. 3)

Foram poucas as alterações feitas entre as duas edições quanto ao seu conteúdo. Sobre os números complexos, são apenas acrescentados alguns exemplos desses números logo após a sua definição:

> $3^{d}10^{h}6^{m}20^{s}$ (3 dias + 10 horas + 6 minutos + 20 segundos);
>
> ou tambem $1^{m}5^{on}7^{oi}30^{gr}$ (1 marco + 5 onças + 7 oitavas + 50 grãos). (Oliveira, 1863, p. 9)

São adicionadas algumas tabelas de comparação entre as medidas do antigo sistema e aquelas do sistema métrico decimal, além de algumas notas históricas acerca dessa implementação; porém, em geral o conteúdo das duas edições é semelhante

Ao final da edição de 1863, Baptista de Oliveira inclui duas observações interessantes sobre os sistemas metrológicos. A primeira dessas observações informa que

> a relação entre o Marco (peso) e o Grammo foi determinada experimentalmente, por meio de pesadas comparativas dos padrões de $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ Kilogrammo, e do Marco, effectuadas na Casa da Moeda por C. Baptista de Oliveira, e o Capitão Tenente Giacomo R. Gabaglia. (Oliveira, 1863, p. 23)

A segunda diz respeito à uniformidade do sistema metrológico antigo no Brasil. O autor afirma que as medidas de peso e de comprimento possuíam "a devida uniformidade"em todas as províncias (pois as diferenças entre uma e outra localidade "não se fazem *attendiveis*"). No entanto, Baptista de Oliveira destaca que o mesmo não acontecia com as medidas de capacidade (*canada* e *alqueire*), que em algumas localidades apresentavam diferenças notáveis em relação aos padrões determinados em 1834 (Oliveira, 1863, p. 23).

3.2 Elementos de Arithmetica compilados por C. B. Ottoni, de Cristiano Benedito Ottoni (1855)

Cristiano Benedito Ottoni nasceu em Serro (MG) em 1811. Em 1828, mudou-se para o Rio de Janeiro, onde ingressou na Academia de Marinha, tornando-se guarda-marinha, e onde também se formou-se em engenharia pela Escola Militar. Ottoni foi professor de matemática, engenheiro e militar. Lecionou na Escola de Engenharia da Marinha e, posteriormente, na Escola Politécnica de Engenharia do Rio de Janeiro. Foi o primeiro diretor da Estrada de Ferro Dom Pedro II. Exerceu também os cargos políticos de Deputado Geral (MG), Senador (ES) e Senador (MG). Faleceu em 1896, no Rio de Janeiro (RJ). Atualmente há uma cidade em Minas Gerais chamada Cristiano Otoni, em sua homenagem. No centro da cidade do Rio de Janeiro também há uma praça com o seu nome, onde existe uma estátua sua.

Entre seus trabalhos publicados, destacam-se *Teoria das máquinas a vapor* (1844), *Juízo crítico sobre o compêndio de geometria adotado pela Academia de Marinha do Rio de Janeiro* (1845), *Elementos de aritmética* (1852), *Estrada de Ferro D. Pedro II* – Coleção de artigos de fundo do "Correio Mercantil" (1857), e *O futuro das estradas de ferro no Brasil* (1859). Ottoni é considerado o primeiro autor de livros didáticos de aceitação e adoção nacional (Valente, 1999).

O *Elementos de Arithmetica compilados por C. B. Ottoni* foi escrito tendo como base o *Élémens d'Arithmétique* de Louis-Pierre-Marie Bourdon (1779-1854). Para Valente (1999), o livro é praticamente uma tradução da obra de Bourdon. No entanto, diferentemente da obra francesa original, a seção sobre sistema métrico é reduzida a menos de três páginas. Segundo Zuin (2017), Ottoni não se posiciona a favor da adoção do sistema métrico pelo Brasil.

Provavelmente, a edição do *Elementos de Arithmetica* utilizada no Colégio Pedro II foi a segunda, do ano de 1855. O livro organiza-se da seguinte forma:

- Introdução
- Primeira parte
    - Capítulo 1. Operações sobre os numeros inteiros
    - Capítulo 2. Fracções
    - Capítulo 3. Complexos
    - Capítulo 4. Decimaes
- Segunda parte
    - Capítulo 5. Propriedades geraes dos numeros
    - Capítulo 6. Potencias e raizes
    - Capítulo 7. Razões e proporções
    - Capítulo 8. Progressões e logarithmos

O autor inicia o terceiro capítulo dizendo que este poderia ser considerado uma continuação do capítulo anterior, sobre frações. Em seguida, fala sobre divisões e subdivisões de uma unidade, e destaca que

> O uso introduzio, para os diversos misteres da vida social, systemas diversos de dividir e subdividir as unidades. E ainda em cada arte ha varios systemas; além de que as unidades do mesmo nome não são da mesma grandeza em differentes nações. O estabelecimento de pesos e medidas uniformes para todo o mundo seria de grandes vantagens para o commercio e comunicação dos povos: mas parece mui difficil que tal desideratum seja satisfeito. O systema metrico, inventado na França em uma época, em que as artes e as sciensias realizárão uteis e grandes innovações, tem todas as qualidades para ser universalmente aceito: relações perfeitamente definidas com as dimensões do globo terraqueo, e subdivisões as mais commodas para todos os calculos; e, todavia, combatido por prejuizos e pelo poder da rotina, nem todas as outras nações o adoptárão, e nem mesmo em França deixou de soffrer grandes repugnancias, contrariedades e modificações. Prevenindo, pois, o leitor da grande variedade de pesos e medidas em todo o mundo, damos noticia especial somente dos que são mais usados em o nosso paiz. (Ottoni, 1855, p. 75)

São, então, apresentadas ao leitor algumas unidades de medida de comprimento, de superfície (área), de capacidade (volume), de peso, de tempo e de moeda.

O autor define número complexo como sendo aquele "*que consta de partes, cada uma exprimindo as unidades diversas, que resultam da divisão de uma unidade principal*". Os números que são expressos em uma única unidade são denominados incomplexos.

Apresenta-se posteriormente, como exemplo, a transformação do número complexo $16^{br.}\ 7^{P.}\ 5^{p.}\ 11^{l.}$ (16 braças, 7 palmos, 8 polegadas e 11 linhas) em número fracionário de braças (sabendo-se que 1 braça = 10 palmos, 1 palmo = 8 polegadas e 1 polegada = 12 linhas). A conta realizada é a seguinte:

$$\begin{array}{c} 16^{br.}7^{p.}5^{p.}11^{l.} \\ 10 \\ \hline 167 \text{ palmos} \\ 8 \\ \hline 1341 \text{ polegadas} \\ 12 \\ \hline 16103 \text{ linhas} \end{array}$$

Logo, o autor conclui que o número complexo $16^{br.}\ 7^{P.}\ 5^{p.}\ 11^{l.}$ equivale a $\frac{16103}{960}$ braças, isto é, $16\frac{743}{960}$ braças.

Outro exemplo dado pelo autor mostra que $\frac{737}{29}$ braças é igual ao número complexo $25^{br.}$ $4^{P.}\ 1^{p.}\ 1^{l.}7/29$:

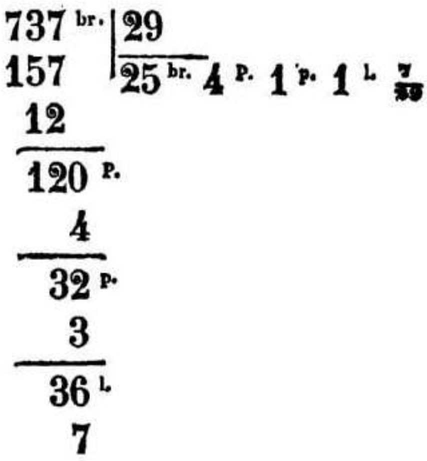
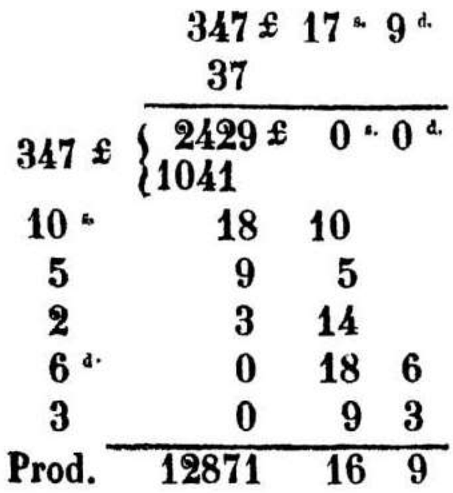


Figura 36 – Conversão de número fracionário (incomplexo) em complexo. (Ottoni, 1855, p. 79)

Ottoni trata de operações envolvendo números complexos: adição, subtração e multiplicação. Enquanto essas duas primeiras operações envolvem cálculos simples, a multiplicação de complexos requer mais atenção e é separada nesse livro em dois casos: primeiro, quando o multiplicador não é complexo e o multiplicando é complexo; e, segundo, quando o multiplicador é complexo (e o multiplicando é de qualquer natureza).

No primeiro caso, o autor explica que a operação consiste em repetir o multiplicando um número inteiro de vezes. Como exemplo, ele apresenta a multiplicação “37 vezes $347£17^{s.}\ 9^{d.}$ (347 libras, 17 soldos e 9 dinheiros)”, realizando o produto de cada parte desse número complexo por 37 e, após observar as equivalências de unidades e realizar as simplificações necessárias, chega-se a 12871£ $16^{s.}$ $9^{d.}$.



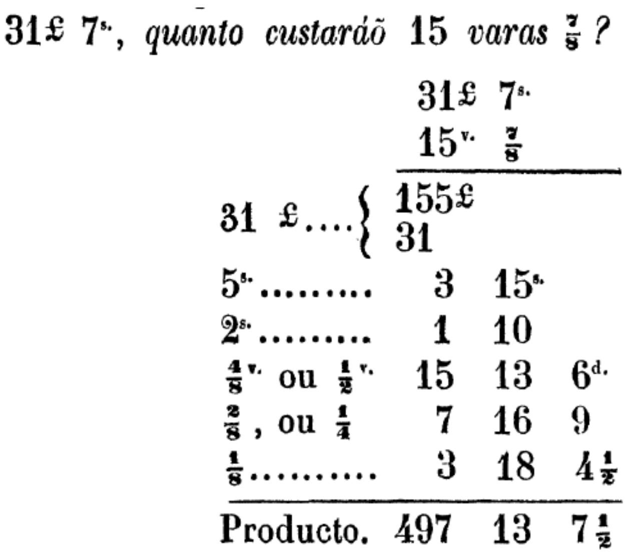
	347 £	17 s.	9 d.
	37		
347 £	{ 2429 £	0 s.	0 d.
	{ 1041		
10 s.	18	10	
5	9	5	
2	3	14	
6 d.	0	18	6
3	0	9	3
Prod.	12871	16	9

Figura 37 – Multiplicando complexo e multiplicador incomplexo (Ottoni, 1855, p. 84)

Note que o autor procede (e ensina seu método no livro) efetuando primeiro 37 vezes 347£, obtendo 2429£ mais 10410£. Depois, separa os 17s. em três partes: $10^{s.}$, $5^{s.}$ e $2^{s.}$; fazendo então, na primeira parte, 37 vezes $\frac{1}{2}$£, tendo como resultado $\frac{37}{2}$£, isto é, 18£ e $10^{s.}$. Na segunda parte, faz-se 37 vezes $\frac{1}{4}$£ e se chega a $\frac{37}{4}$ £, isto é, 9£ e $5^{s.}$. A terceira parte consiste na multiplicação 37 vezes $\frac{1}{10}$£, tendo como resultado $\frac{37}{10}$£, isto é, 3£ e $14^{s.}$. Por último, ele calcula 37 vezes $9^{d.}$, procedendo como feito anteriormente e dividindo os $9^{d.}$ em duas partes: $6^{d.}$ e $3^{d.}$. Na primeira parte, ele efetua 37 vezes $\frac{1}{2}^{s.}$ e obtém $\frac{37}{2}^{s.}$, ou seja, $18^{s.}$ $6^{d.}$. Já nessa segunda parte, a multiplicação a fazer é 37 vezes $\frac{1}{4}^{s.}$, o que nos fornece $\frac{37}{4}^{s.}$, ou seja, $9^{s.}$ e $3^{d.}$. Por último, o autor soma as parcelas que se encontram expressas na mesma medida, observando que 20 soldos equivalem a 1 libra. Ottoni denomina essa forma de realizar a multiplicação, decompondo-se as quantidades complexas em frações de uma unidade maior, como "methodo das partes aliquotas".

Analisando agora o caso em que o multiplicador é complexo, Ottoni inicia com um exemplo que afirma possuir cálculos breves e sem complicações: "Custando a vara de uma fazenda 31£ $7^{s.}$, quanto custarão 15 varas $\frac{7}{8}$?".

O autor afirma ser claro que as 15 varas custarão 15 vezes 31£ $7^{s.}$, o que resulta nos três primeiros produtos parciais da figura abaixo (15 vezes 31£ é igual a **465£**; 15 vezes $5^{s.}$ é igual a $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$£, isto é, **3£ e $15^{s.}$** ; e, por fim, 15 vezes 2£é igual a $\frac{15}{10} = 1\frac{1}{2}$£, ou seja, **1£** e **$10^{s.}$**):



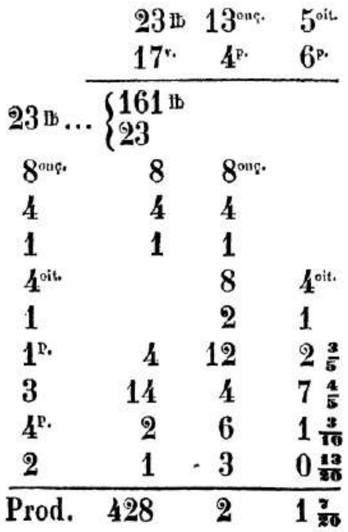
$31£\ 7^{s.}$, *quanto custarão* 15 *varas* $\frac{7}{8}$?

	$31£$	$7^{s.}$	
	$15^{v.}$	$\frac{7}{8}$	
31 £....	155£ 31		
$5^{s.}$........	3	$15^{s.}$	
$2^{s.}$........	1	10	
$\frac{4}{8}^{v.}$ ou $\frac{1}{2}^{v.}$	15	13	$6^{d.}$
$\frac{2}{8}$, ou $\frac{1}{4}$	7	16	9
$\frac{1}{8}$.........	3	18	$4\frac{1}{2}$
Producto.	497	13	$7\frac{1}{2}$

Figura 38 – Multiplicador e multiplicando complexos (Ottoni, 1855, p. 86)

Ao multiplicar 31£ $7^{s.}$ por $\frac{7}{8}$, primeiro ele observa que $\frac{7}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Desse modo, fazendo $\frac{1}{2}$ vezes 31£ $7^{s.}$ obtém-se a metade desse valor, 15£ $13^{s.}$ $6^{d.}$; efetuando $\frac{1}{4}$vezes 31£ $7^{s.}$ obtém-se a metade do resultado anterior, 7£ $16^{s.}$ $9^{d.}$; e, por último, fazendo $\frac{1}{8}$ vezes 31£ $7^{s.}$ obtém-se a metade do último resultado, ou seja, 3£ $18^{s.}$ $4^{d.}$. Somando-se os produtos parciais, o resultado final será 497£ $13^{s.}$ $7^{d.}$ $\frac{1}{2}$.

Ottoni continua a explicação exibindo mais dois exemplos interessantes: no próximo exemplo (que no livro corresponde ao 2º exemplo), cujo enunciado é "uma vara de certa barra de ferro de grossura uniforme pesa 23 libras 13 onças e 5 oitavas: pergunta-se quanto pesarão 17 varas 4 palmos e 6 pollegadas de barra semelhante?", efetua-se o cálculo $17^{v.}$ $4^{p.}$ $6^{p.}$ vezes 23 lb $13^{onç.}$ $5^{oit.}$, como na imagem abaixo:



	23 lb	$13^{onç.}$	$5^{oit.}$
	$17^{v.}$	$4^{p.}$	$6^{p.}$
23 lb...	161 lb 23		
$8^{onç.}$	8	$8^{onç.}$	
4	4	4	
1	1	1	
$4^{oit.}$		8	$4^{oit.}$
1		2	1
$1^{p.}$	4	12	$2\frac{3}{5}$
3	14	4	$7\frac{4}{5}$
$4^{p.}$	2	6	$1\frac{3}{10}$
2	1	3	$0\frac{13}{20}$
Prod.	428	2	$1\frac{7}{20}$

Figura 39 – Multiplicador e multiplicando complexos (Ottoni, 1855, p. 86)

Note que no exemplo acima valem as equivalências 1 libra = 16 onças, 1 onça = 8 oitavas, 1 oitava = 72 grãos, além de 1 vara = 5 palmos e 1 palmo = 8 polegadas, obtendo-se como resposta 428 lb $2^{\text{onç.}}$ $1\,\frac{7}{20}^{\text{oit.}}$.

No próximo exemplo (3^{o} exemplo), o autor enuncia a seguinte questão: "um fio de arame de $17^{\text{v.}}$ $4^{\text{p.}}$ $6^{\text{P.}}$ pesa uma libra: quantas varas tem uma peça do mesmo arame, com o peso de 23 lb $13^{\text{onç.}}$ $5^{\text{oit.}}$?". Como cada libra corresponde a uma peça com $17^{\text{v.}}$ $4^{\text{p.}}$ $6^{\text{p.}}$ de comprimento, Ottoni orienta que aqui devemos fazer 23 lb $13^{\text{onç.}}$ $5^{\text{oit.}}$ vezes $17^{\text{v.}}$ $4^{\text{p.}}$ $6^{\text{P.}}$:

Multiplicando........	**$17^{\text{v.}}$**	**$4^{\text{p.}}$**	**$6^{\text{P.}}$**
Multiplicador	**23^{lb}**	**$13^{\text{onç.}}$**	**$5^{\text{oit.}}$**
$17^{\text{v.}}$....	**$\begin{cases} 51^{\text{v.}} \\ 34 \end{cases}$**		
$1^{\text{P.}}$	**4**	**$3^{\text{P.}}$**	
3	**13**	**4**	
$4^{\text{P.}}$	**2**	**1**	**$4^{\text{P.}}$**
2	**1**	**0**	**6**
$8^{\text{onç.}}$	**8**	**4**	**7**
4	**4**	**2**	**$3\frac{1}{2}$**
1	**1**	**0**	**$4\frac{7}{8}$**
$4^{\text{oit.}}$	**0**	**2**	**$6\frac{7}{16}$**
1		**0**	**$5\frac{39}{64}$**
Prod.	**428**	**0**	**$5\frac{27}{64}$**

Figura 40 – Multiplicador e multiplicando complexos (Ottoni, 1855, p. 87)

Dessa forma, a resposta então para essa questão será $428^{\text{v.}}$ $0^{\text{p.}}$ $5\frac{27}{64}^{\text{p.}}$.

Observe que as multiplicações **$17^{\text{v.}}$ $4^{\text{p.}}$ $6^{\text{p.}}$ vezes 23^{lb} $13^{\text{onç.}}$ $5^{\text{oit.}}$** e **23^{lb} $13^{\text{onç.}}$ $5^{\text{oit.}}$ vezes $17^{\text{v.}}$ $4^{\text{p.}}$ $6^{\text{P.}}$** resultaram em diferentes produtos. Ainda, a diferença dessas respostas dever-se-ia não somente às divisões em diferentes partes da unidade principal, mas também à espécie do resultado obtido: no primeiro caso, o resultado é expresso em unidades de massa (libra e suas subdivisões), enquanto no segundo caso obtemos um produto exposto em unidades de comprimento (vara e suas respectivas subdivisões). Quanto a esse fato, Ottoni inclui em seu texto a seguinte observação:

> No 2^{o} e 3^{o} exemplos os factores foram os mesmos mas em diversa ordem, e nota-se que os dous productos, bem que coincidem no numero das unidades principaes, são differentes quanto ás subdivisões, e não são da mesma especie. É de concluir que o principio de n^{o} 29 não é applicavel aos complexos, ou que nestes numeros *não é licito inverter a ordem dos fatores*.
>
> E com effeito, segundo as noções que temos da multiplicação, o producto deve ser sempre da especie do multiplicando, e o multiplicador se tracta como abstracto, pois o fim que preenche esse factor na operação é designar *quantas vezes o multiplicando (ou que parte deste)* se deve tomar. Logo cumpre saber qual dos numeros é o multiplicando e os dados da questão sempre no-lo advertem. Comtudo, quando os numeros concretos propostos são incomplexos, podem multiplicar-se como abstractos em qualquer ordem, e dar-se ao produto o nome que deve ter, segundo o problema. (Ottoni, 1855, p. 89-90)

O princípio n^{o} 29 citado por Ottoni encontra-se explicitado nas páginas 30 e 31 da mesma obra: "*o producto da multiplicação de muitos numeros entre si é sempre o mesmo, qualquer* *que seja a ordem das multiplicações successivas. (Considerão-se aqui os numeros abstractamente.)*". O autor continua explicando que, reduzindo-se a números fracionários (incomplexos) os resultados do 2º e 3º exemplos,

> o producto 428 lb $2^{\text{onç.}}$ $1\frac{7}{20}^{\text{oit.}}$ reduz-se a 428 lb $\frac{347}{3560}$ e o producto $428^{\text{v.}}$ $0^{\text{p.}}$ $5\frac{27}{64}^{\text{p.}}$ reduz-se a 428 lb $\frac{347}{3560}$ numeros que só differem na especie da unidade. A razão porque differem as expressões complexas, provém de não seguirem a mesma lei as divisões de uma e de outra unidade principal. (Ottoni, 1855, p. 90)

Continuando sua explicação sobre os números complexos, Ottoni aborda a divisão envolvendo números desse tipo, distinguindo dois casos: primeiro, quando o dividendo e o divisor são de espécies diferentes e, segundo, quando são da mesma espécie.

No primeiro caso, se o divisor for incomplexo então a orientação do autor é considerá-lo abstrato e, após realizar a divisão do dividendo por ele, exprime-se o quociente em unidades da mesma espécie do dividendo. Mas, se o divisor for complexo,

> converta-se em numero fraccionario da sua unidade principal, multiplique-se o dividendo pelo denominador, e considere-se o denominador como divisor incomplexo, pelo qual o producto achado será dividido segundo a regra precedente.(Ottoni, 1855, p. 91)

Como primeiro exemplo, temos a situação: "Uma obra de 568 toezas importou em 25469£ $19^{\text{s.}}$ $11^{\text{d.}}$: pergunta-se qual foi o custo de cada uma toeza?". Para solucionar essa questão, Ottoni realiza o cálculo seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 25469^{\pounds}\ 19^{\text{s.}}\ 11^{\text{d.}} & 568 \\ \hline 2749 & 44\pounds\ 16^{\text{s.}}\ 9^{\text{d.}}\ \frac{551}{568} \\ 477 & \\ 20 & \\ \hline 9559 & \\ 3879 & \\ 471 & \\ 12 & \\ \hline 5663 & \\ 551 & \end{array}$$

Figura 41 – Dividendo e divisor de espécies diferentes, sendo o divisor um incomplexo (Ottoni, 1855, p. 91)

Observe que o autor realiza a divisão de 25469£ por 568, obtendo $44\frac{477}{568}$£. Em seguida, multiplica 477 por 20, e soma o resultado com os $19^{\text{s.}}$ do dividendo, obtendo $9559^{\text{s.}}$; que, por sua vez, é dividido por 568, tendo como resultado $16\frac{471}{568}^{\text{s.}}$. Daí, os $471^{\text{s.}}$ são transformados em $5652^{\text{d.}}$ multiplicando-se por 12; os quais, somados aos $11^{\text{d.}}$ do dividendo, tornam-se $5663^{\text{d.}}$. Dividindo-se esse valor por 568, obtém-se finalmente $9\frac{551}{568}^{\text{d.}}$.

No segundo exemplo, temos o enunciado: "Uma porção de agua, contendo $14^{\text{alm.}}$ $8^{\text{c.}}$ $3^{\text{q.}}$ pesou 995 lb $3^{\text{onç.}}$ $2^{\text{oit.}}$: pergunta-se quanto pesa cada almude d'agua?". Note que almude era uma medida de capacidade para líquidos, e que eram observadas as equivalências 1 almude = 12 canadas, e 1 canada = 4 quartilhos.

As contas para a resolução desse problema são expressas da seguinte forma:

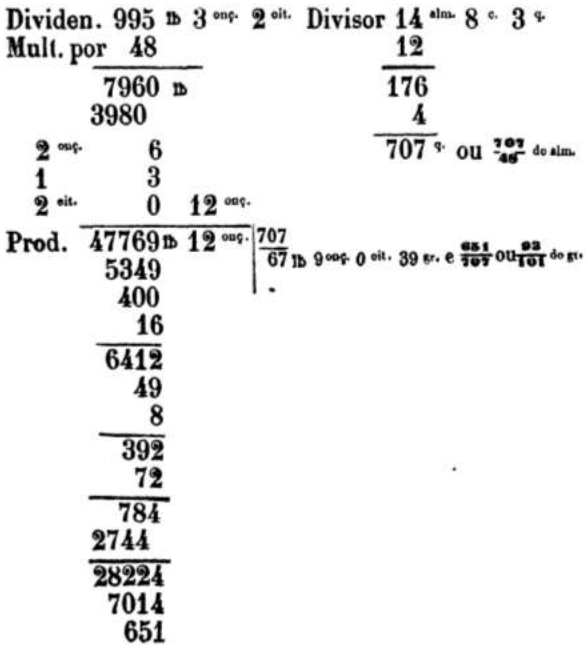


Figura 42 – Dividendo e divisor de espécies diferentes, sendo o divisor um número complexo (Ottoni, 1855, p. 92)

Como o que foi orientado pelo autor, quando dividendo e divisor são de espécies diferentes, e o divisor é um número complexo, devemos primeiro convertê-lo em número fracionário. Desse modo, os $14^{\text{alm.}}\ 8^{\text{c.}}\ 3^{\text{q.}}$ devem ser reescritos como $707^{\text{q.}}$, isto é, $\frac{707}{48}$ almudes. Então, multiplicando o dividendo 995 lb $3^{\text{onç.}}\ 2^{\text{oit.}}$ pelo denominador da fração $\frac{707}{48}$, obtemos 47769 lb $12^{\text{onç.}}$, e dividindo essa quantidade por 707 chega-se a 67 lb $9^{\text{onç.}}\ 0^{\text{oit.}}\ 39\frac{651}{707}^{\text{gr.}}$,ou seja, 67 lb $9^{\text{onç.}}\ 0^{\text{Oit.}}$ $39^{\text{ gr.}}\ \frac{93}{101}$.

O segundo caso exposto por Ottoni trata da divisão quando dividendo e divisor são da mesma espécie. Sendo ambos complexos ou ambos incomplexos, o autor instrui a expressar as duas quantidades na menor classe de unidade que uma delas contenha. Feito isso, basta dividir uma pela outra, “dando ao quociente os nomes das unidades, que deve representar”. Por exemplo: “Uma fonte a correr gastou $1^{\text{h.}}\ 58^{\text{m.}}\ 51^{\text{s.}}$ para encher um almude: quantos almudes encherá em $19^{\text{h.}}\ 7^{\text{m.}}\ 31^{\text{s.}}$?”.

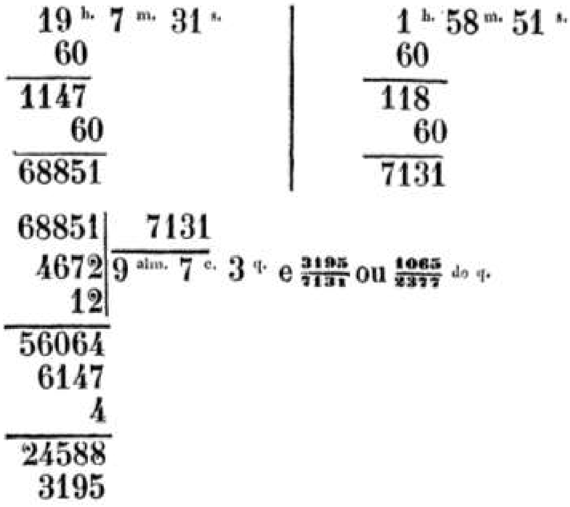


Figura 43 – Dividendo e divisor de mesma espécie (Ottoni, 1855, p. 95)

Expressando as duas quantidades em segundos, obtemos $19^{h.}\ 7^{m.}\ 31^{s.} = 68851^{s.}$ e $1^{h.}\ 58^{m.}\ 51^{s.} = 7131^{s.}$. Realizando a divisão de 68851 por 7131 e observando-se que o quociente deve ser expresso em *almudes, canadas* e *quartilhos*, obtém-se $9\frac{4672}{7131}$ almudes, ou seja, $9^{alm.}\ 7^{c.}\ 3\frac{1065}{2377}{}^{q.}$.

Como regra geral para a divisão dos complexos, o autor enuncia o seguinte princípio: "Na divisão dos numeros complexos a especie do quociente deve ser determinada a ratione segundo as condições do problema proposto". No próximo capítulo, discutiremos também essa abordagem para a divisão.

No final do capítulo IV, Ottoni discorre sobre sistemas de pesos e medidas, comentando brevemente sobre o sistema métrico. No entanto, em um parágrafo podemos ler:

> Não nos demoraremos em applicações numericas, ou na enumeração de outras vantagens do systema metrico, porque delle não se faz uso algum em nosso paiz. (Ottoni, 1855, p. 108)

Em seguida, é incluída uma tabela de conversão de algumas medidas utilizadas no Brasil para unidades francesas e inglesas. Tal tabela não consta no livro de Bourdon.

3.3 Elementos de Arithmetica, de José Joaquim d'Avila (1856)

José Joaquim d'Avila foi major do Corpo de Engenheiros e lente da Academia de Marinha. Segundo Zuin (2007), o Elementos de Arithmetica foi adotado nas escolas regimentais dos corpos do exército e arsenais, no Colégio D. Pedro II e nas escolas públicas de primeiras letras. Para Zuin, os livros de Aritmética de d'Ávila

> eram destinados aos escolares, a princípio, com a intenção de elaborar um texto para os alunos do Colégio Curiacio, onde lecionou. Porém, a adoção e a

> venda expressiva de suas obras, segundo ele, levam-no a se preocupar com a correção de algumas falhas presentes na primeira publicação dos livros, fazer determinadas alterações e acréscimos nos textos de edições posteriores. (Zuin, 2017, p. 196)

Ainda de acordo com Zuin (2017), a adoção do livro de d'Ávila (que já era utilizado no Colégio Pedro II) foi indicada, em um ofício do inspetor geral da Instrução Pública do Município da Corte ao Ministro do Império, para ser adotada pelos alunos das escolas públicas de primeiras letras.

A popularidade e a aceitação da Aritmética de d'Ávila podem ser percebidas no seguinte parágrafo do prefácio dessa 3^a edição:

> Agradecendo ás pessoas que com tanta bondade tem concorrido para a extracção de dous mil exemplares de nossa arithmetica em tão pouco tempo, animamo-nos por isso a arrogar-lhes sua valiosa e importantissima coadjuvação, afim de podermos continuar a publicação de outros trabalhos que já se achão coordenados. (D'Avila, 1856)

A terceira edição possui seus conteúdos organizados da forma seguinte.

- Definições e numeração

Capitulo I

- Operações sobre os numeros inteiros
- Da addição, provas, e alguns exercicios
- Da subtracção, provas, e alguns exercicios
- Da multiplicação, provas, e alguns exercicios
- Da divisão, provas, e alguns exercicios
- Divisibilidade dos numeros
- Divisores dos numeros

Capitulo II

- Das fracções ou quebrados
- Extracção de um numero inteiro contido em um quebrado
- Reducção de um numero inteiro ou quebrado
- Reducção dos quebrados ao mesmo denominador
- Reducção de um quebrado a expressão mais simples
- Do maximo commum divisor
- Addicção das fracções
- Subtracção das fracções
- Multiplicação das fracções
- Divisão das fracções

- Alguns exemplos ácerca das fracções

- Das fracções de fracções, e alguns exemplos relativos

Capitulo III

- Das fracções decimaes

- Da addicção

- Da subtracção

- Da multiplicação

- Da divisão

- Dizima periodica

- Systema metrico

- Das fracções continuas

Capitulo IV

- Dos numeros complexos

- Converção de um numero complexo em uma fracção ordinaria da unidade principal

- Converção de uma fracção ordinaria, de uma unidade complexa qualquer, neste numero complexo

- Da addicção

- Da subtracção

- Da multiplicação

- Da divisão

Capitulo V

- Da formação dos numeros quadrados e da extracção de suas raizes quadradas

- Da formação dos numeros cubicos e extracção de suas raizes cubicas

Capitulo VI

- Theoria das razões e proporções

- Propriedades das proporções arithmeticas

- Propriedades das proporções geometricas

- Da regra de tres e alguns exemplos

- Da regra de companhia e exemplos

- Da regra de juros e exemplos

- Da regra de desconto e exemplos

- Da regra de liga e exemplos

- Da regra de cambio e exemplos

- Da regra de reducção das moedas

Capitulo VII

- Theoria das progressões e dos logarithmos

- Dos logarithmos
- Disposição das taboas dos logarithmos e maneira de servimo-nos dellas
- Uso dos logarithmos
- Dos complementos arithmeticos

O quarto capítulo da obra, dedicado ao estudo dos números complexos é iniciado com o seguinte parágrafo:

> Antes de entrarmos no calculo destes numeros convêm sabermos quaes os *pesos, medidas e moedas*, que consideramos nesta theoria, assim como as suas divisões e subdivisões, afim de podermos executar as quatro operações fundamentaes da *Arithmetica* sobre estes numeros. (D'Avila, 1856, p. 116)

E então d'Avila discorre sobre nomes de algumas unidades utilizadas nesse capítulo e também suas subdivisões. No livro de d'Avila são listadas também unidades utilizadas em países diferentes do Brasil, cuja utilidade poderia ser justificada tendo como base intercâmbios comerciais do Brasil com outros países. Como exemplo, podemos ver os últimos parágrafos dessa introdução, que trazem informações sobre medidas monetárias:

> *Franco* ou *libra de França* tem 20 soldos, e o soldo 12 dinheiros. O Franco tambem se divide em 100 *centesimos*. *Libra sterlina* de Inglaterra ou *soberano* tem 20 shelins, shelin 12 dinheiros ou *pence*, e o pence 4 farthings. *Florin Suisso* tem 12 soldos, e o soldo 12 dinheiros. *Florin d'Allemanha* tem 60 kreutzers e o kreutzers 8 hellers ou dinheiros. *Florin de Hollanda* tem 20 soldos *communs* ou 40 dinheiros, e o soldo commum 16 pennins. *Marco lub* de Hamburgo tem 16 soldos, soldo 2 dinheiros grossos; o soldo lub tem 12 dinheiros lub. (D'Avila, 1856, p. 117)

Podemos colher dados interessantes dessa parte introdutória, como unidades aparentemente utilizadas no Brasil e que não são citadas no livro de Vianna, como a fanga e a maquia (unidades de capacidade para secos):

> Moio tem 15 fangas, fanga 4 alqueires, alqueire 4 quartos, quarta 2 oitavas , oitava 2 maquias, e maquia 2 selamins. (D'Avila, 1856, p. 116)

Além disso, verificamos que unidades homônimas podem significar medidas diversas dependendo do país ou região em que se estivesse:

> Tonel tem 2 pipas, pipa 23, 25, 26 e 30 almudes, em alguns lugares de Portugal, que tambem contão por 110, 112 e 120 gallões, almude 2 potes, pote 6 canadas, canada 4 quartilhos. No Brazil a pipa tem 180 medidas, que corresponde a 30 almudes em Portugal, e a medida 4 quartilhos. (D'Avila, 1856, p. 116)

Iniciando-se propriamente o estudo dos números complexos, esses são definidos como aqueles "que são compostos de muitas partes differentes e referidas cada uma á sua unidade respectiva", enquanto incomplexo é aquele "que se refere a uma só especie da unidade". (D'Avila, 1856, p. 117)

Após serem dados exemplos de números complexos e de incomplexos, discute-se como converter um número complexo em incomplexo, e vice-versa. Como exemplo, realiza-se a conversão do número complexo 5£ 7^{s} 4^{d} no número incomplexo $\frac{1288}{240}$ £.

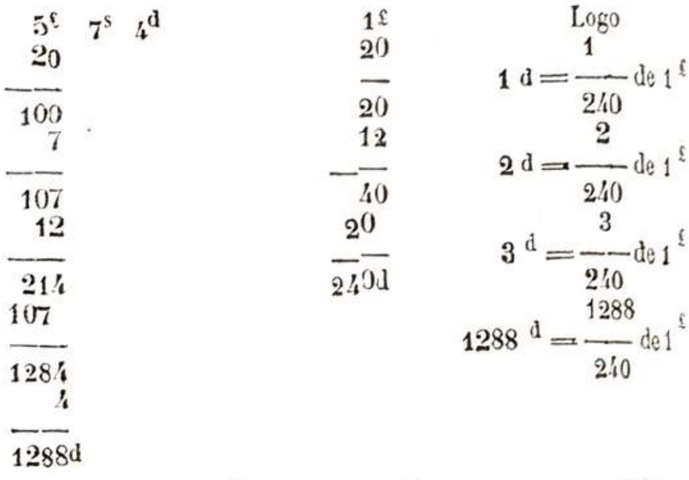


Figura 44 – Conversão de número complexo em incomplexo (D'Avila, 1856, p. 118)

Em seguida, transforma-se a fração $\frac{23}{15}$ da toesa no número complexo 1^{T} 3^{P} 2^{p} 4£ $9\frac{9}{15}$ ^{pont}:

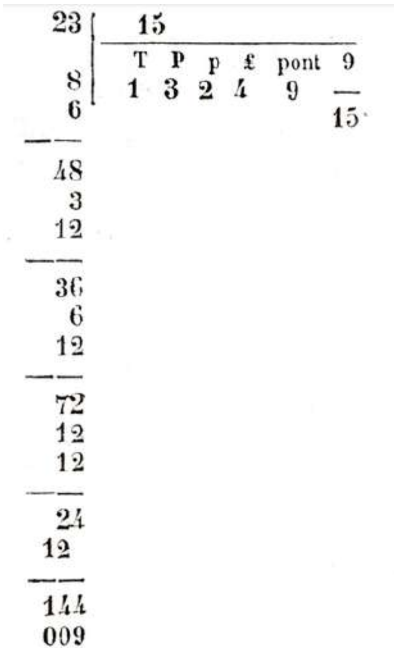


Figura 45 – Conversão de número incomplexo em complexo (D'Avila, 1856, p. 119)

Divide-se 23 por 15, o que resulta em $1\frac{8}{15}$ toesa. O $\frac{8}{15}$ de toesa é multiplicado por 6, obtendo-se $\frac{48}{15} = 3\frac{3}{15}$ pés. Mas um pé equivale a 12 polegadas, donde $\frac{3}{15}$ pés = $\frac{36}{15}$ polegadas = $2\frac{6}{15}$ polegadas. O restante dos cálculos efetuados nessa conversão fica mais obscuro, uma vez que no livro de D'Ávila não consta maiores explicações sobre o restante das contas, há apenas a expressão: "e assim por diante até a última subdivisão", e tampouco a parte introdutória dos números complexos nos prepara para os cálculos necessários nessa etapa, pois o parágrafo onde a toesa é citada nos informa somente que “toesa tem 6 pés, e pé 12 pollegadas” (),D’Avila, 1856, p. 119.

Pesquisando em outros livros, em particular no *Memoria sobre os pesos e medidas de Portugal, Espanha, Inglaterra, França, que se empregão nos trabalhos do corpo de engenheiros e da arma de artilheria*, de Barreiros (1838), pudemos encontrar que a toesa equivale a 6 pés, um pé é igual a 12 polegadas, cada polegada equivale a 12 linhas, e, por último, uma linha é igual a 12 pontos. O uso do símbolo £ para denotar a linha também nos surpreendeu, visto que não o encontramos em nenhuma outra obra.

Ao tratar da adição e subtração dos números complexos, o autor exibe dois exemplos. Primeiro, soma três números: 48£ 12^s 9^d, 23£ 9^s 10^d, e 7£ 15^s 3^d; obtendo 79 libras 18 soldos e 3 dinheiros.

48£	12^s	9^d
23	9	10
7	15	8
79£	18^s	3^d

Figura 46 – Adição de números complexos (D’Avila, 1856, p. 120)

A seguir, D’Ávila realiza a subtração dos números complexos 27^T 3^P 6^p 4^l e 18^T 4^P 12^p 6^l; que resulta em 8 toesas, 4 pés, 5 polegadas e 10 linhas.

27^T	3^P	6^p	4^l
18	4	12	6
8^T	4^P	5^p	10^l

Figura 47 – Subtração de números complexos (D’Avila, 1856, p. 121)

A seção sobre multiplicação de números complexos é iniciada com o parágrafo seguinte.

> De duas maneiras executaremos essa operação, ou pela theoria das fracções ordinarias, ou pelas partes aliquotas (chamamos parte aliquota de um numero o numero que se contém nelle algumas vezes exactamente; e parte aliquanta quando não se contém exactamente; assim 2, por exemplo, é parte aliquota de 8, e aliquanta de 7); e quando essa parte aliquota for consideravel usaremos então dos productos chamados *subsidiarios* ou de auxilio para facilitarmos o calculo, tomando parte mais pequenas; esses productos subsidiarios serão traçados, afim de não entrarem em somma. (D’Avila, 1856, p. 122)

Connsideramos a explicação acima relativamente confusa, principalmente na parte que fala sobre os produtos subsidiários. No entanto, pode-se afirmar que a definição de parte alíquota de um número foi feita satisfatoriamente, e incluiu a terminologia *parte aliquanta* de um número, que não vimos em outros livros.

Para realizar a multiplicação de 5£ $4^{s}6^{d}$ por $4^{T}5^{P}3^{p}$ utilizando o método das frações ordinárias, D'Ávila destaca que o resultado obtido será dado em libras, soldos e dinheiros, e exibe as contas realizadas nessa operação:

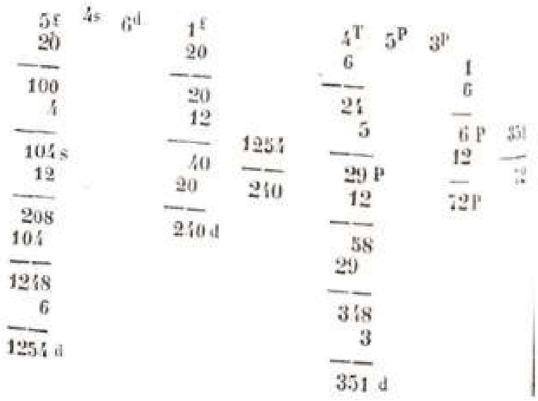


Figura 48 – Multiplicação de números complexos pelo método das frações ordinárias (D'Avila, 1856, p. 122)

Em primeiro lugar, o autor converte o número 5£ 4^{s} 6^{d} no número incomplexo $\frac{1254}{240}$ libras; depois, converte também o número complexo 4^{T} 5^{P} 3^{p} em $\frac{351}{72}$ toesas. Feito isso, os dois números são multiplicados, obtendo-se $\frac{1254}{240} \cdot \frac{351}{72} = \frac{440154}{17280}$ libras, que convertido em número complexo é igual a 25£ 6^{s} $5\frac{1}{4}^{d}$.

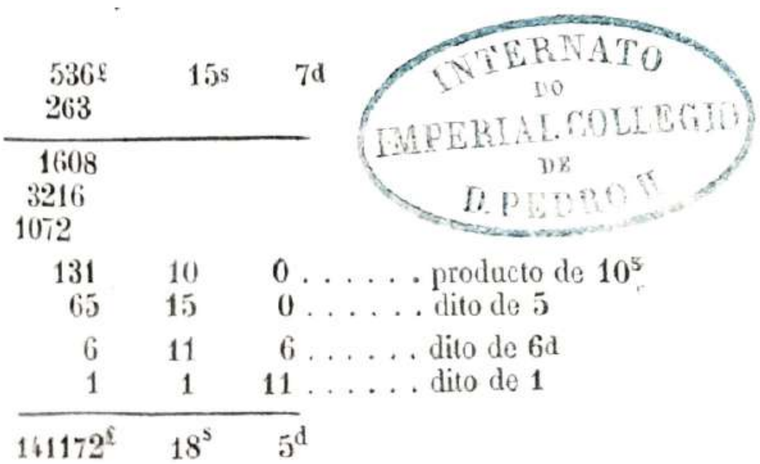
Para efetuar o produto envolvendo números complexos utilizando, agora, o método das partes alíquotas, o autor considera três casos:

<u>1^{o} caso:</u> Quando o **multiplicando é complexo** e o **multiplicador é incomplexo** (D'Ávila destaca que, nesse caso, o multiplicador poderia ser também um número inteiro qualquer). É, então, exposta a seguinte regra:

> Collocaremos o multiplicador por baixo do multiplicando, multiplicaremos as unidades principaes deste pelas daquelle, (n. 40); depois decomporemos as subdivisões do multiplicando em partes aliquotas de sua unidade principal ou das precedentes, tomaremos estas partes sobre o multiplicador, e sommaremos finalmente todos os productos parciaes para termos o total. (D'Avila, 1856, p. 123)

Como exemplo, é proposta a questão: se uma toesa de obra custou 536£ 15^{s} 7^{d}, quanto custarão 263^{T}? (D'Avila, 1856, p. 123)

A resposta é obtida multiplicando-se 263 por 536£ 15^{s} 7^{d}, como na seguinte figura.



$536^{£}$	15^{s}	7^{d}	
263			
1608			
3216			
1072			
131	10	0	. . . . . . producto de 10^{s}
65	15	0	. . . . . . dito de 5
6	11	6	. . . . . . dito de 6^{d}
1	1	11	. . . . . . dito de 1
$141172^{£}$	18^{s}	5^{d}	

Figura 49 – Método das partes alíquotas quando o multiplicando é complexo e o multiplicador, incomplexo (D'Avila, 1856, p. 123)

O produto $263 \cdot 10^{s}$ é feito multiplicando-se 263 por $\frac{1}{2}$£. A multiplicação $263 \cdot 5^{s}$ é realizada dividindo-se o resultado anterior pela metade. Já o cálculo de $263 \cdot 6^{d}$ é feito dividindo-se o resultado anterior por 10 (pois $6^{d} = \frac{1}{2}^{s} = \frac{5}{10}^{s}$). Por último $263 \cdot 1^{d}$ é efetuado dividindo-se o resultado anterior por 6. Os cálculos realizados nessa etapa são descritos com minúcia por D'Ávila nas próximas duas páginas do livro.

O mesmo exemplo também é resolvido empregando-se os produtos subsidiários, que difere do cálculo anterior por incluir o cálculo de $263 \cdot 1^{s}$ com o único objetivo de facilitar a conta $263 \cdot 6^{d} = 263 \cdot \frac{1}{2}^{s}$. O autor destaca que essa linha deve ser riscada, para não participar do resultado, e que considera a utilização dos produtos subsidiários vantajosa por tornar o cálculo muito mais simples.

Figura 50 – Método das partes alíquotas quando o multiplicando é complexo e o multiplicador é incomplexo, utilizando os produtos subsidiários (D'Avila, 1856, p. 125)

2^{o} caso: Quando o **multiplicando é incomplexo** e o **multiplicador é complexo**. A regra apresentada para essa situação é a seguinte:

> Collocaremos o multiplicador por baixo do multiplicando, multiplicaremos as unidades principaes deste pelas daquelle (n. 40), depois decomporemos as subdivisões do multiplicador em partes aliquotas da unidade principal ou das precedentes, avaliaremos estas fracções sobre o multiplicando, e sommaremos finalmente os productos parciaes para termos o total. (D'Avila, 1856, p. 126)

O exemplo exibido nesse caso questiona: se uma toesa de obra custa 7£, quanto custarão 5^{T} 4^{P} 7^{p} de obra? (D'Avila, 1856, p. 126).

$7^{£}$	0^{s}	0^{d}	
5^{T}	4^{P}	7^{P}	
35			
3	10	0	. . . . Produsto de 3^{P}
1	3	4	. . . . Dito de 1
0	11	8	. . . . Dito de 6^{P}
0	1	11 $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$	. . Dito de 1
$40^{£}$	6^{s}	$11\frac{1}{3}^{d}$	

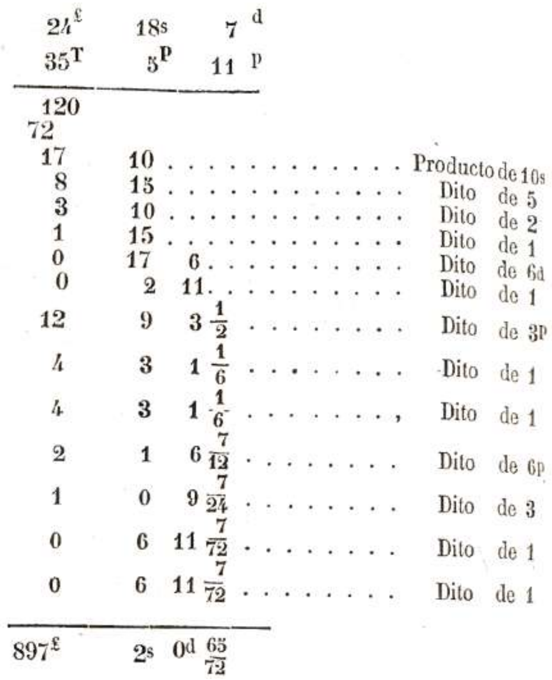
Figura 51 – Método das partes alíquotas quando o multiplicando é incomplexo e o multiplicador é complexo (D'Avila, 1856, p. 126)

Após multiplicar a unidades principal do multiplicando pela do multiplicador, passa-se a realizar os cálculos usando-se as partes alíquotas dos 4^{P} e das 7^{p}.

<u>3^{o} caso:</u> Quando o **multiplicando e o multiplicador são complexos**. A regra apresentada para essa situação é a seguinte:

> Collocaremos o multiplicador por baixo do multiplicando, multiplicaremos as unidades principaes deste pelas daquelle (n. 40); depois decomporemos as subdivisões do multiplicando em partes aliquotas da unidade principal ou das precedentes, e avaliaremos estas partes sómente sobre a primeira do multiplicador; decomporemos tambem as subdivisões do multiplicador em partes aliquotas de sua unidade principal ou das precedentes, e avaliaremos estas partes sobre todo o multiplicando: finalmente sommaremos todos os productos parciaes para termos o total. (D'Avila, 1856, p. 127)

É sugerida uma questão similar à do 2^{o} caso, porém na qual multiplicando e multiplicador são ambos complexos: "se nos dissessem 1 toeza de certa obra custou $24^{£}18^{s}7^{d}$; quer-se saber $35^{T}5^{P}11^{p}$ quanto custarão?"(D'Avila, 1856, p. 128). O cálculo realizado é então $35^{T}5^{P}11^{p}$ vezes $24^{£}18^{s}7^{d}$.

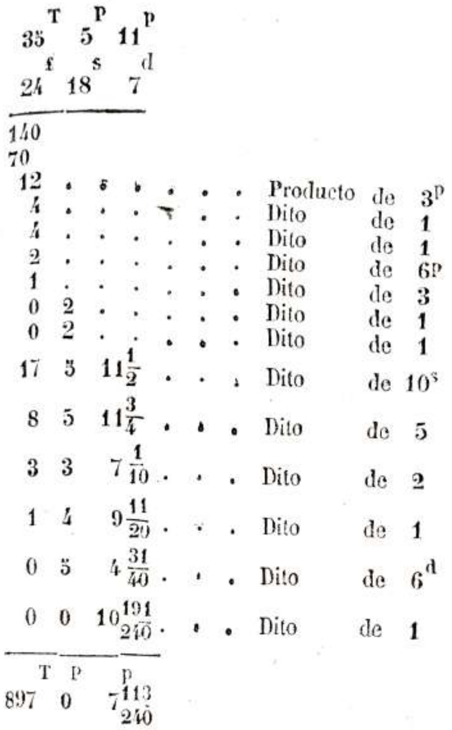


$24^{£}$	18^{s}	7^{d}	
35^{T}	5^{P}	11^{p}	
120			
72			
17	10		Producto de 10s
8	15		Dito de 5
3	10		Dito de 2
1	15		Dito de 1
0	17	6	Dito de 6d
0	2	11	Dito de 1
12	9	$3\frac{1}{2}$	Dito de 3P
4	3	$1\frac{1}{6}$	Dito de 1
4	3	$1\frac{1}{6}$	Dito de 1
2	1	$6\frac{7}{12}$	Dito de 6p
1	0	$9\frac{7}{24}$	Dito de 3
0	6	$11\frac{7}{72}$	Dito de 1
0	6	$11\frac{7}{72}$	Dito de 1
$897^{£}$	2^{s}	$0^{d}\,\frac{65}{72}$	

Figura 52 – Método das partes alíquotas quando o multiplicando e multiplicador são ambos complexos (D'Avila, 1856, p. 128)

Depois de se multiplicar as unidades principais do multiplicando pelas do multiplicador, passa-se a multiplicar as partes alíquotas do multiplicando (primeiro as partes alíquotas de 18^{s} e, em seguida, as partes alíquotas de 7^{d}) pelas 35^{T}. Concluída essa etapa, calcula-se o produto do multiplicando pelas partes alíquotas de 5^{P} e de 11^{p}.

O autor destaca que, se trocássemos multiplicando e multiplicador nesse exemplo, teríamos a conta abaixo, cujo produto é diferente do resultado anterior. Não são expostos nessa obra maiores comentários sobre a não comutatividade.



T	P	p			
35	5	11			
£	s	d			
24	18	7			
140					
70					
12			Producto	de	3^p
4			Dito	de	1
4			Dito	de	1
2			Dito	de	6^p
1			Dito	de	3
0	2		Dito	de	1
0	2		Dito	de	1
17	5	$11\frac{1}{2}$	Dito	de	10^s
8	5	$11\frac{3}{4}$	Dito	de	5
3	3	$7\frac{1}{10}$	Dito	de	2
1	4	$9\frac{11}{20}$	Dito	de	1
0	5	$4\frac{31}{40}$	Dito	de	6^d
0	0	$10\frac{191}{240}$	Dito	de	1
T	P	p			
897	0	$7\frac{113}{240}$			

Figura 53 – Exemplo de não comutatividade no método das partes alíquotas quando o multiplicando e multiplicador são complexos (D'Avila, 1856, p. 131)

A divisão envolvendo números complexos é ensinada, como foi feito na multiplicação, refletindo-se em três casos.

1^o caso: Quando o **dividendo é complexo** e o **divisor é incomplexo**. D'Ávila exibe a regra a ser utilizada para esse caso no seguinte parágrafo:

> Consideraremos o divisor como abstracto, praticaremos a divisão (n. 46), e os restos, se houverem, converteremos (n. 130, 2.ª) na subdivisão seguinte que deve vir no quociente; assim continuaremos até a última subdivisão. (D'Avila, 1856, p. 133)

O exemplo proposto possui o enunciado a seguir: "30 arrobas de assucar custárão $65^{£}14^{sh}6^{d}$; quer-se saber 1 arroba quanto custará?"(D'Avila, 1856). Divide-se, dessa forma, $65^{£}14^{sh}6^{d}$ por uma arroba, a fim de concluir o preço de uma arroba (nesse caso, em libras, shelins e dinheiros).

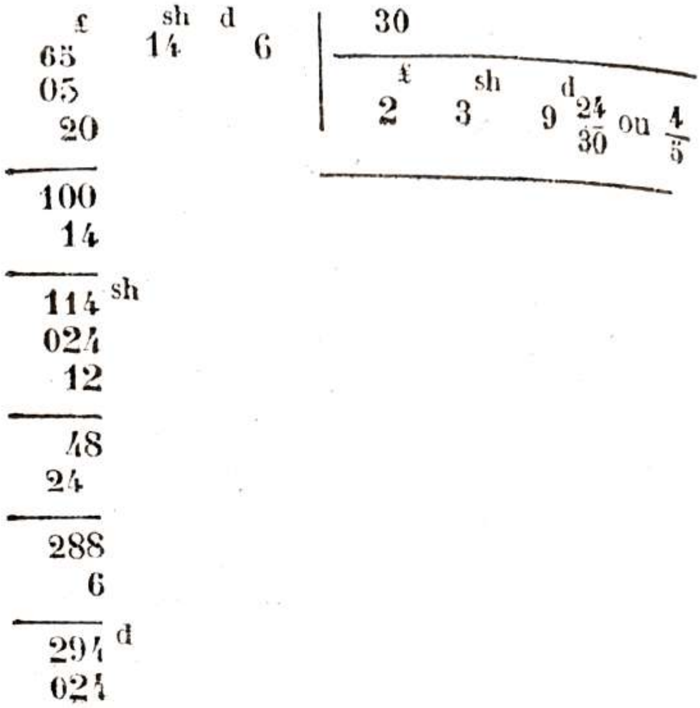


Figura 54 – Divisão de número complexo por número incomplexo (D'Avila, 1856, p.134)

Depois de dividir 65 por 30, obtendo 2£, as 5£ do resto são convertidas em $5^{£} \cdot 20 = 100^{\text{sh}}$ e somadas aos 14^{sh}. Esses 114^{sh} são divididos por 30, tendo como resultado 3^{sh} e resto 24^{sh}; que por sua vez são convertidos em $24^{\text{sh}} \cdot 12 = 288^{\text{d}}$. Os 294^{d} são divididos por 30, obtendo-se $9\frac{4}{5}$ dinheiros.

D'Ávila salienta que, se o dividendo também fosse incomplexo, "não haveria difficuldade alguma, pois teriamos a dividir dous numeros inteiros ou considerados inteiros entre si, tendo em attenção, pelo enunciado da questão, qual a especie do quociente"(D'Avila, 1856).

2^o caso: Quando o **dividendo e divisor são complexos**, mas de espécies diferentes. A regra apresentada pelo autor nesse caso é:

> Converteremos o divisor (n.130 1.ª) em uma fracção ordinaria da unidade principal, multiplicaremos (n.79) o dividendo pelo denominador, e dividiremos o producto pelo numerador. (D'Avila, 1856, p. 135)

Por exemplo, se soubéssemos que $45^{\text{ar}}10^{\text{lb}}3^{\text{onç}}$ de açúcar custam $85^{£}12^{\text{sh}}6^{\text{d}}$, quanto custa então uma arroba de açúcar? (D'Avila, 1856, p. 135)

Convertendo $45^{\text{ar}}10^{\text{lb}}3^{\text{onç}}$ em uma fração ordinária da unidade principal, chegamos a $\frac{23203}{512}$ arrobas. Multiplicando, como explicitado na regra, 512 por $85^{£}12^{\text{sh}}6^{\text{d}}$, temos $43840^{£}$, que divididas por 23203 resultam em $1^{£}17^{\text{sh}}9\frac{10641}{23203}^{\text{d}}$.

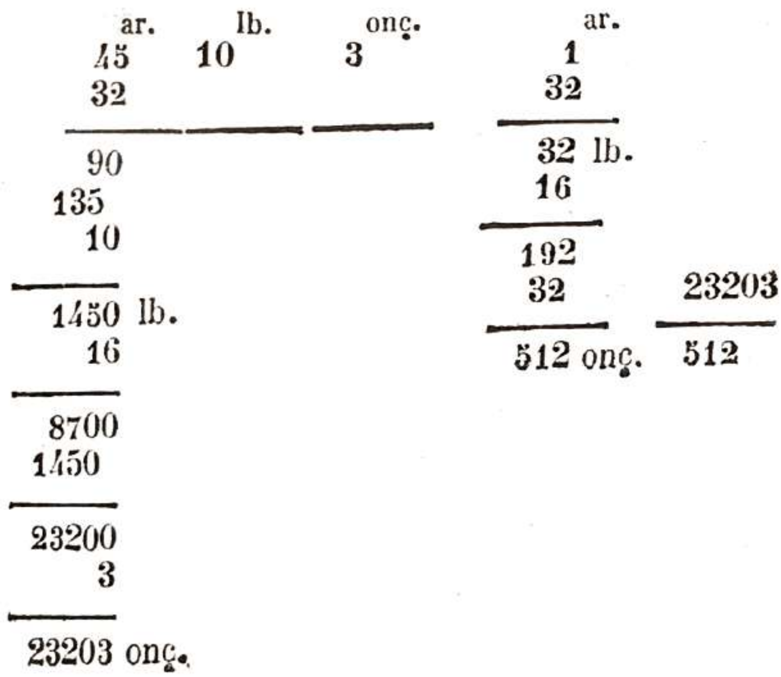


Figura 55 – Primeira parte da divisão de número complexo por número complexo (de espécies diferentes): Conversão de $45^{ar}10^{lb}3^{onç}$ em uma fração ordinária da unidade principal (D'Avila, 1856, p. 135)

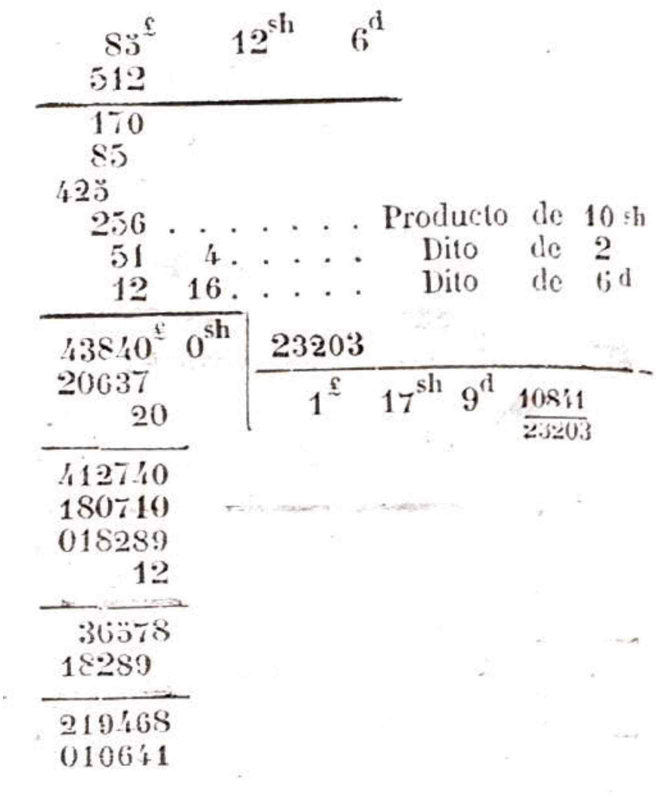


Figura 56 – Segunda parte da divisão de número complexo por número complexo (de espécies diferentes): Multiplicação de 512 (denominador) por $85^{£}12^{sh}6^{d}$, e divisão do resultado por 23203 (numerador) (D'Avila, 1856, p. 136)

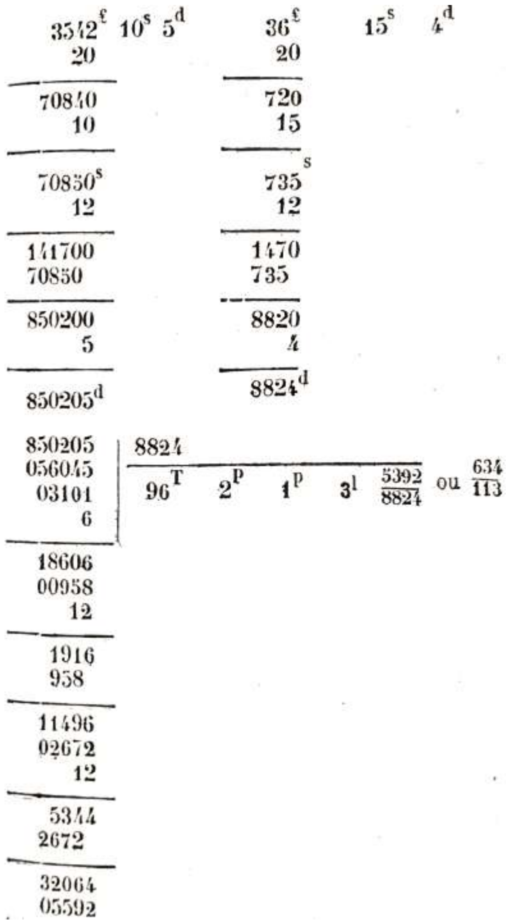
O autor destaca que, fosse o dividendo incomplexo, "o calculo se tornaria mais simples, pois teriamos a dividir somente um numero inteiro ou supposto inteiro por uma fracção"(D'Avila, 1856).

<u>3^o caso:</u> Quando o **dividendo e divisor são complexos** de mesma espécie. D'Ávila afirma que

> Converteremos (n. 130) o dividendo e o divisor a sua infima especie, dividiremos um pelo outro, e os restos da divisão hiremos convertendo nas especies que devem vir no quociente, pelo enunciado da questão. (D'Avila, 1856, p. 136)

O exemplo apresentado pelo autor para esse caso consiste em: se uma toesa de determinada obra foi feita por $36^{£}15^{s}4^{d}$, quantas toesas serão feitas com $3542^{£}10^{s}5^{d}$? (D'Avila, 1856, p. 137)

A resposta para essa questão é o quociente de $3542^{£}10^{s}5^{d}$ por $36^{£}15^{s}4^{d}$, como exibido na figura abaixo.


$3542^{£}$ 10^{s} 5^{d} | $36^{£}$ 15^{s} 4^{d}
20 | 20
70840 | 720
10 | 15
70850^{s} | 735^{s}
12 | 12
141700 | 1470
70850 | 735
850200 | 8820
5 | 4
850205^{d} | 8824^{d}

850205 | 8824
056045 | 96^{T} 2^{P} 1^{p} 3^{l} $\frac{5392}{8824}$ ou $\frac{634}{113}$
03101
6
18606
00958
12
1916
958
11496
02672
12
5344
2672
32064
05592

Figura 57 – Divisão de números complexos de mesma espécie (D'Avila, 1856, p. 137)

Desse modo, o autor conclui o capítulo IV, dedicado aos números complexos. O capítulo III dessa mesma obra possui, ainda, uma seção destinada ao sistema métrico (que, segundo Zuin (2017), não constava nas edições anteriores dessa obra, de 1850 e 1854), em que se discute em seis páginas o novo sistema de pesos e medidas, as principais unidades de medida (de comprimento, de superfície, de volume, de capacidade, de peso e monetária), seus múltiplos e suas subdivisões. Para Zuin,

> A relevância desse autor se situa não apenas no fato de ele alterar seu livro incluindo um novo tópico, mas também por ser favorável à adoção do sistema métrico, enaltecendo suas vantagens, seis anos antes de ser sancionada a Lei 1157 que oficializaria as mudanças dos pesos e medidas em solo brasileiro. (Zuin, 2017, p. 191)

3.4 Curso Elementar de Mathematica – Theorico, pratico e applicado. I. Arithmetica (Calculo dos valores), de Aarão e Luciano Leal de Carvalho Reis (1892)

Aarão Leal de Carvalho Reis (1853 - 1936) foi engenheiro civil, professor de matemática, urbanista e político. Ele foi um dos responsáveis pelo projeto da cidade de Belo Horizonte (1894 – 1897). Seu irmão, Luciano Leal de Carvalho Reis, foi professor de matemática e oficial da contadoria geral da guerra. Tanto Aarão quanto Luciano Reis são considerados autores positivistas,

O Programa de Ensino do Colégio Pedro II de 1895 determinou a utilização do primeiro volume, dedicado à aritmética, do livro Curso Elementar de Matemática – Theorico, pratico e applicado, de Aarão e Luciano Reis (o segundo volume dessa obra, que não consta nos programas do Colégio Pedro II, era dedicado à Álgebra). A segunda edição dessa obra, de 1892, possui a estrutura seguinte.

- Advertencia da segunda edição
- Prefacio da primeira edição
- Advertencia da primeira edição
- Introducção geral
    Capitulo I – Noções preliminares
    Capitulo II – Numeração
    Capitulo III – Ideas e definições geraes de logica
- Primeira Seção: Numeros inteiros
- Livro I: Operações
    - Introducção
    Capitulo I – Addição
    Capitulo II – Subtracção
    Capitulo III – Multiplicação

Capitulo IV – Divisão

Capitulo V – Potenciação

Capitulo VI – Radiciação

- Livro II: Propriedades elementares

- Preliminares

Capitulo I – Theoremas relativos ás operações

Capitulo II – Divisibilidade

Capitulo III – Maximo commum divisor

Capitulo IV – Menor multiplo commum

Capitulo V – Numeros primos

- Segunda secção: Numeros fraccionarios

- Livro I: Fracções ordinarias

- Preliminares

Capitulo I – Propriedades geraes

Capitulo II – Transformações

Capitulo III – Operações

- Livro II: Fracções decimaes

- Preliminares

Capitulo I – Operações

Capitulo II – Conversões

Capitulo III – Dizimas periodicas

- Livro III – Fracções continuas

- Preliminares

Capitulo I – Conversão das fracções ordinarias em continuas

Capitulo II – Geratrizes

Capitulo III – Propriedades das reduzidas

- Terceira secção: Numeros incommensuraveis

- Introducção preliminar

- Livro I: Propriedades e operações

Capitulo I – Origem e propriedades

Capitulo II – Operações

Capitulo III – Calculo por radicais

- Livro II: Aproximações numericas

- Preliminares

Capitulo I – Erros absoluto e relativo

Capitulo II – Operações abreviadas

Capitulo III – Operações sobre os numeros approximados

- Quarta secção: Comparação dos numeros - Livro I: Razões e proporções

    - Preliminares

    Capitulo I – Equidiferenças

    Capitulo II – Proporções

- Livro II: Progressões e logarithmos

    Capitulo I – Progressões

    Capitulo II – Logarithmos

- Quinta secção: applicações sociais - Livro I: Metrologia

    - Introducção preliminares

    Capitulo I – Exposição do systema e sua nomenclatura

    Capitulo II – Calculo das medidas metricas

- Livro II: Problemas arithmeticos usuais

    - Preliminares

    Capitulo I – Regras de tres

    Capitulo II – Regras de juros e descontos

    Capitulo III – Outras regras usuais

    - Nota A

    - Nota B

O livro de aritmética de Aarão e Luciano Reis não apresenta conteúdo algum sobre os "números complexos"[1]. No entanto, no colégio Pedro II a adoção do presente livro se deu através do Programa de Ensino de 1895, que também determinou a adoção de outro livro de aritmética: o **Elementos de Arithmetica**, de João José Luiz Vianna. Nesse último livro, veremos que os números complexos são amplamente contemplados. Uma questão intrigante é: por quê dois livros contemporâneos, que exibem seu conteúdos de forma detalhada (nenhum dos dois livros poderia ser considerado um tipo de resumo sobre a aritmética), diferem tanto um do outro no que diz respeito à abordagem dos números complexos.

O livro I da quinta seção é dedicado ao estudo da metrologia. Nele são discutidos: necessidade econômica das medidas, padrões de aferição, necessidade de um sistema uniforme de medidas, o sistema métrico decimal, o novo sistema no Brasil e, por último, suas vantagens e objeções.

[1] Há nesse livro um parágrafo que menciona as "fracções complexas", que seriam frações com numerador fracionário e também denominador fracionário, mas que não está relacionado ao tema dessa pesquisa.

3.5 Elementos de Arithmetica, de João José Luiz Vianna (1906)

O Programa de Ensino de 1895 do Colégio Pedro II, então chamado Gymnasio Nacional, indica a utilização da 4ª edição do livro de João José Luiz Vianna, impresso no Rio de Janeiro em 1894. Além do Gymnasio Nacional, o livro foi adotado também no Collegio Militar, na Escola Militar do Rio de Janeiro e na Escola Naval, além de outros estabelecimentos de ensino. Conseguimos encontrar até a 21ª edição do livro, impressa em 1926, o que é um indício de sua popularidade.

João José Luiz Vianna nasceu em 24 de junho de 1843. Tornou-se bacharel em Ciências Matemáticas e Físicas, foi membro do Instituto Politécnico Brasileiro e professor de matemática na Escola Naval. Nesta obra que analisaremos, que corresponde à 11ª edição, os conteúdos encontram-se organizados da seguinte forma:

Noções preliminares
- Numeração

Primeira parte:

Capitulo I:
- Operações sobre os números inteiros
- Addição
- Subtracção
- Multiplicação
- Divisão
- Mudança de base nos systemas de numeração

Capitulo II:
- Propriedades geraes dos numeros
- Operações algebricas
- Addição
- Subtracção
- Multiplicação
- Divisão
- Divisibilidade dos numeros
- Theoria dos restos. Caracteres de divisibilidade
- Prova dos noves das quatro operações
- Theoria do maximo divisor commum
- Theoria dos numeros primos

Capitulo III:

- Theoria das fracções ordinarias
- Reducção das fracções á sua expressão mais simples
- Reducção das fracções ao mesmo denominador
- Operações sobre as fracções ordinarias
- Addição
- Subtracção
- Multiplicação
- Divisão
- Theoria das fracções continuas

Capitulo IV:

- Theoria dos numeros decimaes
- Operações sobre numeros decimaes
- Addição
- Subtracção
- Multiplicação
- Divisão
- Reducção da fracção ordinaria em decimal
- Dizimas periodicas

Capitulo V:

- Systemas metrologicos. Operações sobre numeros complexos
- Systema metrico decimal
- Systema metrico brasileiro antigo
- Operações sobre os numeros complexos
- Addição
- Subtracção
- Multiplicação
- Divisão

Capitulo VI:

- Potencias e raizes dos numeros
- Formação dos quadrados dos numeros
- Raizes quadradas dos numeros
- Formação dos cubos dos numeros
- Raizes cubicas dos numeros

Segunda parte:

Capitulo VII:

- Theoria das razões e proporções
- Da equidifferença
- Da proporção
- Regra de tres
- Regra conjuncia
- Regra de juros
- Regra de desconto
- Regra de cambio
- Regra de sociedade

Capitulo VIII:

- Theoria elementar das progressões
- Progressões por differença
- Progressões por quociente

Capitulo IX:

- Theoria elementar dos logarithmos
- Regra de juros compostos
- Regra de capitalisação
- Regra de annuidades

- Exercicios e problemas

O quinto capítulo do livro é iniciado com uma breve descrição da origem do sistema métrico, como podemos ler a seguir.

> No fim do seculo passado, a França conseguiu realizar a grandiosa idéa de estabelecer um systema de pesos e medidas, tomando para base d'esse systema uma dimensão do globo terrestre.
>
> Delambre e Mechain, celebres mathematicos francezes, foram encarregados da medição do arco do meridiano comprehendido entre Dunkerke e Barcelona, e, da combinação desse resultado com observações astronomicas, determinou-se a distancia do pólo ao equador, sendo essa distancia igual a 5130740 toezas, 4 pés, 5 pollegadas e 4 linhas.
>
> Dividida essa distancia em dez milhões de partes iguais, uma dessas partes, igual a três pés, 0 pollegadas e 11,296 linhas, foi considerada como unidade principal do systema, recebendo o nome de metro. (Vianna, 1906, p.133)

O autor enumera, então, o que considera vantagens do sistema métrico decimal em relação a outros sistemas de pesos e medidas: simplicidade de nomenclatura e uniformidade de medidas; facilidade dos cálculos; e, por último, unidade principal fixa, baseada na medida de uma dimensão do globo. Em seguida, Vianna discorre acerca da nomenclatura das unidades do sistema métrico – de comprimento, de superfície, de capacidade, de peso, de tempo, angular e monetária – assim como de seus múltiplos e submúltiplos; destacando que a unidade monetária do sistema métrico, o franco, não é adotada no Brasil "*por ser o systema monetario brasileiro* *não só superior ao d'esse systema, como tambem aos dos outros systemas adoptados nas outras nações*".

Depois de uma parte dedicada à numeração das medidas no sistema métrico, em que é ensinada a escrita de grandezas desse sistema decimal (consta nessa parte o exemplo: "o numero sessenta e sete metros e trinta e sete millímetros, escreve-se 67^{m},037."), o autor apresenta o que denomina "*systema metrico brasileiro antigo*", enumerando as unidades utilizadas no Brasil anteriormente à implantação do sistema métrico decimal e relacionando-as com as unidades principais desse novo sistema. Consideramos curioso Vianna utilizar o termo *systema **metrico** brasileiro antigo* para designar o sistema de pesos e medidas utilizado no Brasil antes da adoção do sistema métrico decimal.

Número complexo é definido como sendo aquele que "*consta de unidades de grandezas diversas, sendo todas sujeitas a uma mesma que se denomina principal*", enquanto número incomplexo é definido como "*o que consta de uma ou mais unidades de uma mesma grandeza*". Seguem-se a essas definições exemplos dos dois tipos de números. Logo depois, Vianna trata das transformações de número complexo em incomplexo, e vice-versa. Como primeiro exemplo, exibe a transformação do número complexo 34 braças 7 palmos e 5 polegadas em incomplexo. Lembrando as equivalências 1 braça = 10 palmos, 1 palmo = 8 polegadas e 1 polegada = 12 linhas, Vianna prossegue primeiramente escrevendo o número dado em polegadas e, sabendo-se que 1 polegada corresponde a $\frac{1}{80}$ braça, o número incomplexo procurado é $\frac{2781}{80}$ braças.

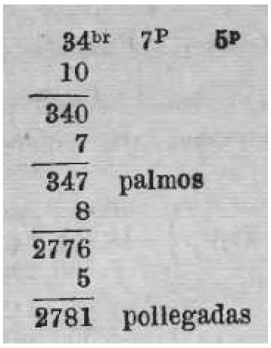
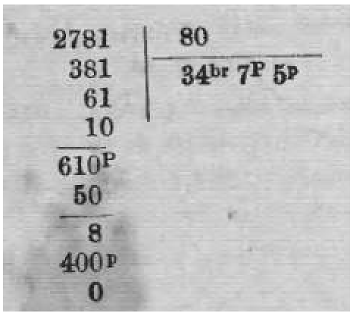


Figura 58 – Conversão do número complexo 34 braças, 7 palmos e 5 polegadas em incomplexo (Vianna, 1906, p. 144)

Para a transformação de número complexo em incomplexo, é enunciada a seguinte regra: "*Dá-se para o numerador o numero dado, reduzido a unidades da ultima subdivisão; e para o denominador a unidade principal reduzida tambem a ultima subdivisão.*"

Para a conversão de um número incomplexo em complexo, Vianna propõe como exemplo o caminho inverso do exemplo anterior: dadas $\frac{2781}{80}$ braças, devemos escrevê-las na forma de número complexo. A fim de realizar essa tarefa, o procedimento do autor é começar dividindo 2781 por 80, obtendo 34 braças e $\frac{61}{80} \times 10$ palmos , isto é, $7\frac{5}{8}$ palmos. E, como 1 palmo é igual a 8 polegadas, o número complexo procurado é 34 braças, 7 palmos e 5 polegadas.



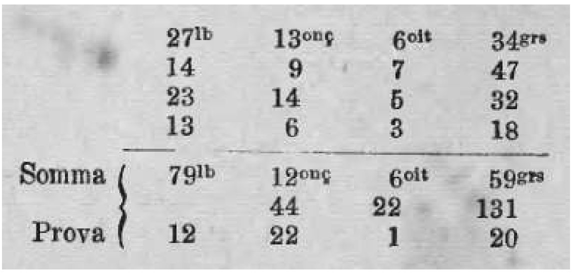
2781	80
381	$34^{br}\ 7^{P}\ 5^{P}$
61	
10	
610^{P}	
50	
8	
400^{P}	
0	

Figura 59 – Transformação do número incomplexo $\frac{2781}{80}$ em complexo (Vianna, 1906, p. 144)

O procedimento utilizado para converter um número incomplexo em complexo é descrito por Vianna:

> Divide-se o numerador pelo denominador; o quociente representará unidades principaes e o resto converte-se em unidades da primeira subdivisão. Dividindo o resultado pelo mesmo divisor, acharemos para quociente unidades da primeira subdivisão. Se houver ainda resto, converteremos esse resto em unidades da segunda subdivisão, e assim continuaremos até a última subdivisão. (Vianna, 1906, p. 145)

Em seguida, o autor descreve os métodos usados para realizar as quatro operações fundamentais envolvendo números complexos. Na adição, destaca-se que é preciso escrever os dois fatores um embaixo do outro, de modo que em uma mesma coluna estejam dispostas unidades iguais. Efetua-se então a soma da direita para a esquerda, tendo atenção às subdivisões da unidade principal. O exemplo dado é a adição dos quatro números complexos a seguir: 27 lb $13^{\text{onç.}}$ $6^{\text{oit.}}$ $34^{\text{gr.}}$, 14 lb $9^{\text{onç.}}$ $7^{\text{oit.}}$ 47 $^{\text{gr.}}$, 23 lb $14^{\text{onç.}}$ $5^{\text{oit.}}$ $32^{\text{gr.}}$, e 13 lb $6^{\text{onç.}}$ $3^{\text{oit.}}$ 18 $^{\text{gr.}}$.



	27^{lb}	$13^{onç}$	6^{oit}	34^{grs}
	14	9	7	47
	23	14	5	32
	13	6	3	18
Somma	79^{lb}	$12^{onç}$	6^{oit}	59^{grs}
		44	22	131
Prova	12	22	1	20

Figura 60 – Adição de quatro números complexos (Vianna, 1906, p. 145)

Recordando que 1 libra corresponde a 16 onças, 1 onça equivale a 8 oitavas, e esta última corresponde a 72 grãos, chega-se à soma 79 lb $12^{\text{onç.}}$ $6^{\text{oit.}}$ 59 $^{\text{gr.}}$. A última linha, denominada prova, auxilia na percepção de acerto ou erro no resultado obtido. O significado de prova está explicitado no primeiro capítulo do livro: "*prova de uma operação é uma outra operação que indica probabilidade de não ter havido engano na primeira*". Na parte sobre adição de números complexos, o autor destaca que a prova dessa operação é semelhante à prova da adição de números inteiros; já no primeiro capítulo, sobre números inteiros, é dito que

> D'entre os diversos modos de provar a addição, o mais acceito é aquelle que consiste em sommar os numeros da esquerda para a direita e subtrahir as sommas das diversas columnas, successivamente, do resultado da operação. Se, feitas todas as subtracções, não houver resto, é provavel estar certa a addição. (Vianna, 1906, p. 29)

Vianna explicita o algoritmo usado na subtração de números complexos, semelhante ao da subtração de inteiros, e apresenta dois exemplos:

1.° Exemplo:

	11	15	4	15
	12^{br}	5P	5^{p}	3^{l}
	3	8	2	9
Resto..	8^{br}	7P	2^{p}	6^{l}
Prova..	12^{br}	5P	5^{p}	3^{l}

Figura 61 – Primeiro exemplo de subtração de números complexos (Vianna, 1906, p. 146)

2.° Exemplo:

	22	15	7	75
	23^{lb}	$0^{onç}$	0^{oit}	3^{grs}
	9	8	5	47
Resto..	13^{lb}	$7^{onç}$	2^{oit}	28^{grs}
Prova.	23^{lb}	$0^{onç}$	0^{oit}	3^{grs}

Figura 62 – Segundo exemplo sobre subtração números complexos (Vianna, 1906, p. 147)

No primeiro exemplo, é realizada a subtração $12^{br.}$ $5^{P.}$ $5^{p.}$ $3^{l.}$ menos $3^{br.}$ $8^{P.}$ $2^{p.}$ $9^{l.}$. Para subtrair 9 linhas de 3 linhas, escreve-se uma polegada em linhas, obtendo então 12+3=15 linhas no minuendo. Logo, obtém-se 6 linhas no resultado (resto). Continuando a operação da direita para a esquerda, e decompondo-se unidades sempre que em uma coluna o minuendo for menor do que o subtraendo, chega-se a $8^{br.}$ $7^{P.}$ $2^{p.}$ $6^{l.}$. Para fazer a prova, soma-se o subtraendo com o resto, obtendo, caso os cálculos estejam corretos, o minuendo. O segundo exemplo, 23 lb $0^{onç.}$ $0^{oit.}$ $3^{gr.}$ menos 9 lb $8^{onç.}$ $5^{oit.}$ 47 $^{gr.}$, possui algoritmo análogo ao do primeiro.

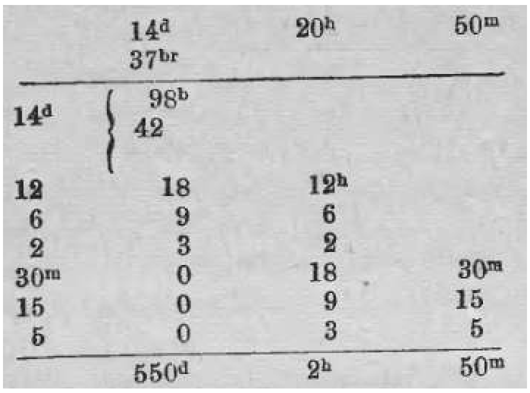
A multiplicação de números complexos é separada em dois casos: quando o multiplicador é um número incomplexo e quando o multiplicador é complexo.

Quando o multiplicador é incomplexo, o autor afirma que:

> A multiplicação, neste caso, reduz-se a repetir o multiplicando tantas vezes quantas forem as unidades do multiplicador, o que se consegue, multiplicando pelo multiplicador cada uma das partes do multiplicando, e conservando mentalmente as reservas que se formarem em cada um d'esses productos para reunir com o producto seguinte. (Vianna, 1906, p. 147)

No entanto, Vianna comenta que existe o processo das partes alíquotas. Parte alíquota de um número é definida como "*um submultiplo d'esse numero, ou um numero nelle contido um numero inteiro de vezes*", e o processo consiste em "*decompôr o total das unidades de cada classe em partes aliquotas da unidade principal ou das suas subdivisões*", a fim de facilitar essa multiplicação; e utiliza esse método no próximo exemplo.

O problema apresentado é o seguinte: "Uma muralha tendo de comprimento uma braça, é construida em 14 dias, 20 horas e 50 minutos; quanto tempo se gastará para construir uma muralha nas mesmas condições que a primeira, tendo, porém, de comprimento 37 braças". A conta realizada é 37 braças vezes 14 dias, 20 horas e 50 minutos. Usando o processo das partes alíquotas, o autor realiza primeiro a multiplicação de 37 vezes 14 dias. Depois, decompõe as 20 horas nas partes 12, 6 e 2 (divisores de 24, portanto partes alíquotas desse número), e realiza a multiplicação de 37 por cada uma dessas partes separadamente: 37 x 12h = 37 x 1/2 dia = 18 dias e 12 horas; 37 x 6h = 37 x 1/4 dia = 9 dias e 6 horas; e 37 x 2 horas = 37 x 1/12 dia = 3 dias e 2 horas. Da mesma forma, decompõe-se os 50 minutos nas partes alíquotas 30, 15 e 5 (divisores de 60), e efetua-se as multiplicações: 37 x 30 minutos = 37 x 1/2 hora = 18 horas e 30 minutos; 37 vezes 15 minutos = 37 x 1/4 hora = 9 horas e 15 minutos; e, por último, 37 x 5 minutos = 37 x 1/12 hora = 3 horas e 5 minutos.



	14^d	20^h	50^m
	37^{br}		
14^d	98^b 42		
12	18	12^h	
6	9	6	
2	3	2	
30^m	0	18	30^m
15	0	9	15
5	0	3	5
	550^d	2^h	50^m

Figura 63 – Multiplicação de números complexos, sendo o multiplicador um número incomplexo (Vianna, 1906, p. 148)

Para o segundo caso, em que o multiplicador é um número complexo, é proposto o problema a seguir: "*Uma barra de ferro tendo de comprimento 1 vara, pesa 25 libras, 11 onças e 7 oitavas; quanto pesará uma barra de ferro como a primeira, tendo, porém, de comprimento 23 varas, 3 palmos e 6 pollegadas*?".

	25^{lb}	$11^{onç}$	7^{oit}
	23^{v}	3^{P}	6^{P}
25^{lb}	$\begin{cases} 75^{lb} \\ 50 \end{cases}$		
$8^{onç}$	11	$8^{onç}$	
2	2	14	
1	1	7	
4^{oit}	0	11	4^{oit}
2	0	5	6
1	0	2	7
1^{P}	5	2	3
2	10	4	6
4^{P}	2	9	$1\frac{1}{2}$
2	1	4	$4\frac{3}{4}$
	611^{lb}	$6^{onç}$	$0^{oit}\frac{1}{4}$

Figura 64 – Multiplicação de números complexos, sendo o multiplicador um número complexo (Vianna, 1906, p. 149)

Nesse caso, efetua-se primeiro o produto 23 varas x 25 libras, obtendo-se (75 + 500)lb = 575 lb. Então as 11 onças são decompostas em $8^{onç.}$, $2^{onç.}$ e $1^{onç.}$. Desse modo, calcula-se: $23^{v.} \times 8^{onç.} = 23^{v.} \times \frac{1}{2}$ lb = 11 lb $8^{onç.}$; $23^{v.} \times 2^{onç.} = 23^{v.} \times \frac{1}{8}$ ^{lb} = 2 lb $14^{onç.}$; e, por último, $23^{v.}$ x $1^{onç.} = 23^{v.} \times \frac{1}{16}$ lb = 1 lb $7^{onç.}$. Como 1 onça equivale a 8 oitavas, as 7 oitavas da questão são separadas em $4^{oit.}$, $2^{oit.}$ e $1^{oit.}$ Sendo assim, $23^{v.} \times 4^{oit.} = 23^{v.} \times \frac{1}{2}^{onç.} = 11^{onç.}\ 4^{oit.}$; $23^{v.} \times 2^{oit.} = 23^{v.} \times \frac{1}{4}^{onç.} = 5^{onç.}\ 6^{oit.}$; e $23^{v.} \times 1^{oit.} = 23^{v.} \times \frac{1}{8}$onç. = $2^{onç.}\ 7^{oit.}$.

Os 3 palmos são decompostos em $1^{P.}$ e $2^{P.}$, de modo que: $1^{P.} \times 25$ lb $= \frac{1}{5}^{v.} \times 25$ lb = 5 lb; $1^{P.} \times 11^{onç.} = \frac{1}{5}^{v.} \times 11^{onç.} = 2^{onç.} 1\frac{3}{5}^{oit.}$; e $1^{P.} \times 7^{oit.} = \frac{1}{5}^{v.} \times 7^{oit.} = 1\frac{2}{5}^{oit.}$; logo, na linha correspondente ao $1^{P.}$ tem-se como resultado 5 lb $2^{onç.}\ 3^{oit.}$. Já na linha correspondente a $2^{P.}$, realiza-se os cálculos: $2^{P.}$ x 25 lb $= \frac{2}{5}^{v.}$ x 25 lb = 10 lb; $2^{P.}$ x $11^{onç.} = \frac{2}{5}^{v.} \times 11^{onç.} = 4\frac{2}{5}^{onç.} = 4^{onç.}\ \frac{16}{5}^{oit.}$; e, por último, $2^{P.} \times 7^{oit.} = \frac{2}{5}^{v.} \times 7^{oit.} = 2\frac{4}{5}^{oit.}$. Dessa forma, nessa linha o resultado é 10 lb $4^{onç.}\ 6^{oit.}$.

Por último, as 6 polegadas são divididas em $4^{p.}$ e $2^{p.}$. Como 4 polegadas equivale a metade de um palmo, $4^{p.} \times 25$ lb = 2 lb $(8+1)^{onç.}\ 1\frac{1}{2}^{oit.}$ = 2 lb $9^{onç.}\ 1\frac{1}{2}^{oit.}$. Além disso, o produto de $2^{p.} \times 25^{lb}$ será a metade do resultado anterior, donde $2^{p.} \times 25$lb = 1lb $4\frac{1}{2}^{onç.}\frac{3}{4}^{oit.}$ = 1 lb $4^{onç.} 4\frac{3}{4}^{oit.}$. Somando-se todas as colunas presentes na última figura com esses resultados parciais, chega-se a 611 lb $6^{onç.}\frac{1}{4}^{oit.}$.

O próximo exemplo constitui-se no problema: "*Um fio de arame tendo de comprimento 23 varas, 3 palmos e 6 pollegadas pesa uma libra; qual o comprimento de um fio de arame como o primeiro, pesando, porém, 25 libras, 11 onças e 7 oitavas?*". O cálculo realizado para solucioná-lo encontra-se na Figura 65.

	23^{v}	3^{P}	6^{p}
	25^{lb}	11^{onc}	7^{oit}
22^{v}	$\begin{cases}115^{v}\\46\end{cases}$		
1^{P}	5		
2	10		
4^{p}	2	2^{P}	4^{p}
2	1	1	2
$8^{onç}$	11	4	3
2	2	4	$6\frac{3}{4}$
1	1	2	$3\frac{3}{8}$
4^{oit}	0	3	$5\frac{11}{6}$
2	0	1	$6\frac{27}{32}$
1	0	0	$7\frac{27}{64}$
	611^{v}	1^{P}	$7^{p}\frac{5}{64}$

Figura 65 – Multiplicação de números complexos, sendo o multiplicador um número complexo (Vianna, 1906, p. 149)

No exemplo anterior, a multiplicação realizada havia sido **$23^{v.}$ $3^{P.}$ $6^{p.}$ vezes 25lb $11^{onç.}$ $7^{oit.}$**; já no exemplo presente, a multiplicação é **25lb $11^{onç.}$ $7^{oit.}$ vezes $23^{v.}$ $3^{P.}$ $6^{p.}$**. Sobre os dois produtos obtidos, o autor comenta:

> Nos dous ultimos exemplos, nota-se que sendo os dous factores os mesmos, não são no entretanto iguaes os productos quanto á especie e ás subdivisões da unidade principal, e por consequencia o principio demonstrado no n. 40 não tem applicação na multiplicação dos numeros complexos. A razão da differença dos dous productos provém de não seguirem a mesma lei as divisões de uma e de outra unidade principal. (Vianna, 1906, p. 150-151)

O princípio mencionado por Vianna encontra-se no primeiro capítulo e refere-se à comutatividade da multiplicação de dois números inteiros: "*o producto de dous factores não muda, seja qual for a ordem dos factores*". Desse modo, o autor afirma que a multiplicação de números complexos não é comutativa. No entanto, pergunta-se se estaria claro para os alunos usuários desse livro didático, tanto para seus leitores em geral, o porquê de os dois produtos mencionados na citação acima "não seguirem a mesma lei". Questiona-se também a ausência de maiores explicações sobre a não-comutatividade dos números complexos.

A divisão de números complexos é igualmente separada em dois casos distintos:

1. quando o dividendo e o divisor são de espécies diferentes; e

2. quando o dividendo e o divisor são da mesma espécie.

No primeiro caso podemos ter, ainda, o divisor incomplexo ou o divisor complexo. Caso o divisor seja incomplexo, Vianna propõe, então, uma questão: "*Um viajante caminhou 37 leguas em 89 dias, 7 horas, 58 minutos e 32 segundos; quanto tempo gastou o mesmo viajante para* *andar uma legua?*”. O autor explica que a quantidade de léguas percorridas por dia pelo viajante, vezes 37, é igual ao total de 89 dias, 7 horas, 58 minutos e 32 segundos. Desse modo, para chegar ao tempo gasto pelo viajante para atravessar uma légua, divide-se o número complexo 89 dias, 7 horas, 58 minutos e 32 segundos por 37.

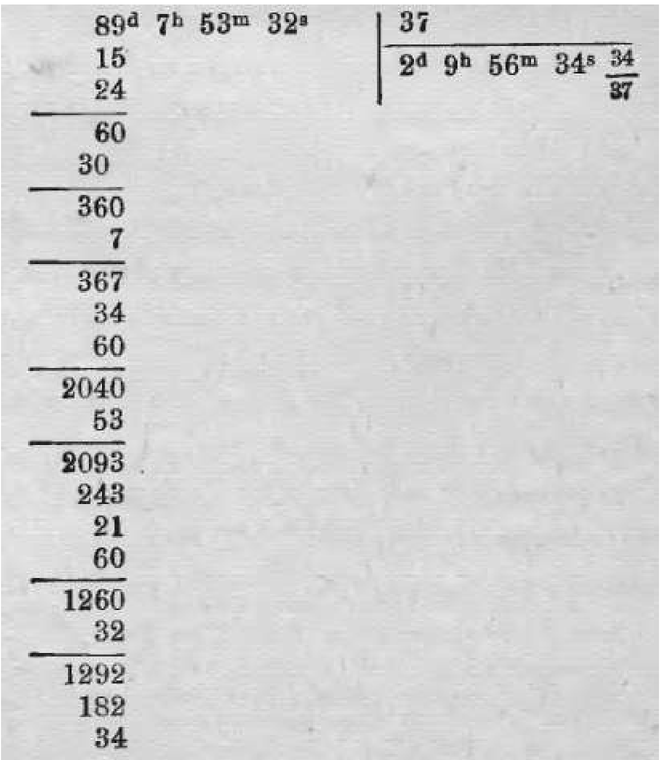
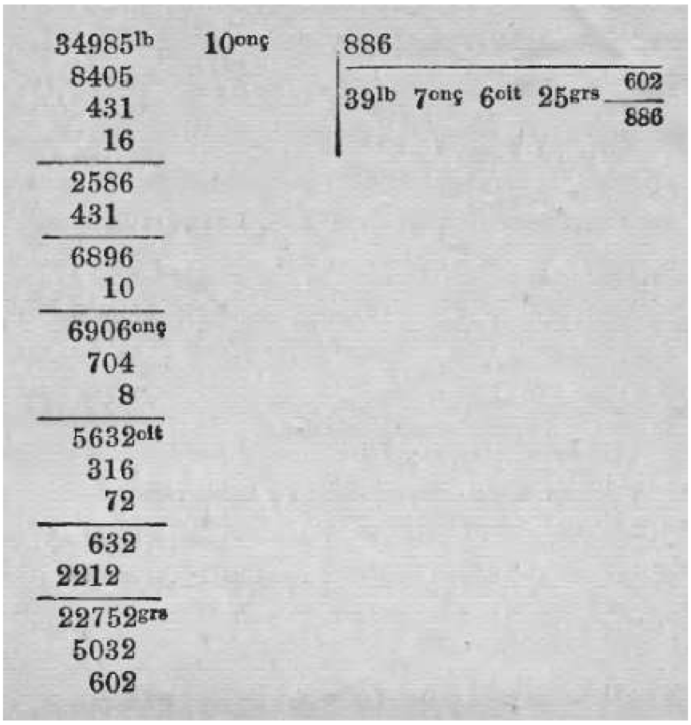

$89^d\ 7^h\ 53^m\ 32^s$ | 37
$2^d\ 9^h\ 56^m\ 34^s\ \frac{34}{37}$
15
24
60
30
360
7
367
34
60
2040
53
2093
243
21
60
1260
32
1292
182
34

Figura 66 – Divisão de número complexo por número incomplexo (Vianna, 1906, p. 151)

Essa divisão é feita iniciando-se pela quantidade de dias, obtendo-se 2 dias no quociente e 15 dias no resto. Como 15 dias = 15 x 24 horas = 360 horas, soma-se esse valor às 7 horas do dividendo, realizando então a divisão de 367 horas por 37; e assim por diante, até que se acabe a divisão de cada unidade do dividendo por 37, obtendo, nesse caso, o quociente 2 dias, 9 horas, 56 minutos e $34\frac{34}{37}$ segundos.

Para o caso em que o divisor é complexo, é proposto o problema a seguir: “*A agua contida em um reservatorio, cuja capacidade é de 18 almudes, 5 canadas e 2 quartilhos pesa 728 libras, 13 onças e 7 oitavas; pergunta-se quanto pesa cada almude de agua?*”[2]

[2] Note que, nesse caso, dividendo e divisor são complexos, apesar de serem de espécies diferentes.



$$
\begin{array}{l|l}
34985^{\text{lb}} \quad 10^{\text{onç}} & 886 \\
\hline
8405 & 39^{\text{lb}}\ 7^{\text{onç}}\ 6^{\text{oit}}\ 25^{\text{grs}}\ \frac{602}{886} \\
431 & \\
16 & \\
\hline
2586 & \\
431 & \\
\hline
6896 & \\
10 & \\
\hline
6906^{\text{onç}} & \\
704 & \\
8 & \\
\hline
5632^{\text{oit}} & \\
316 & \\
72 & \\
\hline
632 & \\
2212 & \\
\hline
22752^{\text{grs}} & \\
5032 & \\
602 &
\end{array}
$$

Figura 67 – Divisão de números complexos de espécies diferentes (Vianna, 1906, p. 153)

Nesse exemplo, o peso procurado será o resultado da divisão de 728 lb $13^{\text{onç.}}$ $7^{\text{oit.}}$ por $18^{\text{alm.}}$ $5^{\text{can.}}$ $2^{\text{q.}}$. A fim de realizar essa divisão, o autor orienta a primeiro converter o divisor a uma fração da unidade principal. Nesse caso:

$$18^{\text{alm.}}5^{\text{can.}}2^{\text{q.}} = 18 + \frac{5}{12} + \frac{2}{48} = \frac{886}{48}\text{almudes}$$

É curioso nesse exemplo que o autor não simplifica a fração $\frac{886}{48}$, o que poderia ser feito com o intuito de facilitar os cálculos. Obtida essa fração da unidade principal, multiplica-se o seu denominador pelo dividendo da questão, obtendo-se

$$48 \times \left(728\text{lb}13^{\text{onç.}}7^{\text{oit.}}\right) = (34944 + 3 \times 13)\,\text{lb}42^{\text{onç.}} = 34983\text{lb} + 2^{\text{lb}} + 10^{\text{onç.}} = 34985\text{lb}10^{\text{onç.}}$$

Agora, é enfim realizada a divisão de 34985 lb 10 $^{\text{onç.}}$ por 886, da mesma forma como foi feito no exemplo anterior.

Para o segundo caso, isto é, quando o dividendo e o divisor são da mesma espécie, é apresentada a questão a seguir: "*Uma fonte enche um vaso, cuja capacidade é de 1 almude, em 3 horas, 12 minutos e 27 segundos; quantos almudes encherá a fonte em 23 horas, 53 minutos e 58 segundos?*". O autor afirma que a resposta para esse problema é obtida dividindo-se 23 horas, 53 minutos e 58 segundos por 3 horas, 12 minutos e 27 segundos, e exibe os cálculos que devem ser realizados:

$$23^h 53^m 58^s \div 3^h 12^m 27^s = \frac{86038^h}{3600} \div \frac{11547^h}{3600} = \frac{86038}{3600} \times$$
$$\times \frac{3600}{11547} = \frac{86038 \times 3600}{11547 \times 3600} = \frac{86038}{11547}$$

Figura 68 – Divisão de números complexos de espécies diferentes (Vianna, 1906, p. 153)

Note que, primeiramente, os números complexos da questão são escritos como frações ordinárias da unidade principal, para depois transformar-se a divisão das duas frações em uma divisão de números inteiros. Desse modo, 86038 é dividido por 11547, obtendo-se $7^{\text{alm.}}$ no quociente e $5209^{\text{alm.}}$ no resto. Os $5209^{\text{alm.}}$ equivalem a $12 \times 5209^{\text{can.}} = 62508^{\text{can.}}$, que por sua vez são divididas por 11547, tendo como quociente $5^{\text{can.}}$ e, como resto, $4773^{\text{can.}}$ As $4773^{\text{can.}}$ equivalem a $19092^{\text{q.}}$, que, divididos por 11547, resultam em $1\frac{7545}{11547}^{\text{q.}}$.

Por fim, Vianna apresenta a seguinte regra geral para a divisão de números complexos:

> Se o dividendo e o divisor forem de especies diferentes, o quociente é da especie do dividendo; e, se forem da mesma especie, é pelo enunciado do problema que se conhece a especie do quociente. (Vianna, 1906, p. 154)

Percebe-se nesse livro conteúdos mais complicados, isto é, que demandariam explicações mais elaboradas, sendo enunciados na forma de “regras gerais”.

O final do quinto capítulo ainda discorre sobre conversão das medidas – lineares e de superfície – de um sistema para o outro.

3.6 Manual de Matemática - 1^o ano ginasial, de Cecil Thiré (1944)

Cecil Thiré[3] nasceu na cidade mineira Nova Lima em 3 de maio de 1892. Engenheiro Civil e catedrático de Matemática do Colégio Pedro II, foi um dos maiores autores brasileiros de livros didáticos de matemática do século XX. Entre seus escritos, há manuais de matemática destinados a cada uma das séries do ginasial (do 1^o ao 5^o ano) e do colegial (do 1^o ao 3^o ano), além de livros de exercícios e outras obras. O autor faleceu no Rio de Janeiro, em 1963.

O conteúdo da 8^a edição do Manual de Matemática - 1^o ano ginasial é composto de:

Geometria intuitiva:

Unidade I - Noções Fundamentais:

- Sólidos geométricos, superfícies, linhas, ponto

[3] Cecil Thiré (1943), conhecido ator e diretor brasileiro, é neto do Cecil Thiré matemático.

- Plano, reta, semi-reta, segmento

- Ângulos

- Posições relativas de retas e planos; paralelas; perpendiculares e oblíquas

Unidade II - Figuras Geométricas

- Polígonos; triângulos e quadriláteros

- Círculo

- Poliedros; corpos redondos

Aritmética prática:

Unidade III - Operações Fundamentais

- Noção de número inteiro, grandeza, unidade, medida

- Numeração

- Adição, subtração, multiplicação e divisão de inteiros

- Cálculo mental e cálculo abreviado

Unidade IV - Múltiplos e divisores

- Números primos; decomposição em fatores primos

- Parte alíquota de duas grandezas; m.d.c. e m.m.c.

Unidade V - Frações Ordinárias

- Frações de grandezas; noção de fração

- Comparação, simplificação, redução ao mesmo denominador

- Operações fundamentais

- Problemas sobre as frações de grandezas

Unidade VI - Números Complexos

- Unidades de ângulo e de tempo

- Moeda inglesa e unidades inglesas usuais de comprimento

- Operações com os números complexos

Unidade VII - Frações Decimais

- Noção de fração e de número decimal

- Operações fundamentais

- Conversão de fração ordinária em decimal e vice-versa

A Unidade VI é iniciada com a definição de números complexos:

> Um número concreto é complexo quando se refere a duas ou mais unidades da mesma espécie, mas que não são ligadas pelas relações decimais. Ex.: 4 dias, 8 horas e 20 minutos.
>
> Um número concreto é incomplexo quando se refere a uma única unidade. Ex.: 3 horas. (Thiré, 1944, p.164)

Dando continuidade, Thiré fala sobre medidas de arcos e ângulos, e também sobre a moeda inglesa, a libra esterlina - dois tipos de unidades não decimais que serão utilizadas em seus exemplos e exercícios propostos mais adiante.

CECIL THIRE
Engenheiro Civil
Catedrático de Matemática do Colégio Pedro II

MANUAL
DE
MATEMÁTICA

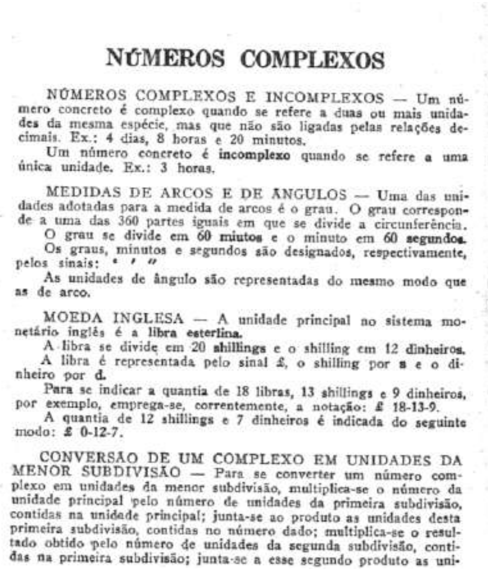
1.º ANO

Rigorosamente de acordo com as exigências dos programas expedidos pelo Ministro da Educação e Saude, pela portaria 170, de 11 de Julho de 1942

8.ª EDIÇÃO REVISTA

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
166, Rua Ouvidor, — Rio de Janeiro
Rua Libero Badaró, 292 — S. Paulo
Rua Rio de Janeiro, 655 — Belo Horizonte
1944

Figura 69 – Folha de rosto do Manual de Matemática - 1^o ano ginasial, de Cecil Thiré (1944).



NÚMEROS COMPLEXOS

NÚMEROS COMPLEXOS E INCOMPLEXOS — Um número concreto é complexo quando se refere a duas ou mais unidades da mesma espécie, mas que não são ligadas pelas relações decimais. Ex.: 4 dias, 8 horas e 20 minutos.

Um número concreto é **incomplexo** quando se refere a uma única unidade. Ex.: 3 horas.

MEDIDAS DE ARCOS E DE ANGULOS — Uma das unidades adotadas para a medida de arcos é o grau. O grau corresponde a uma das 360 partes iguais em que se divide a circunferência.

O grau se divide em 60 **miutos** e o minuto em 60 **segundos**.

Os graus, minutos e segundos são designados, respectivamente, pelos sinais: ° ′ ″

As unidades de ângulo são representadas do mesmo modo que as de arco.

MOEDA INGLESA — A unidade principal no sistema monetário inglês é a **libra esterlina.**

A libra se divide em 20 **shillings** e o shilling em 12 **dinheiros.**

A libra é representada pelo sinal £, o shilling por **s** e o dinheiro por **d.**

Para se indicar a quantia de 18 libras, 13 shillings e 9 dinheiros, por exemplo, emprega-se, correntemente, a notação: £ 18-13-9.

A quantia de 12 shillings e 7 dinheiros é indicada do seguinte modo: £ 0-12-7.

CONVERSÃO DE UM COMPLEXO EM UNIDADES DA MENOR SUBDIVISÃO — Para se converter um número complexo em unidades da menor subdivisão, multiplica-se o número da unidade principal pelo número de unidades da primeira subdivisão, contidas na unidade principal; junta-se ao produto as unidades desta primeira subdivisão, contidas no número dado; multiplica-se o resultado obtido pelo número de unidades da segunda subdivisão, contidas na primeira subdivisão; junta-se a esse segundo produto as uni-

Figura 70 – Primeira página do capítulo "números complexos" de Cecil Thiré (1944).

Em seguida, é relatado brevemente ao leitor como fazer para converter um número complexo em unidades da menor subdivisão (transformando o número complexo em incomplexo), e também a conversão de um número complexo em fração ordinária da unidade principal. Diferentemente de outros livros já estudados nesse trabalho, Thiré inclui um parágrafo sobre a decimalização de um número complexo:

> Para se reduzir um complexo em número decimal da unidade principal, reduz-se previamente o complexo a fração ordinária da maior unidade contida no complexo e transforma-se a fração obtida em número decimal. (Thiré, 1944, p.165)

Sobre a redução de um número incomplexo a complexo, o autor destaca três casos: quando o número incomplexo dado está expresso em: (a) unidades de ordem inferior de um número complexo; (b) fração ordinária da unidade principal; ou (c) número decimal da unidade principal. Feito isso, inicia-se o estudo das operações com números complexos - adição, subtração, multplicação e divisão - cujos algoritmos são expostos de forma muitíssimo breve, em pouco mais de uma página no total (p. 166-167).

Na multiplicação de números complexos, Thiré distingue dois casos: a multiplicação de um número complexo por um número abstrato, e a multiplicação de dois números complexos:

> I. Para se multiplicar um número complexo por um número abstrato, multiplica-se o número abstrato pelas diversas unidades do complexo, fazendo-se, sempre que fôr possível, as conversões em unidades imediatamente superiores.

> II. Para se multiplicar um número complexo por outro número complexo, reduzem-se ambos os fatores a frações ordinárias das unidades principais respectivas. Multiplicam-se as frações obtidas, e a fração resultante transforma-se em complexo. (Thiré, 1944, p.166)

O autor não menciona a multiplicação de um número complexo por um número incomplexo e, mesmo nos dois casos acima, Thiré não esclarece qual seria a dimensão do produto resultante, e tampouco fala sobre comutatividade.

O conteúdo teórico já é encerrado aqui, dando lugar a 12 exercícios resolvidos sobre os números complexos, sempre envolvendo medidas de tempo, ângulos ou a unidade monetária inglesa. Nos exercícios sobre multiplicação de números complexos, Cecil Thiré restringe-se apenas aos dois casos explicitados. Na imagem abaixo encontram-se os dois exercícios resolvidos apresentados por Thiré sobre a multiplicação de complexos.

453. — *Multiplicar 3 d. 6 h. 23 m. por 6.*

Multiplica-se 23 m. por 6; obtem-se 138 m., ou 2 h. e 18 m.; escrevem-se 18 m. e reservam-se 2 h. Multiplicam-se 6 h. por 6; obtem-se 36 h., que somadas às 2 h. de reserva do produto precedente, perfazem 38 h., ou 1 d. 14 h.; escrevem-se 14 h. e reserva-se 1 d. Multiplicam-se 3 d. por 6 e soma-se ao produto a reserva 1 d., proveniente do produto precedente; encontram-se 19 d., qua se escrevem.

$$\begin{array}{r} 3\text{ d. } 6\text{ h. } 23\text{ m.} \\ 6 \\ \hline 19\text{ d. } 14\text{ h. } 18\text{ m.} \end{array}$$

454. — *Multiplicar £ 5-12-6 por 2 d. 8 h.*

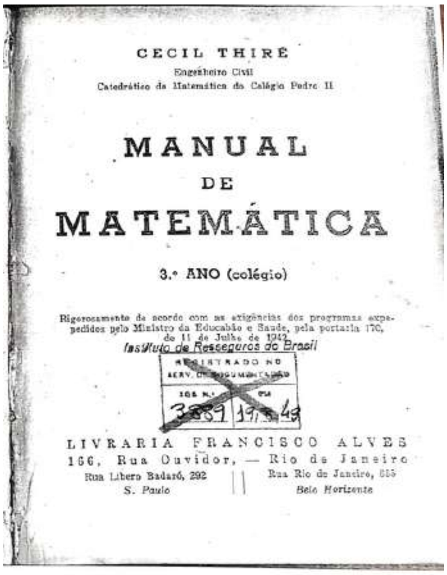
Reduz-se cada complexo à fração da unidade principal respectiva (veja exercício n.° 577); efetua-se a multiplicação das fraçõees obtidas e transforma-se o resultado em complexo (veja exercício n.° 580). Tem-se:

$$(\text{£ } 5\text{-}12\text{-}6) \times (2\text{ d. } 8\text{ h.}) = \frac{1350}{240}\text{ £} \times \frac{56}{24}\text{ d.} =$$

$$= \frac{1350 \times 56}{240 \times 24}\text{ £} = \frac{105}{8}\text{ £} = \text{£ } 13\text{-}2\text{-}6$$

Figura 71 – Exercícios resolvidos sobre números complexos (Thiré, 1944, p. 178-179).

Por último, são propostos 60 "exercícios a resolver", com a resposta final de cada um abaixo do enunciado.


CECIL THIRÉ
Engenheiro Civil
Catedrático de Matemática do Colégio Pedro II

MANUAL
DE
MATEMÁTICA

3.º ANO (colégio)

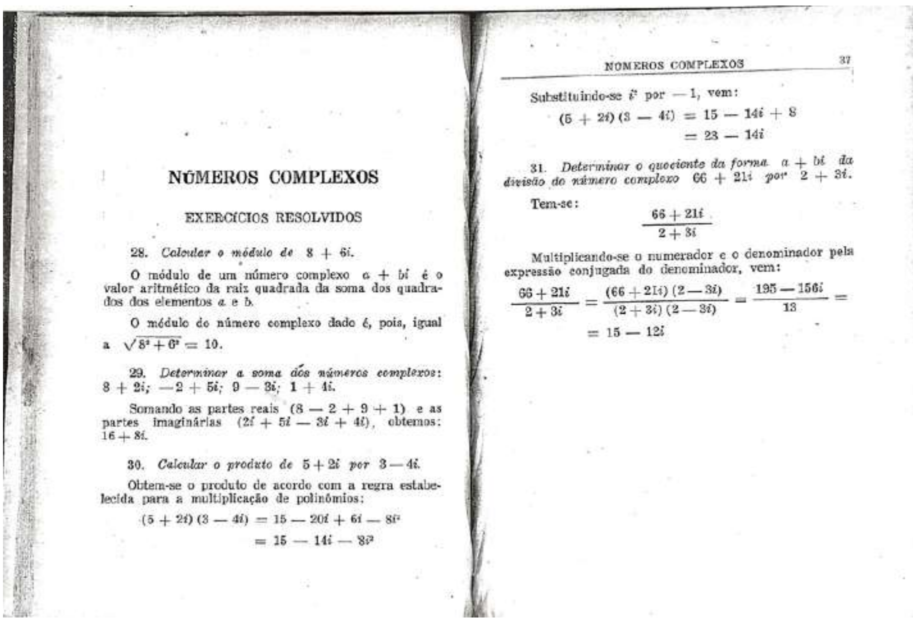
Rigorosamente de acordo com as exigências dos programas expedidos pelo Ministro da Educação e Saude, pela portaria 170, de 11 de Julho de 1942.

Instituto de Resseguros do Brasil
REGISTRADO NO SERV. DE DOCUMENTAÇÃO
3339 19/5/43

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
166, Rua Ouvidor, — Rio de Janeiro
Rua Libero Badaró, 292 — S. Paulo
Rua Rio de Janeiro, 655 — Belo Horizonte

Figura 72 – Folha de rosto do Manual de Matemática - 3^o ano colegial, de Cecil Thiré (1944).

Curiosamente, o conteúdo do livro escrito para o 3^o ano colegial por Cecil Thiré, pertencente a essa mesma série de livros didáticos - Manual de Matemática - inclui os números complexos de Gauß.


NÚMEROS COMPLEXOS

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

28. *Calcular o módulo de* $8 + 6i$.

O módulo de um número complexo $a + bi$ é o valor aritmético da raiz quadrada da soma dos quadrados dos elementos a e b.

O módulo do número complexo dado é, pois, igual a $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

29. *Determinar a soma dos números complexos:* $8 + 2i$; $-2 + 5i$; $9 - 3i$; $1 + 4i$.

Somando as partes reais $(8 - 2 + 9 + 1)$ e as partes imaginárias $(2i + 5i - 3i + 4i)$, obtemos: $16 + 8i$.

30. *Calcular o produto de* $5 + 2i$ *por* $3 - 4i$.

Obtem-se o produto de acordo com a regra estabelecida para a multiplicação de polinômios:

$$(5 + 2i)(3 - 4i) = 15 - 20i + 6i - 8i^2$$
$$= 15 - 14i - 8i^2$$

NÚMEROS COMPLEXOS 37

Substituindo-se i^2 por -1, vem:

$$(5 + 2i)(3 - 4i) = 15 - 14i + 8$$
$$= 23 - 14i$$

31. *Determinar o quociente da forma* $a + bi$ *da divisão do número complexo* $66 + 21i$ *por* $2 + 3i$.

Tem-se:

$$\frac{66 + 21i}{2 + 3i}$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador pela expressão conjugada do denominador, vem:

$$\frac{66 + 21i}{2 + 3i} = \frac{(66 + 21i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{195 - 156i}{13} =$$
$$= 15 - 12i$$

Figura 73 – Conteúdo sobre os números complexos de Gauss (Thiré, 1944, p.36-37).

Em duas páginas, Cecil Thiré apresenta os números complexos, como os conhecemos hoje, através de somente 4 exercícios resolvidos. Essa disparidade em relação a um e outro conteúdo de uma mesma série de livros instiga-nos a refletir sobre a importância que ainda era atribuída aos números complexos (no contexto que estamos estudando) ainda em 1944.

3.7 Geometria - Problemas sem problema, Volume 1, de Eduardo Mauro (2004)

Surpreendentemente, encontramos um livro do século XXI em que os números complexos ainda são abordados: o *Geometria - Problemas sem problema, Volume 1*, do professor Eduardo Mauro Ferreira de Moura. Nascido em 1947, o autor começou a ensinar Geometria com vinte anos, tendo lecionado tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio de colégios, além de cursos preparatórios para vestibulares e escolas técnicas e militares. Trabalhou também, como professor, na Flórida (USA). (Moura, 2004) Tentamos contato com o autor para uma possível entrevista, mas não obtivemos resposta.

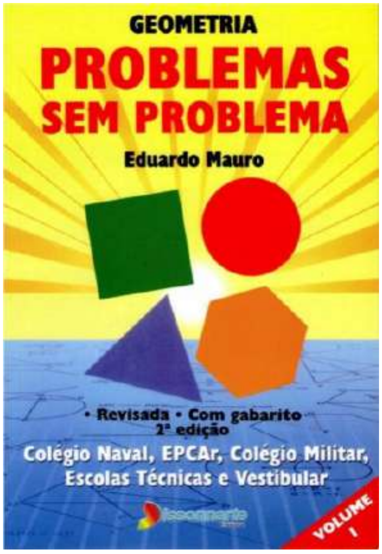


Figura 74 – Capa do livro *Geometria - Problemas sem problema, Volume 1* (2004).

Nesse livro, o conteúdo é disposto da seguinte forma:

- Elementos primitivos
- Números complexos
- Ângulos
- Retas paralelas e concorrentes
- Triângulos
- Quadriláteros
- Polígonos
- Circunferência de círculo
- Ângulos do círculo

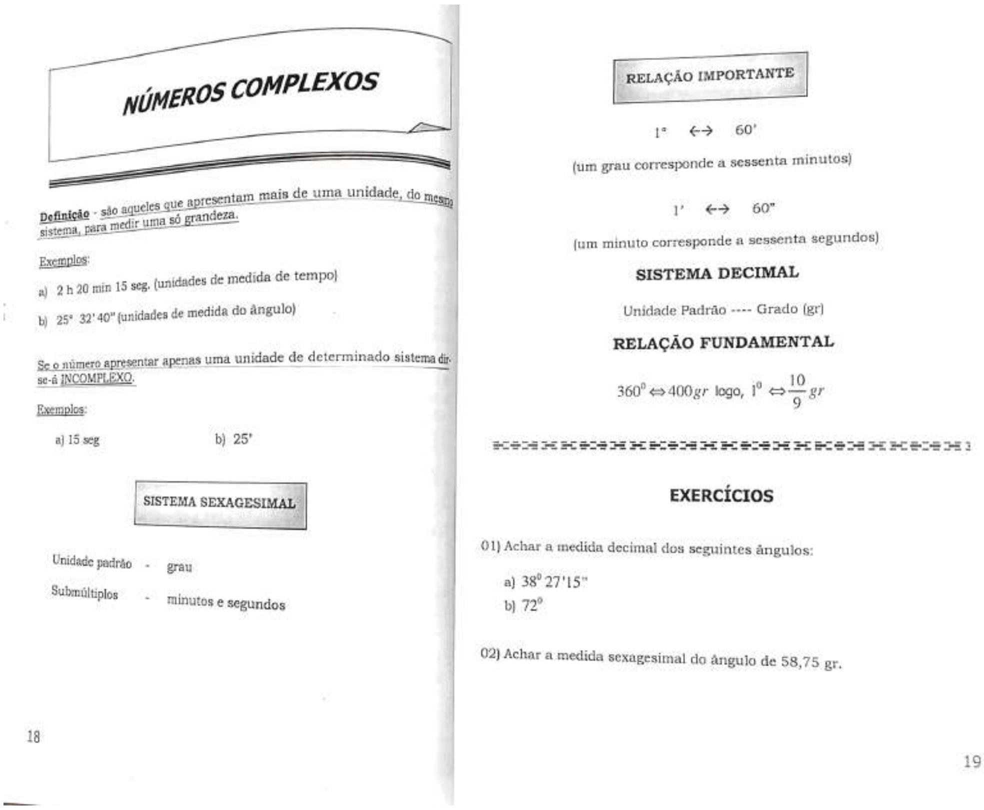
O capítulo sobre os números complexos é iniciado com a definição dessas grandezas:

> São aqueles que apresentam mais de uma unidade, do mesmo sistema, para medir uma só grandeza. (Moura, 2004, p. 18)

Além de exemplos de números complexos, é fornecida também a definição de número incomplexo

> Se o número apresentar apenas uma unidade de determinado sistema dir-se-á INCOMPLEXO. (Moura, 2004, p. 18 (grifo do autor))

No livro a que tivemos acesso, ambas as definições encontram-se sublinhadas a lápis, o que nos indica o estudo desse capítulo por algum estudante. Ao todo, incluindo exercícios, os números complexos são ensinados em três páginas. Seus exemplos e exercícios envolvem apenas grandezas angulares e de tempo. A parte teórica, além das definições, traz relações entre algumas unidades de medida, para possibilitar suas conversões. Por exemplo, o autor destaca a relação entre o grau e o grado.



NÚMEROS COMPLEXOS

Definição - são aqueles que apresentam mais de uma unidade, do mesmo sistema, para medir uma só grandeza.

Exemplos:

a) 2 h 20 min 15 seg. (unidades de medida de tempo)

b) 25° 32' 40" (unidades de medida do ângulo)

Se o número apresentar apenas uma unidade de determinado sistema dir-se-á INCOMPLEXO.

Exemplos:

a) 15 seg   b) 25°

SISTEMA SEXAGESIMAL

Unidade padrão - grau

Submúltiplos - minutos e segundos

18

RELAÇÃO IMPORTANTE

1° ←→ 60'

(um grau corresponde a sessenta minutos)

1' ←→ 60"

(um minuto corresponde a sessenta segundos)

SISTEMA DECIMAL

Unidade Padrão ---- Grado (gr)

RELAÇÃO FUNDAMENTAL

$360^0 \Leftrightarrow 400gr$ logo, $1^0 \Leftrightarrow \frac{10}{9}gr$

EXERCÍCIOS

01) Achar a medida decimal dos seguintes ângulos:

a) $38^0\,27'15''$
b) 72^0

02) Achar a medida sexagesimal do ângulo de 58,75 gr.

19

Figura 75 – Os números complexos no livro de Moura (2004).

Nos exercícios, são pedidas conversões entre unidades de medida, comparações entre medidas de mesma espécie (no sentido de ordem de grandeza) e operações com os números concretos; sendo que essas operações envolvem adição e subtração de números complexos, além multiplicação e divisão de um número complexo por escalar.

3.8 Conclusão sobre os livros brasileiros

Analisamos nesse capítulo livros didáticos de autores conceituados, que foram adotados em escolas brasileiras, nos quais é instruído que a multiplicação entre grandezas complexas poderia não ser comutativa. Com o intuito de sintetizar o que os autores já analisados dizem sobre esse assunto, construímos o seguinte quadro:

Oliveira (1832)	Define números complexos (e, na edição de 1863, fornece exemplos), mas não opera com esses números; alegando que sua adição e subtração é semelhante às operações com números inteiros; e que a multiplicação e a divisão podem ser feitas convertendo esses números à menor unidade da espécie. É pioneiro na introdução do sistema métrico decimal em um livro de Aritmética.
Ottoni (1855)	Diz "não ser lícito converter a ordem dos fatores"no caso dos números complexos, pois o produto difere um do outro não só "por não seguirem a mesma lei as divisões de uma e de outra unidade principal", mas por serem de espécies diferentes. Afirma que o produto deve possuir a mesma espécie do multiplicando, e que o papel do multiplicador seria o de indicar "quantas vezes o multiplicando (ou que parte deste) se deve tomar". Apresenta dois exemplos (contextualizados) com fatores iguais, em que a troca de posição dos fatores da multiplicação produz resultados diferentes.
D'Avila (1856)	Após apresentar um exemplo (contextualizado) de multiplicação de números complexos tendo determinado resultado no produto, o autor afirma que, trocando multiplicador e multiplicando na conta anterior, teríamos um resultado diferente. Apresenta a próxima multiplicação com os fatores trocados, sem nenhuma contextualização. Não são expostos nessa obra maiores comentários sobre a não comutatividade.
Reis (1892)	Não fala sobre os números complexos. Discorre sobre o sistema métrico decimal, suas vantagens e objeções.
Vianna (1906)	Exibe dois exemplos (ambos contextualizados), com os mesmos fatores mas em ordem diferente, a fim de concluir a não comutatividade da multiplicação de números complexos. Afirma que "a razão da diferença dos dois produtos provém de não seguirem a mesma lei as divisões de uma e de outra unidade principal".

Thiré (1944)	Define números complexos, realiza conversões entre complexos e incomplexos, e opera com esses números. Para multiplicar números complexos, orienta que seja feita a redução de ambos os fatores a frações ordinárias das unidades principais. Não menciona qual será a espécie de unidade do produto, tampouco comenta sobre o que aconteceria trocando-se a ordem dos fatores.
Moura (2004)	Define números complexos e incomplexos, apresentando, também exemplos. Em exercícios, pede que sejam calculadas adições e subtrações de números complexos. Quanto à multiplicação e à divisão, são apenas entre número complexo e escalar.

CAPÍTULO 4

Livros franceses

Com a finalidade de analisar como ocorria o ensino dos números complexos na França, iremos estudar alguns livros didáticos desse país. Durante grande parte do período dessa pesquisa, acreditamos que a Aritmética de Bézout (1770) seria a obra mais antiga sobre os números complexos; no entanto, fomos capazes de encontrar um livro anterior àquele, em que os números complexos já eram abordados: o *Cours de Mathématique* de Charles-Étienne Camus (1749). Nosso estudo sobre os números complexos na França começarão, portanto, pelo livro de Camus. Dando continuidade, examinaremos duas diferentes versões pós Revolução Francesa do Bézout; além do *Traité élémentaire d'arithmétique, à l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations*, de Lacroix (1807) e do *Élements D'Arithmétique*, de Bourdon (1878).

4.1 Cours de Mathématique. Première Partie. Élémens d'Arithmétique, de Charles-Étienne Camus (1749)

De acordo com o *Complete Dictionary of Scientific Biography*, Charles-Étienne-Louis Camus nasceu em Crécyen-Brie, na França, em 1699; e faleceu em Paris, no ano de 1768. Tendo mostrado habilidades em Matemática e em Mecânica ainda jovem, foi enviado por seus pais ao *Collège de Navarre*. Posteriormente, Camus deu continuidade a seus estudos em Matemática e chegou a trabalhou com mecânica, astronomia e arquitetura.

Em 1727, Camus participou de uma competição da *Académie des Sciences* sobre embarcações de mastro. Seus escritos sobre o assunto ganharam a metade do prêmio oferecido pela Academia, e foram publicados por ela. Camus trabalhou na *Académie des Sciences* por quarenta anos, a maior parte deles como administrador.

Segundo Schubring (2005, p. 148), ao início do estabelecimento das escolas militares na França seguiu-se um período de introdução de livros didáticos nessas instituições. Desse modo, Charles-Étienne Camus foi o primeiro responsável a escrever um livro texto de Matemática para um desses estabelecimentos: a escola de engenharia fundada em 1748 pelo *Conde d'Argenson*, que mais tarde seria denominada *École de Mézières*. Camus também foi nomeado examinador da *École*.

A série de livros, que abrangia os temas Aritmética, Geometria, Mecânica e Hidráulica, era destinada inicialmente à formação de engenheiros militares e composta de três volumes (foram planejados 4 volumes para a coleção, mas somente três foram de fato publicados), teve seu conteúdo escrito seguindo-se a orientação do próprio *Conde d'Argenson*, conforme podemos ler no prefácio do livro.

> Lorsque M. le Comte d'Argenson a bien voulu me charger de l'examen des sujets qui se présentent pour être reçus ingénieurs, il a fixé le degré de connoissance qu'il falloit exiger de la part des aspirans: il a même eu la bonté d'entrer dans tous les détails qui regardent leur introduction: & pour leur épargner la lecture d'un trop grand nombre de livres avant l'examen; il m'a ordonné de réunir dans un même ouvrage traité synthétiquement toute la théorie dont un ingénieur peut avoir besoin[1]. (Camus, 1749)

O conteúdo do *Cours de Mathématique. Première Partie. Élémens d'Arithmétique*, de Charles-Étienne Camus, é composto de:

Livre Premier - Des Nombres & des Principes généraux de l'Arithmétique
- Des Nombres en général & de l'Unité
- Des Nombres & de la Numération
- Des Parties Décimales

Livre Second - Des Opérations de l'Arithmétique sur les Nombres incomplexes
- De l'Addition des Nombres incomplexes
- De la Soustraction des Nombres incomplexes
- De la Multiplication des Nombres incomplexes
- De la Division des Nombres incomplexes

Livre III - Des Fractions
- Des Fractions en général & de leur Réduction
- Des l'Addition & de la Soustraction des Fractions
- Des la Multiplication & de la Division des Fractions
- Des Fractions de Fractions
- De la Réduction des Fractions décimales qui sont composées d'une suite infinie de Périodes égales

[1] Quando o Sr. Conde d'Argenson pediu gentilmente que eu examinasse os assuntos que se apresentavam para serem recebidos como engenheiros, ele fixou o grau de conhecimento que era necessário exprimir dos aspirantes: bondade de entrar em todos os detalhes que dizem respeito à sua introdução: e poupá-los da leitura de muitos livros antes do exame; ele ordenou que eu reunisse em um único trabalho sinteticamente toda a teoria que um engenheiro pode precisar (tradução nossa).

Livre IV - Des Opérations de l'Arithmétique sur les Nombres complexes
- De l'Addition des Nombres complexes
- De la Soustraction des nombres complexes
- De la Multiplication des Nombres complexes
- De la Division des nombres complexes

Livre V - Des Proportions & des principales Regles qui en dépendent
- Des Proportions en général
- De la Regle de Trois, & de ses différentes especes
- Des Regles de Compagnie
- Des Regles de Fausses positions

Livre VI - De la Regle d'Alliage

Livre VII - De la Composition des Quarrés & des Cubes, & de l'Extraction de leurs Racines
- De la Composition des Quarrés, & de l'Extraction des Racines quarrées
- De la Composition des Cubes, & de l'Extraction des Racines cubiques

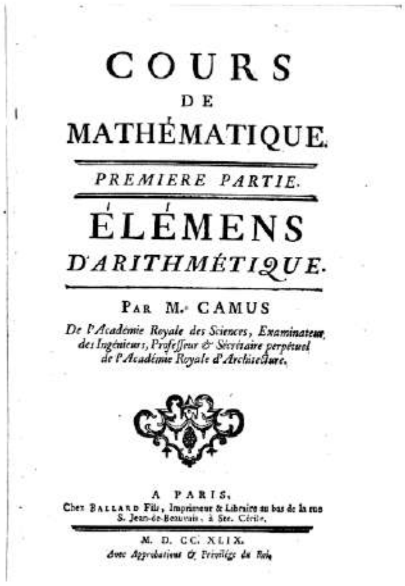
Livre VIII - Des Proportions Arithmétiques, des Progressions Arithmétiques, des Progressions Géométriques & des Logarithmes
- Des Proportions Arithmétiques
- Des Progressions Arithmétiques
- Des Progressions géométriques
- Des Logarithmes & de leur usage dans l'Arithmétique

Livre IX - Des Changemens d'Ordre & des Combinaisons
- Des Changemens d'Ordre
- Des Combinaisons

No primeiro capítulo do primeiro livro, Camus define a *aritmética* como sendo "a ciência dos números", e chama *número* a junção de várias unidades. Já a *unidade* é definida como "aquilo que é indivisível, embora na verdade possa ser dividido"(Camus, 1749, p. 1). O que percebemos de tais definições é que Camus está considerando um número como uma coleção de unidades de determinada espécie, denotada sob alguma unidade de medida. Por isso, ele a considera essa como indivisível, apesar de sua própria ressalva de que essas unidades são, de fato, divisíveis. Desse modo, já percebemos em Camus uma inclinação a pensar em número como algo concreto, que serve para medir ou mensurar.

Ainda nesse primeiro capítulo, Camus esclarece que as unidades que estão sendo citadas por ele são chamadas *unidades concretas*; contrapondo-se ao que ele chama de "unité vague", que, segundo ele, são unidades que não designam nenhuma coisa em particular (Camus, 1749, p. 3).

Observando também a estrutura da obra de Camus, percebemos sua preferência pelos números concretos. Como o livro foi encomendado e orientado pelo *Conde d'Argenson*, deduzimos que essa ênfase nos números concretos pode ter origem nos conceitos epistemológicos do próprio Conde.



COURS
DE
MATHÉMATIQUE.
PREMIERE PARTIE.
ÉLÉMENS
D'ARITHMÉTIQUE.
PAR M. CAMUS
De l'Académie Royale des Sciences, Examinateur des Ingénieurs, Professeur & Sécrétaire perpétuel de l'Académie Royale d'Architecture.
A PARIS,
Chez BALLARD Fils, Imprimeur & Libraire au bas de la rue S. Jean-de-Beauvais, à Ste. Cécile.
M. D. CC. XLIX.
Avec Approbation & Privilége du Roi.

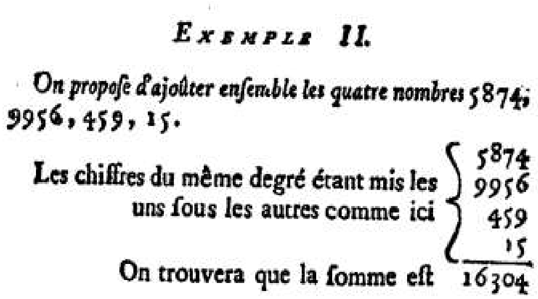
Figura 76 – Folha de rosto do *Cours de Mathématique* de Charles-Étienne Camus (Camus, 1749)

O segundo livro, onde o autor trata das operações sobre números incomplexos, é iniciado afirmando-se que as quatro operações da aritmética são adição, subtração, multiplicação e divisão; e que essas operações são realizadas sobre *números incomplexos* ou sobre *números complexos*. Então Camus prossegue com as definições de números incomplexos e complexos:

> Les *nombres incomplexes* sont ceux qui n'ont qu'une unité principale, comme la livre tournois, la toise & toute autre unité qui seroit ou arbitraire ou établie par l'usage.
>
> Les *nombres complexes* sont ceux qui ont plusieurs unités principales différentes, & qui devroient plutôt être appellés *sommes* que *nombres*, parce qu'un nombre est la collection de plusieurs unités égales.
>
> Par exemple, la somme composée de 8 livres, de 8sols & de 8 deniers, est un nombre complexe; celle de 50 toises & de 5 pieds, est pareillement un nombre complexe, parce que ces deux sommes sont composées de nombres qui ont différentes unités principales.[2] (Camus, 1749, p. 27)

[2] Os números incomplexos são aqueles que possuem apenas uma unidade principal, como a libra, a toesa e qualquer outra unidade que pode ser arbitrária ou estabelecida pelo uso.Os números complexos são aqueles que

As operações realizadas nesse segundo livro são apenas entre números de uma mesma espécie (que o autor denomina, como vimos, números incomplexos). Por vezes, a espécie de unidade desse número é omitida nas contas e problemas, como na soma abaixo.



EXEMPLE II.

On propose d'ajoûter ensemble les quatre nombres 5874, 9956, 459, 15.

Les chiffres du même degré étant mis les uns sous les autres comme ici: 5874, 9956, 459, 15

On trouvera que la somme est 16304

Figura 77 – Exemplo de adição de números incomplexos (Camus, 1749, p. 31)

No terceiro capítulo do Livro II, a multiplicação de números incomplexos é definida como uma operação que repete uma mesma quantidade um certo número de vezes. Camus também distingue multiplicando e multiplicador:

> Il faut donc deux nombres pour une multiplication; premièrement le nombre qui doit être multiplié ou répété, qu'on apelle *multiplicande*; secondement celui qui indique par le nombre de ses unités combien de sois il faut répéter le multiplicande, & que l'on nomme *multiplicateur* [3]. (Camus, 1749, p. 47)

Um pouco mais adiante, há uma observação sobre a multiplicação de dois números concretos. Nela, o autor afirma que a multiplicação de dois números complexos, uma operação existente na prática, deve ser realizada considerando-se o multiplicador como um número incomplexo.

> On propose cependant quelquefois de multiplier un nombre concret par un autre nombre concret. En supposant, par exemple, qu'une piece de bois coûte 5 livres, & qu'on veut savoir le prix de 20 pieces de bois, l'on propose de multiplier 5 livres par 20 pieces de bois; mais il est évident que cette proposition est contre les regles de la multiplication, & qu'il ne faut pas multiplier 5 livres par le nombre concret 20 pieces de bois, mais seulement par le nombre absolu 20 fois, puisque pour avoir le prix de 20 pieces de bois dont chacune coûte 5 livres, il suffit de répéter 5 livres 20 fois.[4] (Camus, 1749, p. 50)

---

têm várias unidades principais diferentes, e que deveriam ser chamados de somas ao invés de números, porque um número é a coleção de várias unidades iguais. Por exemplo, a soma de 8 *livres*, 8 *sous* e 8 *deniers* é um número complexo; a de 50 toesas e 5 pés é também um número complexo, pois essas duas somas são compostas por números que possuem diferentes unidades principais (tradução nossa).

[3] Então, dois números são necessários para a multiplicação; primeiro, o número a ser multiplicado ou repetido, que se denomina multiplicando; Em segundo lugar, aquele que indica pelo número de suas unidades quantas vezes se deve repetir o multiplicando, chamado de multiplicador (tradução nossa).

[4] Algumas vezes é proposto, no entanto, multiplicar um número concreto por outro número concreto. Assumindo, por exemplo, que um pedaço de madeira custa 5 libras, e se quer saber o preço de 20 peças de madeira, propõe-se a multiplicação de 5 libras por 20 pedaços de madeira; mas é óbvio que esta proposição é contra as regras da multiplicação e que não devemos multiplicar 5 libras pelo número concreto 20 de madeira, mas apenas pelo número absoluto 20 vezes, já que se busca o preço de 20 peças de madeira em que cada uma das quais custa 5 libras, basta repetir 5 libras 20 vezes (tradução nossa).

Camus destaca que, em sua multiplicação de números incomplexos, não incluirá o que ele chama de *multiplicação geométrica*.

> Lorsque nous disons que le multiplicateur est un nombre absolu composé d'unités vagues ou abstraites, nous ne parlons que de la multiplication des nombres, & nous ne prétendons point toucher à la multiplication géometrique, dans laquelle l'un des facteurs étant une ligne, l'autre facteur peut être une ligne ou une surface, & dans laquelle le produit n'a jamais des unités de même espece que celles de ses facteurs. Ce n'est point ici le lieu d'expliquer cette espece de multiplication, ni la nature des unités de sont produit.[5] (Camus, 1749, p. 51)

Discutiremos a chamada multiplicação geométrica mais profundamente em um próximo capítulo.

O quarto livro dessa obra, dedicado às operações aritméticas sobre os números complexos, é iniciado informando-se ao leitor que são realizadas com os números complexos as mesmas operações que foram estudadas, no Livro II, sobre os números incomplexos.

Camus tenta justificar a existência dos números complexos dizendo que, se houvesse apenas uma unidade de cada espécie, esta não seria pequena o suficiente para exprimir toda grandeza, a menos que essa unidade fosse muito pequena. Mas, se tal unidade fosse muito pequena, os números que representariam cada grandeza achariam-se muito grandes, o que não seria prático para o comércio (Camus, 1749, p. 153). Desse modo, a razão explicitada por Camus para a existência dos números complexos deixa de existir com a introdução do sistema métrico.

Para o cálculo monetário, o autor afirma que

> l'on se sert ordinairement de trois sortes d'unités, de la *livre*, du *sol*, & du *denier*. L'on prend aussi pour unité l'*ecú* qui vaut 3 livres, la *pistole* qui vaut 10 livres, le *louis* qui vaut aujourd'hui 24 livres, & toutes les différentes piéces de monnoie, qui ont cours dans le commerce[6]. (Camus, 1749, p. 154)

Para comprimentos lineares, o autor destaca que é utilizada a toesa, além de medidas relacionadas a esta ("le *pied*, le *pouce*, la *ligne*, l'*aune*, la *perche*", entre outras). Para os pesos, eram utilizados *livres, mar, once, gros, scrupule* ou *denier*, além de *grain*. Para os grandes pesos, Camus cita o *quintal* (equivalente a 100 *livres*), e o *millier* (igual a 1000 *livres*). (Camus, 1749, p. 154) Após mencionar as unidades de tempo e as angulares, Camus finaliza essa parte introdutória dizendo que "pour le calcul de chaque espece de chose, l'on prend pour unités les grandeurs de quelques parties connues de la même espece[7]"(Camus, 1749, p. 154).

5 Quando dizemos que o multiplicador é um número absoluto composto por unidades vagas ou abstratas, falamos apenas da multiplicação de números, e não pretendemos tocar na multiplicação geométrica, na qual um dos fatores é uma linha, o outro fator pode ser uma linha ou uma superfície, e em que o produto nunca possui unidades do mesmo tipo que as de seus fatores. Este não é o lugar para explicar esta espécie de multiplicação, nem a natureza das unidades que dela são produzidas (tradução nossa).

6 Geralmente são usados três tipos de unidades, a *livre*, o *sol* e o *denier*. Podemos também utilizar o *ecú*, que vale 3 livres, a *pistole*, que vale 10 livres, o *louis*, que vale hoje 24 livres, e todas as diferentes partes da moeda que têm curso no comércio (tradução nossa).

7 Para o cálculo de cada espécie de coisa, tomamos como unidades as grandezas de algumas partes conhecidas da mesma espécie (tradução nossa).

O autor volta a definir, nesse momento, o que seria um número complexo: uma coleção de números expressos em diferentes unidades. Apesar de interessante, essa definição é fraca pois não enfatiza o caráter comum dessas unidades de medida.

> Lorsqu'on a des nombres composés de différentes unités, la collection de ces nombres s'apelle *nombre complexe*. Par exemple la collection des trois nombres suivans, *12 livres 13 sols 8 deniers*, est un nombre complexe. Ces quatre autres nombres, *25 toises 4 pieds 5 pouces 10 lignes*, sont aussi un nombre complexe[8]. (Camus, 1749, p. 155)

Segue-se uma tabela com os símbolos de algumas unidades de medida citadas anteriormente, e seus valores em relação às unidades principais da espécie.

O primeiro capítulo do Livro IV discorre sobre a adição de números complexos. O aluno é instruído a escrever os números complexos uns abaixo dos outros, de modo que em cada coluna vertical estejam números relativos à mesma unidade. Feita a soma em cada coluna, observa-se as equivalências entre unidades da mesma espécie, de modo a obter uma resposta final mais simplificada. Como primeiro exemplo, temos a adição de quatro números complexos abaixo:

EXEMPLE PREMIER.

On propose de faire l'addition des quatre nombres complexes suivans, ou plûtôt des quatre sommes suivantes, dont chacune est composée de livres, sols & deniers.

Sommes à ajoûter	387#	12ß	8d
	759	19	11
	896	17	10
	4563	19	9
Somme totale	6608#	10ß	2d

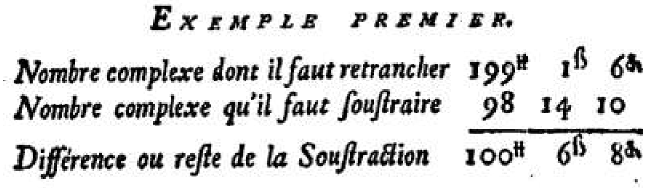
Figura 78 – Adição de números complexos (Camus, 1749, p. 158)

A soma de 8, 11, 10 e 9 *deniers*, na coluna mais à direita, resulta em 38 *deniers*. No entanto, como 12 *deniers* equivalem a 1 sol, temos então 3 *sols* 2 *deniers*. Na coluna do meio, a adição de 12, 19, 17 e 19 *sols* tem como soma 67 *sols*. Acrescentando os 3 *sols* anteriores a esses 67 *sols*, tem-se 70 *sols* ou, equivalentemente, 3 *livres* 10 *sols*. Por último, somam-se as quantidades de *livres*: 387, 759, 896 e 4563. A esse resultado acrescentam-se as 3 *livres* do resultado anterior, obtendo-se 6608 *livres* 10 *sols* 2 *deniers*.

Além do exemplo acima, são dados mais três exemplos de adição de números complexos. Camus explica detalhadamente cada um desses cálculos em seu texto.

[8] Quando um número é composto de unidades diferentes, sendo considerado uma coleção desses números, é chamado de *número complexo*. Por exemplo, a coleção dos seguintes três números, *12 livres 13 sols 8 deniers*, é um número complexo. Estes quatro outros números, 2*5 toises 4 pés 5 polegadas 10 linhas*, também são um número complexo (tradução nossa).

No capítulo II, sobre a subtração de números complexos, Camus orienta dispor "as partes da quantidade que queremos subtrair, sob as partes similares da quantidade a partir da qual devemos subtrair". Inicia-se então a subtração pela unidade ínfima em questão e, caso a quantidade de unidades a serem subtraídas, em alguma coluna, for maior do que a quantidade de unidades da qual se deve subtrair, empresta-se uma unidade daquela imediatamente superior, a fim de adicioná-la às unidades das quais estamos subtraindo (Camus, 1749, p. 164). Já havíamos percebido esse mesmo modo de lidar com a subtração de números complexos no livro de Bézout (1770, p. 83).


EXEMPLE PREMIER.

Nombre complexe dont il faut retrancher	199#	1ß	6d
Nombre complexe qu'il faut souſtraire	98	14	10
Différence ou reſte de la Souſtraction	100#	6ß	8d

Figura 79 – Subtração de números complexos (Camus, 1749, p. 164)

Nosso interesse agora é verificar o que é dito no próximo capítulo, sobre a multiplicação de números complexos. O primeiro parágrafo informa ao leitor que o produto de números complexos é obtido multiplicando-se o multiplicando por todas as partes (unidade principal e frações da unidade principal) do multiplicador:

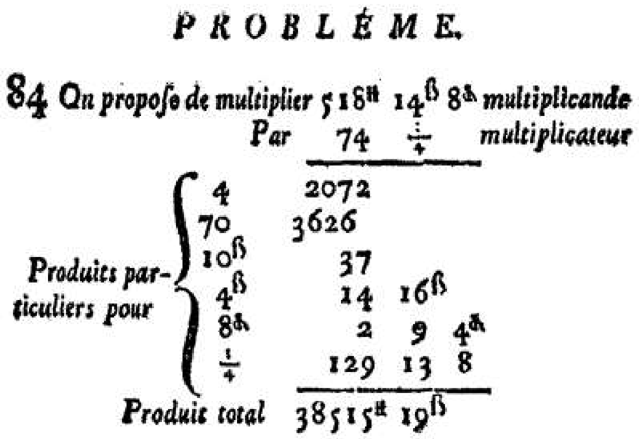
> La multiplication par des nombres complexes, se fait en multipliant le multiplicande par toutes les parties du multiplicateur, lorsqu'il est complexe, a des parties moindres que son unité principale; & que chacune des ses unités principales, marque qu'il faut prendre le multiplicande une sois, les parties du multiplicateur, qui seront moindres que l'unité principale, marqueront qu'il ne faut prendre le multiplicande qu'une partie de sois. Pour rendre les regles de la multiplication des nombres complexes plus intelligibles, nous les expliquerons par différens exemples ausquels nous en serons l'application [9]. (Camus, 1749, p. 168)

Por meio desse parágrafo, já podemos intuir que a multiplicação de números complexos é uma operação com um grau de dificuldade maior do que as duas operações - adição e subtração - apresentadas nos capítulos anteriores.

Camus segue afirmando que, na multiplicação, o multiplicando é repetido um certo número de vezes, sendo este número determinado pelo multiplicador, que será tratado como um número absoluto. Desse modo, as unidades do produto deverão ser da mesma espécie do multiplicando.

[9] A multiplicação por números complexos é feita multiplicando-se o multiplicando por todas as partes do multiplicador, quando este é complexo, com partes menores que a sua unidade principal; tendo em vista cada uma de suas unidades principais, sendo a espécie do multiplicando uma, as partes do multiplicador, que serão menores do que a unidade principal, indicarão que devemos realizar a multiplicação do multiplicando por apenas uma parte (fração) dela. Para tornar as regras para a multiplicação de números complexos mais inteligíveis, explicaremo-nas por diferentes exemplos aos quais devemos aplicá-las (tradução nossa).

Os exemplos exibidos por Camus até agora não possuíam nenhuma forma de contextualização, e o primeiro exemplo sobre uma multiplicação de complexos continua nessa mesma linha ao propor simplesmente que se multiplique $518\#\ 14^{s}\ 8\ ^{d}$ por $74\frac{1}{4}$.


PROBLÉME.

84 On propose de multiplier 518# 14ß 8d multiplicande
Par 74 1/4 multiplicateur

Produits particuliers pour	4	2072
	70	3626
	10ß	37
	4ß	14 16ß
	8d	2 9 4d
	1/4	129 13 8
Produit total		38515# 19ß

Figura 80 – Multiplicação com número complexo (Camus, 1749, p. 169)

O autor inicia multiplicando 74 por 518, da mesma forma como era feito no livro sobre números incomplexos. Em seguida, multiplica-se 74 por 10^{s} (metade de uma libra), obtendo-se 37#; e por 4^{s} ($\frac{1}{5}$ da libra), resultando dessa vez em $14\#\ 16^{s}$. Como 8^{d} é a trigésima parte da libra, a multiplicação de 8^{d} por 74 resulta em $2\#\ 9\ ^{s}\ 4\ ^{d}$. Por último, a multiplicação do número complexo $518\#\ 14^{s}\ 8\ ^{d}$ por $\frac{1}{4}$ resulta em $129\#\ 13^{s}\ 8\ ^{d}$.

Logo após a resolução do exemplo acima, Camus acrescenta que o que foi dito sobre multiplicação de números complexos até o momento basta para que esta operação esteja bem estabelecida.

> Les Regles de la multiplication des grandeurs complexes sont assez bien établies dans cet exemple de multiplication des monnoies, pour faire appercevoir ce qu'il y aura à observer dans d'autres exemples. Il est donc inutile d'en donner davantage; & il suffie d'exposer quelles parties il faudra prendre du multiplicateur consideré comme un nombre de *livres* pour les différens nombres de *sols* & *deniers* qui seront dans le multiplicande[10]. (Camus, 1749, p. 171)

Como uma observação, o autor define o que seria parte alíquota de uma *livre*, fornecendo em seguida uma lista dessas frações da libra. Como exemplo, podemos destacar:

$10^{s} \rightarrow$ metade da libra

$3^{d} \rightarrow$ octogésima parte da libra

$3^{s}\ 4^{d} \rightarrow$ sexta parte da libra

$2^{s}\ 6^{d} \rightarrow$ oitava parte da libra

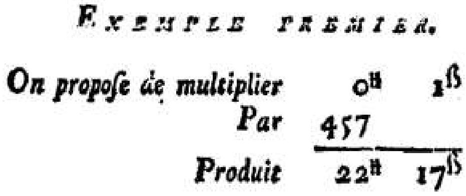
[10] As regras para a multiplicação de quantidades complexas estão bastante bem estabelecidas neste exemplo de multiplicação de valores monetários, para deixar claro o que será observado em outros exemplos. Portanto, é inútil dar mais; e basta explicar quais partes serão tiradas do multiplicador considerado como uma quantidade de *livres* para os diferentes números de *sols* e *deniers* que estão no multiplicando (tradução nossa).

Tendo os exemplos acima em vista, nos questionamos: (1) se era esperado que os alunos as decorassem, e (2) se a população que lidava com comércio em geral utilizava esse conhecimento; visto que, apesar de algumas dessas relações serem imediatas (como as duas primeiras listadas acima), outras poderiam ser mais difíceis de serem percebidas sem se recorrer a contas (como as duas últimas acima).

A parte alíquanta (da libra) é definida como uma quantidade de *sols* ou de *deniers* que não esteja exatamente contida na libra (ou seja, que não esteja contida na libra um número inteiro de vezes). Camus orienta o leitor a, quando houver no multiplicando um número que seja parte alíquanta da libra, separar esse número em uma soma cujas parcelas sejam partes alíquotas da libra.

Perceberemos que, comparando a parte dedicada à multiplicação de números complexos do Bézout (1770) com a do Camus, a obra do Camus é mais sistemática do que aquela, compartimentando a multiplicação e analisando cada um de seus possíveis casos. Sob o título de "Méthode Abrégée"[11], o autor apresenta métodos para a obtenção de alguns produtos:

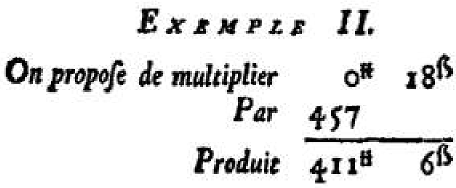
- *Sols* por números inteiros.


EXEMPLE PREMIER.

On propofe de multiplier 0# 1ß
Par 457
Produit 22# 17ß

Figura 81 – Multiplicação de 0# 1^s por 457 (Camus, 1749, p.174)

É indicado que se multiplique primeiro o número de soldos pelo algarismo das unidades do multiplicador. Nesse caso, 1^s é multiplicado por 7, obtendo-se 7^s. Em seguida, multiplica-se a metade do número de soldos pelos outros algarismos (45) do multiplicador: 45 x $\frac{1}{2}$ = 22# 10^s. Somando-se os dois resultados, tem-se 22# 17^s.


EXEMPLE II.

On propofe de multiplier 0# 18ß
Par 457
Produit 411# 6ß

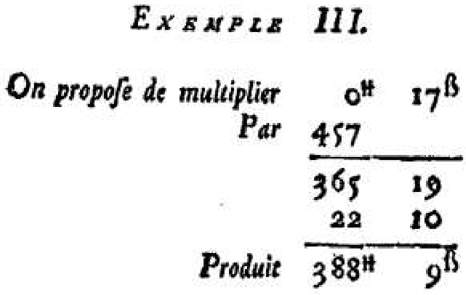
Figura 82 – Multiplicação de 0# 18^s por 457 (Camus, 1749, p. 174)

Nesse segundo exemplo, o autor afirma que poderíamos multiplicar os 18^s por 7 (algarismo das unidades do multiplicador); no entanto, como seria difícil realizar esse produto de

11 Método abreviado.

uma vez, pode-se então multiplicar primeiro 8^s por 7, tendo então 56^s. O número 6, que representa o algarismo da unidade desse produto, é escrito então na coluna relativa aos *sols*; enquanto as 5 dezenas de *sols* são retidas. Multiplicando-se agora os outros 10^s por 7, obtemos 7 dezenas de *sols* que, adicionadas às 5 dezenas anteriores, resultam em 120^s ou, equivalentemente, $6\#$.

Temos agora que multiplicar a metade do número de *sols* (9^s) pelos algarismos 45 do multiplicador: 45 x 9^s = $405\#$. Somando esse resultado às $6\#$ obtidas anteriormente, conseguimos o produto $411\#$ 6^s.



EXEMPLE III.

On propose de multiplier	0#	17ß
Par	457	
	365	19
	22	10
Produit	388#	9ß

Figura 83 – Multiplicação de $0\#$ 17^s por 457 (Camus, 1749, p. 174)

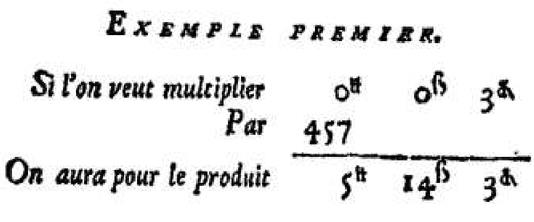
Mais um exemplo é apresentado aos alunos, em que 17^s são multiplicados por 457. Primeiro, é feito o produto de 17^s por 7, decorrendo em $5\#$ 19^s.

Nesse momento, em que Camus tem a intenção de multiplicar a metade da quantidade de *sols* pelos algarismos 45 (centena e dezena) do multiplicador, faz-se o cálculo 45 x $8\frac{1}{2}$, cujo resultado será a soma de $360\#$ 6^s com $22\#$ 10^s.

O sentido da multiplicação acima está no fato de que 457 vezes 17^s é igual a (7 + 450) vezes 17^s. Mas como cada 20 sols equivalem a 1 livre, $450 \cdot 17^s = \frac{450}{20} \cdot 17\#$. Logo, 457 vezes 17^s é igual a 7 vezes 17^s, mais 45 vezes $\frac{17}{2}\#$.

Camus observa que o próximo caso a ser estudado, em que se pretende multiplicar uma quantidade de *deniers* por um número, é análogo a esse.

- *Deniers* por números inteiros.



EXEMPLE PREMIER.

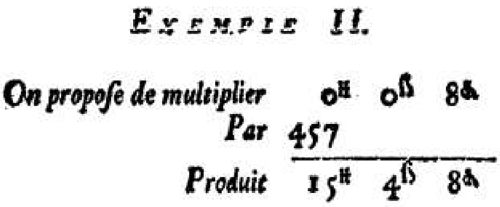
Si l'on veut multiplier	0#	0ß	3d
Par	457		
On aura pour le produit	5#	14ß	3d

Figura 84 – Multiplicação de $0\#$ 0^s 3^d por 457 (Camus, 1749, p. 177)

Sobre esse exemplo, a orientação do autor é a seguinte.

> Les 3 deniers qui sont au multiplicande étant le quart de 1^s, il faudra prendre le quart du chiffre des unités du multiplicateur consideré comme un nombre de livres, & prendre la moitié du quart on le huitiéme des autres chiffres du multiplicateur; c'est-à-dire qu'il faudra diviser le chiffre 7 des unités par 4, & diviser les autres par 8. Mais comme dans la division, il faut commencer par diviser les chiffres du degré le plus élevé, afin que les restes puissent être réduits & joints aux chiffres suivans; nous commencerons par prendre le huitiéme des chiffres du multiplicateur qui précédent celui des unités; & nous reculerons d'un rang vers la droite le chiffres du produit, pour exprimer le nombre des livres[12]. (Camus, 1749, p. 177)

Desse modo, deve-se começar dividindo 45 por 8, obtendo-se 5#. O resto dessa divisão, que é igual a 5, deve ser colocado ao lado do algarismo das unidades do multiplicador. Temos então o número 57, do qual calcula-se a quarta parte, resultando em $14^s\frac{1}{4}$, que equivale a 14^s3^d. Portanto, o produto será 5# 14^s 3^d.



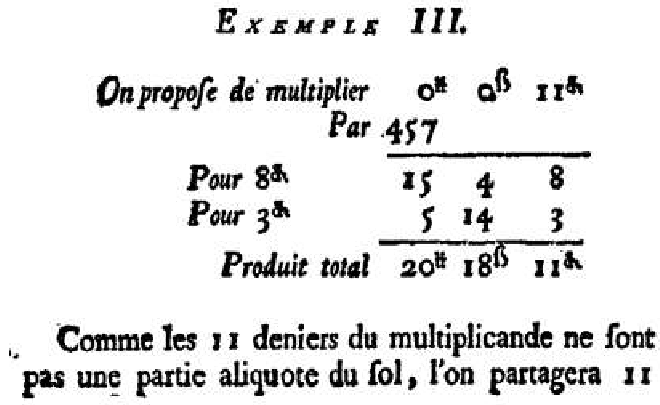
EXEMPLE II.

On propose de multiplier 0# 0ß 8d
Par 457
Produit 15# 4ß 8d

Figura 85 – Multiplicação de 0# 0^s 8^d por 457 (Camus, 1749, p. 178)

Nesse segundo exemplo, os 8^d equivalem a $\frac{2}{3}$ de *livre*. Sendo assim, Camus instrui a iniciar os cálculos dividindo 45 pela metade de $\frac{2}{3}$, tendo-se então 15#. O passo seguinte constitui-se na divisão de 7 (algarismo da unidade do multiplicador) por $\frac{2}{3}$, o que resulta em $4^s\frac{2}{3}$ ou, equivalentemente, 4^s 8^d. Logo, o resultado será 15# 4^s 8^d.

[12] Os 3 *deniers* que são o multiplicando correspondem a um quarto de 1^s, logo será necessário que um quarto do número de unidades do multiplicador seja considerado como um número de *livres*, e toma-se a metade do quarto ou o oitavo dos outros dígitos do multiplicador; isto é, divide-se o número 7 das unidades em 4, e divide-se os outros em 8. Mas, como na divisão, devemos começar por dividir os algarismos do mais alto grau, de modo que os restos podem ser reduzido aos seguintes algarismos; começaremos tomando o oitavo dígito do multiplicador que precede ao das unidades; iremos mover os algarismos do produto uma linha para a direita para expressar o número de livres (tradução nossa).



EXEMPLE III.

On propose de multiplier	0#	0ß	11d
Par	457		
Pour 8d	15	4	8
Pour 3d	5	14	3
Produit total	20#	18ß	11d

Comme les 11 deniers du multiplicande ne font pas une partie aliquote du sol, l'on partagera 11

Figura 86 – Multiplicação de 0# 0^s 11^d por 457 (Camus, 1749, p. 178)

O terceiro exemplo propõe a multiplicação de 11 *deniers* por 457. Como os 11^d não são parte alíquota do *sol*, parte-se os 11^d em 8^d e 3^d, que são partes alíquotas, e multiplica-se separadamente cada um desses valores por 457. Dos exemplos anteriores já temos esses dois resultados, que serão somados a fim de se obter o produto procurado.

Uma observação é feita então por Camus: caso pretenda-se multiplicar um número composto por *livres*, *sols* e *deniers* por um número inteiro - por exemplo, 457 vezes 189# 18^s 11^d - multiplica-se primeiro 189# por 457, da forma como foi ensinado para números incomplexos, e depois aplica-se as regras apresentadas nesse capítulo para a multiplicação dos 18^s e dos 11^d por 457.

Ainda, se o multiplicador for fracionário, por exemplo $457\frac{3}{5}$, Camus orienta o aluno a multiplicar primeiro todo o multiplicando por 457, para depois se calcular a quinta parte do triplo do multiplicando. Nesse caso, mais parcelas seriam adicionadas para o resultado final.

Os próximos parágrafos desse capítulo comprometem-se a demonstrar os dois métodos apresentados até agora - para a multiplicação de *sols* e de *deniers* por números inteiros.

A justificativa para o primeiro método, em que se multiplica uma quantidade de *sols* por um número inteiro, encontra-se transcrita a seguir.

> En multipliant le nombre des sols par le dernier chiffre du multiplicateur, on a évidemment un nombre de sols: ainsi le produit qu'on trouve doit être mis au rang des sols, lorsqu'il ne surpasse pas 20^s; & lorsqu'il surpasse 20^s, il faut retenir une livre pour chaque vingtaine de sols, & écrite le reste au rang des sols. Cette premiere opération est évidente, & celle qu'on fait sur les autres chiffres du multiplicateur n'est guère plus difficile à comprendre, comme on va le voir.
>
> On multiplie tous les autres chiffres du multiplicateur par la moitié du nombre des sols, & l'on recule d'une place chaque chiffre du produit. Mais 1^o En multipliant par la moitié du nombre de sols, l'on a un produit qui n'est que la moitié de celui qu'on auroit en multipliant par tous les sols. 2^o En reculant d'un rang vers la droite chaque chiffre de ce produit, & par conséquent l'on n'a que la dixiéme partie de la moitié du produit qu'on auroit en multipliant à l'ordinaire ces chiffres par tout le nombre de sols; mais la dixiéme partie de la

> moitié de ce produit, c'est-à-dire la vingtiéme partie de ce produit est égale au nombre de livres qu'il contient.
>
> Donc en multipliant par la moitié du nombre des sols tous les chiffres du multiplicateur, excepté celui des unités, & en reculant d'une place chaque chiffre du produit; l'on a un produit égal au nombre de livres contenues dans le produit de sols qu'on auroit on multiplicant ces chiffres à l'ordinaire par le nombre des sols[13]. (Camus, 1749, p. 180)

O segundo método, em que se multiplica uma quantidade de *deniers* por um número inteiro, é fundamentado de maneira análoga por Camus.

Após as justificativas dos métodos aplicados anteriormente, é proposto agora que se multiplique 24 *marcs* 7 *onces* 6 *gros* por 51.

PROBLÉME.

Multiplier des Poids tels que		24^{M}	7^{O}	6^{G}
Par		51		
Produits particuliers pour	1	24^{M}		
	50	120		
	4^{O}	25	4^{O}	
	2^{O}	12	6	
	1^{O}	6	3	
	4^{G}	3	1	4^{G}
	2^{G}	1	4	6
Produit total		1273^{M}	3^{O}	2^{G}

Figura 87 – Multiplicação de 24^{M} 7^{O} 6^{G} por 51 (Camus, 1749, p. 182)

Primeiro multiplica-se os 24^{M} por 51, o que nos dá 1224^{M}. Para encontrar o produto de 7^{O} por 51, Camus reparte as 7^{O} em partes alíquotas do *marc*: 4^{O}, 2^{O} e 1^{O} (1 *marc* equivale a 8 *onces*). Então, multiplica cada uma dessas partes por 51 separadamente. Tem-se que 51 vezes 4^{O} é igual a 51 vezes $\frac{1}{2}^{O}$, o que resulta em $25^{O}\frac{1}{2}$, isto é, 25^{O} 4^{M}. Mas 51 vezes 2^{O} será metade do resultado anterior, isto é, 12^{O} 6^{M}; e o produto de 1^{O} por 51 será igual a metade desse último resultado (6^{O} 3^{M}). Como 1 *once* contém 8 *gros*, os 6^{G} são repartidos nas partes alíquotas 4^{G} e 2^{G}.

[13] Ao multiplicar o número de *sols* pelo último dígito do multiplicador, obviamente temos uma série de *sols*: portanto, o produto que encontramos deve ser colocado na classificação do *sol*, quando não exceda os 20^{s}; e quando supera os 20^{s}, é necessário trocar uma libra por vinte *sols* e escrever o resto entre os *sols*. Esta primeira operação é evidente, e aquilo que se faz nos outros algarismos do multiplicador não é muito difícil de entender, como veremos. Multiplique todos os outros dígitos do multiplicador pela metade do número de *sols*, e cada algarismo do produto seria recuado uma posição. Mas 1^{o} multiplica-se pela metade do número de *sols*, e tem-se um produto que é apenas metade do que seria multiplicando-se por todos os *sols*. 2^{o} Faz-se retornar uma posição à direita cada algarismo desse produto e, consequentemente, temos apenas a décima parte da metade do produto que devemos ter multiplicando esses números pelo número usual de *sols*; mas a décima parte da metade deste produto, ou seja, a vigésima parte desse produto, é igual à quantidade de *livres* que contém. Assim, multiplicando pela metade do número de *sols* todos os dígitos do multiplicador, exceto o das unidades, e movendo para trás uma posição cada algarismo do produto; tem-se um produto igual ao número de *livres* contidas no produto dos *sols*, o qual se teria multiplicando esses algarismos pelo pelo número de *sols* (tradução nossa).

O produto de 4^{G} por 51 será ma metade do produto de 1^{O} por 51, ou seja, 3^{M} 1^{O} 4^{G}; enquanto 51 vezes 2^{G} será a metade desse último resultado: 1^{M} 4^{O} 6^{G}. A soma de cada um desses resultados nos fornece o produto final; a saber, 1273^{M} 3^{O} 2^{G}.

Seguida a essa parte final sobre a multiplicação de números complexos, há uma observação em que Camus informa que, até o momento, estudamos apenas a multiplicação aritmética, onde o multiplicador é um número abstrato e o produto deverá ser da mesma espécie do multiplicando. No entanto, a partir desse momento seria estudada a *multiplicação geométrica*, em que um dos fatores da multiplicação pode ser uma linha ou superfície, o outro fator deve ser necessariamente uma linha, e o produto obtido é de espécie diferente daquelas dos fatores (Camus, 1749, p.183).

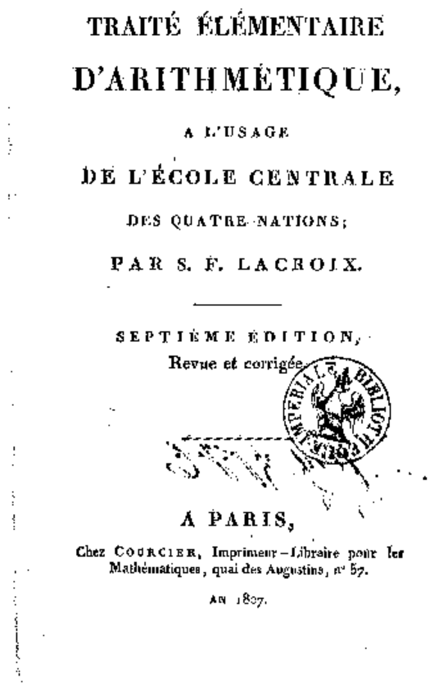
Continuando o estudo da obra de Camus, nos deparamos com uma grande parte de seu quarto livro dedicada ao estudo do que o autor denomina *multiplicação e divisão geométricas*, assunto sobre o qual nos debruçaremos em outro capítulo.

Comparando a extensão da parte destinada ao estudo dos complexos na aritmética de Camus com o que encontramos sobre os números complexos no *Cours de mathématiques* do Bézout (1770), percebemos que Camus exibiu o conteúdo de modo mais detalhado e também mais didático.

4.2 Traité élémentaire d'arithmétique, à l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations, Lacroix (1807)

O francês Silvestre-François Lacroix (1765-1843) foi o principal sucessor de Bézout no que dizia respeito à influência e popularidade de seus livros didáticos. Entre seus principais *textbooks* estão o *Traité élémentaire d'arithmétique* (1797), o *Traité élémentaire de trigonométrie* (1798), o *Elémens de géométrie* (1799), o *Complément des élémens d'algèbre* (1800) e o *Traité élémentaire de calcul differéntiel et du calcul intégral* (1802).

Analisaremos aqui a sétima edição do *Traité élémentaire d'arithmétique, à l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations* a fim de verificar o conteúdo da obra após a Revolução Francesa.


TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE
D'ARITHMÉTIQUE,
A L'USAGE
DE L'ÉCOLE CENTRALE
DES QUATRE-NATIONS;
PAR S. F. LACROIX.

SEPTIÈME ÉDITION,
Revue et corrigée.

A PARIS,
Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.
AN 1807.

Figura 88 – Folha de rosto da sétima edição do *Traité élémentaire d'arithmétique, à l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations*, de Lacroix (1807)

O conteúdo do livro é composto por:

- De la Numération
- De l'Addition
- De la Soustraction
- De la preuve de l'Addition et de la Soustraction
- De la Multiplication
- De la Division
- Des Fractions
- Des Fractions décimales
- Exposition du nouveau système métrique, et applications usuelles de l'Arithmétique
- Des Proportions
- Règle de Société
- Règle d'Alliage
- De la comparaison des diverses mesures de même genre
- Du calcul des nombres complexes
- De l'Addition des nombres complexes
- De la Soustraction des nombres complexes
- De la preuve de l'Addition et de la Soustraction des nombres complexes
- De la Multiplication des nombres complexes

- De la Division des nombres complexes

- De quelques moyens employés pour abréger les calculs arithmétiques

- Tables pour la conversion des mesures anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement

- Caractères usités pour désigner les anciennes mesures

- Sur l'application de l'Arithmétique à la Banque et au Commerce

- Comparaison de quelques mesures étrangères avec les nouvelles mesures française

- Valeur des principales monnais étrangères, d'après M. Bonneville

No primeiro capítulo, sobre a numeração, Lacroix afirma que a grandeza é um atributo presente nos objetos suscetível de ser aumentado ou diminuído, e que se mostra de duas formas: como uma coleção de muitas coisas ou de partes separadas, e é denominada número; ou como um todo, sem distinção de partes, tal como a distância entre dois pontos, e é denominada extensão. Desse modo, a extensão seria uma grandeza contínua, enquanto o número seria uma grandeza discreta ou descontínua. (Lacroix, 1807, p. 1)

Dando encadeamento ao seu texto, Lacroix diz que a grandeza é o objeto de estudo da Matemática, sendo o número o objeto da Aritmética, enquanto as grandezas contínuas (extensões) são estudadas pela Geometria. Os números seriam formados por unidades que dão origem ao que o autor chama de *numeração ou contagem falada*.

Na parte do livro denominada *De la comparaison des diverses mesures de même genre*, Lacroix inicia citando o ensejo dos estudiosos de se chegar a uma uniformidade de medidas, feito que havia sido alcançado pela França. No entanto, a fim de se poder comparar as medidas do sistema métrico decimal com as antigas medidas francesas e com as medidas utilizadas por países estrangeiros, o autor escreve nos próximos parágrafos sobre essas medidas antigas e seu equivalente no sistema métrico decimal.

> L'uniformité des mesures était depuis longtemps l'objet des voeux de tous les savans, lorsqu'on a établi en France le système décimal, que j'ai exposé plus haut (100); mais ce système n'étant pas encore adopté par les nations étrangères, et succédant à un ancien systémé par léquel on a exprimé beaucoup de résultats numériques importans, on a souvent besoin de comparer avec le mesurés décimales, soit les anciénnes mesures françaises; soit les mesures -étrangères. Je vais en conséquence indiquer les moyens de faire cette comparaison[14]. (Lacroix, 1807, p. 108-109).

Desse modo, Lacroix compara as medidas antigas francesas àquelas do sistema métrico decimal, dando ênfase à conversão de medidas de um sistema às correspondentes no outro sistema metrológico.

[14] A uniformidade das medidas foi por muito tempo o objeto dos desejos de todos os homens instruídos, quando o sistema decimal foi estabelecido na França, o qual eu expliquei acima (100); mas como este sistema ainda não foi adotado por nações estrangeiras, e sucedeu um sistema antigo de muitos resultados numéricos igualmente importantes, muitas vezes precisamos comparar com os decimais medidos, as antigas medidas francesas; quer as medidas estrangeiras. Vou, portanto, indicar os meios de fazer tal comparação (tradução nossa).

A seguir, já no capítulo sobre o cálculo com os números complexos, Lacroix define que números que possuem uma quantidade dessas medidas antigas, sendo sua expressão composta por várias partes, são denominados números complexos; enquanto aqueles que possuem apenas uma dessas partes são chamados números incomplexos. Aqui, observamos em Lacroix uma semelhança à definição encontrada no livro de Bézout, destoando do que acabamos de estudar na obra de Camus: enquanto os dois autores (Bézout e Lacroix) subdividem as grandezas em complexos e incomplexos; para Camus, os números em geral são divididos em complexos e incomplexos. Lacroix ainda destaca, em seu primeiro parágrafo sobre o cálculo com os números complexos, que, apesar de ele instruir nesse capítulo a se implementar tais cálculos, seria desejável que essas operações sejam abandonadas devido à introdução do sistema métrico decimal.

Sobre a soma de números complexos, o autor relata que a operação é realizada de forma análoga a de números incomplexos: somando-se partes unidades de mesma espécie. Para isso, os números complexos a serem somados são escritos de modo que cada parte similar da unidade esteja em uma mesma columa. Adicionam-se os valores da menor parte da espécie até a maior, tomando-se o cuidado de, ao somar cada uma das partes, verificar se foi alcançado o valor correspondente à uma unidade da parte seguinte.

Como primeiro exemplo, são somados quatro números complexos: 984 *livres* 12 *sous* 8 *deniers*, 38 *livres* 6 *sous* 9 *deniers*, 1413 *livres* 14 *sous* 10 *deniers*, e 319 *livres* 18 *sous* 2 *deniers*.

984 liv.	12 s	8 d
38	6	9
1413	14	10
319	18	2
2756	12	5

Figura 89 – Adição de números complexos: primeiro exemplo (Lacroix, 1807, p. 116)

Somando-se a quantidade de *deniers*, chega-se a 29 *deniers*. No entanto, como 12 *deniers* equivalem a um *sou*, escreve-se na coluna de *deniers* a quantidade 5; os outros 24 *deniers* são transportados para a próxima coluna como 2 *sous*. Na coluna do meio tem-se então o total de 52 *sous*; mas, como cada grupo de 20 *sous* é igual a um *livre*, escreve-se 12 *sous* nessa coluna, enquanto os outros 40 são convertidos em 2 *livres*. Por fim, adiciona-se a quantidade de *livres*.

Recordando que 12 *points* são 1 *ligne*, 12 *lignes* são 1 *pouce*, 12 *pouces* são 1 *pied*, e, 6 *pieds* são iguais a 1 *toise*; Lacroix exibe seu segundo exemplo de adição de números complexos.

	34 *toises*	5 *pieds*	6 *pouces*	7 *lignes*	8 *points*
	16	3	2	5	6
	127	4	10	11	9
Somme....	179	1	8	0	11.

Figura 90 – Adição de números complexos: segundo exemplo (Lacroix, 1807, p. 117)

Quanto à subtração de números complexos, o autor também afirma que é uma operação similar ao que é feito para números incomplexos; com a diferença que deve-se ter atenção à subordinação das unidades de mesma espécie. À guisa de exemplo é realizada a conta 795 *livres* 3 *sous* 0 *deniers* menos 684 *livres* 17 *sous* 4 *deniers*.

Soit, pour exemple,

	795 *liv.*	3 *s*	0 *d*
	684	17	4
Différence....	110	5	8

Figura 91 – Subtração de números complexos (Lacroix, 1807, p. 118)

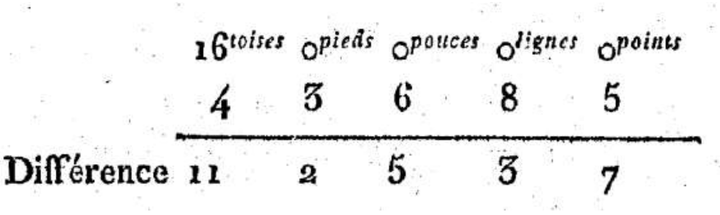
Para realizar esse cálculo, toma-se 1 *sou* do minuendo (da coluna do meio) e se escreve 12 *deniers* na última coluna do minuendo. Logo, a conta mais a direita será 12 *deniers* menos 4 *deniers*, o que resulta em 8 *deniers*. Igualmente, como a quantidade de *sous* do minuendo (2 *sous*) é menor do que aquela que está no subtraendo (17 *sous*), toma-se 1 *livre* do minuendo (da coluna mais à esquerda) e converte-se esse valor em 20 *sous*. Dessa forma, na coluna do meio a conta será 22 *sous* menos 17 *sous*. Por fim, realiza-se o cálculo de 794 *livres* menos 684 *livres*.

No próximo exemplo, é realizada a subtração de 19 *livres* 0 *marc* 4 *onces* 5 *gros* 37 *grains* menos 4 *livres* 1 *marc* 3 *onces* 6 *gros* 49 *grains*, com método análogo ao anterior.

	19 *livres*	0 *marcs*	4 *onces*	5 *gros*	37 *grains*
	4	1	3	6	49
Différence..	14	1	0	6	60

Figura 92 – Subtração de 19 *livres* 0 *marc* 4 *onces* 5 *gros* 37 *grains* e 4 *livres* 1 *marc* 3 *onces* 6 *gros* 49 *grains* (Lacroix, 1807, p. 118)

Ainda é acrescentado um terceiro exemplo de subtração envolvendo algum número complexo. Segundo o autor, isso é feito com o intuito tanto de se exercitar as subdivisões da toesa, quanto para se mostrar como proceder quando no minuendo está faltando algumas das partes existentes no subtraendo. (Lacroix, 1807, p. 125)

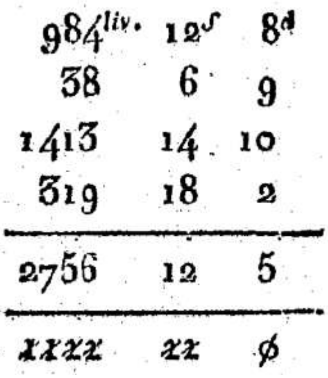


	16 toises	0 pieds	0 pouces	0 lignes	0 points
	4	3	6	8	5
Différence	11	2	5	3	7

Figura 93 – Subtração de 16 *toises* e 4 *toises* 3 *pieds* 6 *pouces* 8 *lignes* 5 *points* (Lacroix, 1807, p. 119)

Para resolver o problema de o minuendo possuir uma quantidade menor de pés, polegadas, linhas e pontos, Lacroix sugere converter uma toesa do minuendo em 5 pés 11 polegadas 11 linhas 12 pontos. Desse modo, pode se dar prosseguimento à subtração.

Na próxima seção da obra, é incluída o que o autor denomina prova real da adição e da subtração de números complexos. Lacroix fornece apenas a prova real do primeiro exemplo de adição de números complexos.



984 liv.	12 s	8 d
38	6	9
1413	14	10
319	18	2
2756	12	5
xxxx	xx	ø

Figura 94 – Prova real do primeiro exemplo de adição de números complexos (Lacroix, 1807, p. 120)

A prova é feita de modo parecido ao que foi ensinado anteriormente no livro sobre adição e subtração de números abstratos. Iniciando-se na coluna correspondente à quantidade de livres, toma-se primeiro a soma correspondente às unidades de milhares, que no caso é igual a 1. Fazendo a subtração 2 (que está na unidade de milhar do resultado) menos 1 (soma das unidades de milhar das parcelas), obtemos 1. Depois, a somas das unidades de centenas das parcelas resulta em 16. Então, risca-se o 1 que estava na unidade de milhar do resultado da prova real e se faz 7 (unidade de centena da soma) menos 6, obtendo 1. Em seguida, somam-se os números das dezenas das parcelas, o que resulta em 13. Desse modo, risca-se o 1 que estava no lugar das centenas do resultado da prova real e se faz o cálculo 5 menos 3. Adicionando todas os valores que estão na casa das unidades das libras, chega-se a 24. Logo, risca-se o 2 que está na casa das dezenas e se faz a conta 6 menos 4, o que é igual a 2 libras. Mas 2 libras equivalem a 40 soldos, e somando-se esse 4 que está na dezena com o 1 que já se encontrava no lugar das dezenas na soma, temos 5 dezenas. Realizando a conta 5 menos 3 (soma das parcelas das dezenas de soldos), obtemos 2 dezenas. Adicionando as quantidades presentes nas unidades de soldos, obtemos 20. Risca-se então o 2 que está na casa das dezenas de soldos, e se faz a conta 2 menos 0, o que resulta em 2 soldos no resultado da prova real. Mas esses 2 soldos são equivalentes a 24 dinheiros, que então são somados aos 5 dinheiros da soma, chegando-se a 29 dinheiros. Como a soma das parcelas de dinheiros é também igual a 29 dinheiros, conclui-se a prova real. (Lacroix, 1807, p. 120-121)

O capítulo sobre a multiplicação de números complexos é iniciado com o autor afirmando que, para aquele que compreendeu a teoria das frações, a multiplicação de números complexos não apresenta maiores dificuldades, visto que multiplicador e multiplicando podem ser escritos como números incomplexos fracionários. Desse modo, o autor explica como escrever, por exemplo, o número complexo 15 *livres* 12 *sous* 4 *deniers* como o número fracionário $\frac{3748}{240}$ *livres*.

> Si l'on avait, par exemple, 15 *liv.* 12 *sous* 4 *den.* on réduirait d'abord les livres en *sous*, en les multipliant par 20, et on aurait 3oo à joindre aux 12 qui sont écrits, ce qui changerait le nombre proposé en 312 *sous* 4 d.; on multiplierait encore, les *sous* par 12 pour les convertir en *deniers*: on obtiendrait 3744, et en y ajoutant les 4 *den.* écrits, il en résulterait 3748 *den.* Cela fait, on observerait que la *livre* contenant 20 *sous*, le *sou* 12 *deniers*, la *livre* contient 20 fois 12 ou 240 *deniers*; qu'ainsi 1 *denier* est $\frac{1}{240}$ de la *livre*, d'où il résulte que 3748 *den.* font $\frac{3748}{240}$ de la *livre*[15] (Lacroix, 1807, p. 121).

Desse modo, se quiséssemos multiplicar os números complexos 15 *livres* 12 *sous* 4 *deniers* e 7 *toises* 4 *pieds*, recorreríamos à conversão desses números complexos em números fracionários, resultando no cálculo de $\frac{3748}{240}$ *livres* por $\frac{46}{6}$ *toises*, e, observando que a unidade do produto é da mesma espécie que a unidade do multiplicando, o resultado final seria dado em livres e suas subdivisões. Logo, o resultado dessa conta seria $\frac{172408}{1440}$ *livres*, o que é igual a 119 *liv.* 14 s. $6\frac{2}{3}$. (Lacroix, 1807, p. 121)

15 Se, por exemplo, tivéssemos 15 libras 12 soldos 4 dinheiros, primeiro reduziríamos as libras em soldos, multiplicando-as por 20, e teríamos 3oo para juntar aos 12 que estão escritos, o que mudaria o número proposto em 312 soldos 4 d.; nós multiplicaríamos novamente, os soldos por 12 para convertê-los em dinheiros: obteríamos 3744 e adicionando os 4 d. escritos, resultaria em 3748 d. Feito isto, pode-se observar que a libra contendo 20 soldos, o soldo 12 dinheiros, a libra contém 20 vezes 12 ou 240 dinheiros; que assim 1 dinheiro é $\frac{1}{240}$ da libra, de onde se segue que 3748 dinheiros são $\frac{3748}{240}$ da libra.

172408	1440
2840	$119^{liv}\ 14^{s}\ 6^{d}\frac{2}{3}$
14008	
1048	
20	
20960^{s}	
6560	
800	
12	
9600	
960	

Figura 95 – Multiplicação de números complexos (Lacroix, 1807, p. 122)

O cálculo que Lacroix propõe acima não aparece acompanhado de nenhuma contextualização que o justifique, e o autor afirma que o fundamento para o fato de o produto possuir a mesma unidade do multiplicando está no parágrafo 102 da obra. Nesse parágrafo, Lacroix explica que a função do multiplicador seria a de indicar quantas vezes o multiplicando deve ser repetido. Desse modo, ele deverá ser visto como um número abstrato.

O autor relata que, apesar de o método de converter os números complexos em fracionários antes de multiplicá-los ser mais geral, ele possui uma certa admiração pelos indivíduos que faziam esses cálculos de multiplicação relacionados com os números complexos do modo tradicional (como eles eram realizados na prática). Por isso, ele os apresenta a seguir na forma de exemplos.

Je suivrai la marche que les premiers arithméticiens ont tenue, en commençant par des exemples. Soit

la multiplication de	$25^{liv.}$	12^{s}
par	16	
	150	
	25	
produit pour 10 sous	8	
pour 2 sous	1	12
Produit total...	409	12.

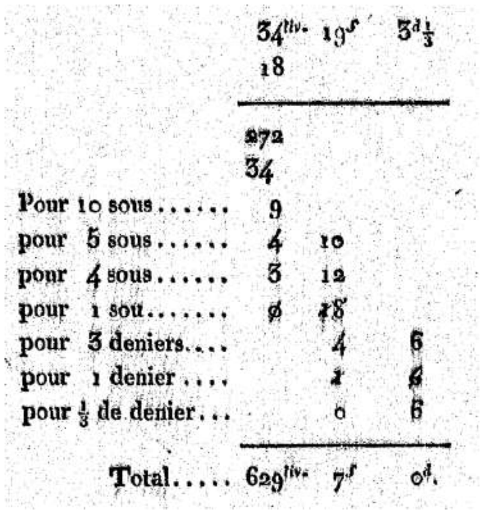
Figura 96 – Multiplicação de número complexo por número abstrato (Lacroix, 1807, p. 123)

No exemplo acima[16], Lacroix destaca que precisamos repetir o multiplicando 16 vezes, e realiza o produto de 25 *liv*. 12 s. por 16 da seguinte forma: primeiro, as 25 libras são multiplicadas por 16 do modo como se realiza a multiplicação de números abstratos. A fim de multiplicar os 12

[16] No texto da imagem, Lacroix afirma: Eu vou seguir a marcha como os primeiros aritméticos fizeram, começando com exemplos (tradução nossa).

s. por 16, este é decomposto em 10 s. (metade de uma libra) e 2 s. Logo, o produto de 12 s. por 16 será igual à metade de 16, e o produto de 2 s. por 16 será a quinta parte do resultado anterior.

O autor explica que, ao decompor um número em partes que estão exatamente contidas na unidade principal do multiplicando, estamos dividindo esse número no que é denominado *partes alíquotas* da unidade principal. Então, mais dois exemplos são apresentados de modo a se verificar como ocorre o produto utilizando-se esse método.



	$34^{liv.}$	19^{s}	$3^{d}\frac{1}{3}$
	18		
	272		
	34		
Pour 10 sous......	9		
pour 5 sous......	4	10	
pour 4 sous......	3	12	
pour 1 sou.......	$\cancel{0}$	$\cancel{18}$	
pour 3 deniers....		4	6
pour 1 denier....		$\cancel{1}$	$\cancel{6}$
pour $\frac{1}{3}$ de denier...		0	6
Total.....	$629^{liv.}$	7^{s}	0^{d}.

Figura 97 – Multiplicação de número complexo por número abstrato utilizando o método das partes alíquotas (Lacroix, 1807, p. 124)

Primeiro é calculado o produto de 34 *livres por* 18. Em seguida, Lacroix decompõe as unidades menores do multiplicando em suas partes alíquotas, e utiliza um modo diferente de apontar qual parte alíquota do multiplicando está sendo utilizada como fator, através da expressão *pour*[17]. Os 19^{s} são decompostos em 10, 5 e 4 *sous*. Como 10^{s} é metade de uma libra, o seu produto por 18 será a metade desse multiplicador: 9^{liv}. Como 5^{s} é metade de 10^{s}, o produto desse fator por 18 será a metade do resultado anterior. Analogamente, 4^{s} é a quinta parte da libra, o que fornece como resultado a quinta parte de 18. É calculado, ainda, a parcela auxiliar de 18 vezes 1^{s}.

Fazendo os cálculos de 18 vezes $3^{d}\frac{1}{3}$, Lacroix decompões essa parte do multiplicando em 3^{d} e $\frac{1}{3}^{d}$. Curiosamente, ele é o primeiro autor francês que observamos trabalhando com frações complexas nos fatores da multiplicação. No produto 18 vezes 3^{d}, toma-se a quarta parte do resultado obtido na linha anterior. Para auxiliar no cálculo seguinte, recorre-se à parcela auxiliar 1^{d}, cujo resultado é a terça parte do anterior. Desse modo, o produto 18 vezes $\frac{1}{3}^{d}$ será igual à terça parte do último resultado obtido.

Posteriormente, Lacroix esclarece que, no caso em que o multiplicador é um número complexo, deve-se também decompô-lo em partes alíquotas da unidade principal.

[17] Para (tradução nossa).

	$793^{\#}$			
	9^{marcs}	3^{onces}	5^{gros}	$7^{grains}\ \frac{1}{2}$
	$7137^{\#}$	s	d	
Pour 2 onces...	198	5		
Pour 1	99	2	6	
Pour 4 gros....	49	11	3	
Pour 1........	12	7	$9\ \frac{3}{4}$	
Pour 12 grains..	2	1	$3\ \frac{5}{8}$	
Pour 6	1	0	$7\ \frac{13}{16}$	
Pour 1	0	3	$5\ \frac{29}{96}$	
Pour $\frac{1}{2}$	0	1	$8\ \frac{125}{192}$	
	7497	12	$4\ \frac{99}{192}$.	

Figura 98 – Multiplicação de número incomplexo por número complexo (Lacroix, 1807, p. 127)

Para esse caso, vale recordar que as unidades de peso marco, onça, oitava e grão são tais que: um marco equivale a 8 onças, 1 onça é igual a 8 oitavas, e cada oitava é dividida em 72 grãos.

Desse modo, no exemplo acima, após realizar o produto de 793 # por 9 *marcs* da forma usual (como é feito entre números abstratos), observa-se que 2 *onces* são $\frac{1}{4}$ do *marc*, logo o multiplicando é dividido por 4; enquanto na multiplicação por 1 *once* o resultado anterior é dividido pela metade. Como 4 *gros* é metade de 1 *once*, divide-se o resultado anterior por 2; e, visto que 1 *gros* é a quarta parte de 4 *gros*, calcula-se a quarta parte do resultado anterior. Como 12 *grains* é a sexta parte de 1 *gros*, usa-se essa informação para auxiliar os próximos cálculos, que serão igualmente feitos através de subdivisões dos resultados anteriores.

Finalizando essa parte sobre a multiplicação de números complexos, são apresentados dois exemplos em que os dois fatores da multiplicação são complexos; e, para cada um deles, Lacroix utiliza o método das partes alíquotas. O segundo exemplo possui o seguinte enunciado: "Il s'agit de trouver ce qu'on doit payer pour 15 aunes et $\frac{1}{16}$ d'une étoffe, le prix de l'aune étant de 42^{l} 17^{s} 11^{d}"[18]. O *aune* é uma medida antiga de comprimento francesa utilizada para tecidos, que equivale a aproximadamente 1,19 metros.

[18] Questiona-se o que você tem que pagar por 15 *aunes* $\frac{3}{4}$ e 1/16 de um tecido, sendo o preço do *aune* de 42^{l} 17^{s} 11^{d} (tradução nossa).

	$42^{liv.}$	17^{s}	11^{d}	
	15	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$	
	210			
	42			
pour 10 sous.....	7	10		
5........	3	15		
2........	1	10		
pour 6 deniers...		7	6	
3........		3	9	
2........		2	6	
pour $\frac{1}{2}$ aune.....	21	8	11,	5
$\frac{1}{4}$........	10	14	5,	7
$\frac{1}{16}$........	2	13	7,	4
Produit total......	678	5	9,	6

Figura 99 – Multiplicação de números complexos (Lacroix, 1807, p. 130)

Nesse exemplo, para realizar a multiplicação de 17^{s} por 15, divide-se essa parte do multiplicando nas partes alíquotas 10, 5 e 2 *sous*. O primeiro produto será a metade de 15 libras, enquanto o segundo será igual à metade do resultado anterior e, o último, a quinta parte do resultado obtido para 10^{s}. Já os 11^{d} são decompostos em 6, 3 e 2 *deniers*. Para realizar o produto para 6^{d}, toma-se a quarta parte do resultado da linha anterior. Para realizar o produto de 15 aunes por 3^{d} e 2^{d}, respectivamente, basta calcular a metade e a terça parte desse último.

Falta apenas o produto da parte fracionária de aunes por todo o multiplicando. Ele será decomposto nas frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{16}$. Para a primeira fração, calcula-se a metade de todo o multiplicando; para a segunda, a metade desse último resultado; e, para a última fração, a quarta parte do resultado da linha anterior.

Observe, no exemplo acima, que pelo enunciado do problema o multiplicador é expresso em *aunes*, enquanto o multiplicando está em *libras* por *aune*. Desse modo, realizando a multiplicação da forma como seria feita atualmente com grandezas da física, por exemplo, teríamos um resultado dado em libras.

Como regra geral para a multiplicação de números complexos, Lacroix acrescenta o parágrafo abaixo, que estabelece um roteiro a ser seguido para se calcular esses produtos: 1^{o}: multiplicar as unidades principais do multiplicando pelas unidades principais do multiplicador; 2^{o}: decompor as outras unidades do multiplicando em partes alíquotas; 3^{o}: Multiplicar essas partes alíquotas do multiplicando apenas pela unidade principal do multiplicador; 4^{o}: decompor as outras unidades do multiplicador em partes alíquotas; 5^{o}: avaliar o produto dessas partes por todo o multiplicando; e, por último, 6^{o}: somar esses produtos parciais.

Tout ce qu'on vient de voir sur la multiplication des nombres complexes, étant

> réduit en règle, peut s'énoncer ainsi: Multiplier d'abord les unités principales du multiplicande par celles du multiplicateur; décomposer les subdivisions du multiplicande en parties aliquotes de son unité principale, ou des parties aliquotes qui lès précèdent; évaluer ces fractions sur les unités principales du multiplicateur seulement; décomposer ensuite les subdivisions du multiplicateur en parties aliquotes de son unité principale, ou des parties aliquotes qui les précèdent, et évaluer ces fractions sur tout le multiplicande. Lorsque la fraction à évaluer sera trop petite à l'égard de celle à laquelle on la rapporte, on en facilitera le calcul en prenant une partie aliquoie intermédiaire, pour former un produit auxiliaire duquel on deduira la partie aliquote cherchee, et dont on barrera ensuite les chiffres pour ne pas les comprendre dans l'addition des produits partiels qui doivent composer le produit total[19] (Lacroix, 1807, p. 131).

Sobre a divisão dos números complexos, Lacroix inicia afirmando que é importante prestar atenção em qual será a unidade do quociente, uma vez que disso dependerá a conversão do que restar nas subdivisões dessas unidades. O autor afirma que, em geral, quando divisor e dividendo são de unidades diferentes, o quociente é da mesma espécie do dividendo; e, quando dividendo e divisor são da mesma espécie, o quociente será de uma espécie diferente. (Lacroix, 1807, p. 131-132)

No primeiro exemplo proposto sobre a divisão, questiona-se: "*le prix d'une toise d'ouvrage étant 36 liv. 15 sous 6 deniers, on demande combien on fera du même ouvrage pour 1689 l. 17 sous*[20]". (Lacroix, 1807, p. 132)

Para resolver o problema acima, o autor propõe que façamos a conversão dos números complexos 36 *liv.* 15 *sous* 6 *deniers* e 1689 *liv.* 17 *sous* nos números incomplexos 405564 *deniers* e 8826 *deniers* antes de prosseguir com os cálculos. Lacroix ainda afirma que, nesse caso, o dividendo deverá ser tratado como uma quantidade de toesas, enquanto o divisor deverá ser pensado como um número abstrato.

[19] Tudo o que acaba de ser visto sobre a multiplicação de números complexos, sendo reduzida em uma regra, pode ser dito assim: Multiplique primeiro as unidades principais do multiplicando pelas do multiplicador; decomponha as subdivisões do multiplicando em partes alíquotas de sua unidade principal, ou em partes alíquotas dos resultados anteriores; avalie essas frações apenas nas unidades principais do multiplicador; então decomponha as subdivisões do multiplicador em partes alíquotas de sua unidade principal, ou em partes alíquotas dos resultados precedentes, e avalie essas frações ao longo do multiplicando. Quando a fração a ser avaliada é muito pequena em relação àquela unidade ao qual está relacionada, será mais fácil calcular tomando uma parte alíquota intermediária, para formar um produto auxiliar do qual se deduzirá a alíquota desejada, e os resultados dessas partes alíquotas intermediárias serão riscados para que não sejam incluídos na adição dos produtos parciais que devem compor o produto total (tradução nossa).

[20] O preço de uma toesa de um material é igual a 36 libras 15 soldos 6 dinheiros. Pergunta-se quanto do mesmo material poderá ser obtido com 1689 libras 17 soldos (tradução nossa).

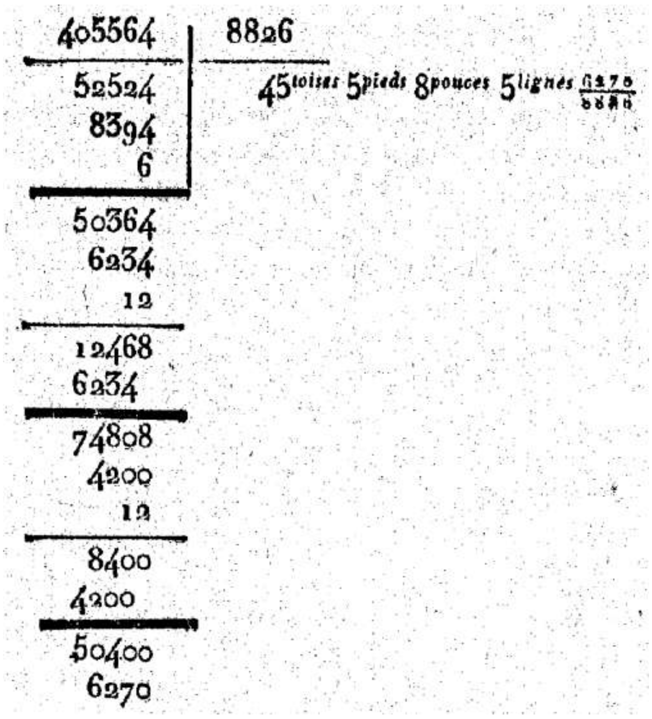


Figura 100 – Divisão com números complexos (Lacroix, 1807, p. 133)

Depois de se obter a unidade principal do quociente, em toesas, multiplica-se o resto por 6, a fim de se converter as 8394 toesas do resto a pés e continuar os cálculos. Da mesma forma, o resto obtido nesse momento deverá ser multiplicado por 12 para que seja convertido em polegadas, assim como o próximo resto, para se obter seu valor em linhas.

É interessante notar, no exemplo acima, que Lacroix afirma que a divisão de *livres* (e seus derivados) por *livres* (e seus derivados) resulta em toesas e suas subunidades. O que temos, de fato, nessa divisão, é um dividendo dado em libras e um divisor expresso em libras/toesa. Repara-se assim que, apesar da afirmação de Lacroix não ser verídica, essa divisão tem um resultado da mesma espécie pretendida pelo autor: em toesas e suas subdivisões.

Quando o quociente é um número complexo, enquanto o divisor é incomplexo, Lacroix afirma que se pode realizar a divisão tratando o divisor como abstrato; e o resultado será da mesma espécie do quociente. Desse modo, o cálculo correspondente ao próximo exemplo - "*27 onces d'un métal ont coûté 169 liv. 11 sous 4 deniers, on demande à combien revient l'once*"[21]- será:

[21] 27 onças de um metal custam 169 libras 11 soldos 4 dinheiros. Perguntamos: quanto custa uma onça? (tradução nossa)

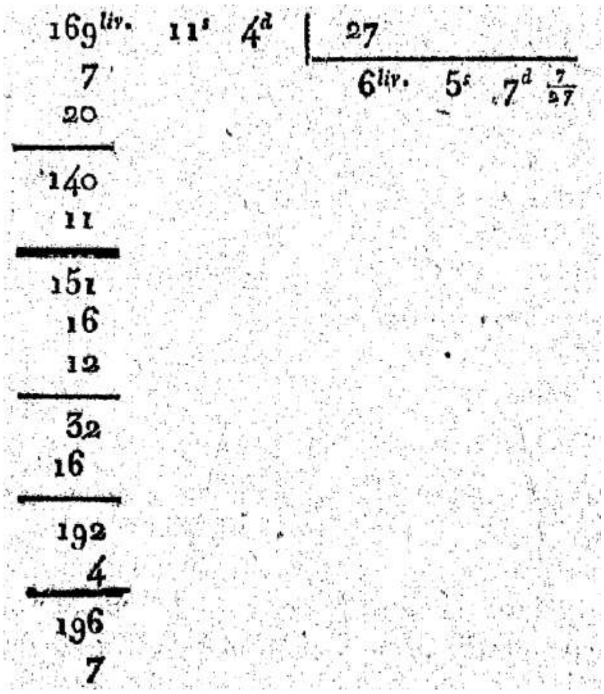


Figura 101 – Divisão de número complexo por incomplexo (Lacroix, 1807, p. 134)

Inicialmente, divide-se 169 *livres* por 27, obtendo-se 6 *livres* no quociente e 7 *livres* no resto. Convertendo-se os 7 *livres* do resto em *sous*, chega-se a 140 *sous*; que, somados a 11 *sous* e divididos por 27, resultam em 5 *sous*, deixando 16 *sous* de resto. Os 16 *sous* são multiplicados por 12 a fim de convertê-los a 192 *deniers*. Mas os 192 *deniers*, somados aos 4 *deniers* do dividendo e divididos por 27, são iguais a 7 *deniers*, deixando 7 *deniers* de resto.

Observe que, nesse exemplo, a unidade principal do quociente na verdade é *livres* por *once*, enquanto a unidade do divisor é *once*. Novamente, a unidade do quociente estará, então, de acordo com a conclusão de Lacroix.

Finalmente, para o caso em que dividendo e divisor são números complexos de espécies diferentes, a orientação dada por Lacroix é a de converter o divisor em um número fracionário, multiplicar o dividendo pelo denominador dessa fração, e só então realizar a divisão.

Como exemplo, pergunta-se: *"36 toises 5 pieds 6 pouces 8 lignes d'ouvrage ayant été payées 1374 liv. 12 sous 4 deniers, en déduire le prix de la toise?"*[22]. Para realizar a divisão dos números complexos 1374 *liv.* 12 *sous* 4 *deniers* e 36 toises 5 pieds 6 pouces 8 lignes, inicialmente o divisor é convertido no número fracionário $\frac{31904}{864}$ toesas. Então, multiplica-se o dividendo pelo 864 que está no denominador do divisor. Dessa forma, a divisão que será feita é de 1187668 *liv.* 16 *sous* por 31904 toesas, e se prossegue como no exemplo anterior.

Sobre esse caso da divisão de números complexos de espécies diferentes, o autor elabora a regra geral:

Pour diviser un nombre complexe par un autre nombre complexe, il faut con-

[22] 36 toises 5 pés 6 polegadas 8 linhas de trabalho foram pagos com 1374 *liv.* 12 *sous* 4 *deniers*. Quanto custa uma toesa desse trabalho? (Tradução nossa).

> vertir le diviseur en parties de la plus petite valeur, et ntultiplier le dividende par le nombre de parties de cette valeur contenues dans l'unité principale du diviseur[23]. (Lacroix, 1807, p. 135)

Curiosamente, Lacroix afirma que a prática rotineira dessas operações sugere processos especiais que simplificam o cálculo, mas não poderá indicá-los no livro. No entanto, fornece um pequeno exemplo de como esses cálculos complicados podem ser realizados na prática: na conversão de uma quantidade de *sous* em *livres*, o autor afirma que, como teremos que dividir a quantidade inicial de *sous* por 20, divide-se esse valor primeiramente por 10, e então toma-se a metade do resultado obtido. Caso tenhamos algum resto, ele representará um décimo de sou. Por exemplo, se queremos obter o valor de 3579 *sous* em *livres*, iremos dividi-lo primeiro por 10, obtendo 357,9. Então, dividindo esse último resultado por 2, chegamos a 178 *livres* mais (0,5 + 0,45) *livre*, que é igual a *livres* 19 *sous*.

Concluindo suas elucidações sobre os números complexos, o autor faz uma comparação entre os sistemas metrológicos antigos e o sistema métrico decimal, enaltecendo esse último pela praticidade de seus cálculos; e reflete que, mesmo aquele que é hábil no cálculo com os complexos, não deixaria de sentir as vantagens do sistema decimal.

> La comparaison des procédés que je viens de présenter successivement, est surement la meilleure preuve qu'on puisse donner de l'avantage que procureront les nouvelles mesures lorsqu'elles seront adoptées; et quelqu'habitude qu'on ait du calcul des nombres complexes, on ne pourrait s'empêcher de sentir toute la commodité du calcul décimal, si l'on ne continuait pas à se servir des anciennes mesures, ce qui exige, pour chaque résultat, la conversion de ces mesures dans les nouvelles, opération toujours longue, absolument étrangère au système métrique, et qu'on s'obstine malgré cela à regarder comme inséparable de l'usage de ce système[24]. (Lacroix, 1807, p. 136)

Observamos então, nesse capítulo, que o Lacroix, apesar de perceber que os cálculos com números complexos apresentavam muitas dificuldades para quem o realizava e poucas vantagens em relação aos cálculos do sistema métrico decimal, continua a incluir os números complexos em sua obra de 1807, justificando essa inclusão como uma necessidade para o comércio, principalmente com países estrangeiros.

---

[23] Para dividir um número complexo por outro número complexo, divida o divisor em partes do menor valor e multiplique o dividendo pelo número de partes desse valor contido na unidade principal do divisor (tradução nossa).

[24] A comparação dos processos que apresentei sucessivamente é certamente a melhor evidência de que o benefício das novas medidas será percebido quando elas forem adotadas; mesmo tendo de algum modo o cálculo de números complexos, não podemos deixar de admitir a conveniência do cálculo decimal. Quando alguém deixa de usar as medidas antigas, isso requer, para cada resultado, a conversão dessas medidas em novas, a operação sempre longa, absolutamente alheia ao sistema métrico, e que, apesar disso, persistimos em considerá-la inseparável do uso desse sistema (tradução nossa).

4.3 Arithmétique de Bezout, a l'Usage de la Marine et de l'Artillerie, par F. Peyrard, huitième édition (1814); e Les Principes Fondamentaux de l'Arithmétique, de Peyrard (1813)

Iremos estudar essa edição do *Cours de Arithmétique* feita por François Peyrard em 1814 a fim de observar as possíveis alterações feitas na obra após a Revolução Francesa e a implantação do sistema métrico na França[25].

François Peyrard (1759-1822) foi filósofo, professor, bibliotecário da École Politechnique (de 1795 a 1804) e principal tradutor de Euclides e Arquimedes. Sua versão do Curso de Aritmética de Bézout obteve bastante sucesso, com reimpressões até o ano de 1833.

Já no prefácio do livro, é dito que se assume em toda a aritmética do livro, sem demonstração, que a multiplicação é comutativa. Por um lado, é a primeira vez que nos deparamos com um autor que retoma a postura de Arnauld sobre a comutatividade nessas operações, isto é, assumindo a comutatividade da multiplicação. No entanto, perguntamo-nos o que poderia ter induzido Peyrard a postular essa comutatividade. Uma hipótese é a de que possa ter havido alguma comunicação entre esse autor e Ampère, que, conforme vimos na introdução do presente trabalho, estava atento à problemática desse tema na Aritmética de Bézout.

> Dans toutes nos arithmétiques, on suppose sans démonstration, ou bien l'on démontre d'une manière défectueuse que le produit de tant de facteurs que l'on voudra est toujours le même, quel que soit le facteur que l'on prène pour multiplicande, quel que soit celui des facteurs restants que l'on prène pour premier multiplicateur, quel que soit celui des autres facteurs restants que l'on prène pour second multiplicateur, etc...[26] (Bézout, 1814)

[25] Em 1795 foi instituído o sistema métrico na França.

[26] Em toda a nossa aritmética, é assumido sem demonstração, ou é mostrado de maneira defeituosa, que o produto de tantos fatores que queremos é sempre o mesmo, qualquer que seja o fator que tomamos para o multiplicando, independentemente dos demais fatores que são considerados como o primeiro multiplicador, independentemente dos outros fatores restante que tomamos para o segundo multiplicador, etc... (tradução nossa)

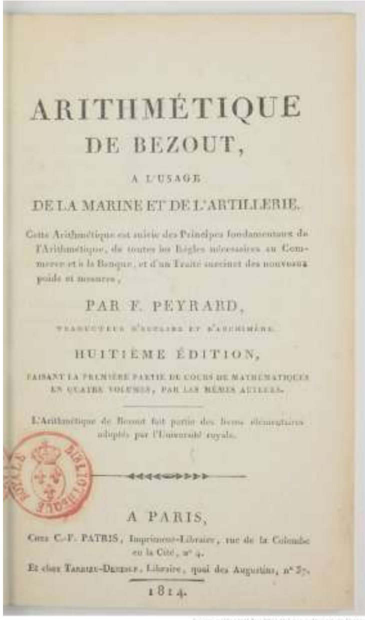

ARITHMÉTIQUE
DE BEZOUT,
A L'USAGE
DE LA MARINE ET DE L'ARTILLERIE.
PAR F. PEYRARD,
HUITIÈME ÉDITION,
A PARIS,
1814.

Figura 102 – Folha de rosto da edição da Aritmética de Bézout de 1814 (Bézout, 1814)

O índice do livro é organizado da seguinte forma, análoga à versão de 1770:

- De la nature & les différentes espèces de nombres
- Des la numération et des décimales
- Addition
- Soustraction
- Multiplication
- Division
- Fractions
- Nombres complexes
- De la formation des carrés, des cubes, et de l'extraction de leurs racines
- Raisons et proportions
- Progressions mathématiques
- Progressions géométriques
- Logarithmes

Na página 4, são apresentadas as definições de número complexo e de número incomplexo de modo exatamente igual à versão da Aritmética de Bézout de 1770.

Antes de iniciar a explanação acerca das operações com números complexos, o autor fornece uma tabela em que aparecem as unidades que são mais frequentemente utilizadas quando se trabalha com números complexos. Nessa tabela, são contempladas as unidades monetárias (*livre*, *sous* e *deniers*), unidades de peso (*livre*, *marc*, *once*, *gros*, *denier* ou *scrupule*, *grain*), unidades de comprimento (*toise*, *pied*, *poud*, *ligne* e *point*) e unidades de tempo (*jour*, *heure*, *minute*, *seconde* e *tierce*). No entanto, o autor adia a apresentação das unidades de superfície e de capacidade para a parte de Geometria:

> Nous donnerons en géométrie les divisions des mesures relatives aux superficies et aux capacités des corps. [27] (Bézout, 1814, p. 52)

São, ainda, mencionadas medidas utilizadas na Inglaterra para pedras preciosas e para materiais pesados.

No que diz respeito às operações com números complexos, notamos pouca mudança em relação ao *Cours de Arithmétique* de 1770. Na seção sobre a adição, o texto encontra-se exatamente o mesmo, a não ser pela exclusão de um exemplo desse tipo de soma; enquanto as partes sobre subtração e multiplicação de números complexos permanecem inalteradas. Sobre a divisão, notamos apenas a exclusão de um dos exemplos.

Desse modo, percebemos que, apesar de Peyrard incluir em seu prefácio a afirmação de que a multiplicação é comutativa (e de que esse fato é válido para toda a aritmética), o texto sobre a multiplicação de números complexos continua o mesmo, incluindo até mesmo o parágrafo de Bézout em que é dito que o produto de dois números complexos depende da ordem em que os fatores são tomados (escrita após dois exemplos que "comprovariam"essa fala).

> Nous avons donné cet exemple, principalement pour confirmer ce que nous avons dit (45), qu'il importoit de distinguer le multiplicande, du multiplicateur, lorsqu'ils sont tous les deux concrets: en effet, dans l'exemple précédent, ainsi que dans celui-ci, les facteurs du produit sont également 17 toises & 34 # 10^s 2^d; cepedant les deux produits sont différents. [28] (Bézout, 1814, p. 61)

Terminada versão de Peyrard para o livro de Bézout, encontra-se em anexo uma versão própria de Peyrard para a Aritmética, denominada *Les Principes Fondamentaux de l'Arithmétique*, cujo conteúdo - muito parecido com o que já foi apresentado na Aritmética de Bézout - é disposto do seguinte modo:

[27] Daremos em geometria as divisões das medidas relativas às áreas e às capacidades dos corpos (tradução nossa).

[28] Damos esse exemplo principalmente para confirmar o que dissemos (45), que é importante distinguir o multiplicando e o multiplicador, quando ambos são concretos: de fato, no exemplo anterior, bem como neste, os fatores do produto são 17 toesas e 34# 10^s 2^d; mas os dois produtos são diferentes (tradução nossa).

LES
PRINCIPES FONDAMENTAUX
DE L'ARITHMÉTIQUE,
SUIVIS DES RÈGLES NÉCESSAIRES AU COMMERCE
ET A LA BANQUE;
PAR F. PEYRARD,
TRADUCTEUR D'EUCLIDE ET D'ARCHIMÈDE.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE DE C.-F. PATRIS,
RUE DE LA COLOMBE, N° 4, DANS LA CITÉ.
1813.

Figura 103 – Folha de rosto da Aritmética de Peyrard (Peyrard, 1813)

- Définitions
- Axiômes
- De la numération
- Nombres décimaux
- Addition des nombres entiers et décimaux
- Soustraction des nombres entiers et décimaux
- Multiplication des nombres entiers et décimaux
- Division des nombres entiers
- Fractions

- Le produit de tant de nombres a, B, C, etc. qu'on voudra, est toujours le même, quel que soit celui des facteurs que l'on prène pour multiplicande; quel que soit celui des facteurs restants que l'on prène pour premier multiplicateur; quel que soit celui des facteurs restants que l'on prène pour second multiplicateur, etc.[29]

- Formation des puissances et extraction de leurs racines

- Si deux nombres sont premiers entre eux, la puissance *n* de l'un d'eux sera un nombre premier avec l'autre nombre

- Il est impossible d'assigner exactement la racine *n* du nombre entier qui n'est pas une puissance *n* des nombres naturels 1, 2, 3 etc.

- Raisons et proportions arithmétiques

- Raisons et proportions géométriques

[29] Com o nome dessa seção do livro, muito parecido com um trecho de uma citação que destacamos do prefácio da versão da Aritmética de Bézout, parece-nos que o autor realmente tem a intenção de chamar a atenção para a comutatividade da multiplicação.

- Progression arithmétique
- Progression géométrique
- Logarithmes
- Règles de l'intérêt simple
- Règles de l'intérêt composé
- Des annuités
- Règle conjointe
- Règle de société
- Nouvelles mesures

No livro didático de Peyrard, número complexo é definido como "celui qui est composé d'unités et de parties d'unités[30]". Peyrard cita exemplos de números complexos, porém não menciona tais números ao longo do restante de seu livro. Portanto, apesar de incluir definição e exemplos com os números complexos, Peyrard não realiza operações com esses números, evitando falar sobre a questão da comutatividade na multiplicação; talvez por estar consciente de sua problemática.

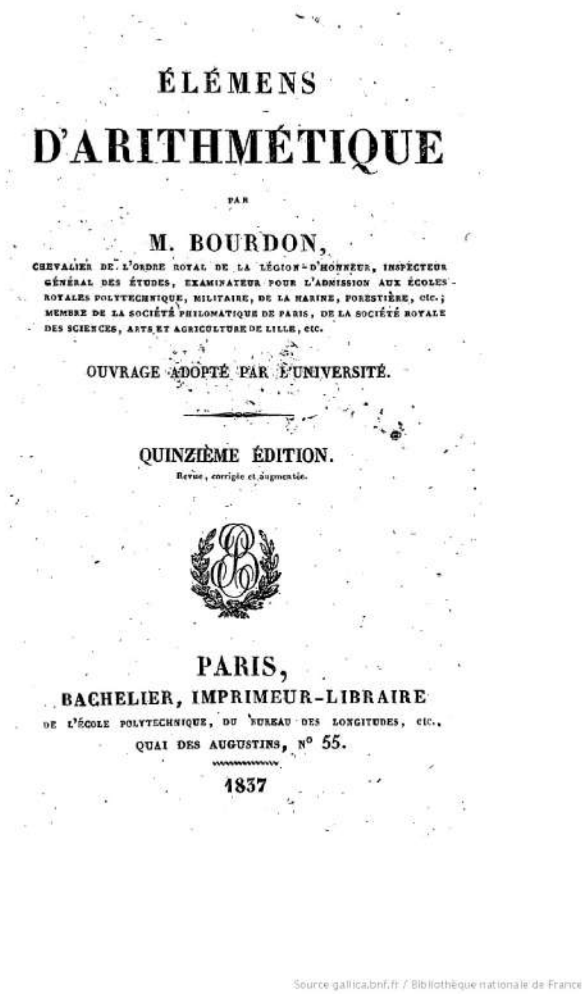
Na última seção da obra, *Nouvelles Mesures*, Peyrard apresenta as medidas utilizadas pelo sistema métrico, assim como exemplos de operações aritméticas - adição, subtração, multiplicação e divisão - com números representados nessas novas medidas.

4.4 Élémens d'Arithmétique, de Bourdon (1837)

Pierre Louis Marie Bourdon (1779-1854) foi examinador de admissão na *École Polytechnique* e em escolas militares, inspetor na *Academie de Paris* e membro da *Société Royale des Sciences*.

Entre seus livros, podemos destacar *Application de l'algèbre à la géométrie analytique à deux et à trois dimensions*, *Éléments d'arithmétique*, *Éléments d'algèbre* e *Application de l'algèbre à la géométrie, comprenant la géométrie analytique à deux et à trois dimensions*. A primeira edição do *Éléments d'Arithmétique* é de 1821.

[30] Aquele que é composto de unidades e partes de unidades (tradução nossa).



ÉLÉMENS

D'ARITHMÉTIQUE

PAR

M. BOURDON,

CHEVALIER DE L'ORDRE ROYAL DE LA LÉGION-D'HONNEUR, INSPECTEUR GÉNÉRAL DES ÉTUDES, EXAMINATEUR POUR L'ADMISSION AUX ÉCOLES ROYALES POLYTECHNIQUE, MILITAIRE, DE LA MARINE, FORESTIÈRE, etc.; MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATIQUE DE PARIS, DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES, ARTS ET AGRICULTURE DE LILLE, etc.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ.

QUINZIÈME ÉDITION.

Revue, corrigée et augmentée.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, etc.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1837

Figura 104 – Folha de rosto do Elementos de Aritmética de Bourdon (Bourdon, 1837)

A décima quinta edição do *Élémens d'Arithmétique* de Bourdon é organizada em duas partes, cada uma com quatro capítulos:

PREMIÉRE PARTIE

- Introduction
- Chapitre I. Opérations sur les nombres entiers
- Chapitre II. Des Fractions
- Chapitre III. Des nombres complexes
- Chapitre IV. Des Fractions décimales et du nouveau Système des Poids et Mesures

SECONDE PARTIE

- Chapitre V. Propriétés générales des Nombres
- Chapitre VI. Formation des Puissances et extraction des racines carrée et cubique des

nombres

- Chapitre VII. Applications des règles de l'Arithmétique. Théorie des Rapports et des Proportions

- Chapitre VIII. Théories des Progressions et des Logarithmes

O primeiro parágrafo da Introdução contém a definição de *grandeza* ou *quantidade* que, para o autor, seria tudo aquilo que é suscetível de diminuição ou aumento. Como exemplos, Bourdon cita as linhas, superfícies, pesos, além de coleções de árvores, homens, etc. (Bourdon, 1837, p. 1)

Além disso, a *unidade* é definida como um grandeza de qualquer espécie que serve como padrão de comparação para todas as grandezas da mesma espécie.

> L'unité, en Mathématiques, est donc une grandeur d'une espèce quelconque, prise arbitrairement ou dans la nature, pour servir de terme de comparaison à toutes les grandeurs de meme espèce; d'où il suit qu'il y a autant d'espèces d'unités que d'espèces de grandeurs[31]. (Bourdon, 1837, p. 1-2)

O autor afirma que, quando uma espécie de grandeza pode variar de forma contínua, a unidade é arbitrária; o que não acontece quando a espécie de grandeza varia de forma abrupta ou descontínua: dado um grupo de árvores e considerando sua quantidade, a unidade será necessariamente uma árvore. Bourdon afirma então que *número* é o resultado da comparação de uma grandeza com sua unidade, e que esse número pode ser *inteiro* ou *fracionário*. (Bourdon, 1837, p. 2)

Além disso, Bourdon classifica o número como *concreto* - quando ao seu final escrevemos o tipo de magnitude, como em *cinco metros* - ou *abstrato* - quando não é acompanhado da unidade. O autor salienta que, ao realizarmos as diversas operações com números, de tal modo que elas possam ser aplicadas a todas as questões possíveis, precisaremos considerá-los como abstratos.

> Lorsqu'on énonçant un nombre, on ajoute à la suite de l'énoncé, le nom qui désigne l'espèce de grandeur dont il s'agit, ce nombre s'appelle *concret*. Ainsi, *cinq mètres, quinze heures, six lieues*, ont des nombres concrets. La première fois que l'on prononce un nombre, on ne peut y attacher de sens qu'en se représentant, une unité d'une certaine espèce,laquelle on compare une autre grandeur de la même espèce. Mais peu à peu l'esprit, qui s'accoutume aux abstractions, parvient à se peindre une collection de plusieurs objets semblables mais quelconques, dont chacun est l'unité. Dans ce cas, la collection s'appelle *nombre abstrait*, parce qu'en l'énonçant on fait abstraction de l'espèce d'unité à laquelle on la rapporte. Or, c'est sous ce dernier point de vue qu'on doit envisager les nombres, dans l'exposition des procédés relatifs aux diverses opérations

[31] A unidade, em matemática, é portanto uma grandeza de qualquer tipo, tomada arbitrariamente ou na natureza, para servir como um termo de comparação para todas as magnitudes do mesmo tipo; daí resulta que há tantas espécies de unidades quanto espécies de grandezas (tradução nossa).

> que l'on peut avoir à effectuer sur eux, si l'on veut que ces procédés soient établis de manière à pouvoir être appliqués à toutes les questions possibles[32].

Já o terceiro capítulo, sobre os números complexos, é iniciado com a afirmação de que esse seria uma extensão do segundo capítulo, por conter aplicações das frações a determinadas espécies de unidades. Ademais, Bourdon relata que **a teoria dos números complexos perdeu um pouco da sua relevância desde a implantação do sistema métrico decimal**. Isso comprova uma das conjecturas do presente trabalho: a hipótese de que, com a implantação do sistema métrico, os números complexos perderiam seu espaço na Aritmética. No entanto, Bourdon afirma considerar importante a apresentação desses números em seu livro por dois motivos: primeiro, para apresentar aos jovens esse tipo de fração e habituá-los com os processos do cálculo utilizados em suas operações; e, em segundo lugar, para que, frente à dificuldade desses cálculos, sejam percebidas as vantagens do novo sistema de pesos e medidas. Em uma nota de rodapé, Bourdon afirma que outro motivo para o estudo dos números complexos abrange a consideração das medidas estrangeiras e da divisão do tempo.

> La théorie des *nombres complexes*, qui fait I'objet de celuici, a perdu, il faut l'avouer, un peu de son importance, depuis l'établissement du Système décimal des poids et mesures. Cependant, nous avons cru devoir l'exposer avec autant de développement qu'on lui eh donnait dans les anciens ouvrages, parce que nous la regardons comme très propre à familiariser les jeunes gens avec la considération des fractions, et à leur donner cette habitude de calcul, qu'on ne saurait trop leur recommander de travailler à acquérir. D'ailleurs, la complication des calculs que cette théorie comporte ne fera que mieux ressortir l'avantage du nouveau Système des poids et mesures sur l'ancien[33].

Ainda, a expressão "la théorie des nombres complexes"nos dá uma indicação da importância que o tema possuiu na Aritmética.

Em seguida a essa breve introdução, são apresentadas unidades pertencentes ao sistema metrológico antigo, com suas respectivas subdivisões. Como unidades monetárias, Bourdon cita a *livre*, o *sou* e o *denier*; para medir extensões, a *toise*, o *pied*, o *pouce* e a *ligne*; como medidas

[32] Ao enunciar um número, se adicionamos ao seu final o nome que designa o tipo de magnitude em questão, esse número é chamado de *concreto*. Assim, *cinco metros, quinze horas, seis ligas*, são números concretos. Na primeira vez em que pronunciamos um número, podemos associar a ele um significado, apenas representado a nós mesmos, de uma unidade de uma determinada espécie, à qual comparamos outra magnitude da mesma espécie. Mas pouco a pouco a mente, que se acostuma com as abstrações, consegue pintar uma coleção de vários objetos semelhantes, mas não especificados, cada um dos quais sendo a unidade. Neste caso, a coleção é chamada *número abstrato*, porque ao enunciá-lo resumimos o tipo de unidade a que está relacionado. No entanto, é sob este último ponto de vista que se deve considerar os números, em relação a exposição dos processos relativos às várias operações que se pode realizar, se se quiser que esses processos sejam estabelecidos de modo a serem aplicados a todas as questões possíveis (tradução nossa)

[33] A teoria dos *números complexos*, que é o objeto deste capítulo, perdeu, deve-se confessar, um pouco de sua importância, desde o estabelecimento do sistema decimal de pesos e medidas. No entanto, pensamos que devemos expô-lo com tanto desenvolvimento quanto o que foi dado a ele nas obras antigas, porque nós vemos como muito apropriado familiarizar os jovens com a consideração de frações e dar-lhes esse hábito calculista, que não pode ser muito recomendado para eles trabalharem. Além disso, a complicação dos cálculos que essa teoria envolve só mostrará a vantagem do novo sistema de pesos e medições em relação ao antigo (tradução nossa).

itinerárias, é mencionada a *lieue moyenne*[34], que se divide em *demies*, *quarts* e *demi-quarts*; para os pesos, há a *livre*, o *marc*, o *gros* e o *grain*; e, por último, as medidas de tempo: *jour*, *heure*, *minute*, *seconde* e *tierce*, além do *année*.

Bourdon apresenta, então, as definições de número complexo e número incomplexo, para em seguida ensinar a como converter um número complexo em incomplexo, e vice-e-versa. *Número complexo* é definido como todo número concreto composto por partes relacionadas a unidades diferentes, enquanto o *número incomplexo* seria aquele relacionado a apenas uma unidade.

Por exemplo, para reduzir o número complexo $17^T\ 5^P\ 7^p\ 11^l$ em uma fração da toesa, Bourdon procede da forma a seguir:

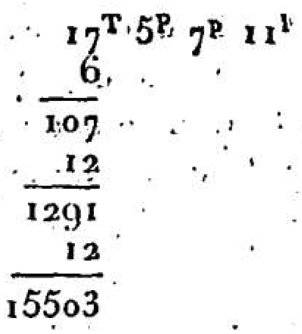


Figura 105 – Conversão de número complexo em incomplexo (Bourdon, 1814, p. 94)

As 17^T são multiplicadas por 6 e adicionadas aos 5^P, formando 107^P. Os 107/unP são, por sua vez, transformados em polegadas, multiplicando-os por 12. Somando as 7^p já existentes, chega-se a 1291^p. Por último, as polegadas são convertidas em linhas, tendo-se um total de 15503^l. Logo, o número complexo dado equivale a $\frac{15503}{6 \cdot 12 \cdot 12} = \frac{15503}{864}$ toesas.

Analogamente, para converter o número fracionário $\frac{615}{23}$ toesas em complexo, começa se dividindo 615 por 23: como 20 vezes 23 é igual a 460, já temos 20 no quociente e restam 155 libras para serem divididas por 23, o que é igual a 6 libras, com 17 de resto. os 17 são multiplicados por 6, tornando-se 102 pés, que divididos por 23 resultam em 4 pés, com 10 de resto. Multiplicando esse número de pés por 12, obtém-se 120 polegadas, que divididas por 23 são iguais a 5, com resto também 5. As 5 polegadas são convertidas em 60 linhas, que divididas por 23 resultam em $2\frac{14}{23}$ linhas.

[34] Possuía o equivalente a 2250 toesas.

615.	23
155	$26^{T} 4^{P} 5^{p} 2^{l} \frac{14}{23}$
17	
6	
102	
10	
12	
120	
5	
12	
60	
14	

Figura 106 – Conversão de número incomplexo em complexo (Bourdon, 1814, p. 95)

Bourdon destaca que, estudada a conversão de número complexo para fracionário, poderia-se omitir as próximas páginas sobre as quatro operações com números complexos, visto que essas poderiam ser realizadas após a conversão do número em incomplexo; porém, diz o autor, esse método é, em geral, menos simples. Essa colocação de Bourdon nos mostra mais um aspecto pelo qual os números complexos perdem sua importância, e reforça o fato de que essa teoria poderia ser colocada à margem.

Desse modo, veremos agora como o autor lida com as operações com números complexos. Sobre a adição, Bourdon afirma que é feita de forma similar à adição de números inteiros, tomando-se o cuidado de escrever as unidades iguais de cada parcela em uma mesma coluna, e atentando-se para trocar-se uma unidade pela sua superiora quando aquela for possível.

PREMIER EXEMPLE.

On propose d'ajouter les nombres

	$765^{\#}$	19^{s}	7^{d}
	1279	17	6
	915	13	11
	2594	19	8
	589	8	6
somme.	$6145^{\#}$	19^{s}	2^{d}
preuve.	xxxx	xx	o

Figura 107 – Adição de números complexos (Bourdon, 1814, p. 100)

Na soma dos cinco números complexos acima, começa-se pela quantidade de deniers:

38^{d}, isto é, 3 vezes 12 *deniers* mais 2. Somando-se, agora, os valores dos sous, tem-se 76^{s} mais os 2^{3} anteriores, isto é, 79^{s} ou 3# e 19^{s}. Por último, somam-se as libras, obtendo-se 6145#.

Sobre a subtração dos números complexos, Bourdon orienta o leitor a escrever o número menor sob o número maior, iniciando a operação novamente pela menor unidade. Logo, para subtrair 189# 15^{s} 11^{d} de 327# 11^{s} 7^{d}, dispões o primeiro número embaixo do segundo e começa-se a subtrair 11^{d} de ^{7}. Mas, como 11 é menor do que 7, um entre os 11 sous do minuendo é convertido em 12 deniers e adicionado aos 7 deniers: desse modo, calcula-se 19^{d} menos 11^{d}. Agora, temos no minuendo 10^{s}, que são menores do que os 15^{s} do subtraendo. Para realizar a subtração, converte 1# do minuendo em 20^{s}, que serão somadas aos 10^{s} já existentes. Fazendo-se, então, 30^{s} menos 15 ^{s}, obtemos 15^{s}. Por último, subtrai-se 189# de 326#, resultando em 327#.

São apresentados mais dois exemplos de subtração de números complexos, que variam do primeiro unicamente pela espécie de unidade (e, consequentemente, pelas suas subdivisões).

Na seção sobre multiplicação de números complexos, Bourdon afirma que esta é mais difícil do que as duas operações anteriores, e que, para facilitar o entendimento, são necessários exemplos. Além disso, o autor declara que irá considerar dois casos distintos: primeiro, **o multiplicando é complexo (e o multiplicador é incomplexo)** e, no segundo, **o multiplicando é complexo ou incomplexo (e o multiplicador é complexo)**. Percebe-se então que, o que diferencia esses dois casos destacados por Bourdon, é a natureza do multiplicador.

No primeiro caso, quando o multiplicador é incomplexo ou um número inteiro qualquer, o produto será dado pela repetição do multiplicando pelo número de vezes que constam no multiplicador, reduzindo-se uma unidade àquela sua superior sempre que possível.

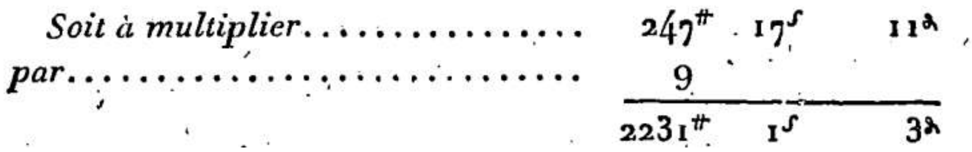

Soit à multiplier.................. 247# . 17s 11d
par............................ 9
2231# 1s 3d

Figura 108 – Multiplicação de número complexo por número inteiro ou incomplexo (Bourdon, 1814, p. 103)

Quando o multiplicador possui mais de um algarismo, para facilitar os cálculos a serem realizados, Bourdon afirma que se deve proceder como no exemplo a seguir.

Multiplier le nombre.....	$784^{\#}$	15^{s}	9^{d}
par.....	857		
	$5488^{\#}$		
	3920		
	6272		
pour 10^{s}.....	428	10^{s}	
5......	214	5	
6^{d}.....	21	8	6^{d}
3......	10	14	3
	$672562^{\#}$	17^{s}	9^{d}

Figura 109 – Multiplicação de número complexo por número inteiro ou incomplexo (Bourdon, 1814, p. 104)

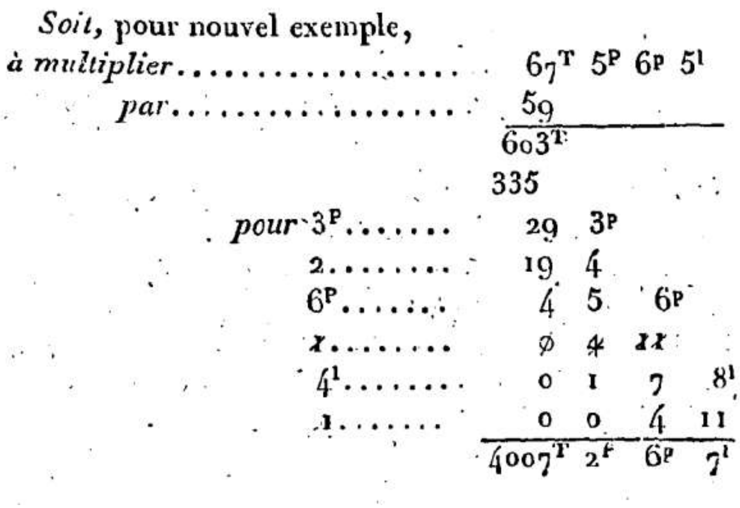
A forma acima de organizar o produto das partes alíquotas utilizando a expressão *pour*[35] é a mesma que a utilizada no livro de aritmética de Lacroix.

Nessa multiplicação, primeiro se calcula o produto de 857 pela maior unidade do multiplicando, 784#, para, em seguida, realizar o produto de 857 para as partes que restaram do multiplicando, da seguinte forma: como 10^s equivalem a metade da libra, a multiplicação de 857 por 10^s será igual à metade de 857#, isto é, 428# 10^s. Já a multiplicação de 857 por 5^s será a metade do resultado anterior, 214# 5^s.

Agora falta calcular o produto de 857 por 9^d. Como 6^d é a metade de um sou, então o resultado de 857 vezes 6^d será a décima parte do produto anterior e, por fim, a multiplicação de 857 por 3^s será igual à metade desse último resultado.

Assim como vimos em obras de outros autores, Bourdon denomina essa forma de obter o produto das subdivisões da unidade principal do multiplicando como *método das partes alíquotas*. Mais um exemplo, em que o método é aplicado, é exposto:

35 Para (tradução nossa).



Soit, pour nouvel exemple,

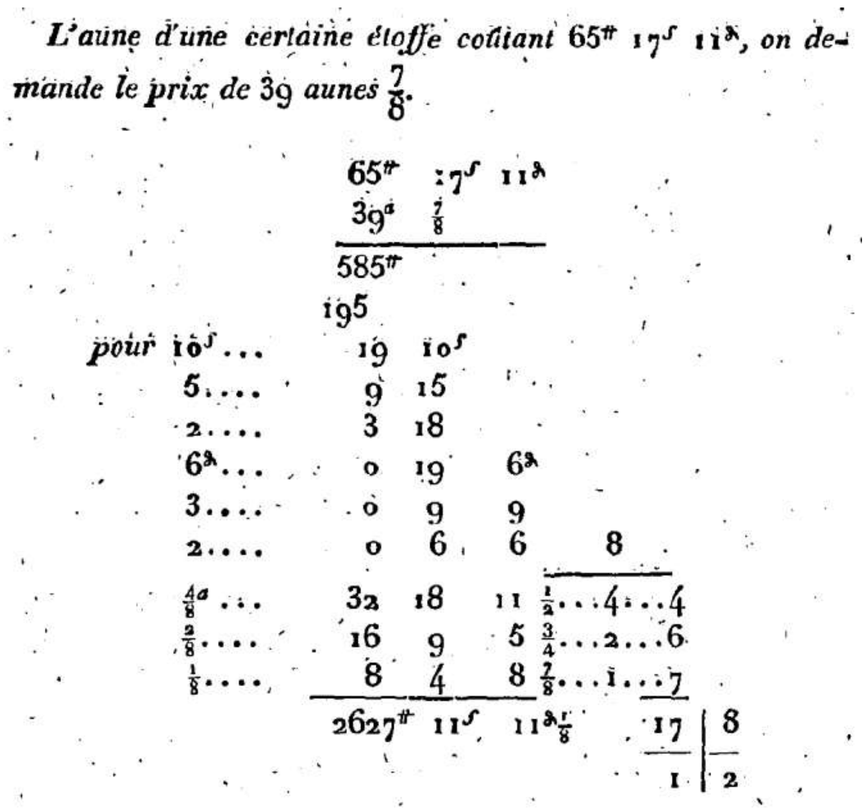
à multiplier....................	67^T	5^P	6^p	5^l
par....................	59			
	603^T			
	335			
pour 3^P.......	29	3^P		
2........	19	4		
6^P........	4	5	6^p	
1........	$\cancel{0}$	$\cancel{4}$	$\cancel{11}$	
4^l........	0	1	7	8^l
1.......	0	0	4	11
	4007^T	2^P	6^p	7^l

Figura 110 – Multiplicação de número complexo por número inteiro ou incomplexo (Bourdon, 1814, p. 105)

Após o cálculo de 59 vezes 67^T, separa-se os 5^P do multiplicando nas partes alíquotas 3^P e 2^P. O produto de 59 por 3^P será igual à metade de 59, visto que 3^P é a metade da toesa: 29^T 3^P. Analogamente, calcula-se a terça parte de 59 toesas para obter o resultado de 59 vezes 2^P: 19^T 4^P. Para realizar o produto de 59 por 6^p, obtém-se a quarta parte do resultado anterior, pois 6^p é igual a meio pé. Como resultado auxiliar, mas que não será incluído nas parcelas dos produtos parciais, calcula-se a sexta parte do último resultado (isto é, o produto de 59 por 1^p): 4^P 11^p. Por último, as 5^l são decompostas nas partes alíquotas 4^l e 1^l. O produto de 4^l por 59 será igual à terça parte do último resultado, enquanto 59 vezes 1^l é a quarta parte desse.

Antes de considerar o caso em que o multiplicador é um número complexo, Bourdon exibe um exemplo que, em sua opinião, não é muito complicado: *"L'aune d'une certaine étoffe coutant 65# 17^s 11^d, on demande le prix de 39 aunes* $\frac{7}{8}$.[36]"

[36] A medida de uma *aune* de um certo tecido custa 65# 17^s 11^d, pede-se o preço de 39 *aunes* $\frac{7}{8}$ (tradução nossa).



L'aune d'une certaine étoffe coûtant 65# 17s 11d, *on demande le prix de* 39 *aunes* $\frac{7}{8}$.

	65#	17s	11d	
	39a	$\frac{7}{8}$		
	585#			
	195			
pour 10s ...	19	10s		
5	9	15		
2	3	18		
6d	0	19	6d	
3	0	9	9	
2	0	6	6	8
$\frac{4a}{8}$ ...	32	18	11 $\frac{1}{2}$	...4...4
$\frac{2}{8}$	16	9	5 $\frac{3}{4}$	...2...6
$\frac{1}{8}$	8	4	8 $\frac{7}{8}$	...1...7
	2627#	11s	11d $\frac{1}{8}$	17 | 8 ; 1 | 2

Figura 111 – Multiplicação de número complexo por número fracionário (Bourdon, 1814, p. 107)

Bourdon afirma que, como uma *aune* custa 65# 17^s 11^d, está claro que 39 *aunes* custarão 39 vezes esse valor. Desse modo, propõe o produto de 65# 17^s 11^d por 39^a. Repare que, na verdade, a unidade do multiplicando é libra/aune, enquanto a unidade do multiplicador é aune.

Como a primeira multiplicação (de 39 por 65) e os próximos oito produtos parciais são realizados de maneira similar ao que já havia realizado em exemplos anteriores, Bourdon afirma que não se deterá explicando-os.

Passando para o cálculo de $\frac{7}{8}$ por todo o multiplicando, propõe-se decompor $\frac{7}{8}$ em $\frac{4}{8}$ (metade de uma *aune*), $\frac{2}{8}$ $\left(\text{metade de } \frac{4}{8}\right)$ e $\frac{1}{8}$ $\left(\text{metade de } \frac{2}{8}\right)$. Desse modo, a multiplicação de $\frac{4}{8}$ por 65# 17^s 11^d será feita tomando-se a metade do multiplicando, isto é, 32# 18^s $11^d\frac{1}{2}$; o produto de $\frac{2}{8}$ pelo multiplicando será a metade do resultado anterior, ou seja, 16# 9^s $5^d\frac{3}{4}$; e, o produto do multiplicando por $\frac{1}{8}$ será a metade do último resultado, 8# 4^s $\left(8 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right)^d$.

Fazendo a soma dos resultados parciais, primeiro adicionam-se as frações de deniers: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{7}{8}$, resultando em $2^d\frac{1}{8}$, e depois são somados os outros fatores.

No próximo exemplo apresentado, são multiplicados dois números complexos. Bourdon afirma que, nesse caso, deve-se tomar partes alíquotas não apenas do multiplicando, mas também do multiplicador. No enunciado do problema, propõe-se "*déterminer le prix de 69^T 4^P 11^p d'un certain ouvrage, en supposant que la toise coute 25# 19^s 5^d*"[37].

[37] Determinar o preço de 69^T 4^P 11^p de um certo trabalho, sabendo que a toesa desse trabalho custa 25# 19^s 5^d (tradução nossa).

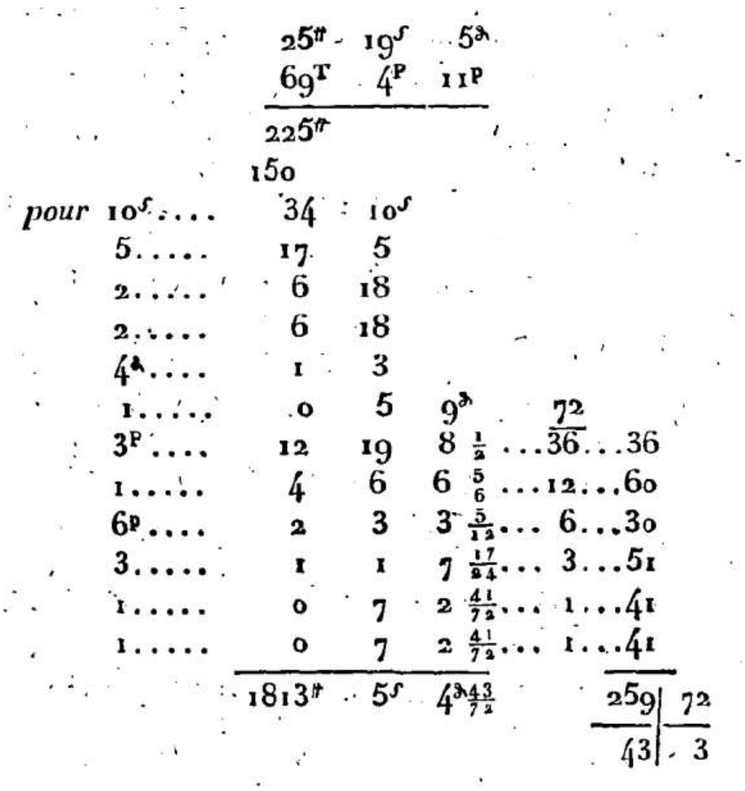


Figura 112 – Multiplicação de número complexo por número complexo (Bourdon, 1814, p. 109)

Para determinar o preço de 69^T desse trabalho, procedemos como nos exemplos anteriores, realizando o produto de 69^T por todo o multiplicando. Na multiplicação de 4^P 11^p pelo multiplicando, toma-se partes alíquotas dessas subdivisões da unidade principal: os 4^P são decompostos em 3^P (metade da toesa) e 1^P; enquanto as 11^p são divididas em 6^p (metade de um *pied*), 3^p, 1^p e, novamente, 1^p.

O produto do multiplicando por 3^P é feito tomando-se sua metade, 12#19^s $8^d\frac{1}{2}$. Já o produto do multiplicando e 1^P será a terça parte do resultado anterior.

Para realizar a multiplicação de 25# 19^s 5^d por 6^p, basta dividir pela metade o resultado da multiplicação por 1^P; para a multiplicação por 3^p, divide-se por dois esse último resultado parcial; e, no produto do multiplicando por 1^p, escreve-se a terça parte do resultado anterior.

O autor nos chama a atenção para o fato de que, como as unidades do multiplicando eram *livres*, *sous* e *deniers*, estas também seriam as unidades do produto. Percebemos que, pelo forma como esse problema é proposto, a espécie do multiplicando está sendo dada em *livres* (e suas subdivisões) por *toise*, e o multiplicador em *toises* (e suas subdivisões).

O exemplo seguinte pergunta: *"on peut faire exécuter 69^T 4^P 11^p pour 1#; on demande le nombre de toises qu'on fera exécuter pour 25# 19^s 5^d"*[38].

[38] Podemos executar 69^T 4^P 11^p por 1#; perguntamos quantas toesas serão feitas por 25# 19^s 5^d (tradução nossa).

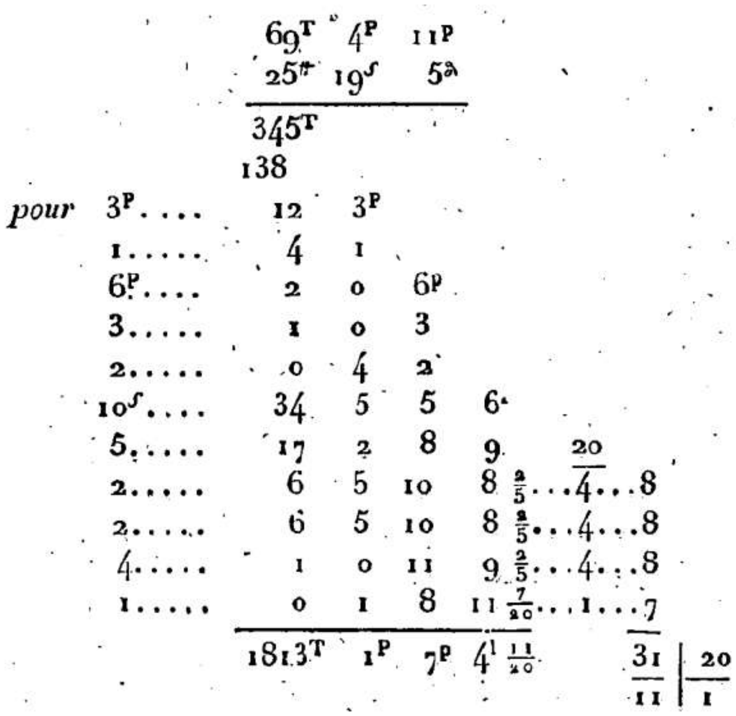


Figura 113 – Multiplicação de número complexo por número complexo (Bourdon, 1814, p. 111)

Bourdon não se preocupa em apresentar os cálculos dessa nova multiplicação, visto que é similar à anterior. No entanto, aproveita a oportunidade para comentar sobre esses dois cálculos, que possuíam fatores iguais em diversa ordem e resultaram em produtos diferentes. Bourdon afirma que os dois produtos são diferentes, não apenas devido às subdivisões de cada espécie de unidade, mas também pela própria espécie do produto, que deverá sempre ser igual àquela do multiplicando.

> Observons que, dans ce dernier exemple, les deux facteurs de la multiplication sont les mêmes que ceux de l'exemple précèdent; et cependant, on a obtenu deux résultats qui different l'un de l'autre, sinon par l'entier qui y entre, du moins par la nature de l'unité principale, et par les subdivisions de cette unité. Ainsi le principe du n^o 25, qui consiste en ce que *l'on peut intervertir l'ordre des facteurs d'un produit, sans changer le produit*, ne semble vrai que pour les nombres abstraits. Pour le rendre applicable au cas de deux nombres complexes, il faudrait concevoir chacun de ces nombres réduit (n^o 69) en un seul nombre fractionnaire de l'unité principale qui lui correspond; et les deux nombres qu'on obtiendrait en intervertissant l'ordre des facteurs seraient égaux, abstraction faite toutefois de la nature de l'unité principale, laquelle devrait être différente dans les deux pro- duits. Il résulte, en effet, de la définition de la multiplication que toutes les fois que l'on considère des nombres concrets, *le produit et le multiplicande doivent être de même nature*; tandis que le multiplicateur, quoique pouvant être d'abord exprimé par un nombre concret, doit toujours être considéré, dans l'operation, comme un nombre abstrait qui designe combien de fois on doit répéter le multiplicande, ou quelle partie on en doit prendre. Il faut donc, lorsqu'on a une multiplication à effectuer, avoir soin de déterminer lequel des deux facteurs doit être pris pour multiplicande, ce qui n'est pas difficile, puidqu'il est toujours de même nature que le produit, et que la nature de celui-ci est indiquée par l'énoncé de la question[39]. (Bourdon, 1814, p. 112)

[39] Vamos observar que, neste último exemplo, os dois fatores de multiplicação são os mesmos que os do exemplo

O cálculo do exemplo anterior é feito tomando-se partes alíquotas das unidades menores do que a principal, tanto do multiplicando quanto do multiplicador. Após multiplicar 69^T por 25#, decompõe-se os 4^P do multiplicando em 3^P e 1^P. O primeiro desses números é metade da toesa, por isso o produto dele por 25 é feito dividindo-se 25 por 2. Como o segundo número, 1^P, é um terço da parte alíquota anterior, o produto por esse fator também será um terço do último resultado. As 11^p são decompostas em 6^p, 3^p e 2^p. Para realizar o cálculo de 25 vezes 6^p, toma-se metade do resultado da linha anterior, pois 6^p é metade de 1^P. Já os produtos relativos às partes alíquotas 3^p e 2^p são feitos obtendo-se, respectivamente, a metade e a terça parte do último produto parcial.

Falta ainda o produto de 19^s e 5^d por todo o multiplicando. Os 19^s são decompostos nas partes alíquotas 10, 5, 2 e 2 *sous*. Para a primeira dessas partes, que é metade da libra, toma-se metade do multiplicando. Sendo assim, os produtos referentes às partes alíquotas 5^s e 2^s serão iguais a, respectivamente, metade e um quinto do último resultado obtido. Por fim, os 5 *deniers* são divididos nas partes alíquotas 4 *deniers* e 1 *denier*. Como 4^d é a sexta parte do resultado anterior, podemos dividi-lo por 6. Além disso, para obter o produto parcial referente à 1^d, o resultado da linha anterior é dividido por 4.

Finalizado o estudo da multiplicação dos números complexos, estuda-se a divisão desses números. Analogamente ao que foi feito na multiplicação, a divisão é retratada em dois casos principais: **quando o dividendo e o divisor são de espécies diferentes**, e **quando ambos são de mesma espécie**.

Para o primeiro caso, com dividendo e divisor de espécies diferentes, tem-se ainda duas circunstâncias: o divisor é complexo ou o divisor é incomplexo. Caso o divisor seja complexo, podemos considerá-lo como um número abstrato, efetuar a divisão e reduzir o quociente em unidades da mesma natureza do dividendo.

Para esse caso, é proposta a questão: "*on demande le prix de la toise d'un certain ouvrage, en supposant que l'on ait payé 25469# 19^s 11^d pour 568 toises du même ouvrage.*"[40]

anterior; e, no entanto, dois resultados foram obtidos, os quais diferem um do outro, se não pelo inteiro que entra neles, pelo menos pela natureza da unidade principal, e pelas subdivisões desta unidade. Assim, o princípio do n^o 25, que consiste no fato de que *a ordem dos fatores de um produto pode ser revertida, sem mudar o produto*, parece ser verdade apenas para números abstratos. Para torná-lo aplicável ao caso de dois números complexos, cada um deles números reduzidos (n^o 69) em um único número fracionário de a unidade principal que corresponde a ela; e os dois números que seriam obtidos pela inversão da ordem dos fatores seriam iguais, independentemente da natureza da unidade principal, que deve ser diferente nos dois. Segue-se, de fato, da definição de multiplicação que, sempre que consideramos números concretos, *o produto e o multiplicando devem ser da mesma natureza*; enquanto o multiplicador, embora capaz de ser expresso primeiro por um número concreto, deve sempre ser considerado, na operação, como um número abstrato que designa quantas vezes o multiplicando deve ser repetido, ou que parte dele deve ser tomada. Portanto, quando a multiplicação é para ser feita, deve-se tomar cuidado para determinar qual dos dois fatores deve ser tomado como multiplicando, o que não é difícil, uma vez que é sempre da mesma natureza que o produto, e o sua natureza é indicada pela declaração da questão (tradução nossa).

[40] Pede-se o preço de uma toesa de um certo trabalho, assumindo que pagamos 25469# 19^s 11^d por 568 toesas do mesmo trabalho (tradução nossa).

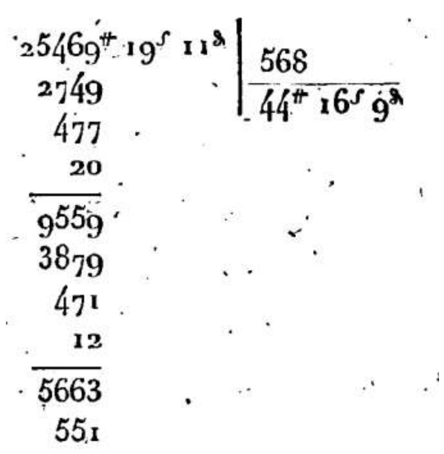


Figura 114 – Divisão de número complexo por incomplexo (Bourdon, 1814, p. 114)

Divide-se 25469# por 568, obtendo 44# e 477# de resto. Multiplica-se esse resto por 20, para que ele seja convertido em sous, e se adiciona os 19^s do dividendo. Os 9559^s são agora divididos por 568, obtendo-se 16^s no quociente e 471^s no resto. Por último, os 5663^d são divididos por 568, gerando 9^d para o quociente e 551^d de resto.

O segundo exemplo expõe: "*on a acheté 258 lb 1^m 7^{on} 5^g de marchandise pour la somme de 3259# 15^s 10^d; on demande à combien revient la livre poids de cette marchandise*"[41]

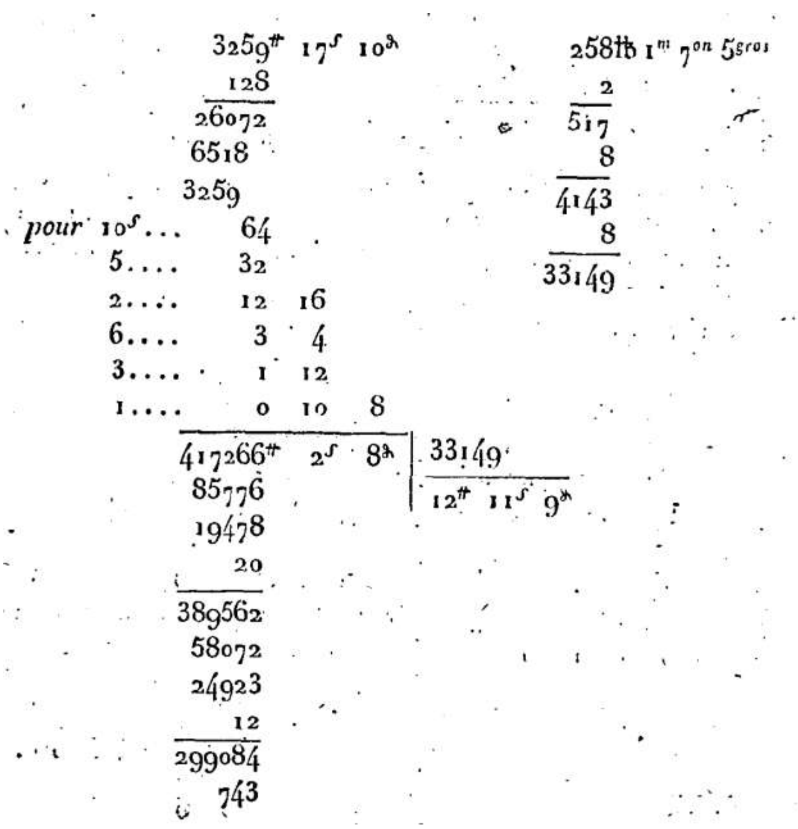


Figura 115 – Divisão de números complexos de diferentes espécies (Bourdon, 1814, p. 115)

[41] Comprou-se 258 lb 1^m 7^{on} 5^g de mercadoria pela soma de 3259# 15^s 10^d; quanto custa uma libra desta mercadoria? (tradução nossa).

Primeiro, converte-se o divisor em um número fracionário, obtendo $\frac{33149}{128}$ libras. Em seguida, multiplica-se o número 128, presente no denominador do divisor, pelo dividendo, o que nos dá o novo dividendo 417266# 2^s 8^d. Agora, realiza-se a divisão desse dividendo por 33149 libras, de modo similar ao exemplo anterior.

No segundo caso da divisão de números complexos, em que dividendo e divisor são de mesma espécie, é proposto o problema: "*la toise d'un certain ouvrage coute 47# 19^s 5^d; on demande le nombre de toises que l'on peut faire executer pour 2728# 17^s 10^d*"[42].

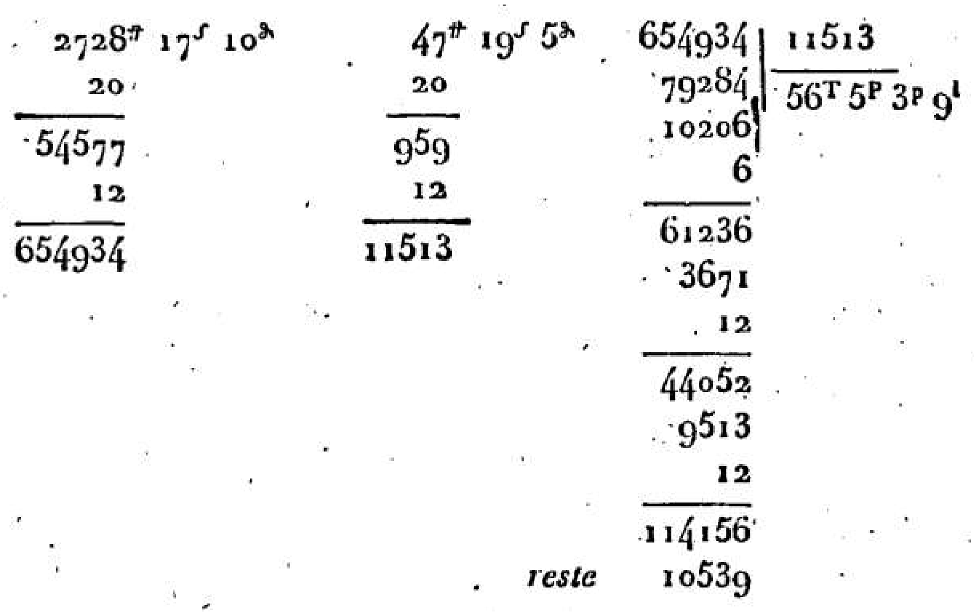


Figura 116 – Divisão de números complexos de mesma espécie (Bourdon, 1814, p. 116)

Após reduzir os dois números complexos às suas formas fracionárias $\frac{654934}{240}$# e $\frac{11513}{240}$#, divide-se 654934 por 11513 para obter a resposta procurada. Bourdon destaca que a unidade do quociente, nesse caso, será dada pelo enunciado da questão; e que, para esse exemplo, o resultado será em toesas e seus derivados. O quociente obtido é, então, 56^T 5^P 3^p $9^l\frac{10539}{11513}$.

Note que, na verdade, o dividendo desse exemplo é dado em libras, enquanto o divisor expressa uma quantidade de libras (e suas unidades derivadas) por toesa.

Em seu próximo exemplo, Bourdon divide uma extensão por outra extensão e obtém no quociente uma unidade monetária. O problema é enunciado da forma seguinte: "*on a payé 1# pour 15^T 4^P 7^p d'un certain ouvrage; on demande la somme qu'il faut payer pour 329^T 5^P 11^p 8^l*"[43]. Note que, na verdade, o dividendo é expresso em libras (e suas subdivisões), enquanto o divisor está em libras (e suas subdivisões) por toesa. Logo, calculando a unidade do quociente como de costume, obteríamos toesas e suas subdivisões.

[42] A toesa de um certo trabalho custa 47# 19^s 5^d; é solicitado o número de toesas que podem ser executadas por 2728# 17^s 10^d (tradução nossa).

[43] Pagou-se 1# por 15^T 4^P 7^p de um certo trabalho; pede-se o valor que você tem que pagar por 329^T 5^P 11^p 8^l desse mesmo trabalho (tradução nossa)

O autor afirma que, caso se conhecesse a quantia pedida, ao multiplicá-la por 15^{T} 4^{P} 7^{p}, obteríamos 329^{T} 5^{P} 11^{p} 8^{l}. Desse modo, a quantia procurada (em libras e suas subdivisões) é o resultado da divisão de 329^{T} 5^{P} 11^{p} 8^{l} por 15^{T} 4^{P} 7^{p}.

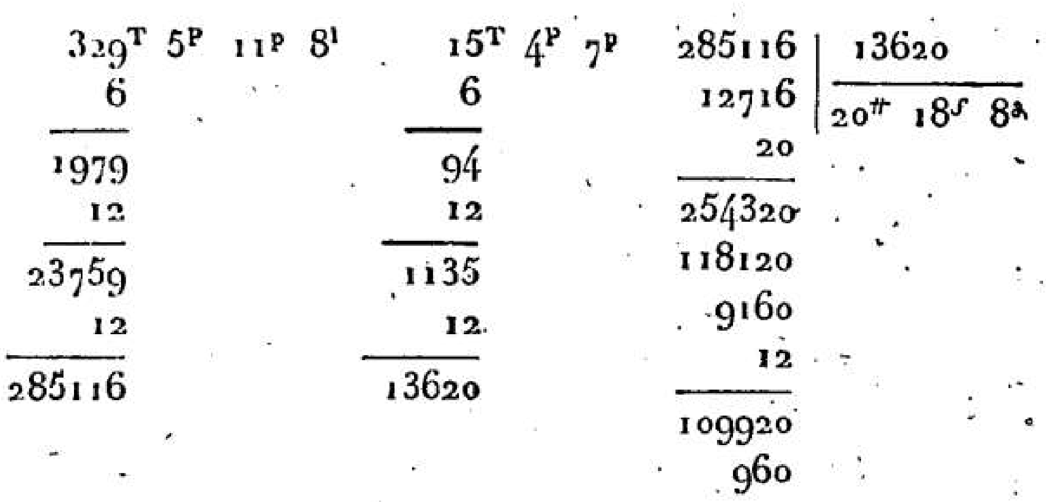


Figura 117 – Divisão de números complexos de mesma espécie (Bourdon, 1814, p. 118)

Os dois números são reduzidos nos fracionários $\frac{285116}{864}$T e $\frac{13620}{864}$T. Desse modo, o dividendo desse cálculo será 285116, enquanto o divisor é 13620. Realizando a divisão, obtém-se 20# 18^{s} $8^{d}\frac{960}{13620}$, isto é, 20# 18^{s} $8^{d}\frac{16}{227}$.

Bourdon observa que, se um dos termos da divisão fosse incomplexo, seria necessário reduzir os dois números em unidades da menor subdivisão que estaria no outro. (Bourdon, 1814, p. 118)

Além disso, o autor acrescenta uma observação sobre a espécie da unidade do quociente na divisão de números complexos: caso os números sejam de mesma espécie, ela só poderá ser conhecida através do enunciado do problema; e, caso os números sejam de espécies diferentes, o quociente será da mesma espécie do dividendo, uma vez que o produto do divisor pelo quociente é igual ao dividendo.

> Toutes les fois que le dividende et le diviseur sont de même nature par rapport a l'unité principale, l'énoncé seul de la question indique quelle doit être la nature de l'unité principale du quotient. Mais lorsque le dividende et le diviseur sont de nature différente, le quotient doit être de même nature que le dividende, puisque le dividende étant un produit, doit être (n^{o} 77) de même nature que l'un de ses facteurs[44]. (Bourdon, 1814, p. 118)

No capítulo IV dessa mesma obra, Bourdon escreve sobre as frações decimais e o novo sistema de pesos e medidas. Já no primeiro parágrafo, o autor afirma que, de todas as formas

[44] Sempre que o dividendo e o divisor são da mesma natureza em relação à unidade principal, o enunciado da questão indicará qual deve ser a natureza da unidade principal do quociente. Mas quando o dividendo e o divisor são de natureza diferente, o quociente deve ser da mesma natureza que o dividendo, uma vez que o dividendo é um produto, que deve ser (n^{o} 77) da mesma natureza de um de seus fatores (tradução nossa).

de se subdividir as unidades, a que facilita mais os cálculos são as divisões de dez em dez; e, após apresentar extensamente as operações com essas frações, o autor destaca novamente as vantagens de um sistema metrológico decimal.

> Nous sommes maintenant en état d'apprécier tous, les avantages que présente le calcul des fractions décimales sur celui des fractions d'une espèce quelconque, et de juger combien il serait important d'etablir un système de poids et mesures qui sut lié au Système decimal. C'est à quoi les savans sont parvenus, non sans beaucoup d'efforts, et malgré les obstacles occasionés par l'ignorance et les préjugés. Commençons par faire connaitre la nomenclature de ce Système [45]. (Bourdon, 1814, p. 134)

Continuando o quarto capítulo, Bourdon lista as unidades principais do sistema métrico, e suas subdivisões, relacionadas às medidas lineares, de superfície, de capacidade, de capacidade para líquidos e grãos, de peso e monetárias. Nessa última, é introduzido o *franc*, cujas décima e centésima partes são, respectivamente, o *décime* e o *centime*. Também são ensinadas as conversões das medidas antigas às medidas decimais, e reciprocamente das decimais às medidas antigas.

Quanto à unidade monetária, segundo Bourdon, "por uma feliz coincidência"o *franc* possui quase o mesmo valor do livre: um *franc* vale $\frac{81}{80}$ do *livre*. Nos perguntamos porque se optou por essa curiosa relação ao invés da igualdade entre as duas unidades monetárias. Isso é respondido na próxima citação: um *franc* é o valor de 5 g de liga de prata, enquanto o grama foi escolhido como o peso de 1 cm^3 de água destilada.

Desse modo, compreendemos que, apesar do autor dar importância aos cálculos com números complexos no capítulo anterior, claramente ele percebe o quanto o sistema métrico decimal produz contas mais simples. Ainda, é exposta uma conclusão onde Bourdon enumera o que considera as principais vantagens do novo sistema.

> Tel est l'exposé de la nomenclature des nouvelles mesures. On peut juger des à présent des avantages que ce Système présente sur l'ancien.
>
> 1^o. Il est uniforme et simple; en ce que les unités principales et subdivisions de ces unités suivent toutes entre elles la loi du Système décimal de numération; et l'on sait déja combien le calcul des fractions décimales est facile.
>
> 2^o. Il est fixe, invariable, et susceptible d'être adopté dans tous les pays, puisqu'il n'appartient à aucun climat, à aucune nation en particulier.
>
> Toutes ces mesures découlent d'une mesure primitive, le metre, que l'on a empruntée aux dimensions du globe terrestre. Les monnaies elles-mêmes, qui semblent d'abord n'offrir aucun rapprochement avec cette mesure, s'y rattachent indirectement, puisqu'on a vu que le franc est la valeur de cinq grammes

[45] Estamos agora em condições de apreciar todas as vantagens de calcular as frações decimais sobre as frações de qualquer tipo e julgar a importância de estabelecer um sistema de pesos e medidas que seriam vinculados ao sistema decimal. Isto é o que os estudiosos conseguiram, não sem muito esforço, e apesar dos obstáculos causados pela ignorância e preconceitos. Vamos começar fazendo conhecer a nomenclatura deste sistema (tradução nossa).

> d'argent allié, et que le gramme est le poids d'un centimétre cube d'eau distillée [46]. (Bourdon, 1814, p. 139)

4.5 Éléments d'Arithmétique de Bézout, réimprimés conformément à l'arrêté du Ministre de l'instruction publique sur le texte de l'édition de 1781, la dernière publiée du vivant de l'auteur, et sans autre modification que l'introduction du système métrique et l'application du calcul des nombres complexes aux monnaies et mesures des pays étrangers, par M. Caillet (1848)

Analisaremos essa edição de 1848 da Aritmética de Bézout com o intuito de verificar as mudanças presentes em seu texto em relação aos números complexos. O título do livro já nos adianta que essa edição é idêntica à edição de 1781, a não ser pela introdução do sistema métrico e pela aplicação do cálculo de números complexos às moedas e medidas de países estrangeiros. Esse título nos indica a importância que ainda é dedicada aos números complexos, apesar da consolidação do sistema métrico na França, para o comércio com outros países. O índice dessa obra é bem detalhado e nos indica que seu conteúdo é composto de:

- Notions préliminaires sur la nature et les différentes espèces de nombres
- Du système métrique
- Des opérations de l'arithmétique
- De la formation des nombres carrés et cubes, et de l'extraction de leur racines
- Des raisons, proportions et progressions, et de quelques règles qui en dépendent
- De la règle de trois
- De la règle de société

[46] Esta é a descrição da nomenclatura das novas medidas. Agora é possível julgar as vantagens que este sistema apresenta no antigo. 1^o É uniforme e simples; em que as principais unidades e subdivisões dessas unidades seguem a lei do sistema decimal de numeração; e nós já sabemos como é fácil o cálculo das frações decimais. 2^o É fixo, invariável e suscetível de ser adotado em todos os países, já que não pertence a nenhum clima, a nenhuma nação em particular.

Todas estas medidas derivam de uma medida primitiva, o metro, que foi emprestado das dimensões do globo terrestre. As próprias moedas, que a princípio parecem não oferecer comparação com essa medida, referem-se a ela indiretamente, uma vez que vimos que o franco é o valor de cinco gramas de liga de prata, e que o grama é o peso de um centímetro cúbico de água destilada (tradução nossa).

- De la règle d'alliage
- Des progressions arithmétiques
- Progressions géométriques
- Des logarithmes
- Remarque - Des compléments arithmétiques
- Tableau des principales monnaies étrangères
- Tableau des poids et mesures des pays étrangers

A definição de número complexo é exatamente a mesma da edição de 1770 (presente nas páginas 8 e 9 dessa nova edição). No entanto, enquanto naquela edição o exemplo de número complexo dado era 8 *livres* 17 *sous* 8 *deniers*, e o exemplo de número incomplexo era 8 *livres*; nessa nova edição de 1848 apresenta-se como exemplo de número complexo 8 *jours* 17 *heures* 8 *minutes*, sendo 8 *jours* o exemplo de número incomplexo.

Nos parágrafos 97 a 99 (equivalentes aos parágrafos 90 a 92 da edição de 1770), Bézout trata da conversão de um inteiro em número fracionário, e de um número fracionário qualquer em número decimal. Ao parágrafo 92 é adicionado o seguinte trecho:

> C'est ainsi qu'on peut réduire en décimales, tout nombre complexe proposé. Par exemple, s'il s'agit de réduire 3 toises de Suède 5 pieds 8 pouces 7 lignes en décimales de la toise, de manière à ne pas négliger une demi-ligne, j'observe que la toise de Suède contient 864 lignes, et par conséquent 1728 demi-lignes; il faut donc, pour ne pas négliger les demi-lignes, porter l'exactitude au-delà des millièmes, c'est-à-dire jusqu'aux dix-millièmes.
>
> Cela posé, je réduis les 5 pieds 8 pouces 7 lignes tout en lignes, et j'ai 823 lignes, ou $\frac{823}{864}$ de la toise ; réduisant cette fraction en décimales, comme il vient d'être dit, on a 0,9525, et par conséquent 3 toises 9525 pour le nombre proposé. [47](Bézout, 1848, p.52)

Nesse ponto, uma nota de rodapé informa ao leitor que ao final do volume encontram-se as subdivisões da toesa da Suécia e sua relação com o metro.

Na seção *Quelques applications des règles précédentes*, em que se fala sobre aplicações das regras para realizar as quatro operações com frações, o exemplo do parágrafo 112, que na edição de 1770 (p. 75) é dado em *livres*, *sous* e *deniers*, é substituído por exemplo análogo em *livres sterlings*, *shillings*, *pences* e *pennies* (p. 55).

[47] É assim que podemos reduzir a decimais qualquer número complexo proposto. Por exemplo, se for para reduzir 3 toesas da Suécia 5 pés 8 polegadas 7 linhas em decimais da toesa, de modo a não negligenciar metade da linha, observa-se que a toesa sueca contém 864 linhas, e conseqüentemente 1728 meia-linhas; é necessário, portanto, não negligenciar as meias-linhas, trazer a precisão além dos milésimos, isto é, para os dez milésimos.

Isso posto, reduz-se os 5 pés 8 polegadas 7 linhas em linhas, obtendo 823 linhas, ou $\frac{823}{864}$ da toesa; reduzindo essa fração em decimais, como acabamos de dizer, temos 0,9525 e, portanto, 3 toesas 9525 para o número proposto (tradução nossa).

Nota-se, a essa altura, a exclusão de alguns parágrafos que incluíam como exemplos as medidas francesas antigas, e a inclusão de parágrafos acerca das frações decimais.

A parte dedicada aos números complexos é igual àquela da edição de 1770, mas inclui, antes de tratar das operações com números complexos, uma tabela com os números complexos que serão usados nos exemplos. O autor volta a destacar que há, ao final do volume, duas tabelas com os números complexos mais utilizados nas relações comerciais com outros países.

MONNAIES D'ANGLETERRE.

£ signifie. . . . livre sterling.	1 livre sterling vaut. . . 20 shillings.
sh ou ^{s}. . . . . shilling ou sou st.	1 shilling. . . . . 12 pences.
p ou ^{d}. . . . . . penny ou denier st.	

MONNAIES DE BALE ET DE TOSCANE.

# signifie. . . . . livre.	1 livre vaut. . . . . . . 20 sous.
s . . . . sou.	1 sou. . . . . 12 deniers.

MESURES DE LONGUEUR EN ANGLETERRE.

F ou T signifie. . . . fathom ou toise.	1 toise ou fathom vaut. . 6 pieds.
P . . . . pied.	1 pied. . . . . 12 pouces.
po. . . . . pouce.	1 pouce. . . . . 12 lignes.
l . . . . ligne.	

EN SUÈDE.

F ou T signifie. . . . . fâmn ou toise.	1 toise ou fâmn vaut. . . 6 pieds.
P . . . . pied.	1 pied. . . . . 12 pouces.
po. . . . . pouce.	1 pouce. . . . . 12 lignes.
l . . . . ligne.	

Figura 118 – Tabela de unidades estrangeiras que serão utilizadas em exemplos (Bézout, 1848)

4.6 Conclusão sobre os livros franceses

Nesse capítulo, estudamos livros importantes para a França no que diz respeito ao assunto desse trabalho, país onde surgiu o conceito de números complexos. Com isso, constatamos a existência de dois assuntos pertinentes porém não conhecidos na História da Matemática: por um lado, a existência de mais uma categoria de números; e, de outro, o problema da multiplicação de grandezas e da comutatividade nessa multiplicação.

Reparamos também a confirmação da hipótese chave de nosso trabalho: após a Revolução Francesa e a introdução do sistema métrico decimal, os números complexos veem sua importância ser reduzida. Repara-se, nesse sentido, que os autores afirmam que, a princípio, poderia-se abandonar os cálculos com essa categoria de números. No entanto, a maioria deles continua a explicar essas operações, apesar de dar a esses cálculos uma ênfase diferente.

Resumindo o que os autores franceses dizem sobre esse assunto, construímos o seguinte quadro:

Bézout (1770)	Separa os números concretos em complexos e incomplexos. Afirma que é importante distinguir multiplicador e multiplicando quando ambos são concretos, pois o produto pode ser diferente se trocarmos a ordem dos fatores. Fornece dois exemplos (contextualizados) com fatores iguais, mas em diversa ordem, para mostrar que a multiplicação de grandezas é não comutativa. Comenta brevemente o que chama de multiplicação e divisão geométricas, afirmando que não se pode afirmar que multiplicando uma linha por outra obtemos uma superfície. Para ele, também nesse caso o multiplicando já contém a unidade do produto, enquanto o multiplicador indica quantas vezes o multiplicando deverá ser repetido.
Camus (1749)	Distingue os números, em geral, em complexos e incomplexos. É mais sistemático em sua apresentação das operações com os números complexos do que o Bézout. Através do seu *Méthode Abrégée*, separa a teoria da multiplicação de números complexos em diferentes casos. Afirma que, na multiplicação, o multiplicando é repetido uma determinada quantidade de vezes, sendo essa quantidade indicada pelo multiplicador. Desse modo, o multiplicador deve ser tratado como número abstrato, enquanto o produto será da mesma espécie que o multiplicando. Seus exemplos de operações com números complexos não são contextualizados. Além da multiplicação aritmética, analisa extensamente a chamada multiplicação geométrica, em que afirma que um dos fatores é uma linha ou superfície, enquanto o outro é uma linha, e o produto obtido é de espécie diferente dos dois fatores.

Lacroix (1807)	Divide as grandezas nas categorias complexos e incomplexos. Considera o método de converter os números complexos em fracionários antes de multiplicá-los mais geral; porém, apresenta vários exemplos dessas operações (alguns poucos contextualizados) e afirma possuir admiração por esses cálculos difíceis. Apesar de instruir as operações com números complexos, afirma ser desejável que essas operações sejam abandonadas devido à introdução do sistema métrico decimal. Na multiplicação, postula que a unidade do produto deverá ser igual à do multiplicando. Na divisão, diz que , em geral, quando divisor e dividendo são de unidades diferentes, o quociente é da mesma espécie do dividendo; e, quando dividendo e divisor são da mesma espécie, o quociente será de uma espécie diferente (determinada pelo enunciado do problema).
Peyrard (1813)	No prefácio de sua edição da Aritmética de Bézout (1814), postula a comutatividade da multiplicação em toda a aritmética do livro. No entanto, mantém o texto do Bézout sobre os números complexos praticamente inalterado, incluindo parágrafo que afirma que o resultado da multiplicação de números complexos depende da ordem dos fatores. Em sua própria obra de Aritmética (1813), limita-se a definir e dar exemplos de números complexos, não realizando operações com essa categoria de números.
Bourdon (1837)	Divide os números em abstratos e concretos, e estes últimos em complexos e incomplexos. Declara que a teoria dos números complexos perdeu um pouco da sua relevância desde a implantação do sistema métrico decimal. Quanto à multiplicação dos números complexos, exibe exemplos contextualizados e afirma que a espécie do produto deverá ser igual àquela do multiplicando. Na divisão de complexos, declara que, caso o dividendo e o divisor sejam de espécies diferentes, o quociente será da mesma espécie do dividendo, uma vez que o produto do divisor pelo quociente é igual ao dividendo. E, caso tenham a mesma unidade, esta só poderá ser conhecida através do enunciado do problema.

Bézout (1848)	É idêntica à edição da aritmética de Bézout de 1781, a não ser pela introdução do sistema métrico e pela aplicação do cálculo de números complexos às moedas e medidas de países estrangeiros. Contém ainda operações com os números complexos, com a justificativa de sua utilidade para o comércio com outros países. Comparando com a edição do Bézout de 1770, são notadas pequenas mudanças. Uma delas, a alteração do primeiro exemplo de número complexo, que na edição de 1770 era 8 *livres* 17 *sous* 8 *deniers*, e na edição de 1848 é 8 *jours* 17 *heures* 8 *minutes*, nos mostra o quanto os números complexos tiveram sua aplicabilidade reduzida dentro da França. As frações decimais e o sistema métrico decimal ganham mais espaço nessa edição.

CAPÍTULO 5

Os complexos em outros livros estrangeiros

Com a finalidade de ter uma visão geral sobre como ocorria o ensino dos números complexos em outros países, iremos analisar o material relacionado aos números complexos que encontramos em Portugal, na Inglaterra, na Itália e na Espanha. Além disso, veremos como os livros de aritmética dos Estados Unidos tratavam a multiplicação de grandezas.

5.1 Portugal

A primeira versão portuguesa da Aritmética de Bézout é do ano de 1773. Segundo informações do site português da Associação de Professores de Matemática, com a reforma da Universidade de Coimbra, em 1772, foi criada a Faculdade de Matemática. Os professores dessa faculdade ficaram responsáveis pela indicação dos livros a serem utilizados e, como quase todos eram livros estrangeiros, tornou-se preciso traduzi-los para o português. Desse modo, José Monteiro da Rocha (1734 - 1819) traduz vários desses livros, entre eles o *Elementos de Arithmetica* de Bézout.

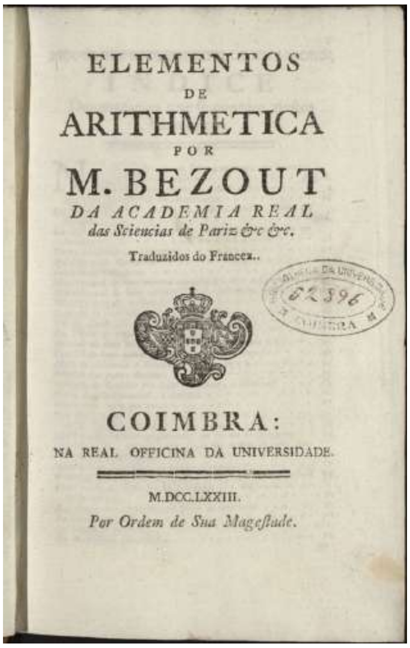


Figura 119 – Folha de rosto do livro *Elementos de Arithmetica por M. Bezout, Traduzidos do Francez* (Bézout, 1773)

Ao contrário da versão francesa de 1770, o *Elementos de Arithmetica por M. Bezout* (1791) possui no início um índice de conteúdos. Na sua quarta edição, de 1791, o conteúdo é apresentado na seguinte ordem:

- Noçoens preliminares sobre a natureza dos Numeros, e suas diferentes especies;
- Das operaçoens da Arithmetica;
- Dos quebrados;
- Dos numeros complexos;
- Da formação de numeros quadrados, e extracção das suas raizes;
- Da formação de numeros cubicos, e extracção das suas raizes;
- Das rasoens, e proporçoens;
- Dos logarithmos.

Zuin afirma, em seu texto *Alterações na aritmética escolar do Brasil oitocentista: entre os pesos e medidas*, que

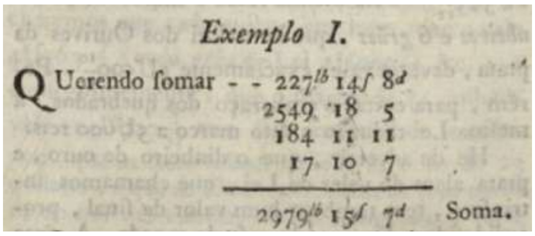
> Na versão traduzida para o português, da edição de 1836, dos Elementos de Arithmetica de Bézout, há um apêndice cujo autor é o Padre José da Silva Tavares, no qual estão contemplados os seguintes tópicos: operações de comércio, de banco e de câmbios, tábuas de pesos e medidas dos principais países e um método simplificado dos câmbios das moedas de algumas nações. Esse apêndice foi incorporado ao texto original após a morte de Bézout. Os conteúdos incluídos atendiam um duplo objetivo: serem ensinados nas escolas e também servirem aos interesses das áreas comerciais. (Zuin, 2008 p. 10)

Na definição de Bézout para números complexos, percebemos outras expressões utilizadas para definir esses números: *números denominados* e *números heterogêneos.*

> O numero composto de partes, que se reportão do modo sobredito a differente especie de unidades, chama-se Complexo, Denominado ou Heterogeneo; e ao contrario chama-se Incomplexo todo aquelle, que involve huma só especie de unidades. Assim, 8^{lb}, ou 8 libras, he numero incomplexo; e 8^{lb} 17^{s} 8^{d}, ou 8 libras, 17 soldos, e 8 dinheiros, numero complexo (Bézout, 1791, p. 8)

A seção sobre os complexos inclui, em seu início, um resumo das principais unidades de medida utilizadas em Portugal, além de algumas que o autor destaca que são utilizadas na França. Esse trecho é inexistente na versão francesa de 1770.

Na soma de números complexos, os três exemplos fornecidos são exatamente os mesmos daquela versão, assim como as orientações de como realizar a operação.

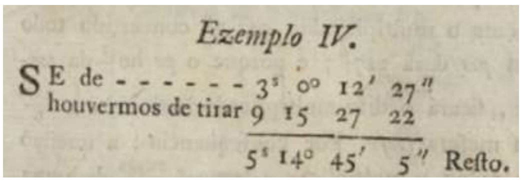

Exemplo I.

Querendo ſomar - -	227^{lb}	$14^{ſ}$	8^{d}	
	2549	18	5	
	184	11	11	
	17	10	7	
	2979^{lb}	$15^{ſ}$	7^{d}	Soma.

Figura 120 – Adição de números complexos (Bézout, 1791, p. 124)

Para a subtração de números complexos, são fornecidos dois exemplos a mais do que na versão de 1770, ambos com as unidades *signo*, *grau*, *minuto* e *segundo*. Na parte introdutória dessa seção, podemos encontrar que:

> Hum circulo celeste divide-se em 12 signos, o signo em 30 gráos, o gráo em 60 minutos, o minuto em 60 segundos &c. (Bézout, 1791, p. 121)


Exemplo IV.

SE de - - - - - -	3^{s}	0^{o}	$12'$	$27''$	
houvermos de tirar	9	15	27	22	
	5^{s}	14^{o}	$45'$	$5''$	Reſto.

Figura 121 – Subtração de números complexos (Bézout, 1791, p. 129)

A multiplicação de números complexos segue exatamente igual ao que é realizado na Aritmética de 1770. No entanto, ao final o autor acrescenta um comentário sobre os dois exemplos exibidos em que a troca na posição dos fatores implica em produtos diversos: além de chhamar a atenção para esse fato, como já era feito na versão anterior, Bézout justifica que a diferença ocorre somente devido às divisões de uma unidade serem diferentes da divisão de outra. (Bézout, 1791, p. 139)

Já na última parte, sobre a divisão geométrica, os exemplos e explicações dadas pelo autor são análogos aos da outra versão. Porém, no comentário final, em que Bézout menciona o que ele chama de multiplicação e divisão geométricas, ele acrescenta algumas palavras. Bézout justifica que essas operações são utilizadas para calcular as medições *Geodeticas* e *Stereometricas*.

Em outro livro didático, o *Aritmética, Sistema Métrico e Geometria - para as escolas primárias* (1912), do professor Ricardo Diniz, são também abordados os números complexos. Segundo Amaral (2011), o livro apresentou uma quantidade expressiva de edições e foi adotado em muitas escolas públicas e privadas de Portugal.

Figura 122 – Capa do *Aritmética, Sistema Métrico e Geometria - para as escolas primárias*, do professor Ricardo Diniz (1912)

O conteúdo do livro é dividido em três partes: Aritmética, Sistema Métrico e Geometria. Na primeira parte são definidos os conceitos de unidade, número, grandezas, frações etc. No capítulo quatro, sobre grandezas contínuas e descontínuas, lemos que:

> Grandeza é tudo que é capaz de aumentar ou diminuir. E, assim são as grandezas a dor, o prazer, o desejo, porque podem tornar-se mais ou menos intensos: como são grandezas o pêso duma pedra, a capacidade duma sala, um grupo de árvores, porque se podem tornar maiores ou menores (Diniz, 1912, p. 54)

Nessa mesma parte são definidos os números complexos, além de ensinadas as operações com esses números.

74 PARTE PRIMEIRA — ARIMÉTICA

81. **Redução de um número incomplexo a complexo.** — Divide-se o número dado pela sua relação com a unidade imediatamente superior, e depois o quociente que resultar divide-se pela relação seguinte, e assim por diante; o último quociente e os restos sucessivos formam o número complexo.

Exemplo 1.º *Reduzir 8775 minutos a dias:*

$$\begin{array}{l|l} 8775^m & 60 \\ \hline 277 & 146^h \; | \; 24 \\ \;375 & \quad 2^h \; | \; 6^d \\ \;\;15^m & \end{array}$$

Logo: $8775^m = 6^d\ 2^h\ 15^m$.

Exemplo 2.º *Seja o número incomplexo $\frac{5}{7}$ da circunferência para reduzir a complexo:*

$$\begin{array}{r|l} 5 & 7 \\ \times 360^\circ & 257^\circ\ 8'\ 34'' \\ \hline 1800^\circ: & \\ 40 & \\ 50 & \\ 1 & \\ \times 60' & \\ \hline 60': & \\ 4 & \\ \times 60'' & \\ \hline 240'': & \\ 30 & \\ 2'' & \end{array}$$

Logo, abstraíndo do resto, será $\frac{5}{7}$ da circunferência $=$

$= 257^\circ\ 8'\ 34''$.

PARTE PRIMEIRA — ARIMÉTICA 75

82. **Redução de um complexo a fracção e desta a número decimal.** — Reduz-se o número complexo á ínfima espécie e divide-se o número obtido pelo número de vezes que a unidade a que êle se quer reduzir contém a da última espécie e depois converte-se em número decimal pelo processo conhecido (n.º 76).

Exemplo 1.º *Reduzir $12^d\ 9^h\ 5^m\ 7^s$ a fracção decimal da hora:*

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 24 \\ \hline 48 \\ 24 \\ \hline 288^h \\ +9 \\ \hline 297^h \\ \times 60 \\ \hline 17820^m \\ +5 \\ \hline 17825^m \\ \times 60 \\ \hline 1069500^s \\ +7 \\ \hline 1069507^s \end{array}$$

E, como a hora tem 3600^s, será $12^d\ 9^h\ 5^m\ 7^s =$

$= \frac{1069507^s}{3600} =$

$= 297^h,085$.

Figura 123 – Números complexos no livro do professor português Ricardo Diniz (1912, p. 74)

Também no livro *Curso de estudos para uso do commercio e da fazenda: primeiro compendio que trata da arithmetica universal*, de José Maria Dantas Pereira (1798), são ensinados os números complexos. No capítulo sobre esses números, é definido que todos os números que se referem a diferentes espécies de unidades do mesmo gênero são chamados *complexos* ou *denominados*. Em seguida, são expostas as principais unidades e suas divisões, para diferentes tipos de grandezas, em esquemas que o autor denomina *taboadas*.

TABOADA V.

Do Affinamento do Ouro.

Sinaes, e Nomes.

M ſignifica - - - - Marco.
Q - - - - - - - - Quilate.
g - - - - - - - - Grão.

Divisões.

		1 Grão
	1 Quilate	4
1 Marco	24	96

Figura 124 – Quinta "taboada"presente no livro de Pereira, sobre as unidades utilizadas para metais preciosos (1798, p. 179)

Ao todo são doze as "taboadas"apresentadas por Pereira; e, o que nos chamou a atenção foi a simbologia diferenciada utilizada para representar algumas dessas unidades.

TABOADA I.

Dos Pezos dos Generos mais ordinarios.

Sinaes, e Nomes.

T ſignifica	- - - -	Tonelada.
Q	- - - - - - - -	Quintal.
@	- - - - - - - -	Arroba.
℔	- - - - - - - -	Arratel.
On, ou ℥	- - - -	Onça.
Out, ou ʒ	- - - -	Outava.

Figura 125 – Taboada I, sobre as unidades de peso (Pereira, 1798, p. 175)

TABOADA XII.

Das Moedas.

Sinaes, e Nomes.

✠ ſignifica	- - -	Moeda de Ouro.
⨯	- - - - - -	Cruzado.
╬	- - - - - -	Toſtão.
V	- - - - - -	Vintem.
R	- - - - - -	Real.

Figura 126 – Taboada XII, sobre as unidades monetárias (Pereira, 1798, p. 186).

A seguir, são realizados os cálculos com os números complexos, de modo similar ao que já vimos em outros livros. Na multiplicação de complexos, observamos que a unidade do produto é sempre igual à do multiplicando, em todos os exemplos apresentados; porém, o autor não comenta sobre esse fato.

CURSO DE ESTUDOS
PARA USO
DO
COMMERCIO, E DA FAZENDA.
PRIMEIRO COMPENDIO,
Que trata da Arithmetica univerſal.
PARTE I.
OU
THEORICA DA MESMA ARITHMETICA,
DEDICADA
A SUA ALTEZA REAL
O SERENISSIMO
PRINCIPE DO BRAZIL
NOSSO SENHOR
PELO SEU AUTHOR
JOSÉ MARIA D'ANTAS PEREIRA,
Capitão de Fragata, Lente de Mathematica, Socio da Academia Real das Sciencias, e Meſtre do Sereniſſimo Senhor Infante D. Pedro Carlos.
LISBOA,
NA REGIA OFFICINA TYPOGRAFICA.
M. DCC. XCVIII.
COM LICENÇA DE SUA MAGESTADE.

Figura 127 – Folha de rosto do livro de Pereira (1798)

EXEMPLO II.

$$\begin{array}{lll}
9^{@} & & \\
5^{d} & 7^{h} & 15' \\
\hline
45 & & \\
2 & 8 & \\
0 & 12 & \\
0 & 3 & \\
\hline
47^{@} & 23^{lb} &
\end{array}$$

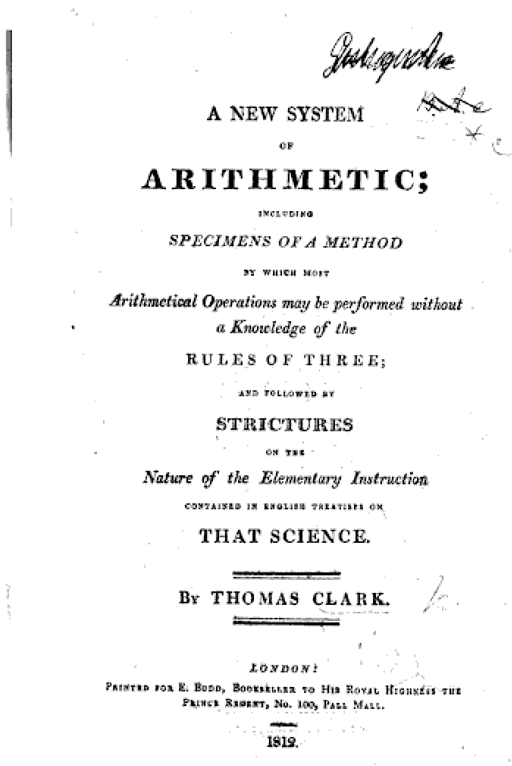
Figura 128 – Multiplicação de 9 arrobas por 5 dias 7 horas 15 minutos (Pereira, 1798, p. 211)

5.2 Inglaterra

A obra *A New System of Arithmetic; including specimens of a method by which most arithmetical operations may be performed without a knowledge of the rules of three; and followed by strictures on the nature of the elementary instruction contained in English treatises on that* *science*, de Thomas Clark (1812), inclui uma detalhada explicação sobre os números complexos e o modo de operar com eles.

No prefácio do livro, Clark (1812) esclarece que seu texto é uma compilação e tradução das obras, principalmente, de Reynaud, Theveneau e Bézout, além das *Ecoles Normales* e da aritmética de Gordon. O livro de Clark é dividido em duas partes: Abstract Numbers e Concrete Numbers. A segunda parte do livro - Concrete Numbers - é iniciada com a definição de número concreto, seguida das definições de números complexos e incomplexos.

> Numbers composed of whole units of the same order, have received the name of *incomplex* in contradistinction to numbers composed of units of different orders; which are termed *complex numbers*[1]. (Clark, 1812, p. 242)



A NEW SYSTEM

OF

ARITHMETIC;

INCLUDING

SPECIMENS OF A METHOD

BY WHICH MOST

Arithmetical Operations may be performed without a Knowledge of the

RULES OF THREE;

AND FOLLOWED BY

STRICTURES

ON THE

Nature of the Elementary Instruction

CONTAINED IN ENGLISH TREATISES ON

THAT SCIENCE.

By THOMAS CLARK.

LONDON:

PRINTED FOR E. BUDD, BOOKSELLER TO HIS ROYAL HIGHNESS THE PRINCE REGENT, No. 100, PALL MALL.

1812.

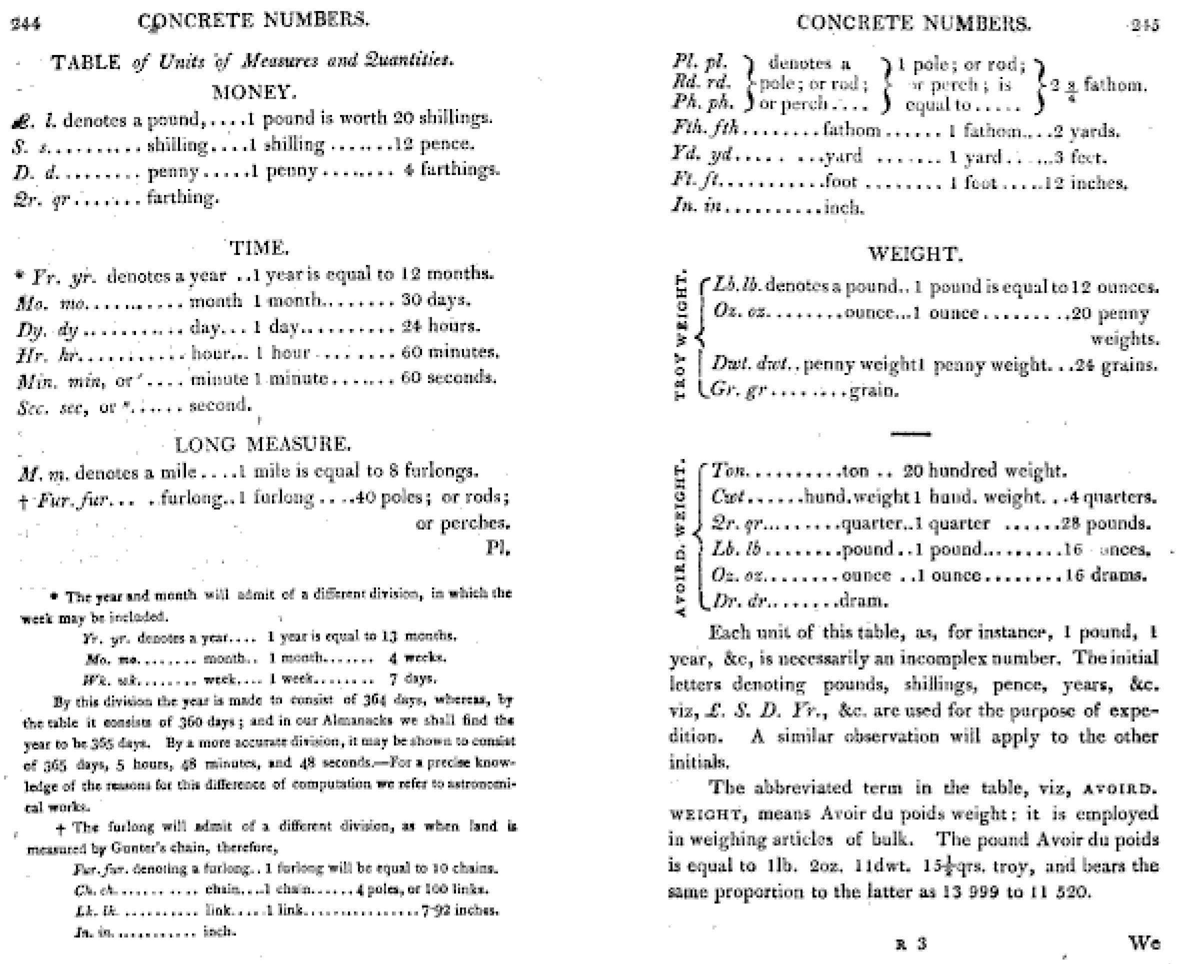
Figura 129 – Folha de rosto do *A New System of Arithmetic* (1812)

É incluída também uma tabela contendo unidades de medida com subdivisões não decimais. Clark destaca que, apesar de existirem vários tipos de números complexos, são incluídos nessa tabela apenas aqueles de maior uso. (Clark, 1812, p. 243)

Em seguida, o autor discorre rapidamente sobre as quatro operações com números incomplexos. Na parte sobre a divisão de números complexos, Clark faz uma observação interessante: afirma que não se pode dividir um número concreto por outro número concreto de natureza diferente do anterior.

[1] Números compostos de unidades inteiras da mesma ordem receberam o nome de incomplexos em contraposição a números compostos de unidades de ordens diferentes; que são denominados números complexos (tradução nossa).

> We cannot divide a concrete number by a concrete number of a different nature. We cannot divide 24 yards by 4 hours, &c; although in some treatises on arithmetic the authors appear to make the attempt. The errour arises from this, that THEY HAVE CONFOUNDED THE NUMBERS ON WHICH THEY OPERATE WITH THOSE WHICH SERVE MERELY TO DETERMINE THEM[2]. (Clark, 1812, p. 258)



244 CONCRETE NUMBERS.

TABLE *of Units of Measures and Quantities.*

MONEY.

£. l. denotes a pound, ... 1 pound is worth 20 shillings.
S. s. .... shilling .... 1 shilling .... 12 pence.
D. d. .... penny ..... 1 penny .... 4 farthings.
Qr. qr .... farthing.

TIME.

* *Yr. yr.* denotes a year .. 1 year is equal to 12 months.
Mo. mo. .... month 1 month........ 30 days.
Dy. dy .... day... 1 day.......... 24 hours.
Hr. hr. .... hour... 1 hour .... 60 minutes.
Min. min, or ′ .... minute 1 minute .... 60 seconds.
Sec. sec, or ″ ...... second.

LONG MEASURE.

M. m. denotes a mile .... 1 mile is equal to 8 furlongs.
† *Fur. fur.* ... furlong .. 1 furlong .... 40 poles; or rods; or perches.

Pl. pl., *Rd. rd.*, *Ph. ph.* denotes a pole; or rod; or perch .... 1 pole; or rod; or perch; is equal to ..... $2\frac{2}{4}$ fathom.
Fth. fth .... fathom .... 1 fathom.... 2 yards.
Yd. yd .... yard .... 1 yard ...... 3 feet.
Ft. ft. .... foot .... 1 foot ..... 12 inches.
In. in .... inch.

WEIGHT.

TROY WEIGHT.
Lb. lb. denotes a pound .. 1 pound is equal to 12 ounces.
Oz. oz. .... ounce... 1 ounce .... 20 penny weights.
Dwt. dwt. . penny weight 1 penny weight. .. 24 grains.
Gr. gr .... grain.

AVOIRD. WEIGHT.
Ton. .... ton .. 20 hundred weight.
Cwt ...... hund. weight 1 hund. weight. .. 4 quarters.
Qr. qr .... quarter .. 1 quarter .... 28 pounds.
Lb. lb .... pound .. 1 pound.......... 16 ounces.
Oz. oz. .... ounce .. 1 ounce .... 16 drams.
Dr. dr. .... dram.

Each unit of this table, as, for instance, 1 pound, 1 year, &c, is necessarily an incomplex number. The initial letters denoting pounds, shillings, pence, years, &c. viz, *£. S. D. Yr.*, &c. are used for the purpose of expedition. A similar observation will apply to the other initials.

The abbreviated term in the table, viz, AVOIRD. WEIGHT, means Avoir du poids weight: it is employed in weighing articles of bulk. The pound Avoir du poids is equal to 1lb. 2oz. 11dwt. $15\frac{1}{2}$qrs. troy, and bears the same proportion to the latter as 13 999 to 11 520.

* The year and month will admit of a different division, in which the week may be included.

Yr. yr. denotes a year.... 1 year is equal to 13 months.
Mo. mo. .... month.. 1 month....... 4 weeks.
Wk. wk. .... week.... 1 week......... 7 days.

By this division the year is made to consist of 364 days, whereas, by the table it consists of 360 days; and in our Almanacks we shall find the year to be 365 days. By a more accurate division, it may be shown to consist of 365 days, 5 hours, 48 minutes, and 48 seconds.—For a precise knowledge of the reasons for this difference of computation we refer to astronomical works.

† The furlong will admit of a different division, as when land is measured by Gunter's chain, therefore,

Fur. fur. denoting a furlong.. 1 furlong will be equal to 10 chains.
Ch. ch. .... chain.... 1 chain...... 4 poles, or 100 links.
Lk. lk. .... link..... 1 link................ 7·92 inches.
In. in. .... inch.

R 3 We

Figura 130 – Tabela de unidades de medida e quantidades (Clark, 1812, p. 244)

Sobre os números complexos, Clark apresenta um texto extenso, incluindo as quatro operações básicas, conversão de complexo para incomplexo e vice-versa. Tanto para números abstratos tanto para os números complexos, o autor exibe uma ordem diferente do que encontramos até o momento, com a divisão precedendo a multiplicação. Clark justifica sua escolha afirmando que, para compreendermos a multiplicação entre números complexos, precisamos primeiro conhecer a divisão de um complexo por um número inteiro.

[2] Não podemos dividir um número concreto por um número concreto de natureza diferente. Não podemos dividir 24 jardas por 4 horas, & c; embora em alguns tratados sobre aritmética os autores pareçam fazer a tentativa. O erro surge disso, que eles confundiram os números com os quais eles operam com aqueles que servem meramente para determiná-los (tradução nossa)

> Before we proceed to the multiplication, we shall give a previous insight into the nature of the division, of complex numbers. By doing this we shall make no alteration in the plan prescribed for the arrangement of this work, since, division, as we have been (No. 75, p. 74) has preceded multiplication. The necessity of this arrangement is owing to the following circumstance, viz, that the knowledge of multiplying a complex by a complex number, requires the previous knowledge of the division of a complex by a whole number[3]. (Clark, 1812, p. 301)

Depois de apresentar dois exemplos simples de divisão de um número complexo por um inteiro (em ambos, os complexos expressavam valores monetários), Clark inicia sua exposição da multiplicação de números complexos. Os primeiros exemplos do autor são multiplicações de números complexos por números inteiros, sobre as quais ele exibe muitos exemplos.

Para a multiplicação de número complexo por incomplexo, Clark destaca dois exemplos em que os fatores da operação são os mesmos: um exibe o produto de 34 *pounds* 10 *shillings* 2 *pence* por 17 *fathoms*[4], e, no outro, procura-se o produto de 17 *fathoms* por 34 *pounds* 10 *shillings* 2 *pence*.

Example V.

Multiply £34..10..2 by 17:

		34£	10*s.*	2*d.*
		17		
Prod.for 34£.	17 × 34£ give	238 34		
	Auxiliary product..17 × 1£ *will give*..	~~17~~£		
Do. for 10*s.*	17 × 10*s.* give..	8	10	
	Auxiliary product..17 × 1*s.* *will give*..		~~17~~*s.*	
Do. for 2*d.*	17 × $\frac{1}{6}$*s.* give..		2	10
P. for 34£ 10*s.* 2*d.*	Total product..	£586	.. 12	.. 10

Figura 131 – Multiplicação de 34 *pounds* 10 *shillings* 2 *pence* por 17 *fathoms* (Clark, 1812, p. 313)

3 Antes de prosseguirmos para a multiplicação, daremos uma visão prévia da natureza da divisão dos números complexos. Ao fazer isso, não faremos nenhuma alteração no plano prescrito para o arranjo deste trabalho, uma vez que a divisão, como temos visto (n. 75, p. 74), precedeu a multiplicação. A necessidade desse arranjo é devido à circunstância seguinte, a saber, que o conhecimento de multiplicar um complexo por um número complexo requer o conhecimento prévio da divisão de um complexo por um número inteiro (tradução nossa).

4 O *fathom* era uma medida de comprimento britânica e equivalia a 2 jardas, ou 6 pés.

Example VI.

* Multiply 17 fathoms by the abstract numbers of £34..10..2:

	17*fth.*
	34.. 10.. 2.
	$\cancel{10}$ $\cancel{12}$ †
Prod. for 34£. 17 × 34£ give	68*fths.* 0*ft.* 0*in.*0*pt.* 0*pt.* 51
Auxiliary product for 1£ ...	$\cancel{17}$*fths.*
Do. for 10*s.*; or $\frac{1}{2}$£; we shall have half of 17*fths.* ..	8 . 3 .
Auxiliary product for 1*s.* *which is* .... $\frac{1}{10}$ *of* 10*s.*	$\cancel{5}$*ft.* $\cancel{1}$*in.* $\cancel{1}$*pts.* $\cancel{4\frac{4}{5}}$ ‡
Do. for 2*d.*; or $\frac{1}{6}$*s.* will be $\frac{1}{6}$ of auxiliary product	10 . 2 . $4\frac{4}{5}$
For £34..10..2, we shall have for Total Product	586*fths.* 3*ft.*10*in.*2*pts.*$4\frac{4}{5}$*pt.*

Figura 132 – Multiplicação de 17 *fathoms* por 34 *pounds* 10 *shillings* 2 *pence* (Clark, 1812, p. 314)

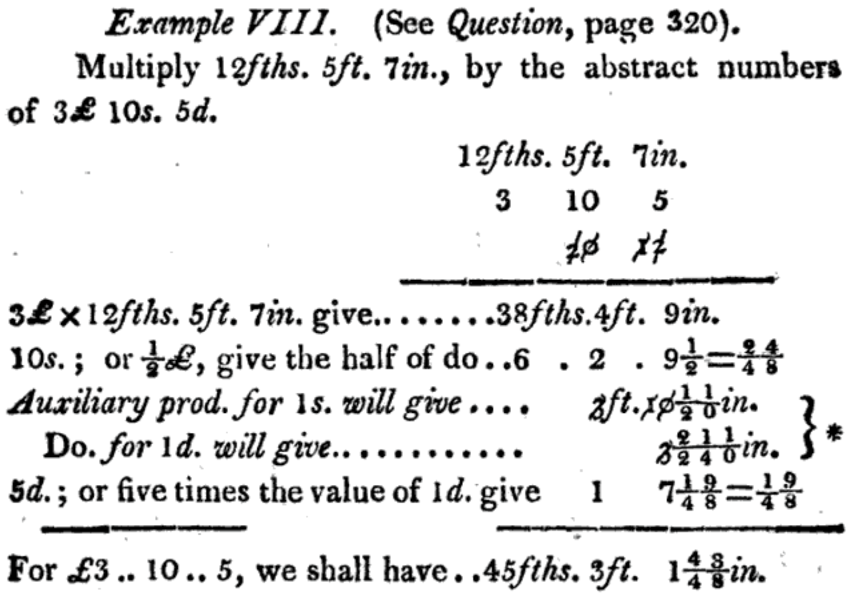
O autor também ensina a multiplicar dois números complexos, e igualmente apresenta dois exemplos em que os fatores são os mesmos: 3 *pounds* 10 *shillings* 5 *pence* e 12 *fathoms* 5 *feet* 7 *inches*.

Example VII. See *Question*, page 319, and page 326.

Multiply 3£ 10*s.* 5*d.* by the abstract numbers of 12*fths.* 5*ft.* 7*in.*

		3£	10*s.*	5*d.*
		12	5	7
			$\cancel{6}$	$\cancel{12}$
Price of 12*fths*		£42 ..	5 ..	0
Price of 5*ft.*	Price of 3*ft.*; or $\frac{1}{2}$*fth.*	1	15	$2\frac{6}{12} = \frac{36}{72}$
	Do. of 2*ft.*; or $\frac{1}{3}$*fth.*	1	3	$5\frac{8}{12} = \frac{48}{72}$
Price of 7*in.*	Price of 6*in.*; or $\frac{1}{4}$ of 2*ft.*		5	$10\frac{5}{12} = \frac{30}{72}$
	Do. of 1*in.*; or $\frac{1}{6}$ of 6*in.*			$11\frac{53}{72} = \frac{53}{72}$
Price of 12*fths.* 5*ft.* 7*in.*		£45 ..	10 ..	$6\frac{23}{72}$

Figura 133 – Multiplicação de 3 *pounds* 10 *shillings* 5 *pence* por 12 *fathoms* 5 *feet* 7 *inches* (Clark, 1812, p. 316)



Example VIII. (See *Question*, page 320).
Multiply 12*fths.* 5*ft.* 7*in.*, by the abstract numbers of 3£ 10*s.* 5*d.*

	12*fths.*	5*ft.*	7*in.*
	3	10	5
3£ × 12*fths.* 5*ft.* 7*in.* give........	38*fths.*	4*ft.*	9*in.*
10*s.*; or $\frac{1}{2}$£, give the half of do..	6	2	$9\frac{1}{2}=\frac{24}{48}$
Auxiliary prod. for 1*s. will give*		2*ft.*	10$\frac{11}{20}$*in.*
Do. *for* 1*d. will give*...........			$2\frac{9}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{0}$*in.*
5*d.*; or five times the value of 1*d.* give		1	$7\frac{19}{48}=\frac{19}{48}$
For £3 .. 10 .. 5, we shall have..	45*fths.*	3*ft.*	$1\frac{43}{48}$*in.*

Figura 134 – Multiplicação de 12 *fathoms* 5 *feet* 7 *inches* por 3 *pounds* 10 *shillings* 5 *pence* (Clark, 1812, p. 318)

Percebemos que Clark sempre considera o multiplicador como número abstrato, mesmo quando este é complexo, e enuncia que os números concretos na posição do multiplicador servem para indicar por quais números abstratos o outro fator deve ser multiplicado.

> We may hence conclude, that WHEN CONCRETE NUMBERS APPEAR IN THE PROCESS BY WHICH WE ASCERTAIN THE PRODUCT OF ANY NUMBERS, THEY SERVE MERELY TO MARK THE MUTUAL DEPENDANCE OF THE ABSTRACT NUMBERS BY WHICH WE ARE TO MULTIPLY AND DIVIDE[5]. (Clark, 1812, p. 320)

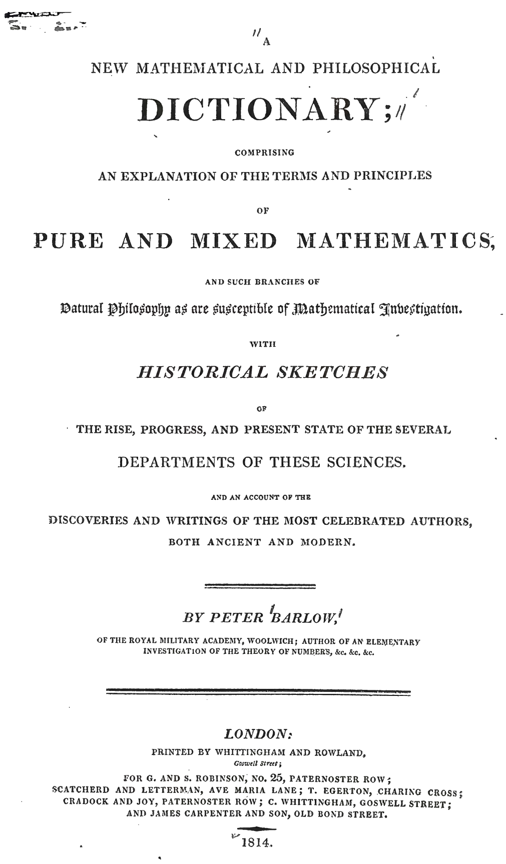
No entanto, Clark não comenta nada sobre a validade ou não da comutatividade na multiplicação dos números complexos.

Outra fonte inglesa em que encontramos menção aos números complexos é o dicionário *A new mathematical and philosophical dictionary*, de Peter Barlow (1814). Na explicação do vocábulo *Arithmetic*, o autor inclui alguns parágrafos sobre a aritmética grega, seus caracteres e notações. A certa altura do texto, Barlow compara a notação grega para números com mais de um algarismo ao que percebe-se nos números complexos:

> This notation in some measure resembles that which we employ for complex numbers, such as feet and inches, or pounds and shillings[6]. (Barlow, 1814, p. 48)

[5] Podemos concluir, portanto, que quando os números concretos aparecem no processo em que demonstramos o produto de qualquer número, eles servem meramente para indicar a sua dependência mútua com os números abstratos que serão utilizados para multiplicar ou dividir (tradução nossa)

[6] Essa notação, em certa medida, se assemelha àquela que empregamos para números complexos, como pés e polegadas, ou libras e *shillings* (tradução nossa).



A

NEW MATHEMATICAL AND PHILOSOPHICAL

DICTIONARY;

COMPRISING

AN EXPLANATION OF THE TERMS AND PRINCIPLES

OF

PURE AND MIXED MATHEMATICS,

AND SUCH BRANCHES OF

Natural Philosophy as are susceptible of Mathematical Investigation.

WITH

HISTORICAL SKETCHES

OF

THE RISE, PROGRESS, AND PRESENT STATE OF THE SEVERAL

DEPARTMENTS OF THESE SCIENCES.

AND AN ACCOUNT OF THE

DISCOVERIES AND WRITINGS OF THE MOST CELEBRATED AUTHORS,

BOTH ANCIENT AND MODERN.

BY PETER BARLOW,

OF THE ROYAL MILITARY ACADEMY, WOOLWICH; AUTHOR OF AN ELEMENTARY INVESTIGATION OF THE THEORY OF NUMBERS, &c. &c.

LONDON:

PRINTED BY WHITTINGHAM AND ROWLAND,

Goswell Street;

FOR G. AND S. ROBINSON, NO. 25, PATERNOSTER ROW; SCATCHERD AND LETTERMAN, AVE MARIA LANE; T. EGERTON, CHARING CROSS; CRADOCK AND JOY, PATERNOSTER ROW; C. WHITTINGHAM, GOSWELL STREET; AND JAMES CARPENTER AND SON, OLD BOND STREET.

1814.

Figura 135 – Folha de rosto do dicionário de Peter Barlow (1814)

Outras obras inglesas em que encontramos os números complexos são os livros *Commercial Arithmetic, with an appendix upon Algebraical Equations; being an introduction to the elements of commerce*, de Christopher Dubost (1807); e *Treatise on Arithmetic Practical and Theoretical, de Dionysius Lardner* (1836); o que nos dá indícios da consolidação dessa teoria também na Inglaterra.

5.3 Itália

Nos livros didáticos italianos *Lezioni di aritmetica*, Giovanni Gorini (1824); *Corso di aritmetica teorico-pratica: applicata al commercio, alla banca, alle aziende, e ad ogni ramo di sociale industria col paragone delle monete, pesi, misure di tutti i popoli Gioambattista Scotti*, Giovanbattista Scotti (1842); e *L'aritmetica, la geometria piana e la geometria solida in sessanta lezioni per Angelo Santoro*, Angelo Santoro (1844) encontramos algumas seções ou capítulos destinados ao ensino da teoria dos números complexos. Além desses, os complexos também aparecem na tradução italiana da aritmética de Lacroix, *Trattato elementare di aritmetica ad uso della scuola centrale delle quattro nazioni [di] S. F. Lacroix* (1831), no *Calcolo dei numeri complessi col metodo delle parti aliquote, frazioni ordinarie e frazioni decimali, considerando le antiche misure della provincia di Trapani e loro conversione nel nuovo Sistema metrico* *decimale, de Luigi Giliberti* (1887), no *Calcolo dei numeri complessi col metodo delle parti aliquote, frazioni ordinarie e frazioni decimali, considerando le antiche misure della provincia di Cremona, e conversione delle antiche misure Cremonesi in misure metriche e viceversa* , de Vittorio Fabris (1890), no *Parte elementare : classe 3. : delle varie frazioni, delle misure metrico-decimali e delle antiche ed in generale delle operazioni coi numeri complessi*, de Luigi Brignoli (1869) e no *Quarto libro d'aritmetica per le scuole popolari [Texte imprimé] : calcolo con numeri interi e con frazioni decimali, con numeri complessi e frazioni comuni / del Cavaliere Dr. Fr. de Močnik* (1877).

O último desses livros listados é de um dos principais autores austríacos de livros didáticos da época. Seus livros eram originalmente escritos em alemão, e foram traduzidos para quatorze línguas. É de se admirar que em 1877 tenha sido publicada mais uma versão em italiano do livro de Mocnik, visto que os territórios italianos incorporados ao império austro-húngaro foram reintegrados à Itália em 1860. A existência dessa versão italiana nos sinaliza que os números complexos teriam sido abordados em livros didáticos da Áustria e nos instiga, também, a questionar como os números complexos podem ter sido denominados na edição original de Mocnik, em alemão. No entanto, ainda não encontramos algum desses livros.

Na obra de Gorini, os números complexos são estudados longamente, assim como as operações envolvendo esses números. Um dos problemas abordados como exemplos no livro procura conhecer o preço de 25 libras de seda, sabendo que cada libra custa 17 *lire* 15 *soldi* 6 *denari*: "*Vogliasi sapere a cagione d'esempio il valore di 25 libbre di seta a ragione di 17 lire, 15 soldi, e 6 denari per ogni libbra.*"(Gorini, 1824, p. 223)

Gorini realiza a conta de modo análogo ao que já vimos em outros livros, como o do Bézout. Inclusive, ensina o método das partes alíquotas para facilitar as contas.

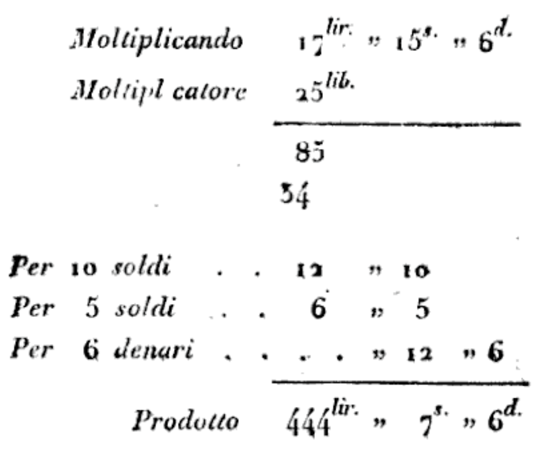

Moltiplicando 17$^{lir.}$ » 15$^{s.}$ » 6$^{d.}$
Moltiplicatore 25$^{lib.}$
85
34
Per 10 *soldi* . . 12 » 10
Per 5 *soldi* . . 6 » 5
Per 6 *denari* . . . . » 12 » 6
Prodotto 444$^{lir.}$ » 7$^{s.}$ » 6$^{d.}$

Figura 136 – Multiplicação de 17 *lire* 15 *soldi* 6 *denari* e 25 *libbre*. (Gorini, 1824, p. 226)

Sobre a ordem dos fatores na multiplicação, Gorini afirma que sua mudança afeta o produto apenas porque as espécies de unidades possuem subdivisões distintas; e que, caso essas divisões da unidade seguissem a mesma lei, a multiplicação seria comutativa, como acontece com os números abstratos. No entanto, o autor considera que a espécie do resultado será igual àquela do multiplicando. (Gorini, 1839, p. 229)

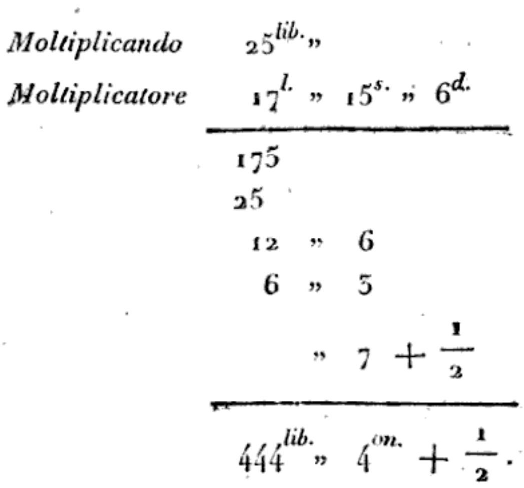


Figura 137 – Multiplicação de 25 *libbre* por 17 *lire* 15 *soldi* 6 *denari*. (Gorini, 1824, p. 228)

Sobre o sistema métrico decimal e ainda sobre a comutatividade ou não da multiplicação de números complexos, o autor afirma:

> Il sistema metrico anche in questo ha un grandissimo vantaggio sopra tutti gli altri sistemi. Le divisioni e suddivisioni di ogni specie di unità appartenenti al sistema medesimo seguendo sempre la legge decadica, ne viene, che nelle moltiplicazioni dei numeri concreti accompagnati da frazioni decimali, si potrà a piacere invertere l'ordine dei fattori, avendo però sempre riguardo di considerare il prodotto come composto di unità della specie medesima di quelle del moltiplicando, o di quel fattore che di sua natura deve tenere luogo del moltiplicando[7]. (Gorini, 1839, p. 229)

Desse modo, da citação anterior percebemos que Gorini possui a percepção de que, com a implantação do sistema métrico decimal, evita-se o problema da não-comutatividade, a partir do momento em que as subdivisões de toda espécie de unidade é decimal. Por isso, o autor considera esse sistema mais vantajoso do que qualquer outro.

O que encontramos em Gorini e em outras obras italianas sobre as operações com complexos se assemelha ao material que já havíamos localizado no Brasil, em Portugal e na Inglaterra.

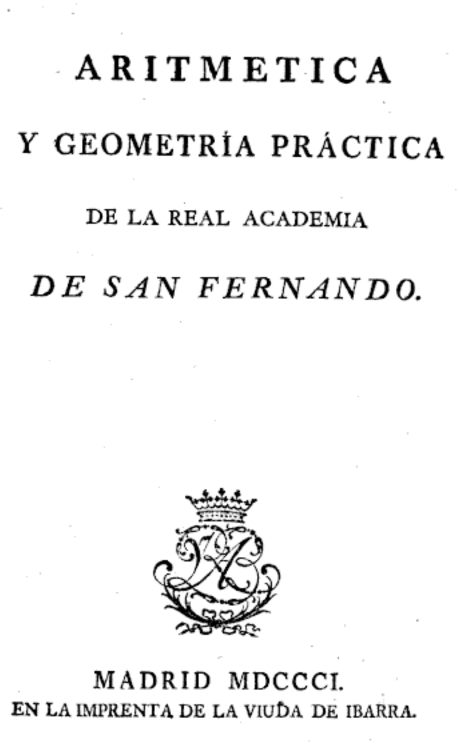
[7] O sistema métrico também tem uma grande vantagem sobre todos os outros sistemas. As divisões e subdivisões de cada espécie de unidades pertencentes ao sistema sempre segue a lei decádica, o que resulta em que, na multiplicação dos números concretos acompanhado de frações decimais, pode-se reverter a ordem dos fatores, mas sempre tendo em conta considerar o produto como composto de unidades da mesma espécie como aquelas do multiplicando, ou daquele fator que por sua natureza deve ter o lugar do multiplicando (tradução nossa).

5.4 Espanha

No livro *Aritmetica y Geometría Práctica de la Real Academia de San Fernando* (1801), de Antonio Varas, encontramos os números complexos. A definição desses números é feita de forma análoga ao que temos visto em outras obras:

> Llámase número complexo ó denominado á todo aquel que consta de diferentes especies de unidades todas ellas relativas á un mismo género, é incomplexo al que no expresa sino una especie de unidades: 20 Pe. ó 20 pesos es un número incomplexo: 20 Pe. 8 rs. 15 mrs. es complexo[8]. (Varas, 1801, p. 49)

Na citação acima, Pe. significa *peso*, enquanto rs. significa *reales* e, mrs., *maravedis*. Essas unidades monetárias antigas espanholas são tais que 1 *peso* vale 15 *reales*, e 1 *real* equivale a 34 *maravedis*.



ARITMETICA

Y GEOMETRÍA PRÁCTICA

DE LA REAL ACADEMIA

DE SAN FERNANDO.

MADRID MDCCCI.

EN LA IMPRENTA DE LA VIUDA DE IBARRA.

Figura 138 – Folha de rosto do *Aritmetica y Geometría Práctica de la Real Academia de San Fernando* (Varas, 1801)

Também a adição e subtração são realizadas das formas usuais. Quanto à multiplicação de números complexos, o autor inicia dizendo que, para realizá-la, poderíamos primeiro converter os números complexos em fracionários. No entanto, seria possível multiplicá-los sem essa conversão. Para isso, afirma que se deve escolher como multiplicando o fator que for da mesma espécie daquela que estará no produto.

[8] Chama-se número complexo ou *denominado* a todos os que consistem em diferentes espécies de unidades, todas elas relacionadas ao mesmo gênero, e incomplexos àqueles que expressam apenas um tipo de unidade: 20 Pe. ou 20 pesos é um número incomplexo; 20 Pe. 8 rs. 15 mrs. é complexo (tradução nossa)

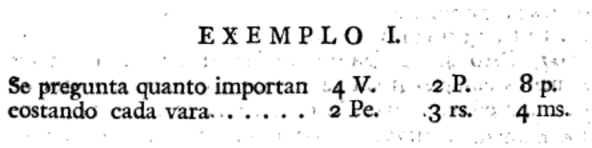
> Ántes de declarar cómo se hace la operacion, es del caso prevenir que quando se han de multiplicar uno por otro dos números, cuyas unidades son de distinta especie, se ha de tomar por multiplicando aquel cuyas unidades fueren de la misma especie que las que ha de expresar el producto. Si quiero saber, por exemplo, quánto importan 12 varas de paño á 50 rs. la vara, he de considerar como multiplicando el número 50 rs. pues el producto ha de expresar reales: porque en este caso han de salir al producto tantas veces 50 rs. quantas varas hay, esto es 12 veces[9]. (Varas, p. 53)

Essa forma de dizer que multiplicando e produto serão da mesma espécie é diferente do que vimos em outras obras. Nos outros livros, escolhia-se o fator que deveria ser repetido uma quantidade de vezes como sendo o multiplicando; enquanto afirmava-se que o produto teria que ser da mesma espécie desse fator. Aqui, o autor já recomenda escolher o multiplicando a partir da percepção de que deverá ter a mesma espécie de unidade do resultado (produto).

Outro ponto a ser destacado é que o autor declara que o multiplicador deverá ser considerado um número abstrato, pois seria um absurdo multiplicar números concretos.

> De lo que se infiere que el multiplicador es siempre un número abstracto que no (6) expresa unidades ni partes de unidad de determinada especie, sino quantas veces se ha de tomar el multiplicando. En el exemplo propuesto el multiplicador 12 es un número abstracto, y debe ser así, porque si le considerásemos como que representa 12 varas, y practicásemos la multiplicacion, concebiríamos un absurdo, pues lo sería multiplicar varas por reales[10]. (Varas, 1801, p. 54)

São apresentados apenas dois exemplos de multiplicação de números complexos, e nos dois o autor procede da seguinte forma: 1^o, reduz-se os dois fatores às suas menores unidades; 2^o, os dois números resultantes são multiplicados; e 3^o, Divide-se esse resultado pelo número que expressa quantas vezes a unidade maior do multiplicador contém a menor. Esse quociente será o produto procurado. (Varas, 1801, p. 54)


EXEMPLO I.

Se pregunta quanto importan 4 V. 2 P. 8 p.
costando cada vara....... 2 Pe. 3 rs. 4 ms.

Figura 139 – Multiplicação de 4 *varas* 2 *pies* 8 *pulgadas* por 2 *pesos* 3 *reales* 4 *maravedises* (Varas, 1801, p. 54)

[9] Antes de declarar como a operação é feita, é o caso de prevenir que quando dois números têm que ser multiplicados um por outro, cujas unidades são de espécies diferentes, deve ser tomado como multiplicando aquele cujas unidades são da mesma espécie que aquelas que irão expressar o produto. Se eu quiser saber, por exemplo, quanto custa 12 varas de pano a 50 rs. a vara, eu tenho que considerar como multiplicando o número 50 rs. porque o produto será expresso em *reales*: pois neste caso encontraremos o produto fazendo tantas vezes rs. quantas varas existem, isto é, 12 vezes (tradução nossa).

[10] A partir do que é inferido que o multiplicador é sempre um número abstrato que não (6) expressa unidades ou partes da unidade de uma determinada espécie, mas quantas vezes o multiplicando tem que ser tomado. No exemplo proposto, o multiplicador 12 é um número abstrato, e deverá ser assim, porque se o considerássemos representando 12 varas e praticássemos a multiplicação, poderíamos conceber um absurdo, uma vez que estaríamos multiplicando varas por *reales* (tradução nossa).

Os cálculos realizados pelo autor são os seguintes: 2 Pe. 3 rs. 4 ms. são iguais a 1126 ms., assim como 4 V. 2 P. 8 p. equivalem a 176 p. Multiplicando 1126 por 176, tem-se 198176; que, dividido por 36, resulta em 5504 $\frac{32}{36}$ ms. Como $\frac{32}{36}$ é aproximadamente igual a 1, o autor considera como resultado 5505 *maravedises*, isto é, 10 *pesos* 11 *reales* e 31 *maravedises*. O autor não ensina o método das partes alíquotas, limitando-se a realizar a multiplicação da forma descrita aqui.

Fomos capazes de encontrar os números complexos, sendo chamados números *denominados*, em outros livros espanhóis; como é o caso da *Aritmética para negociantes*, de Benito Balls (1790); *Elementos de aritmética numérica y literal al estilo de comercio para instrucción de la juventud*, de Manuel Poy y Gomes (1819); e *Elementos de aritmética mercantil, de Francisco Moreu* (1823). Nessas obras é ensinado também o método das partes alíquotas, permitindo o produto dos números complexos sem a necessidade de convertê-los a incomplexos.

No livro de Poy (1819), o autor afirma que é costume da região resolver a multiplicação de números denominados reduzindo-se estes à sua menor unidade e depois multiplicando-os e divivindo o resultado pela quantidade de vezes que a menor unidade do multiplicador está contida na maior, assim como Varas (1801) fez em sua obra. No entanto, Poy declara sua preferência ao método das partes alíquotas, em detrimento do método usual.

> Sobre este punto, no puedo menos que decir , que tal moda de resolver me disgusta enteramente, porque á, mas de ser por lo comun muy engorroso, denota que los que se limitan ó ciñen á él, ignoran no solamente la teórica de los quebrados, sino que tambien carecen de su necesario manejo para la perfecta inteligencia de varias cuestiones, que á menudo se ofrecen: pero como es del caso estar corrientes al estilo popular ó del pais, resolveremos otra vez aquí por este método los problemas 475, 476, 477 y 479, que acabamos de resolver. [11] (Poy, 1819, p. 136)

Apesar de Poy apresentar um capítulo extenso sobre os números *denominados*, não comenta sobre a comutatividade ou não da multiplicação entre esses números; o que também não o faz os outros autores espanhóis estudados.

5.5 Argentina

Na Argentina, descobrimos um livro de aritmética em que a expressão *números denominados* possui significado distinto do que encontramos nos livros espanhóis: *El aritmetico argentino, ò Tratado completo de aritmetica practica. Para el uso de las escuelas*, de Garcia y Coates (1833).

A definição desses números, segundo a obra de Garcia y Coates, é dada abaixo.

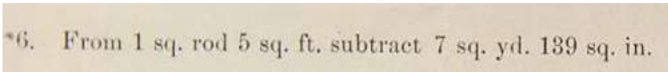
[11] Sobre este ponto, não posso deixar de dizer que tal modo de resolver me desagrada inteiramente, porque, embora comumente seja muito complicado, denota que aqueles que se limitam ou aderem a ele, ignoram não apenas a teoria das partes fracionárias, mas também carecem do manejo necessário para a inteligência perfeita de várias questões que muitas vezes são oferecidas: mas como é o caso de ser correntes no modo popular ou do país, vamos resolver novamente aqui por este método os problemas 475, 476, 477 e 479, que acabamos de resolver (tradução nossa).

> Llámase número denominado al que ademas de espresar un cierto número de unidades las espresa con relacion a cierta especie de cosas, como si decimos: 6 años, 12 quintales, 7 leguas, 14 pesos &[12]. (Garcia y Coates, 1833, p. 16)

Desse modo, para Garcia y Coates (1833), número *denominado* é qualquer número concreto. O autor realiza em seu livro as quatro operações com esses números, mas sem muita explicação. O livro é composto basicamente de regras, exemplos e exercícios.

5.6 Estados Unidos

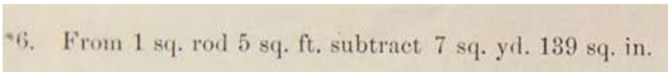
Em um exame de admissão de Harvard de 1869, encontramos duas questões em que os números complexos estavam presentes. A primeira questão pergunta o resultado da subtração de 1 *square rod*[13] 5 *square feet* e 7 *square yards* 139 *square inches*.



*6. From 1 sq. rod 5 sq. ft. subtract 7 sq. yd. 139 sq. in.

Figura 140 – Sexta questão da parte de aritmética do exame de 1899 para admissão em Harvard.

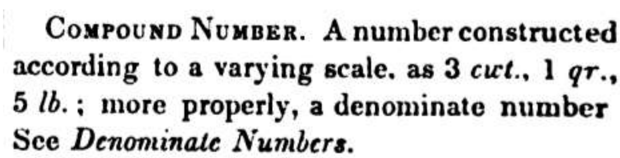
Na próxima questão, busca-se o montante de 50 *pounds* 12 *shillings* 5 *pence* aplicados a juros simples de 8% (ao mês?) por 5 anos, 2 meses e 3 dias.



*6. From 1 sq. rod 5 sq. ft. subtract 7 sq. yd. 139 sq. in.

Figura 141 – Sétima questão da parte de aritmética do exame de 1899 para admissão em Harvard.

Em um dicionário americano de 1857, encontramos uma expressão que equivale aos nossos números complexos: *compound number* é definido como "um número construído de acordo com uma escala variável". (Davies & Peck, 1857, p. 114)



Compound Number. A number constructed according to a varying scale, as 3 *cwt.*, 1 *qr.*, 5 *lb.*; more properly, a denominate number See *Denominate Numbers.*

Figura 142 – Verbete *compound number*, no *Mathematical Dictionary* (Davies & Peck, 1857, p. 114)

Analisando livros de aritmética desse país, não encontramos até o momento o termo número complexo como no contexto desse trabalho. Entre as obras que estudamos, estão *A New*

[12] Chama-se número *denominado* aquele que, além de expressar um certo número de unidades, os expressa em relação a certas espécies de coisas, como se disséssemos: 6 anos, 12 quintais, 7 léguas, 14 pesos (tradução nossa)

[13] 1 *square rod* é igual a $30\frac{1}{4}$ *square yards*.

System of Mercantile Arithmetic, Adapted to the Commerce of the United States, in Its Domestic and Foreign Relations, de Michael Walsh (1807); *The Scholar's Arithmetic, Designed for the Use of Schools in the United States*, de Jacob Willetts (1822); *Conkling's Arithmetic, The Young Arithmetician's Guide to a Knowledge of Numbers*, de Thomas Conkling (1831); *The National Arithmetic, on the Inductive System, Combining the Analytic and Synthetic Methods, in which the Principles of Arithmetic are Explained in a Perspicuous and Familiar Manner*, de Benjamin Greenleaf (1839); e *The United States Arithmetic, Designed for Academies and Schools*, de Willian Vogdes (1847).

No entanto, encontramos em alguns livros multiplicação entre números concretos, sendo esta operação denominada *duodecimal* ou *cross multiplication*. De acordo com Greenleaf (1839, p. 192), a denominação *duodecimal* é aplicada quando as unidades de uma determinada espécie são divididas de doze em doze.

Como exemplo de operação com *duodecimals*, Greenleaf propõe o produto de 6 *feet* 8 *inches* por 4 *feet* 5 *inches*.

EXAMPLES.

1. Multiply 6 feet 8 inches by 4 feet 5 inches.

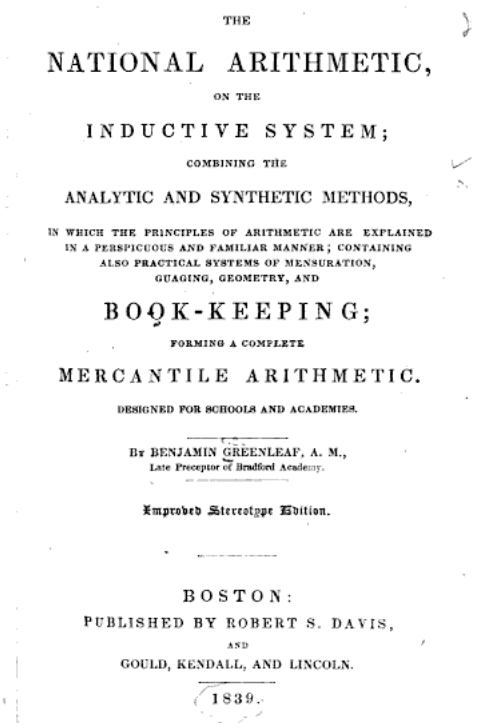
OPERATION.	
$6\ 8'$	As feet are the integers or units, it is evident, that feet multiplied by feet will produce feet; and as inches are twelfths of a foot, the product of inches by feet will be twelfths of a foot. For the same reason, inches multiplied by inches will produce twelfths of an inch, or one hundred and forty-fourths of a foot. Hence we deduce the following
$4\ 5$	
$26\ 8'$	
$2\ 9\ 4''$	
$29\ 5'\ 4''$	

Figura 143 – Multiplicação de 6 *feet* 8 *inches* por 4 *feet* 5 *inches*. (Greenleaf, 1839, p. 192)

O parágrafo seguinte exibe a regra geral que Greenleaf enuncia para esse tipo de operação.

> Under the multiplicand write the same names or denominations of the multiplier; that is, feet under feet, inches under inches, &c. Multiply each term in the multiplicand, beginning at the lowest by the feet of the multiplier, and write each result under its respective term, observing to carry a unit for every 12 from each denomination to its neart superior. In the same manner the multiplicand by the inches of the multiplier, and write the result of each term one place further towards the right of those in the multiplicand. Proceed in the same manner with the seconds and all the rest of the denominations, and the sum of all the lines will be the product required[14] (Greenleaf, 1839, p. 192-193).

[14] Sob o multiplicando, escreva os mesmos nomes ou denominações do multiplicador; isto é, pés sob pés, polegadas abaixo de polegadas, e assim por diante. Multiplique cada termo no multiplicando, começando pela menor unidade, pela quantidade de pés do multiplicador, e escreva cada resultado sob seu respectivo termo, observando que se deve carregar uma unidade, para cada 12 subunidades agrupadas, ao seu próximo superior. Da mesma forma, multiplique pelas polegadas do multiplicador, e escreva o resultado de cada termo um lugar mais para a direita daqueles no multiplicando. Proceda da mesma maneira com os segundos e todo o resto das denominações, e a soma de todas as linhas será o produto requerido (tradução nossa).



THE
NATIONAL ARITHMETIC,
ON THE
INDUCTIVE SYSTEM;
COMBINING THE
ANALYTIC AND SYNTHETIC METHODS,
IN WHICH THE PRINCIPLES OF ARITHMETIC ARE EXPLAINED IN A PERSPICUOUS AND FAMILIAR MANNER; CONTAINING ALSO PRACTICAL SYSTEMS OF MENSURATION, GUAGING, GEOMETRY, AND
BOOK-KEEPING;
FORMING A COMPLETE
MERCANTILE ARITHMETIC.
DESIGNED FOR SCHOOLS AND ACADEMIES.

BY BENJAMIN GREENLEAF, A. M.,
Late Preceptor of Bradford Academy.

Improved Stereotype Edition.

BOSTON:
PUBLISHED BY ROBERT S. DAVIS,
AND
GOULD, KENDALL, AND LINCOLN.
1839.

Figura 144 – Folha de rosto do *The National Arithmetic, on the Inductive System, Combining the Analytic and Synthetic Methods, in which the Principles of Arithmetic are Explained in a Perspicuous and Familiar Manner*, de Greenleaf (1839)

O que o autor chama de *seconds* são, nesse caso, as polegadas. Analogamente, as subdivisões da polegada (linhas) são denominadas *thirds*, enquanto a unidade maior aqui considerada (*feet*) é chamada *prime*. Greenleaf ainda afirma que:

> Feet multiplied by feet, give feet.
> Feet multiplied by primes, give primes.
> Feet multiplied by seconds, give seconds.
> Primes multiplied by primes, give seconds.
> Primes multiplied by seconds, give thirds.
> Primes multiplied by thirds, give fourths.
> Seconds multiplied by seconds, give fourths.
> Seconds multiplied by thirds, give fifths.
> Seconds multiplied by fourths, give sixths.
> Thirds multiplied by thirds give sixths.
> Thirds multiplied by fourths, give sevenths.
> Thirds multiplied by fifths, give eighths, &c[15]. (Greenleaf, 1839, p. 193)

15 Pés multiplicados por pés, dão os pés. Pés multiplicados por primos, dão primos. Pés multiplicados por segundos, dão segundos. Primos multiplicados por primos, dão segundos. Primos multiplicados por segundos, dão terços. Primos multiplicados por terços, dão quartas. Segundos multiplicados por segundos, dão quartas. Segundos multiplicados por terços, dão quintas. Segundos multiplicados por quartas, dão sextas. Terços multiplicados por terceiros dão sextas. Terços multiplicados por quartos, dão sétimas. Terços multiplicados por quintos, dão oitavos, e assim por diante (tradução nossa).

Quando a multiplicação é realizada em números concretos que não possuem unidades subdivididas de doze em doze, ela é denominada *cross multiplication*. (Greenleaf, 1839, p. 195) Um exemplo de *cross multiplication* é exposto no exemplo abaixo, em que se pretende multiplicar 32 *pounds* 6 *shillings* 8 *pence* por 2 *pounds* 5 *shillings* 7 *pence*.

33. Multiply 3£. 6s. 8d. by 2£. 5s. 7d.

OPERATION.

	£.	s.	d.
	3	6	8
	2	5	7
3£.×2£.= 6£.=	6	0	0
6s. ×2£.=12s. =	0	12	0
8d. ×2£.=16d. =	0	1	4
3£.×5s. =15s. =	0	15	0
6s. ×5s. = $\frac{30}{20}$ s. =	0	1	6
8d. ×5s. = $\frac{40}{20}$ d. =	0	0	2
3£.×7d. =21d. =	0	1	9
6s. ×7d. = $\frac{42}{20}$ d. =	0	0	$2\frac{1}{10}$
8d. ×7d. = $\frac{56}{240}$ d. =	0	0	$0\frac{7}{30}$
	7£.	11s.	$11\frac{1}{3}$d.

The pupil will perceive by the operation, that pounds multiplied by pounds produce pounds; pounds multiplied by shillings produce shillings; pounds multiplied by pence produce pence; and, as shillings are twentieths of a pound, if they be multiplied together, their product will be four hundredths of a pound, or twentieths of a shilling.

Figura 145 – Exemplo de *cross multiplication*. (Greenleaf, 1839, p. 195)

À direita da figura, lemos:

> O aluno perceberá pela operação que pounds multiplicados por pounds produzem pounds; pounds multiplicados por shillings produzem shillings; pounds multiplicados por pence produzem pence; e, como os shillings são a vigésima parte do pound, se forem multiplicados um pelo outro o seu produto será de quatro centésimos pound, ou a vigésima parte de um shilling. (Greenleaf, 1839, p. 195, tradução nossa)

Greenleaf enuncia o que alega ser uma regra geral para a realização da *cross multiplication*. Na verdade, o que ele faz é tentar justificar as unidades presentes no resultado da operação.

> That if we multiply any denomination by an integer, the value of an unit in the product will be equal to an unit in the multiplicand; but, if we multiply by any number of an inferior denomination, the value of an unit in the product will be so much inferior to the value of an unit in the multiplicand, as an unit of the multiplier is less than an integer[16]. (Greenleaf, 1839, p. 196)

[16] Que se multiplicarmos qualquer denominação por um inteiro, o valor de uma unidade no produto será igual a uma unidade no multiplicando; mas, se multiplicarmos por qualquer número de uma denominação inferior, o valor de uma unidade no produto será muito inferior ao valor de uma unidade no multiplicando, já que uma unidade do multiplicador é menor que um inteiro (tradução nossa).

A teoria dos *duodecimals* ou *cross multiplication* também se encontra nas obras de Walsh (1807), Willets (1822), Conkling (1831) e Vogdes (1847), de forma semelhante ao que foi feito por Greenleaf (1839).

CAPÍTULO 6

O problema da multiplicação de grandezas

Dedicaremos esse capítulo a análises do problema de se multiplicar grandezas. Inicialmente, retomaremos a definição clássica de multiplicação presente nos *Elementos* de Euclides. Já vimos que, no sétimo livro de Euclides, a definição 15 diz que

> A number is said to multiply a number when that which is multiplied is added to itself as many times as there are units in the other, and thus some number is produced[1]. (Heath, 1956, p. 278)

No entanto, apesar da definição acima estar bem fundamentada para a multiplicação de números abstratos, a problemática da multiplicação de grandezas ainda não se encontra de forma alguma esclarecida. A partir do conceito de números complexos e da abordagem das operações entre essas entidades, alguns autores de livros didáticos, como Camus e Bézout, introduziram a *multiplicação geométrica*, a partir da qual a multiplicação entre grandezas fica, para eles, bem fundamentada.

Poucos matemáticos interessaram-se por essa problemática. Destacaremos aqui a conceitualização das grandezas e das operações entre elas elaborada por Freudenthal. Porém, como veremos, essa é uma questão que ainda se encontra em aberto e que, ao longo do tempo, foi motivo de inúmeras controvérsias.

6.1 A multiplicação e a divisão geométricas abordadas em livros didáticos

Estudaremos primeiramente, nesse capítulo, as chamadas *multiplicação geométrica* e *divisão geométrica*, encontradas em dois livros didáticos franceses: a Aritmética de Camus e a de Bézout.

[1] Um número é dito multiplicar um número quando o número que está sendo multiplicado é adicionado a ele mesmo tantas vezes quantas unidades existirem no primeiro, e assim um número é produzido (tradução nossa).

6.1.1 Cours de Mathématique. Première Partie. Élémens d'Arithmétique, de Charles-Étienne Camus (1749)

Analisando a abordagem conceitual da multiplicação entre grandezas presente no *Cours de Mathématique. Première Partie. Élémens d'Arithmétique*, de Charles-Étienne Camus (1749), percebemos que esta só é concebida como uma multiplicação geométrica. O autor não vislumbra grandezas de outra espécie sendo multiplicadas, como acontece, por exemplo, na Física. Além disso, observamos que, para Camus, a justificativa geométrica para o seu argumento de que uma linha multiplicada por outra linha resulta em uma superfície lhe basta. No entanto, nos questionamos se tal fundamentação geométrica seria suficiente e recordamos da Introdução do presente trabalho que, para Descartes, a multiplicação de uma linha por outra resultava em uma linha.

Passaremos então, aos detalhes de como Camus abordava as denominadas multiplicação e divisão geométricas em sua obra. A definição de Camus para essa multiplicação é explicitada abaixo, onde o autor esclarece como seria a multiplicação geométrica em determinadas situações. Para cada tipo de medida linear utilizada, é dado um nome específico para a multiplicação dessas medidas lineares. Se os dois fatores da multiplicação são dados em toesas, ou partes dela, a multiplicação recebe o nome de *Toisé*. Caso os fatores sejam dados em (partes de) *aunes*, será denominada *Aunage*. Por último, caso os fatores da multiplicação sejam *perches*, ela será chamada *Arpentage*. Todas essas definições e denominações nos levam a crer que o livro de Camus não é o primeiro a apresentar essa abordagem da multiplicação de números complexos; e que essa aritmética "de praticantes"já era realizada nas ruas ou no comércio em períodos anteriores ao desse livro. Camus ressalta que nessa obra será estudado o *Toisé*, e que as outras multiplicações são análogas a ele:

> Si les deux facteurs étendus de la multiplication sont réduit en toises, ou en pieds, ou en pouces, &c, qui ne sont que des parties de la toise, on donne à la multiplication le nom de *Toisé*.
>
> Si les deux facteurs de la multiplication étoient des aunes ou des parties relatives à l'aune, on donneroit à la multiplication le nom d'*Aunage*.
>
> Si les deux facteurs de la multiplication étoient des perches ou d'autres mesures relatives à l'arpent qui contient cent perches quarrées, on donneroit à la multiplication le nom d'*Arpentage*.
>
> Comme l'aune, la perche, & les autres mesures dont nous faisons usage, sont relatives à la toise qui tient le premier rang parmi nos mesures, & qu1il sera facile d'appliquer à d'autres mesures ce que nous allons dire de la toise, ou de la multiplication des lignes & de surfaces mesurées en toises; nous nous contenterons d'expliquer le toisé.[2]. (Camus, 1749, p. 184)

[2] Se os dois fatores estendidos de multiplicação são reduzidos em toises, ou em pés, ou polegadas, & c, que são apenas partes da toesa, a multiplicação recebe o nome de *Toisé*. Se os dois fatores de multiplicação fossem *aunes* (varas) ou partes relativas à *aune*, o nome *Aunage* seria dado à multiplicação. Se os dois fatores de multiplicação fossem *perches* ou outras medidas relacionadas ao *arpent* (acre), que contém cem *perches* quadrados, a multiplicação receberia o nome de *Arpentage*. Como a *aune*, a *perche* e as outras medidas que usamos são relativos à *toise*, que ocupa o primeiro lugar entre as nossas medidas, será fácil aplicar a outras medidas o que vamos dizer da *toise*, ou a multiplicação de linhas e superfícies medidas em toesas; nós nos

Desse modo, é iniciado no Livro IV a parte desse livro entitulada *Du Toisé*. Nela, Camus define *toisé* como a arte de se medir segmentos, superfícies e sólidos por meio da toesa ou de medidas relacionadas à toesa; isto é, procurar saber quantas vezes a toesa (ou suas partes) estão contidas naquilo que se deseja medir. (Camus, 1749, p. 185)

Para isso, o autor destaca que será preciso pensar em três diferentes tipos de toesa, dependentes da natureza do que se quer medir - linha, superfície ou sólido -, que Camus denomina toesa linear, toesa superficial e toesa sólida, respectivamente. No próximo parágrafo, Camus nos fornece exemplos da geometria para mostrar como realizar o *toisé*.

> On démontre en Géométrie qu'un parallélogramme est égal au produit de sa base multipliée para sa largeur ou hauteur; par exemple qu'un parallélogramme dont la base a 6 toises de long, & dont la largeur ou hauteur est de 5 toises, contient 5 fois 6 toises, ou 30 toises quarrées dans sa superficie. On démontre aussi qu'un parallélépipede est égal au produit de la superficie de sa base multipliée par sa hauteur; par exemple qu'un solide dont la base est un parallélogramme de 6 toises de long sur 5 toises de large, & dont la hauteur est de 4 toises, contient 120 toises cubes, parce que la base ayant 6 toises de long sur 5 toises de large, contient 30 toises quarrées de superficie, & que 30 toises de superficie multipliées par 4 toises produisent 120 toises cubes.[3]. (Camus, 1749, p. 185)

Os próximos parágrafos são dedicados, dessa forma, a demonstrar os cálculos realizados no exemplo acima para o cálculo da área de retângulos e para o volume de paralelepípedos retângulos. No caso do cálculo da área de retângulos, a justificativa do autor é a seguinte.

> Soit un quarrée long ABCD, dont la base BC & la hauteur AB soient mesurées avec la toise linéaire, qu'on appelle simplement toise; que BG, GI, IL, LN, NP, PC , soient les toises contenues dans la base BC, & que AQ, QR, RS, ST, TB, soient les toises contenues dans la largeur ou hauteur AB. Si par les points G, I, L, N, P, de la base, on mene à la hauteur AB des paralleles GF, IH, LK, NM, PO; l'on divisera le quarré long ABCD en autant de rectangles ABCF, FGIH, HILK, KLNM, MNPO, OPCD, qu'il y aura de toises dans la base BC.
>
> Chacun de ces rectangles ayant une toise de large, & ayant de longueur autant de toises qu'il y en a dans la hauteur AB du quarré long, contiendra évidemment autant de toises quarrées qu'il y a de toises linéaires dans la hauteur AB. Ainsi pour avoir le nombre de toises quarrées contenues dans le quarré long ABCD, il faudra prendre le nombre des rectangles ABGF, FGIH, HILK, & c qui sont apuyés sur la base BC, ou le nombre des toises linéaires BG, GI & c contenues dans la base BC, autant de sois qu'il y aura de toises quarrées dans chacun de ces rectangles, c'est-à-dire autant de fois qu'il y aura de toises linéaires dans la hauteur AB.
>
> Mais prendre le nombre des toises linéaires qui sont dans la base BC du rectangle, autant de fois qu'il y a de toises linéaires dans la hauteur AB de ce

contentaremos em explicar o *toisé* (tradução nossa).

[3] A geometria mostra que um paralelogramo é igual ao produto de sua base multiplicado por sua largura ou altura; por exemplo, um paralelogramo cuja base tem 6 toesas de comprimento, e cuja largura ou altura é de 5 toesas, contém 5 vezes 6 toesas ou 30 toesas quadradas em sua área. Também mostramos que um paralelepípedo é igual ao produto da superfície de sua base multiplicada por sua altura; por exemplo, um sólido cuja base é um paralelogramo 6 toesas com 5 toesas de largura e cuja altura é de 4 toesas, contém 120 toesas cúbicas, porque a base, que é de 6 toesas longitudinais por 5 toesas, contém 30 toesas quadradas de superfície, e 30 toesas de superfície multiplicadas por 4 toesas produzem 120 toesas cúbicas (tradução nossa).

> rectangle, c'est multiplier le nombre de toises linéaires de la base BC par le nombre des toises linéaires de la hauteur ou largeur AB.
>
> Donc on aura le nombre des toises quarrées contenues dans un quarré long, en multipliant le nombres de toises linéaires de la base par le nombre des toises linéaires de sa hauteur ou largeur [4]. (Camus, 1749, p. 186-187)

O autor destaca que, se o retângulo tiver suas medidas dadas em *pieds* ou *pounces*, por exemplo, o raciocínio é análogo, e o produto será dado em *pieds quarrés* ou *pounces quarrés*, respectivamente. Ainda, se o comprimento do retângulo for dado em uma unidade e a altura em outra, Camus afirma que, nesses casos, "*les mesures superficielles contenues dans la surface du quarré long, ne sont pas des mesures quarrées, mais des mesures qui ont pour longueur la mesure qu'on a prise pour mesure la base, & pour largeur la mesure qui a servi à mesurer la hauteur*[5]."(Camus, 1749, p. 188)

À guisa de explicação para esse último caso, ele escreve:

> Par exemple si l'on veut savoir le nombre des briques posées à plat qui sont contenues dans un quarré long: comme une brique a 8 pouces de long sur 4 pouces do large, on mesurera la longueur BC avec une mesure qui aura 8 pouces de long, & l'on mesurera la hauteur ou largeur AB du quarré long avec une mesure qui n'aura que 4 pouces; puis on multipliera le nombre des mesures de 8 pouces contenues dans la base BC, par le nombre des mesures de 4 pouces contenues dans la hauteur AB; & le produit sera le nombre des briques, ou des mesures superficielles de 8 pouces de long & de 4 pouces de large, contenues dans l'aire du quarré long ABCD[6]. (Camus, 1749, p. 188)

No entanto, Camus destaca que não seria preciso que essa unidade de medida de área (que na citação anterior é representada por um tijolo) tenha suas medidas lineares dadas em uma mesma unidade metrológica:

[4] Seja um retângulo ABCD , cuja base BC e altura AB são medidas com a toesa linear, que é simplesmente chamada de toesa; que BG, GI, IL, LN, NP, PC, são as toesas contidas na base BC, e que AQ, QR, RS, ST, TB, são as toesas contidas na largura ou altura AB. Se, pelos pontos G, I, L, N, P, da base, se traçar as paralelas GF, IH, LK, NM, PO à altura AB; dividiremos o retângulo ABCD em tantos retângulos, como ABCF, FGIH, HILK, KLNM, MNPO e OPCD, quantas toesas existirão na base BC. Cada um destes retângulos tendo uma toesa de largura, e tendo de comprimento em toesa o quanto existe na altura AB do retângulo, conterá obviamente tantas toesas quadradas quanto as toesas lineares na altura AB. Portanto, para ter o número de toesas quadradas contidas no retângulo ABCD, será necessário obter o número dos retângulos ABGF, FGIH, HILK, & c que são obtidos na base BC, ou o número de toesas lineares BG, GI & c contidas na base do BC, tantas quanto haverá em toesas quadradas em cada um desses retângulos, ou seja, quantas vezes houver toesas lineares na altura AB. Mas tomar o número de toesas lineares que estão na base BC do retângulo, tantas vezes quantas as toesas lineares na altura AB desse retângulo, é multiplicar o número de toesas lineares da base BC pelo número de toesas lineares da altura ou largura AB. Assim, teremos o número de toesas quadradas contidas em um retângulo, multiplicando o número de toesas lineares da base pelo número de toesas lineares de sua altura ou largura.(tradução nossa).

[5] As medidas superficiais contidas na superfície do retângulo não são medidas quadradas, mas medidas cujo comprimento é a medida tomada para medir a base, e para largura a medida usada para medir a altura (tradução nossa).

[6] Por exemplo, se queremos saber o número de tijolos planos que estão contidos em um retângulo: como um tijolo de 8 polegadas de comprimento por 4 polegadas de largura, medimos o comprimento BC com uma medida que terá 8 polegadas de comprimento, e medimos a altura ou a largura AB do retângulo com uma medida que será de apenas 4 polegadas; então multiplique o número de medições de 8 polegadas contidas na base BC, pelo número de medições de 4 polegadas contidas na altura AB; & o produto será o número de tijolos, ou medidas superficiais de 8 polegadas de comprimento e 4 polegadas de largura, contidas na área do retângulo ABCD. (tradução nossa).

> Quoique les parties les plus régulieres de la toise quarrée, soient des pieds quarrées, des pouces quarrées, & des lignes quarrées; ce ne sont point cependant ces parties que l'on emploie le plus ordinairement, & l'on aime mieux partager la toise quarrée en parties analogues à la toise linéaire. Ainsi de même que la toise linéaire est partagée en 6 pieds linéaires, que le pied linéaire est partagé en 12 pouces linéaires, & le pouce linéaire en 12 lignes linéaires; l'on partage la toise quarrée en 6 rectangles de 1 pied de large & de 1 toise de long, qu'on devroit nommer des pied-toise o des toise-pied à cause de leurs deux dimensions; l'on partage le rectangle toise-pied en douze parties égales qui ont chacune 1 toise de long & 1 pouce de large, & que l'on devroit nommer des toise-pouce; enfin l'on divise chacun de ces nouveaux rectangles en 12 parties égales qui ont chacune 1 toise de long & 1 ligne de large, & qu'on devroit appeller des toise-ligne à cause de deux dimensions qu'elles ont: & ainsi des autres mesures dont la toise est la dimension principale[7]. (Camus, 1749, p. 189)

Desse modo, além das toesas quadradas, pés quadrados, polegadas quadradas e linhas quadradas, são introduzidas as unidades de área *pied-toise*, *toise-ligne*, *pied-pounce* e *pied-ligne*, por exemplo. O autor explica que duas medidas lineares iguais, multiplicadas uma pela outra, produzem medidas superficiais quadradas, cujos lados são medidos em relação à medida linear dada. Por exemplo, toesa linear vezes toesa linear fornecerá um número de toesas quadradas. E, quando se multiplica unidades lineares diferentes, obtém-se medidas superficiais que podem ser representadas por um retângulo com comprimento diferente da altura. Por exemplo, ao se multiplicar uma quantidade de toesas lineares por um número de pés lineares, a unidade de medida dessa superfície será um retângulo com uma toesa de comprimento por um pé de largura. (Camus, 1749, p. 189-190)

Para medir o volume de um paralelepípedo, Camus considera um paralelepípedo retângulo ABCDE, com seu comprimento (AD), largura (AB) e altura (DE) dados em toesas lineares. Então, Camus divide esse sólido através de planos paralelos a sua base, de modo que a altura de cada um desses novos paralelepípedos seja igual a uma toesa. Entre esses planos, aquele mais próximo à base do paralelepípedo é denominado HFI, sendo a altura do novo paralelepípedo (medindo uma toesa) o segmento DF. Então, Camus afirma que cada um desses paralelepípedos de uma toesa de altura terá como volume tantas toesas cúbicas quantas toesas quadradas existirem na área da base desses paralelepípedos; isto é, se a medida da base de um desses paralelepípedos é x toesas quadradas, a medida de seu volume será x toesas cúbicas.

> Chaque solide tel que ABCDF contenu entre deux plans paralleles ABCD, HFI, ayant une toise d'épaisseur suivant DF, contiendra autant de toises cubes qu'il yaura de toises quarrées dans la face rectangle ABCD; parce qu'on pourra

[7] Embora as partes mais regulares da toesa quadrada sejam pés quadrados, polegadas quadradas e linhas quadradas; não são, no entanto, essas partes que são mais comumente usadas, e preferimos compartilhar o quadrado em partes análogas à tabela linear. Assim, como a altura linear é dividida em 6 pés lineares, o pé linear é dividido em 12 polegadas lineares, e a polegada linear em 12 linhas lineares; a toesa quadrada é dividida em 6 retângulos de 1 pé de largura e 1 toesa de comprimento, que devem ser chamados de pied-toise ou toise-pied por causa de suas duas dimensões; o retângulo do toise-pied é dividido em doze partes iguais, cada uma com 1 toesa de comprimento e 1 polegada de largura, e deve ser chamada de toise-pouce; finalmente, dividimos cada um desses novos retângulos em 12 partes iguais, cada uma com 1 toise de comprimento e 1 linha de largura, e que devemos chamar de toise-ligne por causa de duas dimensões que eles têm: outras medidas cuja altura é a dimensão principal (tradução nossa).

> placer une toise cube sur chacune des toises quarrées de cette face; & que toutes les toises cubes qu'on placera sur toutes ces toises quarrées, seront exactement contenues entre les deux plans paralleles ABCD, HFI, entre lesquela il y a une toise d'intervalle.
>
> Mais nous venons de voir que la face ABCD contient un nombre de toises quarrées égal au produit de sa longueur AD multipliée par sa largeur AB ou DC. Donc chacun des solides d'une toise d'épaisseur, dans lesquels on a divisé le parallélépipede ABCDE, contient un nombre de toises cubes, égal au produit de la longueur AD multipliée par sa largeur DC. Et comme il a dans le parallélepipede ABCDE autant de ces solides d'une toise d'épaisseur, qu'il y a de toises dans son épaisseur DE; on aura le nombre des toises cubes contenues dans ce parallélépipede rectangle ABCDE, en multipliant le produit de sa longueur AD & de sa largeur DC, mesurées en toises linéaires, par le nombre des toises contenues dans sont épaisseur DE[8]. (Camus, 1749, p. 191)

O autor oferece como exemplo um paralelepípedo ABCDE em que o comprimento AD mede 6 toesas, a largura DC mede 5 toesas e a altura, 3 toesas. Desse modo, o volume de ABCDE será de 90 toesas cúbicas. Camus observa que, caso cada uma dessas dimensões do paralelepípedo fosse medida em pés, polegadas ou linhas lineares, o resultado seria obtido, respectivamente, em pés cúbicos, polegadas cúbicas ou linhas cúbicas; e a demonstração desse fato seria exatamente a mesma que já foi feita para o caso em que as medidas são dadas em toesas lineares.

Camus continua seu texto dizendo que, como uma toesa linear equivale a 6 pés lineares, então uma toesa cúbica contém 216 pés cúbicos. Da mesma forma, um pé cúbico contém 1728 polegadas cúbicas; e uma polegada cúbica contém 1728 linhas cúbicas.

No entanto, ao medir as dimensões de um paralelepípedo, afirma o autor, raramente obtemos um número exato de toesas lineares para cada uma delas. Caso tenhamos que calcular, por exemplo, o volume de um sólido em que duas dimensões são dadas em toesas e uma dimensão é dada em pés lineares, obtemos um produto dado em *toise-toise-pied*. Da mesma forma, poderemos obter volumes dados em *toise-toise-pouce*, *pied-pied-ligne*, e assim por diante.

Concluindo esse raciocínio, Camus afirma que, ao calcular o volume de uma parte de um sólido menor do que a toesa cúbica, é usual utilizar medidas menores dividindo-se a toesa cúbica na mesma quantidade de partes em que dividimos a toesa linear:

> Enfin lorsqu'on mesure un solide avec des mesures quelconques, l'usage est de prendre des mesures cubiques pour les mesures principales du solide; & pour

[8] Cada sólido tal como ABCDF, contido entre dois planos paralelos ABCD, HFI, tendo uma toesa de altura DF, conterá tantas toesas cúbicas quantas toesas quadradas existirem na face retangular ABCD; porque seremos capazes de colocar uma toesa de altura em cada quadrado desta face; e que todas as toesas cúbicas que serão colocadas em todas estas toesas quadradas estarão exatamente contidas entre os dois planos paralelos ABCD, HFI, entre os quais há uma toesa de intervalo. Mas acabamos de ver que a face ABCD contém um número de toesas quadradas igual ao produto de seu comprimento AD multiplicado por sua largura AB ou DC. Assim, cada um dos sólidos de uma toesa de altura, no qual o paralelepípedo do ABCDE foi dividido, contém um número de toesas cúbicas igual ao produto do comprimento AD multiplicado pela sua largura DC. E como o paralelepípedo ABCDE possui tantos destes sólidos de uma altura de espessura quantas toesas há em sua altura DE; teremos o número de toesas cúbicas contidas neste paralelepípedo retângulo ABCDE multiplicando o produto de seu comprimento AD e de sua largura DC, medidos em toesas lineares, pelo número de toesas contidas em sua altura DE (tradução nossa).

> mesurer la partie qui est plus petite qu'une mesure solide principale, on prend d'autres mesures plus petites, en sous-divisant la mesure cubique principale en autant de parties égales, que la mesure linéaire en a: ensorte que les mesures solides qui résultent de ces divisions, ont toutes des dimensions égales à celles de la mesure principale.
>
> On peut donc conclure de ce qui vient d'être dit, qu'un nombre de mesures superficielles égales, de longeur & de largeur quelconques, multiplié par un nombre de mesures linéaires de longueur quelconque, produit un nombre de mesures solides, qui ont pour leurs trois dimensions la longueur & la largeur d'une mesure superficielle du multiplicande, & la longueur d'une mesure du multiplicateur; ou qui ont pour bases des mesures du multiplicande, & pour hauteur des mesures du multiplicateur[9]. (Camus, 1749, p. 194)

Em seguida, é incluída no livro uma tabela extensa com as equivalências das unidades relativas à toesa linear, toesa quadrada e toesa cúbica, além de seus respectivos símbolos.

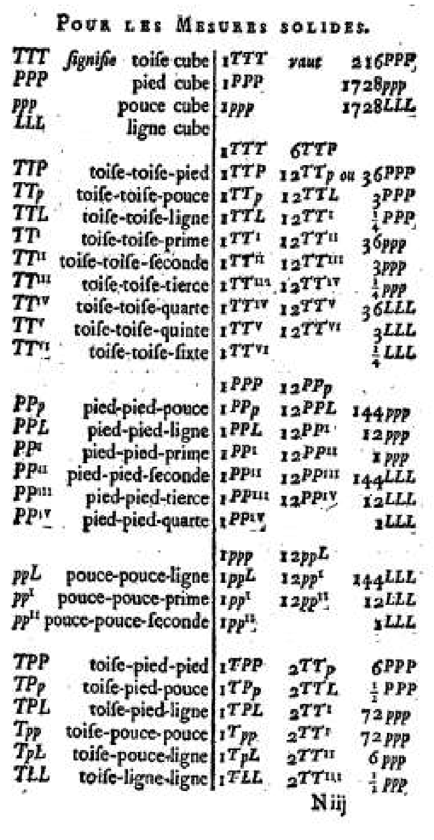
Valeur des différentes unités relatives à la Toise linéaire, à la Toise quarrée, & à la Toise cubique, avec les caractères distinctifs de ces différentes unités.

POUR LES MESURES LINÉAIRES.

T	*signifie*	toise	$1T$	*vaut*		$6P$
P		pied	$1P$			$12p$
p		pouce	$1p$			$12L$
L		ligne	$1L$			12^{I}
I		point *ou* prime				

POUR LES MESURES SUPERFICIELLES.

TT	toise quarrée	$1TT$	$36PP$		
PP	pied quarré	$1PP$	$144pp$		
pp	pouce quarré	$1pp$	$144LL$		
LL	ligne quarrée				
		$1TT$	$6TP$		
TP	toise-pied	$1TP$	$12Tp$	*ou*	$6PP$
Tp	toise-pouce	$1Tp$	$12TL$	*ou*	$\frac{1}{2}PP$
TL	toise-ligne	$1TL$	$12T^{I}$	*ou*	$6pp$
T^{I}	toise-prime	$1T^{I}$	$12T^{II}$	*ou*	$\frac{1}{2}pp$
T^{II}	toise-seconde	$1T^{II}$	$12T^{III}$	*ou*	$6LL$
T^{III}	toise-tierce	$1T^{III}$			$\frac{1}{2}LL$
		$1PP$	$12Pp$		
Pp	pied-pouce	$1Pp$	$12PL$	*ou*	$12pp$
PL	pied-ligne	$1PL$	$12P^{I}$	*ou*	$1pp$
P^{I}	pied-prime	$1P^{I}$	$12P^{II}$	*ou*	$12LL$
P^{II}	pied-seconde	$1P^{II}$			$1LL$
		$1pp$	$12pL$		
pL	pouce-ligne	$1pL$	$12p^{I}$	*ou*	$12LL$
p^{I}	pouce-prime	$1p^{I}$			$1LL$



POUR LES MESURES SOLIDES.

TTT	*signifie* toise cube	$1TTT$	*vaut*	$216PPP$
PPP	pied cube	$1PPP$		$1728ppp$
ppp	pouce cube	$1ppp$		$1728LLL$
LLL	ligne cube			
		$1TTT$	$6TTP$	
TTP	toise-toise-pied	$1TTP$	$12TTp$ *ou*	$36PPP$
TTp	toise-toise-pouce	$1TTp$	$12TTL$	$3PPP$
TTL	toise-toise-ligne	$1TTL$	$12TT^{I}$	$\frac{1}{4}PPP$
TT^{I}	toise-toise-prime	$1TT^{I}$	$12TT^{II}$	$36ppp$
TT^{II}	toise-toise-seconde	$1TT^{II}$	$12TT^{III}$	$3ppp$
TT^{III}	toise-toise-tierce	$1TT^{III}$	$12TT^{IV}$	$\frac{1}{4}ppp$
TT^{IV}	toise-toise-quarte	$1TT^{IV}$	$12TT^{V}$	$36LLL$
TT^{V}	toise-toise-quinte	$1TT^{V}$	$12TT^{VI}$	$3LLL$
TT^{VI}	toise-toise-sixte	$1TT^{VI}$		$\frac{1}{4}LLL$
		$1PPP$	$12PPp$	
PPp	pied-pied-pouce	$1PPp$	$12PPL$	$144ppp$
PPL	pied-pied-ligne	$1PPL$	$12PP^{I}$	$12ppp$
PP^{I}	pied-pied-prime	$1PP^{I}$	$12PP^{II}$	$1ppp$
PP^{II}	pied-pied-seconde	$1PP^{II}$	$12PP^{III}$	$144LLL$
PP^{III}	pied-pied-tierce	$1PP^{III}$	$12PP^{IV}$	$12LLL$
PP^{IV}	pied-pied-quarte	$1PP^{IV}$		$1LLL$
		$1ppp$	$12ppL$	
ppL	pouce-pouce-ligne	$1ppL$	$12pp^{I}$	$144LLL$
pp^{I}	pouce-pouce-prime	$1pp^{I}$	$12pp^{II}$	$12LLL$
pp^{II}	pouce-pouce-seconde	$1pp^{II}$		$1LLL$
TPP	toise-pied-pied	$1TPP$	$2TTp$	$6PPP$
TPp	toise-pied-pouce	$1TPp$	$2TTL$	$\frac{1}{2}PPP$
TPL	toise-pied-ligne	$1TPL$	$2TT^{I}$	$72ppp$
Tpp	toise-pouce-pouce	$1Tpp$	$2TT^{I}$	$72ppp$
TpL	toise-pouce-ligne	$1TpL$	$2TT^{II}$	$6ppp$
TLL	toise-ligne-ligne	$1TLL$	$2TT^{III}$	$\frac{1}{2}ppp$

N iij

Figura 146 – Valores das unidades relativas à toesa linear e à toesa quadrada, além de seus respectivos caracteres (Camus, 1749, p. 196)

Figura 147 – Valores das unidades relativas à toesa cúbica e seus respectivos caracteres (Camus, 1749, p. 197)

[9] Finalmente, ao medir um sólido com qualquer medida, o uso é fazer medições cúbicas para as principais medidas do sólido; e para medir a porção que é menor do que uma medida sólida principal, outras medidas menores são tomadas subdividindo a medida cúbica principal em partes iguais à medida linear: os sólidos que resultam dessas divisões possuem dimensões iguais às da medida principal. Portanto, pode-se concluir a partir do que acaba de ser dito que um número de medidas de superfície iguais, de qualquer comprimento ou largura, multiplicado por um número de medidas lineares de qualquer comprimento, produz um número de medidas sólidas, que têm em suas três dimensões o comprimento e a largura de uma medida superficial do multiplicando, e o comprimento de uma medida do multiplicador; ou que são baseadas nas medidas do multiplicando, tendo para a altura a medida do multiplicador (tradução nossa).

O problema abaixo, que propõe a multiplicação de 57^{T} 4^{P} 8^{p} por 8^{T} 3^{P} 6^{p} é então apresentado ao leitor.

PROBLÉME.

Multiplier	57^{T}	4^{P}	$8p$	
Par	8^{T}	3^{P}	$6p$	
Pour 8^{T}	462^{TT}	1^{TP}	4^{Tp}	
Pour 3^{P}	28	5	4	
Pour $6p$	4	4	10	8^{TL}
Produit total	495^{TT}	5^{TP}	6^{Tp}	8^{TL}

Figura 148 – Multiplicação de 57^{T} 4^{P} 8^{p} por 8^{T} 3^{P} 6^{p} (Camus, 1749, p. 198)

A multiplicação é iniciada por 8 toesas vezes 8 polegadas, o que resulta em 64 *toise-pouce*, que equivale a 5 *toise-pied* e 4 *toise-pouce*. Depois multiplicando 4 polegadas por 8 toesas, obtém-se 32^{TP}, que adicionadas às 5^{TP} que já tínhamos resulta em 37^{TP}, isto é, 6^{TT} 1^{TP}. Mas 8^{T} vezes 57^{T} é igual a 456^{TT}. Somando-se as 6^{TT} da conta anterior, resulta em 462^{TT}. Desse modo, a multiplicação de 57^{T} 4^{P} 8^{p} por 8^{P} teria como resultado 462^{TT} 1^{TP} 4^{Tp}.

Como 3^{P} é a metade de uma toesa, ao multiplicar esse valor por 57^{T} 4^{P} 8^{p} obtemos a metade desse número; a saber, $28^{TT} + 3^{TP} + 2^{TP} + 4^{Tp}$, ou seja, 28^{TT} 5^{TP} 4^{Tp}.

Ainda, para multiplicar 57^{T} 4^{P} 8^{p} por 6^{p}, Camus observa que 6^{p} é a sexta parte de 3^{P}. Dessa forma, o produto será a sexta parte do resultado anterior: $4^{TT} + \frac{4}{6}^{TT} + \frac{5}{6}^{TP} + \frac{4}{6}^{Tp}$, ou seja, 4^{TT} 4^{TP} 10^{Tp} 8^{TL}. Portanto, o resultado final é 495^{TT} 5^{TP} 6^{Tp} 8^{TL}.

O autor não faz nenhuma observação adicional sobre o produto acima. No entanto, nos questionamos sobre a dificuldade que poderia existir de, na prática, compreender o significado desse resultado, isto é, a área dessa superfície.

Depois de mais um exemplo sobre a multiplicação de dois segmentos, Camus apresenta o seguinte problema:

PROBLÊME.

95 Multiplier	3957^{TT}	4^{TP}	8^{Tp}	
Par	22^{T}	2^{P}	6^{p}	
	7914^{TTT}			
	7914			
	7	2^{TTP}		
	7	2		
	2	2	8^{TTp}	
	1319	1	6	8^{TTL}
	329	4	10	8
Produit total	88720^{TTT}	1^{TTP}	1^{TTp}	4^{TTL}

Figura 149 – Multiplicação de 3957^{TT} 4^{TP} 8^{Tp} por 22^{T} 2^{P} 6^{p} (Camus, 1749, p. 201)

Nesse caso, o autor multiplica primeiro as 3957 toesas quadradas por 22^{T}, obtendo (7914 + 79140) toesas cúbicas. Em seguida, multiplica os 4^{TP} por 22^{T}, observando que o produto será igual a $\frac{2}{3}$ de 22^{TTT}. Como $\frac{1}{3}$ de 22^{TTT} é igual a 7^{TTT} 2^{TTP}, este resultado é tomado duas vezes. Ao multiplicar, agora, 8^{Tp} por 22^{T}, Camus atenta que o produto será a terça parte do resultado de 2^{TP} por 22^{T}. Logo, será igual a 2^{TTT} 2^{TTP} 8^{TTp}.

Agora, falta ainda multiplicar 3957^{TT} 4^{TP} 8^{Tp} por 2^{P} 6^{p}. O autor nota que, se esse multiplicando fosse multiplicado por 1^{T}, o resultado seria 3957^{TTT} 4^{TTP} 8^{TTp}. Mas como 2^{P} é a terça parte da toesa, o resultado de 2^{P} vezes o multiplicando será 1319^{TTT} 1^{TTP} 6^{TTp} 8^{TTL}.

E, como 6^{p} é igual à quarta parte de 2^{P}, o resultado de 6^{p} por 3957^{TT} 4^{TP} 8^{Tp} será igual a 329^{TTT} 4^{TTP} 10^{TTp} 8^{TTL}. Somando todos os resultados, obtém-se 88720^{TTT} 1^{TTP} 1^{TTp} 4^{TTL}.

No próximo exemplo, Camus propõe a multiplicação de três linhas (segmentos): 57^{T} 4^{P} 8^{p}, 68^{T} 3^{P} e 22^{T} 2^{P} 6^{p}. A fim de resolver esse problema, o autor multiplica iniciamente os dois primeiros números complexos, e o resultado é multiplicado pelo terceiro número complexo.

1°. En multipliant	57^{T}	4^{P}	8^{p}	
par	68^{T}	3^{P}		
On aura (N°. 94) le produit	3957^{TT}	4^{TP}	8^{Tp}	
2°. Ce produit	3957^{TT}	4^{TP}	8^{Tp}	
multiplié par	22^{T}	2^{P}	6^{p}	
Donnera (N°. 95)	88720^{TTT}	1^{TTP}	1^{TTp}	4^{TTL}

pour le produit de la multiplication des trois nombres complexes proposés,

Figura 150 – Multiplicação de 57^{T} 4^{P} 8^{p}, 68^{T} 3^{P} e 22^{T} 2^{P} 6^{p} (Camus, 1749, p. 203)

Terminados os exemplos, é incluída na obra uma observação. Nela, Camus afirma que muitas vezes acontece de querermos expressar uma área em toesas quadradas, pés quadrados, polegadas quadradas e linhas quadradas e, respectivamente, pode ser desejável expressar o volume de um determinado sólido em toesas cúbicas, pés cúbicos, polegadas cúbicas e linhas cúbicas. Assim, é necessário que existam regras para reduzir as medidas superficiais menores do que a toesa quadrada em pés quadrados, polegadas quadradas e linhas quadradas, e reduzir as medidas de sólidos inferiores à toesa cúbica em pés cúbicos, polegadas cúbicas e linhas cúbicas. (Camus, 1749, p. 204, tradução nossa)

Para reduzir as medidas de área menores do que toesas quadradas em pés quadrados, polegadas quadradas e linhas quadradas, Camus (p. 205) afirma que se deve:

- Multiplicar a quantidade de *toise-pied* (TP) por 6 para obter o equivalente em pés quadrados (PP);

- Dividir a quantidade de *toise-pouce* (Tp) por 2 para se obter no dividendo uma quantidade de pés quadrados. O resto é multiplicado por 72 para se chegar à quantidade de polegadas quadradas (pois cada *toise-pounce* (Tp) vale 72 polegadas quadradas (pp) ou metade de um pé quadrado (PP));

- Multiplicar a quantidade de *toise-ligne* (TL) por 6 a fim de se obter área equivalente em polegadas quadradas (pp) (porque cada *toise-ligne* vale $\frac{1}{12}$ da *toise-pounce*, o que, por sua vez, equivale a 6 *pouces quarrés*);

- Como a quantidade de T^{I} vale $\frac{1}{2}$ pp (ver tabela da figura 146), que equivale a $\frac{1}{12}$ TL, divide-se a quantidade de T^{I} por 2 para se obter a superfície equivalente em polegadas quadradas (pp). Se houver resto 1, este será convertido em 72 linhas quadradas (LL);

- Multiplicar a quantidade de T^{II} por 6 para obter o valor em linhas quadradas (LL);

- Como cada $\mathrm{T}^{\mathrm{III}}$ equivale a $\frac{1}{2}$ LL, basta dividir a quantidade de $\mathrm{T}^{\mathrm{III}}$ por 2 a fim de se chegar ao seu valor em linhas quadradas. Caso haja resto 1, este será igual a $\frac{1}{144}$ T^{I}.

Camus observa que, caso os dois números complexos multiplicados possuam a toesa como unidade principal e não tenham partes menores do que uma linha, a divisão de sua medida expressa em $\mathrm{T}^{\mathrm{III}}$ por 2 terá resto igual a zero, pois o produto desses dois números não poderia produzir uma parte menor do que uma linha quadrada. (Camus, 1749, p. 205)

Um exemplo é então apresentado. Nele, podemos aplicar as regras descritas logo acima:

EXEMPLE.

On propose de réduire en pieds quarrés, pouces quarrés & lignes quarrées, *les mesures qui sont moindres que la* toise quarrée *dans ce produit.*

120851^{TT}	5^{TP}	5^{Tp}	9^{TL}	0^{T^I}	$4^{T^{II}}$	$8^{T^{III}}$
	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$
	30^{PP}	72^{pp}	24^{LL}			
	2	54	4			
120851^{TT}	32^{PP}	126^{pp}	28^{LL}			

Figura 151 – Conversão de medidas menores do que a toesa quadrada em pés quadrados, polegadas quadradas e linhas quadradas (Camus, 1749, p. 206)

Por último, a fim de se reduzir as medidas de volume menores do que 1 toesa cúbica a pés cúbicos, polegadas cúbicas e linhas cúbicas, Camus orienta em sua obra a proceder do seguinte modo:

- Cada *toise-toise-pied* (TTP) deverá ser multplicada por 36 para se obter a medida em pés cúbicos (PPP);
- A quantidade de *toise-toise-pounce* (TTp) será multplicada por 3, a fim de se chegar à medida desse sólido em pés cúbicos (ppp);
- As medidas do tipo *toise-toise-ligne* (TTL) serão multiplicadas por 432, para convertê-las em polegadas cúbicas (de fato, $1^{\text{TTL}} = 36^{\text{PPL}} = 3^{\text{PPp}} = 3 \cdot 144^{\text{ppp}}$);
- Cada *toise-toise-prime* (TT^{I}) deverá ser multiplicada por 36 para que se obtenha a quantidade equivalente em polegadas cúbicas (ppp) (ver tabela da figura 147);
- Como a *toise-toise-second* (TT^{II}) é a décima segunda parte da *toise-toise-prime*, deveremos multiplicar a quantidade de TT^{II} por 3 a fim e obter a medida desse volume em polegadas cúbicas (ppp);
- Sabendo que a *toise-toise-tierce* (TT^{III}) é a décima segunda parte da *toise-toise-second*, temos que a quantidade TT^{III} é igual a $\frac{1}{4}$ de uma polegada cúbica, que é igual a 432 linhas cúbicas (LLL);
- Sabendo também que a *toise-toise-quarte* (TT^{IV}) é a décima segunda parte da *toise-toise-tierce*, deveremos multiplicar a quantidade de TT^{IV} por 36 a fim de conseguirmos convertê-la para linhas cúbicas (LLL);
- Analogamente, como a *toise-toise-quinte* (TT^{V}) é a décima segunda parte da *toise-toise-quarte*, iremos multiplicá-la por 3 para obter essa medida em linhas cúbicas;

- Por fim, a *toise-toise-sixte* (TT^{VI}) é a décima segunda parte da *toise-toise-quinte*. Logo, dividindo a quantidade dada em TT^{VI} por 4 obtemos tal medida em linhas cúbicas.

Camus observa que, no caso em que se multiplica três números complexos que não contêm unidades menores do que a linha, a quantidade dada em TT^{VI} será sempre divisível por 4. Se não fosse, teríamos de resto dessa divisão 1, 2 ou 3, que seriam menores do que uma linha cúbica. Mas três números que não contêm unidade menor do que a linha não poderiam produzir unidades menores do que a linha cúbica. (Camus, 1749, p. 209)

Como exemplo, é apresentado o problema abaixo, onde se busca escrever um número complexo dado em pés cúbicos, polegadas cúbicas e linhas cúbicas.

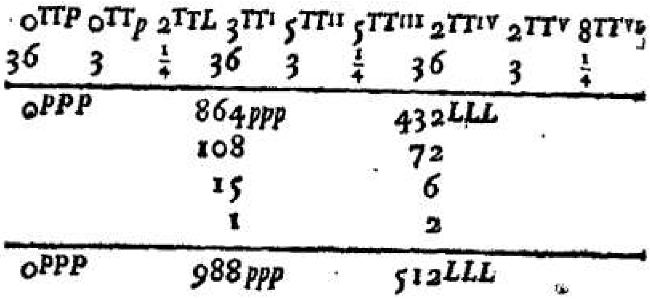


Figura 152 – Conversão de medidas menores do que a toesa cúbica em pés cúbicos, polegadas cúbicas e linhas cúbicas (Camus, 1749, p. 209)

A parte final do capítulo III desse quarto livro da obra de Camus, sobre a multiplicação de números complexos, é denominada *Du Toisé des Bois* [10]. No primeiro parágrafo, é dito denominar-se *Solive*[11] um pedaço de madeira que contenha 3 pés cúbicos. Por exemplo, uma peça de madeira de 2 toesas de comprimento, 6 polegadas de largura e 6 polegadas de altura é chamada *Solive*. Provavelmente, esta terminologia era utilizada no comércio de produtos madeireiros.

Camus então continua sua explicação sobre a medição de *solives* dizendo que, como uma *solive* equivale a 3 pés cúbicos, que por sua vez é igual a 72^{Tpp}, a *solive* pode ser considerada como o volume de um paralelepípedo de base igual a 72 polegadas quadradas e altura igual a uma toesa. Cada *solive* é dividida em seis partes iguais, denominadas *pés de solive*, que seriam paralelepípedos de base igual a 72 polegadas quadradas e altura igual a um pé. Da mesma forma, os *pés de solive* são divididos em doze partes iguais - paralelepípedos de base igual a 72 polegadas quadradas e altura igual a uma polegada - denominadas *polegadas de solive*. Ainda, cada *polegada de solive* é dividida em doze *linhas de solive*. Acreditamos que cada uma dessas *solives* ou partes da *solive* atuava como um tipo de padrão utilizado no comércio.

[10] A melhor tradução que conseguimos para essa expressão foi: a medição de peças de madeira.
[11] Viga (tradução nossa).

> Mais parce que la toise est la principale mesure dans les toisés, l'on réduit la solive en un parallélépipede qui a 1 toise de long sur une base de 72 pouces quarrés, ou égale à la moitié d'un pied quarrée.
>
> En considérant ainsi la solive, on la divise comme la toise en 6 parties égales qu'on appelle *pieds de solive*. Ainsi chaque pied de solive est un parallélépipede qui a 1 pied de haut sur 72 pouces quarrés de base.
>
> Le pied de solive se divise comme le pied linéaire, premierement en 12 pouces; ensuite le pouce se divise en 12 lignes, &c: ensorte que le pouce & la ligne de solive sont des parallélépipedes dont l'un a 1 pouce, & l'autre 1 ligne de haut, sur une base égale à 72 pouces quarrées, ou a la moitié d'un pied quarré[12]. (Camus, 1749, p. 211)

O próximo problema exposto por Camus busca medir uma peça de madeira e reduzí-la a *Piéces* (peças ou pedaços de *solive*) ou *Solives*. O autor destaca então as seguintes situações: (Camus, 1749, p. 211)

Caso a altura da madeira seja dada em toesas, e tanto o seu comprimento quanto a sua largura sejam dados em polegadas, deve-se multiplicar esses três números e dividir o resultado por 72 para obter o volume da madeira em *solives*, como no exemplo abaixo. De fato, cada *toise-pounce-pounce* é igual a $\frac{3}{72}$ *pied cube*, isto é, $\frac{1}{72}$ *solive*.

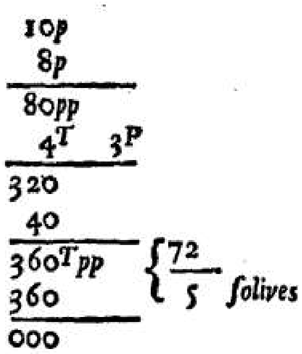


Figura 153 – Conversão de medidas em solives (Camus, 1749, p. 212)

O autor ainda ressalta que, no exemplo da figura 153, poder-se-ia dividir a área da base, medida em polegadas, por 72; e, só então, multiplicar o resultado dessa divisão pela altura dada em toesas.

> Il y a des Toiseurs, qui après avoir multiplié l'une par l'autre la largeur & l'épaisseur de la piéce mesurées en pouces, divisent ce produit par 72; & qui

[12] Mas como a *toise* é a principal medida do *toisé*, a *solive* é reduzida a um paralelepípedo de 1 toesa de comprimento em uma base de 72 polegadas quadradas, ou seja, igual à metade de um pé quadrado. Considerando a *solive*, ela é dividida como a toesa em 6 partes iguais chamadas *pés de solive*. Assim, cada *pé de solive* é um paralelepípedo de 1 pé de altura por 72 polegadas quadradas de base. O *pé de solive* se divide como o pé linear, primeiro em 12 polegadas; então a polegada é dividida em 12 linhas, e a polegada e a *linha de solive* são paralelepípedos, um dos quais possui 1 polegada de altura, e o outro uma linha de altura, em uma base igual a 72 polegadas quadradas, ou meio pé quadrado (tradução nossa).

> multiplient ensuite le nombre des toises contenues dans la longueur de la piéce, par le quotient de cette division[13]. (Camus, 1749, p. 213)

Na observação acima, parece-nos que *Toiseurs* seriam indivíduos que realizam o *Toisé*, isto é, a medição de comprimentos, áreas ou volumes por meio da toesa e seus derivados. Como exemplo do que foi dito na citação, é considerada uma peça de 4^{T} 4^{P} 8^{p} de altura, 25^{p} de comprimento e 23^{p} de largura:

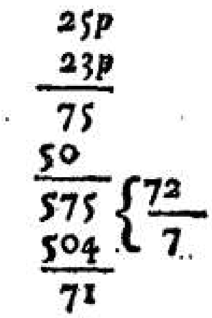
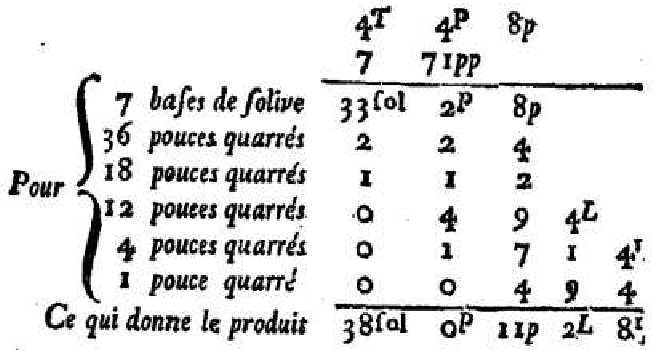


Figura 154 – Conversão de medidas em solives: multiplicação da largura pela altura, ambos em polegadas, e divisão do resultado por 72 (Camus, 1749, p. 213)

Depois de multiplicado o comprimento pela largura, divide-se o resultado por 72, obtendo $7\frac{71}{72}$, isto é, 7 *bases de solive* e 71^{pp}, Então, multiplica-se a altura da peça:



		4T	4P	8p		
		7	71pp			
Pour	7 bases de solive	33sol	2P	8p		
	36 pouces quarrés	2	2	4		
	18 pouces quarrés	1	1	2		
	12 pouces quarrés	0	4	9	4L	
	4 pouces quarrés	0	1	7	1	4T
	1 pouce quarré	0	0	4	9	4
Ce qui donne le produit		38sol	0P	11p	2L	8P

Figura 155 – Conversão de medidas em solives: multiplicação da altura 4^{T} 4^{P} 8^{p} por 7 bases de solive e 71^{pp} (Camus, 1749, p. 213)

O resultado dessas operações é 38 *solives* 11 *pouces de solive* 2 *lignes de solive* 8 *points de solive*. (Camus, 1749, p. 214)

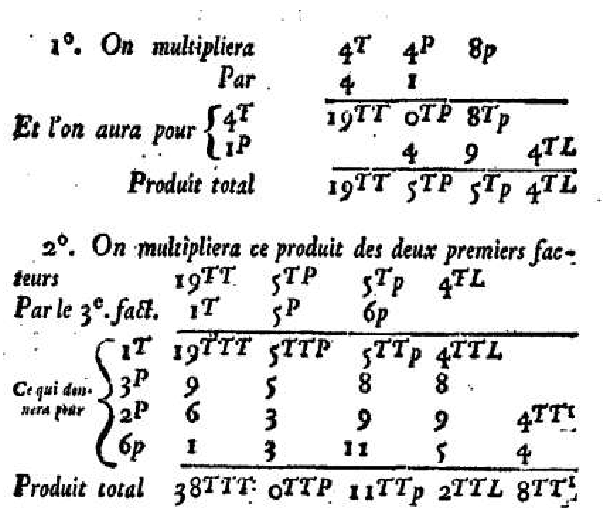
Camus acrescenta que, com o intuito de diminuir o trabalho dos *Toiseurs*, pode-se considerar as dimensões da base do paralelepípedo, dadas em pounces, como se na verdade elas

[13] Existem alguns *Toiseurs*, que depois de multiplicar um pelo outro o comprimento e a largura da peça medidos em polegadas, dividem este produto por 72; e que só então multiplicam o número de toesas contidos na altura da peça pelo quociente dessa divisão (tradução nossa).

fossem expressas em *pieds* e *demi-pieds*[14]. Como cada *pounce* é igual a $\frac{1}{12}$ *pied*, escrevendo essas medidas dessa forma já estaremos realizando uma divisão por 72. Desse modo, bastaria realizar o produto da área da base pela altura do paralelepípedo a fim de se obter a resposta do problema em *solives*.

> On a tâché de diminuer encore le travail du toisé des bois quarrés, en opérant comme il suit.
>
> On regarde le nombre des pouces d'une dimension de la grosseur comme des pieds, & le nombre des pouces de l'autre dimension de la grosseur comme des demi-pieds; & ayant réduit ces pieds & demi-pieds en toises, on multiplie successivement par ces nouveaux nombres, le nombre des toises & parties de toise contenues dans la longueur de la piéce: ce qui donne un produit de toises cubes & de parties de toise cube divisée en 6, & sous-divisée continuellement en 12, comme il a été expliqué dans le toisé [15]. (Camus, 1749, p. 215)

Refazendo o último exemplo, em que se tem um paralelepípedo cujas dimensões da base são 25 e 23 polegadas, e a altura é mede $4^T\ 4^P\ 8^p$, o texto de Camus nos orienta a escrever as 25 polegadas como 25 pés, o que, por sua vez, é igual a $4^T\ 1^P$. Já as 23 polegadas serão consideradas como 23 semi-pés, o que equivale a $1^T\ 5^P\ 6^p$. Multiplicam-se, então, os números complexos $4^T\ 4^P\ 8^p$, $4^T\ 1^P$ e $1^T\ 5^P\ 6^p$.



1°. On multipliera	4^T	4^P	$8p$		
Par	4	1			
Et l'on aura pour 4^T	19^{TT}	0^{TP}	$8^{T}p$		
1^P		4	9	4^{TL}	
Produit total	19^{TT}	5^{TP}	$5^{T}p$	4^{TL}	

2°. On multipliera ce produit des deux premiers facteurs

teurs	19^{TT}	5^{TP}	$5^{T}p$	4^{TL}	
Par le 3°. fact.	1^T	5^P	$6p$		
Ce qui donnera par 1^T	19^{TTT}	5^{TTP}	$5^{TT}p$	4^{TTL}	
3^P	9	5	8	8	
2^P	6	3	9	9	4^{TTI}
$6p$	1	3	11	5	4
Produit total	38^{TTT}	0^{TTP}	$11^{TT}p$	2^{TTL}	8^{TTI}

Figura 156 – Multiplicação de $\underline{4^T\ 4^P\ 8^p}$, $\underline{4^T\ 1^P}$ e $\underline{1^T\ 5^P\ 6^p}$ (Camus, 1749, p. 215)

Dessa forma, o leitor é orientado a interpretar o resultado acima, $38^{TTT}\ 0^{TTP}\ 11^{TTp}\ 2^{TTL}\ 8^{TTI}$, como na verdade sendo 38 *solives* 11 *pouces de solive* 2 *lignes de solive* 8 *points de solive*. Finalizando, Camus esclarece que essa última forma de reduzir as dimensões de um pedaço de

14 Semi-pé (tradução nossa).

15 Como um esforço para reduzir ainda mais o trabalho do toisé de bois quarrés, pode-se operar da seguinte forma. Examina-se o número de polegadas de uma dimensão da base como se fosse dada em pés e o número de polegadas da outra dimensão da base como meio pé; e tendo reduzido estes pés e meio pés em toesas, multiplica-se sucessivamente, por estes novos números, o número de toesas e partes de toesa contidas no comprimento da peça: o que dá um produto de toesas cúbicas e partes da toesa cúbica dividida em 6, e subdividido continuamente em 12, conforme explicado no *toisé* (tradução nossa).

madeira em *solives* é a mais usada quando as dimensões da peça são maiores. (Camus, 1749, p. 216) Essa forma de se trabalhar com solives de bois demonstra a importância, na época do livro, do trabalho com madeiras advindas de florestas.

No capítulo quatro do quarto livro de Camus, é apresentada a divisão de números complexos. Essa parte do livro é iniciada destacando-se que, na divisão de um número complexo, o divisor pode tanto ser complexo quanto incomplexo. No caso em que o divisor é incomplexo, a divisão não difere da divisão de números incomplexos: divide-se cada parte do número complexo que está no dividendo pelo divisor incomplexo, começando com as unidades maiores. Já no caso em que o divisor é complexo, iremos primeiro transformá-lo em um número incomplexo, multiplicando-o por um número conveniente.

Sobre a espécie do quociente, Camus afirma que, no caso em que o divisor é um número abstrato, o quociente será da mesma espécie do dividendo, pois o estamos dividindo em um determinado número de partes iguais. Quando o divisor é um número concreto, Camus continua afirmando que o quociente deverá possuir a mesma unidade do dividendo; a não ser nos casos em que o dividendo seja uma área ou volume, ou quando dividendo e divisor possuem unidades de mesma espécie.

> Lorsque le diviseur est un nombre concret, ses unités doivent toûjours être de même espece que celles du dividende, à moins que le dividende ne soit un nombre de mesures superficielles, ou solides: car dans ce cas, le diviseur concret peut être un nombre concret de mesures qui ont une ou deux dimensions de moins que les unités du dividende.
>
> Si le dividende & le diviseur sont composés des mêmes especes d'unités, le quotient est toûjours un nombre abstrait; puisqu'il peut seulement exprimer combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende.[16]. (Camus, 1749, p. 218)

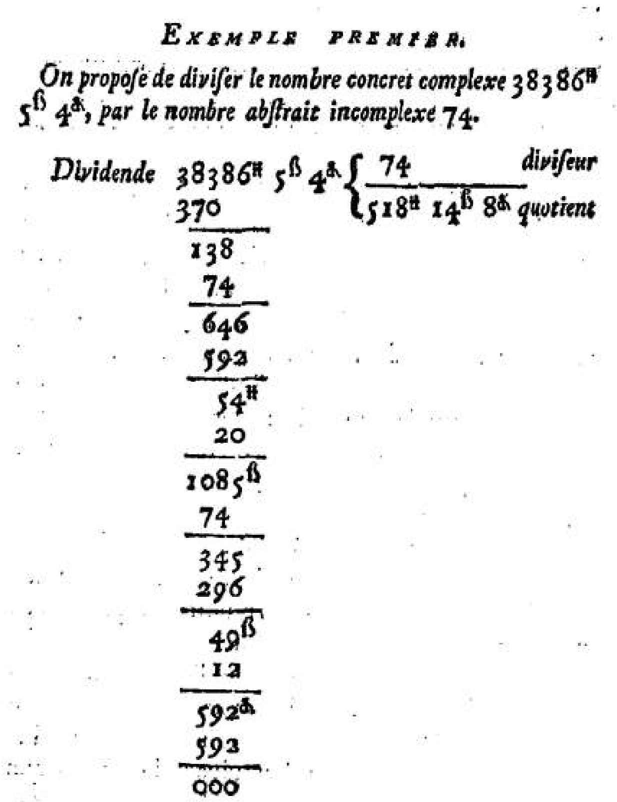
O caso em que o dividendo é expresso em unidades que medem áreas de superfícies é esclarecido a seguir: se o divisor for uma unidade de medida linear, o quociente também o será.

> Si le dividende contient des unités ou mesures quarrées, & que le diviseur contienne des mesures ou unités qui soient les côtés de ces quarrés, le quotient contiendra des unités qui seront des côtes des mèmes mesures quarrées. Et pour donner une regle générale, lorsque le dividende sera composé d'un nombre de mesures quelconques qui auront un certain nombre de dimensions, & que le diviseur sera composé d'unités qui auront une ou plusieurs dimensions des unités du dividende, les unités du quotient auront toûjours les dimensions des unités du dividende qui ne sont point aux unités du diviseur[17]. (Camus, 1749, p. 218)

[16] Quando o divisor é um número concreto, suas unidades devem sempre ser do mesmo tipo que as do dividendo, a menos que o dividendo seja um número de medidas superficiais, ou sólido: porque neste caso, o divisor do número concreto pode ser um número concreto de medidas que têm uma ou duas dimensões inferiores às unidades do dividendo. Se o dividendo e o divisor são compostos por unidades de mesma espécie, o quociente é sempre um número abstrato; já que só pode expressar quantas vezes o divisor está contido no dividendo (tradução nossa).

[17] Se o dividendo contiver unidades ou medidas quadradas e o divisor contiver medidas ou unidades que sejam os lados desses quadrados, o quociente conterá unidades que serão lados do mesmo quadrado. E para dar uma regra geral, quando o dividendo será composto de qualquer número de medidas que terão um certo número de

O primeiro exemplo enunciado por Camus propõe a divisão do número complexo 38386# 5^{s} 4^{d} pelo número abstrato 74.


EXEMPLE PREMIER.

On propose de diviser le nombre concret complexe 38386# 5ß 4ð, par le nombre abstrait incomplexe 74.

Dividende 38386# 5ß 4ð { 74 diviseur / 518# 14ß 8ð quotient

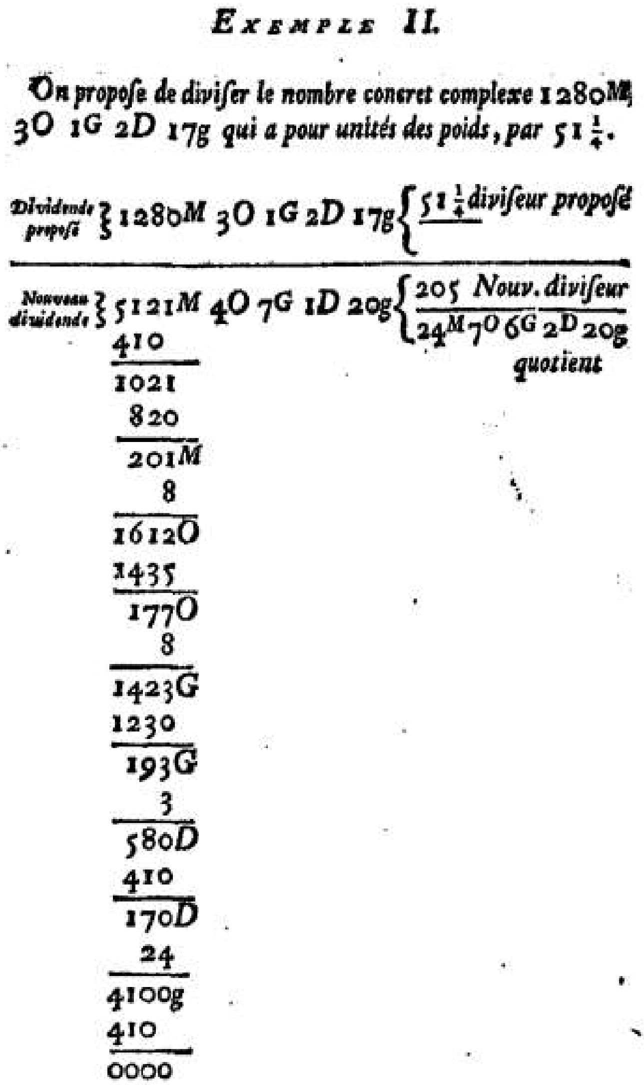
370
138
74
646
592
54#
20
1085ß
74
345
296
49ß
12
592ð
592
000

Figura 157 – Divisão de 38386# 5^{s} 4^{d} pelo número abstrato 74 (Camus, 1749, p. 219)

O processo para a divisão acima é o mesmo que temos presenciado em outros livros que contemplam esse tema, inclusive o Bézout (1770): dividir cada parte do quociente pelo divisor, iniciando-se pela maior unidade, e, cada vez em que o resto referente a uma unidade for menor do que o divisor, convertemos esse resto em uma unidade imediatamente abaixo da unidade atual, adicionamos a parte do quociente que possa possuir essa mesma unidade, e continuamos a divisão.

Em um segundo exemplo, calcula-se a divisão do número complexo 1280^{M} 3^{O} 1^{G} 2^{D} 17^{g} (unidades de peso) pelo número fracionário $51\frac{1}{4}$. Para realizar essa divisão de modo análogo ao exemplo anterior, primeiro escreve-se o divisor como $\frac{205}{4}$. Dessa forma, a divisão que será feita é a de quatro vezes 1280^{M} 3^{O} 1^{G} 2^{D} 17^{g} por 205.

dimensões, e o divisor será composto de unidades que terão uma ou mais dimensões das unidades de dividendos, o quociente sempre terá as dimensões das unidades do dividendo que não estão nas unidades do divisor (tradução nossa).



EXEMPLE II.

On propose de diviser le nombre concret complexe 1280M 3O 1G 2D 17g qui a pour unités des poids, par 51 $\frac{1}{4}$.

Dividende proposé { 1280M 3O 1G 2D 17g { 51 $\frac{1}{4}$ diviseur proposé

Nouveau dividende { 5121M 4O 7G 1D 20g { 205 Nouv. diviseur

24M 7O 6G 2D 20g quotient

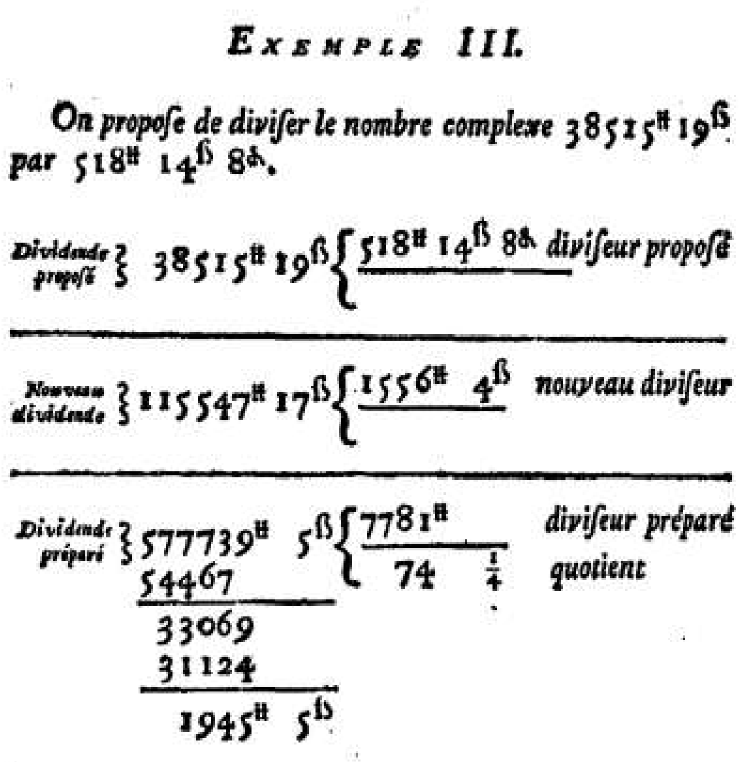
410
1021
820
201M
8
1612O
1435
177O
8
1423G
1230
193G
3
580D
410
170D
24
4100g
410
0000

Figura 158 – Divisão de $1280^{\mathrm{M}}\ 3^{\mathrm{O}}\ 1^{\mathrm{G}}\ 2^{\mathrm{D}}\ 17^{\mathrm{g}}$ por $51\frac{1}{4}$ (Camus, 1749, p. 221)

É interessante que Camus considera o divisor $51\frac{1}{4}$ um número complexo, apesar de ele não estar acompanhado de nenhuma unidade, isto é, aparentemente ele não é a medida de algo. O autor afirma que "le diviseur étant complexe, puisqu'il contient une partie de 51 unités avec autre $\frac{1}{4}$ dont l'unité est différente[18]".

Já o terceiro exemplo do capítulo quatro propõe a divisão de dois números complexos de mesma espécie: $38525\#\ 19^{\mathrm{s}}$ por $518\#\ 14^{\mathrm{s}}\ 8^{\mathrm{d}}$.

[18] O divisor é complexo, pois contém uma parte de 51 unidades com outro $\frac{1}{4}$ cuja unidade é diferente (tradução nossa).



EXEMPLE III.

On propose de diviser le nombre complexe 38515# 19ß par 518# 14ß 8d.

Dividende proposé { 38515# 19ß { 518# 14ß 8d. diviseur proposé

Nouveau dividende { 115547# 17ß { 1556# 4ß nouveau diviseur

Dividende préparé { 577739# 5ß { 7781# diviseur préparé

54467 | 74 1/4 quotient

33069

31124

1945# 5ß

Figura 159 – Divisão de 38525# 19^s por 518# 14^s 8^d (Camus, 1749, p. 224)

Para realizar essa divisão, Camus primeiro observa que 8 *deniers* é igual à terça parte de 2 *sols*. Logo, multiplicando o dividendo e o divisor por três chega-se ao novo quociente, 115547# 17^s, e ao novo divisor, 1556# 4^s. Repetindo esse processo, como 4 *sols* são a quinta parte do *livre*, multiplicamos o dividendo e o divisor por 5 para obtermos o dividendo e o divisor que serão, de fato, utilizados no cálculo da divisão: 577739# 5^s e 7781#. Como dividendo e divisor possuem a mesma espécie de unidade, o quociente será um número abstrato (Camus, 1749, p. 224).

No próximo exemplo, no entanto, a divisão de um número complexo que representa a área de uma superfície por um número complexo cujas unidades representam um comprimento fornece como resultado um número concreto cujas unidades representam um comprimento.

EXEMPLE IV.

Dividende proposé	diviseur proposé
495^{TT} 5^{TP} 6^{Tp} 8^{TL}	57^{T} 4^{P} $8p$

Nouveau dividende	nouveau diviseur
1487^{TT} 4^{TP} 8^{Tp}	173^{T} 2^{P}

Dividende préparé	
4463^{TT} 2^{TP}	520^{T} diviseur préparé
4160	8^{T} 3^{P} $6p$ quotient
303^{TT}	
6	
1820^{TP}	
1560	
260^{TP}	
12	
3120^{Tp}	
3120	
0000	

Figura 160 – Divisão de 495^{TT} 5^{TP} 6^{Tp} 8^{TL} por 57^{T} 4^{P} 8^{p} (Camus, 1749, p. 226)

A não ser pela espécie do quociente, a divisão ocorre de modo análogo ao exemplo anterior. Como 8 *pounces* são $\frac{2}{3}$ de um *pied*, multiplicam-se o dividendo e o divisor por três, o que nos fornece o novo dividendo, 1487^{TT} 4^{TP} 8^{Tp}, e o novo divisor, 173^{T} 2^{P}. Novamente, sabendo-se que dois *pieds* são a terça parte do *livre*, multiplicam-se novamente por três o dividendo e o divisor, tendo como resultado o dividendo e o divisor enfim preparados para se realizar a divisão: 4463^{TT} 2^{TP} e 8^{T} 3^{P} 6^{p}. Sobre a espécie do quociente, o autor justifica dizendo que, como foi mostrado na multiplicação geométrica (que no presente trabalho está contemplada em outro capítulo), a multiplicação de (partes da) toesa linear por toesa linear resulta em (partes da) toesa quadrada. Desse modo, a divisão de toesas quadradas por toesas lineares resultará em toesas lineares, ou em partes dela.

No quinto e último exemplo sobre divisão de números complexos, Camus realiza a divisão de uma medida cúbica por uma medida linear: o número complexo 88720^{TTT} 1^{TTP} 1^{TTp} 4^{TTL} é dividido por 22^{T} 2^{P} 6^{p}.

EXEMPLE V.

On propose de diviser $88720^{TTT}\ 1^{TTP}\ 1^{TTp}\ 4^{TTL}$ *par* $22^{T}\ 2^{P}\ 6p$.

Dividende proposé	*Diviseur proposé*
$88720^{TTT}\ 1^{TTP}\ 1^{TTp}\ 4^{TTL}$	$22^{T}\ 2^{P}\ 6p$
Nouveau dividende	*Nouveau diviseur*
$177440^{TTT}\ 2^{TTP}\ 2^{TTp}\ 8^{TTL}$	$44^{T}\ 5^{P}$
Dividende préparé	*Diviseur préparé*
$1064642^{TTT}\ 1^{TTP}\ 4^{TTp}$	269
	quotient
	$3957^{TT}\ 4^{TP}\ 8^{Tp}$

807
2576
2421
1554
1345
2092
1883
209
6
1255^{TTP}
1076
179
12
2152^{TTp}
2152
0000

Figura 161 – Divisão de $88720^{TTT}\ 1^{TTP}\ 1^{TTp}\ 4^{TTL}$ por $22^{T}\ 2^{P}\ 6^{p}$ (Camus, 1749, p. 229)

O procedimento para essa divisão é igual ao dos exemplos anteriores. Como as 6 polegadas do divisor são iguais a meio pé, primeiro trocamos os 6^{p} por $\frac{1}{2}^{P}$ e multiplicamos tanto dividendo quanto divisor por dois. Com isso, obtemos o novo divisor $173^{T}\ 2^{P}$, que é igual a $173\frac{1}{3}$ toesas. Logo, multiplicamos o novo divisor e o novo dividendo por três. Agora, dividendo e divisor estão prontos para que seja iniciado propriamente o cálculo do quociente.

Como observação, Camus acrescenta que, se pretendêssemos realiza a divisão de $88720^{TTT}\ 1^{TTP}\ 1^{TTp}\ 4^{TTL}$ (mesmo dividendo do exemplo anterior) por $22^{TT}\ 2^{TP}\ 6^{Tp}$, o resultado seria $3957^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$; que difere do quociente do exemplo anterior apenas por possuir uma dimensão menor.

6.1.2 Cours de mathématiques, à l'usage du corps royal de l'artillerie, tome premier, Contenant l'Arithmétique, la Géométrie & la Trigonométrie Rectilinea, de Étienne Bézout (1770)

Diferentemente da obra de Camus, em que a multiplicação e a divisão geométrica são abordadas no capítulo sobre números complexos do seu livro de aritmética, Bézout estuda essas operações entre grandezas geométricas apenas em seu *Élémens de Géométrie*. Nesse livro, as operações entre grandezas começam a ser vistas no momento em que Bézout fala sobre *linhas proporcionais*, que seriam consequência do que já tinha sido visto na parte de aritmética.

Na seção sobre medição de superfícies, Bézout afirma que "medir uma superfície é determinar quantas vezes essa superfície contém outra superfície conhecida"(Bézout, 1770, p. 86, tradução nossa). O autor segue afirmando que, ao medir um retângulo ABCD, busca-se primeiro conhecer quantas vezes o lado AB do retângulo contém o lado ab de um quadrado abcd, assim como quantas vezes o lado BC contém o lado bc desse mesmo quadrado; em seguida, multiplicam-se essas duas quantidades. Desse modo, Bézout exemplifica que, se o lado AB contiver quatro vezes ab e o lado BC acomodar o lado bc sete vezes, então multiplica-se 7 por 4, e se denota que o retângulo ABCD contém 28 vezes o quadrado abcd.

Bézout considera também o caso em que AB e BC contém ab e bc um número racional de vezes:

> Par exemple, si BC ne contenoit que 6 mesures & $\frac{1}{2}$, chaque rectangle ne contiendroi que 6 quarrés & $\frac{1}{2}$; & si le côte AB ne contenoit que 3 mesures & $\frac{1}{3}$, il n'y auroit que 3 rectangles & $\frac{1}{3}$, chacun de 6 quarrés & $\frac{1}{2}$; il faudroit donc multiplier $6\frac{1}{2}$ par $3\frac{1}{3}$, c'est-à-dire, le nombre des mesures de BC par le nombre des mesures AB[19]. (Bézout, 1770, p. 88 da parte de Geometria)

O autor generaliza afirmando que, para medir a superfície de um paralelogramo, deve-se multiplicar sua base pela altura. No entanto, nessa operação ele considera o multiplicando como já sendo uma superfície, e o multiplicador um número abstrato.

> On voit donc, par ce qui a été dit (138), que lorsqu'on veut évaluer la surface ABCD, (fig. 91), on ne fait autre chose que répéter la surface GBCH ou le nombre des quarrés qu'elle contient, autant de fois que son côté GB est contenu dans le côte AB; ainsi le multiplicande est réellement une surface, & le multiplicateur est un nombre abstrait qui ne fait que marquer combien de fois on doit répéter ce multiplicande[20]. (Bézout, 1770, p. 89 da parte de Geometria)

19 Por exemplo, se BC contém apenas 6 medidas e $\frac{1}{2}$, cada retângulo contém apenas 6 quadrados e $\frac{1}{2}$; e se a cota AB contiver apenas 3 barras e $\frac{1}{3}$, haveria apenas 3 retângulos e $\frac{1}{3}$, cada um com 6 quadrados e $\frac{1}{2}$; seria, portanto, necessário multiplicar $6\frac{1}{2}$ por $3\frac{1}{3}$, ou seja, o número de medidas de BC pelo número de medições AB (tradução nossa).

20 Portanto, vemos, pelo que foi dito (138), que quando queremos avaliar a superfície ABCD, (Fig. 91), não fazemos senão repetir a superfície GBCH ou o número de quadrados que ela contém, tantas vezes quanto o seu lado GB está contido na cota AB; assim, o multiplicando é realmente uma superfície, e o multiplicador é um número abstrato que apenas marca quantas vezes esse multiplicando deve ser repetido (tradução nossa).

Bézout ainda afirma que é errado afirmar que se multiplica linha por linha, isto é, multiplicar a base do paralelogramo por sua altura. Desse modo, Bézout tenta se esquivar de um problema relacionado à multiplicação de grandezas (não admitindo a multiplicação de linha por linha), criando outra contradição: o de admitir o multiplicando como já sendo uma superfície, enquanto o multiplicador seria um número abstrato.

> On dit cependant, très-communément, que pour avoir la surface d'un parallélogramme, il faut multiplier la base par sa hauteur; mais on doit regarder cela comme une expression abrégée, dans laquelle on sous-entend le nombre des quarrés correspondans aux parties de la base & le nombre des parties de la hauteur. En un mot, on ne peut pas dire qu'on multiplie une ligne par une ligne. Multiplier, c'est prendre un certain nombre de fois; de sorte que quand on multiplie une ligne on ne peut jamais avoir qu'une ligne; & quand on multiplie une surface, on ne peut jamais avoir qu'une surface. Une surface ne peut avoir d'autres élémens que des surfaces, & quoiqu'on dise souvent que le parallélograme ABCD (fig. 79), peut être considéré comme composé d'autant de lignes égales & parallèles à BC, qu'il y a de points dans la hauteur EF, on doit sous - entendre que ces lignes ont une largeur infiniment petite; (car plusieurs lignes sans largeur ne peuvent pas composer une surface); & alors chacune de ces lignes est une surface qui étant répétée autant de fois que sa hauteur est dans la hauteur EF, donne la surface ABCD[21]. (Bézout, 1770, p. 89-90 da parte de Geometria)

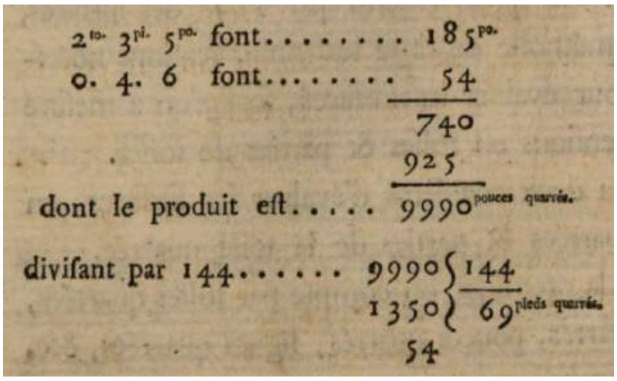
No entanto, Bézout adota a expressão *multiplicar uma linha por uma linha*, fazendo a ressalva de que essa é apenas uma forma abreviada de se dizer que o número de partes de uma linha, multiplicado pelo número de partes de outra linha, exprime o número de partes quadradas contidas no paralelogramo que possui tais linhas como base e altura.

A próxima seção do livro, denominada *Du Toisé des Surfaces*, é iniciada com a explicação de que *Toisé des surfaces* significa medir as superfícies cujas extensões são dadas em toesas ou partes de toesa. O autor destaca que há duas formas de se medir essas superfícies: em toesas quadradas (ou pés quadrados, polegadas quadradas, linhas quadradas etc.) ou em partes da toesa quadrada. Bézout observa, também, que a toesa quadrada contém 36 pés quadrados, por ser um retângulo com 6 pés de comprimento e 6 pés de largura. Da mesma forma, o pé quadrado contém 144 polegadas quadradas, e a polegada quadrada equivale a 144 linhas quadradas.

O autor afirma que, para medir uma superfície em toesas quadradas ou partes quadradas da toesa, bastaria reduzir essas duas dimensões àquela menor espécie, antes de se realizar a multiplicação. Por exemplo, para avaliar a superfície de um retângulo com $2^{T}\ 3^{P}\ 5^{p}$ de

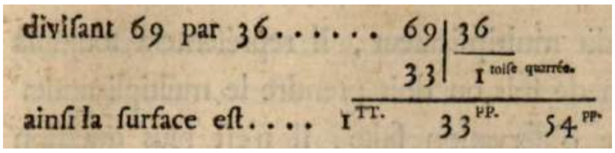
[21] No entanto, é muito comum dizer que, para se ter a superfície de um paralelogramo, é preciso multiplicar a base por sua altura; mas devemos considerá-lo como uma expressão abreviada, na qual implicamos o número de quadrados correspondentes às partes da base e o número de partes da altura. Em uma palavra, não podemos dizer que multiplicamos uma linha por uma linha. Multiplicar é tomar um certo número de vezes; de modo que, quando multiplicamos uma linha, nunca podemos ter uma única linha; e quando você multiplica uma superfície, você só pode ter uma superfície. Uma superfície não pode ter outro elemento que as superfícies e, embora seja dito que o paralelogramo ABCD (Fig. 79), pode ser considerado como composto de tantas linhas iguais e paralelas a BC, pois existem pontos na altura EF, deve ser entendido que essas linhas têm uma largura infinitamente pequena; (porque várias linhas sem largura não podem compor uma superfície); e então cada uma dessas linhas é uma superfície que é repetida tantas vezes quanto a altura está na altura EF, gerando a superfície ABCD (tradução nossa)

comprimento e 0^T 4^P 6^p de largura, deve-se reduzir essas medidas em polegadas, e depois multiplicá-las.



$2^{to.}$ $3^{pi.}$ $5^{po.}$ ſont........ $185^{po.}$
0. 4. 6 ſont........ 54
740
925
dont le produit eſt..... $9990^{\text{pouces quarrés.}}$
diviſant par 144...... 9990 | 144
1350 | $69^{\text{pieds quarrés.}}$
54

Figura 162 – Multiplicação *geométrica* de 2^T $3^{\ P}$ 5^p e 0^T 4^P 6^p (Bézout, 1770, p. 98 da parte de Geometria)



diviſant 69 par 36...... 69 | 36
33 | $1^{\text{toiſe quarrée.}}$
ainſi la ſurface eſt.... $1^{TT.}$ $33^{PP.}$ $54^{pp.}$

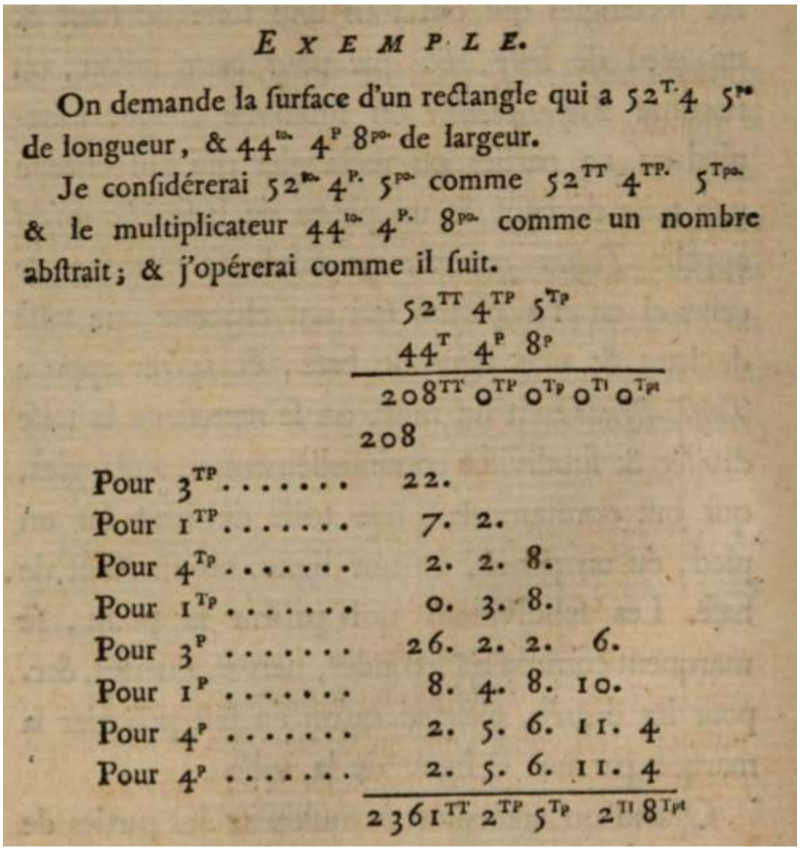
Figura 163 – Multiplicação *geométrica* de 2^T $3^{\ P}$ 5^p e 0^T 4^P 6^p (Bézout, 1770, p. 99 da parte de Geometria)

Desse modo, como 2^T $3^{\ P}$ 5^p é igual a 185 polegadas e 0^T 4^P 6^p equivale a 54 polegadas, multiplica-se 185 por 54, obtendo-se 9990 polegadas quadradas. Mas como cada pé quadrado contém 144 polegadas quadrdas, divide-se esse valor por 144, o que nos dá 69 pés quadrados e 54 polegadas quadradas. Ainda, como cada toesa quadrada contém 36 pés quadrados, divide-se 69 por 36. Desse modo, a área desse retângulo medirá 1^{TT} 33^{PP} 54^{pp}.

Esse foi o primeiro jeito de se medir superfícies descrito pelo autor. A próxima forma parte da observação de que a toesa quadrada é formada por seis retângulos de base igual a um pé, e uma toesa de altura. A medida de superfície obtida desse modo é, então, chamada pelo autor de *Toise-pied*. Cada toesa-pé é dividida em 12 retângulos de 1 toesa de altura e uma polegada de base; e a medida de superfície assim obtida é denominada *Toise-pouce*. Por sua vez, casa toesa-polegada pode ser dividida em 12 retângulos iguais, de uma toesa de altura e uma linha de base; obtendo-se a chamada *Toise-ligne*.

Em seguida, o autor reafirma o que disse no início dessa parte sobre geometria: quando se deseja multiplicar as partes de duas linhas, concebe-se as toesas do multiplicando como toesas quadradas, os pés do multiplicando como toesas-pés, e assim por diante; enquanto isso, o multiplicador indicará quantas vezes o multiplicando deverá ser repetido. Bézout nota que essa multiplicação é a mesma daquela feita sob a denominação *Multiplicação de Números Complexos*, na parte de aritmética.

Um exemplo é apresentado, em que o autor procura encontrar a área de um retângulo de dimensões 52^T $4^{\,P}$ 5^p e 44^T 4^P 8^p. Para isso, Bézout propõe a multiplicação desses dois números, considerando o multiplicando como 52^{TT} $4^{\,TP}$ 5^{Tp}, e o multiplicador abstrato.



EXEMPLE.

On demande la surface d'un rectangle qui a $52^{T}\cdot 4$ 5^{po} de longueur, & 44^{to} 4^{P} 8^{po} de largeur.

Je considérerai 52^{to} $4^{P.}$ 5^{po} comme 52^{TT} $4^{TP.}$ 5^{Tpo} & le multiplicateur 44^{to} $4^{P.}$ 8^{po} comme un nombre abstrait; & j'opérerai comme il suit.

$$
\begin{array}{lllllll}
 & 52^{TT} & 4^{TP} & 5^{Tp} & & \\
 & 44^{T} & 4^{P} & 8^{p} & & \\
\hline
 & 208^{TT} & 0^{TP} & 0^{Tp} & 0^{Tl} & 0^{Tpt} \\
 & 208 & & & & \\
\text{Pour } 3^{TP}\ldots\ldots\ldots & 22. & & & & \\
\text{Pour } 1^{TP}\ldots\ldots\ldots & 7. & 2. & & & \\
\text{Pour } 4^{Tp}\ldots\ldots\ldots & 2. & 2. & 8. & & \\
\text{Pour } 1^{Tp}\ldots\ldots\ldots & 0. & 3. & 8. & & \\
\text{Pour } 3^{P}\ldots\ldots\ldots & 26. & 2. & 2. & 6. & \\
\text{Pour } 1^{P}\ldots\ldots\ldots & 8. & 4. & 8. & 10. & \\
\text{Pour } 4^{p}\ldots\ldots\ldots & 2. & 5. & 6. & 11. & 4 \\
\text{Pour } 4^{p}\ldots\ldots\ldots & 2. & 5. & 6. & 11. & 4 \\
\hline
 & 2361^{TT} & 2^{TP} & 5^{Tp} & 2^{Tl} & 8^{Tpt}
\end{array}
$$

Figura 164 – Multiplicação *geométrica* de 52^T $4^{\,P}$ 5^p e 44^T 4^P 8^p (Bézout, 1770, p. 100 da parte de Geometria)

Primeiro é feito o produto de 52^{TT} por 44. Em seguida, multiplica-se 44 pelas partes alíquotas do multiplicando: Como 3^{TP} é a metade de uma toesa-toesa, o produto de 44 por 3^{TP} é igual a 22^{TT}. Em seguida, calcula-se a terça parte de 22^{TT} para obter o produto de 1^{TP} e 44. as 5 toesas polegadas que estão no multiplicando são decompostas em 4^{Tp} (a terça parte da toesa-pé) e 1^{Tp} (a duodécima parte da toesa-pé). Desse modo para realizar esses cálculos, o último resultado é dividido por três e, em seguida, este é dividido por quatro.

Agora falta a multiplicação das partes de toesa do multiplicador por todo o multiplicando. Os 4 pés são decompostos em 3^P e 1^P. Para encontrar o primeiro produto, divide-se o multiplicando por dois; e, a fim e encontrar o segundo resultado, divide-se o primeiro por três. Por último, as 8 polegadas são decompostas em 4^p e 4^p. Cada um desses resultado será a terça parte do resultado da linha anterior.

Bézout orienta o aluno a, caso queira converter o resultado anterior em toesas quadradas, pés quadrados, etc.; deve-se proceder do seguinte modo:

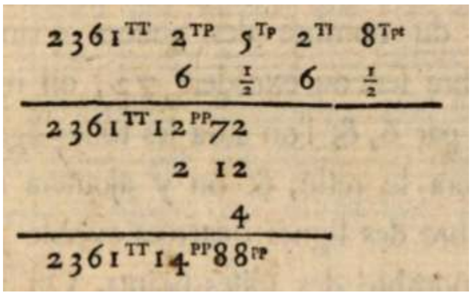


Figura 165 – Conversão de 2361^{TT} 2^{TP} 5^{Tp} 2^{Tl} 8^{Tpt} em toesas quadradas e partes quadradas da toesa (Bézout, 1770, p. 101 da parte de Geometria)

Primeiro, escreve-se alternadamente os números 6 e $\frac{1}{2}$ embaixo das partes de toesa do produto. Agora, o autor orienta a multiplicar cada parte pelo número inferior, posicionando o produto de dois números consecutivos em uma mesma coluna, como mostrado na figura acima.

As toesas-pés são multiplicadas por 6 porque cada toesa-pé vale 6 pés quadrados. Já as toesas-polegadas são $\frac{6}{12}$ pés quadrados, as toesas-linhas equivalem a $\frac{72}{6}$ polegadas quadradas e as toesas-pontos são iguais a $\frac{72}{144}$ polegadas quadradas.

O autor nos informa então que, como a partir do produto das partes da base e das partes da altura obtivemos a superfície; dadas a medida da superfície e o comprimento de um dos lados do retângulo, podemos obter o outro lado. No entanto, Bézout salienta que essa divisão não é de uma superfície por uma linha, mas de uma superfície por outra superfície.

> Puisque, pour avoir la surface d'un parallélogramme, il faut multiplier le nombre des parties de la base, par le nombre des parties de la hauteur, il s'ensuit (Arith. 67) que si connoissant la surface & le nombre des parties de la hauteur ou de la base, on veut avoir la base ou la hauteur, il faudra diviser le nombre qui exprime la surface, par le nombre qui exprime celle des deux dimensions qui sera connue. Mais il faut bien observer que ce n'est point une surface par une ligne, n'est pas moins chimérique que la multiplication d'une ligne, par une ligne. Ce que l'on fait véritablement alors, on divise une surface par une surface[22]. (Bézout, 1770, p. 103 da parte de Geometria)

Bézout argumenta que, quando se avalia a superfície de um retângulo ABCD, o cálculo é feito tomando-se como altura a unidade AE (sendo E um ponto no segmento AD) e mesma base, repetindo-se a superfície do retângulo menor da tantas vezes quantas a altura AE está contida na altura AB. Logo, se quisermos conhecer o número das parte de AB, deveremos buscar quantas vezes o retângulo de base AD e altura AB contém o retângulo de base AD e altura AE.

Por exemplo, se um dado paralelogramo possui 2^{T} 5^{P} de base e sua área é 120^{TT} 29^{PP} 54^{pp}, podemos escrever a medida dessa superfície como sendo 120^{TT} 4^{TP} 10^{Tp} 9^{Tl}. Bézout afirma

[22] Já que, para se obter a superfície de um paralelogramo, é necessário multiplicar o número das partes da base, pelo número das partes da altura, segue da (Arith 67) que conhecendo-se a superfície e o número das partes a partir da altura ou da base, para encontrar a base ou a altura, é necessário dividir o número que expressa a superfície, pelo número que expressa aquela das duas dimensões que serão conhecidas. Mas deve ser observado que não é uma superfície por uma linha, nem é menos quimérico do que a multiplicação de uma linha por uma linha. O que realmente fazemos então, dividimos uma superfície por uma superfície (tradução nossa).

que, desse modo, para encontrar a altura do paralelogramo será realizada a divisão de 120^{T} 4^{P} 10^{p} 9^{l} por 2^{T} 5^{P}, obtendo 42^{T} 3^{P} 10^{p} $1^{l}\frac{13}{17}$.

Em outro capítulo, Bézout trata da medição do volume dos sólidos. O autor afirma que, para determinar o volume de um paralelepípedo retângulo ABCDEFGH, é preciso saber quantas partes quadradas efgh (unidade de área) a sua base contém, assim como quantas vezes a altura AH contém a altura ah (unidade de altura). Daí, multiplica-se o número de partes quadradas da base pelo número de partes da altura. Bézout discorre que, sobre a base do paralelepípedo podem se acomodar tantos cubos de altura ah quantas vezes o quadrados efgh cabe na base. Logo, repete-se essa quantidade de cubos arrumados sobre a base EFGH, até completar a altura do paralelepípedo. Por isso, o volume do prisma será dado pelo produto da superfície da base pela altura.

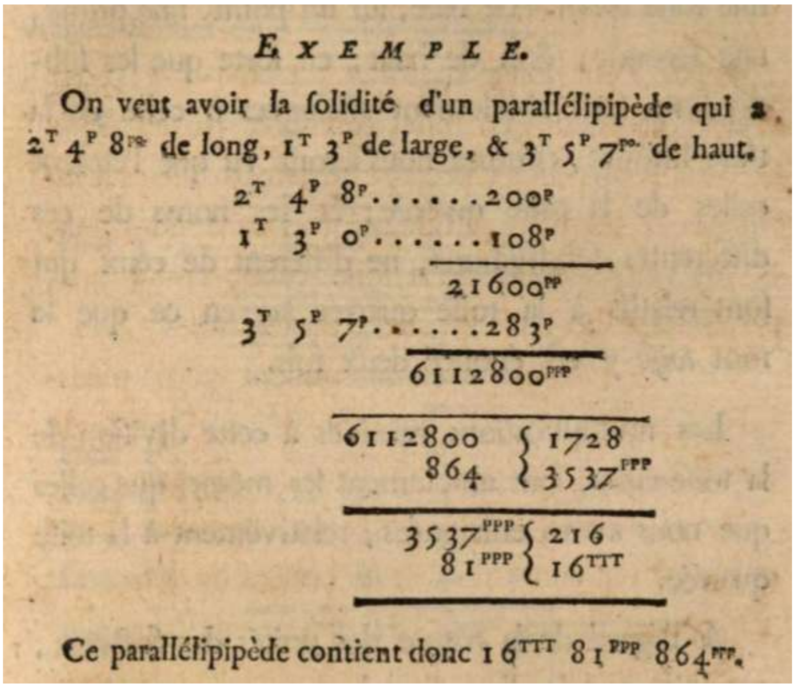
Novamente, Bézout faz uma ressalva quanto a essa multiplicação de grandezas. Do mesmo modo como argumenta não ser permitido dizer que uma linha é multiplicada por outra linha, também não se poderia dizer que se multiplica uma superfície por uma linha. Para ele, o que se faz é repetir uma quantidade de cubos (unidade de volume) uma quantidade de vezes dentro do sólido. Portanto, o que se multiplica é um sólido por um número abstrato.

> Mais nous devons observer ici la même chose que nous avons fait remarquer (139) à l'occasion des surfaces: de même qu'on ne peut pas dire avec exactitude, qu'on multiplie une ligne par une ligne, on ne peut pas dire non plus qu'on multiplie une surface par une ligne. C'est, ainsi qu'on vient de le voir, un solide (dont le nombre des cubes est le même que le nombre des quarrés de la base) qu'on répète autant de fois que la hauteur est comprise dans celle du solide total, c'est-à-dire, autant de fois qu'il est dans le solide qu'on veut mesurer[23]. (Bézout, 1770, p. 148-149 da parte de Geometria)

Na seção denominada *Du Toisé des Solides*, Bézout afirma que *toiser* um sólido é avaliá-lo em toesas cúbicas e partes da toesa cúbica, e que isso pode ser realizado de duas formas. A primeira delas consiste em calcular o volume desse sólido em toesas cúbicas, pés cúbicos, polegadas cúbicas etc. O autor então observa que: a toesa cúbica (ou *cubique*) contém 216 pés cúbicos, pois é um cubo com 6 pés de comprimento, 6 pés de largura e 6 pés de altura. Analogamente, o pé cúbico contém 1728 polegadas cúbicas, a polegada cúbica equivale a 1728 linhas cúbicas, e assim por diante.

Desse modo, para realizar o cálculo do volume de um sólido utilizando toesas cúbicas e partes de toesas cúbicas, Bézout indica que se deve reduzir as três dimensões do sólido à menor de suas espécies, realizar o produto das dimensões e, então, caso o resultado esteja em linhas cúbicas por exemplo, dividir-lo sucessivamente por 1728, 1728 e 216. Como exemplo, propõe-se o cálculo do volume de um paralelepípedo de 2^{T} 4^{P} 8^{p} de comprimento, 1^{T} 3^{P} de largura e 3^{T} 5^{P} 7^{p} de altura.

[23] Mas devemos observar aqui a mesma coisa que apontamos (139) no caso das superfícies: assim como é impossível dizer rigorosamente que multiplicamos uma linha por uma linha, não podemos dizer que multiplicamos uma superfície por uma linha. É, como acabamos de ver, um sólido (cujo número de cubos é o mesmo que o número de quadrados da base) que é repetido tantas vezes quantas a altura é incluída na do sólido total, isto é, quantas vezes está contido no sólido que se quer medir (tradução nossa).



EXEMPLE.

On veut avoir la solidité d'un parallélipipède qui a $2^T\ 4^P\ 8^{po}$ de long, $1^T\ 3^P$ de large, & $3^T\ 5^P\ 7^{po}$ de haut.

$2^T\ 4^P\ 8^p \ldots\ldots 200^p$

$1^T\ 3^P\ 0^p \ldots\ldots 108^p$

21600^{pp}

$3^T\ 5^P\ 7^p \ldots\ldots 283^p$

6112800^{ppp}

$6112800 \; \{ \; 1728$

$864 \; \{ \; 3537^{ppp}$

$3537^{ppp} \; \{ \; 216$

$81^{ppp} \; \{ \; 16^{TTT}$

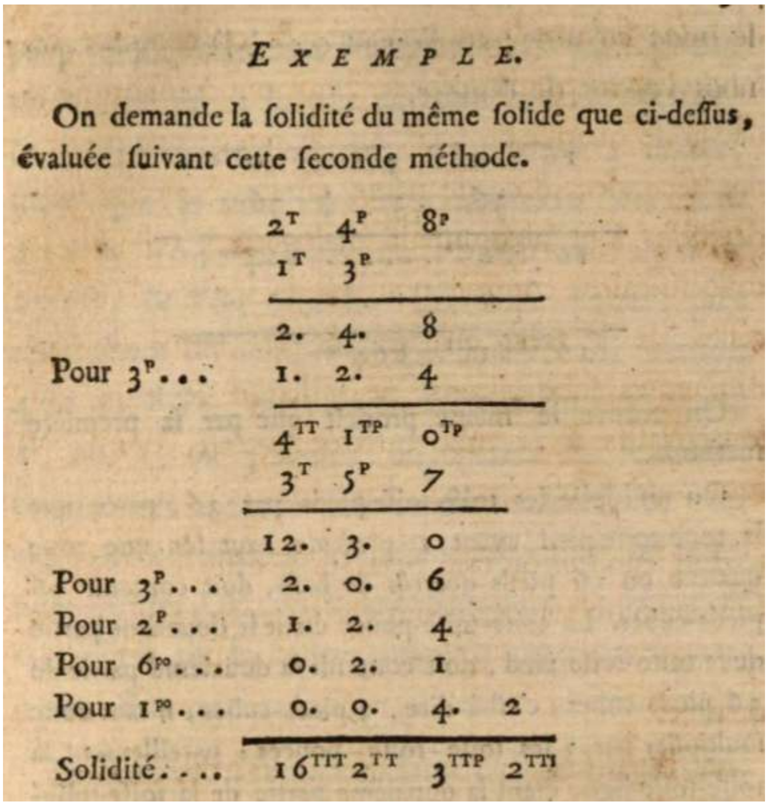
Ce parallélipipède contient donc $16^{TTT}\ 81^{ppp}\ 864^{ppp}$.

Figura 166 – Volume de um paralelepípedo de $2^T\ 4^P\ 8^p$ de comprimento, $1^T\ 3^P$ de largura e $3^T\ 5^P\ 7^p$ de altura. (Bézout, 1770, p. 167 da parte de Geometria)

Em primeiro lugar, as três medidas lineares são convertidas em polegadas; e, em seguida são multiplicadas, resultando em 6112800 polegadas cúbicas. Esse número, dividido por 1728, nos fornece 3537 pés cúbicos e 864 polegadas cúbicas de resto. Mas 3537 dividido por 216 nos dá 16 toesas cúbicas, com 81 pés cúbicos de resto. Portanto, o produto será $16^{TTT}\ 81^{PPP}\ 864^{ppp}$.

Na segunda maneira descrita por Bézout para o cálculo do volume de sólidos imagina-se a toesa cúbica repartida em seis paralelepípedos, cada um com uma toesa quadrada de base e um pé de altura, denominados *toesa-toesa-pés*. Cada toesa-toesa-pé também pode ser repartida em 12 paralelepípedos com uma toesa quadrada de base e uma polegada de altura, chamados *toesa-toesa-polegadas*. Podemos também decompor cada um desses paralelepípedos em paralelepípedos de uma toesa quadrada de base e uma linha de altura, e assim continuamente.

Sobre as unidades dos fatores no cálculo do volume por esse meio, Bézout afirma que se deve considerar um deles como exprimindo toesas cúbicas ou toesas-toesas-pés, etc; e o outro fator será um número abstrato, que denotará quantas vezes se deve repetir o primeiro fator. Como exemplo, Bézout utiliza essa segunda forma para o cálculo do volume do mesmo sólido do exemplo anterior.



E X E M P L E.

On demande la ſolidité du même ſolide que ci-deſſus, évaluée ſuivant cette ſeconde méthode.

	2^{T}	4^{P}	8^{P}	
	1^{T}	3^{P}		
	2.	4.	8	
Pour 3^{P}...	1.	2.	4	
	4^{TT}	1^{TP}	0^{Tp}	
	3^{T}	5^{P}	7	
	12.	3.	0	
Pour 3^{P}...	2.	0.	6	
Pour 2^{P}...	1.	2.	4	
Pour 6^{po}...	0.	2.	1	
Pour 1^{po}...	0.	0.	4.	2
Solidité...	16^{TTT}	2^{TT}	3^{TTP}	2^{TTp}

Figura 167 – Volume de um paralelepípedo de 2^{T} 4^{P} 8^{p} de comprimento, 1^{T} 3^{P} de largura e 3^{T} 5^{P} 7^{p} de altura. (Bézout, 1770, p. 169 da parte de Geometria)

O autor alega que, como o primeiro fator é 2^{T} 4^{P} 8^{p}, primeiramente se tem um paralelepípedo de uma toesa quadrada de base e 2^{TTT} 4^{TTP} 8^{TTp} de comprimento, o qual deverá ser repetido uma vez e meia, pois o segundo fator é 1^{T} 3^{P}, e por último deverá ser repetido novamente por quantas vezes são indicadas pelo terceiro fator, 3^{T} 5^{P} 7^{p}. No entanto, afirma que para realizar esse produto com mais facilidade podemos deixar os fatores com as unidades em toesas e partes da toesa linear.

Bézout também realiza a conversão do produto obtido por esse método a toesas cúbicas, pés cúbicos, etc; obtendo o mesmo resultado do volume obtido pelo primeiro método. O autor indica que se deve escrever, embaixo das partes da toesa, os números 36, 3, $\frac{1}{4}$, consecutivamente, e multiplicar cada número posicionado na parte de cima por essas quantidades. Além disso, quando da multiplicação por $\frac{1}{4}$ sobrar um resto 1, 2 ou 3, debaixo do próximo 36 deverá ser escrito 432, 864 ou 1296, respectivamente.

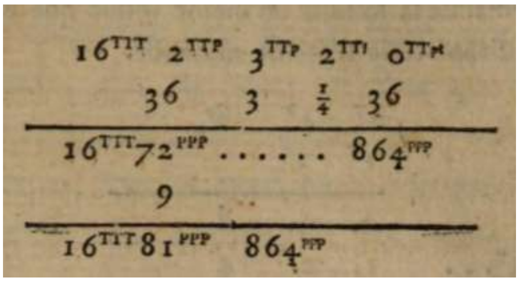


Figura 168 – Conversão de 16^{TTT} 2^{TTP} 3^{TTp} 2^{TTl} em toesas cúbicas, pés cúbicos, etc. (Bézout, 1770, p. 170 da parte de Geometria)

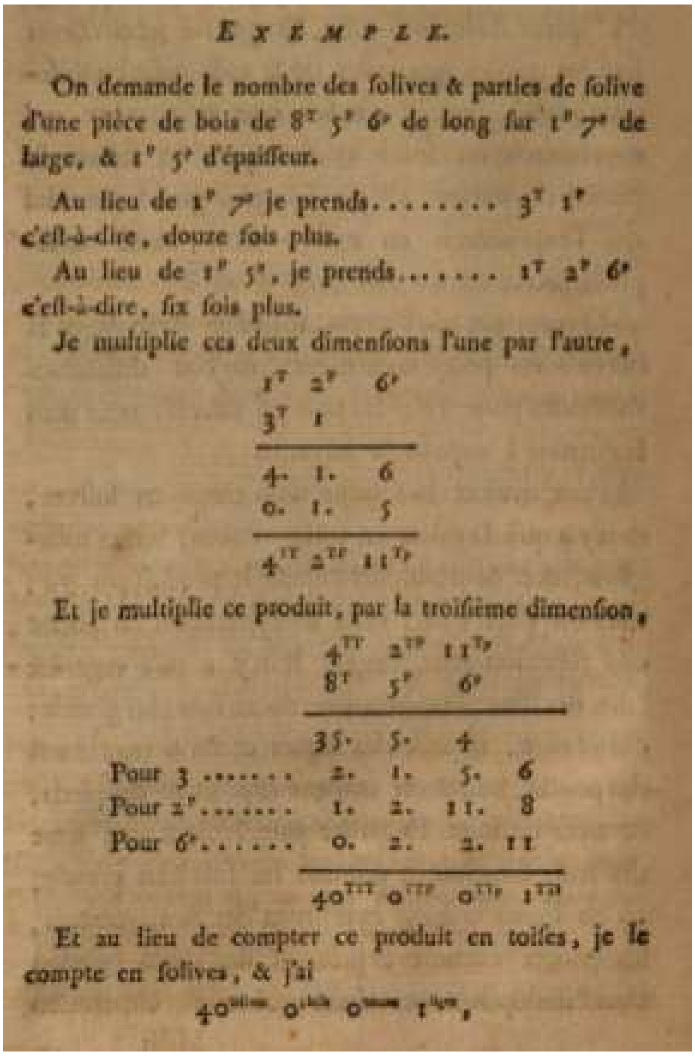
Além disso, dados o volume de um sólido e sua altura, podemos calcular a medida da base. Bézout supõe então que o volume é igual a 16^{TTT} 2^{TTP} 3^{TTp} 2^{TTl}, e a altura 2^{T} 4^{P} 8^{p}. O autor argumenta que, nesse caso, deve-se considerar o divisor como 2^{TTT} 4^{TTP} 8^{TTp}, e a operação se reduzirá a dividir 16^{T} 2^{P} 3^{p} 2^{l} por 2^{T} 4^{P} 8^{p}. No entanto, como o quociente deverá ser a medida de uma superfície, não o expressaremos em toesas lineares, mas em toesas quadradas, toesas-pés, etc.

Assim como Camus apresenta em seu livro, Bézout dedica uma seção da parte de geometria ao *Toisé des Bois*. O autor afirma que na artilharia e na arquitetura é praticado reduzir os volumes em *solives*[24], e define o *solive* como um paralelepípedo de duas toesas de altura e 36 polegadas quadradas de base, ou, equivalentemente, uma toesa de altura e meio pé quadrado (72 polegadas quadradas) de base.

Como a *solive* possui uma toesa de altura e a toesa equivale a seis pés, pode-se dividir a *solive* em seis partes, cada qual com 72 polegadas quadradas de base e um pé de altura, chamada *pied de solive*. Da mesma forma, o *pied de solive* pode ser dividido em 12 sólidos, cada um com 72 polegadas quadradas de base e uma polegada de altura, denominado *pouce de solive*, e assim por diante.

Bézout afirma que, para calcular o volume de um sólido em *solives*, pode-se primeiramente realizar o cálculo em toesas cúbicas, toesas-toesas pés, e assim por diante. Em seguida, multiplica-se o valor encontrado por 72. Outra forma de fazer essa conversão seria considerar uma das dimensões do paralelepípedo como 12 vezes maior, e outra das dimensões como 6 vezes maior. O autor inclui um exemplo de como se pode realizar essa conversão, utilizando o segundo método.

[24] A versão portuguesa da geometria de Bézout traduz o termo *solive* como *soliva*.



EXEMPLE.

On demande le nombre des solives & parties de solive d'une pièce de bois de $8^T\ 5^P\ 6^p$ de long sur $1^P\ 7^p$ de large, & $1^P\ 5^p$ d'épaisseur.

Au lieu de $1^P\ 7^p$ je prends........ $3^T\ 1^P$ c'est-à-dire, douze fois plus.

Au lieu de $1^P\ 5^p$, je prends....... $1^T\ 2^P\ 6^p$ c'est-à-dire, six fois plus.

Je multiplie ces deux dimensions l'une par l'autre,

$$\begin{array}{lll} 1^T & 2^P & 6^p \\ 3^T & 1 & \\ \hline 4. & 1. & 6 \\ 0. & 1. & 5 \\ \hline 4^{TT} & 2^{TP} & 11^{Tp} \end{array}$$

Et je multiplie ce produit, par la troisième dimension,

$$\begin{array}{lllll} & 4^{TT} & 2^{TP} & 11^{Tp} & \\ & 8^T & 5^P & 6^p & \\ \hline & 35. & 5. & 4 & \\ \text{Pour } 3 \ldots\ldots & 2. & 1. & 5. & 6 \\ \text{Pour } 2^P \ldots\ldots & 1. & 2. & 11. & 8 \\ \text{Pour } 6^p \ldots\ldots & 0. & 2. & 2. & 11 \\ \hline & 40^{TTT} & 0^{TTP} & 0^{TTp} & 1^{TTl} \end{array}$$

Et au lieu de compter ce produit en toises, je le compte en solives, & j'ai

$40^{\text{solives}}\ 0^{\text{pieds}}\ 0^{\text{pouces}}\ 1^{\text{ligne}}$,

Figura 169 – Cálculo do volume de uma peça em solives. (Bézout, 1770, p. 180 da parte de Geometria)

Tem-se uma peça de madeira de dimensões $8^T\ 5^P\ 6^p$, $1^P\ 7^p$ e $1^P\ 5^p$. A segunda dessas dimensões é multiplicada por 12, obtendo-se $3^T\ 1^P$; enquanto a terceira dessas dimensões é multiplicada por 6, resultando em $1^T\ 2^P\ 6^p$. Agora, realizando o produto, chega-se a $40^{TTT}\ 0^{TTP}\ 0^{TTp}\ 1^{TTL}$. Desse modo, o resultado procurado é 40 *solives* e 1 linha de *solive*.

Bézout menciona, ainda, uma outra expressão relacionada a uma forma um pouco diferente de realizar as divisões da *solive*, o *cheville*, que seria igual ao dobro de uma linha de *solive*.

> Quelques toiseurs divisent autrement la solive. En se la représentant comme un parallélipipède de 2 toises de haut sur 36 pouces quarrés de base, ils la divisent en douze parties qu'ils appellent des pieds; ils divisent ce pied en 12 pouces, & le pouce en trois parties qu'ils appellent chevilles. Ainsi leur pied de solive est la moitié du pied de solive ordinaire; il en est de même du pouce, & chaque cheville vaut 2 lignes de solive[25].

[25] Alguns *toiseurs* dividem a *solive* de outra maneira. Representando-na como um paralelepípedo de duas toesas de altura e 36 polegadas quadradas, eles a dividem em doze partes, que serão os pés; cada pé é dividido em 12

A "solução"para a multiplicação de grandezas geométricas lineares apresentada por Bézout, considerando um dos fatores como uma superfície e o outro como abstrato, não foi encontrada em outra obra. Ao que tudo indica, a denominada multiplicação geométrica desapareceu dos livros didáticos de Matemática do século XIX, apesar de continuar sendo praticada em outras áreas, como na Física.

6.2 As tendências na abordagem da multiplicação de grandezas

Nos capítulos anteriores e no início desse capítulo, estudamos quais eram as concepções de alguns autores de livros didáticos, para a operação de se multiplicar duas grandezas. Uma característica comum que encontramos entre esses autores é o fato de nenhum deles demonstrar dúvidas quanto ao que seria o produto e divisão entre duas grandezas, apesar de suas diferentes justificativas para essas operações possuírem suas falhas.

Entre aqueles que alegavam que o multiplicador deveria ser tratado como abstrato e que o produto teria o mesmo resultado do multiplicando, encontram-se os brasileiros Ottoni (1855), D'Avila (1856) e Vianna (1906). Thiré (1944) admite a existência da multiplicação de números complexos, mas não elucida qual será a dimensão do produto. Observando seus exercícios resolvidos, vimos que para ele a multiplicação também é uma operação fechada, sendo mantida a dimensão do multiplicando.

Entre os autores franceses, percebemos que Bézout (1770) também considerava que, ao multiplicar duas grandezas, o multiplicando já teria a unidade do produto; enquanto o multiplicador aponta quantas vezes o multiplicando deve ser tomado. Bézout vai além e expande essa sua concepção para a multiplicação geométrica, onde afirma que a multiplicação de dois comprimentos na verdade seria a multiplicação de uma superfície por um número abstrato. Logo, o resultado seria uma superfície e a multiplicação ainda seria uma operação fechada. Camus (1753) também postulou que o produto entre duas grandezas seria da mesma espécie do multiplicando. No entanto, no âmbito da multiplicação geométrica, afirma que se pode multiplicar uma linha (ou superfície) por uma linha, obtendo uma grandeza de espécie distinta das anteriores. Para Lacroix (1807) e Bourdon (1837), também o produto de duas grandezas teria a mesma espécie do multiplicando.

Percebemos que o postulado encontrado na maioria dos autores, de que o produto teria a mesma unidade do multiplicando, surge principalmente da convicção de que o multiplicador deveria ser um número abstrato – ou pelo menos, poder realizar o papel de número abstrato durante as contas – que indicasse apenas quantas vezes o multiplicando precisaria ser somado.

Essa abordagem foi a mesma que encontramos em Salimbeni (1794), para quem a

polegadas, e a polegada em três partes, chamadas *chevilles*. Assim, o pé de *solive* será igual à metade do pé de *solive* ordinário, o mesmo acontecendo com a polegada; e cada *cheville* vale 2 linhas de *solive* (tradução nossa) multiplicação de grandezas seria uma operação fechada (nenhuma unidade nova seria criada no produto) e não comutativa, visto que o resultado sempre teria a mesma unidade do multiplicando; enquanto se trabalharia com o multiplicador como se este fosse um número abstrato.

Na verdade, a abordagem de Salimbeni (e dos autores que postulam que a espécie do produto deverá ser a mesma do multiplicando) é errônea. Para ele, 20 toesas vezes 5 libras é igual a 100 toesas porque, no contexto desse cálculo, as 20 toesas são, de fato, 20 toesas por libra. Por esse motivo, as 20 toesas serão tomadas 5 vezes e o produto será 100 toesas. Do mesmo modo, o cálculo 5 libras vezes 20 toesas está associado a um contexto de 5 libras/toesa vezes 20 toesas, o que será igual a 100 libras. Desse modo, não se faz uma troca real da posição dos fatores da multiplicação nessas contas.

O modo de os autores justificarem (como um postulado sem nenhum fundamento) que, na multiplicação, o produto deverá ter a mesma espécie de unidade que o multiplicando, é errado; assim como a forma de Salimbeni dissimular uma suposta explicação para essa afirmação. Porém, a não comutatividade, em termos de valores numéricos, está presente nos sistemas metrológicos não decimais. Portanto, existem dois aspectos a serem analisados: os valores numéricos e a espécie de unidade do produto.

6.3 A prática da multiplicação de grandezas na Física

Na Física, estamos acostumados a multiplicar e a dividir grandezas, realizando a operação tanto com o valor numérico da grandeza quanto com suas unidades, sem nos preocuparmos com a definição e legitimidade dessas operações. Por exemplo, dividimos a distância percorrida pelo tempo de percurso para obter a velocidade média do objeto; assim como multiplica-se a força pela distância para se obter o trabalho.

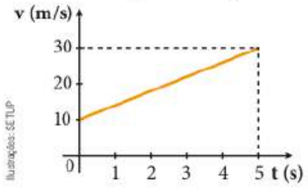
Procuramos mas não obtivemos sucesso em encontrar algum texto da Física que fizesse menção a alguma justificativa para tais operações. Do texto *Physikalisches Praktikum für Anfänger* (Ilberg, 1977), lemos apenas que

> Alle Gleichungen in den Versuchsanleitungen sind mathematische Verknüpfungen physikalischer Grössen (siehe auch DIN 1313). Jede physikalische Grösse ist das Produkt eines Zahlenwertes mit einer Einheit (z.B. Weg = 1 meter oder elektrische Spannung = 1 Volt)[26] (Ilberg, 1977, p. 1).

Nos livros de Física contemporâneos, as grandezas são multiplicadas e dividias sem que haja a menor preocupação com o significado conceitual dessas operações. No exemplo a seguir, de um livro didático indicado para o 1^o do Ensino Médio, a velocidade escalar média do veículo é encontrada dividindo 100 metros por 5 segundos.

[26] Todas as equações nas instruções experimentais são elos matemáticos de grandezas físicas (ver também DIN 1313). Cada grandeza física é o produto de um valor numérico de uma unidade (por exemplo, deslocamento = 1 metro ou tensão elétrica = 1 volt) (tradução nossa).

2 A velocidade escalar de um móvel variou com o tempo conforme o gráfico a seguir:



Calcule:

a) a distância percorrida pelo móvel no intervalo de tempo de 0 s a 5 s;

b) a velocidade escalar média do móvel no mesmo intervalo de tempo.

RESOLUÇÃO

a) Como a velocidade escalar instantânea foi positiva durante todo o intervalo de tempo considerado, a distância percorrida (**d**) é igual à variação de espaço (Δs), que é dada pela "área" entre o gráfico e o eixo dos tempos. Assim:

$$d = \text{"área"} = \frac{(30+10)}{2} \cdot 5 \Rightarrow \boxed{d = 100 \text{ m}}$$

b) Aplicando a fórmula da velocidade escalar média, temos:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{100}{5} \Rightarrow \boxed{v_m = 20 \text{ m/s}}$$

Note que $\mathbf{v}_m$ é a média aritmética entre as velocidades nos instantes 0 s e 5 s: $v_m = \frac{10+30}{2} \Rightarrow \boxed{v_m = 20 \text{ m/s}}$

Respostas: a) 100 m; b) 20 m/s.

Figura 170 – Exercício resolvido sobre movimento uniformemente variado (Biscuola, 2016, p. 46)

Em todos os exercícios envolvendo multiplicação ou divisão de grandezas, o estudante é compelido a multiplicar e a dividir as grandezas, realizando essas operações não somente com os valores numéricos da grandeza mas também com suas unidades. Essas operações com unidades podem dar origem a novas espécies de unidades, como o joule ($N \cdot m$) e o pascal (N/m^2), presentes no Sistema Internacional de medidas.

Grandeza	Unidades derivadas			
	Nome	Símbolo	Expressão em outras unidades do SI	Expressão em unidades de base do SI
velocidade	metro por segundo	m/s		
aceleração	metro por segundo ao quadrado	m/s^2		
massa específica	quilograma por metro cúbico	kg/m^3		
superfície	metro quadrado	m^2		
volume	metro cúbico	m^3		
força	newton	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
pressão	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
energia, trabalho	joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
potência	watt	W	J/s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
impulso	newton · segundo	N · s	N · s	$m \cdot kg \cdot s^{-1}$

Fonte: INMETRO. *Sistema Internacional de Unidades – SI*. 8. ed. (revisada). Rio de Janeiro, 2007.

Figura 171 – Algumas unidades do Sistema Internacional, expressas a partir das unidades de base.

No livro didático *Física, volume 1*, de Biscuola et. al. (2016), o autor destaca que a unidade de medida do impulso no Sistema Internacional é obtida multiplicando-se Newton por segundo.

As unidades de impulso decorrem da própria definição: unid (I) = unid (F) · unid (Δt)

No Sistema Internacional (SI), temos:

unid (I) = newton · segundo = N · s

Figura 172 – Multiplicação de unidades para obter o impulso de uma força constante F por um intervalo de tempo δt (Biscola, 2016, p. 218)

A própria unidade Newton, utilizada para expressar a força, provém de multiplicações e divisões de grandezas:

$$N = \frac{m \cdot kg}{s^2}.$$

Exercício resolvido

1. Um automóvel com massa de 1000 kg, inicialmente em repouso, acelera uniformemente, atinge a velocidade de 90 km/h (ou 25 m/s) em 12,5 s e, em seguida, mantém essa velocidade constante durante 20 s. Determine a força resultante sobre o automóvel nas duas etapas: movimento acelerado e movimento uniforme.

Resolução:

A aceleração na primeira etapa é dada por:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{25-0}{12{,}5} \Rightarrow a = 2{,}0 \text{ m/s}^2$$

E a força resultante é dada por:

$$F_R = m \cdot a \Rightarrow F_R = 1000 \cdot 2{,}0 \Rightarrow F_R = 2000 \text{ N}$$

Na segunda etapa, o movimento do automóvel é uniforme, o que significa dizer que a aceleração escalar é nula. Portanto, a força resultante é nula ($F_R = 0$).

Figura 173 – Exercício do livro *Física, volume 1*, de Wilson Carron et. al. (Carron, 2016, p. 117)

Na Geometria, as grandezas também são multiplicadas diretamente, como podemos observar no livro *Matemática: contexto e aplicações*, de Dante (2016).

5. Qual é o volume de concreto necessário para construir uma laje de 20 cm de espessura em uma sala de 3 m por 4 m?

Resolução:

área da base: $A_b = 3 \cdot 4 = 12$; $A_b = 12 \text{ m}^2$

V = área da base · altura $= A_b h = 12 \text{ m}^2 \cdot 0{,}20 \text{ m} = 2{,}40 \text{ m}^3$

São necessários 2,40 m³ de concreto.

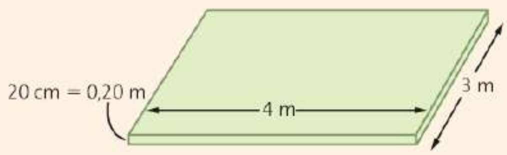


Figura 174 – Cálculo do volume de um prisma (Dante, 2016, p. 182)

Percebemos, então, que a multiplicação e a divisão de grandezas é praticada livremente na Física e na Geometria; no entanto, a naturalização dessas operações encobre a sua falta de fundamentação teórica.

6.4 Algumas teorias da multiplicação entre grandezas

Aparentemente, na Alemanha não houve teoria ou mesmo alguma noção sobre números complexos, com significado como o do contexto desse trabalho. No entanto, existiram reflexões dentro da prática do ensino de matemática relacionadas às grandezas e às operações com esses números. Após a Segunda Guerra, o principal autor de livros didáticos de matemática para o ensino fundamental, Walter Breidenbach (1893 - 1984), escreve em um de seus livros, *Rechnen in der volksschule*[27] (1957), que não se pode multiplicar duas extensões. Esse livro foi escrito para o professor, fazendo par ao livro didático destinado aos estudantes; e abordava aspectos teóricos relacionados ao conteúdo integrante do livro de matemática, como é costume naquele país.

> Die Formel "Länge mal Breite"ist falsch. Sie fordert, daß wir 8 cm mit 6 cm malnehmen sollen. Das geht nicht! (Sieht der Leser dies nicht sofort ein, so studiere er intensiv den §32 über das Malnehmen!)[28]. (Breidenbach, 1957, p. 172)

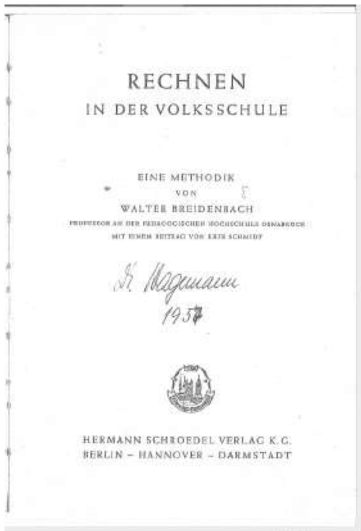

RECHNEN
IN DER VOLKSSCHULE
EINE METHODIK
VON
WALTER BREIDENBACH
HERMANN SCHROEDEL VERLAG K.G.
BERLIN – HANNOVER – DARMSTADT

Figura 175 – Folha de rosto do *Rechnen in der volksschule*, de Breidenbach (1957).

O parágrafo 32, mencionado por Breidenbach na citação anterior, expôe que, na multiplicação, o primeiro número indica quantas vezes o segundo número deverá ser repetido na adição. Por exemplo, $3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2$. Desse modo, enquanto o segundo número (dois) nesse produto é aquele que realmente entrará no cálculo, o primeiro número (três), afirma Breidenbach, é de uma natureza completamente diferente, apenas apontando a quantidade de vezes que o segundo número deverá ser repetido. Esses dois fatores da multiplicação são distinguidos pelo

[27] Aritmética na escola primária (tradução nossa).

[28] A fórmula "comprimento vezes largura"está errada. Ela exige que devemos levar 8 cm com 6 cm. Isso não funciona! (Se o leitor não vê isso imediatamente, ele realmente precisa estudar o §32 sobre multiplicação!) (tradução nossa).

autor como multiplicador (Malnehmerzahl) e multiplicando (Grundzahl), e é enunciado que apenas o multiplicando pode ser uma grandeza. (Breidenbach, 1957, p. 134)

Breidenbach enuncia, ainda, a comutatividade na multiplicação como um fato. Como exemplo, ilustra que 3 vezes quatro é igual a quatro vezes três, acrescentando inclusive uma representação gráfica simples para esse resultado.

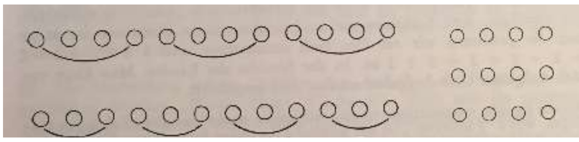


Figura 176 – Representação da comutatividade na multiplicação de $3 \cdot 4$ (Breidenbach, 1957, p. 139).

No entanto, podemos questionar: se Breidenbach afirma que multiplicador e multiplicando são de naturezas diferentes, como poderia valer a comutatividade na multiplicação? Em particular, reparamos aqui o mesmo problema que já percebemos em Arnauld: quando se lida na multiplicação chamando os fatores de multiplicador e multiplicando, sendo esses de naturezas distintas, como pode valer a comutatividade quando se tem restrito o caráter de número ou de escalar ao multiplicando?

Outro ponto relevante é que, apesar de Breidenbach afirmar a comutatvidade da multiplicação, ele o faz de uma forma distinta a de Arnauld: enquanto, para Arnauld, a comutatividade na multiplicação é enunciada como postulado, Breindenbach nos passa a impressão de que essa comutatividade é um resultado (que poderia ser demonstrado). De fato, Breidenbach afirma que o método apresentado na figura 176 não possui valor evidencial, e que a escola não pode e tampouco deve demonstrar leis como a da comutatividade; assim, o caso particular deve ser apresentado de tal modo que sirva para a compreensão do caso geral. (Breidenbach, 1954, p. 139)

Freudenthal (1905 - 1990) foi o único capaz de pesquisar e estabelecer as bases da matemática para uma teoria mais completa sobre as grandezas e as operações/cálculos com elas. No capítulo *The Number Concept*, de sua obra *Mathematics as an Educational Task* (1973), ele se aprofunda nesse tema. Para Freudenthal, as grandezas de uma determinada espécie formam um conjunto não-vazio G munido de uma relação de ordem (<) e uma operação denominada adição (+), tais que, dados a, b, c $\in$ G:

1. Vale uma e apenas uma das alternativas: $a < b$ ou $a = b$ ou $b < a$;
2. Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$;
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$;
4. $a + b = b + a$;

5. a + c = b + c $\Longrightarrow$ a = b;

6. a < b $\Longleftrightarrow$ existe d $\in$ G tal que a + d = b.

A partir da adição é definida uma multiplicação por inteiros positivos, do seguinte modo: dados $a \in$ G e n inteiro positivo,

$$1 \cdot a = a$$

e

$$(1 + n) \cdot a = a + na,$$

onde $n \cdot a$ = $a + \cdots + a$, com n termos.

Uma sétima propriedade que usualmente é demandada em G é a divisibilidade:

7. Dados a $\in$ G e n natural positivo, existe b $\in$ G tal que

$$a = n \cdot b.$$

Como G admite multiplicação e divisão por inteiros, como consequência esse conjunto admite também multiplicação e divisão por números racionais positivos.

Freudenthal cita os sistemas de peso, comprimento, área e volume como possíveis exemplos para o conjunto G. Em cada sistema desse tipo, é definida uma relação de equivalência pelas propriedades acima. No caso do sistema de pesos, o autor afirma que a relação "igualmente pesado"poderia ser definida, assim como a relação "mais leve do que". Ainda, os pesos de dois objetos podem ser somados, obtendo-se um terceiro peso. Desse modo, os pesos seriam classes de equivalência.

Podemos, ainda, escolher em G uma unidade e. Logo, os múltiplos racionais de e formam o conjunto $\mathbb{Q}^{+} \cdot e$. O autor observa que esse conjunto não esgota G, pois não contém as grandezas irracionais. Além disso, fixada uma unidade $e \in$ G, todo $a \in$ G divide o conjunto $\mathbb{Q}^{+}$, de acordo com a ordem, em dois subconjuntos:

$$\{\tau \in \mathbb{Q}^{+} / \tau e \leq a\}$$

$$\{\tau \in \mathbb{Q}^{+} / \tau e > a\}$$

Freudenthal destaca que os subconjuntos acima são denominados um corte em $\mathbb{Q}^{+}$, e esse corte irá dar origem a um número real

$$\alpha = sup\{\tau \in \mathbb{Q}^{+} / \tau \cdot e \leq a\}.$$

É esse número real α que indicará a medida da grandeza a com respeito à unidade e. De um modo mais simplificado, podemos escrever $a = \alpha e$.

Dessa forma, dada uma grandeza $a \in$ G uma unidade e, o autor denomina-se $v(a)$ a medida de a com respeito à essa unidade. Logo, conclui-se que:

- v é uma função de G em $\mathbb{R}^+$;
- $a < b \Longrightarrow v(a) < v(b)$;
- $v(a + b) = v(a) + v(b)$;
- $v(e) = 1$;
- $v(ta) = t\, v(a)$ para todo $t \in \mathbb{Q}^+$.

Desse modo, dada uma grandeza $a \in$ G, $v(a)$ indica a medida da grandeza a com relação à unidade escolhida e. Note que as propriedades listadas acima deixam a função v bem definida: de fato, escolhida uma unidade e, temos que, dada uma grandeza $a \in$ G,

- se a grandeza a for um múltiplo da unidade e, então

$$v(a) = v(k \cdot e) = kv(e) = k,$$

  para algum $k \in \mathbb{N}$.

- se existem $m, n \in$ G para os quais $a = \frac{m}{n} \cdot e$, logo

$$v(a) = v\left(\frac{m}{n} \cdot e\right) = \frac{m}{n}v(e) = \frac{m}{n}$$

- se as alternativas anteriores falharem, Freudenthal orienta que devemos testar as partes $\frac{1}{n} \cdot e$, com n inteiro positivo; de modo que busquemos encontrar para quais inteiros positivos m tem-se

$$\frac{m}{n} \cdot e < a,$$

  e, para quais inteiros m,

$$\frac{m}{n} \cdot e > a.$$

  Assim, divide-se o conjunto $\mathbb{Q}^+ \cdot e$ em duas partes, que serão o corte correspondente à grandeza a. E como dito anteriormente, se $\alpha = sup\{\frac{m}{n} / \frac{m}{n} \cdot e \leq a\}$, com $m,n \in \mathbb{N}$, então

$$v(a) = \alpha.$$

Além disso, caso façamos uma mudança de unidade, digamos de e para $e' = \alpha e$, obtemos uma nova medida $v'(a)$ da grandeza a em respeito à nova unidade e'. Freudenthal destaca que essas duas medidas, v e v', são tais que

$$v'(a) = \alpha^{-1}v(a).$$

Freudenthal justifica seu interesse na reflexão sobre as operações com grandezas pelo fato de considerar que, na vida prática, nenhum conceito de número seria mais importante do que o de "measuring numbers"; isto é, números que indicam alguma "medida". (Freudenthal, 1973, p. 197) Por isso, tece críticas aos matemáticos puros que detestam este assunto e o deixam para os físicos. (Freudenthal, 1973, p. 207)

O autor afirma que, apesar de o que está sendo exposto parecer óbvio demais para receber tal ênfase, ele o faz a fim de mostrar que a teoria das grandezas não está intrinsecamente relacionada à teoria da medida. Por isso, a necessidade de uma teoria própria.

> All this sounds obvious and it is hardly worthwhile to expound it with such emphasis. I didi it only to prove that the theory of magnitudes has not anything to do with the set theory mesure. To be sure, there are analogies, between the system B of sets with the mesure μ on the one hand, and the magnitude G on the other. Among sets there is a union, among magnitude classes there is an addition, and both are additive with respect to μ and v, respectively. However what corresponds to the addition in G is the union of disjoint sets in B. so arbitrary sets cannot be added in the sense of G. On the other hand the set operations of union and intersection are not meaningful for magnitudes. Changing gauges is unimportant in measure theory and a key notion in magnitudes. We noticed in earlier examples that the set model does not fit situations where magnitudes are usually considered. Set measure and magnitude theory are quite different things, though there are generalizations possible which cover both. In any case it is no use referring the teacher who is trying to understand magnitudes to set measure theory[29]. (Freudenthal, 1973, p. 202)

Portanto, na teoria elaborada por Freudenthal para explicar as grandezas, dizer que um objeto pesa a Kg significa que, dada a unidade de medida e = 1 Kg, a medida v do peso desse objeto com respeito à unidade e assume o valor a, isto é,

$$v(aKg) = a.$$

[29] Tudo isso parece óbvio e dificilmente vale a pena expô-lo com tanta ênfase. Eu o fiz apenas para provar que a teoria das grandezas não tem nada a ver com a teoria da medida dos conjuntos. Para ser mais preciso, existem analogias entre o sistema B de conjuntos com a medida μ de um lado e o conjunto das grandezas G do outro. Entre os conjuntos há uma união, entre as classes de magnitude há uma adição, e ambos são aditivos em relação a μ e v, respectivamente. No entanto, o que corresponde à adição em G é a união de conjuntos disjuntos em B. Portanto, conjuntos arbitrários não podem ser adicionados no sentido de G. Por outro lado, as operações estabelecidas de união e interseção não são significativas para grandezas. A mudança de indicadores não é importante na teoria das medidas e é uma noção básica de grandezas. Percebemos nos exemplos anteriores que o modelo de conjunto não se ajusta a situações em que as magnitudes são geralmente consideradas. As teorias de medida e das grandezas ajustadas são coisas bastante diferentes, embora existam generalizações possíveis que cobrem ambas. Em qualquer caso, não tem utilidade indicar a teoria da medida ao professor que está tentando entender as grandezas (tradução nossa).

Além disso,

$$v^{-1}(a) = aKg,$$

donde podemos concluir que Kg possui o mesmo significado que a função v^{-1}.

Dessa forma, podemos associar então as grandezas a funções. Logo, se um objeto pesa 30 Kg, por exemplo, isso significa que existe uma função, Kg, que associa a esse objeto o número 30. Logo, a escrita comum utilizada para essa grandeza, 30 Kg, para Freudenthal deveria ser Kg(30). Para o mesmo objeto, existe a função g (grama), que o relacionaria ao número 30.000. E, por meio dessas funções, temos que a relação entre Kg e g pode ser expressa por

$$Kg(x) = 1000 \cdot g(x).$$

Freudenthal demonstra surpresa por essa interpretação das grandezas como funções não ser conhecida por quase ninguém. De fato, o seu texto é o único em que encontramos tal abordagem.

> It is so obvious an interpretation that it is incredible that up to now almost nobody has acknowledged it. This strange fact can only be explained by the force of tradition and by the continuous references to set theory measure[30]. (Freudenthal, 1973, p. 205)

E como seriam as multiplicações e divisões de grandezas de acordo com a abordagem de Freudenthal? Novas funções podem ser formadas através dessas operações: Dados os conjuntos de grandezas G e H, podemos definir o conjunto G · H dos elementos $a \cdot b$, com $a \in$ G e $b \in H$. Note que

$$(\tau a)b = a(\tau b)$$

para todo $\tau \in \mathbb{R}^+$.

Desse modo, se escolhermos e e f como unidades de G e H, respectivamente. Dados $a \in$ G e $b \in$ H, se $v_1(a) = \alpha$ é a medida da grandeza a com respeito à unidade e, e $v_2(b) = \beta$ é a medida da grandeza b com respeito à unidade f, então ef será uma unidade para o conjunto G · H tal que a medida v da grandeza ab de acordo com essa unidade será:

$$v(ab) = v(\alpha e \beta f) = v(\alpha\beta(ef)) = \alpha\beta.$$

Logo, considerando as funções Kg e m, por exemplo, podemos construir uma nova função Kg · m, tais que

$$Kg\alpha \cdot m\beta = Kg \cdot m\alpha\beta.$$

[30] É uma interpretação tão óbvia que é incrível que até agora quase ninguém tenha reconhecido isso. Esse estranho fato só pode ser explicado pela força da tradição e pelas referências contínuas à teoria da medida dos conjuntos (tradução nossa).

O autor enfatiza devemos tomar cuidado para não interpretar erroneamente a função Kg · m como uma composição de funções.

Para se refletir sobre a divisão de grandezas, basta analisar o que seria a inversa de uma grandeza. Dada uma grandeza G, podemos definir a sua grandeza recíproca G* como o conjunto tal que

$$G \cdot G* = \mathbb{R}.$$

Escolhendo-se as unidades e e e* em G e G*, respectivamente, tais que

$$e \cdot e* = 1,$$

dadas as medidas v e v*, de $a \in$ G e $a* \in$G*, respectivamente, tem-se que

$$a \cdot a* = v(a) \cdot v * (a*).$$

E, caso $v(a)$ e $v * (a)$ sejam inversos,

$$a \cdot a* = 1.$$

Desse modo, Freudenthal foi capaz de demonstrar a existência de uma base conceitual matemática coerente para um assunto chave na prática com números concretos, mas que esteve sempre suprimido e negligenciado pelos matemáticos. Na verdade, sua concepção do cálculo entre grandezas como sendo um caso de se operar com funções apresenta uma forma simplificada de lidar com espaços vetoriais e produtos tensoriais - ver Damerow 1979, p. 87.

CAPÍTULO 7

Reflexões

Elaborando o projeto para esta dissertação, nossa expectativa foi de, por um lado, localizar livros didáticos que revelariam as práticas de lidar com números complexos, e, por outro lado, encontrar reflexões de matemáticos sobre este tipo de números e sobre os problemas implicados nas operações com eles. No entanto, esta expectativa não se realizou. Encontramos, sim, muitos livros didáticos que nos permitiram examinar os números complexos e a prática de operar com eles; mas praticamente não houve reflexão sobre os fundamentos destas práticas. Reparamos somente que alguns autores mostraram-se conscientes de contradições nestas operações - afirmando, por exemplo, que não se pode multiplicar linhas por linhas.

Somente muito depois, no final do século XX, apareceram algumas poucas reflexões sobre os fundamentos dessas operações com grandezas, como fizeram Freudenthal (1973) e Damerow (1979). E é revelador que ambos os autores o fizeram como característica de uma nova abordagem social da matemática: ocupando-se das praticas matemáticas nas aplicações, e em particular na área do ensino, chamadas em alemão "Sachrechnen- aritmética aplicada à vida cotidiana.

Pode-se perguntar se a denominação "números complexos"surgiu paralelamente e independentemente em vários países europeus ou se existe uma raiz comum. A pesquisa feita até agora sugere que houve uma única origem e que a noção se disseminou a partir desse ponto. De fato, no século XVIII, quando surgiu esse conceito, ele esteve em uso apenas na França, no sistema das escolas militares. O matemático italiano Salimbeni refletiu sobre a comutatividade do produto, aparentemente por ter tido contato com a aritmética de Bézout, mas sem utilizar a expressão "números complexos". Uma disseminação aparentemente isolada aconteceu com a tradução do livro do Bézout em Portugal, e no uso dela na Universidade de Coimbra, a partir de 1773. Uma propagação mais ampla aconteceu somente a partir do começo do século XIX, ao menos em partes devida à expansão do Império francês pelo Europa, baseada em traduções do Bézout: alcançando a Itália, a Espanha, Portugal e até os Estados Unidos.

Nosso estudo abrangeu livros didáticos de autores conceituados, que foram adotados em escolas brasileiras e estrangeiras, nos quais é instruído que a multiplicação entre grandezas complexas poderia não ser comutativa. Podemos fazer uma observação geral sobre o desenvolvimento conceitual na matemática, aplicando as concepções de Lakatos no seu livro *A lógica do descobrimento matemético: provas e refutações*. Lakatos mostrou que conceitos que foram originalmente rejeitados por matemáticos, como "monstros", tornaram-se em outras circunstâncias conceitos básicos de novos desenvolvimentos matemáticos.

Isto aplica-se bem ao caso da não-comutatividade da multiplicação: rejeitada originalmente pela matemática pura, como uma contradição, tornou-se um conceito importante em dois desenvolvimentos da matemática no século XIX. Por um lado, Hermann Graßmann atacou o problema da multiplicação de grandezas geométricas de uma maneira totalmente nova, desde sua obra: Die Lineale Ausdehnungslehre (Teoria da extensão linear, um novo ramo da matemática), de 1844, onde o novo tipo de produto, o produto vetorial, é não-comutativo. E Hamilton introduziu na álgebra os quatérnios, um novo objeto matemático não-comutativo.

Em suma, um assunto tão importante na prática matemática simplesmente deixou de ser refletido e pesquisado pelos matemáticos. Apenas tardiamente Freudenthal, com sua dedicação à matemática realista, dedicou-se a esclarecer suas bases conceituais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abreu, Capistrano de (2009). *Capítulos da história colonial*. Brasília: Centro Edelstein.

Antonil, André João (2007). *Cultura e opulência do Brasil por suas drogas e minas*, Volume 2. edusp.

Arnauld, Antoine (1667). *Nouveaux éléments de géométrie*. Paris: Savreux.

Balls, Benito (1790). *Aritmética para negociantes*. Madrid: Imprenta de la Viuda de Ibarra.

Barlow, Peter (1814). *A new mathematical and philosophical dictionary*. London: Robinson.

Barreiros, Fortunato José (1838). *Memoria sobre os pesos e medidas de Portugal, Espanha, Inglaterra, França: que se empregäo nos trabalhos do corpo de engenheiros e da arma de artilheria*. Typog. da Acad. Real das Sciencias.

Beltrame, Josilene (2000). Os programas de ensino de matemática do colégio pedro ii: 1837-1932. Master's thesis, Dissertação (Mestrado em Matemática)–Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Bézout, Étienne (1770). *Cours de mathématiques, à l'usage du corps royal de l'artillerie*, Volume 1. Paris: De l'Imprimerie royale.

Bézout, Étienne (1814). *Arithmétique de Bezout, a l'Usage de la Marine et de l'Artillerie, par F. Peyrard*. Paris: C.-F. Patris et Yardieu-Denesle.

Blake, Augusto Victorino Alves Sacramento (1883a). *Diccionario bibliographico brazileiro*, Volume 1. Rio de Janeiro: Typographia nacional.

Blake, Augusto Victorino Alves Sacramento (1883b). *Diccionario bibliographico brazileiro*, Volume 2. Rio de Janeiro: Typographia nacional.

Bourdon, Louis Pierre Marie (1827). *Élémens d'arithmétique*. Paris: Bachelier, Imprimeur-Libraire.

Camus, Charles Étienne Louis (1749). *Cours de mathématique. Premiére Partie. Élémens d'Arithmétique*. Paris: Ballard.

Carron, Wilson; Guimarães, O. P. J. R. (2016). *Física*, Volume 1. São Paulo: Ática.

Clark, Thomas (1812). *A New System of Arithmetic; including specimens of a method by which most arithmetical operations may be performed without a knowledge of the rules of three; and followed by strictures on the nature of the elementary instruction contained in English treatises on that science*. London: E. Budd.

Conkling, Thomas W. (1831). *Conkling's Arithmetic, The Young Arithmetician's Guide to a Knowledge of Numbers*. New York: Ketcham & Aymar.

Damerow, Peter (1979). Zur rehabilitierung des rechnens mit benannten zahlen. *Mathematica didactica 2*.

Davies & Peck (1857). *Mathematical Dictionary*. A.S. Barnes + Company.

Doria, Escragnolle; Accioli, Roberto Bandeira (1997). *Memória histórica do Colégio de Pedro Segundo, 1837-1937*. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais.

Dubost, Christopher (1807). *Commercial Arithmetic, with an appendix upon Algebraical Equations; being an introduction to the elements of commerce*. London: printed for the author.

D'Avila, José Joaquim (1856). *Elementos de Arithmetica para uso dos collegios de Instrucção Primaria*. Rio de Janeiro: Typ. Fluminense.

Ferreira, Aurélio Buarque de Holanda (2004). Novo dicionário aurélio da língua portuguesa. In *Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa*.

Freudenthal, Hans (1973). *Mathematics as an educational task*. Netherlands: D. Reidel Publishing Company/Dordrecht-Holland.

Garcia y Coates (1833). *El aritmetico argentino, ò Tratado completo de aritmetica practica. Para el uso de las escuelas*. Buenos Aires: Imprenta del Estado.

Gomes, Manuel Poy y (1819). *Elementos de aritmética numérica y literal al estilo de comercio para instrucción de la juventud*. Barcelona: Oficina de Sierra y Martí.

Gorini, Giovanni (1824). *Lezioni di aritmetica*. Pavia: Dalla Tipografia di P. Bizzoni.

Gillispie, Charles C.; Holmes, Frederic L.; Koertge, Noretta; Gale, Thompson (1970). *Complete Dictionary of Scientific Biograph*.

Greenleaf, Benjamin (1839). *The National Arithmetic, on the Inductive System, Combining the Analytic and Synthetic Methods, in which the Principles of Arithmetic are Explained in a Perspicuous and Familiar Manner*. Boston: Robert S. Davis and Gould, Kendall, and Lincoln.

Harvard. Harvard entrance exam of 1899. <https://pt.scribd.com/doc/53032981/harvard-entrance-exam-1899>. acesso em: 21 jul. 2018.

Heath, Thomas Little et al (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Courier Corporation.

Ilberg, Waldemar; Kreher, Konrad (1977). *Physikalisches Praktikum für Anfänger*. Teubner.

Lacroix, Sylvestre François (1831). *Trattato elementare di aritmetica ad uso della scuola centrale delle quattro nazioni [di] S. F. Lacroix*. Napoli: Dalla Stamperia di R. Manzi.

Lakatos, Imre (1978). *A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações*. Zahar.

Langins, Janis (1989). *Histoire de la vie et des fureurs de François Peyrard*. Number 3. Société des amis de la bibliothèque de l'Ecole polytechnique.

Lardner, Dionysius (1838). *Treatise on Arithmetic Practical and Theoretical*. London: Longman, Rees, Orme, Brown, Green & Longman.

Lorenz, Karl Michael; Vechia, Ariclê (2004). *Os livros didáticos de matemática na escola secundária brasileira no século 19*, Volume 8.

Massarani, Luiza; Moreira, Ildeu de Castro (1997). *Cândido Baptista de Oliveira e a implantação do sistema métrico decimal no Brasil*.

Moreu, Francisco (1823). *Elementos de aritmética mercantil*. Barcelona: Imprenta Nacional de la Viuda Roca.

Moura, Eduardo Mauro F. de (2004). *Geometria - Problemas sem problema, volume 1*. Rio de Janeiro: Dissonnarte.

Oliveira, Candido Baptista de (1832). *Compendio de arithmetica composto para o uso das escolas primarias do Brasil*. Rio de Janeiro: Typographia Nacional.

Oliveira, Candido Baptista de (1863). *Compendio de arithmetica composto para o uso das escolas primarias do Brasil*. Rio de Janeiro: Typographia Nacional.

Ottoni, Cristiano Benedito (1855). *Elementos de arithmetica*. Laemmert & Cia.

Pereira, Jose Maria Dantas (1798). *Curso de estudos para uso do commercio e da fazenda: primeiro compendio que trata da arithmetica universal*. Lisboa: Regia Officina Typografica.

Peyrard, François (1813). *Les Principes Fondamentaux de l'Arithmétique, suivis des règles nécessaires au commerce et a la banque*. Paris: C.-F. Patris.

Reis, Aarão; Reis, Luciano (1892). Curso elementar de mathematica. arithmetica, 2a. edição, 1892.

Santoro, Angelo (1844). *L'aritmetica, la geometria piana e la geometria solida in sessanta lezioni per Angelo Santoro*. Napoli: Tipografia Dell'Aquila di V. Puzziello.

Santos, Maria Aparecida dos; Silva, A. P. B. d. S. A. F. d. (2011). *Contextualizando regionalmente o ensino de Física*.

Schubring, Gert (2002). *A noçao de multiplicação: Um obstáculo desconhecido na história da matemática*, Volume 15.

Schubring, Gert (2003). *Análise Histórica de Livros de Matemática. Notas de Aulas*. Campinas: Editora Autores Associados.

Schubring, Gert (2005). *Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition: Number Concepts: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*. New York, USA: Springer Science & Business Media.

Schubring, Gert (2007). *Um Outro Caso de Obstáculos Epistemológicos: o princípio de permanência*, Volume 20. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

Scotti, Gioambattista (1842). *Corso di aritmetica teorico-pratica: applicata al commercio, alla banca, alle aziende, e ad ogni ramo di sociale industria col paragone delle monete, pesi, misure di tutti i popoli Gioambattista Scotti*. Genova: L. Pellas Tip. Editore.

Silva, Circe Mary Silva da (2000). *O livro didático de matemática do Brasil no século XIX*.

Simonsen, Roberto C. (1937). *História econômica do Brasil: 1500-1820*. Brasília: Senado Federal, Secretaria Especial de Editoração e Publicação.

Souto Maior, Armando (1978). *Quebra-quilos: lutas sociais no outono do império*. Ed. Nacional.

Tropfke, Johaness (1980). *Geschichte der Elementarmathematik. Arithmetik und Algebra. 4. Auflage, vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel.* Berlin: de Gruyter.

Valente, Wagner Rodrigues (1999). *Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930*. São Paulo: Annablume.

Varas, Antonio (1801). *Aritmética y geometría práctica de la Real Academia de San Fernando*. Madrid: Imprenta de la Viuda de Ibarra.

Vianna, João José Luiz (1906). Elementos de arithmetica, 11a. edição, 1906.

Vicente, S. A., J. K. C. da Silva, J. G. da Silva, M. G. dos Santos, J. P. de Oliveira Neto, and A. F. da Silveira. *Revolta Quebra-Quilos: O ensino de grandezas e unidades físicas a partir de um episódio histórico*. Campina Grande.

Vogdes, William (1847). *The United States Arithmetic, Designed for Academies and Schools*. Philadelphia: E. C. & J. Biddle.

Walsh, Michael (1807). *A New System of Mercantile Arithmetic, Adapted to the Commerce of the United States, in Its Domestic and Foreign Relations*. Pittsburgh: Zadok Cramer.

Willetts, Jacob (1822). *The Scholar's Arithmetic, Designed for the Use of Schools in the United States*. Poughkeepsie: Paraclete Potter.

Zuin, Elenice de Souza Lodron (2008). Alterações na aritmética escolar do brasil oitocentista: entre os pesos e medidas. In *Congresso Brasileiro de História da Educação*, Volume 5.

Zuin, Elenice de Souza Lodron (2017). José joaquim d'avila: pela defesa de um novo sistema de pesos e medidas no brasil no século xix. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática 19*(2).

Zuin, Elenice de Souza Lodron et al (2007). *Por uma nova arithmetica: o sistema métrico decimal como um saber escolar em Portugal e no Brasil oitocentistas*. Ph. D. thesis, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.