UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENSINO DE MATEMÁTICA

RAFAEL FILIPE NOVOA VAZ

METODOLOGIA DIDÁTICA DE ANÁLISE DE SOLUÇÕES APLICADA NO ENSINO DE FRAÇÕES

Rio de Janeiro
Novembro/2013

RAFAEL FILIPE NOVOA VAZ

METODOLOGIA DIDÁTICA DE ANÁLISE DE SOLUÇÕES APLICADA NO ENSINO DE FRAÇÕES

Dissertação submetida à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª Dra. Lilian Nasser

Rio de Janeiro
Novembro / 2013

RAFAEL FILIPE NOVOA VAZ

METODOLOGIA DIDÁTICA DE ANÁLISE DE SOLUÇÕES APLICADA NO ENSINO DE FRAÇÕES

Dissertação submetida à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

____
Presidente, Profª Dra. Lilian Nasser - PEMAT/UFRJ

____
Profª. Dra. Claudia Coelho de Segadas Vianna – PEMAT/UFRJ

____
Profª. Dra. Helena Noronha Cury – UNIFRA/RS

____
Profª. Dra. Elizabeth Belfort

Rio de Janeiro
Novembro / 2013

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Helio e Maria,

e à minha vó Alzira,

por todo amor e dedicação.

À minha esposa Luciana,

seu amor é um combustível para o meu crescimento.

AGRADECIMENTOS

À minha eterna orientadora Elizabeth Belfort,

por não ter desistido e sempre ter buscado o meu melhor.

À minha orientadora Lilian Nasser,

que aceitou o desafio de dar continuidade a este trabalho,

com solicitude, paciência e sabedoria.

À amiga e professora Claudia Marins,

revisora de grande parte do texto.

Aos amigos Paulo e Viviane,

por me incentivarem sempre.

EPÍGRAFE

A person who never made a mistake, never tried anythink new.

Uma pessoa que nunca cometeu erros, nunca tentou algo novo.

(Albert Einstein)

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi investigar o desempenho de alunos do sétimo ano do ensino fundamental em aulas de revisão de frações, nas quais se utilizou uma metodologia de ensino baseada em análise de soluções. Essa metodologia foi criada inspirada nos trabalhos de análise de erros no ensino de Matemática das pesquisadoras Rafaella Borasi e Helena Cury.

A metodologia aqui apresentada, que denominamos Metodologia Didática de Análise de Soluções, consiste na aplicação de exercícios que se utilizam dos erros cometidos pelos próprios alunos para a reconstrução de significados. Os alunos trabalham, em pequenos grupos, para resolver questões que envolvem a correção e a análise de soluções produzidas por eles mesmos em aulas anteriores.

Além das soluções recolhidas, um teste foi criado e aplicado duas vezes: uma antes e outra após as aulas, visando fornecer material suplementar para analisar o desempenho dos alunos ao serem expostos a essa metodologia. A comparação dos resultados desses testes mostrou que há benefícios na metodologia didática construída.

Assim, esta pesquisa aponta para uma perspectiva em que uma nova visão do erro pode trazer ganhos reais para alunos e professores. Ela também indica que mais pesquisas devem ser feitas, a fim de aprofundar as possibilidades de aplicações de "análise de erros" ou "Análise de Soluções" no trabalho em sala de aula, em particular quando se considera o ensino de frações.

Palavras-chave: Saberes docentes, Análise de soluções, análise de erros, frações: representação e operações.

ABSTRACT

The aim of this work was to investigate the performance of seventh year students of basic education in lessons of revision of fractions, using a methodology of teaching based on the analysis of their solutions. This methodology was created and inspired on the works about the analysis of errors in Mathematics tasks by the researchers Rafaella Borasi and Helena Cury.

This methodology, which we call Didactic Methodology of Analysis of Solutions, consists in the application of exercises exploring the errors made by the pupils themselves for the reconstruction of meanings. The students, working in small groups, discussed and solved tasks that involved the correction and the analysis of their own solutions for exercises proposed in previous lessons.

In addition to the collected solutions, a test has been created and applied twice: before and after the lessons, aiming to produce enough material to analyze the performance in fraction questions of the pupils exposed to this methodology. The comparison of the results of these tests showed that there are benefits from the constructed didactic methodology.

Thus, this research points to a perspective in which a new vision of the error can bring actual gains for pupils and teachers. It also indicates that more research must be carried out, in order to deepen the applications of “Error analysis” or “Analysis of Solutions” in classroom work, in particular considering the teaching of fractions.

Key-words: teacher knowledge, analysis of solutions, error analysis, fractions: representation and operations.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS E GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Com algum tempo de magistério, é possível observar que os alunos nas séries iniciais, geralmente, apresentam um maior interesse e uma maior apreciação pela Matemática se comparados aos alunos das séries seguintes. O que se constata é uma tendência de que quanto mais avançada é a série, maior é o número de alunos que não gostam ou têm alguma dificuldade em Matemática.

Diversas hipóteses podem ser levantadas para justificar esta aversão crescente. Uma delas seria, por exemplo, a dificuldade inerente ao ensino da Matemática: conceitos que se desenvolveram ao longo de séculos são ensinados, e devem ser assimilados, em um curto espaço de tempo. Outra hipótese plausível seria aquela que considera que determinadas posturas didáticas contribuem para o crescimento desta aversão. Tomemos como exemplo o modo como os professores lidam com as falhas e tropeços dos alunos. O erro geralmente não é considerado algo natural, que faça parte do processo de aprendizagem, e sim, algo que deva ser combatido, aniquilado.

O primeiro contato que tive com uma nova interpretação do erros, surgiu após assistir um seminário da professora Helena Noronha Cury sobre o erro no processo de aprendizagem de Matemática, ocorrido no IX ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática) em Belo Horizonte, MG, no período de 18 a 21 de julho de 2007. Neste encontro, a professora proferiu uma palestra onde relatava sua pesquisa e defendia a importância pedagógica de repensarmos o erro. Desde então, a Análise de Erros se tornou um possível tema de minha dissertação.

Esse trabalho parte do princípio de que as frustrações causadas por uma postura negativa em relação ao erro podem ser maléficas para o desenvolvimento dos alunos e para sua disposição em aprender Matemática. A proposta de investigação deste trabalho é a aplicação em sala de aula de uma metodologia baseada em uma nova visão do erro, na qual este é visto como algo natural, inserido no processo de construção do conhecimento. Pretende-se investigar se a mudança de postura do professor induz como consequência, uma nova atitude dos alunos. Mais do que isso, pretende-se investigar se o erro pode ser utilizado como uma ferramenta para auxiliar a aprendizagem, ou, nas palavras da pesquisadora Raffaella Borasi, se o erro pode ser considerado como um “trampolim para a aprendizagem”. Esta reinterpretação do erro é defendida por Cury em diversos trabalhos e publicações, inclusive no livro *“Análise de erros: O que podemos aprender com as respostas dos alunos”,* obra inspiradora deste trabalho.

Outras leituras foram complementando as ideias iniciais obtidas com Cury e Borasi. Em especial, foram consideradas pesquisas que mostram que a exploração de soluções diferentes para um mesmo problema pode trazer ganhos para a aprendizagem; estas serão discutidas na revisão bibliográfica desse trabalho. Assim, por não focar apenas na análise de erros, mas sim na análise de toda a produção dos alunos, erros e acertos, este trabalho utilizará a expressão “Análise de Soluções”.

Utilizando a pesquisa-ação como metodologia de pesquisa, criamos uma metodologia de ensino para ser utilizada e investigada neste trabalho. Esta metodologia utiliza a produção dos alunos para a construção material que seria abordado sob forma de novos exercícios, de modo que os alunos possam rever e repensar os erros cometidos. Denominamos esta metodologia de “Metodologia Didática de Análise de Soluções”.

Cabe ainda discutir a escolha do tópico do ensino da matemática que será desenvolvido nesta pesquisa. A escolha de se trabalhar com frações foi influenciada pela leitura do artigo *“Halves, pieces, and twoths: constructing representational contexts in teaching fractions”* (Ball, 1993). Este artigo contém algumas das ideias relacionadas ao ensino de frações que se tornariam centrais nessa pesquisa, tais como a importância do conceito da unidade e a existência de diferentes interpretações para as frações. Outra obra de grande relevância que norteou e inspirou esta pesquisa foi *Children`s Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project* (Kerslake, 1986).

À medida que foram feitas outras leituras relacionadas ao ensino e aprendizagem de frações, tornou-se cada vez mais evidente que se trata de um tema que preocupa os professores e estudiosos da educação matemática e que traz grandes dificuldades para os alunos. Além disso, diversas pesquisas apontam frações como sendo uma dos temas de grande relevância para o desenvolvimento dos alunos no prosseguimento da vida escolar.

Logo, por que não unir o ensino de frações, um tópico problemático no ensino da Matemática, com uma promissora proposta de metodologia de ensino baseada na análise de soluções? Sendo assim, pode-se afirmar que a ideia central dessa pesquisa é a de utilizar uma metodologia didática baseada na análise de soluções para (re) ensinar frações em turmas do 7º ano do ensino fundamental.

Assim, a proposta de pesquisa aqui desenvolvida pode ser traduzida por duas perguntas que a direcionam:

1 – De que forma uma metodologia de ensino baseada na análise de soluções pode contribuir para o ensino de frações?

2 – Qual é a evolução observável nos resultados de um teste aplicado antes e após uma sequência didática para revisão de frações baseada na análise de soluções?

O presente trabalho foi organizado da seguinte forma: os dois primeiros capítulos abordam o referencial teórico, Frações e Análise de soluções, nessa ordem. O capítulo três contém a Metodologia de Pesquisa, o capítulo quatro descreve os resultados mais significativos das aulas, o capítulo cinco, os resultados dos testes. Para finalizar, há um capítulo dedicado às conclusões.

I - AS FRAÇÕES

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), referentes ao ensino de Matemática para o terceiro ciclo (6º e 7º anos) e quarto ciclo (8º e 9º anos) do ensino fundamental:

> [...] a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos. (BRASIL, 1997, p.57)

Ensinar não é uma tarefa fácil, ensinar frações muito menos. Este documento, que norteia o ensino no país, relata o fraco desempenho escolar em relação à aprendizagem das frações:

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal. (BRASIL, 1997, p.100-101)

1.1 - O Ensino de Frações

Os PCNS ainda afirmam que “a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais”, e essa seria uma explicação para as dificuldades do aprendizado das frações (BRASIL, 1997, p.171). Segundo Ohlson (1988, apud BALL, 1993, p.11), a dificuldade de compreender é originalmente de origem semântica, consequência da natural composição das frações. Santos segue a mesma linha de raciocínio quando escreve:

> É complicado para um aluno compreender que um número racional é representado por dois símbolos numéricos (a/b, onde a e b são isoladamente números) e que este símbolo representa uma nova quantidade – um novo número. (SANTOS, 1997, p.103)

Para Campos e Rodrigues (2007, p.69) “os números racionais constituem-se em um dos temas de construção mais difícil, pois sua compreensão envolve uma variedade de aspectos que se configuram como obstáculos ao seu pleno domínio”. Para Monteiro e Costa (1996, p.60) “o conceito de número racional é um dos mais complexos e importantes do currículo de Matemática”.

Os PCNS ilustram alguns casos que podem ser considerados obstáculos para o aprendizado de frações: alunos que, “acostumados com a relação 3 > 2, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, 1/3 < 1/2” e que “cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, 1/2, 2/4, 3/6, 4/8, ... são diferentes representações de um mesmo número”. (BRASIL, 1997, p.101)

As dificuldades relacionadas ao ensino das frações não são exclusividade do Brasil. Fazio e Siegler (2011), pesquisadores da Academia Internacional de Educação, uma entidade científica sem fins lucrativos que promove a investigação educacional, afirmam que estudantes de todo o mundo têm dificuldades em aprender frações. Esses pesquisadores citam, por exemplo, que em um teste realizado nos EUA com estudantes da 8ª série, apenas cerca de 50% conseguem ordenar corretamente três frações da menor para a maior.

Ball (1993) verificou o quão limitado era o conhecimento dos futuros professores das séries iniciais para ensinar frações e relatou que alguns deles diziam não “gostar” de frações. As dificuldades em compreender e operar com frações também se refletem na aprendizagem de conteúdos matemáticos mais avançados. Por exemplo: em relação às frações algébricas, Cury e Konzen (2007) constatam que:

> [...] as dificuldades com as operações com frações algébricas acarretam problemas para os alunos de disciplinas matemáticas em cursos superiores, como, por exemplo, no cálculo do limite de uma função em um ponto e na integração pelo método das frações parciais. (CURY, KONZEN, 2007, p.110)

Em pesquisas realizadas na Inglaterra, com crianças na faixa de 11 a 15 anos, Hart (1981) e Kerslake (1986) diagnosticaram diversos problemas relacionados à aprendizagem de frações. Dentre estes, foi constatado que há uma tendência por parte dos alunos de não usarem frações na resposta: “Muitas crianças não se sentem confiantes para usar frações e tentam sempre que possível aplicar regras dos números inteiros nas operações envolvendo frações” (Hart, 1979, p.76, tradução nossa). Hart (1981) percebeu que alguns estudantes acreditavam ser impossível dividir um número por outro maior e que na multiplicação, o produto deveria ser sempre maior que os fatores. Outras dificuldades também foram destacadas por Santos (1997) quando afirmou que os conceitos relacionados às frações são difíceis e abstratos para os alunos, e exemplificou:

> Muitos alunos acreditam que o produto de dois números é sempre um número maior que os dois fatores dados; [...] Os estudantes ficam confusos ao perceber que estas situações alteram-se em alguns exemplos com números racionais. (SANTOS, 1997, p.103)

Outros fatores podem contribuir na identificação das dificuldades que permeiam a compreensão do universo dos números racionais. Como apontam Ball (1993), Gomes (2010), Vasconcelos e Belfort (2006) e os PCNS, existem diversos significados para o conceito de fração. Por exemplo: A fração 1/6 pode indicar, entre outras ideias, a parte comida de um bolo, a probabilidade de obtermos a face com o número 3 voltada para cima em um lançamento de um dado, ou ainda, um número na reta numérica. Em cada uma das situações acima estamos utilizando uma interpretação particular do significado de uma fração.

Uma das orientações dadas aos professores pelos PCNS seria promover o "reconhecimento de números racionais em diferentes contextos - cotidianos e históricos - e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador" (BRASIL, 1997, p.71).

A seguir apresentamos algumas das ideias associadas às representações das frações, que podem ser exploradas didaticamente para o desenvolvimento mais amplo do conceito de fração.

1.2 - Diferentes interpretações de uma fração

Um dos principais problemas no ensino de frações parece estar no fato de que um mesmo conceito matemático pode estar associado a diferentes ideias.

Vasconcelos e Belfort (2006) complementam dizendo que "As frações, assim como as operações fundamentais, também estão associadas a mais de uma ideia e, ao contrário do que se pensa, as frações estão presentes em muitas situações do nosso dia-a-dia." (p. 39)

Para Lamon, estas diferentes ideias, apesar de distintas, são interligadas:

> A compreensão dos números racionais envolve a coordenação de muitas ideias e interpretações diferentes, mas interligadas. Há muitos significados diferentes que podem ser atribuídos a estes números quando escritos em símbolo de fração (LAMON,1999, apud WU, 1999, p.3, tradução nossa)

Dependendo de seus objetivos e do público ao qual se destina o texto, diferentes autores apresentam listagens distintas com possíveis interpretações. Por exemplo, Deborah Ball (1993, p.11), em seu artigo que trata da formação e capacitação de professores, enumera as seguintes interpretações para uma fração:

- parte de um todo;
- um número na reta numérica;
- um operador;
- um quociente de dois inteiros;
- uma razão;
- uma taxa (percentual);
- uma representação de probabilidade.

Já Vasconcelos e Belfort (2006) descrevem cinco ideias para representações de uma fração que, segundo os próprios autores, não esgotam as possibilidades:

- fração como parte de uma unidade;
- fração como parte de um conjunto;
- fração como quociente da divisão de um inteiro por outro;
- fração como medida de comparação entre duas grandezas;
- representação de fração na reta numérica.

A seguir discutiremos as cinco ideias de fração apresentadas por Vasconcelos e Belfort (2006).

1.2.1 - Fração como parte de uma unidade

Nessa perspectiva, a fração é pensada como parte de uma unidade que foi dividida em partes iguais.

Tomemos como exemplo a fração 1/4. Nesse caso, esta pode ser entendida como o resultado da seguinte situação: um todo foi dividido em quatro partes iguais, das quais se tomou uma parte. A figura 1 ilustra essa situação.

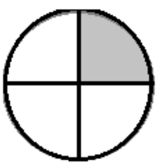


Figura 1 - Representação gráfica da fração 1/4.

Dentre as interpretações de frações, esta é, segundo a pesquisa de dissertação de Merlini (2005), uma das ideias mais encontradas nos livros didáticos. Por conseguinte, esse é o modelo que está intrinsecamente inserido na concepção do que seja uma fração para a maioria dos professores e, consequentemente, para grande parte dos alunos.

Partindo do pressuposto que os diagramas de parte de um todo constituem o mais comum modelo encontrado nos livros textos e nos materiais dos professores, Kerslake (1986, p.88) concluiu que as representações geométricas de a/b, onde uma figura era dividida em ***b*** partes, das quais ***a*** partes eram tomadas, foram bem aceitas pelos entrevistados enquanto outras representações não. Em pesquisa realizada por Silver (1981, apud KERSLAKE, 1986, p.15) com 20 entrevistados em idade escolar, os alunos foram requisitados a representar a fração 3/4. Dentre os entrevistados, 15 recorreram ao círculo, e, dentre esses, 10 foram incapazes de pensar em outra representação.

1.2.2 - Fração como parte de um conjunto

Nesse caso, a fração é associada a um subconjunto de um conjunto. Por exemplo, dos cinco círculos representados dentro da superfície retangular da figura 2, tomam-se dois e pintam-se de cinza.

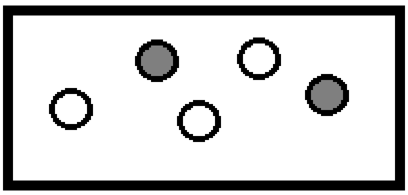


Figura 2 - Fração 2/5 de um conjunto com cinco elementos.

A fração que relaciona o subconjunto formado pelos círculos cinza em relação ao total de círculos do conjunto é 2/5.

Hart (1981) observou que encontrar uma fração de um conjunto onde o denominador difere do número de elementos deste conjunto não é nada fácil para os estudantes. Tomemos, como exemplo, um conjunto com dez elementos (retângulos e triângulos), a fração 2/5 está associada, por exemplo, ao subconjunto formado por retângulos, como mostra a figura 3.

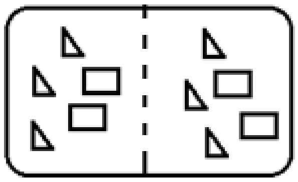


Figura 3 – 2/5 de um conjunto com dez elementos.

Apesar de ser uma ideia simples, o modelo de fração como parte de um conjunto traz um desconforto a alunos e professores, como indica a pesquisa de dissertação de Mestrado de Marques (2008):

> No trabalho com frações, também observei que, assim como os alunos apresentam maior dificuldade para determinar a fração de uma coleção de objetos do que de uma barra, os professores também têm melhor desempenho ao lidar com frações em unidades contínuas. (MARQUES, 2008, p.55)

1.2.3 - Fração como quociente de divisão de um número inteiro por outro.

Esta é a situação na qual a fração é vista como o resultado da divisão entre dois números. Segundo Merlini (2005) e Vasconcelos e Belfort (2006), esse é um modelo dificilmente encontrado em livros didáticos e pouco trabalhado nas escolas brasileiras.

Um exemplo desta ideia seria: a divisão de três pizzas igualmente entre quatro pessoas. Que fração de uma pizza cada uma receberá?

Essa é uma situação explorada por Kerslake (1986), na qual 3 (quantidade de pizzas) será dividido igualmente por 4 (quantidade de pessoas) e tinha por objetivo que os alunos realizassem a conexão entre 3÷4 e 3/4.

A figura 4 ilustra um modo possível de visualizar essa divisão.

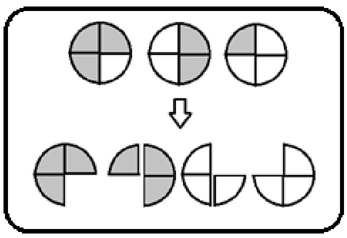


Figura 4 - Três pizzas para quatro pessoas.

Cada uma receberá 3/4 da pizza.

1.2.4 - Fração como medida de comparação entre duas grandezas (razão)

Nesse caso, a fração é vista como a razão entre duas grandezas, razão essa que tem um caráter comparativo. Esse modelo é contemplado predominantemente no ensino de Razão e Proporção, durante o 7º ano (6ª série).

Por exemplo, na figura 5 a fração que relaciona o número de círculos que estão fora do retângulo e o número de círculos que estão dentro do retângulo é 2/5.

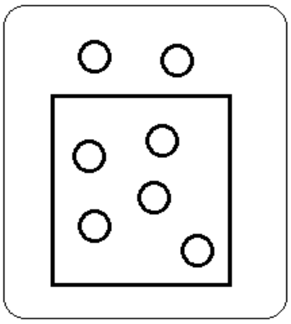


Figura 5 - Razão igual a 2/5.

Apesar dessa ideia não ser abordada como conteúdo das aulas desta pesquisa, acreditamos ser válido que ela seja contemplada nestas referências, pois trata-se de uma pesquisa que analisa soluções diversas produzidas pelos alunos, sendo necessário que o pesquisador adquira um conhecimento prévio do que pode ser encontrado.

1.2.5 - Representação de frações na reta numérica

Nesse caso, a fração é entendida como um ponto na reta numérica. Esta é uma interpretação sugerida pelos PCNS, que propõe que seja trabalhada com os alunos a “localização na reta numérica de números racionais e o reconhecimento de que eles podem ser expressos na forma fracionária” (BRASIL, 1997, p.71)

Na maioria dos casos, essa forma de representação é ensinada como algo novo, desvinculado da ideia de fração como parte de uma unidade. No entanto, alguns autores apontam para possíveis conexões:

> A visualização dos números fracionários na reta numérica não deveria, a rigor, ser considerada como uma nova ideia, pois também se trata da divisão de uma unidade em partes iguais. Só que, ao invés de destacarmos a parte, passamos a destacar o ponto na reta. (VASCONCELOS, BELFORT, 2006, p.47)

Tomemos como exemplo a reta numérica representada pela figura 6. O segmento contido entre os pontos 0 (zero) e 1 foi dividido em cinco partes iguais. O ponto 'A' nesta reta representa a fração 2/5

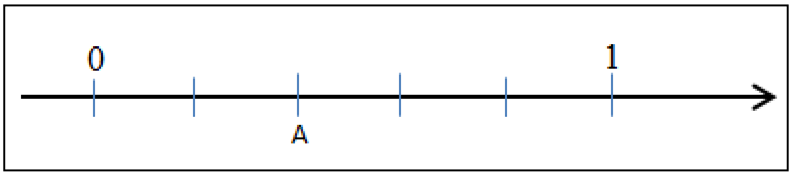


Figura 6 - Fração 2/5 na reta numérica

.

Em seu estudo, Kerslake (1986) constatou que muitas crianças encontram dificuldades em pensar a fração como um número, particularmente quando são perguntadas sobre a localização do número na reta numérica.

Em "Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade", Siegler et al. (2010) recomendam alguns caminhos para a melhoria do ensino de frações. Um deles seria ajudar os alunos a reconhecer que as frações são números e a obter frações expandindo o sistema numérico a partir dos números inteiros. Recomendam, também, que se usem retas numéricas como uma ferramenta central de representação para ensinar este e outros conceitos de fração. Em outro trabalho, Fazio e Siegler (2011) defendem a utilização da reta numérica em sala de aula:

> Uma maneira eficaz de garantir que os alunos compreendam que as frações são números com magnitudes é a utilização de retas numéricas durante a aula. Todas as frações podem ser representadas nas retas numéricas e estas ilustram que cada fração corresponde a uma determinada magnitude. (FAZIO, SIEGLER, 2011, p.10, tradução nossa)

Além de ajudar a compreender a fração como um número, Fazio e Siegler (2011) acreditam que a utilização da reta numérica pode auxiliar na compreensão de conteúdos como equivalência e comparação de frações.

1.3 – Algumas dificuldades no ensino de frações

1.3.1 – O conhecimento do professor

Segundo os PCN (BRASIL,1997), dentre os obstáculos que o Brasil enfrenta em relação ao ensino de Matemática, destaca-se a falta de formação profissional qualificada. Tal formação, segundo os pesquisadores Fazio e Siegler (2011), é essencial para a melhoria da aprendizagem da Matemática, em especial, o ensino de frações.

> Os professores precisam ser capazes de explicar não só a forma de resolver um problema, mas também entender que algumas abordagens são apropriadas e porque outras abordagens são inadequadas. Esse tipo de explicação requer um profundo conhecimento de fração (FAZIO, SIEGLER, 2011, p.21, tradução nossa)

Ao analisar o conhecimento de um grupo de professores do primeiro segmento do ensino fundamental, Marques (2008) constatou que muitos apresentam dificuldades em ensinar frações, pois possuem muitas dúvidas conceituais básicas sobre o que ensinam, concluiu também que tais dificuldades estão diretamente ligadas às dificuldades dos alunos: "Constatei que os itens mais difíceis para os alunos também são aqueles nos quais os professores tiveram o menor percentual de acertos" (p.86).

Alertando sobre a necessidade de um conhecimento mais sólido e consistente dos professores para um ensino de qualidade e, por conseguinte, mais eficiente, Marques (2008) conclui que "o entendimento dos alunos é fortemente dependente da compreensão que os professores têm dos assuntos que ensinam" (p. 88) e, em seguida, a autora alerta que "Se os professores não têm um conhecimento significativo do que têm que ensinar, como podem provocar em seus alunos uma aprendizagem com compreensão dos conteúdos ensinados?" (p.88). As conclusões de Marques (2008) se assemelham às de Fazio e Siegler (2011):

> Pesquisadores descobriram que a conquista matemática dos estudantes é diretamente relacionada com o conhecimento matemático de seu professor. Infelizmente, muitos professores não têm uma compreensão conceitual profunda das frações. (FAZIO, SIEGLER, 2011, p.21, tradução nossa)

Para Siegler et al. (2010) os professores devem ajudar os alunos a compreender o sentido existente nos procedimentos operatórios nos cálculos de frações. Fazio e Siegler (2011) recomendam que os professores devem promover estratégias de ensino para que o alunos desenvolvam o "conhecimento conceitual de frações", que é definido por eles como sendo "[...] o conhecimento do significado das frações, de suas magnitudes e relações com grandezas físicas. Trata-se de uma compreensão de como os procedimentos aritméticos com frações são matematicamente justificados" (Fazio, Siegler, 2011, p.6, tradução nossa)

Um fraco desenvolvimento conceitual no ensino de frações é apontado por Wu (1999, p.2), que descreve quatro problemas inter-relacionados, tanto na teoria como na prática:

(1) O conceito de fração nunca é definido claramente e suas diferenças com os números inteiros não é enfatizada suficientemente.

(2) As complexidades conceituais associadas ao emprego de frações são enfatizadas desde o início em detrimento do conceito básico.

(3) As regras das operações aritméticas com frações são apresentadas sem relacioná-las às regras das operações com números inteiros, com os quais os alunos têm familiaridade.

(4) Em geral, explicações matemáticas essenciais de quase todos os aspectos do conceito de fração não são dadas.

1.3.2 - A predominância do modelo parte de uma unidade

A predominância de algumas ideias no ensino de frações em detrimento de outras é discutido por diversos autores. Por exemplo:

> O ensino de frações limita-se, em geral, à aplicação de fórmulas e regras, sem que os alunos entendam muito bem o que estão fazendo. E, no caso específico das frações, muitas vezes a explanação limita-se a algumas ideias particulares, sem realmente abranger uma variedade de ideias. (VASCONCELOS, BELFORT, 2006, p.90)

Kerslake (1986) observou que o uso de diagramas geralmente ajuda os alunos a encontrar a solução de problemas e que pode contribuir para uma melhor compreensão de frações. Há, no entanto, um problema: solicite a um aluno que represente uma fração usando uma de suas representações (pictórica ou esquemática). Provavelmente um diagrama similar aos apresentados na figura 7 será desenhado.

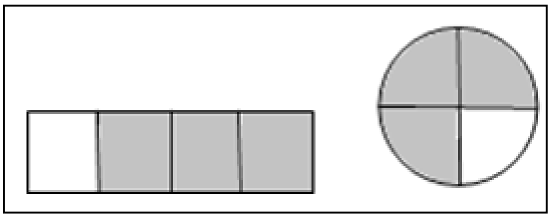


Figura 7 – Representações da fração 3/4.

Há uma predominância por boa parte dos livros e dos professores pela utilização da representação do modelo parte de uma unidade, tal tendência foi diagnosticada nas pesquisas de Kerslake (1986), Gomes (2010), Fazio e Siegler (2011).

Por exemplo, em sua pesquisa, Kerslake (1986) pediu que os sujeitos buscassem reconhecer a fração 3/4 em uma variedade de diagramas, como os apresentados na figura 8.

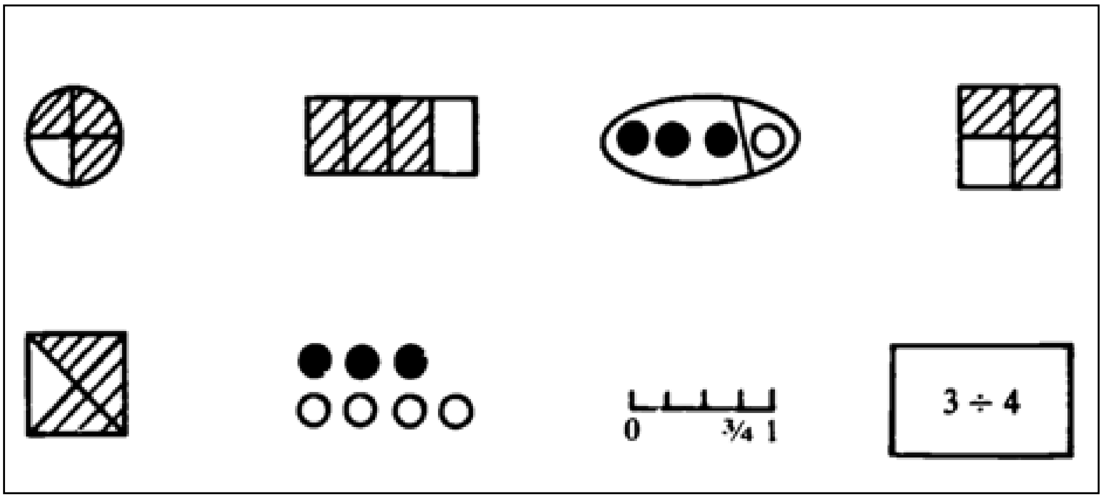


Figura 8 - A fração 3/4 em diversos diagramas (KERSLAKE, 1986, p.22)

Os modelos que representam a parte de uma unidade foram reconhecidos por todas as 23 crianças entrevistadas, enquanto, por exemplo, o modelo do quociente entre 3 e 4 foi reconhecido apenas por 3 crianças (p.22).

Para Kerslake (1986) a ênfase em um modelo particular não é benéfica, o uso da representação geométrica da parte de um todo pode contribuir com erros em operações como a adição e subtração. Em sua pesquisa, os alunos foram solicitados a fazer a operação 2/5 + 1/5 apresentada de forma gráfica, como ilustrado na figura 9:

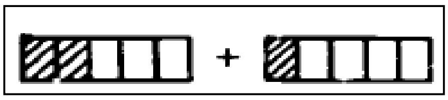


Figura 9 - Adição entre 2/5 e 1/5.

Foi verificado que dos 14 estudantes entrevistados, apenas 8 deram a resposta esperada, 3/5, e os demais responderam 3/10. Essa é uma resposta compatível com a ilustração, o que pode indicar que este erro ocorre porque os alunos não têm a clara ideia da unidade que deve ser considerada. Ora, se ela não foi claramente explicitada, como seria possível que os alunos a usassem? Parece bastante razoável, e mesmo justo, que eles apresentem dificuldades.

Segundo Fazio e Siegler (2011), essa interpretação é importante, mas ela não consegue transmitir a informação vital de que as frações são números com magnitudes. No entanto, como discutido em 1.2, há várias outras interpretações possíveis, que podem gerar outras representações em diagramas. Essas poderiam ser exploradas para contribuir com a compreensão conceitual de frações e de suas operações. Talvez a representação da fração como uma parte de uma unidade seja a melhor para um primeiro contato com o conceito formal de fração, por se tratar de um modelo palpável e que está presente na vida do estudante. Porém, muitas vezes, esse é o único trabalhado em sala de aula. Em outros casos, há uma ênfase somente na utilização destes diagramas provavelmente trará prejuízos na conceituação de números racionais, que devem ser considerados.

A predominante utilização de apenas algumas ideias associadas à fração também é um problema que atinge os professores do segundo segmento do ensino fundamental, como constatado na pesquisa de dissertação de mestrado de Gomes (2010, p.77). Esse pesquisador aplicou um questionário para 36 professores de Matemática (18 da rede particular de ensino e 18 da rede pública) sobre as ideias associadas à fração e pode constatar, dentre outras coisas que:

- a maioria (30 professores) utilizava o modelo de fração como parte de um todo;
- menos da metade utilizava as ideias de fração como quociente (17 professores) e razão (apenas 5 professores);
- 5 destes professores não utilizam nenhuma ideia de fração (fato que o próprio pesquisador julgou como surpreendente).

Em consonância com os resultados encontrados por Gomes (2010), Merlini (2005) conclui que o modo como se ensina frações nas salas de aulas é falho, pois privilegia determinadas ideias em detrimento de outras, não garantindo que o aluno construa o conhecimento desse conceito.

O conhecimento sobre as possíveis ideias associadas a uma fração pode ser benéfico ao ensino de Matemática, sobretudo em uma metodologia onde o professor analisa as resoluções dos alunos, como proposto neste trabalho. Tomemos o seguinte exemplo:

Ao ser solicitado para identificar a fração representada pela figura 10, um aluno poderia responder 2/6. É uma resposta diferente daquela esperada pelo professor, pois em uma ideia de fração como parte de uma unidade a resposta seria 2/8. Por outro lado, pode ser considerada correta, se interpretada como razão entre o número de quadradinhos cinzas e brancos.

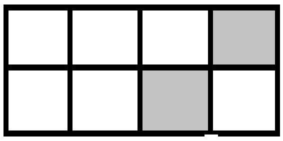


Figura 10 – Razão igual a 2/6?

1.3.3 – A importância da unidade

A ideia de unidade é essencial para a compreensão e o desenvolvimento de diversos conceitos e procedimentos relacionados com as frações, dentre eles a equivalência, comparação, adição e subtração. Como apontam Campos e Rodrigues:

> No caso específico do conceito de fração, a ideia de que as frações só têm sentido enquanto objetos matemáticos capazes de representar quantidades, de comparar quantidades ou de operar com essas quantidades, passa necessariamente pela ideia fundamental de que essas quantidades devem ser expressas segundo um mesmo referencial. (CAMPOS e RODRIGUES, 2007, p. 88).

A importância da identificação de ‘quem representa o todo’ é apontada por Monteiro e Costa:

> O conceito de unidade, ou seja, a capacidade de identificar ‘quem’ representa o *todo* ou a *unidade* no problema, nas diversas situações cotidianas ou didáticas envolvendo números racionais, também é um fator complicador na compreensão desses números e motivo principal de erros cometidos por alunos e professores ao resolverem problemas envolvendo o conceito de número racional. (MONTEIRO, COSTA, 1996, p. 61)

Erros comuns aos alunos costumam mostrar que a manutenção da unidade não está sendo feita. Sem o conceito de unidade bem definido, um aluno pode acreditar, por exemplo, que 3/4 é o mesmo que 3/5, pois ambos representam três partes, como ilustrado na figura 11.

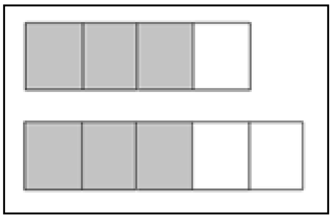


Figura 11 – Exemplo de erro decorrente da não manutenção da ideia da unidade.

Aqui, ao invés de manter a unidade, o que se mantém é o tamanho da parte. Um raciocínio análogo parece ser demonstrado quando os alunos não conseguem entender como 1/2 pode representar o mesmo que 3/6. Já que, no primeiro caso, tomamos um pedaço e no segundo tomamos três pedaços, ou seja, se o que está fixo é o tamanho da parte e não a unidade, para o aluno parece que está sendo considerado três vezes mais.

No trabalho desenvolvido por Campos e Rodrigues (2007) com alunos de diversos níveis de escolaridade (fundamental, médio e superior) foram aplicadas questões que testavam a compreensão do conceito da unidade.

Uma das atividades propostas por estes pesquisadores foi o exercício representado na figura 12.

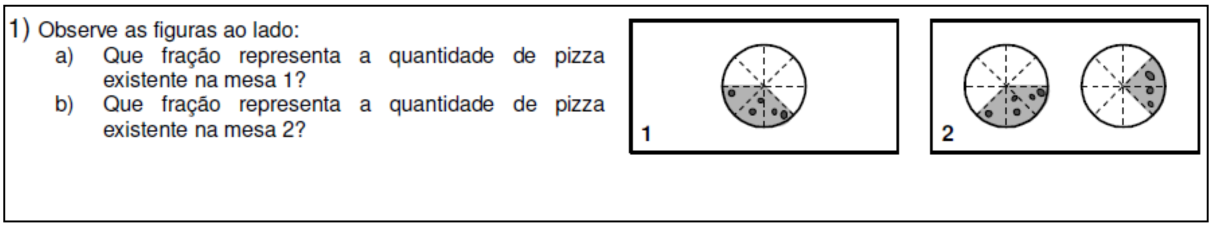


Figura 12 - Exercício que trabalha a ideia da unidade (CAMPOS e RODRIGUES, 2007, p.81).

Segundo esses autores (2007, p.83), ao analisar as respostas do item b, foi constatado que em todos os níveis de escolaridades estudados, incluindo o nível superior, mais de 65% dos alunos não conservaram a unidade, dando como resposta 5/16. Constataram que o referencial de unidade não foi mantido apesar de ter sido enfatizado de diferentes maneiras e concluem que:

> A questão mais significativa observada, portanto, é o fato de que há uma tendência do aluno em tomar como referencial o maior conjunto de objetos ou de partes de objetos disponível. As diferentes formas de apresentar a questão, por mais enfáticas que sejam ao definir o referencial, não impedem que um número considerável de sujeitos mantenha essa tendência. A

> observação das respostas também sugere que é irrelevante o fato de se tratar de fração imprópria ou não. (CAMPOS E RODRIGUES, 2007, p.87)

No entanto, o enunciado do item b (figura 12) pode ter contribuído para que o "erro" acontecesse, por não deixar claro qual seria a unidade. Talvez, se fosse reescrito do seguinte modo: "Que fração de uma pizza está representada na mesa 2?", o número de erros registrados seria menor.

1.3.4 – Equivalência de frações

Os autores Kamii e Clark (1995) desenvolveram pesquisas que apontam que o conhecimento de equivalência de frações seria uma habilidade de chamar o mesmo número de diferentes nomes, a habilidade de ignorar ou imaginar novas linhas em uma figura e/ou manifestar um pensamento flexível. Na figura 13, se o aluno ignorar a linha horizontal, poderá observar que as frações 1/2 e 2/4 são equivalentes.

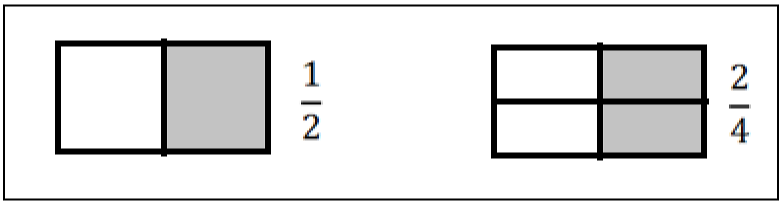


Figura 13 - Comparação entre1/2 e 2/4

Em seu estudo, Kerslake (1986, p.15) sugere três razões principais para explicar as dificuldades dos alunos em relação à aprendizagem das frações:

- a dificuldade em aceitar a fração como sendo um número;
- as limitações do uso dos diagramas que representam a parte de uma unidade;
- a dificuldade de entender as classes de equivalência.

Arnon et al. (2001, p.170) sugerem que o fraco desenvolvimento do conceito de equivalência seja a maior causa da dificuldade para a aprendizagem das frações. Segundo Kamii e Clark (1995), as crianças precisam tanto manusear materiais concretos para explorar a equivalência de frações quanto trabalhar com símbolos e desenvolver algoritmos. Já para Kerslake, (1986) as crianças são capazes de reconhecer a equivalência de frações quando são apresentadas na forma geométrica. Apesar disso, a autora aponta que as crianças não mostram um entendimento da aplicação da ideia de equivalência na adição de frações. (pag. 36)

Assim como Ball (1990), Kamii e Clark (1995) defendem que as crianças devem ser encorajadas a resolver os problemas construindo suas próprias representações das frações. Eles também propõem que as frações próprias sejam ensinadas simultaneamente às frações impróprias e os números mistos (p.375). Isto aumentaria a desenvoltura em transitar em diversas representações numéricas, e com isso mais facilmente poder comparar frações com frações, frações com inteiros e reconhecer duas ou mais frações como sendo equivalentes.

Kerslake (1986, p.36) sugere que as crianças sejam capazes de reconhecer mais facilmente a equivalência entre duas (ou mais) frações quando são apresentadas como parte de uma unidade, mas não têm tanta desenvoltura quando as frações são apresentadas de forma numérica. A mesma autora conclui que os alunos podem aceitar a noção de equivalência em representações de figuras geométricas, e também são capazes de aplicar técnicas envolvendo multiplicação (e divisão) para obter frações equivalentes, sem fazer nenhuma conexão entre as duas situações (p.103).

II – ANÁLISE DE ERROS

Para Pinto (2000), “O erro está intrínseco no processo de construção do conhecimento” (p.39). Segundo Tanus e Darsie (2007) a História da Ciência reconhece diversos casos em que os erros contribuíram para o desenvolvimento científico. Thomas Edison, por exemplo, realizou inúmeros experimentos fracassados até inventar a lâmpada. Segundo estas autoras:

> O mesmo se deu com a Matemática enquanto Ciência. Muitos séculos foram necessários para que se consolidassem suas estruturas, possibilitando novas descobertas até os dias atuais. Muitos foram os “ir” e “vir”, marcados por obstáculos e erros, e como toda Ciência, segue num processo contínuo de construção e validação. (TANUS, DARSIE, 2007, p.1).

Pesquisadores como Borasi (1985), por exemplo, seguem a mesma linha de raciocínio. Segundo esta pesquisadora, se traçarmos um esboço histórico, iremos encontrar vários casos nos quais os erros tiveram importante papel na criação e construção do conhecimento matemático. Diversos erros geraram oportunidades de se rever e modificar definições e conceitos matemáticos, e outros possibilitaram gerar novos campos de pesquisa, como no episódio das Geometrias não-Euclidianas.

2.1 O erro na produção do conhecimento matemático

As dificuldades e erros que, ao longo da história, acompanham a construção do conhecimento matemático são, em geral, omitidos quando transpostos para o ensino. Segundo Pinto (2000) em sala de aula, os conteúdos matemáticos são transmitidos como imutáveis e transcendentes ao tempo e ao espaço. Para Tanus e Darsie (2007) a disciplina Matemática enfrenta uma crise por ser apontada como uma das causas do fracasso escolar:

> O que a tem caracterizado, de modo geral, é uma visão dualista, impregnada pelo certo/errado, contrariando a história da construção da ciência, e descaracterizando-a como produção humana. Os conteúdos são tratados como verdades absolutas e apresentados de forma linear, completamente desligados de seu processo de desenvolvimento, o que implica na dificuldade do docente em organizar ações em sala de aula no que se refere ao tratamento com o erro do aluno, que muitas vezes repete erros que ocorreram durante o próprio desenvolvimento daquele conhecimento. (TANUS, DARSIE, 2007, p.2).

Para Cury (2007), é transmitida aos estudantes uma falsa concepção de que os trabalhos desenvolvidos pelos matemáticos foram construídos sem a ocorrência de incertezas, de falhas e de idas e vindas em seus raciocínios.

Os fatores discutidos por esses autores podem contribuir para que dúvidas, equívocos e erros cometidos durante a aprendizagem sejam vistos como algo que não pertença ao processo de construção do conhecimento matemático. E esta concepção pode gerar consequências negativas na aprendizagem. Borasi (1985) afirma que, ao cometer erros, "os alunos experimentam diversos sentimentos, tais como desapontamento, frustração, vergonha e raiva" (p. 11, tradução nossa). Um aluno com tais sentimentos pode facilmente se desestimular, pode também criar obstáculos que podem atrapalhar muito sua aprendizagem no decorrer da sua vida escolar.

Para Borasi (1985) uma concepção diferente sobre o significado dos erros adotada por professores e entendida pelos alunos pode contribuir para que tais sentimentos sejam evitados. Em consonância, autores como Cury (2007), Mandarino et al (2008), Oliveira e Palis (2011), Pinto (2000) e Tanus e Darsie (2007) defendem em suas pesquisas que o erro deixe de ser visto como um sinal de falha no processo de aprendizagem e passe a ser encarado como um meio para se investigar a natureza do processo de aprendizagem do conteúdo estudado, pois os erros podem mostrar as dificuldades e limitações, e ajudar na melhoria dos métodos e resultados.

2.2 O erro e a aprendizagem matemática

Em seu trabalho, Pinto (2000) caracteriza três diferentes níveis de relação do aluno com o erro em Matemática.

No primeiro deles, "o aluno é indiferente ao erro. Ele faz a correção no caderno, mas não sabe por que errou." (p.145). Em um segundo nível, o erro é identificado como algo que deve ser corrigido. "Ele causa inquietação, mas não chega a desestruturar os esquemas" (p.146). Para a autora, neste nível o aluno encontra-se em condições de superar estes erros com a ajuda dos colegas e dos livros. No terceiro nível o erro é compreendido, "o aluno está consciente de que errou, e de porque ele errou: ele tem a consciência do valor do seu erro" (p.146). Neste caso não há necessidade de ajuda externa.

Do ponto de vista da didática, um tratamento diferenciado em relação ao erro no ensino de Matemática é proposto nos PCNS quando se afirma que na "[...]

aprendizagem escolar o erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para buscar o acerto" (p.55). Segundo os PCNS, esta busca pode se transformar em uma metodologia didática:

> Quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução. Ao procurar identificar, mediante a observação e ao diálogo, como o aluno está pensando, o professor obtém as pistas do que ele não está compreendendo e pode planejar a intervenção adequada para auxiliar o aluno a refazer o caminho. (BRASIL, 1997, p.55)

Autores como Borasi (1985), Cury (2007) e Pinto (2000) consideram que há pelo menos duas posturas que o professor pode adotar diante dos erros dos alunos. Uma delas seria a de um professor remediador, focando a correção do problema sem se preocupar com suas causas. Nas palavras de Pinto:

> [...] quando o professor percebe que seus alunos estão errando muito nos problemas com frações e propõe, separadamente, exercícios de fixação, com treino de operações com frações, nem sempre está voltado para a superação de um possível problema. [...] Visto de forma simplificada, seu tratamento consiste em aplicar paliativos para eliminar seus efeitos. (PINTO, 2000, p.141-142)

A outra postura seria decorrente de entender que os erros fazem parte do desenvolvimento do conhecimento matemático, eles "são, portanto, indicativos para os próprios alunos e também para os professores na construção do conhecimento" (TANUS, DARSIE, 2007, p.3). E a partir daí, se valer deles para criar situações didáticas proveitosas. Cury aponta como seria a postura do professor quando diz:

> [...] destaco a ideia de que o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre suas respostas. (CURY, 2007, p.80)

Borasi (1996, apud Cury, 2007, p.37) desenvolveu em seus trabalhos uma "taxonomia de usos dos erros como trampolins para a pesquisa". Essa taxonomia relaciona três níveis do discurso matemático (realização de uma tarefa, compreensão de um conteúdo e compreensão sobre a natureza da Matemática) a três objetivos da Matemática (remediação, descoberta e pesquisa).

Borasi entende que, ao adotar uma visão mais ampla sobre o conhecimento matemático, o professor pode reconhecer o lado positivo dos erros. Adotando medidas didáticas adequadas, pode utilizar "o erro como um trampolim para a aprendizagem em Matemática" (BORASI, 1985, p.1). Para Mandarino et al. (2008), esta postura possibilitaria ao professor:

> [...] a compreensão de diferentes interpretações feitas pelos alunos, e pode oferecer elementos para a recondução do processo de ensino e aprendizagem, tanto em seus aspectos metodológicos, quanto na abordagem dos conceitos e procedimentos associados ao conteúdo em estudo. (MANDARINO et. al., 2008, p.71)

Cury (2007) complementa sua análise ao defender que procurar entender as formas das respostas produzidas pelos alunos, corretas ou incorretas, pode "contribuir para a construção de novos patamares do conhecimento" (p.63). Em consonância com Cury, Oliveira e Palis (2011) apontam algumas conclusões obtidas ao analisar a postura investigativa dos professores diante da produção de seus alunos:

> A análise cuidadosa das diversas resoluções por eles [os professores] realizadas revela diferentes estratégias e cálculos levando a diferentes respostas (certas ou erradas), e possibilita aprender mais acerca do pensamento matemático dos alunos. (OLIVEIRA & PALIS, 2011, p.343)

Para Mandarino et al (2008), a análise de erros é um elemento de grande importância para a formação e capacitação dos professores, pois pode oferecer elementos para a discussão de crenças e concepções sobre o ensino da Matemática. Cury (2007) defende que seria desejável que os professores tivessem acesso a debates e grupos de estudos relacionados ao tratamento dos erros dos alunos.

Oliveira e Palis (2011) comentam que analisar a produção dos alunos é uma prática comum aos professores. Mas entendem que essa análise é feita de forma isolada, em um curto intervalo de tempo e sem embasamento teórico para uma possível exploração desta produção. Ou seja, muitos dos benefícios que essa postura poderia trazer para a sala de aula acabam não acontecendo.

2.3 Os erros no ensino de frações

Ball (1990) sugere que o professor deva propiciar e incentivar os alunos a construírem suas próprias representações de frações e não apenas manipular modelos prontos. Isso permite que modelos errados que não respeitem a ideia da unidade sejam construídos num primeiro momento. Explorando esses modelos, o professor pode criar situações problema onde os alunos sejam levados a compreender o que está incorreto e desenvolver a ideia correta de unidade, fundamental para o conceito de fração. Essa postura mais aberta, que explora soluções dos alunos, é compatível com as orientações dos PCNS:

> Nesse papel, o professor é responsável por arrolar os procedimentos empregados e as diferenças encontradas, promover o debate sobre resultados e métodos, orientar as reformulações e valorizar as soluções mais adequadas. (BRASIL, 1997, p. 38)

Porém, para Ball et al (2008), o professor necessita do chamado conhecimento de conteúdo, que consiste, por exemplo, em saber escolher que exemplos utilizar ao ensinar certo conteúdo e os possíveis erros que serão cometidos pelos alunos. Tais ideias estão em consonância com Fazio e Siegler (2011) quando afirmam:

> Os professores devem ser capazes de usar uma série de representações diferentes e selecionar uma representação adequada para cada situação. Os professores também devem conhecer os tipos de erros e equívocos que os alunos estão suscetíveis de cometer durante a aprendizagem de fração. Quando os professores sabem por que seus alunos estão tendo dificuldades, eles podem resolver diretamente os mal-entendidos dos alunos. (FAZIO, SIEGLER, 2011, p. 21, tradução nossa)

Pinto (2000) considera que tornar o erro algo que possa ser compreendido pelos alunos seria uma das características de uma estratégia didática inovadora. Para isso, a autora alerta que é necessário que os erros sejam conhecidos e compreendidos a priori pelo professor. Sem que isso ocorra, “as possibilidades de mudanças serão mínimas em relação à efetivação da aprendizagem do aluno” (PINTO, 2000, p.148). Ainda apontando os benefícios didáticos gerados pelo conhecimento dos erros que os alunos cometem, Cury (2012) elucida:

> Entendemos que, para poder trabalhar com os erros e tomar decisões sobre eles, é preciso ter conhecimento do conteúdo envolvido e das fases da análise, tomando decisões que são específicas dos professores, porque levam em conta, ao mesmo tempo, o que aluno sabe, o que não sabe e o que pode ser feito para ajudá-lo a reorganizar seu pensamento sobre o conteúdo em questão. (CURY, 2012, p.31)

Para Fazio e Siegler (2011) os professores devem “discutir entre si porque os estudantes estão tendo dificuldades com tipos específicos de problemas em pontos diferentes no desenvolvimento de frações” (p.22, tradução nossa). Para Borasi (1985), Pinto (2000), Cury (2007, 2012), Fazio e Siegler (2011), o erro é uma ferramenta para avaliar os estudantes e para diagnosticar as problemáticas do tema ensinado, mas não somente isso. Trata-se também de importante ferramenta para que os professores orientem sua prática pedagógica.

> Os professores também devem discutir os tipos de erros que os alunos normalmente fazem e quais os equívocos subjacentes a cada um dos erros. Esse tipo de discussão também pode permitir que os professores aprendam que tipos de problemas envolvendo frações eles devem propor aos seus alunos a resolver a fim de diagnosticar as fontes de mal-entendidos. (FAZIO, SIEGLER, 2011, p.22, tradução nossa)

Além disso, Cury (2012) defende a inclusão deste tema na ementa dos cursos de formação de professores de Matemática:

> Os erros são saberes que se enquistam, e a ausência de trabalhos, nos cursos de Licenciatura de Matemática, sobre os erros mais frequentes – já apontados em publicações diversas e consensuais para os professores experientes – é um ‘não saber’, na linguagem usada por Moreira e David (2005), pois conhecê-los é fundamental para a prática pedagógica escolar (CURY, 2012, p.45)

Para Borasi (1985), a partir da análise dos próprios erros, ou daqueles cometidos por outros, os alunos podem obter uma aprendizagem mais significativa de conteúdos matemáticos. Borasi (1985), Cury (2007, 2012) e Mandarino et al (2008) defendem o estudo das respostas dos alunos, corretas ou incorretas, para auxiliá-los na construção do conhecimento. E também que a análise dessas respostas pode ser utilizada na construção de uma metodologia de ensino.

III - METODOLOGIA DE PESQUISA

As aulas desta pesquisa foram realizadas no primeiro semestre de 2012, em uma escola municipal localizada no município de Itaboraí – RJ, em duas turmas regulares do 7º ano do ensino fundamental. Nesta, se adotou uma metodologia de ensino inspirada nos trabalhos de Borasi e Cury, que denominamos de *Metodologia Didática de Análise de Soluções*. Nela, o professor cria atividades nas quais os estudantes podem rever suas soluções, repensar sobre os erros cometidos e reconstruir novos significados sobre o conhecimento matemático em questão, o que no caso deste trabalho, é o estudo das frações.

O cerne da metodologia de pesquisa utilizada foi a Pesquisa-ação. O dois aspectos que justificam essa escolha são:

- o pesquisador também é o professor dos alunos e todos se caracterizam como os sujeitos da pesquisa;
- as características da pesquisa-ação se adequam à metodologia didática baseada na análise de soluções.

A escolha da Pesquisa-ação é coerente pois trata-se de um processo que segue uma evolução sistemática e modifica tanto o investigador como as situações em que este atua, o que é a proposta da metodologia baseada na análise de soluções.

Os resultados da Pesquisa-ação possuem caráter predominantemente qualitativo. Por isso, como forma de complementar os dados da pesquisa, promovendo uma análise quantitativa, um teste baseado no referencial teórico foi preparado e aplicado em dois momentos: antes das aulas-pesquisa (pré-teste) e após essas aulas (pós-teste).

As questões norteadoras desta pesquisa, já descritas no capítulo de introdução do presente trabalho, são:

1 – De que forma uma metodologia de ensino baseada na análise de soluções pode contribuir para o ensino de frações?

2 – Qual é a evolução observável nos resultados de um teste aplicado antes e após uma sequência didática para revisão de frações baseada na análise de soluções?

3.1 A Pesquisa-ação

Segundo Tripp (2005) “a pesquisa-ação educacional é uma estratégia para o desenvolvimento de professores e pesquisadores de modo que eles possam utilizar suas pesquisas para aprimorar seu ensino e, em decorrência, o aprendizado de seus alunos”. Na mesma linha, Engel (2000) afirma que “este tipo de pesquisa é, sem dúvida, atrativa pelo fato de poder levar a um resultado específico imediato, no contexto do ensino-aprendizagem”.

Franco (2005) alerta também sobre a imprevisibilidade desta forma de pesquisa, que, segundo a autora, para ser bem realizada, não deve ter seu processo “aligeirado, superficial, com tempo marcado”.

Segundo Engel (2000) a primeira etapa do processo de construção da pesquisa-ação é a identificação das situações problemáticas, essas são analisadas quanto a sua relevância e viabilidade.

A etapa seguinte é a pesquisa preliminar. Para Engel (2000) é nessa fase em que ocorrem a revisão bibliográfica, as observações iniciais da sala de aula e o levantamento das necessidades para que as intervenções sejam implementadas.

A seguir, se inicia a pesquisa-ação propriamente dita que, para os autores Engel (2000), Franco (2005) e Tripp (2005), possui características cíclicas. Ou seja, a pesquisa deve induzir à determinada ação, esta, por sua vez, deve induzir a uma nova pesquisa, que também conduzirá a uma nova ação e assim sucessivamente.

Tripp (2005) propõe a seguinte subdivisão da pesquisa-ação: Planejamento, Implementação e Avaliação.

a) Planejamento

Fase na qual são definidas quais serão as estratégias e as intervenções que serão realizadas, o que no caso desse trabalho, estão relacionadas diretamente com as questões de pesquisa.

b) Implementação

Fase na qual os planos são postos em prática. Nessa fase ocorrem as intervenções e as coletas de dados. Ocorre no ambiente escolar, mais especificamente na sala de aula, onde as figuras do professor e pesquisador se convergem em um único ser.

c) Avaliação.

Os dados coletados são interpretados, analisados, e deles tiram-se conclusões. Para André (2001) a "análise deve ser densa fundamentada trazendo as evidências ou as provas das afirmações ou conclusões". Observa-se que, caso os resultados não sejam pedagogicamente satisfatórios, propostas para um novo planejamento são feitas, buscando-se atingir os objetivos educacionais da pesquisa, ocorre uma nova implementação.

3.2 Os sujeitos da pesquisa

A presente pesquisa foi realizada em turmas regulares do 7º ano do ensino fundamental, pertencentes a uma escola municipal localizada no município de Itaboraí, RJ. Para isso, o professor-pesquisador assumiu duas turmas, onde foram desenvolvidas as aulas referentes a esta pesquisa, bem como toda a coleta de dados.

A escola na qual a pesquisa foi desenvolvida atende, em sua maioria, alunos com poucos recursos financeiros, e apesar dos esforços da equipe diretiva, a participação da família é mínima. Nesse contexto, tudo que os alunos aprendem em relação aos conteúdos ensinados acontece predominantemente em sala de aula, pois eles, em sua maioria, não têm auxílio em casa para seus estudos, o que diminui qualquer interferência externa na sua aprendizagem dos alunos.

Na presente instituição, as turmas são divididas por faixa etária. Assim, a pesquisa foi realizada em duas turmas com características bastante distintas:

Turma 701: nessa turma estudam os alunos com idades que variam de 11 a 13 anos. Esses alunos, embora sejam muito participativos, são muito agitados e, frequentemente, considerados desatentos por seus professores. É consenso entre os professores da escola que nesta classe se encontram poucos alunos com dificuldades de aprendizagem.

Turma 702: é uma turma mais heterogênea quanto ao desempenho escolar, sendo composta por um grupo de alunos considerados interessados e participativos e por outro que, segundo a equipe pedagógica da escola, demonstra pouco interesse e, consequentemente, diversas dificuldades de aprendizagem. A faixa etária dos alunos dessa turma varia entre 13 e 15 anos. É nessa turma que estudam os alunos que já foram reprovados e os que estão em dependência em Matemática.

No decorrer das aulas, as turmas se comportaram de modo semelhante no que se refere à aprendizagem e resultados, não havendo assim, a necessidade de analisá-las separadamente neste trabalho.

3.3 A Metodologia Didática de Análise de Soluções

Para Cury a análise de erros é uma abordagem de pesquisa:

> [...] – com fundamentações teóricas variadas, objetivos distintos e participação de todos os níveis de ensino nas amostras –, mas também é uma metodologia de ensino, podendo ser empregada quando se detecta dificuldades na aprendizagem dos alunos e se quer explorá-las em sala de aula. (CURY, 2007, p. 91)

A mesma autora alerta que ao analisar os erros dos alunos e “considerar apenas a classificação e a contagem do número de respostas de cada tipo, a investigação fica muito pobre, não trazendo benefícios a alunos e professores” (Cury, 2007, p.63). Sendo assim, a proposta dessa metodologia didática é utilizar os erros para reconstruir significados e reformular conceitos.

> “[...] não se trata de transformar em *positivo* o *negativo*, mas de valer-se do efeito da falha como um instrumento produtivo ou de progresso, re-converter em processo o resultado do erro. Isso quer dizer que a pessoa adota uma atitude transformadora dos fatos. [...] a criatividade não está, como é natural, no erro, mas nas pessoas que são capazes de gerar novas ideias apoiando-se nele. (TORRE, 2007, p. 14 -15)”.

Esta pesquisa, no entanto, consiste na utilização de uma metodologia didática construída através da análise de soluções dos alunos, inspirada nas pesquisas de Borasi (1985) e da própria Cury (2007, 2012) para (re) ensinar frações, que denominamos *Metodologia Didática de Análise de Soluções.*

Essa metodologia utiliza a produção escrita dos alunos para a formulação de exercícios que abordariam os erros cometidos. Eles são explorados e utilizados para a reconstrução do conhecimento. A *Metodologia Didática de Análise de Soluções* consiste em uma sequência didática (cíclica) de 4 etapas:

A) Aula expositiva de revisão de conteúdo;
B) Aplicação e recolhimento de exercícios do tipo 1;
C) Construção de exercícios do tipo 2;
D) Aula de análise de soluções dos alunos: aplicação e discussão dos exercícios do tipo 2.

O cronograma e as características dessas etapas são discutidos nos itens a seguir.

3.3.1 Aula expositiva de revisão de conteúdo

Nessa aula, o conteúdo era apresentado aos alunos de modo semelhante àquele que estavam habituados. Por ser o padrão usual das aulas de matemática observadas na instituição, se optou por aulas expositivas em quadro branco, não sendo utilizado nenhum recurso tecnológico como slides ou vídeos.

Para não abranger um conteúdo muito vasto em relação às frações na pesquisa, foi escolhido trabalhar com os tópicos desde os conceitos iniciais até adição e subtração de frações.

Em alguns casos, as aulas expositivas de revisão de conteúdo utilizaram o primeiro tempo de aula (50 min) e, quando necessário, os dois tempos de aula (1h e 40min). Nelas, após a apresentação dos conteúdos, seguiam alguns exemplos no quadro, e por último, os alunos resolviam individualmente uma lista de exercícios. Essa lista continha os exercícios que denominamos como sendo do tipo 1. Nessa etapa, o professor procurou intervir o mínimo possível.

3.3.2 Exercícios do tipo 1

Os *exercícios do tipo 1* se caracterizam por serem individuais e similares aos encontrados nos livros didáticos, construídos com comandos simples: “efetue”, “calcule” e “determine”, inseridos em questões diretas ou em problemas.

Os alunos deveriam resolvê-los individualmente, porém, durante a resolução os alunos podiam consultar o caderno, os colegas e o professor. Em algumas aulas, esses exercícios foram escritos no quadro branco para que os alunos copiassem e, em outras, foram digitados e fotocopiados.

Os *exercícios do tipo 1* foram aplicados sempre utilizando os 50 minutos finais, após a *aula de revisão e exposição de conteúdo*. Os exercícios do tipo 1 e as suas soluções foram recolhidos no final das respectivas aulas.

3.3.3 Construção dos exercícios do tipo 2

As soluções obtidas nos exercícios do tipo 1 serviram como matéria prima para a construção dos exercícios do tipo 2. O pesquisador selecionou e digitalizou diversas soluções encontradas: soluções corretas e incorretas, completas e incompletas, com respostas similares ou não às ensinadas pelo professor em sala de aula, atendendo aos seguintes critérios elaborados e adotados pelo pesquisador, sob a luz do referencial teórico e da experiência em sala de aula:

- Que remetessem às dificuldades apresentadas em sala de aula.

Algumas soluções apresentavam erros correlacionados às dificuldades já observadas em sala de aula.

- Que tivessem erros similares aos encontrados em outras pesquisas.

Havia soluções que apresentavam erros indicados em outros trabalhos acadêmicos, somar numeradores e denominadores na adição, por exemplo.

- Que apresentassem alta incidência.

Alguns erros identificados apresentaram uma grande incidência ou reincidência entre os alunos.

- Por se tratarem de assuntos de grande relevância.

Alguns erros foram selecionados por estarem relacionados a assuntos que o pesquisador, influenciado pela literatura e por uma concepção pessoal, julgou ser de grande importância para a aprendizagem do conteúdo.

- Que fossem incompletas.

Foram selecionadas questões incompletas para que os alunos as completassem.

- Que permitissem a digitalização.

Esse era um critério fundamental para todos os itens anteriores. Cada questão selecionada deveria ser suficientemente legível depois de digitalizada.

As características destes exercícios são bem distintas daquelas apresentadas nos do tipo 1. Nos exercícios do tipo 2 os alunos eram solicitados a analisar as soluções criadas anteriormente por eles - soluções dos exercícios do tipo 1 - , identificando resoluções incorretas e incompletas, e em seguida, corrigindo-as ou completando-as.

Através de comandos específicos, tais como "Explique", "Justifique" e "Por que?", os alunos foram levados a desenvolver habilidades de síntese e análise às quais não estavam habituados, sobretudo nas aulas de Matemática, o que gerou certa dificuldade.

É importante salientar que essas questões foram produzidas sem revelar a autoria do aluno.

Como a construção das questões do tipo 2 dependia de uma coleta prévia de dados (questões do tipo 1) que deveriam ser estudados e analisados inicialmente pelo pesquisador, entendemos que este processo corresponde aos primeiros resultados da pesquisa. Sendo assim, algumas ideias envolvidas nessa construção e os exemplos obtidos serão discutidos no capítulo posterior.

3.3.4 Aula de análise de soluções: aplicação e discussão dos exercícios do tipo 2

Para que uma abordagem diferenciada em relação ao erro pudesse ser realizada, o professor adotou uma postura diferenciada em relação ao erro, tentando lidar com naturalidade com os erros cometidos em sala de aula desde o início do ano. Além disso, foi sugerido aos alunos que o erro faz parte do processo de aprendizagem, e sendo assim, seria necessário que houvesse respeito ao colega em suas perguntas e respostas.

As aulas de análise de soluções tinham como objetivo promover diferentes abordagens sobre os temas, usando a própria produção dos alunos, contida nos exercícios do tipo 2, para a construção ou a reconstrução de significados e crenças. Nessas aulas, os alunos formaram grupos, de duas a quatro pessoas, para resolver coletivamente as atividades propostas, nas quais deveriam identificar soluções corretas e soluções incorretas e, nesse caso, corrigir coletivamente as falhas nas resoluções. Também foi solicitado aos alunos que buscassem possíveis motivos para os erros cometidos, que completassem a resolução de algumas questões incompletas e que encontrassem uma ou mais soluções para alguns problemas.

O professor-pesquisador procurou, na medida do possível, não fornecer respostas prontas sobre as dúvidas surgidas na resolução dos exercícios (do tipo 1 e do tipo 2), e sim levantar novos questionamentos sobre elas. De modo geral, uma pergunta geralmente era respondida com outra pergunta ou alguma sugestão.

3.4 Os Testes

Como forma de complementar os dados da pesquisa, um teste baseado na revisão de literatura foi preparado e aplicado em dois momentos. Apesar de serem exatamente iguais, usaremos uma nomenclatura específica para cada: chamaremos de Pré-teste o aplicado na aula anterior às aulas onde se desenvolveram a pesquisa, e Pós-teste aquele aplicado imediatamente após as aulas da pesquisa.

3.4.1 Características dos testes

Os alunos dispuseram de 1h para a realização do teste que continha dez questões. Esse instrumento foi utilizado para conferir a esta pesquisa uma avaliação de caráter predominantemente quantitativo. O teste era individual, sem consulta aos materiais didáticos e não foi utilizado como avaliação escolar, tendo seus resultados utilizados apenas para fins desta pesquisa.

Embora tivesse sido influenciado, em sua elaboração, pelas mesmas decisões de caráter teórico que influenciaram a montagem das aulas, o pré-teste não foi corrigido ou analisado antes do término das aulas relativas à pesquisa. Dessa forma, pode-se afirmar que o professor-pesquisador não usou os resultados do teste na preparação das aulas, nem teve qualquer influência nas decisões sobre conteúdo ou metodologia didática. Tal atitude foi tomada para que o teste tivesse a maior credibilidade possível.

Ao término das aulas-pesquisa, tanto o pré-teste quanto o pós-teste foram corrigidos e seus resultados foram analisados e comparados. Esse estudo integra a análise dos resultados dessa pesquisa.

3.4.2 As questões do teste e as ideias de fração associadas segundo o referencial teórico

Questão 1 - Essa questão aborda a ideia de fração como parte de um conjunto. Não é uma abordagem frequentemente encontrada na introdução do estudo de frações nos livros didáticos.

Pinte o interior de $\frac{2}{3}$ dos círculos contidos no retângulo abaixo.

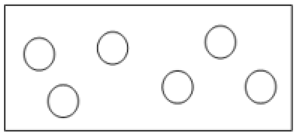


Figura 14 – Questão 1 do teste

Questão 2 - Questão que aborda a ideia de fração na reta numérica. Apontada pelas pesquisas como sendo uma ideia onde os alunos costumam apresentar muitas dificuldades.

Entre quais números representados na reta abaixo podemos colocar a fração $\frac{2}{5}$?

Figura 15 – Questão 2 do teste

Questão 3 - Questão contextualizada que contempla comparação e adição de frações com o mesmo denominador.

Leia a frase e responda às perguntas:

Antônio comeu $\frac{2}{7}$ do bolo, enquanto seu irmão Roberto comeu $\frac{3}{7}$.

a) Quem comeu o maior pedaço do bolo? ______________________

b) Que fração do bolo foi comida pelos dois irmãos? ______________

Figura 16 – Questão 3 do teste

Questão 4 - Trata-se de uma questão de comparação de frações com o mesmo denominador. O enunciado é simples e direto pois o objetivo era verificar somente o conhecimento matemático.

Quem é maior, 3/4 ou 5/4? Justifique

Figura 17 – Questão 4 do teste

Questão 5 - Trata-se de uma questão direta de comparação de fração com denominadores diferentes, que possui enunciado similar à questão 4.

Quem é maior 2/3 ou 3/5? Justifique.

Figura 18 – Questão 5 do teste

Questão 6 - Esta é uma questão contextualizada, encontrada no livro didático utilizado na escola onde a pesquisa foi realizada, que aborda a ideia de fração como parte de um conjunto. Muitos autores interpretam nesse caso a ideia de fração como um operador.

Em uma turma há 50 alunos, destes $\frac{3}{5}$ são meninos. Calcule o número de meninos desta turma.

Figura 19 – Questão 6 do teste

.

Questão 7 - Dois itens diretos de adição de frações, um deles com frações de mesmo denominador e o outro com denominadores diferentes.

Efetue:

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}$

Figura 20 – Questão 7 do teste

Questão 8 - Questão contextualizada que envolve comparação e equivalência de frações.

Regina possui uma caixa com muitas figurinhas. Desejando agradar duas amigas, Regina deu para Lúcia $\frac{1}{3}$ das figurinhas e para Ana Cláudia $\frac{2}{6}$ das figurinhas.

Sobre esta partilha é correto afirmar que:

a) Lúcia ganhou mais figurinhas.

b) Ana Cláudia ganhou mais figurinhas.

c) As duas ganharam a mesma coisa.

d) Lúcia não ganhou figurinhas

Figura 21 – Questão 8 do teste

Questão 9 - Questão contextualizada que envolve a ideia de fração como parte de um conjunto e equivalência de frações.

Sara fez um bolo e o fatiou em 24 pedaços iguais. João comeu 3 pedaços, Pedro comeu 4, Marta comeu 5 e Jorge não comeu nenhum pedaço. Que parte do bolo eles consumiram?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{24}$

Figura 22 – Questão 9 do teste

Questão 10 - Questão que aborda a ideia de fração como quociente de dois inteiros. Outra interpretação incomum para os alunos segundo as pesquisas.

Quatro meninos irão repartir igualmente 3 pizzas para o lanche. Que fração de pizza cada menino vai comer?

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{24}$ d) $\frac{4}{24}$

Figura 23 – Questão 10 do teste

3.5 O cronograma de sala de aula

O planejamento inicial apontava a necessidade de 14 a 18 aulas. Apesar das aulas começarem com uma semana de atraso, o cronograma foi pouco modificado, de modo que a pesquisa contou com 16 aulas de 1h e 40min cada. Com o apoio da direção da escola e dos colegas professores que algumas vezes cederam alguns minutos das suas aulas, as duas turmas seguiram rigorosamente o mesmo cronograma.

O quadro 1 mostra o cronograma seguido nas aulas-pesquisa:

Quadro 1 - Cronograma de aulas aplicadas

	Tema	Características	Data
Aula 1	Pré-teste	Aplicação de um teste com 10 questões de múltipla escolha, individual e sem consulta.	27/03
Aula 2	Conceitos iniciais e formas de representação: parte de um todo e parte de um conjunto.	Aula expositiva de revisão de conteúdo + 1ª lista de exercícios individuais do tipo 1	30/03
Aula 3	Fração na reta numérica e números mistos	Aula expositiva de revisão de conteúdo + 2ª lista de exercícios individuais do tipo 1	03/04
Aula 4	Fração na reta numérica e fração como quociente entre dois números	Aula expositiva de revisão de conteúdo + 3ª lista de exercícios individuais do tipo 1	10/04
Aula 5	**Análise de soluções das aulas 2 e 3**	**Análise e resolução em grupo da 1ª lista de exercícios do tipo 2**	13/04
Aula 6	Revisão dos conteúdos estudados nas aulas 2, 3 e 4	Aula expositiva de revisão de conteúdo	17/04
Aula 7	**Análise de soluções das aulas 3 e 4**	**Análise e resolução em grupo da 2ª lista de exercícios do tipo 2**	20/04
Aula 8	Equivalência de frações	Aula expositiva de revisão de conteúdo	27/04
Aula 9	Equivalência e Comparação de frações	Aula expositiva de revisão de conteúdo + 4ª lista de exercícios individuais do tipo 1	04/05
Aula 10	Equivalência e Comparação de frações	Aula expositiva de revisão de conteúdo + 5ª lista de exercícios individuais do tipo 1	08/05
Aula 11	Adição e subtração	Aula expositiva de revisão de conteúdo	11/05
Aula 12	Adição e subtração	Aula expositiva de revisão de conteúdo + 6ª lista de exercícios individuais do tipo 1	15/05
Aula 13	**Análise de soluções das aulas 9 e 10**	**Análise e resolução em grupo da 3ª lista de exercícios do tipo 2**	18/05
Aula 14	Revisão de todos os conteúdos estudados	Aula expositiva de revisão de conteúdo	22/05
Aula 15	**Análise de soluções da aula 12**	**Análise e resolução em grupo da 4ª lista de exercícios do tipo 2**	25/05
Aula 16	Pós-teste	Aplicação de um teste com 10 questões de múltipla escolha, individual e sem consulta.	29/05

IV - AS AULAS DE ANÁLISE DE SOLUÇÕES

Este capítulo é dividido em duas partes: na primeira serão abordadas a construção e a classificação das questões de análise de soluções (tipo 2) e na segunda parte serão analisados alguns resultados obtidos nessas questões.

4.1 A construção das questões de análise de soluções – primeiros resultados

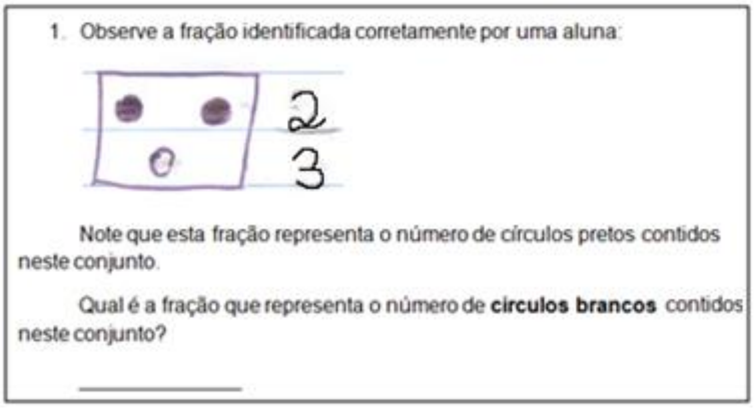
Como relatado anteriormente, as questões do tipo 2 foram construídas a partir das soluções encontradas nas questões do tipo 1. Seus objetivos eram aprimorar e reconstruir os significados, levando os alunos a repensar os erros cometidos, utilizando a análise de soluções diversas produzidas por eles mesmos. No decorrer das 4 aulas de análise de soluções, foram construídas e aplicadas 22 questões do tipo 2.

Para a melhor organização da análise desta pesquisa, as questões do tipo 2 foram classificadas pelo próprio pesquisador em 6 categorias: Outras interpretações sobre um mesmo problema, Continuação de uma resolução incompleta, Identificação ou análise de uma solução incorreta, Comparação entre duas ou mais soluções, Identificação e correção de uma resolução incorreta e Identificação e correção de um erro com o auxílio de figuras. Essa classificação nos permite ter uma ideia do rico universo de possibilidades para a exploração dos erros dos alunos na resolução de problemas de Matemática.

A seguir, alguns exemplos de questões de cada uma dessas categorias são apresentados:

4.1.1 Outras interpretações sobre um mesmo problema

Esta categoria aborda a exploração de outras possibilidades de interpretação sobre um mesmo problema. A figura 24 reproduz uma questão com essas características.



1. Observe a fração identificada corretamente por uma aluna:

$\frac{2}{3}$

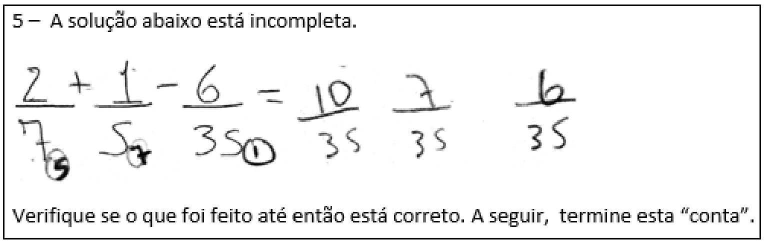
Note que esta fração representa o número de círculos pretos contidos neste conjunto.

Qual é a fração que representa o número de **círculos brancos** contidos neste conjunto?

Figura 24 – Exemplo de questão referente a outras interpretações de um mesmo problema

4.1.2 Continuação de uma resolução incompleta

Nas questões desta categoria, o aluno deve continuar a resolução de um item incompleto, sem que haja a necessidade de realizar nenhuma correção. A figura 25 apresenta um exemplo de questão com essa classificação.



5 – A solução abaixo está incompleta.

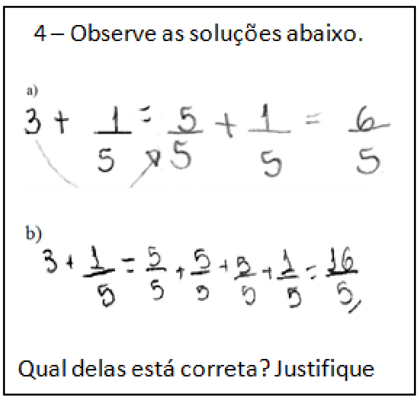
$\frac{2}{7_{5}}+\frac{1}{5_{7}}-\frac{6}{35_{1}}=\frac{10}{35}\quad\frac{7}{35}\quad\frac{6}{35}$

Verifique se o que foi feito até então está correto. A seguir, termine esta “conta”.

Figura 25 – Exemplo de questão referente à continuação de uma resolução incompleta

4.1.3 Comparação entre duas ou mais soluções

Esta categoria se caracteriza pela comparação entre duas ou mais soluções de uma mesma questão. A questão ilustrada na figura 26 possui estas características.



4 – Observe as soluções abaixo.

a) $3+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$

b) $3+\frac{1}{5}=\frac{5}{5}+\frac{5}{5}+\frac{5}{5}+\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$

Qual delas está correta? Justifique

Figura 26 - Exemplo de questão referente à comparação entre duas ou mais soluções

Nesta classificação também não há necessidade de que o aluno venha a refazer a questão corretamente, e sim, comparar e analisar.

4.1.4 Identificação e análise de uma solução incorreta

Uma questão deste tipo é composta de duas etapas, primeiramente o aluno deve identificar um ou mais erros e, em seguida, tecer uma análise desse(s) erro(s). A questão ilustrada na figura 27 contempla um exemplo desse caso, no qual os alunos deveriam identificar a não manutenção da unidade como o motivo da interpretação equivocada.

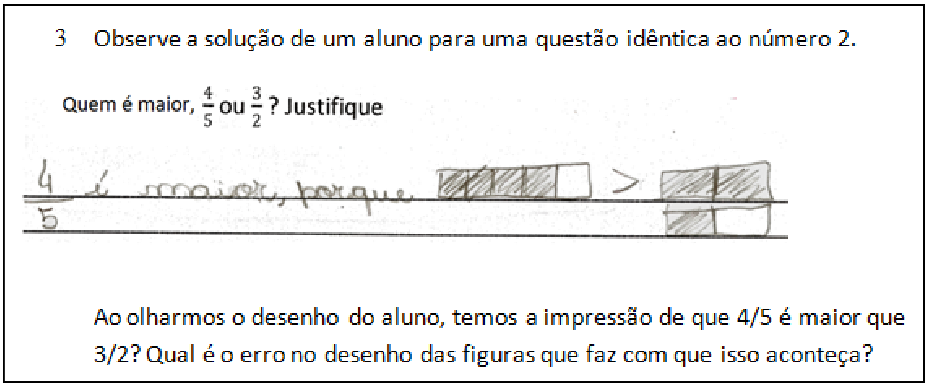


Figura 27 – Exemplo de questão referente à identificação e análise de uma solução incorreta

4.1.5 Identificação e correção de uma solução incorreta

Fazem parte dessa categoria questões onde os alunos devem identificar um ou mais erros e, em seguida, refazer a questão corrigindo-os. A figura 28 contém parte de uma questão que retrata um exemplo dessa situação. Na presente questão, os alunos deveriam identificar quais das soluções apresentadas envolvendo o posicionamento de frações na reta numérica estavam incorretas. Em seguida, eles deveriam reposicionar as frações alocadas incorretamente.

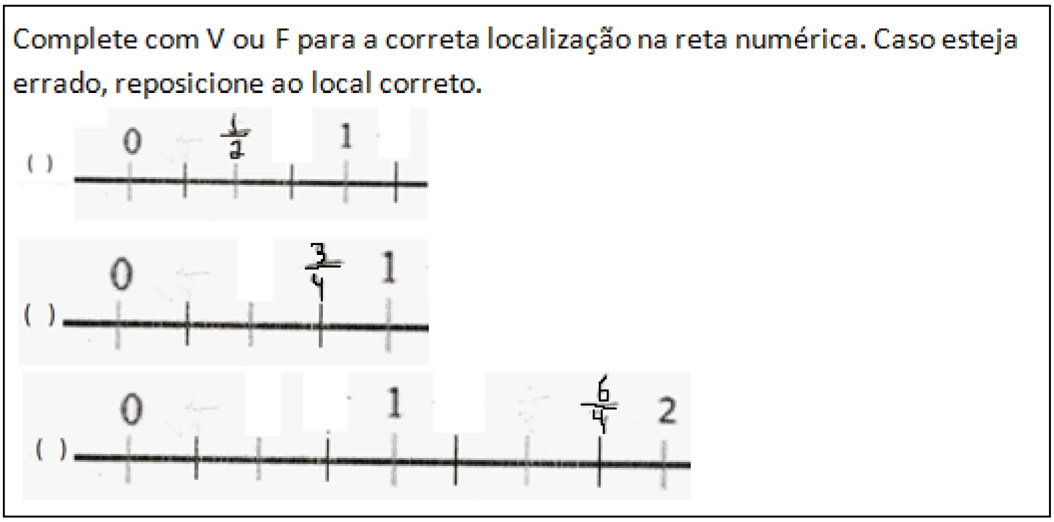
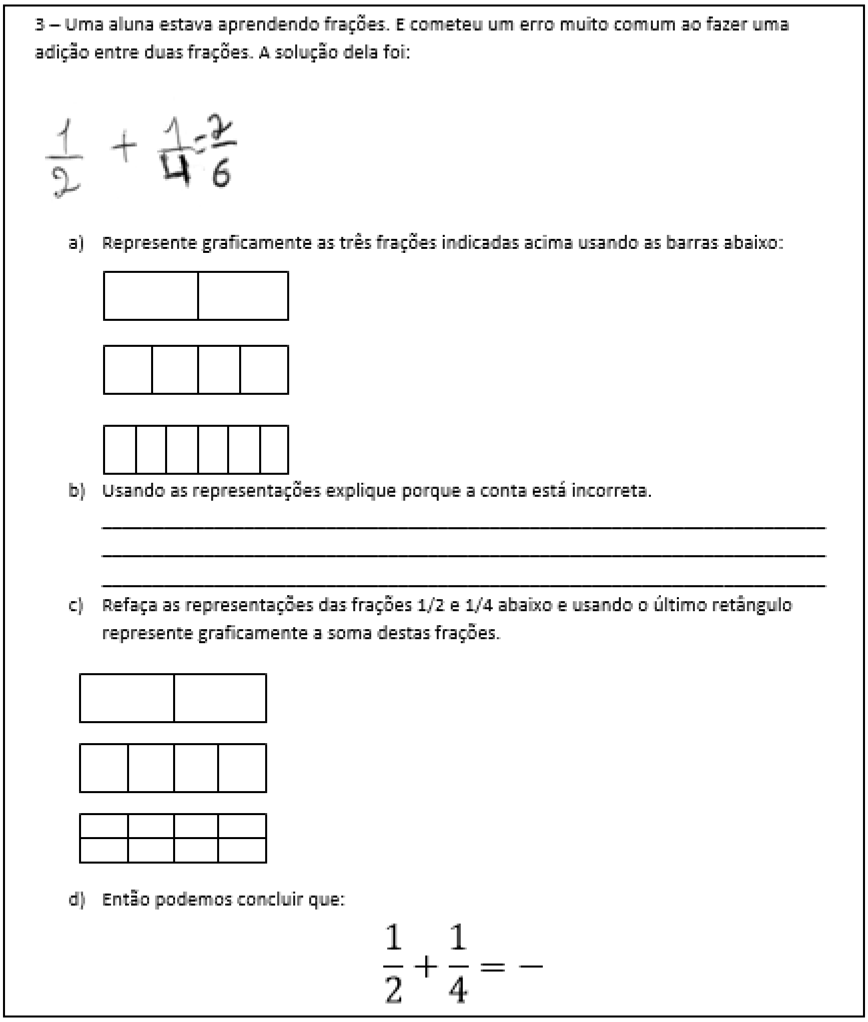


Figura 28 – Exemplo de questão referente à identificação e correção de uma solução incorreta

4.1.6 Identificação e correção de um erro com o auxílio de figuras

Esta categoria distingue-se da anterior pela identificação do erro e a resolução dos itens propostos mediante ao auxílio de barras, círculos e outras figuras criadas ou fornecidas pelo pesquisador. A figura 29 ilustra um exemplo desse caso, no qual os alunos deveriam representar graficamente as frações envolvidas e, em seguida, identificar a existência de uma incoerência entre o resultado obtido aritmeticamente e o resultado gráfico. Posteriormente, deveriam obter a fração correta.



3 – Uma aluna estava aprendendo frações. E cometeu um erro muito comum ao fazer uma adição entre duas frações. A solução dela foi:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$$

a) Represente graficamente as três frações indicadas acima usando as barras abaixo:

b) Usando as representações explique porque a conta está incorreta.

c) Refaça as representações das frações 1/2 e 1/4 abaixo e usando o último retângulo represente graficamente a soma destas frações.

d) Então podemos concluir que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -$$

Figura 29 – Questão referente à análise e correção de um erro com o auxílio de representações gráficas

As maiores dificuldades encontradas pelos alunos durante a resolução dos exercícios do tipo 2 ocorreram nos enunciados mais complexos e em questões que tratavam de tópicos difíceis para os alunos, como, por exemplo, a reta numérica, não sendo observada uma maior dificuldade em uma das categorias. Porém, em relação à análise de soluções, as últimas duas categorias se destacaram, pois seus resultados forneceram um material mais enriquecedor para esta pesquisa, como pode ser observado a seguir.

4.2 Os resultados das questões de análise de soluções (tipo 2)

Como dito anteriormente, nas aulas de análise de soluções, os alunos realizavam atividades em duplas, trios ou grupos, nas quais resolviam as questões do tipo 2, que exploravam os erros cometidos por eles e pelos seus colegas. As 22 questões do tipo 2 aplicadas nessas aulas produziram mais de 250 soluções. Essas soluções foram analisadas e, a partir dessa análise, foram selecionadas as que possuíam características relevantes para uma discussão e que pudessem fornecer uma amostra representativa dos resultados desta pesquisa.

4.2.1 Segunda questão da primeira aula de análise de soluções

Esta questão pode ser classificada como **comparação entre duas ou mais soluções**. Ela é composta de quatro representações gráficas da fração 8/5 produzidas pelos alunos. Nessa questão eles deveriam apenas identificar quais das soluções estavam corretas.

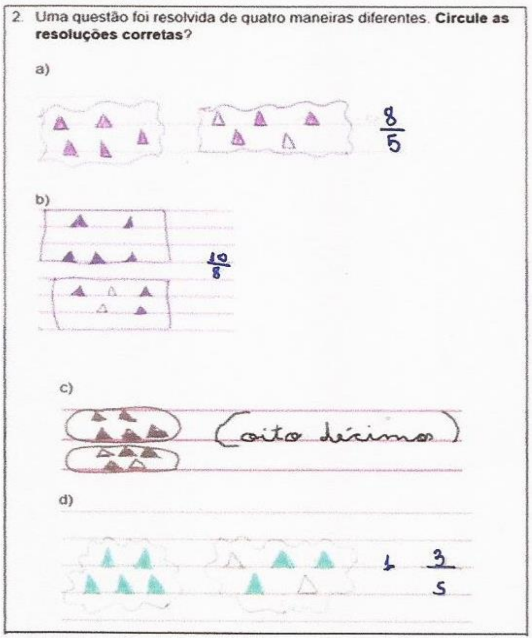


Figura 30 – Enunciado da 2ª questão da 1ª aula de análise de soluções

Os resultados foram muito bons, poucos alunos cometeram erros nessa questão. A figura 31 apresenta um exemplo da resolução desenvolvida pelos grupos de alunos.

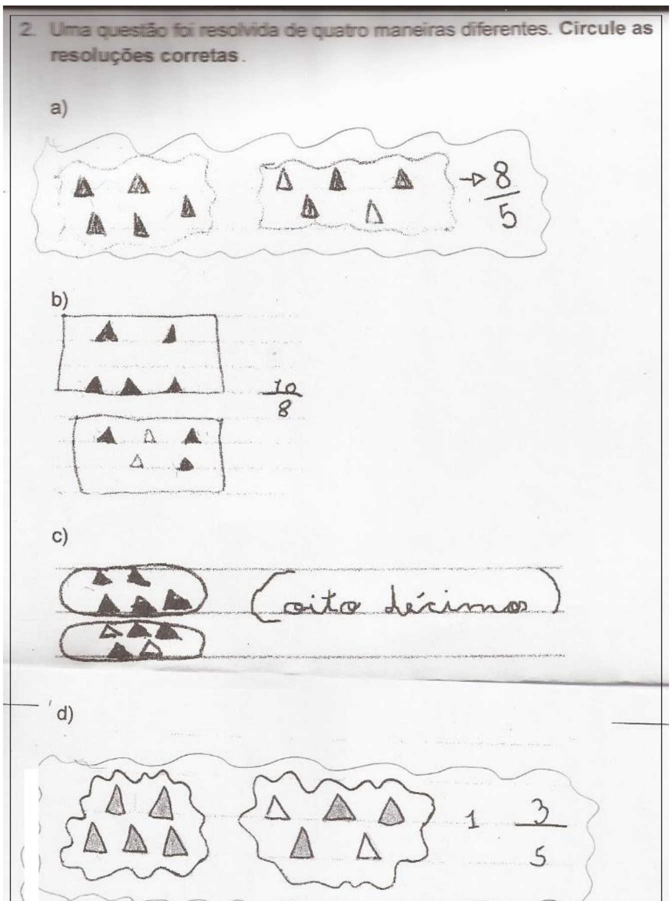


Figura 31 – Exemplo de solução da 2ª questão da 1ª aula de análise de soluções

4.2.2 Quarta questão da primeira aula de análise de soluções

Esta questão é classificada como **identificação e correção de uma solução incorreta**. Aborda a manutenção da unidade e a transformação de frações impróprias em números mistos. No primeiro item, não houve a identificação correta da unidade, originando a resposta 5/6. No segundo item, houve a correta identificação da unidade; no entanto, ocorreu uma transformação incorreta da fração 5/3 no número misto $1\,{}^{1}\!/_{3}$.

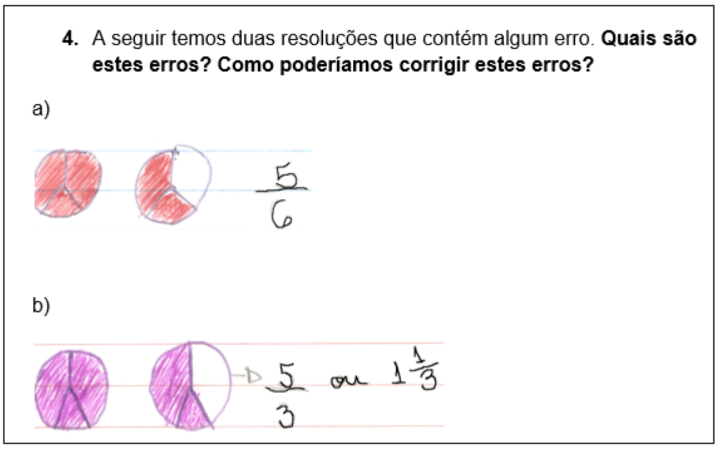


Figura 32 – Enunciado da 4ª questão da 1ª aula de análise de soluções

Note que os círculos não estão divididos em partes iguais. Isso ocorre porque essa questão foi produzida a partir de uma questão do tipo 1 copiada no caderno pelos alunos. Embora nenhum grupo tenha indicado, este pode ser considerado um erro da questão proposta, pois a reprodução da figura original pode ter transmitido aos alunos a falsa ideia de que as partes podem ser diferentes. Uma outra opção seria explorar nessa ou em outra questão o fato de que numa fração as partes devem ser iguais.

Os resultados dessa questão foram variados, alguns grupos identificaram que os erros estavam na manutenção da unidade (letra a) e no número misto (letra b), respondendo corretamente os itens propostos.

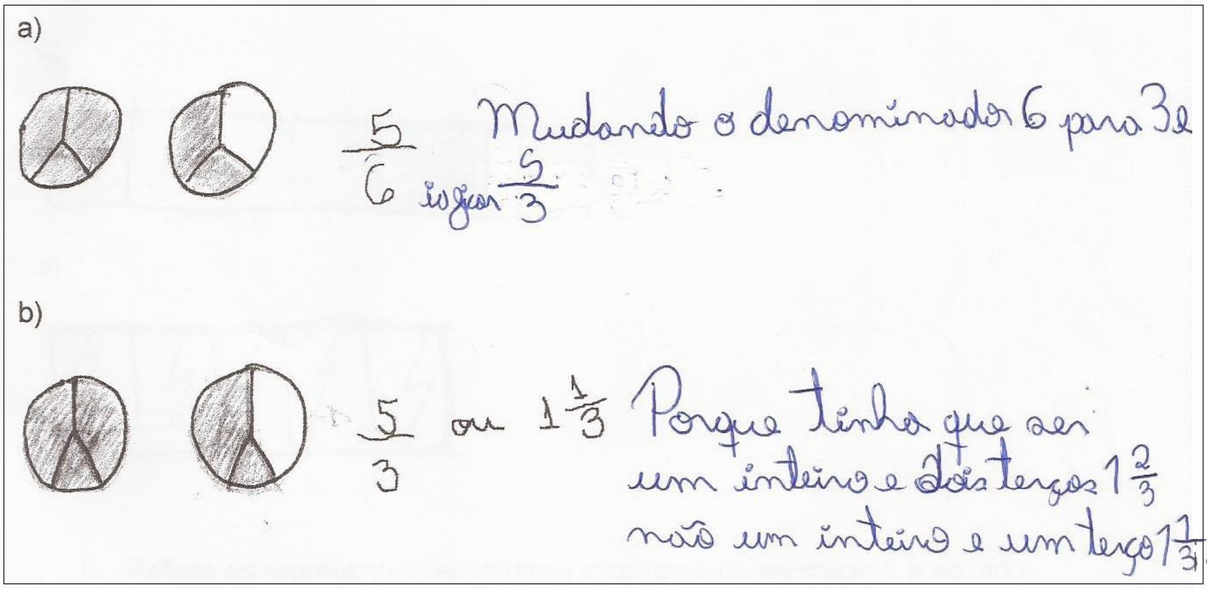


Figura 33 – Primeiro exemplo de solução da 4ª questão da 1ª aula

Na resolução a seguir (figura 34), os alunos identificam e corrigem corretamente os erros de uma maneira mais simples que na resposta anterior. Com isso, se torna impossível concluir se esse grupo percebeu ou não qual foi o erro cometido na transformação em número misto. Talvez a substituição do enunciado de “Como poderíamos corrigir estes erros?” por “Substitua todas as representações incorretas por corretas” tornaria essa questão mais eficiente.

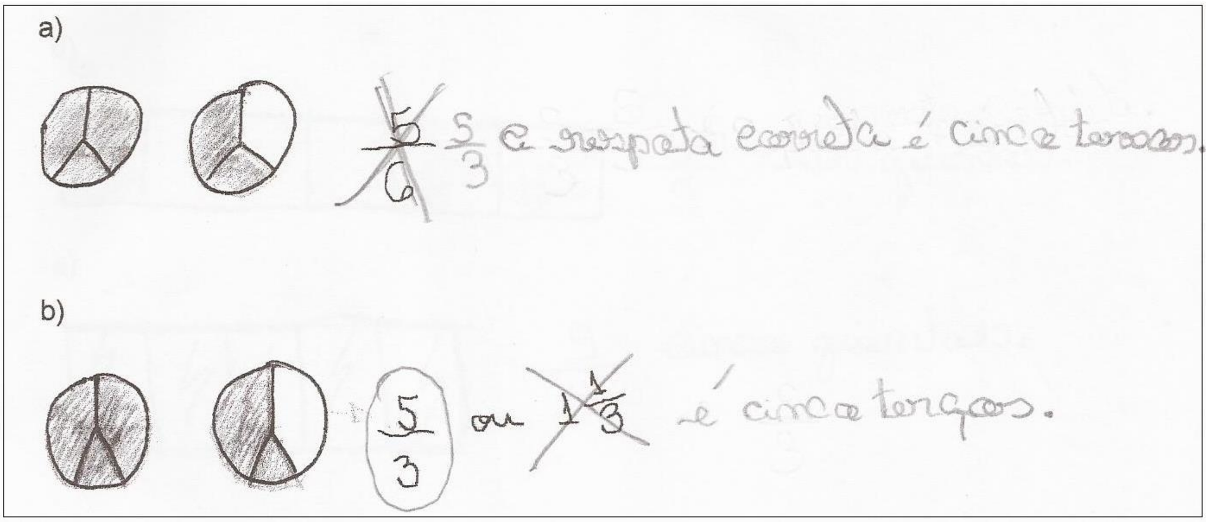


Figura 34 – Segundo exemplo de solução da 2ª solução da 4ª questão da 1ª aula

Já a figura 35 ilustra uma solução em que os alunos compreendem a ideia de número misto. Mas, pelos comentários feitos por eles, não fica claro se o grupo percebeu que ao se considerar uma pizza como a unidade, a resposta 5/3 está correta e a resposta 5/6 está errada.

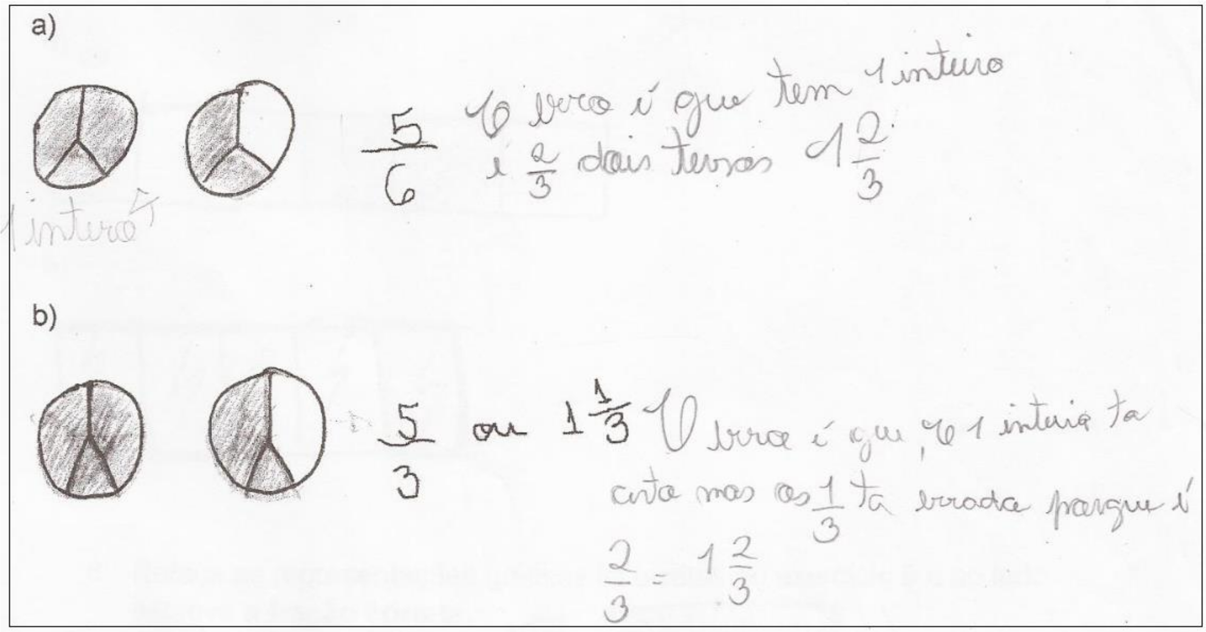


Figura 35 - Terceiro exemplo de solução da 4ª questão da 1ª aula

Cabe ressaltar que dependendo da unidade estabelecida, a resposta 5/6 não estaria errada. Sendo assim, o primeiro item dessa questão poderia ser considerado correto, se o enunciado que originou a questão não deixasse claro que a unidade correspondia a “uma pizza”.

4.2.3 Quinta questão da segunda aula de análise de soluções

Nesta questão, classificada como **identificação e correção de uma solução incorreta** e ilustrada na figura 36, os alunos deveriam identificar que ambas as soluções apresentadas estavam incorretas e, em seguida, construir a reta posicionando corretamente a fração 5/2. Trata-se de uma questão sobre frações na reta numérica, tópico que apresenta um alto teor de dificuldade, como já havia sido indicado pela revisão de literatura e pelos estudos preliminares para esta pesquisa.

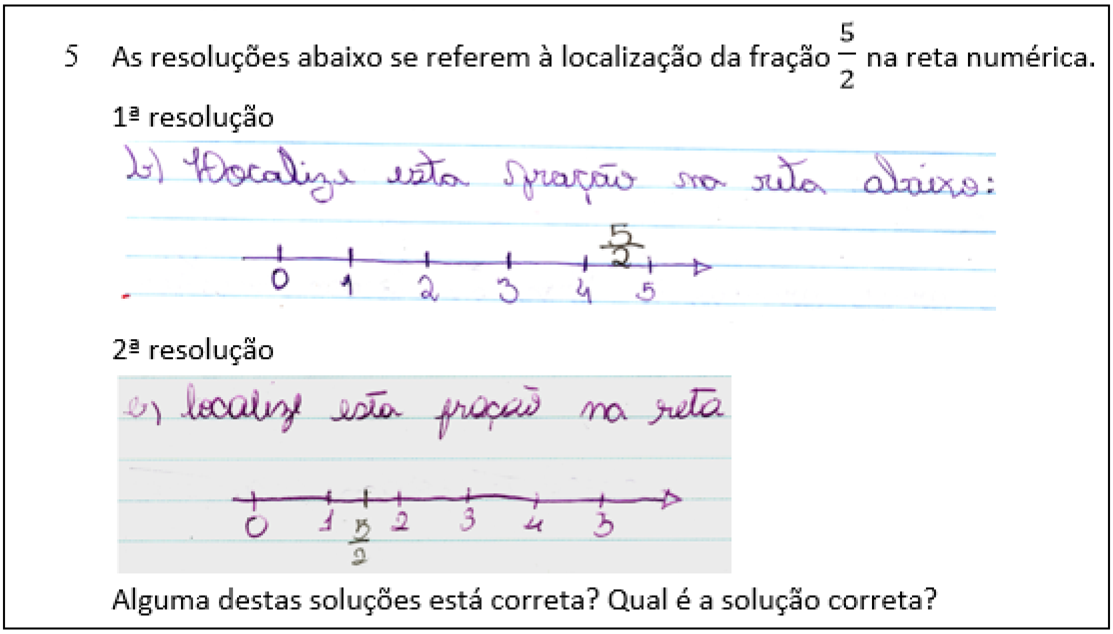


Figura 36 – Enunciado da 5ª questão da 2ª aula de análise de soluções

Algumas soluções obtidas demonstram que os alunos compreendem a relação entre 5/2 e 2 1/2, como podemos observar na figura 37.

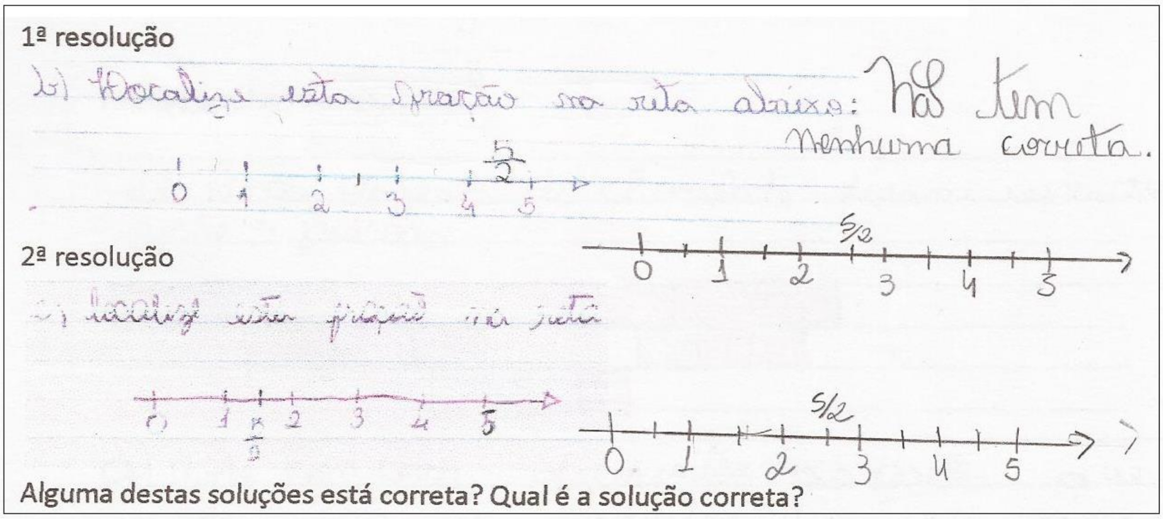


Figura 37 – Primeiro exemplo de solução da 5ª questão da 2ª aula de análise de soluções.

Esta é uma questão que mostra como é necessário um grande cuidado por parte do professor na sua elaboração. Em uma análise posterior à aplicação, o pesquisador percebeu que o comando da questão poderia induzir o aluno a acreditar que uma das soluções apresentadas estava correta. Talvez a substituição de “Qual é a solução correta?” por “Caso nenhuma delas seja correta, qual seria a solução correta?” seria apropriada.

A dificuldade de compreender o enunciado pode ser uma das possíveis interpretações para os erros cometidos na solução de alguns grupos, como o exemplificado na figura 38.

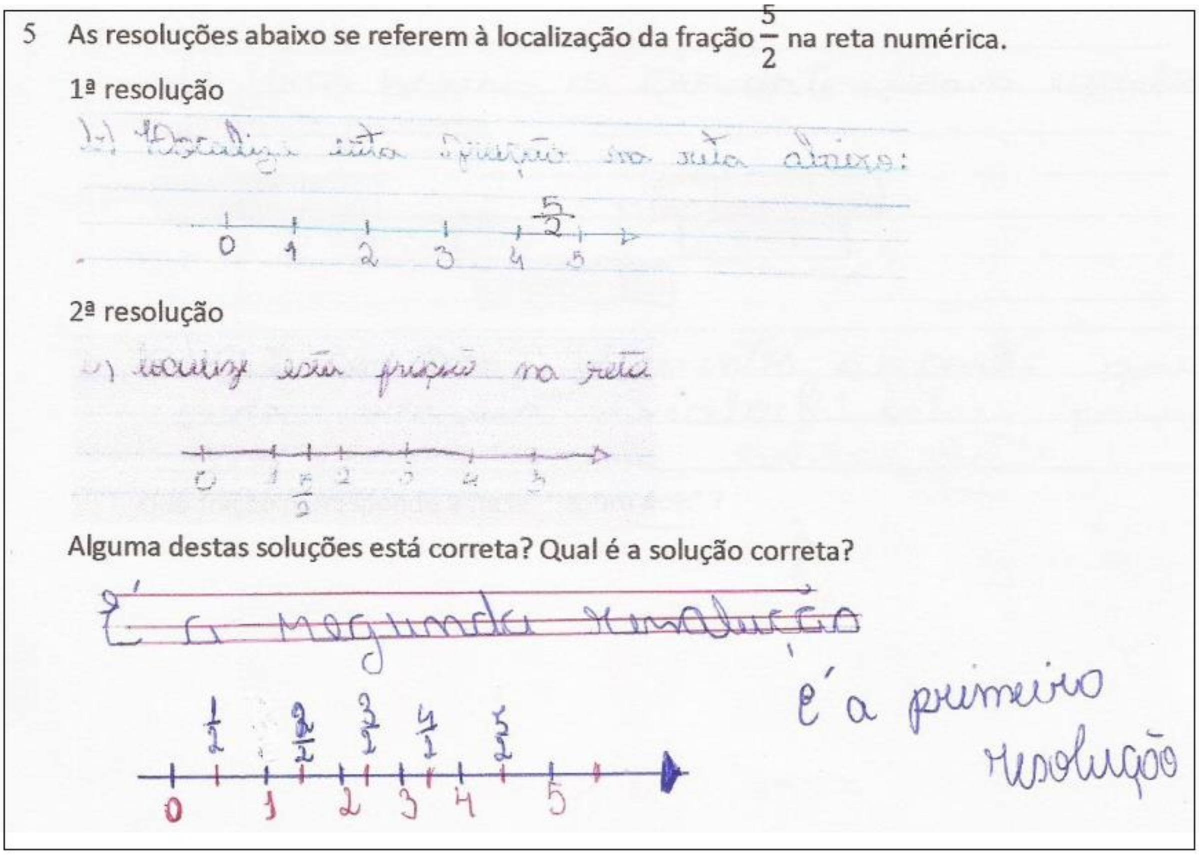
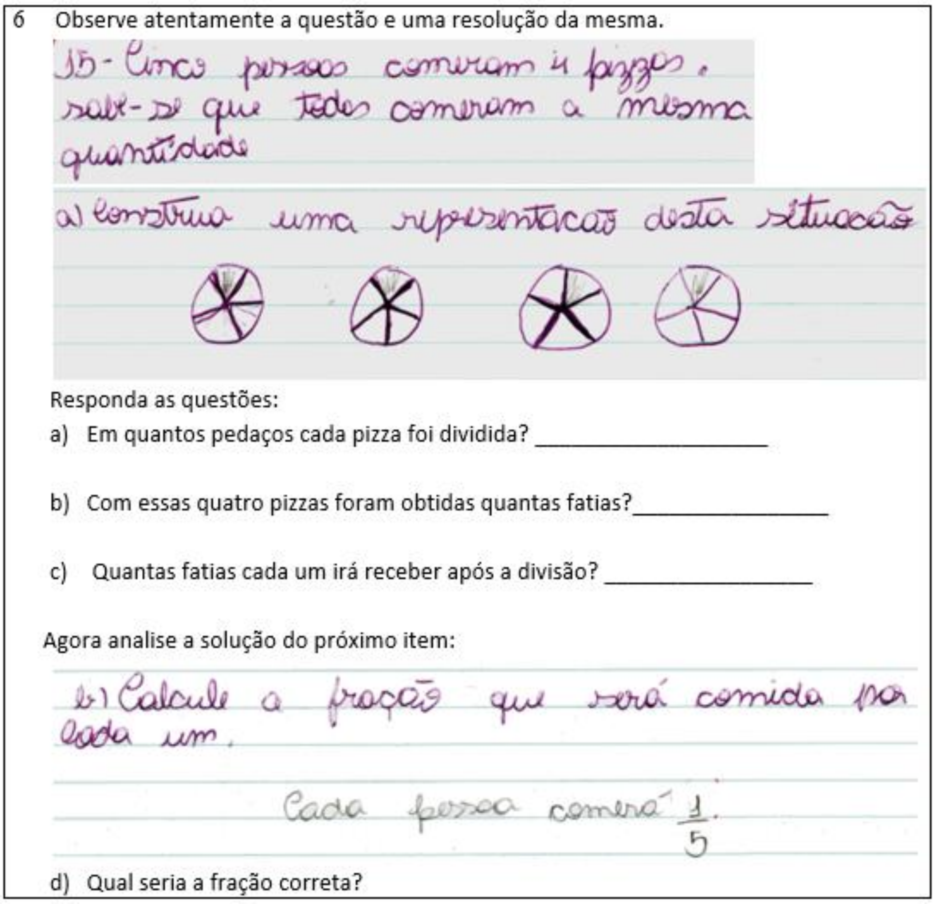


Figura 38 - Segundo exemplo de solução da 5ª questão da 2ª aula de análise de soluções.

Observa-se nesse exemplo a indecisão do grupo em escolher uma das duas soluções apresentadas e a procura por uma explicação lógica, embora incorreta, para escolher uma das duas soluções apresentadas. Para isso, eles interpretaram a fração ½ como sendo o ponto médio entre 0 e 1; a fração 2/2 como sendo o ponto médio entre 1 e 2; 3/2 como o ponto situado entre 2 e 3; e assim sucessivamente, encontrando um sentido lógico para o posicionamento da fração 5/2 como ponto médio entre os números inteiros 4 e 5.

4.2.4 Sexta questão da segunda aula de análise de soluções

Esta questão enfoca a fração como quociente de divisão de um número inteiro por outro e está ilustrada pela figura 39. Pode ser classificada como **identificação e correção de um erro com o auxílio de figuras,** pois se utiliza das representações gráficas construídas, anteriormente, pelos próprios alunos para o desenvolvimento da questão.


6 Observe atentamente a questão e uma resolução da mesma.

15- Cinco pessoas comeram 4 pizzas. sabe-se que todos comeram a mesma quantidade

a) construa uma representação desta situação

Responda as questões:

a) Em quantos pedaços cada pizza foi dividida? ____________________

b) Com essas quatro pizzas foram obtidas quantas fatias?________________

c) Quantas fatias cada um irá receber após a divisão? _________________

Agora analise a solução do próximo item:

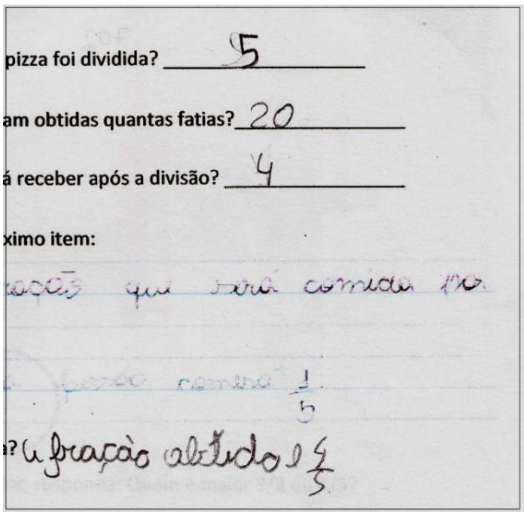
b) Calcule a fração que será comida por cada um.

Cada pessoa comerá $\frac{1}{5}$.

d) Qual seria a fração correta?

Figura 39 – Enunciado da 6ª questão da 2ª aula de análise de soluções.

Essa questão também pode ser considerada como bem compreendida pelos alunos, provavelmente porque os comandos sequenciais estavam claros e objetivos. Trabalhando em grupos, a maioria dos alunos respondeu corretamente a essa questão, como ilustra a figura 40. O bom desempenho nessa questão do tipo 2 mostra um claro avanço na compreensão do significado de fração como a divisão de um número natural por outro.


pizza foi dividida? 5

am obtidas quantas fatias? 20

á receber após a divisão? 4

ximo item:

...ração que será comida no

...pessoa comerá $\frac{1}{5}$

?a fração obtida é $\frac{4}{5}$

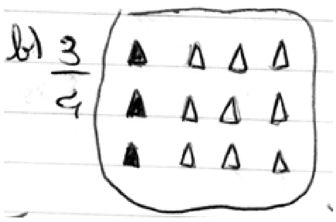
Figura 40 – Exemplo de solução da 6ª questão da 2ª aula de análise de soluções.

4.2.5 Segunda questão da terceira aula de análise de soluções

Esta questão foi construída a partir de um erro em obter 3/4 de um conjunto contendo 12 triângulos, associando diretamente a quantidade desejada ao numerador da fração, e tinha por objetivo levar os alunos a perceber que a fração pintada incorretamente não poderia ser 3/4.

A questão de tipo 2 construída a partir desse erro pode ser classificada como **identificação e correção de um erro com o auxílio de figuras** e está ilustrada na figura 41.

2 - Observe a solução de uma aluno que deveria pintar 3/4 dos triângulos contidos em um conjunto:



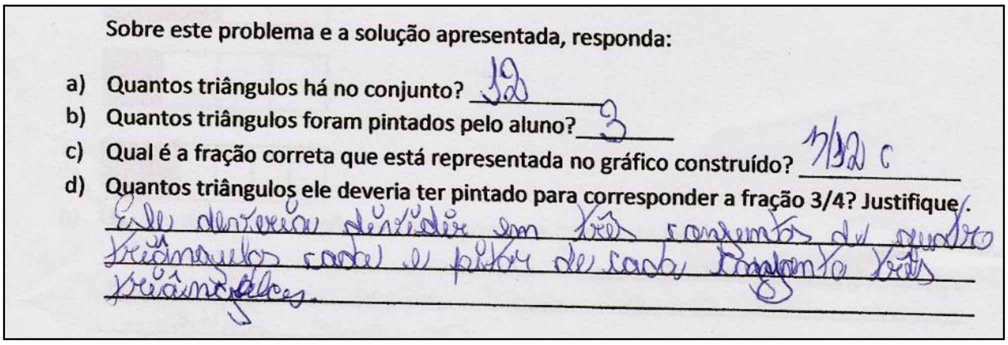
Sobre este problema e a solução apresentada, responda:

a) Quantos triângulos há no conjunto?____________
b) Quantos triângulos foram pintados pelo aluno?________
c) Qual é a fração correta que está representada no gráfico construído?______________
d) Quantos triângulos ele deveria ter pintado para corresponder a fração 3/4? Justifique.

Figura 41 – Enunciado da 2ª questão da 3ª aula de análise de soluções.

Entre as soluções consideradas satisfatórias, se destacaram os diferentes modos utilizados pelos alunos para justificar o item (d).

No trabalho ilustrado na figura 42, os alunos propõem a divisão em grupos de quatro, para que sejam obtidos 3/4 de cada grupo. Esta era uma solução esperada, pois foi trabalhada na aula de conteúdos que precedeu a aula de análise de soluções.


Sobre este problema e a solução apresentada, responda:

a) Quantos triângulos há no conjunto? 12
b) Quantos triângulos foram pintados pelo aluno? 3
c) Qual é a fração correta que está representada no gráfico construído? 3/12 c
d) Quantos triângulos ele deveria ter pintado para corresponder a fração 3/4? Justifique.
Ele deveria dividir em três conjuntos de quatro triângulos cada e pintar de cada conjunto três triângulos.

Figura 42 – Primeiro exemplo de solução da 2ª questão da 3ª aula de análise de soluções.

Outro grupo, cujo trabalho está ilustrado na figura 43, propôs uma justificativa usando o conceito de equivalência. Tal solução foi inesperada, pois em nenhum momento foi utilizada justificativa semelhante em sala de aula. Esse grupo associou fração de um conjunto ao conceito de equivalência de frações, o que parece indicar um ganho conceitual relevante.

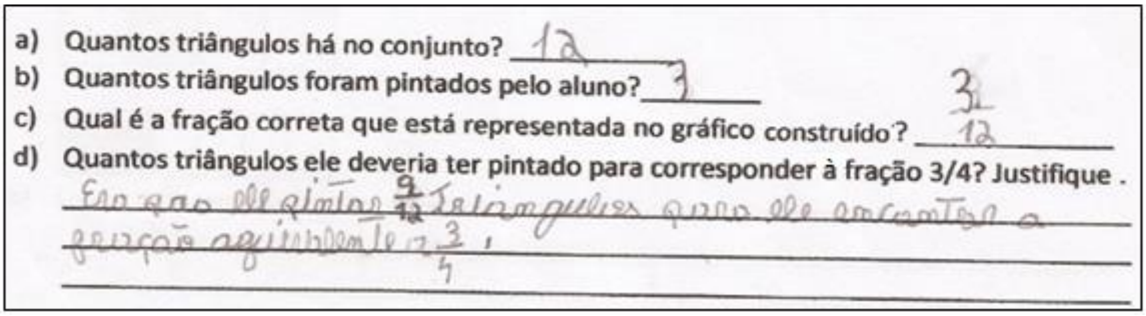
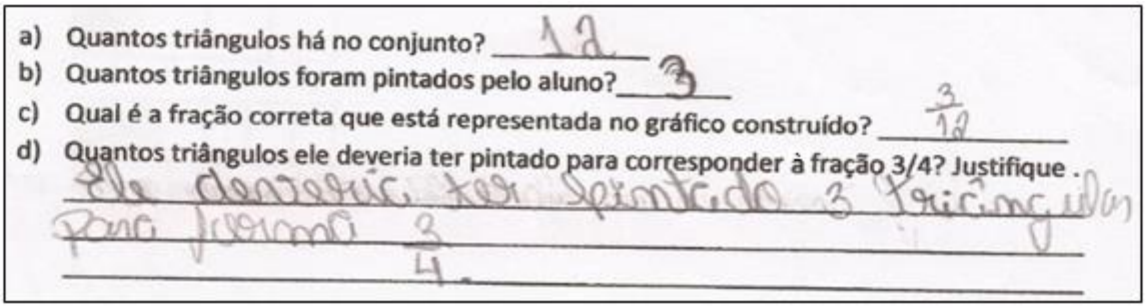

a) Quantos triângulos há no conjunto? 12
b) Quantos triângulos foram pintados pelo aluno? 3
c) Qual é a fração correta que está representada no gráfico construído? 3/12
d) Quantos triângulos ele deveria ter pintado para corresponder à fração 3/4? Justifique.
Era que ele pintasse 9/12 triângulos para ele encontrar a fração equivalente a 3/4.

Figura 43 – Segundo exemplo de solução da 2ª questão da 3ª aula de análise de soluções.

A ilustração da figura 44 mostra o trabalho de um grupo que apresentou uma solução que, embora traga soluções corretas para todas as perguntas com respostas numéricas, demonstra grande dificuldade em responder e apresentar uma justificativa coerente no último item da questão.



a) Quantos triângulos há no conjunto? 12

b) Quantos triângulos foram pintados pelo aluno? 3

c) Qual é a fração correta que está representada no gráfico construído? $\frac{3}{12}$

d) Quantos triângulos ele deveria ter pintado para corresponder à fração 3/4? Justifique .

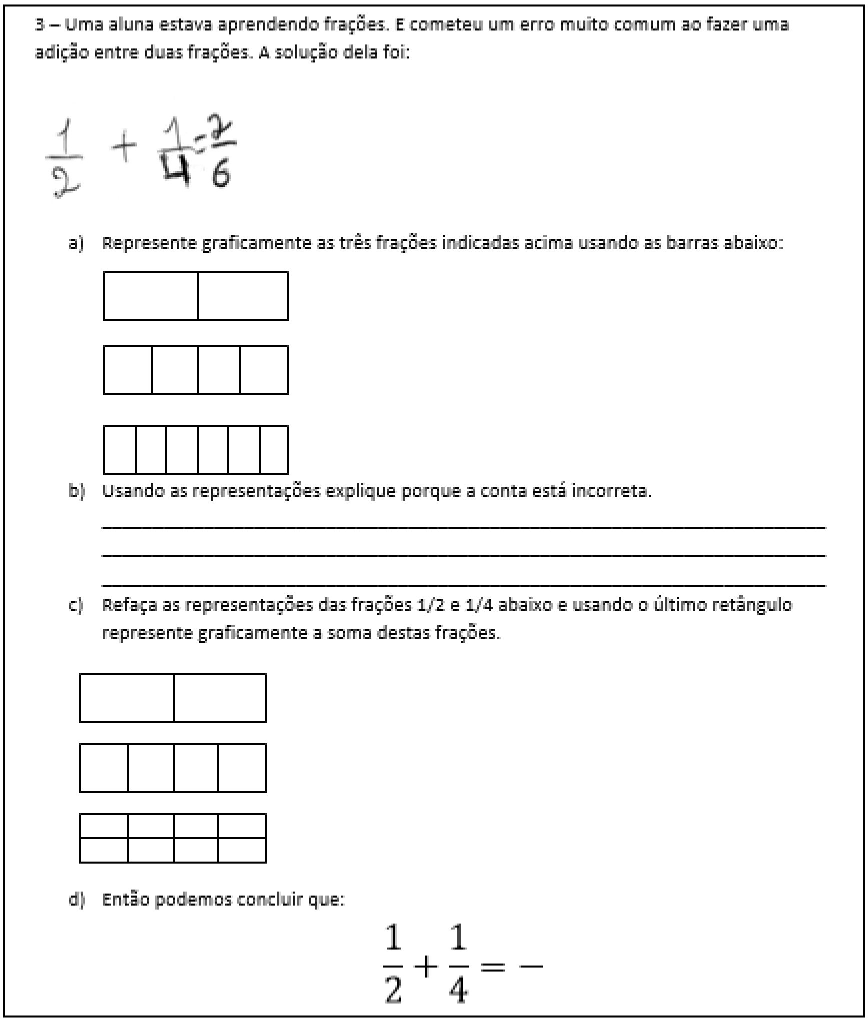
Ela deveria ter pintado 3 triângulos para formar $\frac{3}{4}$.

Figura 44 – Terceiro exemplo de solução da 2ª questão da 3ª aula de análise de soluções.

Além da resposta apresentada no item (d) ser incoerente com todo o trabalho previamente realizado por eles, a justificativa apresentada também está incorreta. Repare que eles repetem o erro cometido na solução analisada e não parecem conectar a resposta desse item com o trabalho anterior. Não percebem que essa resposta implica em que a fração do conjunto pode ser, ao mesmo tempo, 3/4 e 3/12, já que a última foi a resposta por eles oferecida para o item (c).

4.2.6 Quarta questão da terceira aula de análise de soluções

A figura 45 ilustra uma questão que já foi utilizada como exemplo na seção 4.1 de uma questão de **identificação e correção de um erro com o auxílio de figuras.** Ela se caracteriza por solicitar que os alunos utilizem representações gráficas para auxiliá-los na interpretação do erro e como apoio para encontrar a resolução correta.



3 – Uma aluna estava aprendendo frações. E cometeu um erro muito comum ao fazer uma adição entre duas frações. A solução dela foi:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$$

a) Represente graficamente as três frações indicadas acima usando as barras abaixo:

b) Usando as representações explique porque a conta está incorreta.

c) Refaça as representações das frações 1/2 e 1/4 abaixo e usando o último retângulo represente graficamente a soma destas frações.

d) Então podemos concluir que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -$$

Figura 45 – Enunciado da 4ª questão da 3ª aula de análise de soluções

Essa questão também gerou um resultado bem satisfatório. Observe, por exemplo, que na letra (a) da solução ilustrada na figura 46, um grupo representou corretamente as frações envolvidas na operação.

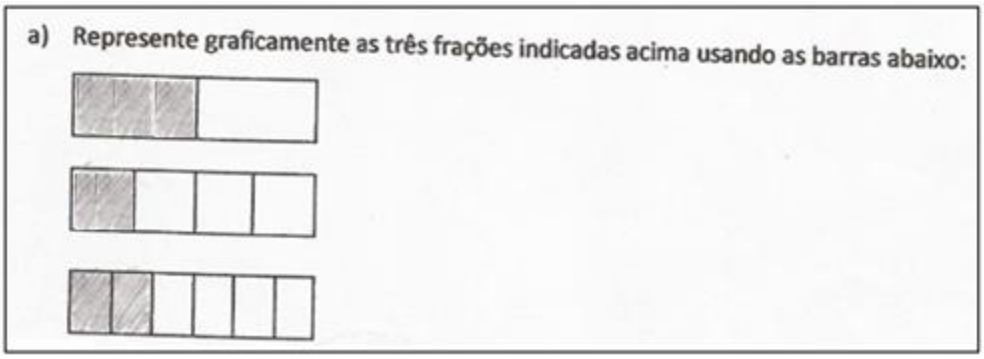


Figura 46 – Exemplo de Solução do item (a) da 4ª questão da 3ª aula de análise de soluções.

A figura 47 mostra que os alunos percebem que há uma impossibilidade no resultado obtido no item (a), apresentando no item (b) uma explicação correta para o erro cometido. A seguir, o mesmo grupo de alunos refaz corretamente a representação gráfica da solução, como solicitado no item (c).

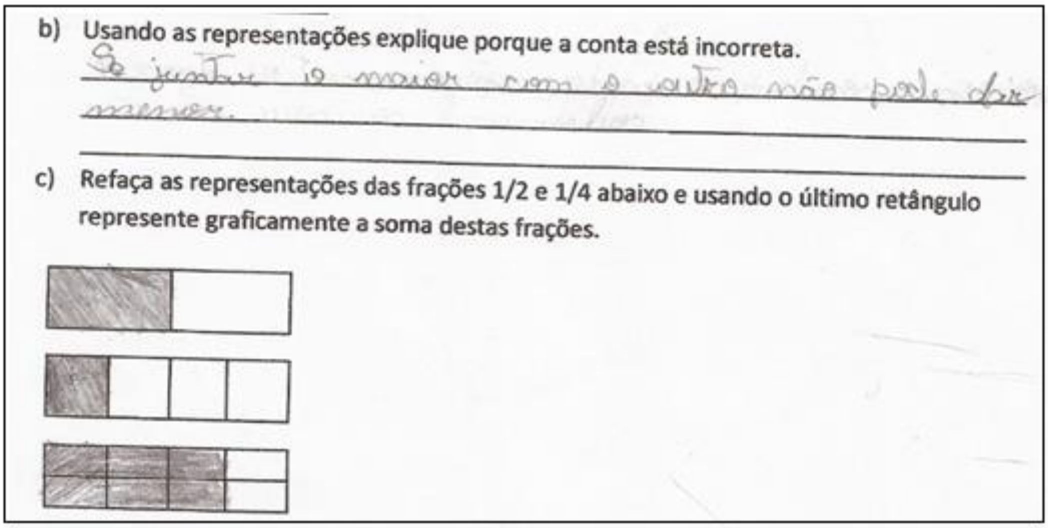


Figura 47 – Exemplo de Solução dos itens (b) e (c) da 4ª questão da 3ª aula de análise de soluções.

Observa-se que no último retângulo há uma linha horizontal desnecessária. Essa linha não foi planejada, e sim, acidental, tratando-se de um erro gráfico cometido pelo pesquisador ao elaborar a questão. Porém, a forma com que os alunos reagiriam ao erro gráfico se tornou mais um fator a ser analisado. Como os estudantes iriam lidar com essa linha ‘a mais’ no desenho? Surpreendentemente, essa linha não parece ter sido um fator limitador na questão, como podemos observar nas duas soluções para o item (d) ilustradas na figura 48.

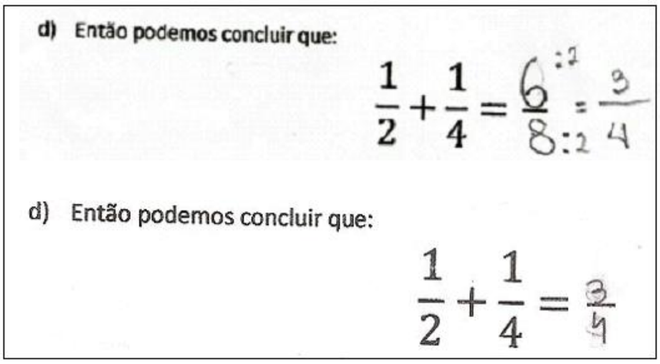
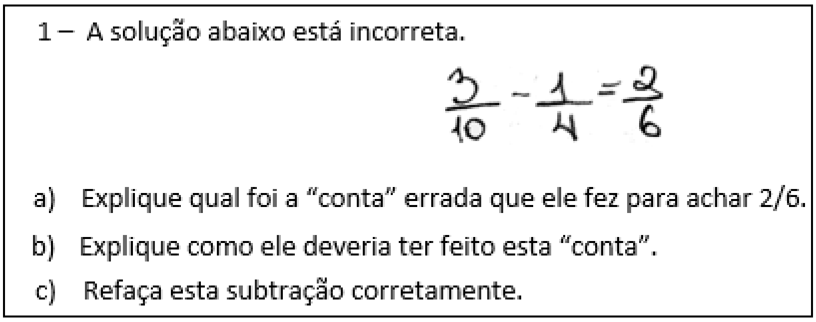


Figura 48 – Dois exemplos de Solução do item (d) da 4ª questão da 3ª aula de análise de soluções.

4.2.7 Primeira questão da quarta aula de análise de soluções

A questão ilustrada na figura 49 pode ser classificada como **identificação e correção de uma solução incorreta.** Ela está subdividida em três itens: os alunos deveriam analisar a solução incorreta identificando um motivo para o erro na letra (a); eles deveriam explicar qual seria o procedimento correto para a resolução do problema na letra (b) e, para completar, os alunos deveriam refazer corretamente a solução no item (c).



1 – A solução abaixo está incorreta.

$$\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$$

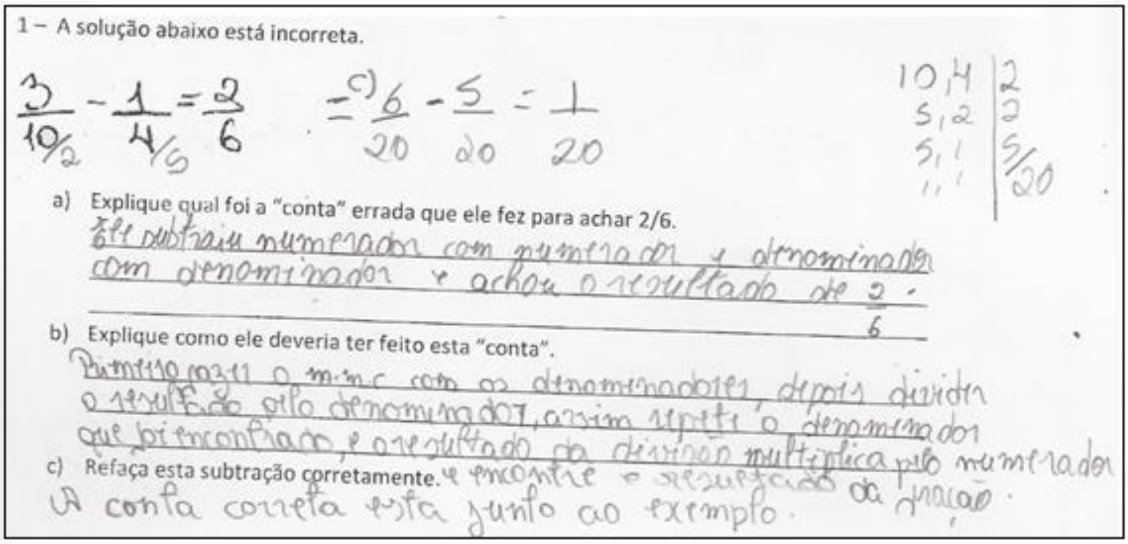
a) Explique qual foi a "conta" errada que ele fez para achar 2/6.

b) Explique como ele deveria ter feito esta "conta".

c) Refaça esta subtração corretamente.

Figura 49 – Enunciado da 1ª questão da 4ª aula de análise de soluções.

Observando a figura 50 podemos verificar que o grupo de alunos que apresentou essa solução entendeu todos os procedimentos para a resolução. Importante observar que esse grupo conseguiu se expressar corretamente, que não é fácil, sobretudo para alunos que não estejam habituados com tais justificativas.



1 – A solução abaixo está incorreta.

$$\frac{3}{10_2} - \frac{1}{4_5} = \frac{2}{6} \quad \stackrel{c)}{=} \frac{6}{20} - \frac{5}{20} = \frac{1}{20}$$

10, 4	2
5, 2	2
5, 1	5
1, 1	20

a) Explique qual foi a "conta" errada que ele fez para achar 2/6.
Ele subtraiu numerador com numerador e denominador com denominador e achou o resultado de $\frac{2}{6}$.

b) Explique como ele deveria ter feito esta "conta".
Primeiro acharia o m.m.c com os denominadores, depois dividiria o resultado pelo denominador, assim repetiria o denominador que foi encontrado, e o resultado da divisão multiplica pelo numerador e encontre o resultado da fração.

c) Refaça esta subtração corretamente.
A conta correta esta junto ao exemplo.

Figura 50 – Primeiro exemplo de solução da 1ª questão da 4ª aula de análise de soluções.

Essa questão também apresentou um grande número de acertos, e de um modo geral, todos os grupos demonstraram compreender que a subtração de frações não pode ser realizada subtraindo numeradores e denominadores. A figura 51 ilustra outra solução representativa desse caso. Analisando as respostas das letras (a) e (b), pode-se notar que o grupo identifica corretamente o erro na operação realizada, porém, não consegue obter corretamente as frações equivalentes, gerando um novo erro, como indica o item (c).

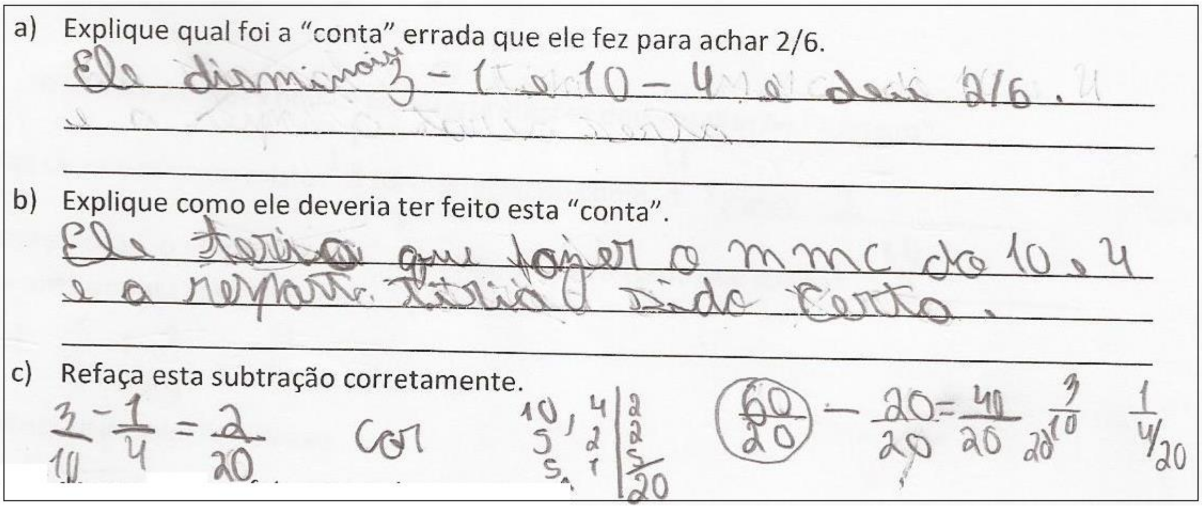
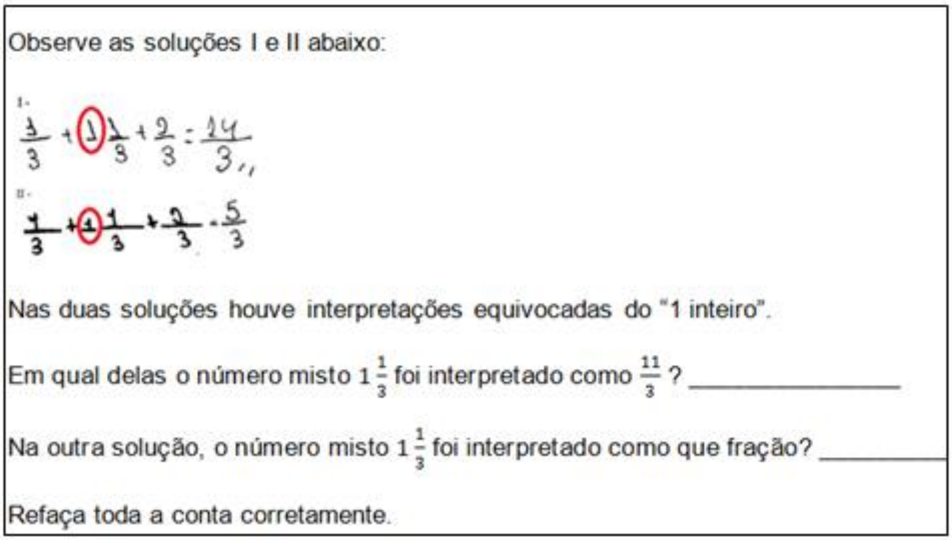


Figura 51 - Segundo exemplo de solução da 1ª questão da 4ª aula de análise de soluções.

Observe que esses estudantes multiplicam 20 (resultado do MMC) pelos numeradores para obter as frações equivalentes, mostrando não compreender uma parte de um procedimento complexo para eles.

4.2.8 Terceira questão da quarta aula de análise de soluções

A ideia desta questão de análise de soluções foi explorar interpretações equivocadas de um número misto em uma adição. A figura 52 apresenta a questão, que pode ser classificada como **identificação e correção de uma solução incorreta**



Observe as soluções I e II abaixo:

I- $\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

II- $\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

Nas duas soluções houve interpretações equivocadas do "1 inteiro".

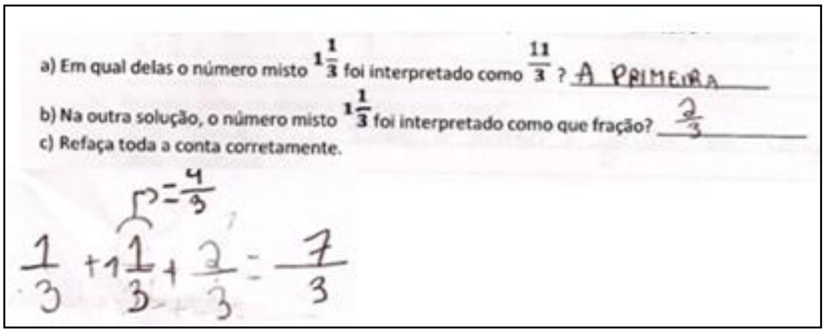
Em qual delas o número misto $1\frac{1}{3}$ foi interpretado como $\frac{11}{3}$? ______________

Na outra solução, o número misto $1\frac{1}{3}$ foi interpretado como que fração? __________

Refaça toda a conta corretamente.

Figura 52 – Enunciado da 3ª questão da 4ª aula de análise de soluções

Alguns grupos apresentaram desempenho satisfatório, resolvendo todos os itens da questão, como mostra o trabalho ilustrado na figura 53.



a) Em qual delas o número misto $1\frac{1}{3}$ foi interpretado como $\frac{11}{3}$? A PRIMEIRA

b) Na outra solução, o número misto $1\frac{1}{3}$ foi interpretado como que fração? $\frac{2}{3}$

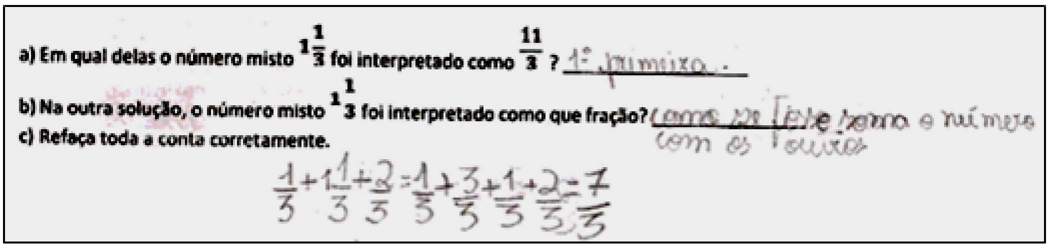
c) Refaça toda a conta corretamente.

$= \frac{4}{3}$

$\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

Figura 53 – Primeira solução da 3ª questão da 4ª aula de análise de soluções

Outros grupos demonstraram dificuldade em se expressar, talvez devido às próprias limitações de linguagem ou por não terem compreendido o comando da questão. Um exemplo dessa dificuldade é ilustrado na figura 54.



a) Em qual delas o número misto $1\frac{1}{3}$ foi interpretado como $\frac{11}{3}$? 1ª primeira.

b) Na outra solução, o número misto $1\frac{1}{3}$ foi interpretado como que fração? como se fosse somo o número com os outros

c) Refaça toda a conta corretamente.

$\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

Figura 54 – Segunda solução da 3ª questão da 4ª aula de análise de soluções

Observe que esse grupo acerta os itens (a) e (c). No entanto, a resposta apresentada para o item b, “*como se fosse soma os números com os outros*”, demonstra uma dificuldade que pode ser de compreender o que foi solicitado ou de transcrever suas ideias para o papel. Ao invés de responder utilizando uma fração (resposta esperada), eles procuram explicar qual foi o erro cometido na solução.

A figura 55 mostra o trabalho de um grupo que escreve uma resposta correta, embora lacônica para o item (a); erra o item (b), provavelmente ao converter o número misto em fração imprópria; e cria uma resposta interessante e bem justificada para o item (c).

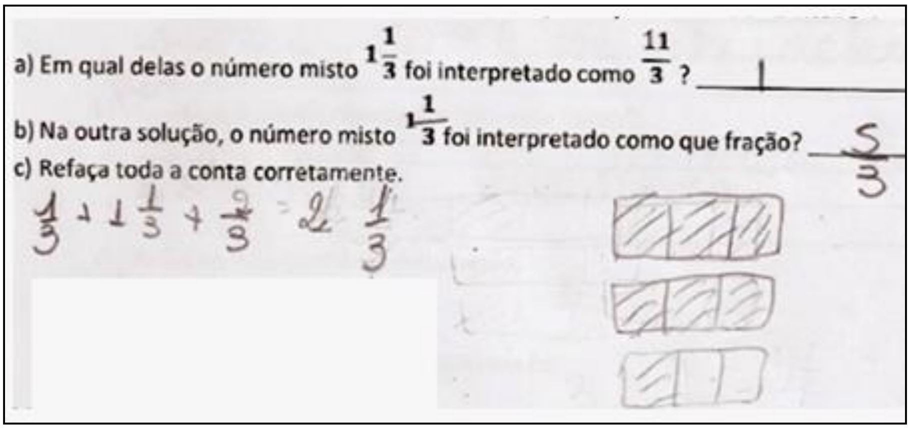


Figura 55 – 1ª solução da 3ª questão da 4ª aula

Nota-se que os integrantes desse grupo ainda necessitam de representações utilizadas em uma fase anterior na construção do conhecimento de frações. Nessa etapa, ainda utilizaram representações mais próximas do concreto, construindo um desenho que permitissem a eles obter a solução do item (c).

É ainda importante observar que a maioria dos grupos, independentemente da dificuldade em responder os itens iniciais, apresentou uma resposta satisfatória para o terceiro item. Na solução descrita na figura 53, o grupo de alunos transforma o número misto $1\frac{1}{3}$ na fração imprópria 4/3, para, em seguida, efetuar a adição. Nesse caso, o grupo está utilizando um tipo de solução que havia sido bastante trabalhado em sala de aula. Já na solução apresentada na figura 54, os alunos substituíram a parte inteira pela fração 3/3. Trata-se de outra abordagem muito trabalhada previamente em sala. Finalmente, o exemplo ilustrado na figura 55, apresenta uma solução na qual o grupo mostra a necessidade de voltar ao concreto e, além disso, os alunos parecem efetuar a adição usando o apoio da representação gráfica. Esse grupo demonstra não estar pronto ainda para abrir mão de etapas anteriores utilizadas na construção do conceito de frações, e que parecem já ter sido superadas nas soluções apresentadas pelos demais grupos aqui exemplificados.

Em uma análise da questão feita após a aplicação, levanta-se a possibilidade de que talvez os comandos dos dois primeiros itens tenham sido difíceis para os alunos. Aliás, a análise de soluções pode, inclusive, permitir que os professores avaliem se as questões propostas estão adequadas em termos de dificuldade de conteúdo ou de linguagem utilizada.

4.2.9 Quinta questão da quarta aula de análise de soluções

A figura 56 apresenta uma questão utilizada na seção 4.1 como exemplo de **continuação de uma resolução incompleta.**

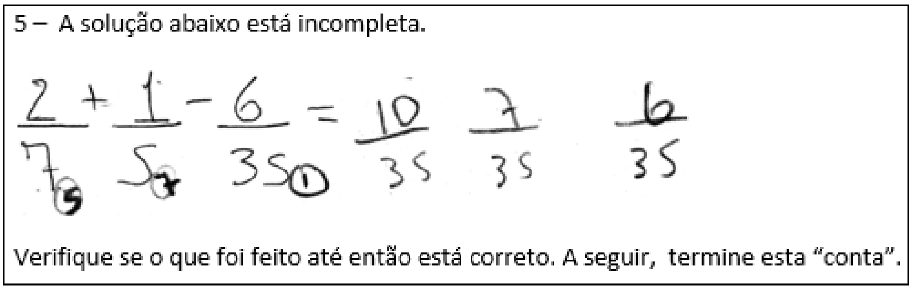


Figura 56 – Questão referente à continuação de uma resolução incompleta

A figura 57 mostra a solução de um grupo de alunos que apresentou o cálculo do MMC, verificando que o denominador desejado estava correto. A seguir, obteve as frações equivalentes e efetuou corretamente a operação. O enunciado da questão era claro e sucinto, o que proporcionou um resultado excelente.

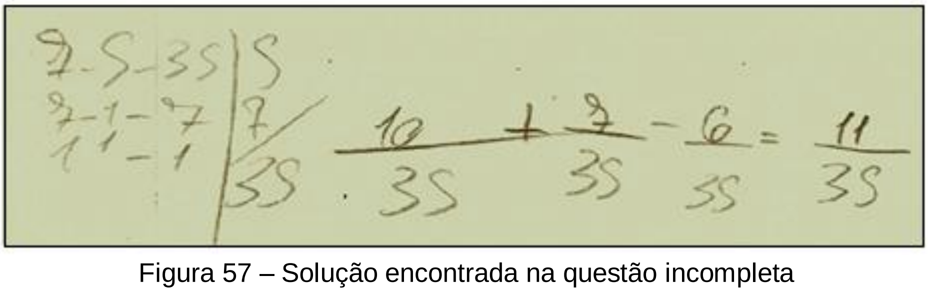


Figura 57 – Solução encontrada na questão incompleta

Para concluir, observa-se que os exemplos apresentados nesse capítulo parecem indicar um avanço significativo na compreensão dos conceitos relacionados às frações. A diversidade das soluções apresentadas parece demonstrar que tanto a análise de soluções como a escolha de uma abordagem que prioriza os conceitos e não operações podem trazer ganhos significativos no ensino de frações. Essas e outras observações serão discutidas na conclusão deste trabalho.

V - RESULTADOS DOS TESTES

5.1 Índices de acertos

Como já relatado anteriormente, a aplicação do pré-teste e do pós-teste permitiu realizar uma comparação quantitativa do desempenho dos alunos antes e depois das aulas. Ao todo, participaram do pré-teste 60 alunos, e do pós-teste 63 alunos. O teste foi composto por sete questões iniciais de caráter discursivo e de três questões finais de caráter objetivo.

Foram consideradas como certas as questões discursivas que continham resolução (se houvesse) e resposta final totalmente corretas. Sendo assim, questões parcialmente certas para fins estatísticos desta pesquisa foram consideradas como incorretas.

Os resultados em termos percentuais das dez questões do teste estão representados graficamente abaixo. Neste gráfico, os resultados em azul correspondem ao pré-teste e os em verde, ao pós-teste.

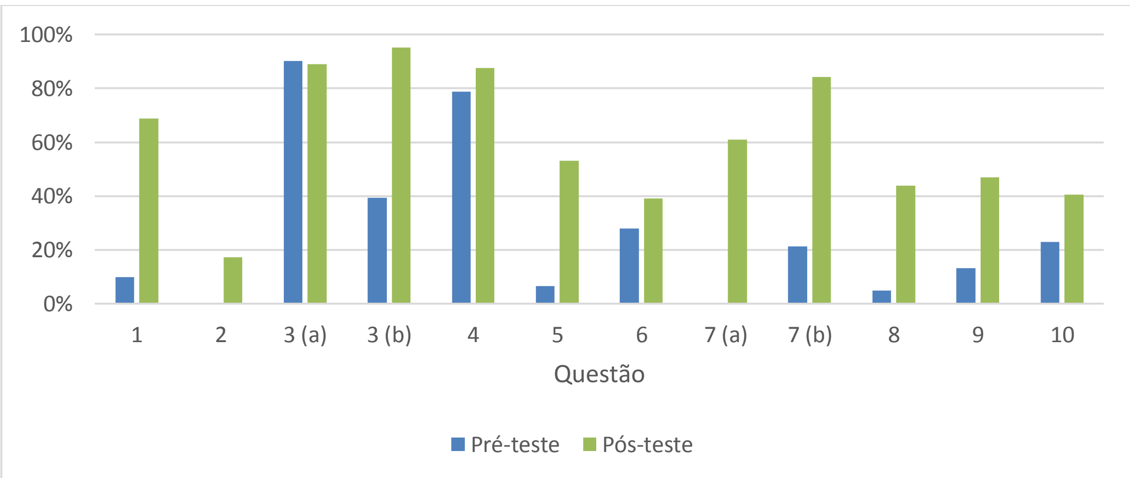


Gráfico 1 – Resultados percentuais comparativos entre pré-teste e pós-teste

Podemos observar que em todas as questões, com exceção da questão 3 (item a), na qual o índice inicial de acertos já era superior a 80%, os resultados do pós-teste são significativamente superiores aos resultados do pré-teste; também observa-se que houve duas questões em que todos os alunos erraram no pré-teste.

Esses e outros resultados serão discutidos a seguir.

5.2 Análise do desempenho

5.2.1 Questão 1

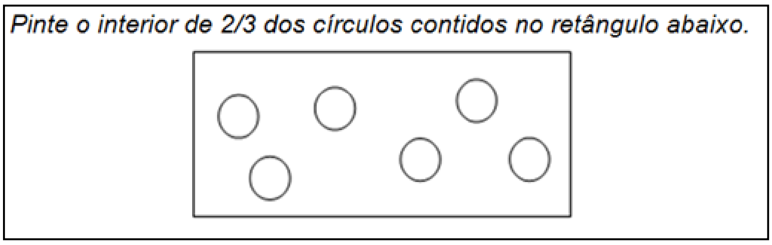


Figura 58 - Enunciado da questão 1 do teste

a) Conteúdo abordado: Fração como parte de um conjunto

b) Percentual de acertos:

Pré-teste: 9,84%

Pós-teste: 68,75%

c) Análise do resultado

Alguns alunos estavam habituados a resolver questões envolvendo frações de um conjunto, porém estas eram do tipo:

“Em uma sala há 30 alunos, destes, 2/5 são meninos. Calcule o número de meninos nessa sala.”

Essas questões estão presentes no livro didático adotado pela escola. Porém, os poucos alunos que já resolviam esse tipo de questão não demonstravam a capacidade de representar a situação proposta na questão por meio de figuras e pareciam simplesmente ter memorizado uma sequência de operações, com pouco ou nenhum significado.

A evolução nessa questão, entretanto, era esperada, pois durante as aulas os alunos demonstraram bons resultados nas atividades envolvendo representações em figuras que privilegiavam essa interpretação de frações. Um exemplo de atividade em sala de aula pode ser encontrado na figura 59.

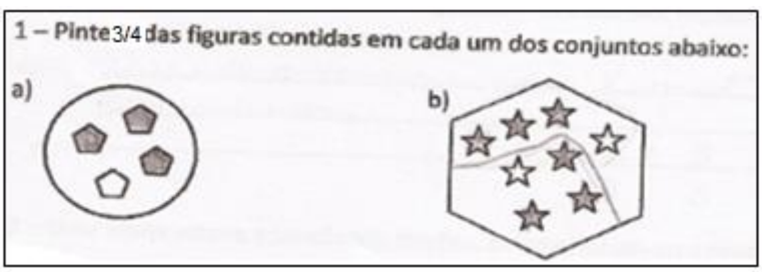


Figura 59 – Exemplo de resolução de atividade de fração de um conjunto

Note que no item (a) do exemplo apresentado na figura 1 o aluno deveria registrar 3/4 de um conjunto com quatro elementos, e no item (b), com oito elementos. Na solução ilustrada na figura 59, ele consegue, no segundo item, dividir os oito elementos em dois subconjuntos, de quatro elementos cada, para, a partir daí, obter 3/4 de cada subconjunto. Esse tipo de raciocínio denota um ganho conceitual, que pode facilitar a compreensão de outros conceitos relacionados às frações que serão estudados mais adiante, tais como a equivalência e porcentagem. Além disso, esta abordagem pode facilitar a transição do concreto para o abstrato.

5.2.2 Questão 2

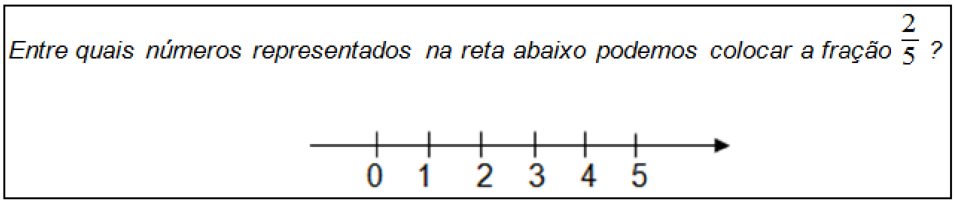

Entre quais números representados na reta abaixo podemos colocar a fração $\frac{2}{5}$ *?*

Figura 60 - Enunciado da questão 2 do teste

a) Conteúdo abordado: Fração na reta numérica

b) Percentual de Acertos

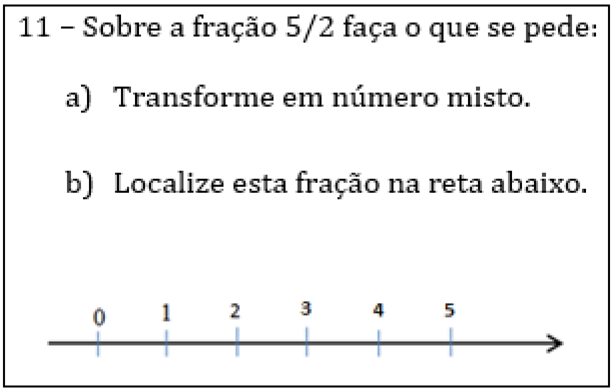
Pré-teste: 0%

Pós-teste: 17,19%

c) Análise do resultado

A maioria dos alunos posicionou a fração 2/5 entre os números 2 e 5, tanto no pré como no pós teste. Estes erros eram previsíveis, pois eram apontados por Kerslake (1986), Vasconcelos e Belfort (2006) como tema de difícil compreensão.

Uma das estratégias utilizadas nas aulas de conteúdo para uma melhor aprendizagem da reta numérica foi a transformação de frações impróprias em números mistos, com o intuito de fortalecer o conceito de fração como número e facilitar sua localização na reta. A figura 61 ilustra uma exemplo de questão do tipo 1 referente à reta numérica.


11 – Sobre a fração 5/2 faça o que se pede:

a) Transforme em número misto.

b) Localize esta fração na reta abaixo.

Figura 61 – Exemplo de atividade envolvendo fração na reta numérica

As observações realizadas em sala indicaram, em consonância com o referencial teórico desta pesquisa, que a maioria dos alunos teve o primeiro contato com a reta numérica durante essa sequência didática. Ou seja, eles cursaram todo o primeiro segmento do ensino fundamental e o sexto ano sem terem trabalhado com a reta numérica. Outro fator apontado nas referências deste trabalho e observado nesta pesquisa foi a dificuldade de aprendizagem da reta numérica, alunos demonstraram em alguns momentos certo desconforto em trabalhar com tal conceito.

Sendo assim, apesar do pós-teste apresentar um percentual muito baixo de acertos, podemos considerar que o desempenho dos alunos mostra um primeiro ganho, embora ainda pequeno, na construção da reta numérica. Além disso, diante da dificuldade do tema, este assunto pode, e deve, ser abordado de forma constante e permanente nas séries posteriores, por exemplo, durante a introdução dos números inteiros.

5.2.3 Questão 3

Leia a frase e responda as perguntas:

Antônio comeu $\frac{2}{7}$ do bolo, enquanto seu irmão Roberto comeu $\frac{3}{7}$.

a) Quem comeu o maior pedaço do bolo? ____________________

b) Que fração do bolo foi comida pelos dois irmãos? _____________

Figura 62 – Enunciado da questão 3 do teste

a) Conteúdo abordado: Comparação e adição de frações com o mesmo denominador.

b) Percentual de acertos

Item (a)

Pré-teste: 90,16%

Pós-teste: 89,06%

Item (b)

Pré-teste: 39,34%

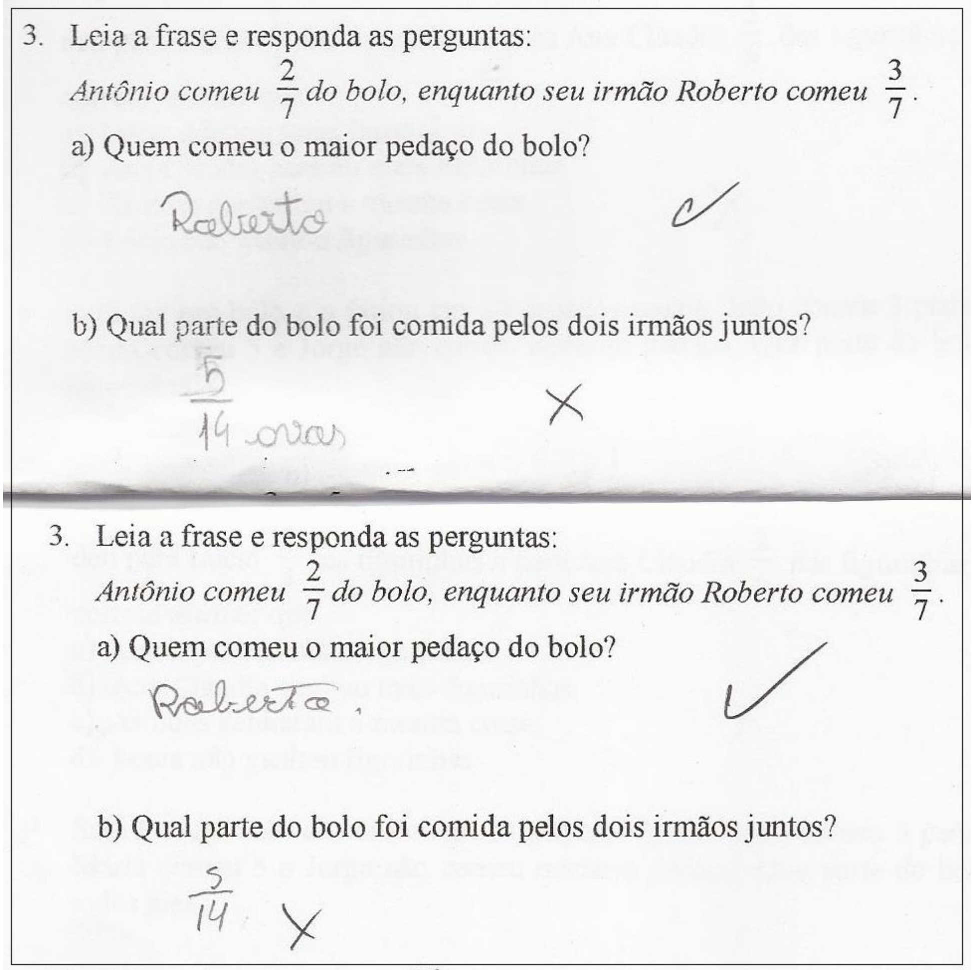
Pós-teste: 95,31%

c) Análise do resultado

Essa questão aborda um conteúdo relativamente fácil, se comparado a outros tópicos.

No item (a) observa-se um ligeiro declínio nos resultados no pós-teste em relação ao pré-teste que, para fins estatísticos, pode ser considerado estável. Nota-se também que essa é uma questão que um aluno poderia facilmente acertar mesmo não dominando conceitos básicos de fração, pois poderia comparar os números 2 e 7 com os números 3 e 7.

Diferentemente do anterior, o item (b) teve um baixo percentual de acertos no pré-teste. A figura 63 ilustra o padrão de respostas da maioria dos alunos. Ao realizar a adição de frações, os estudantes adicionam numerador com numerador e denominador com denominador, erro comumente identificado por pesquisadores, tais como Kerslake (1986) e Borasi (1985).



3. Leia a frase e responda as perguntas:

Antônio comeu $\frac{2}{7}$ *do bolo, enquanto seu irmão Roberto comeu* $\frac{3}{7}$.

a) Quem comeu o maior pedaço do bolo?

Roberto

b) Qual parte do bolo foi comida pelos dois irmãos juntos?

$\frac{5}{14}$ avos

3. Leia a frase e responda as perguntas:

Antônio comeu $\frac{2}{7}$ *do bolo, enquanto seu irmão Roberto comeu* $\frac{3}{7}$.

a) Quem comeu o maior pedaço do bolo?

Roberto.

b) Qual parte do bolo foi comida pelos dois irmãos juntos?

$\frac{5}{14}$

Figura 63 – Dois exemplos de respostas da 3ª questão do pré-teste

A evolução observada nesse item é um resultado positivo desta pesquisa, pois, de um modo geral, os alunos reinterpretaram a adição de frações, demonstrando não só um maior conhecimento operacional como conceitual de frações, fato observado também na 7ª questão do teste e discutida no decorrer deste capítulo.

5.2.4 – Questões 4 e 5

Quem é maior 3/4 ou 5/4? Justifique
Quem é maior 2/3 ou 3/5? Justifique

Figura 64 – Enunciados das questões 4 e 5 do teste

a) Conteúdo abordado: Comparação de frações

b) Percentual de acertos

Questão 4

Pré-teste: 78,69%

Pós-teste: 87,50%

Questão 5

Pré-teste: 6,56%

Pós-teste: 56,13%

c) Análise do resultado

O alto índice de acertos obtido na quarta questão era esperado, pois trata-se de uma questão de comando simples de um tópico que, como dito na questão anterior, permitiria uma resolução correta sem nenhum conhecimento dos números racionais, pois a resposta correta poderia ser encontrada realizando uma simples comparação dos numeradores.

O baixíssimo índice de acertos na questão cinco pode diagnosticar a dificuldade apontada por Santos (1997) que os estudantes possuem em enxergar uma fração como sendo um número. É o que sugere a figura 65.

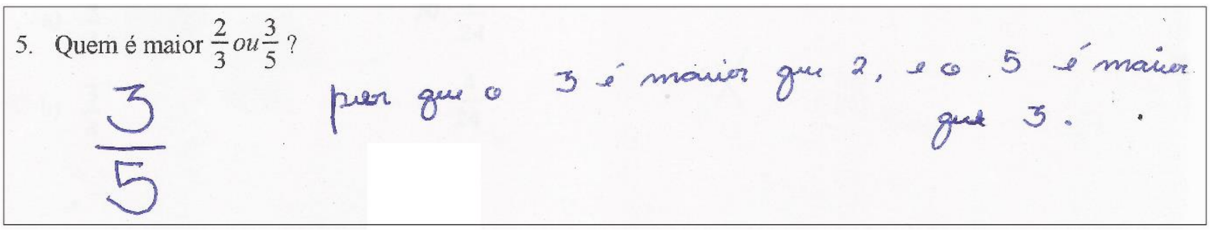


Figura 65 – Exemplo de solução da questão 5 do pré-teste

A evolução do percentual de acertos na quinta questão é um excelente resultado deste trabalho, pois trata-se de uma questão que necessita de algum conhecimento de frações para a sua resolução. Tal resultado pode ser considerado mais significativo ainda, se considerarmos que as questões incompletas e parcialmente corretas foram classificadas nessa análise como incorretas, o que significa que um percentual bem maior do que os 56% dos alunos demonstrou avanços significativos no domínio desse conteúdo no pós-teste.

5.2.5 – Questão 6

Em uma turma há 50 alunos, destes $\frac{3}{5}$ são meninos. Calcule o número de meninos desta turma.

Figura 66 – Enunciado da questão 6 do teste

a) Conteúdo abordado: Frações como parte de um conjunto

b) Percentual de acertos
   Pré-teste: 27,87%
   Pós-teste: 39,06%

c) Análise do resultado

Apesar da evolução no índice de acertos, este não pode ser considerado um resultado positivo. Era esperada uma evolução mais expressiva nesses índices. Um fato que pode explicar esse resultado abaixo do esperado é a pouca ênfase dada a problemas que utilizassem frações como operadores, pois foram trabalhados poucos exercícios desse tipo em sala. Essa hipótese gera uma conclusão que será melhor discutida posteriormente. Mesmo nesta nova metodologia se observou a necessidade da utilização de uma quantidade significativa de exercícios para a fixação dos conceitos trabalhados.

5.2.6 – Questão 7

Efetue:

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}$

Figura 67 – Enunciado da questão 7 do teste

a) Conteúdo abordado: Adição de frações

b) Percentual de acertos

Item “a”

Pré-teste: 0%

Pós-teste: 60,94%

Item “b”

Pré-teste: 21,31%

Pós-teste: 84,38%

c) Análise do resultado

O item “b” diz respeito à adição de frações com o mesmo denominador, e, apesar de se tratar de um tópico fácil, o índice de acertos no pré-teste foi muito baixo.

O resultado obtido no item “a” é preocupante. Nenhum dos alunos das duas turmas de 7º ano que participaram da pesquisa acertou a questão. É importante considerar que a escola recebeu alunos novos, o que significa que não é um problema exclusivo dessa escola e, como apontado nas referências deste trabalho, indica uma deficiência no ensino de frações.

Os resultados do pós-teste, por outro lado, são excelentes, sendo um dos pontos de maior êxito deste trabalho, a evolução apresentada nas aulas pode ser percebida nestes resultados.

5.2.7 – Questão 8

Regina possui uma caixa com muitas figurinhas. Desejando agradar duas amigas, Regina deu para Lúcia $\frac{1}{3}$ das figurinhas e para Ana Cláudia $\frac{2}{6}$ das figurinhas.

Sobre esta partilha é correto afirmar que:

a) Lúcia ganhou mais figurinhas.

b) Ana Cláudia ganhou mais figurinhas.

c) As duas ganharam a mesma coisa.

d) Lúcia não ganhou figurinhas

Figura 68 – Enunciado da questão 8 do teste

a) Conteúdo abordado: Equivalência de frações

b) Percentual de acertos

Pré-teste: 4,92%

Pós-teste: 43,75%

c) Análise do resultado

O resultado do pós-teste também indica uma evolução se comparado ao obtido no pré-teste. Além das dificuldades em conteúdo de caráter matemático, alguns alunos demonstraram durante as aulas dificuldades na resolução de problemas, talvez devido a deficiências em leitura e interpretação. Tais dificuldades podem ter afetado o número de acertos nessa questão.

5.2.8 Questão 9

Sara fez um bolo e o fatiou em 24 pedaços iguais. João comeu 3 pedaços, Pedro comeu 4, Marta comeu 5 e Jorge não comeu nenhum pedaço. Que parte do bolo eles consumiram?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{24}$

Figura 69 – Enunciado da questão 9 do teste

a) Conteúdo abordado: fração como quociente de dois inteiros (ou adição de frações de mesmo denominador) e equivalência de frações.

b) Percentual de acertos

Pré-teste: 13,11%

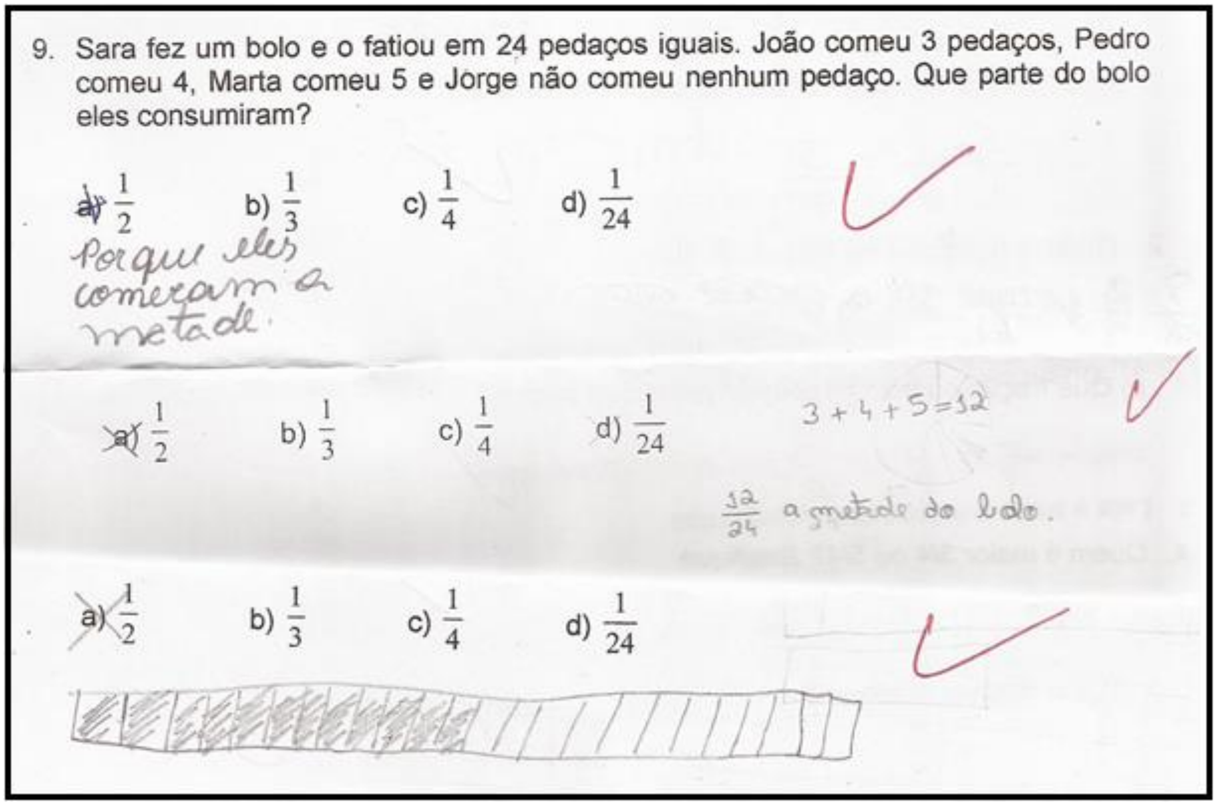
Pós-teste: 46,88%

c) Análise do resultado

Nessa questão os alunos deveriam somar as partes comidas da pizza para obter a fração 12/24, e em seguida simplificá-la para encontrar a alternativa correta. A fração 12/24 poderia ser obtida através de dois raciocínios análogos porém distintos: o aluno poderia somar as frações referentes a cada pedaço (3/24 + 4/24 + 5/24) ou obter a fração como quociente de toda a parte comida (3 + 4 + 5) e o total de partes.

Por se tratar de um problema mais complexo, essa pode ser considerada a questão mais difícil do teste. A evolução no índice de acertos é um ponto positivo nos resultados dessa questão, mas não o mais significativo.

Em alguns testes foi possível observar a compreensão dos estudantes de que 12/24 corresponde a 1/2, sem a necessidade de obter aritmeticamente a fração 1/2 através da simplificação, o que demonstra um relevante ganho conceitual. A figura 69 contém três soluções desta questão que ilustram esta compreensão.



9. Sara fez um bolo e o fatiou em 24 pedaços iguais. João comeu 3 pedaços, Pedro comeu 4, Marta comeu 5 e Jorge não comeu nenhum pedaço. Que parte do bolo eles consumiram?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{24}$

Porque eles comeram a metade.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{24}$

$3 + 4 + 5 = 12$

$\frac{12}{24}$ a metade do bolo.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{24}$

Figura 70 – Três exemplos de soluções da questão 9 do pós-teste

5.2.9 Questão 10

Quatro meninos irão repartir igualmente 3 pizzas para o lanche. Que fração de pizza cada menino vai comer?

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{24}$ d) $\frac{4}{24}$

Figura 71 – Enunciado da questão 10 do teste

a) Conteúdo abordado: fração como quociente de dois inteiros

b) Percentual de acertos

Pré-teste: 22,95%

Pós-teste: 40,63%

c) Análise do resultado

Essa questão apresentou uma evolução no índice de acertos. Porém o percentual de acertos no pós-teste foi abaixo do esperado pelo pesquisador, pois esse tipo questão foi discutida nas aulas de conteúdo e de análise de soluções, cujos resultados apontavam para um melhor desempenho no pós-teste.

Ao analisar o porquê deste fraco resultado, chegamos a um ponto já observado na análise da questão 6, a qualidade da abordagem parece não excluir a necessidade da quantidade de exercícios de fixação.

5.3 A análise geral dos resultados

De um modo geral os resultados são positivos, a média de acertos nas questões do pré-teste foi de 34,95%, já a média de acertos no pós-teste atingiu 60,54%. Estes resultados comprovam também como geralmente o ensino de frações é deficiente. Vale lembrar que estes alunos estavam tendo, na pior das hipóteses, contato com as frações pelo terceiro ano consecutivo e, mesmo assim, os resultados no pré-teste foram significativamente baixos.

Aliados aos resultados obtidos no capítulo anterior, tais índices confirmam algumas problemáticas relatadas pelos autores citados no referencial teórico: como alguns tópicos referentes às frações provavelmente são mal trabalhados em sala de aula (quando são ensinados) e como uma visão diferenciada dos erros cometidos pode ajudar a promover ganhos significativos na aprendizagem de Matemática. Essas e outras conclusões serão discutidas no capítulo seguinte.

CONCLUSÃO

Para melhor apresentar as conclusões deste estudo apresentaremos este capítulo em quatro partes, a primeira delas será voltada a apresentar um pequeno resumo da pesquisa realizada, na segunda parte, serão apresentadas as conclusões das aulas, a terceira parte tratará dos resultados dos testes, respondendo uma das perguntas da pesquisa. A última parte apresentará considerações finais, além de fornecer uma resposta para a outra questão desta pesquisa

A Pesquisa

Este estudo teve como objetivo investigar de que forma uma metodologia de ensino baseada na análise de soluções pode contribuir para o ensino de frações e qual foi a evolução observável nos resultados de um teste aplicado antes e após uma sequência didática para revisão de frações, baseada na análise de soluções.

O suporte teórico para o ensino de frações e a construção dos testes foi obtido, principalmente, a partir das leituras dos trabalhos de Kerslake (1986), Hart (1981), Vasconcelos e Belfort (2006) e, posteriormente, Fazio e Siegler (2011).

A metodologia de ensino adotada neste trabalho, denominada *Metodologia Didática de Análise de Soluções,* foi construída especialmente para essa pesquisa a partir do estudo dos trabalhos relacionados à análise de erros no ensino de Matemática de Cury (2007) e Borasi (1985). Essa metodologia utiliza o erro para reconstruir significados e repensar o conhecimento de modo contínuo e permanente.

A escolha da metodologia de pesquisa denominada Pesquisa-ação foi coerente, pois trata-se de um processo que segue uma evolução sistemática e modifica tanto o investigador como as situações em que este atua, o que se adequa à metodologia didática utilizada.

As aulas desta pesquisa foram realizadas no primeiro semestre de 2012, em duas turmas regulares do 7º ano do ensino fundamental. Estas aulas podem ser divididas em duas partes:

- aulas teóricas, nas quais o conteúdo era ensinado em aulas expositivas no quadro seguidas de exercícios individuais;
- aulas de análise de soluções, nas quais os erros cometidos eram apresentados em novos exercícios para serem analisados pelos alunos.

Antes do início das aulas, foi aplicado um teste contendo dez questões, denominado pré-teste, que voltou a ser aplicado após o término das aulas, como pós-teste, a fim de servir como um instrumento de pesquisa que permitiria avaliar pontos positivos e negativos da metodologia didática utilizada.

As aulas

A Metodologia Didática de Análise de Soluções, desenvolvida neste trabalho, se utilizou das produções escritas dos alunos para a construção de novas atividades, com novas abordagens. Aquelas questões incompletas, que possuíam algum erro, serviram de matéria prima para a construção de outras questões, a fim de proporcionar uma melhor compreensão dos conceitos e, a partir daí, uma melhor eficiência na realização das operações.

Uma questão que analisa um erro é, essencialmente, uma questão que necessita de uma compreensão teórica e não apenas de memorização de procedimentos operatórios. Sendo assim, podemos afirmar que um dos ganhos que esta metodologia didática proporcionou foi a realização de uma abordagem que priorizava os conceitos, e não as operações, como comumente é feito. Se o aluno compreende o conceito de equivalência de frações, por exemplo, ele será capaz de compreender melhor a adição de frações com denominadores diferentes e não apenas decorará uma sequência de procedimentos operatórios com pouco significado. Os resultados relatados no capítulo 4 comprovam estes ganhos, pois os alunos demonstraram a compreensão de conceitos importantes relacionados às frações.

Segundo Borasi (1985) e Pinto (2000), ao se adotar uma nova postura em relação ao erro, o professor poderá construir um ambiente psicológico mais propício ao aprendizado. Isto, de fato, ocorreu na sala de aula. Alguns alunos mais calados passaram a opinar e participar mais das aulas, sem medo de errar pois os erros passaram a ser encarados como algo natural, inerente à construção do conhecimento. Esta nova postura proporcionou efeitos psicológicos positivos, influenciando na autoconfiança dos alunos, efeitos que surgiram nas aulas de frações e foram observadas durante todo ano escolar de 2012.

De um modo geral, os resultados das aulas foram positivos, porém algumas falhas foram observadas e relatadas no capítulo 4. Alguns erros cometidos nas questões de análise de soluções (tipo 2) são devidos, possivelmente, a uma interpretação incorreta do enunciado. Por se tratar de questões que nem os alunos, nem os professores estejam habituados, se torna indispensável um maior zelo na construção das questões de análise de soluções, principalmente no que se refere ao comando destas questões.

Há, no entanto, alguns obstáculos inerentes à forma em que a profissão de professor é exercida em nosso país que podem tornar praticamente inviável a utilização desta metodologia didática em sala de aula. Trata-se de uma metodologia que exige do professor estudo e planejamento e, para isso, há uma necessidade real de tempo. O processo de analisar erros em exercícios e construir outros exercícios a partir das soluções encontradas exige tempo de dedicação, tanto para estudar que erros são esses e quais seriam as melhores abordagens, como para a própria construção das questões de análise de soluções.

Os testes

Nas aulas que antecederam as aulas-pesquisa foi possível observar que os alunos traziam uma bagagem matemática excessiva em termos operacionais, o que não garantiu o êxito nem em questões desse tipo. Tomemos como exemplo o péssimo desempenho na sétima questão do teste, uma questão direta de soma de frações. Até mesmo no item b, em que eles eram solicitados a somar frações 4/5 e 3/5, o percentual de acertos inicial foi de apenas 21,31%, não havendo acertos no item no qual se pedia a soma de frações com denominadores diferentes. Como é possível que estes alunos tenham estudado adição de frações em dois anos seguidos e, no ano seguinte, todos “esqueçam” esta operação? Talvez alguns tenham decorado e outros nem isso, mas parece provável que pouquíssimos tenham realmente aprendido.

Algumas dificuldades inerentes ao ensino de frações foram diagnosticas nos testes, resultados que estão em consonância com resultados de pesquisas anteriores. A dificuldade de compreender a fração como sendo um número, apontada por Santos (1997), Fazio e Siegler (2011), foi diagnosticada nos resultados da questão 5 dos testes. A dificuldade de localizar um número fracionário na reta numérica, apontada por Kerslake (1986), foi diagnosticada na segunda questão do teste, com percentuais muito baixos de acertos no pré e no pós-teste, 0% e 17,19%, respectivamente.

De um modo geral, os péssimos resultados do pré-teste apontam para uma situação problemática em relação ao ensino de frações, o que segundo as pesquisas, não se trata de um problema local. As dificuldades relacionadas a este tema têm preocupado diversos pesquisadores nacionais, como Santos (1997), Vasconcelos e Belfort (2006), e internacionais, como Hart (1979), Kerslake (1986), Fazio e Siegler (2011).

Considerações finais – respondendo as questões de pesquisa

A Metodologia Didática de Análise de Soluções permitiu identificar algumas das reais dificuldades dos alunos que, provavelmente, não seriam observadas com outra metodologia. Os debates realizados pelos grupos de alunos e o material produzido por eles refletem um progresso intelectual significativo. Os alunos desenvolveram habilidades muitas vezes ausentes nas aulas de Matemática, tais como comparar soluções, sintetizar ideias e construir justificativas.

A comparação dos resultados dos testes aplicados confirma uma evolução no percentual de acertos em todas as questões aplicadas, com exceção a questão 3, item a, que já possuía um índice bem elevado. Essa comparação aponta que a Metodologia Didática de Análise de Soluções aplicada ao ensino de frações alcançou êxito. Além disso, a análise de algumas soluções dos alunos nesses testes pode fortalecer o sucesso desta metodologia, pois as questões do pós-teste analisadas demonstram uma evolução na compreensão de conceitos fundamentais na aprendizagem das frações.

Apesar de entendermos e acreditarmos que uma compreensão dos conceitos é significativamente importante, os resultados do pós-teste mostraram que só isso não garante bons resultados. As questões referentes a tópicos pouco trabalhados em exercícios mantiveram baixos índices de acertos nos testes, independentemente da qualidade da abordagem inicial de tais tópicos.

Isso nos leva a acreditar que uma boa metodologia de ensino, por mais inovadora que seja, necessita de tempo de amadurecimento e prática por parte dos alunos. Mesmo havendo uma reconstrução de significados a partir de algumas atividades envolvendo os erros cometidos, se faz necessário, em um momento posterior, que haja tempo e trabalho suficiente para garantir uma melhor aprendizagem.

Esta pesquisa mostrou que são muitos os benefícios de uma metodologia didática construída a partir de uma nova visão do erro, tanto para o aluno como para o professor, e que há muitos elementos a serem pesquisados e aprofundados na “Análise de Erros” ou “Análise de Soluções”, do mesmo modo que há muito o que fazer em relação ao ensino de frações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRE, Marli E. D. A. *Pesquisa em Educação*: Buscando rigor e qualidade. Cadernos de Pesquisa n.113, p. 51-64, Julho/2001

ARNON, I. et al.. *Where do fractions encounter their equivalents?* International Journal of Computers for Mathematical Learning, v.6, p.167-214, 2001

BALL, D. L. *Halves, pieces, and twoths*: Constructing representational contexts in teaching fractions. In Carpenter, T; Fennema, E & Romberg, T (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* Hillsdale, NJ: Erlbaum, p. 157-196, 1993.

BALL, D. L. et al. *Content knowledge for teaching: what makes it special?* Journal of Teacher Education, November/December, v. 59, p.389-407, 2008.

BORASI, R. *Using errors as springboards for the learning of mathematics*: an introduction. Focus on Learning Problems in Mathematics. v. 7, n.3-4, p.1-14, 1985.

BRASIL, MEC. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. *A ideia de unidade na construção do conceito do número racional.* REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática, v.2.4, p.68-93, 2007.

CURY, H. N. *Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática*. *Zetetiké*, Campinas, v.3, n.4, p.39-50, Nov, 1995.

CURY, H. N. *Análise de erros*: O que podemos aprender com as respostas dos alunos. Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2007

CURY, H. N. O conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros. In: CURY, H. N.; VIANNA, C. R. (Org.) *Formação do Professor de Matemática*: Reflexões e Propostas. Santa Cruz do Sul, RS: Editora IPR, 2012. cap. 1, p.19-48.

CURY, H. N.; KONZEN, B. Uma aplicação de jogos na análise de erros em educação matemática. REVEMAT- Revista Eletrônica de Educação Matemática. v.2.6, p.107-117, 2007

ENGEL, G. I. *Pesquisa-ação*. Educar em Revista, Curitiba, n.16, p.181-191, 2000.

FAZIO, L.; SIEGLER, R. S. *Teaching fractions*. Educational practices series. Geneva: International Academy of Education-International Bureau of Education. v.22, 2011

FRANCO, M. A. S. *Pedagogia da Pesquisa-Ação*. Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 483-502, set./dez. 2005

GOMES, R. Q. G. Saberes docentes de professores das séries iniciais sobre frações. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

HART, K. M. Fractions. In: HART, K. M, et al. *Children's Understanding of Mathematics:* 11-16. Eastbourne. Antony Rowe Publishing Services. cap.5, p.66–81, 1981.

KAMII, C.; CLARK, F. B. *Equivalent Fractions*: Their Difficulty and Educational Implications. Journal of Mathematical Behavior. v.14, p.365-378, 1995.

KERSLAKE, D. *Fractions:* Children`s Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project. London: The NFER-NELSON Publishing Company,1986.

MACEDO, L. *Ensaios construtivistas.* 5.ed. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002.

MANDARINO, M. et al. *Soluções inesperadas na resolução de problemas matemáticos:* erro ou acerto? In: *Anais do II Internacional Cotidiano – Diálogos sobre Diálogos.* Niterói: UFF, março de 2008. p. 67- 86

MARQUES, E. O. *Resultados de testes de larga escala*: um ponto de partida para ações de formação continuada de professores em matemática. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008

MERLINI, V. L. *O conceito de fração em seus diferentes significados:* um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005

MONTEIRO, C. e COSTA, C. *Dificuldades na aprendizagem dos números racionais*. Educação e Matemática, nº 40, pp. 60-63, 1996.

OLIVEIRA, A. T., PALIS, G. *O potencial das atividades centradas em produções de alunos na formação dos professores de Matemática.* Relime, v.14, p.335-359, Nov. 2011.

PINTO, N. B. *O erro como estratégia didática:* Estudo do erro no ensino da Matemática elementar. 2. ed. Campinas: Papirus, 2000.

SANTOS, V. M. P. *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática*: métodos alternativos – Projeto Fundão. Rio de Janeiro: UFRJ, 1997.

SIEGLER, R. et al. Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide. Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education, 2010.

TANUS, V. L. F. A.; DARSIE, M. M.P. *O tratamento dado ao erro no processo ensino-aprendizagem da matemática*. SEMIEDU - Qualidade do Ensino na Contemporaneidade: novos e velhos desafios. Cuiabá: Edufmt, 2007.

TORRE, S. *Aprender com os erros*: o erro como estratégia de mudança. Porto Alegre: ArtMed Editora, 2007.

TRIPP, D. *Pesquisa-ação*: Uma introdução metodológica. Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 443-466, set./dez. 2005.

VASCONCELOS, C. B.; BELFORT, E. *Diferentes significados de um mesmo conceito: o caso das frações.* In Salto para o Futuro, Boletim 13: *Discutindo práticas em Matemática*. p. 39-49 . Rio de Janeiro, 2006. Disponível em: <http://tvbrasil.org.br/fotos/salto/series/162048Distutindo.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2012

WU, H. *Some remarks on the teaching of fractions in elementary school*. Califórnia, EUA, out/1999. Disponível em <http://math.berkeley.edu/~wu/fractions2.pdf> Acesso em 05 maio. 2013.