Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Instituto De Matemática - IM UFRJ
Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática

Rupturas no estatuto dos números negativos - o caso da Inglaterra

(1630-1830)

Michel Santos Salazar

Orientador: Gert Schubring

Rio de Janeiro

2019

Rupturas no estatuto dos números negativos - o caso da Inglaterra (1630-1830)

Michel Santos Salazar

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Gert Schubring, IM-UFRJ

____

Gérard Emile Grimberg, IM-UFRJ

____

João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho, PUC-RJ

____

Rio de Janeiro

2019

Resumo

O período de XVII a XIX abarcou uma forte discussão sobre os fundamentos da álgebra e questionamentos sobre a legitimidade de quantidades negativas e imaginárias, as quais eram comumente denominadas por termos como “absurdas” ou “ininteligíveis”. A discussão, motivada pelo estabelecimento da álgebra como uma ciência de conhecimento certo acabou trazendo interessantes movimentos entre algebristas britânicos, com a virada das abordagens analíticas aos sintéticos e, enfim, à chamada álgebra simbólica. A presente pesquisa pretende então analisar algumas dessas diferentes concepções de álgebra, com enfoque na maneira como eram introduzidas e justificadas as quantidades negativas.

Palavras-chave: álgebra, Inglaterra, operações algébricas, quantidades negativas, números negativos

Abstract

The period from the 17th to the 19th century saw a long discussion concerning the foundation of algebra and questionings regarding the legitimacy of negative and imaginary quantities, which were commonly referred to as “absurd” or unintelligible”. This discussion, primarily motivated by the establishment of algebra as a science of certain truths brought about interesting movements among British algebraists, such as the diversion which occurred from analytical to synthetic approaches and, finally, towards the so-called symbolical ones. Hence, the present research intends to analyse a few of these different conceptions of algebra, focusing on the ways negative quantities were introduced and substantiated, as well as the ways authors reasoned about their operations.

Keywords: algebra, England, algebraic operations, negative quantities, negative numbers

Sumário

1 Introdução

1.1 Apresentação

O período que tange os séculos XVII a XVIII são marcados por uma profunda transformação social e política na Europa, e a Inglaterra certamente constitui um dos carros-chefes dessas revoluções. Neste período, vemos um país cercado de conflitos religiosos e sociais emergir como a grande potência econômica e política no mundo, berço da Revolução Industrial e das filosofias de nomes como Thomas Hobbes e John Locke, que por sua vez, ajudariam a moldar os séculos posteriores da história da civilização humana.

Porém, não foi apenas no espectro político que a Inglaterra, assim como o resto da Europa, ficaram marcados por grandes mudanças. Não é um exagero dizer também que o século marca um período de profunda revolução na matemática, sobretudo no que se refere à álgebra. Em um período de cem anos, somos capazes de contemplar a ascensão e emancipação do assunto, que anteriormente era pouquíssimo estudado por estudiosos e praticantes, algo que se torna perceptível pela falta de livros-texto sobre o assunto. O que antes consistia de de uma prática generalizante de resolução de problemas, a partir de Viète, no fim do século XVI, passava a se tornar a "arte analítica", onde o manuseio de equações se tornava uma teoria própria e independente de suas aplicações.

O reconhecimento do poder generalizante desses métodos, bem como a sua capacidade de um manuseio abstrato das quantidades em questão, fez a álgebra ser reconhecida como uma linguagem matemática em si, algo que ajudou a fortalecer uma busca por um simbolismo mais conciso e eficiente, assim como de resultados puramente concernentes às estruturas internas das equações. Na Inglaterra, especificamente, William Oughtred e Thomas Harriot marcam o começo da importação das ideias de Viète, porém de maneira renovada, caracterizada por uma auto-suficiência e menor verbosidade que foi ecoada pelos seus seguidores compatriotas.

Apesar da ascensão do movimento a favor da "álgebra pura" e contemplativa que se fazia surgir, é também fato inegável que as suas próprias bases não encontravam-se sob questionamento. A ainda presente influência da geometria dos antigos carregava consigo uma consequente incerteza sobre a legitimidade dos métodos de análise para a apresentação de conhecimento. Na Inglaterra, em particular, fomentada pela defesa do influente Isaac Newton por esse ideal euclidiano de apresentação sintética, a matemática passou por uma fase peculiar que muitas vezes é vista com maus olhos, considerada como retrógrada e isolada dos avanços que surgiam pelo resto do mundo.

Em meio a esses conflitos nas engrenagens da álgebra inglesa, o conceito de número negativo também passava por um processo de profunda maleabilidade e questionamento. Enquanto muitos dos algebristas analistas reconheciam na generalidade da álgebra a capacidade de perceber tais quantidades no contexto de ideias concretas como dívidas e movimentos contrários, havia ainda quem resistisse a esse apelo às analogias para a legitimação dos conceitos matemáticos, que deveriam ser simples e livres de possíveis "conflitos mentais".

Diante desses conflitos epistemológicos entre as abordagens analítico-algébricas e sintético-geométricas na Inglaterra, a presente pesquisa se prestará a tentar responder em que consistia a conceitualização dos números negativos (ou de um conceito parecido, como as quantidades negativas).

1.2 Motivação e Escolha do tema

Quando ingressei no meu curso de graduação em Licenciatura em matemática na UNIRIO, sofri o notório choque que normalmente se sofre na transição da escola para o ensino superior de matemática. Algumas ideias preconcebidas que tinha desenvolvido ainda na escola, porém, permaneceram em mim ou até mesmo se exacerbaram após eu ter assistido a aulas como as de Geometria Euclidiana, ainda no início do curso.

Nesse primeiro contato com a matemática de rigor lógico-dedutivo, alimentei a concepção de que a matemática é um saber perfeito, puro e que se desenvolve de uma maneira linear: estudamos até hoje a mesma geometria que Euclides desenvolveu e de lá para cá, o saber matemático, de uma forma geral, somente evoluiu, tendo inevitavelmente mantido seus fundamentos básicos de forma inalterada. Só existiria, portanto, uma única maneira de se conceber matemática, e suas motivações surgiriam dela própria, e nunca de aplicações consequentes.

Não demorou muito para essa noção de matemática que eu fabriquei se diluir quando tive contato com a história dessa ciência. Pude ver como a regularidade que achava que a matemática tinha, na verdade, não existe, que a matemática não é apenas um saber puro e homogêneo, mas que é possível confrontá-lo, que a matemática se manifeste de várias formas, que impasses e retrocessos se imponham diante dela e, acima de tudo, constatei que esses saberes pertencem a um contexto cultural, a comunidades de seres humanos. Ao adentrarmos a história dos números negativos, em particular, vemos que podem florescer muitos indícios para tais afirmações.

Há quem alegue que os números negativos, entre outros conceitos matemáticos, tenham se manifestado pela primeira vez ainda antes da era comum de uma maneira suave e "moderna", talvez no esquecimento da qualidade abstrata que a noção de número carrega. O que se sabe é que, durante muito tempo, os números negativos representaram um grande desafio conceitual para matemáticos e não-matemáticos que se deparavam com eles. Não muito diferente disso, o aprendizado desse conceito ainda hoje constitui um dos mais notáveis momentos de recorrente conflito no aprendizado matemático, onde as concepções antes estabelecidas para números não parecem permitir uma extensão "além do zero".

Responder às perguntas "Como e por que, até o fim do século XIX, houve uma difusa oposição aos números negativos?" e "Por que e como se buscava justificar as operações aritméticas com os números negativos?” pode requerer uma análise apurada sobre os objetos que eram estudados na matemática, as várias concepções de número que existiram ao longo do tempo, e o que movia e valorizavam as várias comunidades matemáticas que entraram em cena dentro desse enredo.

Com a intenção de tentar melhor compreender a história deste conceito, decidi que a pesquisa focaria particularmente nas comunidades de estudiosos da Inglaterra do século XVII ao século XVIII, partindo da abordagem de Oughtred em sua influente obra *Clavis Arithmeticae*. Com isso, pretendemos elucidar melhor como se deu a conceitualização desses números em comunidades matemáticas, assim como em outras estruturas institucionais, na matemática inglesa. Assim, poderemos ampliar nosso campo de visão sobre as diferentes manifestações desse conceito ao longo do tempo, dentro de diferentes coletividades.

1.3 Objetivos Gerais e estrutura

A presente pesquisa trará uma abordagem em linha do tempo de uma série de autores ingleses ao longo do período de recorte.

Nosso ponto de partida será analisar a abordagem dos números negativos feita pelos ingleses ao longo do século XVII para constituir uma visão de uma certa consolidação internacional em torno dos anos 1700 e a fim de ter um ponto de partida para a análise do caso específico inglês no século subsequente.

A próxima etapa consistirá em investigar a ruptura segundo a epistemologia sintético-geométrica de Francis Maseres (1731-1824) e William Frend (1757 – 1841) a partir dos anos 1750, trazendo também possíveis abordagens do século que estejam alinhadas com as práticas mais anteriores.

Em terceiro lugar, pretendemos analisar a continuação da concepção de Maseres e Frend nas universidades inglesas, e tendências contrárias em instituições diferentes, como academias militares, na primeira metade do século XIX.

Já adentrando o século XIX, nossa pesquisa ainda almeja verificar os primeiros surgimentos algebrizados do conceito dentro das universidades: o grupo *Analytic Society* na universidade de Cambridge, indo até George Peacock(1791 – 1858) e uma formulação do princípio da permanência, em 1845.

Finalmente, a pesquisa se encerrará com uma síntese de todas as práticas que encontramos até aqui, tendo em vista a elucidação de semelhanças e diferenças nas diferentes abordagens dos autores, e sempre levando em consideração o contexto geral em que suas contribuições foram trazidas.

1.4 Metodologia

1.4.1. Hermenêutica

A leitura bibliográfica que nossa pesquisa pretende seguir será criterizada e interpretada segundo a hermenêutica proposta por Schubring (2005) para a análise da história da matemática. A teoria parte do princípio de "que nenhum texto é capaz de comunicar o seu significado por si só, e assim uma inspeção não seria suficiente para revelar seu significado. Por conta disso, faz-se necessário um método mais ponderado de interpretação de textos para a análise da história da matemática".

A abordagem de Schubring da hermenêutica se caracteriza pela visão "materialista" da interpretação, isto é, que se opõe à ideia dominante nas humanidades de que a interpretação seja suscetível à subjetividade do leitor, a favor de uma hermenêutica "objetiva" que, por sua vez, segundo Bollack:

> … reconhece a alteridade de texto históricos e que tenta torná-los objetivamente inteligíveis ao situá-los no espaço e tempo preciso de sua produção enquanto que ao mesmo tempo, esforçando-se para reduzir a subjetividade o máximo possível." (Bollack, 1989 apud Schubring, 2005, tradução nossa)

Em termos de finalidade, portanto, a hermenêutica objetiva se distingue daquela buscada nas humanidades por ter como imperativo uma busca pelo sentido original intencionado pelo autor. Na hermenêutica subjetiva das humanidades, por outro lado, encontramos uma ênfase na ideia de que o conhecimento é construído a partir da interpretação do observador. Essa hermenêutica se aproxima mais daquela de Wilhelm Dilthey, que defende que a compreensão se dá "por meio de 'empatia', e não por conhecimento científico." (Schubring, 2005, p. 3)

Sendo assim, a interpretação objetiva de um texto toma seu curso a partir de uma espécie de transposição do leitor de seu tempo para o tempo e espaço do autor da obra. Isto sugere, no que tange a matemática, que se evite olhar para o conhecimento do passado com lentes do presente, uma vez que este posicionamento acaba por distorcer e ignorar aquilo que não é inteiramente compreendido ou que não se encaixa nas concepções modernas de conceitos matemáticos.

A melhor maneira de compreender a evolução de um conceito como o de números negativos, portanto, se faz a partir de uma visão mais holística. Em questões mais internas à ciência, isso significa que não devemos nos restringir apenas a definições apresentadas pelo locutor, mas que se observe como essa apresentação teórica se manifesta ou se compara com a sua aplicação prática contextualizada. Mais do que isso, os conceitos não podem ser observados de maneira isolada: eles sempre encontram-se inseridos dentro de um "campo conceitual" do autor que precisa ser amplamente considerado na análise histórica do conceito sob foco. (Schubring, 2005, p. 6,7)

Essa visão holística sugerida tampouco se isola a questões puramente internas da ciência. Da hermenêutica de caráter objetivo, depreende-se que é necessário transcender a leitura do texto projetado para buscar compreender o "espírito" da época em que ele foi escrito, a fim de tentar aproximar-se ao máximo do verdadeiro significado pretendido pelo autor, livre de incompatibilidades com o "espírito" daquele que o lê em outro tempo e espaço. Isto se faz através de um profundo estudo sobre a época, sociedade, e comunidades ao qual o autor pertencia, além de um exame detalhado sobre sua vida e obra. (Schubring, 2005, tradução nossa).

Em suma, a hermenêutica aqui proposta supõe imprescindível a investigação tanto em aspectos mais específicos da ciência como em aspectos institucionais e sócio-culturais para que se possa reconstruir o desenvolvimento conceitual com mais fidelidade. Isto, por outro lado, significa principalmente reconhecer como essas esferas conversam entre si, uma vez que nada deve ser visto como uma mera soma de suas partes. No contexto da presente pesquisa, por exemplo, uma questão-chave será a influência que os Elementos de Euclides teve sobre o ensino da universidade de Cambridge ao longo do século XVIII.

1.4.2. O Método analítico e o Método Sintético

Os conceito de método analítico e sintético serão basilares dentro do nosso estudo das várias obras de álgebra da Inglaterra no período de recorte. Antes de verificarmos a maneira como esses pensadores europeus entendiam desses assuntos, será útil apontarmos primeiro como os filósofos gregos os concebiam séculos anteriormente. Para esse propósito, fornecemos aqui a definição do método analítico provida no século III a.C por Pappus em sua *Coleção*[1], segundo a tradução feita por Corrêa (2016) daquela anterior de Hintikka & Remmes (1974):

> ...na análise, assumimos o que é procurado como se já tivesse sido encontrado e olhamos para aquilo de que isto segue e, em seguida, para o que vem antes, até que, regressando desta maneira, encontremos algo que já seja conhecido, ou que ocupe a posição de primeiro princípio. (Pappus apud Hintikka & Remes, 1974, p. 8-9)

Com a o advento da álgebra, e o surgimento de sua vertente cossista[1] na Alemanha, o conceito tornou-se ser constituído desta nova prática matemática. Quando Viète chegou com a sua inovadora abordagem, os dois acabaram por se tornar sinônimos (Stedall, 2002, p. 50), e a sua subsequente influência ajudou a estabelecer esse ponto de vista. Apesar disso, em meados do século XVIII, surgiu na Inglaterra o fenômeno da "álgebra sintética", encabeçado principalmente por Francis Maseres e William Frend. Para que possamos interpretar essa ruptura da concepção fundamentalmente analítica da álgebra, recorreremos às observações feitas por Hermann Hankel sobre o método sintético:

[1] Nome pelo qual ficou conhecida a álgebra que se espalhou pela Alemanha no século XV. O termo originou-se da palavra italiana *cosa*, que significa "coisa" ou "objeto". (Stedall, 2002, p. 38)

> Os antigos só conhecem a abordagem de desenvolvimento progredindo sinteticamente do particular ao mais geral, do simples ao composto; o que falta para eles são princípios e métodos gerais. Eles têm uma preferência forte pelo específico e pela maior limitação de conceitos. Por exemplo, nunca um geômetra antigo chamou a atenção para o fato de que o ângulo entre duas linhas retas basicamente não constitui um, mas dois ângulos que podem, com o mesmo direito, ser considerados como a medida da inclinação de duas linhas retas uma contrapondo-se à outra. (Hankel, 1875, p.1)[2]

Alguns parágrafos depois, sobre a resolução de problemas de mesma natureza, ele diz:

> Consequentemente, nem ocorre ao geômetra grego desenvolver ou mesmo simplesmente sugerir um método geral segundo o qual esses vários casos possam ser tratados em sua essência, nem ele há de abstrair dos casos concretos um resultado geral. No máximo, há no final uma recapitulação escassa, na qual se que o problema, como se pode entender por meio dos casos anteriores, pode ser resolvido em todos os casos concebíveis sob as condições dadas.
>
> Assim, a antiga geometria sacrifica - em favor de uma aparente simplicidade - a verdadeira simplicidade que consiste na unidade dos princípios, e alcança uma intuição sensorial trivial em detrimento do conhecimento da inter-relação de formas geométricas em toda mudança e em toda variabilidade de sua posição sensorialmente concebível. (Hankel, 1875, p.2)[3]

A síntese, portanto, caracteriza-se pelo método que parte do conhecimento “mais simples ao mais composto”. Fica perceptível que ela, então associada aos métodos geométricos gregos, carece de um interesse por “generalização”, tanto de princípios como de mecanismos de resolução. Os problemas são atacados de uma maneira isolada, e ainda que uma associação a posteriori possa ser feita entre eles, não decorre daí um método geral que seja capaz de resolver todos. Isso, por sua vez, é uma característica contrária ao método analítico, que visa uma generalização maior. Como veremos, nos textos de álgebra, em particular, é comum ver o autor citar a vantagem de que a sua generalidade, em comparação com a aritmética numérica, permite que, a partir de um problema, se encontre um método capaz de solucionar problemas de natureza similar.

---

[2] Die Alten kennen nur den synthetisch fortschreitenden Entwickelungsgang vom Einzelnen zum Einzelnen, vom Einfachen zum Zusammengesetzten; -es fehlen ihnen allgemeine Principien und Methoden. Sie haben eine entschiedene Vorliebe für das Specielle und für die engste Begrenzung der Begriffe. Es hat z. B. wohl nie ein alter Geometer darauf aufmerksam gemacht, dass der Winkel zwischen zwei Geraden im Grunde nicht Einer, sondern dass zwei Winkel mit demselben Rechte als Maass der Neigung zweier Geraden gegen einander angesehen werden können.

[3] Dem entsprechend kommt es denn auch dem griechischen Geometer weder in den Sinn, eine allgemeine Methode zu entwickeln oder auch nur anzudeuten, nach der im WEsentlichen diese verschiedenen Fälle behandelt werden können, noch, wird er aus den concreten Fällen ein allgemeines Resultat abstrahiren; höchstens findet sich am Schlusse eine magere Recapitulation, in der bemerkt wird, dass die Aufgabe, wie man aus dem Vorhergehenden ersehe, in jedem denkbaren Falle unter den gegebenen Bedingungen lösbar sei.

So opfert die antike Geometrie zu Gunsten einer scheinbaren Einfachheit die wahre Einfachheit auf, welche in der Einheit der Principien besteht, und erreicht eine triviale sinnliche Anschaulichkeit auf Kosten der Erkenntniss vom Zusammenhang geometrischer Gestalten in allem Wechsel und in aller Veränderlichkeit ihrer sinnlich vorstellbaren Lage.

1.5 O Contexto da matemática inglesa no início do século XVII

Antes de ingressarmos no estudo da álgebra inglesa no século XVII, é importante termos uma breve noção de como eram as instituições de ensino e, mais especificamente, como a matemática era tratada nesse âmbito.

O período que remonta ao século XV viu uma consolidação e expansão do ensino escolar e universitário na Inglaterra. Já abrangendo o século seguinte, podemos ver uma gradual emancipação do ensino com relação à igreja (Howson, 1982, p. 9), e a sociedade havia enriquecido e se tornado suficientemente complexa para que não apenas futuros ministros religiosos precisassem de alguma aprendizagem. (Howson, 1982, p. 5) Ainda assim, o ensino era um bem raro e a maioria da população, sobretudo a mais pobre, não tinha acesso a ela. As instituições formais mais comuns eram as chamadas *grammar schools*, cujo público consistia principalmente da classe média, fazendeiros, donos de terra menos abastados, e alguns comerciantes bem-sucedidos. Já os filhos de nobres costumavam ter um tutor ou se alojar em um monastério, enquanto as filhas podiam ser educadas por um tutor privado ou ser enviadas a um convento. As classes mais baixas, estas dependiam de escolas caritativas, que ofertavam uma espécie de educação elementar. (Howson, 1982, p. 8)

Com relação à matemática, o ensino era bastante parco, e não evoluiu juntamente com as escolas. O foco das *grammar schools* encontrava-se no ensino de latim, inserido na gramática, literatura, composições e escrita em versos. (Howson, 1982, p. 9) Contudo, fora dessas instituições formais, começaram a ascender também os tutores privados, que abriam escolas para atender principalmente a crescente demanda daqueles que possuíam um ofício que exigia algum tipo de matemática. Entre esses ofícios, temos os comerciantes e aqueles que trabalhavam com a ciência da navegação, práticas que estavam em plena escalada devido à exploração marítima e a expansão do mercado. Essas e as outras numerosas classes que se serviam da matemática costumam ser denominadas pelo termo “practitioners”, ou praticantes de matemática, e a existência delas ajuda a mostrar a crescente valorização do assunto na sociedade inglesa. (Howson, 1982, p. 12, 26)

Paralelamente a esse ensino mais elementar, havia as grandes universidades de Cambridge e Oxford, que agora já se encontravam bem estabelecidas. (Howson, 1982, p. 8) Apesar disso, o ensino de matemática também não ocupava uma posição eminente nelas, e Cambridge estava longe de ser um expoente na ciência como é nos dias de hoje. Existe uma narrativa comum na historiografia que aponta a chegada das cadeiras de matemática de Cambridge e Oxford no século XVII como o momento da propagação da matemática nessas universidades. De fato, a cadeira de geometria de Oxford foi estabelecida por Henry Savile no ano de 1612, enquanto a cadeira lucasiana foi criada em Cambridge no ano de 1662 por Henry Lucas (Howson, 1982, p. 33-34); porém, essas cadeiras estavam vinculadas a aulas extra-curriculares que haviam sido providas a partir de doações privadas. A matemática continuou a ocupar um lugar secundário nas universidades por décadas adentro.

Um exemplo que ajuda a mostrar o inexpressivo *status* da matemática em Cambridge e em toda esfera educacional se enxerga em Samuel Pepys, um servidor público do Almirantado inglês altamente bem pago. Pepys, que estudou na monumental escola de St. Paul e na universidade de Cambridge, teve ainda assim de pagar um tutor privado para que pudesse aprender algo simples como a tabela de multiplicação. (Howson, 1982, p. 29, 31)

Ainda assim, é perceptível que havia lições de matemática em alguns *colleges* de Cambridge, e algumas figuras notáveis se dedicavam a este assunto periférico. Talvez o maior destaque deva ser atribuído a Robert Recorde, que estudou matemática e medicina na universidade. A partir de seu trabalho que surgiu a primeira coleção de textos matemáticos publicados na Inglaterra. (Rouse Ball, 1889, p. 15) Entre esse livros, destacamos o *The Ground of Artes* (1540), que se tornou autoridade no ensino de aritmética até a publicação de Cocker (a qual trataremos mais adiante), e o seu *The Whetstone of the Witt* (1557), um livro de álgebra que seguia a tradição cossista. (Stedall, 2002, p. 41) O livro de aritmética de Recorde também é interessante por marcar uma época onde o ensino da matemática na Inglaterra começava a se tornar mais binário. Recorde escreveu esse livro tendo tanto os praticantes como universitários em mente. Com as edições posteriores, podemos ver que os editores demonstram um apelo maior às aplicações, que já não atendiam o interesse do modelo euclidiano universitário. (Stedall, 2002, p. 26, 28) Os capítulos subsequentes nos ajudarão a melhor distinguir essas duas esferas da matemática na sociedade inglesa.

Em se tratando de álgebra, podemos dizer que não existia ainda muita simpatia pelo assunto, o que se atesta pela carência de livros-textos, sobretudo na língua vernácula. (Stedall, 2002, p. 57) O desenvolvimento da imprensa muito ajudou na explosão da disseminação de novos conhecimentos na época, mas a álgebra não encontrava muitos representantes em lançamento. Para se ter uma noção, o *Whetstone of the Witt* de 1557 permaneceu por muitos anos como o único representante original inglês do assunto. (Stedall, 2002, p. 41) O pequeno volume de Mennher, *Arithmetique seconde*, por sua vez, foi o único texto de álgebra a ser produzido nos primeiros trinta anos do século XVII, e o mesmo não passava de um compilado de textos franceses e holandeses mais antigos. Essa situação pobre de livros algébricos não era muito diferente no exterior, onde também havia mais reedições de textos do século anterior que não costumavam ir além da tradição cossista. (Stedall, 2002, p. 59)

Diante dessa situação, a presente dissertação irá começar discorrendo sobre os dois primeiros livros originais algébricos que realmente impactaram os ingleses. Tratam-se das obras de William Oughtred e Thomas Harriot, ambas publicadas no mesmo ano de 1631. Conhecer o pano de fundo dessas obras de Oughtred e Harriot não apenas nos ajudará a perceber o que já foi dito sobre as universidades inglesas, como nos mostrará o caráter contemplativo e o papel dos mecenas na formação do que seria o embrião da álgebra inglesa do século XVII.

2 O *Clavis* de William Oughtred

2.1 William Oughtred

William Oughtred nasceu em 1574 em Eton, Buckinghamshire, Inglaterra, e faleceu em 1660, aos 86 anos (Cajori, 1916, p. 15). Segundo relata Clark, seu pai Benjamin Oughtred, entendedor de aritmética básica que ensinou escrita na Eton School, muito ajudou os estudos escolares de Oughtred. (Clark, 1898, p.106, apud Cajori, 1916, p. 3) Nessa famosa escola, preparavam-se alunos para as universidades, e lá o jovem recebeu treinamento forte sobre conhecimento clássico.

Quando tinha 17 anos, Oughtred foi então admitido à *King's College* de Cambridge, onde se tornou *fellow*[4], em 1595. Nos anos posteriores, Oughtred ainda tornou-se bacharel de artes, em 1596, e mestre de artes em 1600. Apesar de seus estudos na universidade terem consistido principalmente de teologia e filosofia, desde os 12 anos de idade, Oughtred já demonstrava interesse pela matemática de modo geral. (Cajori, 1916, p. 3) Segundo seus próprios relatos, Oughtred estudava matemática à noite após completar seus estudos regulares:

> ...acima desses estudos usuais, eu me empreguei às ciências matemáticas, eu abri mão noite após noite de meu sono natural, danificando meu corpo e o acostumando a se manter acordado, ao frio e ao labor, enquanto a maioria dos outros descansavam. (Oughtred, 1633 [?], p. 8, apud Cajori, 1916, p. 4)[5]

A passagem ajuda a mostrar a paixão que Oughtred tinha pelos estudos matemáticos que, até então, não recebiam ênfase nem em sua escola nem em Cambridge. (Cajori, 1916, p. 4) Antes mesmo de terminar sua graduação, Oughtred já havia terminado sua primeira obra, *Easy Way of Delineating Sun-Dials by Geometry* (*Método Fácil de Delinear Relógios de Sol pela Geometria*), que veio a ser publicada em 1647. Seu interesse pelo estudo e construção de relógios de pulso eram de relevância na época, uma vez que nem relógios de ponteiro nem de pêndulo existiam ainda. (Cajori, 1916, p. 5)

No ano de 1604, aos 29 anos, Oughtred ingressou em sua carreira profissional, e foi apontado como ministro episcopal, posição respeitada entre homens estudiosos, instituído como vigário de Shalford. Em 1610, Oughtred foi promovido a de reitor de Albury, cargo que veio a ocupar pelo resto de sua vida. (Cajori, 1916, p. 6)

Oughtred rapidamente ganhou fama também como um matemático apesar de não ter sido formalmente treinado, e logo começou a separar seu tempo livre após seus deveres com

---

4 Fellow era uma afiliação reservada a graduados de colégios (*colleges*) de Cambridge e Oxford que haviam sido eleitos, compartilhando da governança e recebendo certos tipos de privilégios dentro dos colégios. (Britannica, online)

5 ...the time which over and above those usual studies I employed upon the Mathematical sciences, I redeemed night by night from my natural sleep, defrauding my body, and injuring it to watching, cold, and labour, while most others tooke their rest.

a igreja para estudar e ensinar matemática. Durante a década de 1620, começou a dar aulas particulares e teve, entre seus alunos, John Wallis e Christopher Wren, que compartilhavam da casa e hospitalidade do ensinador durante os estudos. Oughtred demonstrava forte desejo em passar seus conhecimentos para mais jovens, e recusava qualquer pagamento, alegando que já era muito bem pago como um clérigo (William..., l. 27-33). Seu aluno, John Wallis, depois viria a se tornar um de seus maiores defensores, como veremos no capítulo 5.

No ano de 1628, Oughtred tornou-se tutor de matemática do Lord William Howard, filho do conde de Arundel. Um de seus familiares, Charles Cavendish, foi provavelmente quem introduziu o trabalho de Viète a Oughtred, conforme aponta Stedall (2003, p.27). Foi também a pedido dele, um patrocinador da prática de ensino, que Oughtred escreveu um texto algébrico resumido para suplementar os estudos do jovem aristocrata. (Cajori, 1916, p. 17) Satisfeito com os esforços para ajudar seu filho, o conde de Arundel tornou-se patrono de Oughtred e o encorajou publicar sua obra (William..., l. 41-43).

O livro, intitulado *Arithmeticae in numeris et speciebus instituto...quasi clavis mathematicae* —conhecido popularmente como *Clavis Mathematicae*, ou apenas *Clavis* — foi publicado em latim em 1631, e certamente constitui a sua maior contribuição (Cajori, 1916, p. 17). Apesar de sua brevidade de 88 páginas, o livro rapidamente interessou os colegas matemáticos de Oughtred, e a tempo de sua segunda edição, a reputação do autor já havia se estabelecido em uma comunidade maior de cientistas europeus. (William..., l. 43-47) O sucesso de sua obra ainda o motivou a escrever uma série de obras matemáticas, dentre as quais as mais notáveis são *Circles of Proportion* e a *Trogonometrie*. (Cajori, 1916, p35) A invenção e o subsequente uso dos logaritmos que surgiu na época também o motivou a desenvolver a régua de cálculo, uma régua que não era usada para medir, mas de cujo mecanismo permitia processar dados variáveis representados por logaritmos. (William..., l. 73-75)

Nossa análise a seguir porém, irá se dirigir ao pequeno *Clavis*, que de certa forma condensou o essencial da aritmética e da álgebra que era conhecido até o momento. (Cajori, 1916, p. 18) O papel que essa breve obra acabou tendo na álgebra inglesa será testemunhado nos capítulos seguintes.

2. 2 *Clavis Mathematicae*

O Pensamento de Oughtred no *Clavis*

Na primeira página da obra, Oughtred traz uma observação direcionada ao seu aluno William Howard:

> Desde o tempo que te servi tão devotamente, por ordem de seu pai, expondo os ensinamentos de matemática, eu não desejei nada mais, além de que eu possa mostrar isso, ou seja, o método analítico (de cujo ensino, isso é certamente parte). E por esta razão, eu lembrei as demonstrações de Euclides, entre outras coisas, na forma analítica, das quais no capítulo 19 desse livro, muitos exemplos hão de ser encontrados. (Oughtred, 1631, p. 1, apud Stedall, 2002, p. 59)

A passagem é reveladora por sugerir que um dos propósitos de Oughtred com o *Clavis* era similar àquele de Viète, isto é, de utilizar a notação algébrica para redescobrir e escrever os teoremas da geometria antiga. É sabido que de Viète surgiu a crença de que os antigos teriam escondido o método de descoberta de seus teoremas por trás do seu sintetismo (Tatiana, 2012, p. 300). Oughtred, nesse momento, parece ecoar essa crença. E não à toa, o mencionado capítulo 19, ao fim da obra, demarca seu objetivo: todos os 14 teoremas do livro II de Euclides são "descobertos" analiticamente, e isto sem a ajuda visual de qualquer diagrama nas primeiras edições. (Stedall, 2002, p. 61) Algumas linhas depois, as palavras de Oughtred reforçam a ideia de que ele estava, de certa forma, seguindo os passos de Viète:

> Então eu quero estender aos estudantes de matemática, de certa forma, o fio de Ariadne, com a ajuda do qual eles possam ser levados aos segredos mais internos desse conhecimento, e direcionados a um entendimento mais fácil e profundo dos autores mais antigos e favorecidos. (Oughtred, 1631, p.1, apud Stedall, 2002, p. 60)[6]

A passagem novamente mostra uma reverência aos autores antigos, além de ratificar que com a obra, ele objetiva redescobrir seus conhecimentos. Mas, quando ele afirma que pretende fazer seus alunos alcançarem esse conhecimento de modo mais fácil e profundo, ele certamente se referia à utilização do seu método analítico para tanto. Oughtred era um admirador dos antigos, as passagens não deixam dúvidas, mas ainda assim ele sentia que a alta verbosidade desses textos os tornavam desnecessariamente difíceis de ler. A passagem a seguir mostra como ele acreditava que se poderia remediar esse problema: através do simbolismo algébrico.

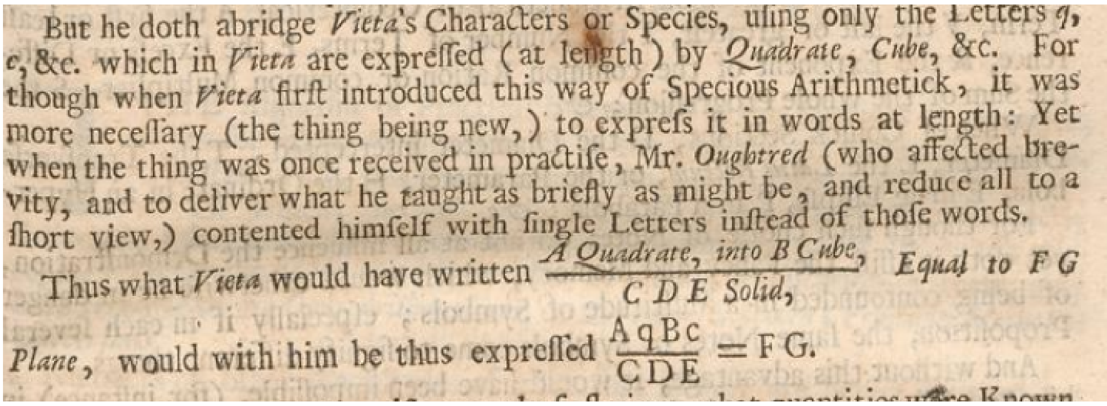
> Portanto, para que eu possa mais claramente contemplar as coisas em si, ao despir as proposições e demonstrações de seus véus de palavras, as designei em notas e símbolos que aparecem aos olhos. (Oughtred, 1631, p. 2, apud Cajori, 1916, p. 85)[7]

Deve ter sido por conta disso que Oughtred trouxe uma série de notações novas em seu *Clavis*. A notação desse livro merece atenção por mostrar claramente a sua intenção de ir além de Viète em sua tentativa de estabelecer símbolos que "aparecem aos olhos." Seu já mencionado pupilo John Wallis apresenta uma comparação em seu *Tratado de Álgebra* que bem resume a diferença entre o simbolismo de Oughtred e seu influenciador francês.

---

[6] Then I want to extend to students of mathematics, as it were, Ariadne's thread, by the help of which they may be led to the innermost secrets of this knowledge, and directed towards an easier and deeper understanding of the most ancient and favoured authors.

[7] Wherefore, that I might more clearly behold the things themselves, I uncasing the Propositions and Demonstrations out of their covert of words, designed them in notes and species appearing to the very eye.



But he doth abridge *Vieta*'s Characters or Species, uſing only the Letters *q*, *c*, &c. which in *Vieta* are expreſſed (at length) by *Quadrate*, *Cube*, &c. For though when *Vieta* firſt introduced this way of Specious Arithmetick, it was more neceſſary (the thing being new,) to expreſs it in words at length: Yet when the thing was once received in practiſe, Mr. *Oughtred* (who affected brevity, and to deliver what he taught as briefly as might be, and reduce all to a ſhort view,) contented himſelf with ſingle Letters inſtead of thoſe words. Thus what *Vieta* would have written $\frac{A\ Quadrate,\ into\ B\ Cube,}{C\ D\ E\ Solid,}$ *Equal to F G Plane*, would with him be thus expreſſed $\frac{AqBc}{CDE} = FG.$

Figura (1): a diferença entre a notação de Viète e Oughtred, como mostrado por Wallis (Wallis, 1685, p. 67)

Assim, aquilo que Viète representava por:

$$\frac{Aquadrate,\ into\ Bcube,}{CDE\ Solid,},\ Equal\ to\ F\,G\ plane$$

Oughtred simplesmente escrevia como:

$$\frac{AqBc}{CDE} = F\,G$$

Ou seja, por mais que ele ainda representasse as quantidades por letras maiúsculas , vogais para as desconhecidas e consoantes para as conhecidas, as suas potências abreviam os termos "*cubus*", "*quadratum*", etc. Desse modo, o que antes se escrevia como *Aquadratum* e *Acubus*, por exemplo, Oughtred escreve simplesmente como *Aq* e *Ac*. Além disso, termos como "*plane*" e "*solid*", usados para demarcar a"dimensão do objeto, são removidos, assim como os termos "*into*" e "*equal to*", que é substituído pelo sinal "=". Ao observar as notações lado a lado, percebe-se que a equação perde a sua aparência de frase, e passa a assumir uma forma mais simbólica e sucinta.

Outras notações novas estão presentes no *Clavis*. Talvez a mais notável delas seja o ×, que é até hoje utilizado para denotar multiplicação. Ele é apresentado no capítulo IV sobre a operação, mas especificamente para denotar o produto de espécies, e não de números. (Oughtred, 1648, p. 10) O símbolo, contudo, não é visto pela primeira vez no *Clavis*. Ele chegou a figurar antes em um apêndice da tradução inglesa da obra *Descriptio* de John Napier, feita por E. Wright em 1618, mas este pedaço foi provavelmente escrito também pelo próprio Oughtred, como aponta Cajori. (Cajori, 1993, p. 25)

Por último, temos ainda a notação "*A.B::C.D*" do *Clavis*, que é de fato um dos primeiros simbolismos utilizados para proporções. Antes dele, proporções eram expressas de uma maneira menos concisa: por extenso ou escrevendo os termos da proporção em uma reta, com traços ou pontos sendo usados para separá-los. (Cajori, 1993, pp. 196) Este exemplo, juntamente com aquela comparação com a notação de Viète, mostram como Oughtred estava realmente almejando remover a verbosidade excessiva que ainda se fazia presente na álgebra.

Álgebra de Oughtred

No primeiro capítulo, Oughtred inicia seu conteúdo matemático, apresentando primeiramente o sistema hindu-arábico de numeração. Em seguida, ele traz a sua definição sobre os sinais + e – que, apesar de sucinta, é importante por sinalizar que ele reconhece a dupla função que eles possuem: operacional e “qualitativa”. Oughtred diz que:

- “Signum additionis, sive affirmationis, est + plus” (O sinal tanto de adição como afirmação é + mais) ;
- “Signum subductionis, sive negationis est – minus.” (O sinal tanto de subtração como negação é – menos) (Oughtred, 1631, p. 2, apud Cajori, 1916, p. 25)

´Oughtred não discute sobre qual seria a diferença conceitual entre um número com o sinal + e aquele precedido pelo sinal -, mas seu discurso sugere que o conceito basilar de sua álgebra é de natureza geométrica:

> Magnitudes podem ser denotadas tanto por números que significam sua medida: uma linha de 7 *inches* pelo 7, ou por uma letra, A, B, C, etc ...(Oughtred, 1648, p. 3)[8]

Os termos afirmação/negação e adição/subtração serão bastante vistos ao longo deste trabalho. Os primeiros termos referem-se a uma espécie de qualidade da quantidade considerada em si, isto é, se a quantidade é uma afirmação ou uma negação, enquanto os segundos referem-se às operações, e insinuam um agregado de quantidades em vez de quantidades isoladas. A diferença entre a apresentação teórica dessa separação e a sua significação na prática será algo bastante discutido e, em Oughtred, já temos algumas pistas de como será esse tratamento apesar de essas serem raramente evocadas aqui. Como ficou sugerido, Oughtred tem mais preocupação em aplicar a sua álgebra a problemas geométricos e, nesse contexto, as raízes negativas acabam não se fazendo presente. Porém, é importante registrar que Oughtred confere aqui uma separação teórica entre os significados dos sinais, sem recorrer a qualquer artifício para defender a existência de “negações”.

Nos capítulos seguintes, essa separação se torna prática: Oughtred explica como realizar as quatro operações fundamentais, primeiramente com termos “inteiros” e depois com frações, e acaba por somar, subtrair, multiplicar e dividir termos negativos da mesma maneira como faz com as afirmações. A maneira como Oughtred estabelece as regras para realizar essas operações é notável; vejamos a seguir cada uma delas:

Adição

> Adição simbólica junta todas as magnitudes dadas sem mudar seus sinais. (Oughtred, 1648, p. 5)[9]

[8] Magnitudines denotari possunt vel numeris mensuram ipsarum significantibus, vel etiam speciebus: ut linea linga septem uncias, designatur vel per 7; vel per unam aliquam literam aut notam A, B, C,, etc.
[9] Additio speciosa conjungit omnes magntudines datas servatis signis.

4. Additio speciosa conjungit omnes magnitudines datas servatis signis

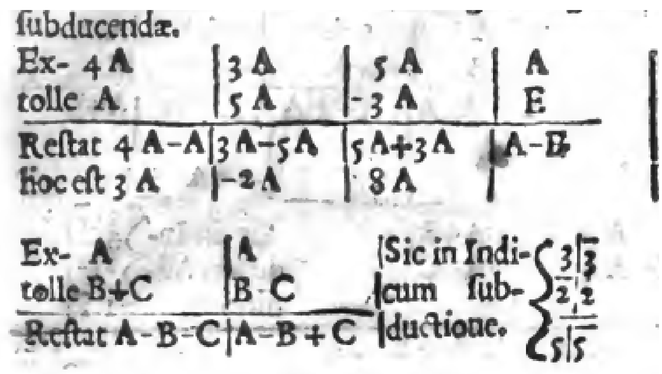
ad	3A	A	5A	3A	A
adde	A	-A	-3A	-5A	E
Summa	3A+A	A-A	5A-3A	3A-5A	A+E
hoc est	4A	0	2A	-2A	

ad	A+B	A+B	Sic in Indicum Additione
adde	A-B	A-C	3 | 3 ; 2 | 2 ; 1 | 1
Summa	2A	2A+B-C	

Figura (2): Exemplos da operação de soma no Clavis(Oughtred, 1648, p. 5)

Subtração

Subtração simbólica junta as magnitudes dadas, mudando o sinal daquelas que devem ser subtraídas. (Oughtred, 1648, p. 8)[10]



subducendæ.

Ex-	4A	3A	5A	A
tolle	A	5A	-3A	E
Restat	4A-A	3A-5A	5A+3A	A-E
hoc est	3A	-2A	8A	

Ex-	A	A	Sic in Indicum subductione.
tolle	B+C	B C	3 | 3 ; 2 | 2 ; 5 | 5
Restat	A-B-C	A-B+C	

Figura(3): Exemplos de subtração simbólica. (Oughtred, 164, p. 6)

Multiplicação

Multiplicação simbólica conecta ambas as magnitudes com a nota × ou na maioria das vezes sem ele, se as quantidades serem denotadas pela mesma letra. Se os sinais são ambos iguais, o produto será afirmativo, se diferentes, negativo. (Oughtred, 1648, p. 10)[11]

[10] Subductio speciosa conjungit uttramque magnitudinem datam, mutatis omnibus signis magnitudinis subducendae.

[11] Multiplicatio speciosa connectit untramque magnitudinem propositam cum notâ in vel X: vel plerum que absque notâ, si magnitudines denotentur unicâ hiterâ. Et si signa sint similia, producta magnitudo erit adfirmata: sin diversa, negata. Effertur autem per in.

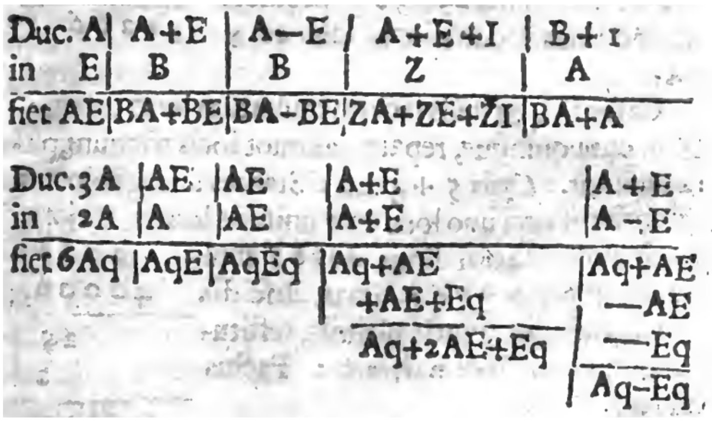


Figura (4): Exemplos de multiplicação (Oughtred, 1648, p. 10)

Divisão

> Divisão simbólica coloca o divisor sob o dividendo com uma linha entre eles, e então considera se, em suas composições, qualquer magnitude multiplica ambos, e essa é retirada nas duas.
>
> Divisão, quando o divisor e dividendo possuem os mesmos sinais, seja + ou –, terá + no quociente, quando diferente sinais, -. (Oughtred, 1648, p. 10)[12]

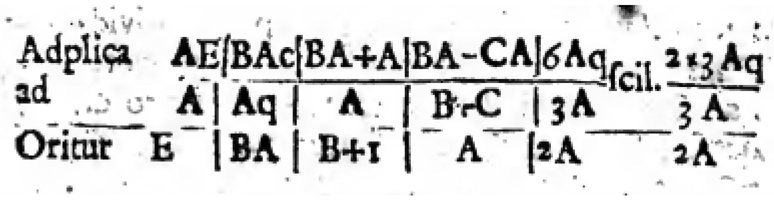


Figura (5): Exemplos de divisão (Oughtred, 1648, p. 15)

Percebamos primeiramente que cada operação é realizada por meio de uma regra concisa, que se aplica igualmente para termos simples e compostos. A partir delas, interpreta-se uma ideia de que os sinais "pertencem" às quantidades as quais elas precedem. Por exemplo*,* no termo *A-B, A* possui o sinal + *e B, o* sinal -. O mais importante de tudo, porém, é que Oughtred faz essa associação dos sinais aos termos de maneira que as operações resumem-se puramente a uma manipulação simbólica: para somar, "junte os termos" em uma única expressão, mantendo todos os seus sinais; para subtrair, junte os termos da mesma forma, porém alterando os sinais do subtraendo, e assim por diante. Oughtred, assim, não se preocupa em fundamentar as regras que ele ditou, e a ideia de somar ou subtrair um símbolo negativo não precisa ser argumentada, pois o que importa apenas é saber como os símbolos se transformam em cada operação. Essa é uma atitude que precisa ser destacada aqui, pois muitos dos autores posteriores tentam de alguma forma explicar a razão pela qual essas regras

[12] Divisio speciosa statuit magnitudinem dividendtem sub dividendâ, cum lineolâ interjectâ: tum considerat an magnitudo aliqua utramque communitèr multiplicaverit; atque ipsam utrobique expungit. Divisio etiam in iisdem dat +, in diversis -: effertur autem per ad.

valem, muitas vezes por meio de analogias. Oughtred, que defendeu o simbolismo "transparente" com menos veemência que muitos desses, não fez nada do tipo.

Após as operações, o *Clavis* segue o tratamento das quantidades "surdas", proporções e de potências de binômios. A próxima questão relevante no *Clavis* concerne o capítulo XVI, que inicia seu tratamento sobre equações. O capítulo abre com o que é conhecido como *Regra da Álgebra.*

> Sempre que qualquer problema é proposto, suponha que esteja feito, e tendo usado um raciocínio cabível, chame a quantidade buscada de *A*, ou qualquer outra vogal, e para as quantidades dadas coloque consoantes. (Oughtred, 1664, p. 52)

Essa regra constituía uma peça chave da explanação cossista sobre equações, e foi por sua vez absorvida também por *Viète*. (Stedall, 2002, p. 6) Trata-se de uma abstração inerente à álgebra, em que a natureza da quantidade é dissipada quando associada a um símbolo matemático. (Stedall, 2002, p. 40) No caso de Oughtred, por exemplo, que preocupa-se com problemas com grandezas geométricas, podemos dizer que o papel da regra da álgebra é abstrair essa natureza geométrica da quantidade para permitir seu manuseio simbólico por meio de equações. Esse manuseio, por sua vez, é realizado por meio de certas técnicas que visam simplificar a equação, algo que também vemos nos livros cossistas. (Stedall, 2002, p. 6) De fato, veremos capítulos com abordagem similar na maioria das obras posteriores de álgebra, e portanto colocaremos aqui as técnicas de simplificação enumeradas por Oughtred.

1. Se a quantidade buscada; ou qualquer grau dela estiver em uma fração, reduza todas as quantidades a uma denominação. De modo que o denominador comum sendo removido, a equação possa consistir apenas de numeradores.

*2.*Se o que for dado em medida estiver misturado com a quantidade desconhecidas, transponha-as mudando os seus sinais.

3.Se a maior espécie da quantidade buscada estiver multiplicado por qualquer quantidade dada, divida a equação por ela.

4.Se acontecer de todas as equações estarem multiplicadas por um grau da quantidade buscada, divida a equação pela menor espécie, de acordo com a ordem da tabela.

5. Em segundo lugar, caso qualquer quantidade for uma raiz surda, a equação deve ser buscada nas potências em si. (Oughtred, 1648, p. 50-53)

Edições posteriores apresentaram logo depois dessas regras o tratamento de equações quadráticas: sabendo-se transformar equações, era natural chegar às suas raízes (Stedall, 2002, p. 67). O autor original fez diferente, e somente chegou a elas ao tentar resolver as proposições II.5 e II.6 de Euclides (Stedall, 2002, p. 67) que, como já dissemos, se encontram no capítulo 19. Sendo assim, elas aparecem especificamente no contexto da resolução de problemas geométricos.

Esse tratamento tardio e não sistematizado das equações quadráticas no *Clavis* sinalizam mais uma vez como Oughtred não objetivava resolver problemas puramente algébricos, mas sim aplicar seus métodos simbólicos à geometria. É provavelmente por essa mesma razão que o *Clavis* não apresenta a resolução algébrica de equações cúbicas, as quais já se sabia resolver desde o século XVI (Stedall, 2002, p. 48). De fato, a obra é finalizada com três capítulos dedicados à aplicação do seu método algébrico a problemas geométricos, modelados de maneira a servirem de teste sobre o conhecimento do assunto (Cajori, 1916, p. 28).

De qualquer maneira, é de relevância finalizar a análise vendo como Oughtred expressou as suas equações quadráticas. As três formas às quais ele chegou foram as seguintes:

1. $ZA - Aq = AE$
2. $Aq + ZA = AE$
3. $Aq - ZA = AE$

onde A é maior do que E e:

$$Z = A + E$$
$$X = A - E$$

A relação final à qual ele chega é que a primeira forma tem duas soluções, ambas positivas, enquanto as outras duas admitem apenas uma solução positiva.

1. $A = \frac{1}{2}Z \pm \sqrt{\frac{1}{4}Zq - AE}$
2. $A = \sqrt{\frac{1}{4}Zq + AE} + \frac{1}{2}Z$
3. $A = \sqrt{\frac{1}{4}Zq + AE} - \frac{1}{2}Z$

Como era de se imaginar nesse contexto, vemos que Oughtred admite apenas as soluções positivas para as equações quadrática, sem sequer comentar sobre as potenciais soluções negativas ou imaginárias. Além disso, podemos ainda perceber que uma série de equações quadráticas não se encaixam em nenhum desses três casos, especificamente aquelas que possuem duas raízes negativas. Essas equações poderiam assumir a suposta forma $Aq + ZA + AE = 0$ ou $Aq + ZA = -AE$, mas Oughtred nem mesmo escreve equações igualadas a zero ou a quantidades negativas. No mais, o próprio fato de que as quadráticas são apresentadas no contexto de problemas geométricos, onde soluções negativas não tem lugar, explica suficientemente o porquê de esa forma ser totalmente ignorada.

2.3 Conclusão

O *Clavis* de Oughtred tinha o papel didático de ensinar as vantagens do método analítico para resolver problemas geométricos. Oughtred determina que o simbolismo da álgebra permite que o alto conhecimento dos antigos possa ser expresso sem a verbosidade com a qual ela fora antes transmitida. Dessa maneira, apesar de suas vantagens, a álgebra é apresentada de uma maneira mais instrumental do que final. A grande vantagem desse instrumento é que ele abstrai a natureza das quantidades com as quais estamos lidando, de maneira que basta saber de que maneira os símbolos se transformam. Esta característica é plena na apresentação de Oughtred sobre as operações aritméticas com espécies, pois ele opera com quantidades negativas e afirmativas lado a lado, bastando seguir as regras que concernem os seus sinais. Aqui, não há espaço para qualquer tipo de explicação sobre o significado desse manuseio simbólico, nem mesmo quando estivermos lidando com quantidades negativas, as quais não eram ainda plenamente aceitas. O seu reconhecimento de quantidades negativas, porém, não impede que estas estejam ausentes nas raízes de problemas, fato decorrente de seus objetivos geométricos com a obra.

3 Os manuscritos e a *Praxis* Thomas Harriot

Outro nome que se destacou na álgebra inglesa do início do séc. XVI foi o polímata Thomas Harriot (ca. 1560 - 1621). Assim como Oughtred, Harriot não recebeu treinamento matemático na universidade, e não assegurou nenhum cargo acadêmico.

3. 1 Thomas Harriot

Quase nada se sabe sobre o pano de fundo dos primeiros anos de Harriot, mas ele foi um homem de Oxford, tendo estudado lá no período de 1577 a 1580 (Pycior, 1997, pp. 55). Na década que se iniciava, foi apadrinhado por Sir Walter Raleigh, um explorador membro da corte de Elizabeth I (Almeida, 2010, p. 46), e assim permaneceu até a década de 1590. Em 1585, foi enviado por Raleigh a uma expedição na Virgínia, tendo servido como agrimensor. A viagem o levou à publicação de *A briefe and true report of the new found land of Virginia* (*Um Breve e verdadeiro relato sobre a nova terra da Virgínia*), sua única obra publicada em vida. (Seltman, 2007, p. 3)

A partir da década de 1590, Harriot passou a ser apadrinhado por Henry Percy, o nono conde de Northumberland. Essa integração à residência de Henry Percy o pôs em contato com boa parte de seus companheiros matemáticos e científicos. Entre esses intelectuais, figurava Nathaniel Toporley (1564–1632), que graduou-se em Oxford quatro anos após Harriot. Toporley se destaca por ter sido escrituário de Viète, e foi quase certamente por meio dele que Harriot obteve seu conhecimento detalhado do matemático francês. (Stedall, 2002, p. 90)

Harriot faleceu no ano de 1621 mas, em seu testamento, encarregou Toporley de juntar seus manuscritos algébricos em um tratado. Por algum motivo, Toporley acabou não o fazendo, e a tarefa ficou nas mãos de Walter Warner (c. 1557–1643), outro intelectual da residência de Henry Percy. (Stedall, 2002, p. 89) O resultado final foi publicado em 1631, pouco depois do *Clavis*, sob o título de *Artis analyticae praxi*s. (Stedall, 2003, p. 20) De acordo com Toporley, a obra de Warner estava longe daquilo que o falecido pretendia, e disparou uma crítica em *Corrector analyticus artis posthumae,* além de tentar estruturar o verdadeiro tratado de Harriot em um documento que Stedall chama de *Summary*. (Stedall, 2002, p. 108) Quase 400 anos depois, a mesma baseou-se nas notas de Toporley para tentar reconstruir o que ela chamou de *Theory on Equations* (*Teoria sobre equações*). A *praxis* de Warner, por sua vez, foi traduzida para o inglês e comentada por Muriel Seltman e Robert Goulding em 2007.

3.2 A Álgebra de Thomas Harriot

Tanto o *Isagoge* quanto o *De numerosa potestatum de exegesin resolutione* de Viète foram fundamentais para o *Tratado de Equações* de Harriot. De fato, além de seu tratamento teórico próprio, boa parte do conteúdo trata-se de material de Viète reescrito em uma nova notação. (Stedall, 2002, p. 94) Contudo, a principal característica da *Praxis* de Harriot está exatamente em sua notação, notavelmente diferente daquela do matemático francês. A álgebra de Harriot é expressa de uma maneira completamente simbólica, enquanto a de seu antecessor dependia de elementos linguísticos (Seltman, 2007 p. 9). Como vimos no capítulo anterior, Viète usava termos como A*quadratum* que literalmente significavam "um quadrado cujo lado mede A", seguindo a tradição grega (id, 2007, p. 8). Harriot por sua vez refere-se a potências por meio de letras escritas de maneira iterada, o que demarcava uma multiplicação sucessiva. Sendo assim, A*quadratum* se torna aa, A*cubus* se torna aaa, e as demais potências seguem o mesmo padrão, por meio de uma repetição da letra. O produto entre termos distintos tampouco foge à regra: o produto entre a e b se escreve da forma simples ab. Por mais que esse tipo de notação possa vir a se tornar cansativa e menos agradável visualmente que os posteriores expoentes de Descartes, é importante perceber a mudança que essa notação representa: Harriot não baseava sua notação em quantidade geométrica, ainda que aplicasse sua álgebra a problemas geométricos (Seltman, 2007, p.8). Outra diferença entre as notações se encontra no fato de que Viète utilizava vogais maiúsculas para representar quantidades desconhecidas, e consoantes maiúsculas para as conhecidas, enquanto Harriot somente usava letras minúsculas, sendo a a quantidade desconhecida, e as subsequentes letras do alfabeto, $b, c, d, f,$ etc., as conhecidas.

Os manuscritos de Harriot também são marcados por uma álgebra pouco dependente de verbosidade. Muitas folhas são cobertas de equações, sem espaço para declarações. A primeira seção da *Praxis*, por exemplo, contém as operações de aritmética em espécies, sem que haja uma discussão prévia sobre conceitos como número e sinais aritméticos. O autor chega a operar com termos algébricos negativos "puros", somando por exemplo o termo $a+b$ a $-d$, e subtraindo $a+b$ de $-b$, resultando a. Já na multiplicação e divisão, não aparecem os termos puros dessa forma, mas ele opera com termos compostos que contêm o sinal subtrativo. A partir desses exemplos unicamente que podemos depreender como o autor entendia a regra dos sinais das operações. Como diz Seltman, a *Praxis* dependeu menos de prova formal do que na evidência imediata das equações organizadas na página (Seltman, 2007, p. *vi*). Trazemos abaixo uma parte dessa seção reconstruída por Stedall, para que percebamos um pouco da álgebra "pura" de Harriot.

1) *Operations of arithmetic in letters*[1]

	a		aa		aaa	
add	b	add	bc	add	bcc	
sum	$a+b$	sum	$aa+bc$	sum	$aaa+bcc$	
	a		aa		aaa	
subtract	b	subtract	bc	subtract	bcc	
remainder	$a-b$	remainder	$aa-bc$	remainder	$aaa-bcc$	
	$a+b$		$a+b$		$a+b$	$a+b$
add	$c+d$		$c-d$		$-d$	$-b$
sum	$a+b+c+d$		$a+b+c-d$		$a+b-d$	a
	$a+b$		$aa+cc$		$aaa+cdf-ddd$	
add	$c+b$		$aa+cc$		$aaa+bdd+ddd$	
sum	$a+c+2,b$		$2,aa+2,cc$		$2,aaa+cdf+bdd$	
	$a+b$		$a+b$		$a+b$	$a+b$
subtract	$c+d$		$c-d$		$-d$	$-b$
remainder	$a+b-c-d$		$a+b-c+d$		$a+b+d$	$a+2,b$
			or $a+b-,c-d$			
	$a+b$		$aa+cc$		$aaa+cdf-ddd$	
subtract	$c+b$		$aa+cc$		$aaa+bdd+ddd$	
remainder	$a+b-c-b$		$aa+cc-aa-cc$		$cdf-bdd-2,ddd$	
that is:	$a-c$	that is:	0			

Figura (6): Operações aritméticas com letras de Harriot (Stedall, 2003, p. 39)

Não podemos deixar de perceber na imagem que o autor preserva a "lei da homogeneidade" de modo que ele somente pode somar ou subtrair objetos de mesma "dimensão". Esta é uma característica da tradição clássica grega que ele acaba mantendo, assim como fez Viète, apesar da sua maior "liberdade" de interpretação dos símbolos algébricos. Portanto, para a presentar a operação de soma de frações, por exemplo, ele faz

$$\frac{ac}{b}+\frac{zz}{g}=\frac{acg+bzz}{bg}$$

Figura (7): Soma de Frações segundo Harriot. (Stedall, 2003, p. 11)

Aqui percebe-se que ele precisa substituir o *Aquadratum* pelo termo ac, de modo que ambos os termos somados tenham a mesma dimensão (Stedall, 2003, p. 11).

Harriot também traz um estudo inovador sobre a formação de equações e dos coeficientes. Na seção 3, ele trata e soluciona as equações canônicas, que nada mais são do que equações polinomiais em que o termo conhecido é isolado em um dos lados da equação. Por exemplo, as soluções da equação canônica $bc = ba + ca - aa$ têm por soluções $a = c$ e $a = b$. Na seção seguinte, ele apresenta a "origem" dessas equações num método similar à nossa fatoração em binômios. No exemplo dado, por exemplo, a equação é formada pelo produto dos termos $(a-c)$ e $(a-b)$. A partir disso, Harriot consegue depreender a relação que existe entre os coeficientes e as raízes de uma equação. Tendo isso em mãos, ele também consegue desenvolver uma técnica que permite eliminar certas potências de uma equação, algo que ele usa para analisar as condições segundo as quais seria possível eliminar duas potências em uma quártica (Almeida, 2010, p. 50). Todo esse tratamento teórico de equações consideradas em si, como veremos, constituirá uma parte fundamental da álgebra nos autores seguintes. Na figura abaixo, vemos como o autor forma uma equação biquadrática e deduz suas soluções. Repare que a solução negativa $-f$ não é considerada.

$$
\begin{array}{l|l}
a-b & = aaa - baaa \\
a-c & \qquad - caaa + bcaa \\
a-d & \qquad - daaa + bdaa \\
a+f & \qquad + faaa + cdaa - bcda \\
\hline
 & \qquad\qquad - bfaa + bcfa \\
 & \qquad\qquad - cfaa + bdfa \\
 & \qquad\qquad - dfaa + cdfa - bcdf = 0000
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{therefore:} \quad bcdf = & - bcda + bcaa & \\
 & + bcfa + bdaa & \\
 & + bdfa + cdaa - baaa & a = b \\
 & + cdfa - bfaa - caaa & a = c \\
 & \qquad - cfaa - daaa & a = d \\
 & \qquad - dfaa + faaa + aaaa &
\end{array}
$$

Figura (8): Harriot gera uma equação canônica de dimensão quatro (Stedall, 2003, p. 142)

A questão das raízes negativas na álgebra de Harriot é importante pois, segundo Stedall, a falta delas constitui uma das maiores críticas ao trabalho do autor. (Stedall, 2003, p.16) O que acontece é que, de fato, na *Praxis*, elas são deixadas de lado, mas temos de ter em mente que essa obra constitui uma edição feita por Walter Warner. A exclusão dos negativos na *Praxis*, portanto, poderia representar apenas a opinião de Warner perante os negativos, ou alguma outra coisa. (Seltman, 2007, p. 12) Quanto a Harriot, podemos ver que ele de fato exclui raízes negativas em algumas ocasiões. Com relação a isso, Stedall oferece uma boa percepção: como Harriot teve boa parte de seu trabalho inspirado em Viète, o qual se preocupava essencialmente em obter raízes positivas, é natural que a busca dessas tenham sido também o ponto de partida do matemático inglês. (Stedall, 2003, p. 16). Apesar disso, Stedall e Seltman também mostram que há de fato uma série de manuscritos em que raízes negativas aparecem, de maneira que podemos ver uma certa disparidade entre esses vários documentos. Isso, Seltman explica, pode ter sido causado por uma mudança na posição de Harriot com o tempo. Diante disso, seria errado dizer que Harriot desconsiderou completamente os elementos negativos. A reconstrução de Stedall chega a abarcar uma seção em que Harriot apresenta todas as soluções para uma série de equações, inclusive as negativas, ainda que ele não apresente o procedimento algébrico para chegar a elas.

e.3.5) *Examples of equations in numbers*

$144 = +48a + 4aaa + aaaa$	$a = +2, -6$
$144 = -48a - 4aaa + aaaa$	$a = -2, +6$
$108 = -27a - 4aaa - aaaa$	$a = -3, -4$
$108 = +27a + 4aaa - aaaa$	$a = +3, +4$
$81 = +90a - 10aaa + aaaa$	$a = +1, +3, +9, -3$
$81 = -90a + 10aaa + aaaa$	$a = -1, -3, -9, +3$
$80 = -92a + 11aaa - aaaa$	$a = +4, +10, -1, -2$
$80 = +92a - 11aaa - aaaa$	$a = -4, -10, +1, +2$
$45 = +48a - 4aaa + aaaa$	$a = +1, -3$
$45 = -48a + 4aaa + aaaa$	$a = -1, +3$
$87 = -92a + 4aaa - aaaa$	$a = -1, -3$
$87 = +92a - 4aaa - aaaa$	$a = +1, +3$
$576 = +100aa + 20aaa + aaaa$	$a = +2, -4, -6, -12$
$576 = +100aa - 20aaa + aaaa$	$a = -2, +4, +6, +12$
$288 = -22aa - 14aaa - aaaa$	$a = -4, -12$
$288 = -22aa + 14aaa - aaaa$	$a = +4, +12$
$512 = -8aa + 6aaa + aaaa$	$a = +4, -8$
$512 = -8aa - 6aaa + aaaa$	$a = -4, +8$
$288 = +62aa - 7aaa - aaaa$	$a = +3, +4, -2, -12$
$288 = +62aa + 7aaa - aaaa$	$a = -3, -4, +2, +12$

Add MS 6783 f. 219

e.3.6) *Examples of equations in numbers*

$48 = +2a + 33aa + 12aaa + aaaa$	$a = +1, -2, -3, -8$
$48 = -2a + 33aa - 12aaa + aaaa$	$a = -1, +2, +3, +8$
$360 = -526a - 189aa - 24aaa - aaaa$	$a = -1, -4, -9, -10$
$360 = +526a - 189aa + 24aaa - aaaa$	$a = +1, +4, +9, +10$
$192 = +86a + 89aa + 16aaa + aaaa$	$a = +1, -3$
$192 = -86a + 89aa - 16aaa + aaaa$	$a = -1, +3$
$44 = -67a - 30aa - 8aaa - aaaa$	$a = -1, -4$
$44 = +67a - 30aa + 8aaa - aaaa$	$a = +1, +4$

Figura (9): Seção e) da Teoria de Equações de Stedall. Uma série de equações solucionadas por Harriot, e suas respectivas soluções negativas (Stedall, 2003, p. 183)

3.3 Conclusão

Para uma mais completa análise da obra de Harriot, recomendamos as já citadas obras de Muriel Seltman e Jacqueline Stedall. Contudo, a presente análise sugere que pontos-chave da álgebra de Harriot são a sua notação e a sua falta de verbosidade, coisas que sinalizam um direcionamento a uma álgebra mais simbólica. A falta de textos também nos torna incapazes de entender a concepção que o autor tinha de quantidades negativas, e as únicas coisas que podemos inferir sobre elas se dão por meio das operações que ele exemplifica. Apesar disso, vemos que Harriot reconhece raízes negativas em muitas ocasiões, algo que seu contemporâneo Oughtred não fez. Finalmente, a sua teoria sobre a constituição das equações e seus coeficientes é sem dúvida outra grande contribuição, e mostra como as quantidades negativas e imaginárias precisariam ser consideradas para a generalização do resultado de que uma equação possui tantas soluções quanto a sua dimensão. Nos autores posteriores, veremos essa teoria se desenvolver e se tornar parte do que compõe o estudo algébrico sistemático.

4 A álgebra de John Kersey

4. 1 As décadas subsequentes ao *Clavis* e ao *Praxis*

Durante mais de 20 anos após a primeira edição do *Clavis* de Oughtred, nenhum livro elementar de álgebra havia sido publicado para “competir” com ele na Inglaterra. Apesar de a *Praxis* ter sido lançada naquele mesmo ano, a obra não se comparava ao *Clavis* por não ser apta para aspirantes no assunto. (Stedall, 2002, p. 71) No ano de 1652, a obra já chegava à sua terceira edição, dessa vez livre de erros para que pudesse alcançar o público de Oxford, como provavelmente almejavam os savilianos John Ward e John Wallis. (Stedall, 2002, p. 68) Nessa mesma década, algumas alternativas surgiram das mãos de Richard Balam, Jonas Moore e Mr. Gibson, mas nenhuma chegou perto do sucesso do tradicional *Clavis* (Stedall, 2002, p. 71)

Mr. Gibson, em sua *Syntaxis mathematica* de 1655, chegou a apresentar um tipo distinto de livro, mostrando influência não apenas de Oughtred, mas também de Descartes e Harriot. Sua notação era notavelmente derivada daquela de Harriot: utilizava as letras minúsculas a e e para denotar quantidades desconhecidas, e $b, c, d, f,$ etc. para as quantidades conhecidas, além do aaa para representar um cubo, ainda que também utilizasse os expoentes de Descartes. Os métodos de Harriot também são usados para resolver numericamente uma série de equações quadráticas e cúbicas, e a fatoração em binômios também se fez presente. Além destes, outros resultados recentes estavam incluídos em sua obra, que parecia acessibilizar as ideias de Harriot e Descartes pela primeira vez na Inglaterra. O que pode ter impedido seu sucesso foi a obscuridade do autor, e assim o patamar da *Clavis* nunca conseguiu ser atingido por ela. De fato, até o ano da morte de Oughtred, em 1660, sua obra permanecia como o principal texto para quem aspirava aprender matemática. (Stedall, 2002, p. 72-73)

Enquanto a década de 1660 não trazia nenhuma novidade na Inglaterra, uma série de livros sobre álgebra cartesiana de autores franceses e holandeses estava sendo lançada. A atitude inglesa foi de tentar compensar a falta de livros com a reimpressão ou tradução de textos já existentes. Nesse cenário, a *Clavis* de Oughtred viu mais uma edição ser lançada em 1667 em latim, e a *Teutsche Algebra* de Johann Rahn de 1659 foi traduzida para o inglês e publicada em 1668 por John Pell, que também adicionou novo material à obra. (Stedall, 2002, p. 8-9) Quem muito ajudou a favorecer a publicação de Pell foi John Collins (1625-1683), um escrivão do governo, que também era um entusiasta matemático e *fellow* da Royal Society em 1667. (Stedall, 2002, p. 8)

Collins se destaca no cenário inglês por ter demonstrado uma forte vontade de ver uma nova e melhor álgebra disponível a seus conterrâneos. (Stedall, 2002, p. 9) Não era incomum ele trocar correspondência com grandes nomes da matemática inglesa como Isaac

Barrow, James Gregory, Isaac Newton e Wallis, às vezes trazendo notícias sobre novas avanços na matemática da Europa (Pycior, 1997, p. 71). Em uma carta direcionada a Wallis, em 1667, Collins contou que era necessário um livro de álgebra que cobrisse equações de maior ordem, que tivesse apelo não somente para matemáticos acadêmicos como também para praticantes como "diversos mecânicos engenhosos, *gaugers*, carpinteiros, construtores navais, alguns marinheiros e *lightermen*[13], de cujos discursos eram totalmente sobre equações" (id, 1997, p. 75). Collins também sabia que a *Clavis* não era mais uma unanimidade, e o próprio lançou algumas críticas à sua notação, favorecendo a de Descartes:

> E com relação ao método de símbolos de Oughtred, isso eu digo dele; deve ser próprio para você seguí-lo, como um comentador, mas muitos eu conheço, homens de escalão menor que possuem boa habilidade na álgebra, que nem o utiliza nem o aprova. Um Anderson, um tecelão, Mr Dary, o cortador de tabaco, ...Wadley, um *lighterman,* ...e eu posso aquiescer com o julgamento desses homens, ou pelo menos com o de Pell, que disse que não vale no presente continuá-lo, já que transforma questões fáceis em obscuras. Não é A^5 escrito antes de A_{qc}? Faça A igual a 2. O cubo de 2 é 8, que ao quadrado é 64: uma das questões entre Maghet[,] Grisio e Glorious é se $64 = A_{cc}$ ou A_{qc}. O método cartesiano te diz que é A^6, e resolve a dúvida. (Stedall, 2002, p. 76)

Algumas cartas chegaram a ser trocadas entre ele e Wallis, sugerindo que uma possível expansão comentada da obra de Oughtred estava sob consideração. Porém, Wallis, que foi um dos defensores mais entusiasmados de Oughtred, mostrou-se relutante com a ideia. A partir de então, Collins parece ter se convencido que era melhor impulsionar um livro inglês de álgebra completamente novo. (Pycior, 1997, p. 73-74) Após a sua investida com a tradução feita por John Pell, Collins decidiu dar suporte à publicação de seu outro amigo, John Kersey, a qual parece ter melhor satisfeito as suas expectativas. (Pycior, 1997, p. 94)

4. 2 A Álgebra Continental de John Kersey

John Kersey nasceu no ano de 1616 em Ashford, no condado de Kent, e faleceu em 1677. Ao deixar sua cidade natal, Kersey se mudou para Londres, onde estabeleceu uma reputação como agrimensor e professor de matemática. (Pycior, 1997, p. 94) A sua obra *The Elements of that Art Commonly Called Algebra, Expounded in Four Books* foi lançada em duas partes, nos anos de 1673 e 1674, e Kersey traz em seu prefácio uma dedicatória a seu amigo Collins. Kersey nunca recebeu treinamento universitário mas tinha forte interesse em desenvolver livros-texto de matemática, como se vê pelas sua popular edição da *Arithmetic* de Edmund Wingate, publicada de 1650 a 1683 (Pycior, 1997, pp 94). No prefácio de sua *Algebra*, ele também chega a comentar sobre a suposta falta de texto sobre álgebra em seu país, indo de acordo com o que Collins dizia:

[13] Homens capacitados que operavam uma embarcação conhecida como *lighter* para transporte e descarregamento de carga. (RECORDS, on-line)

> Agora, porque esta excelente arte é apenas parcimoniamente tratada em nossa língua nativa… extraí dos autores anteriormente mencionados, esse tratado consistindo de quatro livros… e o desenhei principalmente para dar aos meus conterrâneos matemáticos que desconhecem a Arte chamada álgebra uma introdução clara e inteligível de sua doutrina, assim como um gosto considerável de seu uso, em encontrar teoremas e resolver *problemas*, tanto *aritméticos* como *geométricos*. (Kersey, 1673, p. iii) [14]

Esses autores que ele diz ter mencionado incluem tanto Oughtred quanto Harriot, que são apresentados com certo destaque entre os nomes dos "mais eminentes no assunto". Sobre a *Clavis* de Oughtred, ele diz que "seu conteúdo sólido, contrações limpas e demonstrações sucintas, dificilmente são igualados". Já Harriot é citado logo em seguida como "outro culto matemático de nossa nação." (*id*, 1673, p. *iii*)

Ao longo do livro, Kersey mostrou-se um defensor da álgebra e do método analítico, e inclui muitas das ideias de Descartes em sua nova obra, como veremos a seguir. Na passagem acima, vemos que Kersey coloca a álgebra a serviço de problemas tanto aritméticos como geométricos e, numa comparação entre as três ciências matemáticas, ele coloca primeiramente a geometria e a aritmética como ciências demonstrativas dotadas e capazes de produzir conhecimentos inegáveis:

> Entre todas as ciências humanas, a aritmética e a geometria obtiveram a maior evidência de clareza e certeza… Logo, todas as proposições que são provadas por esses princípios precisos são da mesma forma precisos, e chamados verdades demontrativas, por meio dos quais são significamos estritamente e propriamente, consequências infalíveis, ou conclusões, deduzidas de premissas claras e inegáveis." (Kersey, 1673, p. i)

Porém, Kersey parecia estimar a álgebra ainda mais. Segundo ele a álgebra é baseada no método analitico e "esse método, assim como a síntese, produzia conclusões precisas". Ele diz ainda que a álgebra empregava "um método mais fácil e não menos definitivo do que aquele da síntese. Sua descrição dessa ciência diz que ela "primeiro assume a quantidade buscada como se fosse conhecida, e então, com a ajuda de uma ou mais quantidades dadas, procede por consequências inegáveis, até que se descubra que a quantidade que antes era assumida ou suposta conhecida, é igual a uma quantidade certamente conhecida, e logo também é conhecida." O autor ainda diz que a álgebra é capaz de "não apenas produzir teoremas e *canons*, mas também descobre demonstrações da certeza dos resultantes teoremas e canons, no método sintético, ou método de composição, pelos passos da análise, ou resolução." (id, 1673,pp. ii) Aqui, percebemos que o autor cita o fato de que a análise permite "descobrirmos" teoremas e que esse processo de descoberta revela também uma demonstração sintética para eles, que pode ser feita se invertemos a ordem do procedimento, como ele faz em alguns momentos do livro. Diante do que foi colocado, vemos que Kersey é

---

[14] Now because this excellent Art is but very sparingly treated of in our native Language...I have...extracted out of the before mentioned Authors, this Tractate consisting of Four Books, and have design'd it chiefly to give such of my Mathematical Country-men as are altogether strangers to, and desirous to be acquainted with the so much celebrated Art called *Algebra, a plain and intelligible Introduction to its Doctrine,* as also a considerable taste of its Use, in finding out Theorems and solving *Problems,* as well Arithmetical as Geometrical.

um claro defensor da álgebra e do método analítico; de fato, o autor coloca os dois como sinônimos. (Kersey, 1673, p. 1) Segundo ele, a álgebra, assim como a aritmética e a geometria, é uma ciência capaz de produzir conhecimentos precisos e “inegáveis”. Fora isso, o autor também cita as vantagens de que a álgebra é dotada de “um maior nível de utilidade “ e é capaz de resolver problemas difíceis (id, 1673, pp. ii).

Com isso, o livro abre com a apresentação dos fundamentos da álgebra. Problemas aplicados à geometria fazem-se presentes apenas no último livro, e questões propriamente aritméticas são colocados apenas posteriormente. Alguns problemas da aritmética são colocados ainda no livro I, no capítulo XIV mas estes são resolvidos de duas maneiras: os dois tipos de álgebra, os quais ele chama de álgebra numérica e álgebra literal. Kersey apresenta esses dois tipos de álgebra no começo de seu livro, e a álgebra literal tem o diferencial de que as quantidades conhecidas são representadas por letras assim como as desconhecidas, diferentemente da álgebra numérica, em que as quantidades conhecidas são números. Segundo Kersey, a álgebra literal tem a vantagem de revelar uma lei geral ou um teorema a partir de um problema. (Kersey, 1673, p. 2) O autor de fato apresenta, após cada problema, um teorema que pode ser deduzido a partir dele, tendo-o resolvido por meio da álgebra literal, de modo que se substituem as quantidades fornecidas por letras para chegarmos a um resultado aplicável a problema de mesmo tipo. A outra vantagem é que a álgebra literal é “aplicável à resolução de problemas geométricos assim como aritméticos”.

Nas linhas seguintes, Kersey fala extensivamente sobre potências e seu significado. No quadro abaixo, o autor apresenta as notações de potências de Harriot e de Descartes lado a lado.

A Table ſhewing two ways (now moſt in Uſe) to expreſs ſimple Powers *by Alphabetical Letters.*

The *Root* or firſt Power,	*a.*	a
The *Square* or ſecond Power,	*a a*	a^2
The *Cube* or third Power,	*a a a.*	a^3
The fourth Power,	*a a a a*	a^4
The fifth Power,	*a a a a a.*	a^5
The ſixth Power,	*a a a a a a.*	a^6
The ſeventh Power,	*a a a a a a a.*	a^7
The eighth Power,	*a a a a a a a a*	a^8

Figura (10): as notações de Harriot(esquerda) e Descartes(direita para potências. (Kersey, 1673, p. 5)

Em seguida, Kersey fala sobre as operações e sinais, e faz a separação entre o sinal da quantidade e o sinal operacional, em um estilo que será repetido posteriormente na obra de Newton.

> Esse sinal + é um sinal de afirmação e também de adição, e sempre pertence à quantidade que segue o sinal, como $+a$ afirma que a quantidade denotada por a é real, ou maior do que nada; o mesmo pode ser dito de $+b$ e $+2c$ [...] Mas quando o sinal + é colocado entre duas quantidades, ela traz à mesa ideia das palavras *'plus'* ou *'more'*, e significa que essas quantidades são somadas ou devem ser somadas (Kersey, 1673, p. 2-3).[15]

Considerações semelhantes são feitas com relação ao sinal negativo, mas dessa vez ele também aproveita para exemplificar situações em que podemos identificar quantidades negativas "puras":

> Esse sinal - é um sinal de negação, assim como de subtração, e sempre pertence à quantidade que o sucede; como por exemplo, -5 é um número fictício menor do que nada por 5; ou seja; assim como $+5l.$ pode representar cinco *pounds* em dinheiro, ou o estado de uma pessoa que vale claramente cinco *pounds*; e pode representar uma dívida de cinco *pounds* devidos por uma pessoa que está 'pior do que nada em cinco *pounds.* (Kersey, 1673, p. 3)[16]

Diante delas, percebemos que, consideradas isoladas, as quantidades positivas e negativas são, respectivamente, de "afirmação" e de "negação". Estas são precedidas dos sinais de + e - que "sempre pertencem a elas", mas esses mesmos sinais também significam as operações de soma e subtração, que necessariamente envolvem mais do que uma quantidade. As quantidades, assim não são entendidas apenas como quantidades somativas e subtrativas. Apesar disso, percebemos que Kersey refere-se a quantidades afirmativas como reais, enquanto a quantidade -5 é chamada de fictícia e "menor do que nada" (*less than nothing)*. Portanto, Kersey herda a definição de Descartes de quantidades negativas como sendo menores do que nada, e parece hesitar com elas, tanto por chamá-las de fictícias como por depender de alusões a dívidas para ajudar a esboçar seu significado. Além disso, demarcamos aqui a diferença que já se vê nesse autor com relação a Oughtred e Harriot: Uma tentativa de conceitualizar a quantidade negativa, mesmo que por recorrência a analogias.

Os capítulos seguintes explicam as operações. Sobre a adição, Kersey diz que " quando duas quantidades simples iguais propostas forem somadas, e possuem números prefixados iguais, mas sinais contrários, a soma será 0, ou nada; pois a quantidade afirmativa destrói ou extingue a negativa" (Kersey, 1673, p. 9). Aqui, vemos Kersey repetir o que Descartes diz: quantidades iguais de sinais diferentes se destroem, ou seja, igualam-se a zero, ao serem somadas juntas. Para explicar esse fato, Kersey recorre a exemplos de dívida novamente. Exemplos como este surgem mais uma vez para explicar o caso da soma de

---

[15] This Character + is a sign of Affirmation, as also of Addition, and always belongs to the quantity that follows the sign; as, +a affirms the quantity denoted by *a* to be real, or greater than nothing;the like may be said of *+b,* and *+2c*....But when the sign + is placed between two quantities, it imports as much as the word plus, or *more*, and signifies that those quantities are added or to be added together:

[16] This Character - is a sign of *Negation*, as also of *Subtraction*, and alwas belongs to the following quantity; as for example, -5 is a ficticious number less than nothing by *5*; viz. as *+5 l. may represet five punds in money, or* the Estate of some person who is cleary worth *five* pounds; so *-5l.* may represent a Debt of five pounds owing by some person who is worse than nothing by five pounds.

quantidades diferentes de sinais contrários. Nesse caso, subtrai-se o menor número do maior, e se prefixa o sinal do maior ao resultado. Para que se entenda melhor a regra, Kersey traz o seguinte caso:

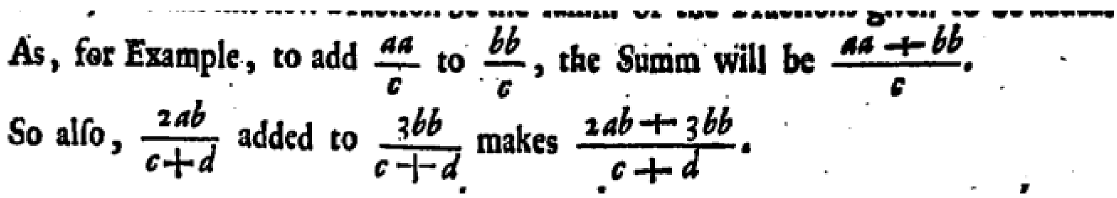
> ...você pode conceber $+3a$ como três *pounds* de dinheiro à mão, e $-2a$ uma dívida de dois *pounds;* então comparando o dito dinheiro à mão e a dívida você encontra por subtração que o dinheiro que sobra após a dívida ser paga será um *pound,* ou seja, $+1a$ ou a, que é a soma das quantidades $+3a$ e $-2a$. (Kersey, 1673, p.10)

É interessante perceber como Kersey afirma no prefácio poder criar verdades indiscutíveis com a análise da álgebra, porém muitas vezes precisa recorrer a exemplos para explicar certas regras ou conceitos que ele apresenta. Além disso, no capítulo 1, podemos notar que Kersey nada falou sobre a possibilidade de somar ou subtrair quantidades negativas, algo que apenas é trazido nesse momento. Assim, somar $+aa$ à quantidade $-bb$ passa a ser equivalente a $aa-bb$, o que constituiria também uma subtração, de acordo com o que foi dito no capítulo anterior. Esse ponto será novamente discutido mais à frente.

Quanto à sua apresentação, podemos ver que há uma clara influência de Thomas Harriot. O autor utiliza ambas as notações para expoentes de maneira aleatória, mas acaba utilizando mais a notação de Harriot. No mais, vemos que o autor parece se ater à "lei da homogeneidade" assim como seu antecessor, mas apenas enquanto discute sobre as operações. A figura abaixo mostra um caso de operação com frações semelhante àquele mostrado na seção sobre Harriot Mais abaixo veremos que isso não se mantém quando ele fala de equações quadráticas.

To be added,	$+5a$ $+3a$ $-8a$	$-2bc$ $+3bc$ $-4bc$	$+4d^5$ $+3d^5$ $-5d^5$
The Summ,	0	$-3bc$	$+2d^5$
To be added,	$+5cc$ $+2cc$ $-cc$ $-4cc$	$-4fff$ $-3fff$ $-2fff$ $+8fff$	$+4ggbb$ $-3ggbb$ $+2ggbb$ $-ggbb$
The Summ,	$+2cc$	$-fff$	$+2ggbb$

Figura (11): exemplos da operação de soma com quantidades simples (Kersey, 1673, p. 9)



As, for Example, to add $\frac{aa}{c}$ to $\frac{bb}{c}$, the Summ will be $\frac{aa+bb}{c}$.
So alſo, $\frac{2ab}{c+d}$ added to $\frac{3bb}{c+d}$ makes $\frac{2ab+3bb}{c+d}$.

Figura (12): Exemplos da operação de soma com frações (Kersey, 1673, p. 35)

Sobre a subtração, Kersey traz uma definição que diz que "o resto somado à quantidade subtraída será igual à quantidade da qual subtraímos". Como regra geral, o autor diz que subtrair uma quantidade da outra consiste em juntar ambas as quantidades com o cuidado de trocar os sinais da quantidade a ser subtraída. (Kersey, 1673, p. 12) O problema surge quando Kersey tenta provar essa regra da troca dos sinais. (Kersey, 1673, p. 14) O que Kersey acaba fazendo, na verdade, é assumir essa regra e a regra supracitada de que "quantidades iguais de sinais contrários se destroem" para provar a definição da subtração. Em outras palavras, o que ele acaba provando é que "o resto somado à quantidade subtraída será igual à quantidade da qual subtraímos", mas comete o *non sequitur* de concluir que a premissa sobre sinais está provada.

No capítulo sobre a multiplicação, há algumas coisas que merecem serem apontadas. Primeiramente, é interessante perceber como Kersey e os demais autores apresentam as "regras" da multiplicação com quantidades algébricas. O presente autor, por exemplo, diz que "se quantidades simples expressas por letras, sejam elas iguais ou diferentes, são multiplicadas uma pela outra, como letras numa palavra, não importa qual a ordem que são escritas; então a nova quantidade representada pelas letras dispostas juntamente é o produto procurado... Então para multiplicar a por b, eu escrevo ab ou ba para o produto. " (Kersey, 1673, p. 15) Aqui vemos que a regra diz que $a \times b = ab = ba$, o que, além da comutatividade da multiplicação, apresenta nada mais do que uma nova notação, uma espécie de transformação puramente dos símbolos, sem que haja uma explicação sobre o significado disso. Neste sentido, podemos dizer que se mantém aqui a prática de Oughtred e Harriot, e o mesmo vale para casos em que as "letras" são prefixadas de um número. A novidade surge na tentativa de explicar o produto quando temos quantidades negativas envolvidas. O que é interessante notar é que Kersey evita apresentar o produto com quantidades simples negativas, e vai direto para o produto de quantidades compostas. Contudo, posteriormente, ele irá inferir uma regra sobre o produto com quantidades negativas simples a partir de quantidades compostas, como veremos a seguir. No contexto do produto de quantidades compostas o autor diz que devemos multiplicar cada termo do multiplicando pelo multiplicador (ou seja, o autor assume que vale a associatividade), mas:

> ... o devido cuidado deve ser dado aos sinais + e -, um dos quais sempre pertence a cada produto particular, e pode ser descoberto por esta regra, + multiplicado por + ou - por - dá + no produto, mas + multiplicado por - ou - por + dá -

> no produto; finalmente todos os produtos particulares somados dão o produto total buscado. (Kersey, 1710, p. 16)[17]

A regra só é "provada" posteriormente, quando o autor mostra as formas de redução de uma equação. As regras de redução de equação são novamente fundamentadas em "noções comuns", por exemplo a noção comum de que "se somarmos coisas iguais a quantidades iguais, os totais serão também iguais" nos permite concluir a regra de redução por adição. Desse modo, se temos uma quantidade com sinal negativo em um lado da equação, somamos a mesma com sinal positivo a ambos os lados da equação, de modo que as duas se destruirão. De maneira análoga o autor mostra as reduções por subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes.

Por fim, estas regras permitem que o autor demonstre a regra do produto antes mencionada. Como sugerimos anteriormente, o autor se utiliza de quantidades compostas para provar a regra também para quantidades simples. Ele diz primeiramente que, fazendo $f = a - b$, se provarmos que $fc = ac - bc$, ficará provada a regra, isto é, que $-b$ multiplicado por $+c$ dá $-bc$:

1. Supõe-se $f = a - b$
2. Então, fazendo a redução por soma, temos $f + b = a$
3. Podemos agora multiplicar ambos os lados por c : $fc + bc = ac$
4. Agora, subtraímos bc de ambos os lados: $fc = ac - bc$

Da mesma maneira, utilizando as quantidades compostas $(a-b)(c-d)$, o autor "prova" que $-b$ multiplicado por $-d$ resulta em $+bd$. (Kersey, 1673, p. 56,57)

Primeiramente, perceba que, como dissemos anteriormente, o autor assume uma "associatividade" em que ao multiplicarmos uma quantidade c por uma quantidade composta, devemos multiplicar cada termo dessa quantidade por c, sendo os sinais uma espécie de "externalidade". Podemos representar essa premissa por $c(\__1 a \__2 b)$ = $\__3 ca \__4 cb$, onde cada lacuna deve ser preenchida pelo devido sinal. Sabemos que se o sinal for + em uma coluna da esquerda, a lacuna correspondente do lado direito deverá ser preenchida pelo sinal de + também. Agora, caso seja -, deve-se descobrir qual será o sinal correspondente na lacuna do lado esquerdo, e é isso que o autor tenta responder.

Outra coisa que essa prova revela , e que já se fazia evidente antes, é que o autor, apesar de ter feito uma separação entre a "negação" e a "subtração", mistura os dois significados. Fica até mesmo difícil transmitir o significado de $a - b$ em palavras, pois ela não mais significa apenas a subtração de b da quantidade a. Temos agora o significado de uma quantidade a "junta da" quantidade $-b$. Poderíamos entender essa formulação como a soma entre as quantidades a e $-b$ (a inversa de b pela soma) porém o autor não deixa isso evidente. O autor chegou a "mostrar" que a soma de a com $-b$ é igual a $a - b$ em um

[17] ...but due regard must be had to the Signs + and -, one of which alwayes belongs to every particular Product, and may be discovered by this Rule, viz. + multiplied by +, or - by -, makes + in the Product; but + multiplied by -, or - by +, makes - in the Product; lastly, all the particular Products added together...

exemplo que exibimos aqui, mas a expressão continua a apresentar um significado ambíguo, proveniente da dificuldade de separar os sinais operacionais em uma expressão dos sinais de afirmação e negação específicos de cada quantidade. Algo que torna evidente essa dificuldade é a falta de uma expressão para a soma de a com $-b$. Atualmente, podemos exprimi-la por $a+(-b)$, mas o autor precisa depender da apresentação retórica da operação. O que é importante perceber é que a expressão $a-b$, para nós, nada diz sobre a natureza das quantidades a e b. A expressão apenas diz que estamos lidando com uma subtração.

Assim, existe hoje uma independência dos termos a , b com relação aos sinais da expressão, que apenas dizem sobre as operações realizadas sobre esses termos. Já para autores como Kersey, o sinal da quantidade se torna “aquele que a precede”, e isso abre as portas para ambiguidades dentro de quantidades compostas, pois nelas as quantidades são unidas pelos sinais operacionais, idênticos àqueles que identificam a afirmação e negação de uma quantidade considerada em si. É isso o que faz com que se determine que existe uma quantidade negativa $-b$ na expressão $a-b$, permitindo ainda uma prova sobre quantidades simples por meio de binômios. A separação de significados poderia ser melhor evidenciada na demonstração se o autor tivesse explicitado que $a-b$ significa a somado à quantidade $-b$ mas, mesmo assim, ele teria de explicitar também uma associatividade da multiplicação estendida para quantidades negativas. De qualquer forma, isso significaria demandar um padrão de rigor que não competia ao presente autor. Toda essa discussão também ajuda a explicar a necessidade de separar a equação quadrática em diversos casos, e entraremos nesse assunto logo em seguida. No mais, a demonstração exposta no livro pertence na verdade a Frans van Scooten, um matemático holandês que a realiza na sua obra *Principia Mathesis Universal*, e Kersey chega a dar os devidos créditos (id, 1673, pp. 53). A mesma regra com os sinais é estabelecida na operação de divisão, mas o autor não tenta prová-la nesse caso (Kersey, 1673, pp. 23), nem mesmo fazendo a associação entre as duas operações, algo que poderia torná-la evidente .

No capítulo XV, Kersey apresenta as equações quadráticas juntamente com as equações biquadráticas e todas as demais formas onde o termo buscado aparece duas vezes, sendo um o quadrado do outro. As três formas dessas equações são as seguintes:

Equations of the firſt Form.

$aa + 6a = 55$	$aa + ca = b$
$aaaa + 8aa = 48$	$aaaa + daa = f$
$aaaaaa + 4aaa = 837$	$aaaaaa + gaaa = h$

Equations of the ſecond Form.

$aa - 10a = 24$	$aa - ba = k$
$aaaa - 6aa = 27$	$aaaa - paa = d$
$aaaaaa - 2aaa = 48$	$aaaaaa - maaa = g$

Equations of the third Form.

$10a - aa = 24$	$ca - aa = n$
$5aa - aaaa = 4$	$raa - aaaa = s$
$9aaa - aaaaaa = 8$	$daaa - aaaaaa = t$

Figura (13): as três formas de equação onde o "primeiro termo desconhecido é o quadrado do segundo".

Outra semelhança com a notação de Harriot se vê aqui: Kersey prefere a letra a para designar a quantidade desconhecida. À esquerda, o autor dá exemplos na chamada álgebra numérica para depois mostrar as suas formas gerais na álgebra literal. Vemos também que o potencial caso $aa + ca + b = 0$ é ignorado; o caso em que ambas as soluções são negativas. O autor resolve cada um dos casos separadamente, por meio de exemplos, depois trazendo um *canon* que é deduzido através do seu método analítico, e mostra como resolver cada caso através de uma fórmula geral.

Antes de falar sobre como ele resolve as equações quadráticas, é importante falar sobre a seção em que ele ensina a completar trinômios quadrados perfeitos, dados dois de seus termos. O que é interessante perceber aqui é que, no caso de trinômios em que apenas há sinais positivos, o autor diz haver apenas uma raíz, enquanto nos demais casos, ele expõe as duas raízes. Por exemplo, para o trinômio $9aa + 12a + 4$, o autor diz que a raíz única é $3a + 2$. Já o trinômio $9aa - 12a + 4$ possui as duas raízes $3a - 2$ e $2 - 3a$. É de se imaginar que o autor tenha excluído a outra raíz do primeiro trinômio por conta de ela ser negativa da forma $-3a - 2$, apesar de o autor ter deixado claro anteriormente que quantidades positivas possuem duas raízes quadradas, uma positiva e uma negativa. Contudo, é curioso observar que o autor nunca emprega um exemplo em que todos os termos de uma quantidade composta possuem o sinal negativo , tanto aqui como nas demais seções, inclusive quando ele apresenta as operações.

Na resolução das equações quadráticas, onde ele aplica esses métodos, vemos que o autor contorna o problema de encontrar uma única raíz, de modo que suas equações quadráticas aceitam soluções negativas igualmente em qualquer caso. Por exemplo, para resolver a equação $aa + 6a + 9a = 64$, primeiramente ele extrai a raiz de ambos os lados da equação, obtendo assim que $a + 3 = 8$. Em seguida, transpondo o 3, ele encontra a quantidade buscada, isto é, $a = 5$. Aqui, vimos que o autor considerou apenas uma raíz para o trinômio $aa + 6a + 9a$, porém, ele depois aponta que -8 também é raiz de 64, logo também vale dizer que $a + 3 =- 8$. Transpondo $+3$, encontramos uma raiz negativa, -11.O autor deixa bem claro que a raiz negativa responde o problema da mesma maneira que a raiz positiva ao dizer que “toda equação que cai nessa primeira forma pode ser respondida por qualquer de suas duas raízes, sendo uma negativa e outra afirmativa”. Além disso, ele inclui uma prova de que ambas raízes encontradas são válidas, procedendo de maneira inversa, ou seja, fazendo a ser igual às raízes e descobrindo que elas satisfazem a equação original. Dessa maneira, juntamente com a *Algebra* de Pell, podemos dizer que essa obra foi uma das primeiras na Inglaterra a aceitar raízes negativas (Pycior, 1997, pp. 93); Oughtred reconhecia quantidades negativas mas não as tinha como solução de problemas. É curioso, porém, perceber que o autor legitima as raízes negativas, sem rotulá-las com termos como “falsas” como fez Descartes mas, mesmo assim, não toma conhecimento da equação de forma $aa + ca + b = 0$, a qual possui duas raízes negativas. Veremos que muitos dos demais autores estudados fizeram o mesmo.

Não podemos também deixar de mencionar que , ao falar do terceiro caso, o autor aborda o caso das soluções que aparecem com raízes quadradas de quantidades negativas, as quais Oughtred ignorou. A solução geral $a = \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}cc - n}$, diz o autor, requer que n não exceda o quadrado da metade do coeficiente , ou seja, $\frac{1}{4}cc$. Nesse caso, o autor chama a equação de ” impossível” (*impossible*), o mesmo termo usado por John Pell para designar essas raízes na versão da *Álgebra* de Rahn (Pycior, 1997, p. 93). No capítulo IX do livro II, o autor volta a discutir sobre raízes, dizendo que há três tipos de raízes: afirmativas, negativas e impossíveis. Sobre as impossíveis, o autor diz que:

> ... raízes impossíveis são aquelas cujo valor não pode ser concebido ou compreendido, seja pela aritmética ou pela geometria; como na equação $a = 2 - \sqrt{-1}$, onde $\sqrt{-1}$, ou seja, a raíz de -1, é de maneira nenhuma inteligível, pois nenhum número pode ser imaginado, que ao ser multiplicado por si mesmo de acordo com as regras da multiplicação, produz -1. (Kersey, 1673, p. 269)

Comparada a essa descrição proibitiva das raízes impossíveis, vemos novamente o autor tratar das raízes negativas de maneira natural. O autor as descreve como sendo opostas às afirmativas, “como -5 ou -20 ,dos quais o primeiro falta 5, e o segundo 20 para ser igual a nada." (Kersey, 1673, p. 269) Nesse mesmo capítulo, ainda vemos a “regra dos sinais“ de Descartes para descobrir o número de raízes positivas e negativas de uma equação, e a formação de equação por produtos de binômios. Aqui , novamente não vemos exemplos de equações serem formadas apenas com raízes negativas. Ele chega também a apresentar uma série de proposições ensinando a forma equações do tipo que tenha, por exemplo, duas raízes afirmativas, ou três afirmativas e uma negativa. O capítulo também ensina o método de Harriot e Descartes para remover o segundo termo da equação, o que ele usa para tratar algumas equações cúbicas. Algumas cúbicas ainda são resolvidas através de um método de aproximação. De resto o livro apresenta ainda vários teoremas sobre progressões geométricas, sistemas de várias variáveis e alguns problemas aritméticos. Como dissemos, o livro também aborda problemas de geometria analítica no final.

4.3 Conclusão

John Kersey apresenta uma série de similaridades com Thomas Harriot, a começar por sua notação. Apesar disso, vemos o autor oscilar entre o seu produto iterado e os expoentes de Descartes, à mesma maneira de Mr. Gibson. Indo além de Harriot, o autor também tece comentários sobre sua concepção de quantidades negativas e positivas, os quais parecem separar o significado de subtrair do significado de "negação", ainda que sua prática misture os dois. Além disso, as suas quantidades negativas são aqui defendidas tendo em vista uma espécie de realidade. Finalmente, vemos aqui também uma defesa deliberada das raízes negativas, que são entendidas como "contrárias" às positivas.

4.4 Repercussão da obra

No geral, o livro apresenta uma boa didática, o autor se preocupa em demonstrar suas afirmações, ainda que do seu próprio jeito, e não tenta ser tão breve como foi Oughtred, realmente revelando seu foco em "jovens estudantes da aritmética simbólica e da arte analitica", como ele coloca em seu prefácio (Kersey, 1673, pp. iii). Mesmo assim, o livro não se atém apenas aos princípios e se fez valer a estudantes universitários também. Numa carta de Townley a Collins, parece que, com a ajuda de Newton, pelo menos quatro cópias da obra foram vendidos a homens de Cambridge antes mesmo da publicação (Pycior, 1997, pp. 95). A obra teve um certo sucesso duradouro, garantindo-lhe f6 publicações, sendo que a última datada de 1741. Nas *Philosophical Transactions of the Royal Society*, o jornal científico da Royal Society, a obra é mencionada de maneira elogiosa (Zulichemii, 1677, págs. 6073-6074). Outra menção à obra se faz presente em um catálogo de 1707 de Robert Green, então tutor do Clare College de Cambridge, ao lado das de Pell, Wallis, Harriot, Newton, Descartes, Harris, Oughtred, John Ward e Jones como recomendação para o estudo de álgebra (Rouse Ball, 1889, p. 95). Veremos também que tanto Newton quanto John Wallis leram a obra.

5 John Wallis e a Álgebra Inglesa

No presente capítulo falaremos do já mencionado matemático John Wallis, que também havia sido instigado por Collins a produzir um tratado inglês sobre álgebra. Sua grande contribuição foi publicada onze anos após a coleção de Kersey.

5.1 John Wallis

John Wallis nasceu em Ashford em 1616, e morreu em Oxford, em 1703. Foi educado na Felsted School, e foi apresentado à aritmética aos 15 anos pelo seu irmão, encantado pelos símbolos que viu em seu livro. Posteriormente, foi enviado ao Emmanuel College, em Cambridge, onde se tornaria médico, como era pretendido. (Rouse Ball, 1960, p. 236) Lá, Wallis estudou, entre outras coisas, astronomia e matemática, sendo que a última, ele estudava apenas por diversão: ainda era um assunto com pouco destaque acadêmico. (Almeida, 2010, p.12,13)

Wallis foi eleito a uma *fellowship* em Queen's College, Cambridge e posteriormente recebeu sua ordenação, em 1640, tendo então servido de capelão privado de *Sir Richard Marley*, e então *Mary, Lady Vere,* que simpatizava com os parlamentares. A seu serviço que Wallis descobriu um talento para decodificar mensagens, o qual ele utilizou para decifrar cartas codificadas dos apoiadores da família real. (Rouse Ball, 1960, p. 236) No ano de 1648, Oxford teve seus simpatizantes da monarquia expulsos, e Wallis substituiu Peter Turner na cadeira de Geometria, sob indicação de Oliver Cromwell. Apesar disso, até o momento de sua nomeação, Wallis pouco sabia de matemática. (Almeida, 2010, p. 13)

Por volta desse período, teve primeiro contato com a *Clavis* de Oughtred, cujo simbolismo fascinou Wallis, e assim permaneceu "um forte defensor do poder heurístico da notação algébrica por toda sua vida." (Guicciardini, 2011, p. 3) No período posterior, pós-guerra, exerceu seriamente seu posto em Oxford, e teria ajudado a criar uma atmosfera de valorização da matemática. (Almeida, 2010, p. 13) Nos anos subsequentes, lançou uma série de trabalhos, dentre os quais destacamos o seu *Arithmetica infinitorium (1656),* a mais importante das suas obras. Nela, ele explora métodos de Cavalieri e Descartes e calcula áreas e volumes somando séries infinitas. (Almeida, 2010, p. 13).

Na mesma década, estabeleceu uma parceria com Brouncker e também com John Pell, de quem seria amigo pelo resto da vida. (Almeida, 2010, p. 12) Como vimos, Wallis também estabeleceu uma relação com Collins, além de ter trocado correspondência com grandes nomes como Fermat e, na década de 1690, Leibniz e Newton. (Guicciardini, 2011, p. 1). Se envolveu em uma série de discussões e controvérsias ao longo de sua vida. A título de exemplo, em 1658, debateu com Pierre de Fermat (1601-1665) e Bernard Frenicle (1605-1675) acerca de problemas de teoria dos números. (Almeida, 2010, p.14) Seu grande

Tratado de Álgebra (*A Treatise of Algebra*), ao qual nos voltaremos a seguir, também carrega uma controvérsia com um nome de peso da matemática francesa.

O tratado algébrico de Wallis havia sido finalizado ainda em 1676, mas somente foi publicada em 1685. Wallis diz que a publicação havia sido atrasada e, no meio-tempo, pôde fazer algumas adições ao texto. (Wallis, 1685, prefácio *i*) No resultado, vemos que a obra é mais do que um tratado de álgebra, mas também um registro histórico, ainda que bastante partidário, do assunto. Segundo o próprio Wallis diz em seu prefácio, a obra foi feita "a pedido daqueles (sejam das universidades ou da Royal Society) que são habilidosos nesses assuntos." (Wallis, 1685, prefácio *ix*)

5.2 História e concepção da álgebra

Logo no prefácio da obra, Wallis ergue uma espécie de linha do tempo da álgebra, apontando os avanços que ela obteve ao longo dos anos, alcançando até os seus contemporâneos. Wallis também diz que o fez " designando, tão próximo quanto pude, cada passo de avanço a seu próprio autor; ou pelo menos ao mais antigo daqueles que encontrei." (Wallis, 1685, prefácio *vii*). Os capítulos subsequentes, enfim, tentam de certa forma expandir cada tópico trazido nessa linha do tempo. De acordo com Almeida, os dados históricos contidos na obra teriam sido coletados a partir de fontes encontradas na biblioteca saviliana, sendo que outras, Wallis admite citar de memória (Almeida, 2010, p. 31).

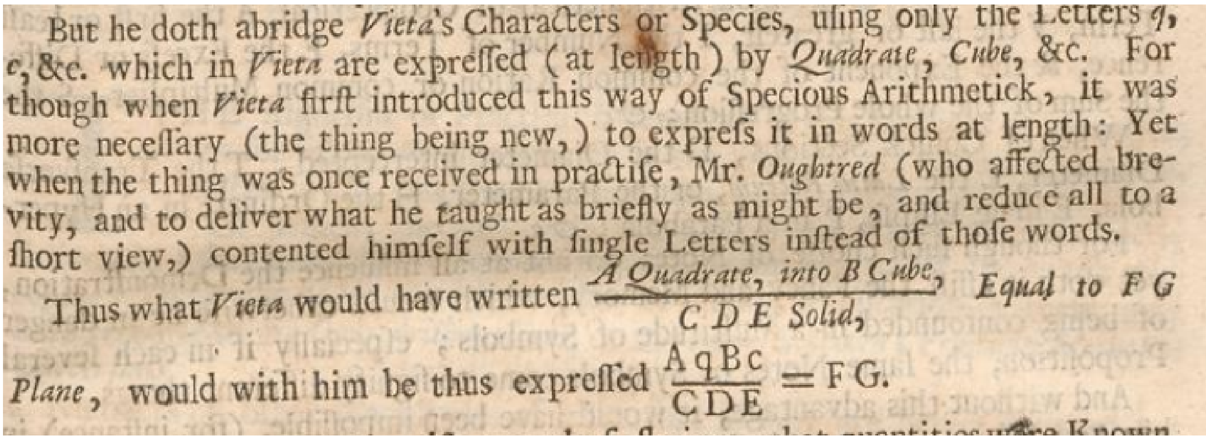
A narrativa sobre a álgebra começa a partir dos gregos, os quais a teriam "diligentemente ocultado como um grande segredo", repetindo aquilo que Viète, Descartes e outros matemáticos do século XVI acreditavam (Roque, 2012, pp. 300). Considerações também são feitas à matemática árabe, à proveitosa chegada das figuras numéricas hindu-arábicas, os logaritmos, a resolução da cúbica por Cardano, e outros diversos assuntos, sempre com a preocupação de mostrar como eles foram absorvidos pelos europeus. Nesse aspecto, damos destaque na sua consideração do papel que a Espanha teve em traduzir os textos antigos.

Não faremos aqui uma análise minuciosa de seu conto histórico, mas percebemos que um certo destaque deve ser depositado nos autores mais recentes, sobretudo Viète, Oughtred e Harriot, como faz o próprio autor. Ao primeiro desses nomes é atribuída o "grande passo" que foi a criação da aritmética especiosa, além da exegese numérica. (Wallis, 1685, prefácio *iv*) Oughtred, por sua vez, teria "melhorado bastante os métodos de Viète em sua *Clavis*, e outros de seus tratados". A brevidade de Oughtred também é elogiada pelo autor:

> E ele, ali (na *Clavis*) , em um breve método compacto, declara o que havia antes sido o assunto de longos volumes. (Wallis, 1685, prefácio *iv*) [18]

No capítulo XV, Wallis faz também uma breve apresentação de Oughtred e cita a vantagem das suas "ligaduras", além de fazer a já mencionada comparação entre a sua notação e a de Viète, de modo a apontar como as abreviações do inglês são melhores.

[18]...and he doth, therein, in a brief compendious method, declare in short, what had before been the subject of large Volumes.



But he doth abridge *Vieta*'s Characters or Species, uſing only the Letters *q*, *c*, &c. which in *Vieta* are expreſſed (at length) by *Quadrate*, *Cube*, &c. For though when *Vieta* firſt introduced this way of Specious Arithmetick, it was more neceſſary (the thing being new,) to expreſs it in words at length: Yet when the thing was once received in practiſe, Mr. *Oughtred* (who affected brevity, and to deliver what he taught as briefly as might be, and reduce all to a ſhort view,) contented himſelf with ſingle Letters inſtead of thoſe words.

Thus what *Vieta* would have written $\frac{A\ Quadrate,\ into\ B\ Cube,}{C\ D\ E\ Solid,}$ *Equal to F G Plane*, would with him be thus expreſſed $\frac{AqBc}{CDE} = FG.$

Figura (!4): uma comparação entre as notações de Viète e Oughtred, segundo Wallis. (Wallis, 1685, p. 67)

Uma visão supostamente nacionalista de John Wallis começa a aflorar ainda mais na narrativa sobre Thomas Harriot. Vale apontar que a maior parte da obra é dedicada a ingleses: Oughtred, Harriot, Pell e Newton, além do próprio John Wallis. Porém, Harriot e suas “inovações” ocupam um espaço maior do que todos os outros. No capítulo LXII, intitulado “Recapitulação das particularidades na Álgebra de Harriot; e o estado ao qual ele havia reduzido-a” (*A Recapitulation of Particulars in Harriot's Algebra; and the Estate to which had he reduced it),* o autor expande a listagem do prefácio sobre as contribuições que Wallis teria feito à álgebra. O próprio nome ainda sugere que a álgebra encontrava-se no patamar da época graças a Harriot .

É contestável que algumas dessas contribuições devam realmente ser atribuídas a Harriot, mas não cabe aqui discutirmos sobre cada uma delas. Para uma discussão mais aprofundada sobre o assunto, e sobre o tratado de Wallis de um modo geral, recomendamos a leitura da dissertação de Almeida, de 2010. Fato é que o autor diz que grande parte desses avanços se passavam por álgebra de Descartes, sendo que este teria apenas plagiado o inglês sem ter dado os devidos créditos. Vejamos:

> Em suma, ele (Harriot) ensinou (de certa forma) tudo que desde então se passa pelo método Cartesiano de álgebra; havendo quase nada de álgebra (pura) em Descartes, o qual não veio antes de Harriot; do qual Descartes parece ter tirado o que ele tinha (que é puramente álgebra) mas sem citá-lo (Wallis, 1685, prefácio *v*).[19]

O nome do matemático francês é diversas vezes evocado ao longo da obra, quase sempre com o intuito de colocar sua álgebra como derivada daquela de Harriot. Essas tentativas de desconstruir um dos grandes matemáticos estrangeiros de seu tempo é mais um indicativo de seu chauvinismo. Logo no parágrafo seguinte, Wallis novamente compara os dois, dessa vez por conta do caráter puro da álgebra de Harriot.

[19] In Sum, He hath taught (in a manner) all that which hath since been passed for the Cartesian method of Algebra; there being scarce any thing of (pure) *Algebra* in *Des Cartes*, which was not before in *Harriot*; from whom *Des Cartes* seems to have taken what he hath (that is purely Algebra) but without naming him.

> Mas a aplicação ali contida à geometria, ou outros assuntos particulares (os quais Descartes busca) não é a proposta daquele tratado de Harriot (a não ser o que ele manejou em seus outros escritos, os quais ainda não tiveram a sorte de terem sido publicados) sendo o propósito deste puramente álgebra, abstraída de assuntos particulares (Wallis, 1685, prefácio *v*).[20]

Aqui, vemos uma sugestão de que Wallis tentaria dar sequência a essa "álgebra pura" de Harriot, isto é, independente da geometria e de quaisquer outros assuntos. Isso ele acaba deixando mais explícito ao falar das suas intenções com o tratado:

> Mas o meu plano sendo o de traçar isso da Análise (como os gregos a chamavam) ou álgebra (como os árabes) de sua primeira origem (tão próxima quanto consegui) pelos vários passos através dos quais ela procedeu: Meus olhos estavam principalmente voltados aos diversos avanços que de tempo em tempo ela realizou. Omitindo, na maioria das vezes, as acomodações dela a assuntos particulares. (Wallis, 1685, prefácio *vii*)[21]

Outra sinalização que o autor dá de que sua pretensão é "seguir os passos de Harriot" e apresentar uma álgebra pura está na maneira como se refere aos capítulos de construções geométricas como "digressão do assunto principal" (Wallis, 1685, prefácio v). Neles, o autor realiza as construções de equações quadráticas, cúbicas e biquadráticas.

Não podemos deixar de falar também da sua defesa das potências em Harriot, dizendo que sua notação como uma multiplicação iterada dissocia uma noção aritmética de proporção de fundamentações na natureza e considerações geométricas. (Wallis, 1685, p. 126) Isso se dava pelo uso de termos como "cubo", "quadrado", etc., para designar potências, além dos termos "ageométricos" como "*squared square*", "*sursolids*", "*squared cube*"[22], etc, os quais levavam a considerações absurdas, segundo Wallis. Vejamos como ele argumenta:

> Uma reta desenhada há de fazer um plano ou superfície, esta desenhada sobre uma reta há de fazer um sólido: Mas se este sólido for desenhado sobre uma reta, ou esse plano sobre um plano, o que ele há de produzir? Um plano-plano? Isso é um monstro na natureza, e menos possível do que uma quimera ou um centauro. Pois comprimento, largura e espessura tomam o espaço inteiro...Mas se considerarmos um número multiplicado por ele mesmo, e esse novamente pelo mesmo, e assim novamente e novamente tantas vezes quanto se quiser; nisso, não há nada de impossibilidade ou dificuldade em apreender. (Wallis, 1685, p. 126-127)[23]

---

[20] But the Application thereof to Geometry, or other particular Subjects, (which *Des Cartes* pursues,) is not the business of that Treatise of *Harriot*, (but what he hath handled in other Writings of his, which have not yet the good hap to be made publick;) the design of this being purely *Algebra*, abstract for particular subjects.

[21] But my design being, to trace this of *Analyticks* (as the Greeks call'd it) or *Algebra* (as the *Arabs*) from its first Original (s near as I could) by the several Steps whereby it hath proceeded: Mine Eye was chiefly on the several Advances which from time to time it hath made. Omitting, for the most part, the Accommodations thereof to particular Subjects.

[22] "*squared square", "sursolid" e "squared cube"* eram termos utilizados em referência à quarta, quinta e sexta potência, respectivamente.

[23] A Line drawn into a Line, shall make a Plane or Surface; this drawn into a Line, shall make a solid: But if this Solid be Drawn into a Line, or this Plane into a Plane, what shall it make? a *Plano-plane?* That is a Monster in Nature, and less possible than a *Chimera* or *Centaure*. For Length, Breadth and Thickness, take up the whole of *Space*...But if we consider a *Number* Multiplied by itself, and this again into the same number, and so again and again as oft as you please; in this, there is nothing of impossibility or of Difficulty to apprehend.

A partir daí, o autor parece defender que a terminologia geometrizante deva desaparecer da álgebra, abrindo espaço para uma fundamentação aritmética, onde o conceito de número assuma uma posição central, como aponta Almeida. (Almeida, 2010, p. 89)

No primeiro capítulo da obra, intitulado “Sobre a natureza da álgebra” (On the Nature of Algebra), temos a chance de vislumbrar brevemente a concepção do autor sobre o assunto. Curiosamente, o autor começa falando sobre as operações fundamentais, e alega que as operações de adição, multiplicação e potenciação constituem operações sintéticas, enquanto as operações de subtração, divisão e extração de raiz são operações analíticas. Vejamos o que Wallis quis dizer com isso a partir de um exemplo, onde ele explica como subtraímos 3 de 5 de maneira analítica:

> ..supondo que 5 seja igual a $3+A$ (ou 3 e A), inquerimos o valor de A. Pois deve-se presumir que no 5 (o inteiro) existem as partes 3 e A, antes que elas possam ser separadas. (Wallis, 1685, p. 1)

Da mesma maneira que a subtração se relaciona dessa forma com a soma, a divisão também se relaciona com a multiplicação e a extração de raízes, com a potenciação. Logo em seguida, o autor fala o que a álgebra finalmente se propõe a fazer:

> Mas essas operações, apesar de verdadeiramente analíticas, mas (porque são fáceis) não são aqui principalmente propostas: Mas outras, onde a composição é mais complexa e intricada; e consequentemente a resolução mais difícil. E a resolução artificial dessas composições complexas, é comumente chamada pelo nome de álgebra, ou *analyticks. (Wallis, 1685, p. 2)*

Lembrando que o termo “resolução” refere-se à análise e o termo “composição”, ao método sintético, fica claro aqui que, para Wallis, a álgebra trata-se do método anaítico de realizar operações além das fundamentais (subtração, divisão e extração de raízes). Ao se referir a “composições complexas”, ele provavelmente se refere, por exemplo, à solução de problemas que dificilmente são alcançadas sem que assumamos quantidades desconhecidas e com ela operemos como se fossem conhecidas. Tendo assim obtido uma solução “artificialmente”, podemos, por composição, comprovar que a solução é aquela que o problema pedia. Trata-se da uma observação semelhante à de Kersey.

Antes de continuarmos, apontamos que a nossa análise adicional a seguir se preocupará majoritariamente em perceber como o autor concebe quantidades negativas. Contudo, vale apontar que, além dos tópicos da álgebra de Harriot, Oughtred, Pell e demais assuntos supracitados, o livro ainda abarca, entre outros, os seguintes conteúdos: O método de Descartes para “dissolver uma equação biquadrática em duas quadráticas, os indivisíveis de Cavalieri, o método de Exaustão, séries infinitas de Newton e a regra de aligações. Além desses, o livro também traz um método do próprio Wallis para resolver cúbicas, apesar dele não ser muito diferente daquele de Cardano. De acordo com Almeida, esse foi o primeiro resultado matemático de sua carreira. (Almeida, 2010, p. 110)

5.3 Aritmética especiosa e quantidades negativas

Os primeiros capítulos da obra são dedicados a uma profunda elaboração do percurso da álgebra como constava no prefácio. No capítulo XVI, Wallis finalmente começa a sua abordagem sobre as operações aritméticas com espécies. O autor baseia a sua apresentação em Oughtred, porém ele faz algumas declarações que não encontramos no sucinto *Clavis*, e que nos ajudam a captar o pensamento do autor:

> ...são prefixadas (à maneira que a ocasião requerer) não apenas por termos numéricos, mas pelos sinais + e - (ou mais e menos) , o primeiro dos quais é uma notação de posição, afirmação, ou adição; o outro uma deficiência, negação, ou subtração: de acordo com a existência ou falta de uma magnitude. E onde nenhum sinal existir, presume-se que é afirmativo, e o sinal + deve ser apreendido.
>
> E de acordo com isso, esses sinais ainda devem ser interpretados como tendo significados contrários. Se + significa para cima, para frente, ganho, aumento, acima, antes, adição, etc., então - deve ser interpretado como para baixo, para trás, perda, decréscimo, abaixo, atrás, subtração, etc. E se + for entendido por esses, então - deve ser interpretado como o contrário. (Wallis, 1685, p. 69).[24]

Aqui percebemos que o autor repete a ideia de que há um significado contrário nos sinais, logo entre as quantidades as quais eles prefixam. Essa concepção, por sua vez, é exemplificada por situações reais que abarcam uma espécie de dualidade, como “para baixo e para frente”, ou “aumento e decréscimo”. A partir disso, depreendemos que não há aqui tampouco uma tentativa de estabelecer as quantidades negativas de maneira abstrata, mas voltaremos a esse aspecto mais tarde. É interessante perceber que, entre os exemplos de dualidades que ele dá, temos situações como “para baixo e para frente”, que transmitem uma ideia de movimento, logo de soma e subtração (de posição) e, ao mesmo tempo a ideia parecida, ainda que diferente, de “acima e abaixo”, que transmite apenas posição e, logo, poderia ser associada a quantidades afirmativas e negativas consideradas em si. Contudo, essa é uma interpretação nossa, e o potencial duplo sentido dos sinais + e - fica nebuloso nessa apresentação.

---

[24] to these Notes, Symbols or Species are prefixed, (as occasion requires) not only Numerical Figures, but the Signs + and - (or *Pus* and *Minus*) the former of which is a Note of Position, Affirmation or Addition; the other of Defect, Negation, or Subduction: According as such Magnitude is supposed to be, or to be wanting. And where no such Sign is, it is presumed to be Affirmative, and the sign + to be understood. And accordingly these Signes are still to be interpreted as in a contrary signification. If + signify Upward, Forward, Gain, Increase, Above, Before, Addition, etc. then -, is to be interpreted of Downward, Backward, Loss, Decrease, Below, Behind, Subduction, etc. And if + be understood of these, then - is to be interpreted of the contrary.

To	3A	A	5A	3A	A	A+B	A+B
Add	A	—A	—3A	—5A	E	A—B	A—C
Sum	3A+A	A—A	5A—3A	3A—5A	A+E	2A	2A+B—C
That is	4A	0	2A	—2A			

For Subduction thus, *Specious Subduction, conjoins the Magnitudes propoſed, changing all the Signs of that which is to be ſubducted.* As

From	4A	3A	5A	A	A	A
Take	A	5A	—3A	E	B+C	B—C
Reſts	4A—A	3A—5A	5A+3A	A—E	A—B—C	A—B+C.
That is	3A	—2A	8A			

Figura (15): As operações de soma e subtração com espécies. (Wallis, 1685, p. 70)

Uma separação melhor consegue ser feita entre soma/subtração e afirmação/negação a partir da terminologia usada no capítulo seguinte. Nele, Wallis tenta apresentar uma explicação para as operações com espécies, sob a roupagem da álgebra na *Clavis* de Oughtred. Wallis parece fortalecer a ideia de que a álgebra fundamenta-se nos mesmos princípios que a aritmética pois, segundo ele, as operações decorrem "evidentemente a partir das noções comuns da aritmética". Desse modo, o fato de que a soma de $3A$ com $2A$ resulta $5A$ pode ser deduzida da mesma maneira que uma operação de soma na aritmética como 2 somado a 3 dá 5. A situação tampouco muda se estamos lidando com quantidades negativas:

> … se à falta de $3A's$ ou 3 deficiências de A, somarmos a falta de $2A$ (ou 2 deficiências de A) resulta na falta de $5A$ (ou a deficiência de $5A$) ou seja, se a $-3A$ somarmos $-2A$, resulta $-5A$ (Wallis, 1985, p. 73).[25]

Em seu texto original, Wallis destaca os termos "the want of", os quais dentro desse contexto, pode ser traduzido como "uma falta de", ou "uma carência de". Isso faz parecer que o autor deduz a regra a partir do significado literal que ele atribui a quantidades negativas, isto é, como a falta de , ou uma deficiência de uma certa quantidade. Esse artifício é novamente vez sinalizado quando ele explica a soma de quantidades com sinais diferentes, e quando ele explica a operação de subtração. Vejamos primeiramente o caso da soma com sinais distintos:

> Se os sinais forem diferentes (+ em um, e - no outro) o caso se altera de uma certa forma: Como se a $5A$ (ou $+5A$) somarmos $-3A$, resulta $5A-3A$, ou $5A's$ faltando $3A's$, ou seja, $2A's$. (Pois somar uma deficiência de 2 é o mesmo que retirar 2) E se a $+3A$, somarmos $-5A$, resulta $3A-5A$, ou seja, $-2A$ (pois retirar $2A's$ a mais do que o total, e logo sobram $2A's$ menos do que nada, ou uma deficiência de $2A's$. Como quando um homem possui três pounds mas deve 5

[25] ...if from the want of *3A's (or 3* defects of *A,)* we add the want of *2A's (or 2* defects of *A,) it makes,* the want of *5A's,* (or the defect of *5A's*) that is, if to *-3A* we add *-2A*, it makes *-5A*.

> *pounds*, seu estado é -2 *pounds*, ou seja 2 *pounds* a menos do que nada) mas ainda assim o agregado é coletado numa soma (Wallis, 1985, p. 73).[26]

Já sobre a subtração, Wallis diz que:

> Na subtração da mesma forma, é evidente a partir dos princípios da aritmética comum, que se de 5 subtrairmos 3, o resto é $5-3$, ou 5 faltando 3, isto é, 2 (pois remover 3 ou somar o deficiência de 3, é tudo a mesma coisa). Se de $+5$ retirarmos -3, resulta $+5+3$, ou seja, $+8$ (pois retirar a deficiência de 3 é o mesmo que suprir o 3 que faltava). Se de -5, tirarmos -3, o resto é $-5+3$, ou seja, -2 (pois agora a deficiência é menos por 3 com relação a antes, o que é o mesmo que somar ou suprir 3). Da mesma maneira, se de $5A$ retirarmos $3E$, resta $5A-3E$; se de $5A$ retirarmos $-3E$, resulta $5A+3E$: Se de $-5A$, tirarmos $-3E$, resulta $-5A+3E$: Se de $-5A$ tirarmos $+3E$, resulta $-5A-3E$. Pois em toda situação, subtrair uma quantidade positiva, é o mesmo que somar uma deficiência da mesma, e subtrair uma deficiência é o mesmo que ofertá-lo, ou somá-lo. (Wallis, 1685, p. 73,74)[27]

No primeiro caso, vemos que, assim como Kersey fez em sua *Álgebra*, Wallis tenta dar exemplos reais para substanciar a explicação. Mesmo assim, ele não tenta apoiar sua explicação apenas nisso, como Kersey fez em alguns momentos. Como foi dito anteriormente, Wallis parece fundamentar-se muito mais no significado literal que ele atribui às ideias de somar, subtrair, quantidade positiva e quantidade negativa. Isso ocorre, por exemplo quando ele argumenta que o resultado decorre do fato de que "retirar uma deficiência é o mesmo que supri-la". Subtrair, então, significa "remover", enquanto uma negação significa uma "falta" de alguma coisa, ou uma "deficiência". Assim, o leitor pode concluir que as regras são válidas por meio da intuição. Ora, se "falta" uma certa quantidade A, então parece justo inferir que subtrair essa falta é o mesmo que somá-la. Se me faltam três ovos $(-3A)$, eliminar (subtrair) essa falta é o mesmo que obter (somar) os três ovos $(+3A)$. Um possível problema que esse vínculo com o significado das palavras pode trazer é uma contestação de algumas das referências que o autor apresentou para quantidades negativas. De que maneira 3 metros para trás poderia ser interpretado como uma "falta de" ou uma "deficiência" de três metros para frente? E de que maneira subtrair três metros para trás significaria três metros para frente?

Ainda que não enxerguemos o raciocínio de Wallis como analógico, podemos ainda assim levantar a seguinte pergunta: de que maneira as "noções comuns da aritmética" nos

---

[26] If the signs be unlike (+ in one, and - in the other,) the case is somewhat altered: As if to 5A (or +5A) we add -3A, it makes *5A -3A*, or *5A's* wanting *3A's*, that is *2A's*. (For to subjoyn a defect of 2, is the same as to take away 2.) And if to *+3A*, we add-*5A*, it makes *3A-5A,* that is, *-2A*. (For it takes away *2A's* more than all, and therefore leaves 2A's less than nothing, or a defect of 2A's. Like as a man who hath three Pounds but owes 5 Pounds, his Estate is -2 Pounds, that is 2 Pounds worse than nothing,) yet still the Aggregate is collected into one sum.

[27] In subduction, likewise, it is manifest from the Principles of Common Arithmetick, that if from 5 we take 3, the Remainder is *5-3*, or *5 wanting 3*, that is 2; (for to take away 3, or to Subjoyn the defect of 3, is all one.) If from +5 we take -3, it makes +5+3, that is +8; (for to *take away the defect of 3*, is the same as to *supply the 3 that were wanting.)* If from -5, we take -3, the remainder is -5+3; that is -2; (for now the defect is less by 3 than before it was, which is the same as to add or supply 3.*)* In like manner, if from *5A* we take *3E*, there remains *5A-3E; if from 5A we take -3E, it makes 5A+3A*: If from *-5A* we take -3E, there remains *-5A +3E: If from -5A we take +3E,* it makes *-5A-3E.* For every where to subduct a positive quantity, is the same as to subjoin a defect of so much; and to subduct a defect, is the same as to supply it, or add so much.

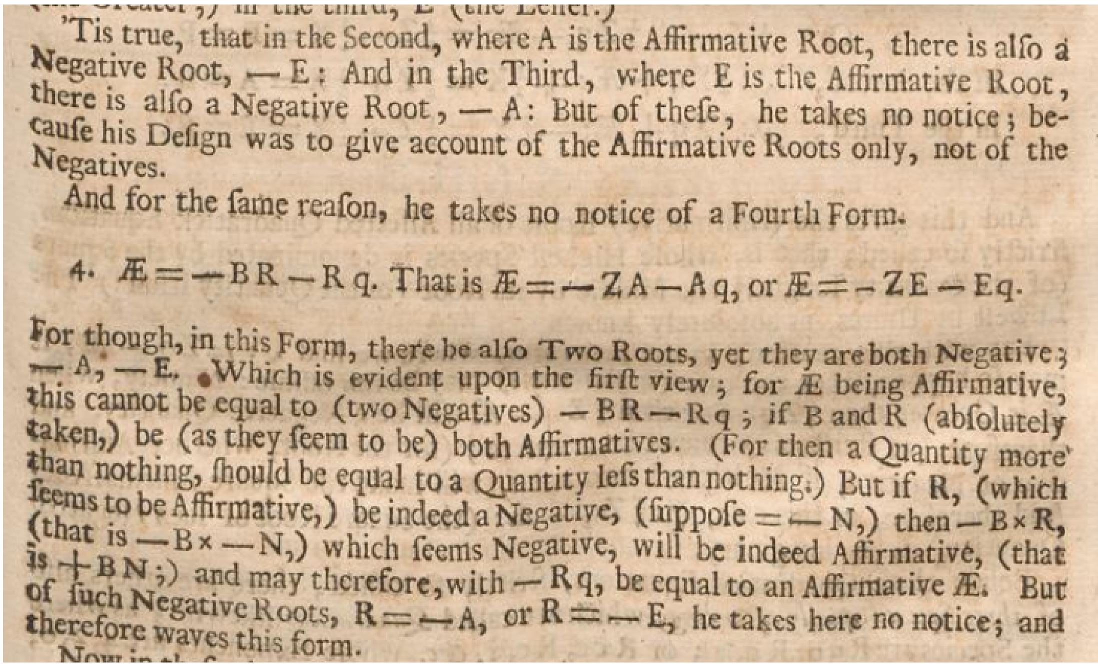
levam ao fato de que somar uma deficiência é o mesmo que retirá-la? Isso parece constituir uma premissa que não se faz presente no que se entende pelos princípios da aritmética.

Depois da soma e subtração, o autor se volta para os sinais na operação de multiplicação, trazendo uma abordagem diferente daquela de Kersey. O autor diz que “ a verdadeira noção da multiplicação” pode ajudar a aliviar a dificuldade em apreender a razão das regras de sinal, especialmente aquela que diz que “- com - resulta em +” (Wallis, 1685, pp. 74). Segundo o autor, a verdadeira noção da multiplicação é “colocar o multiplicando ou coisa multiplicada (o que quer que seja) tantas vezes quanto houver unidades no multiplicador”. Trata-se de uma definição similar àquela estabelecida nos Elementos de Euclides. (Euclides, 2009, p. 270) Mais do que isso, a ideia se aplica igualmente se o multiplicando for negativo:

> ...pode haver também uma deficiência dupla, como uma dupla magnitude; e $-2A$ é o dobro de $-A$ da mesma maneira que $+2A$ é o dobro de $+A$: O que explica esses termos, que + com + produz +, e que - com + produz -, o multiplicador em ambos casos sendo uma quantidade positiva (Wallis, 1685, p. 74).
>
> Para o caso de multiplicador ser negativo, por exemplo, -2; “em vez de colocar o multiplicando tantas vezes, significará retirar o multiplicador tantas vezes. Pois assim como $+2$ indica colocar duas vezes, -2 indica retirar duas vezes o multiplicando (seja negativo ou positivo). Desse modo multiplicar A por -2 é retirar duas vezes A, e logo produz um negativo $-2A$; de modo que + com - produz - : Mas multiplicar $-A$ por $-2A$, é retirar duas vezes uma deficiência ou negativo. Agora, retirar uma deficiência é o mesmo que supri-la; e retirar duas vezes ou suprir a deficiência de A, é o mesmo que somar A duas vezes, ou colocar $2A$; ou seja, retirar duas vezes $-A$, é o mesmo que somar duas vezes $+A$: De modo que - com - (assim como + com +) produz +. (Wallis, 1685, p. 74).

O que percebemos aqui primeiramente é que a sua concepção inicial de multiplicação consegue ainda abarcar o caso em que o multiplicando é negativo e o multiplicador é positivo. Se multiplicar significa colocar tantas vezes o multiplicando quanto há no multiplicador, então iremos somar quantidades negativa tantas vezes quanto houver quantidade no multiplicador. Como ele já havia explicado que somar quantidades negativas é o mesmo que somar suas deficiências, ele consegue depreender que $-2A$ é o dobro de $-A$, por meio de uma soma iterativa. Agora, no caso de o multiplicador ser negativo, ele “expande” o significado de multiplicação, e considera que, quando o multiplicador for negativo, iremos retirar o multiplicando tantas vezes quanto houver unidades no multiplicador. Logo, sabendo subtrair quantidades positivas e negativas, conseguimos obter que “+ por - resulta - e - por - resulta em +”. É perceptível que, para Wallis, não foi feita uma “expansão da definição de multiplicação”, mas apenas uma dedução direta do que sugere um multiplicador ser negativo. Segundo ele, o termo negativo já carrega consigo a ideia de “retirar tantas vezes”. Podemos contrastar também essa “demonstração” com aquela de Kersey, que já assume a comutatividade e tenta ser mais algébrica, no sentido de não deduzir nada a partir de uma “inerência” das quantidades negativas. A partir do resultado, Wallis também conclui que a mesma regra vale para a divisão, pois “como na aritmética ordinária, a divisão é apenas a dissolução de uma multiplicação, e o que na multiplicação era o produto, é o dividendo na divisão; e o que na multiplicação eram os dois fatores (o multiplicando e o multiplicador) são na divisão, o divisor e o quociente...” (Wallis, 1685, pp. 74-75)

Ainda na parte de Oughtred do tratado, vale ainda apontar que Wallis toma conhecimento do tipo de equação quadrática que Oughtred desconsidera por possuir duas raízes negativas, da mesma forma que faz Kersey e Pell.



'Tis true, that in the Second, where A is the Affirmative Root, there is alſo a Negative Root, — E: And in the Third, where E is the Affirmative Root, there is alſo a Negative Root, — A: But of theſe, he takes no notice; becauſe his Deſign was to give account of the Affirmative Roots only, not of the Negatives.

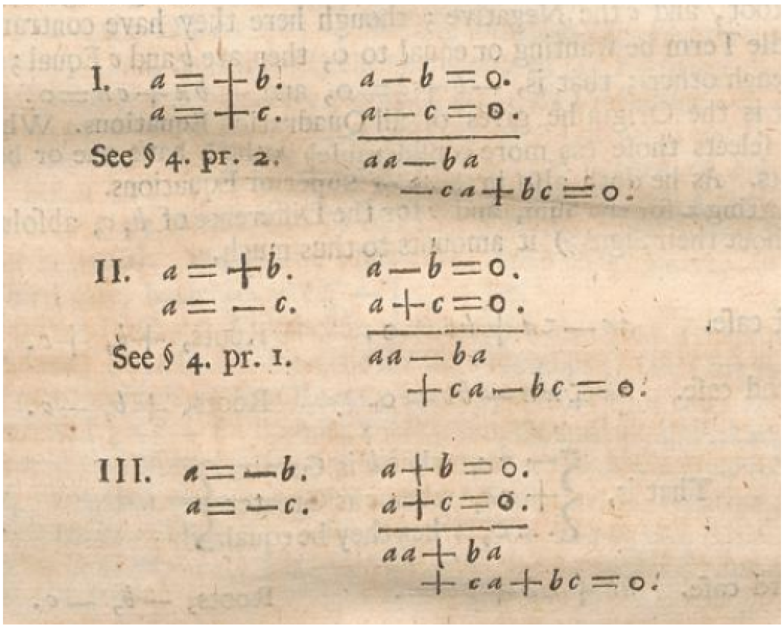
And for the ſame reaſon, he takes no notice of a Fourth Form.

4. Æ = — BR — Rq. That is Æ = — ZA — Aq, or Æ = — ZE — Eq.

For though, in this Form, there be alſo Two Roots, yet they are both Negative; — A, — E. Which is evident upon the firſt view; for Æ being Affirmative, this cannot be equal to (two Negatives) — BR — Rq; if B and R (abſolutely taken,) be (as they ſeem to be) both Affirmatives. (For then a Quantity more than nothing, ſhould be equal to a Quantity leſs than nothing.) But if R, (which ſeems to be Affirmative,) be indeed a Negative, (ſuppoſe = — N,) then — B × R, (that is — B × — N,) which ſeems Negative, will be indeed Affirmative, (that is + BN;) and may therefore, with — Rq, be equal to an Affirmative Æ. But of ſuch Negative Roots, R = — A, or R = — E, he takes here no notice; and therefore waves this form.

Figura (16): A quarta forma de equação quadrática, desconsiderada por Oughtred. (Wallis, 1685, p. 123)

O autor ainda reescreve as formas das quadráticas de Harriot usando as ligaduras de Oughtred, chegando a casos que na verdade nada diferem daqueles de Oughtred, somados à forma ignorada da figura acima. No segundo caso da segunda figura, temos $-xa$ se b for maior do que c, e $+xa$ se b for menor do que c (Wallis, 1685, p. 132), de modo que ele abrange os casos 2 e 3 de Oughtred, com a diferença que as solução negativas se fazem presentes aqui. Vemos ainda que Wallis fornece as soluções gerais, onde podemos ver as raízes negativas da quarta forma de maneira explícita.

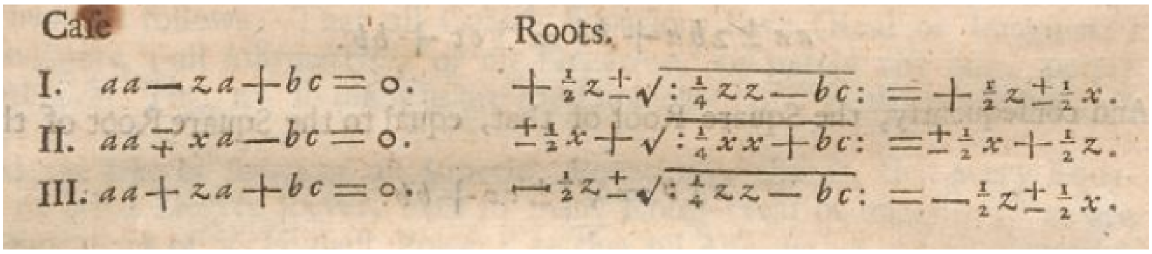


$$\text{I.}\quad a = +b. \qquad a - b = 0.$$
$$a = +c. \qquad a - c = 0.$$
See § 4. pr. 2. $\quad aa - ba - ca + bc = 0.$

$$\text{II.}\quad a = +b. \qquad a - b = 0.$$
$$a = -c. \qquad a + c = 0.$$
See § 4. pr. 1. $\quad aa - ba + ca - bc = 0.$

$$\text{III.}\quad a = -b. \qquad a + b = 0.$$
$$a = -c. \qquad a + c = 0.$$
$$aa + ba + ca + bc = 0.$$

Figura (17): Os casos de equação quadrática em Harriot. (Wallis, 1685, p. 131)



Case		Roots.
I.	$aa - za + bc = 0.$	$+\frac{1}{2}z \pm \sqrt{:\frac{1}{4}zz - bc:} = +\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}x.$
II.	$aa \mp xa - bc = 0.$	$\pm\frac{1}{2}x + \sqrt{:\frac{1}{4}xx + bc:} = \pm\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z.$
III.	$aa + za + bc = 0.$	$-\frac{1}{2}z \pm \sqrt{:\frac{1}{4}zz - bc:} = -\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}x.$

Figura (18): os três casos de equação quadrática. No caso 3, as duas soluções são negativas. (Wallis, 1685, p. 132)

No capítulo 72 da obra, as quadráticas são recapituladas, juntamente com as equações cúbicas, numa tentativa do autor de sistematizar o método de resolvê-las. Dessa vez, além separar a quadrática em quatro casos, ele também explicita a natureza das soluções. Logo em seguida, ele ainda apresenta o novo símbolo  para representar o sinal de cada membro, isto é, podendo ser substituído pelas alternativas + ou - . Com ele, Wallis é então capaz de realizar algo inédito até aqui: unificar as quatro formas quadráticas e suas respectivas raízes em uma única expressão algébrica. (Wallis, 1685, p. 278) Segundo Ball, essa tentativa de generalização das quadráticas não é a única novidade de Wallis; a própria exposição sistemática de equações gerais seguidas imediatamente de suas raízes, como vemos nas figuras abaixo, também é pioneira. (Rouse Ball, 1888, p. 241)

Equations.	Roots.	
$aa - 2ba - a = 0.$	$+b \pm \sqrt{:bb + a}.$	The Greater, Affirmative.
$aa + 2ba - a = 0.$	$-b \pm \sqrt{:bb + a}.$	The Greater, Negative.
$aa - 2ba + a = 0.$	$+b \pm \sqrt{:bb - a}.$	Both Affirmative.
$aa + 2ba + a = 0.$	$-b \pm \sqrt{:bb - a}.$	Both Negative.

Figura (19): As quatro formas da equação quadrática, a fórmula de suas raízes e a natureza de suas soluções. (Wallis, 1685, p. 278)

$$aa \;♉\; ba \;♉\; a = 0. \qquad ♌ b \pm \sqrt{:bb} \;♌\; a.$$

Figura (20): A forma singular da equação quadrática, apresentada logo em seguida. (Wallis, 1685, p. 279)

Equations.	Root.
$aaa + 3ba - 2d = 0.$	$+\sqrt[3]{+d+\sqrt{dd+bbb}}. - \sqrt[3]{-d+\sqrt{dd+bbb}}. = a.$
$aaa + 3ba + 2d = 0.$	$-\sqrt[3]{+d+\sqrt{dd+bbb}}. + \sqrt[3]{-d+\sqrt{dd+bbb}}. = a.$
$aaa - 3ba - 2d = 0.$	$+\sqrt[3]{+d+\sqrt{dd-bbb}}. + \sqrt[3]{+d-\sqrt{dd-bbb}}. = a.$
$aaa - 3ba + 2d = 0.$	$-\sqrt[3]{+d+\sqrt{dd-bbb}}. - \sqrt[3]{+d-\sqrt{dd-bbb}}. = a.$

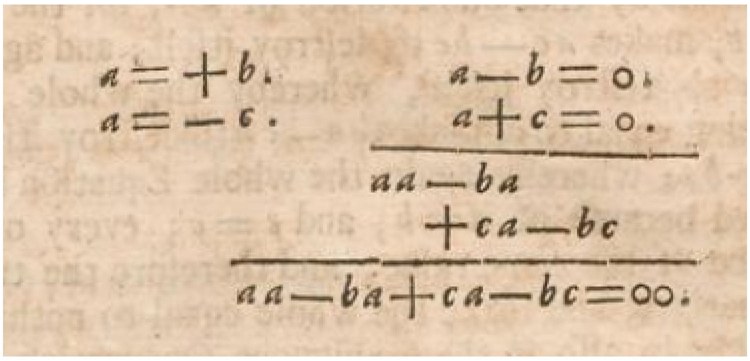
Figura (21): As quatro equações cúbicas. Após ter sido encontrada a primeira raíz, a equação pode ser reduzida a uma quadrática. (Wallis, 1685, p. 279)

Uma defesa deliberada das raízes negativas encontra-se no capítulo XXXI, onde o autor fala sobre a formação de equações compostas a partir de equações simples em Harriot. Mais uma crítica é lançada contra Descartes, dessa vez por ele chamar esse tipo de raíz de "falsa", diferentemente do autor inglês.

> E aqui primeiramente, além das raízes positivas ou afirmativas, (as quais ele busca especialmente em todo o seu tratado, como sendo as mais consideráveis e principais) ele também considera as raízes negativas ou privativas [privative], as quais são negligenciadas por alguns.
>
> Onde ele é seguido também por *Des Cartes*. Com a diferença de que o que Harriot chama (bem apropriadamente) de raízes privativas, (como na página 27), *Des*

> *Cartes* (não sei por que razão) se contenta em chamar de raízes falsas (Wallis, 1685, p. 128). [28]
>
> Pois já que raízes negativas ou privativas (como -3) são admitidas (significando tanto do que foi suposto de maneira contrária; como se $+3$ significa 3 *foot* para a frente; o -3 significará 3 foot para trás) a raiz a (agora a ser buscada, então desconhecida) pode também ser -3, assim como $+3$. E logo podemos supor também que $a=-3$, assim como $a=+3$. E (por exemplo) supondo $aa=9$; se for perguntado, qual o valor de a? Podemos dizer indiferentemente que $a=+3$, ou $a=-3$: (uma vez que ambos, multiplicados por si mesmos, produzem 9) Ambas portanto são raízes verdadeiras: apesar de a primeira ser positiva, a outra privativa. (Wallis, 1685, p. 128).

Lembremos, primeiramente, que raízes negativas não aparecem em momento algum na *Praxis*. Harriot não faz referência nenhuma sobre as diferenças da publicação com os manuscritos originais de Thomas Harriot, mas citações como essa sugerem que o autor conhecia os manuscritos de Harriot, onde raízes negativas se manifestam. Stedall mostra que outros fatores ajudam a corroborar com essa suposição, como o fato de que Wallis usa a equação $(a-b)(a+c)=0$ da folha *d.1*) de Harriot, dada como um exemplo unificado mas, na *Praxis*, o mesmo conteúdo encontra-se espalhado ao longo de três seções. Além disso, nos capítulos sobre Harriot, Wallis utiliza o termo 00 nas equações, o qual Harriot devia utilizar para preservar a homogeneidade, apesar dele não ser encontrado na *Praxis*. (Stedall, 2003, p. 31)



$$a=+b. \qquad a-b=0.$$
$$a=-c. \qquad a+c=0.$$
$$\begin{array}{l} aa-ba \\ \quad +ca-bc \\ \hline aa-ba+ca-bc=00. \end{array}$$

Figura (22): o "duplo zero" utilizado por Wallis, em referência a Harriot. (Wallis, 1685, p. 129)

Além disso, vale apontar que sua defesa traz uma interpretação "substancial " para a raíz negativa, isto é, "foot para trás", estando nos mesmos moldes da sua apresentação dos sinais. A resposta definitiva para as tentativas de Wallis de justificar as quantidades negativas encontra-se no capítulo 66, onde ele tenta explicar as quantidades imaginárias. Wallis diz que, da mesma maneira como um "quadrado negativo" é impossível:

[28] And here first, Beside the Positive or Affirmative Roots, (which he doth through his whole Treatise, more especially pursue, as the principal and most considerable:) He takes in also the Negative or Privative Roots; which by some are neglected. Wherein he is followed als by Des Cartes. Save that what Harriot calls (very properly) Privative Roots, (as *Pag*. 27.) Des cartes (I know not for what reason) is pleased to call False Roots.

… também é impossível que qualquer quantidade (mas não um suposto quadrado) possa ser negativa. Uma vez que não é possível que qualquer magnitude possa ser menos do que nada, ou qualquer número menor do que nenhum.

Mas não é essa suposição (de quantidades negativas) inútil ou absurda, quando corretamente entendida. E apesar de, na notação algébrica pura, ele denotar uma quantidade menor do que nada: mas em se tratando de aplicações físicas, ele denota uma quantidade tão real quanto se o sinal fosse +; mas interpretada em um sentido contrário. (Wallis, 1685, p. 265).[29]

Assim, Wallis deixa explícito que as quantidades negativas não existem fora de uma interpretação física, uma suposição que possui uma certa utilidade. Isto ratifica, portanto, que os objetos matemáticos são dependentes de ideias concretas para ele.

5.4 Conclusão

Wallis declara-se um defensor de uma álgebra livre das amarras da geometria de quaisquer outros assuntos, no sentido de ela não servir apenas de instrumento para outros propósitos, como teria feito Descartes. Nesse aspecto, podemos dizer que Wallis se distancia também de Oughtred e se aproxima mais da abordagem de Harriot, apesar de ele ter muito defendido o *Clavis* ao longo de sua vida. Isso, contudo, não significa que a sua concepção de quantidade não esteja também ligada a um certo tipo de realidade. As quantidades negativas continuam a existir aqui apenas em circunstâncias físicas que permitam uma interpretação das mesmas, sendo assim uma mera suposição prestativa. Apesar disso, as quantidades negativas são defendidas como raízes tão reais quanto as afirmativas. De fato, vemos aqui, pela primeira vez entre as obras abordadas, o reconhecimento do caso da equação quadrática com duas raízes negativas. Sem fugir disso, Wallis trata da mesma forma as cúbicas com raízes negativas, assim como outras equações de dimensões maiores. No mais, as operações com termos algébricos continuam a ser explicadas de maneira peculiar. Na álgebra de Wallis, destacadamente, encontramos uma argumentação ancorada numa interpretação literal e intuitiva das definições de quantidades positivas, negativas, soma e subtração.

[29] But it is also impossible, that any Quantity (though not a Supposed Square) can be *Negative*. Since that it is not possible that any Magnitude can be *Less* than *Nothing, or any* Number *Fewer than None. Yet is not that Supposition* (of Negative QUantities,) either Unuseful or Absurd; when rightly understood. And though, as to the bare Algebraick Notation, it import a Quantity less than nothing: Yet, when it comes to a Physical Application, it denotes as Real a Quantity as if the Sign were +; but to be interpreted in a contrary sense.

6 Isaac Newton e o *Arithmetica Universalis*

Aproximadamente dois anos antes da grande publicação algébrica de Wallis, um famoso nome da matemática inglesa estava elaborando o seu próprio escrito sobre a álgebra analítica. Apesar disso, não foi até a virada do século que o público teve a chance de ver a obra de Isaac Newton. A história por trás da sua “ aritmética universal”, lançada em 1707, nos ajuda a perceber que a “álgebra dos modernos” não era uma unanimidade na Inglaterra.

6.1 Isaac Newton

Isaac Newton nasceu no ano de 1643, na cidade rural de Lincolnshire, e faleceu em Kensington, Londres, em 1727. Quando jovem, foi enviado para uma escola em Grantham, onde seu aprendizado e proficiência mecânica já chamavam certa atenção. (Rouse Ball, 1888, p. 263-264) Sem ter muita experiência em matemática até então (Rouse Ball, 1888, p. 264), Newton ingressou em 1661 na Trinity College em Cambridge, onde deu iniciou um estudo das obras científicas de contemporâneos como Robert Boyle, Thomas Hobbes e Pierre Gassendi. Além de seus estudos físicos e astronômicos, o período também marcou seu aprofundamento no trabalho de grandes matemáticos como Euclides, Descartes, Viète, Oughtred, Wallis e Isaac Barrow (Pycior, 1997, p. 168-169); a terceira edição em latim da *Geometria* de Descartes, em particular, ajudou a direcionar seus interesses e seu estilo algébrico (Pycior, 1997, p. 171). No ano de 1669, foi apontado para o cargo de professor lucasiano, que era anteriormente ocupado por Isaac Barrow. Newton ocupou o cargo até o ano de 1687 (Cohen, 1970, n.p), mesmo ano em que publicou a primeira obra, o famoso *Principia,* onde expõe suas leis do movimento dos corpos, a inovadora lei da atração universal, e suas leis sobre os movimentos dos planetas baseadas nas leis de Kepler. Em questão de matemática, nesta obra, Newton se utiliza da geometria sintética para apresentar os resultados sobre sua filosofia natural, e também dedicando seções inteiras para a geometria pura. Com o rigor da geometria, Newton desenvolve uma abordagem alternativa para os seu método de fluxões —instrumento utilizado para desenvolver o seu cálculo infinitesimal — adotando uma visão cinemática das grandezas geométricas. (Guicciardini, 2005, p. 23) Os métodos de fluxões de Newton haviam sido desenvolvidos e expostos no manuscrito *De methodis serierum et fluxionum,* que foi finalizado em 1671 e publicado apenas em 1736, porém de uma maneira analítica. De fato, durante a década de 1670, Newton teria sentido certa incerteza quanto a seus métodos de descoberta. (Guicciardini, 2004, p. 226) Nesse mesmo tempo, Newton alimentou uma forte apreciação pela geometria clássica, talvez sob influência de Isaac Barrow, um forte crítico ao simbolismo excessivo (Guicciardini, 2004, p. 226) que, inclusive, havia escrito uma versão dos *Elementos* de Euclides (Cohen, 1970, n.p). A partir daí, Newton reformulou sua nova análise em termos puramente geométricos, e na síntese também conseguiu apaziguar seu espírito, que acreditava que nenhum resultado poderia ser debatível, deveria ser sempre absoluto (Guicciardini, 2004, p. 225). Sua apreciação pela álgebra das séries infinitas dissipou-se em favor de sua nova visão sintética. (Guicciardini, 2004, p. 229) Muitas das obras e manuscritos que Newton escrevera antes dessa mudança de mentalidade jamais haviam sido publicados devido ao receio que Newton tinha por críticas, mas muitas acabaram sendo publicadas no século seguinte, em meio a disputas que Newton teve com Leibniz, e seu novo status como um indiscutível líder da matemática britânica (Guicciardini, 2004, p. 228). A sua obra de álgebra, ou "aritmética universal", foi publicada dentro desse contexto de redescobrimento de textos antigos, que pouco tinham a ver com a geometria clássica grega.

6.2 Publicação da Arithmetica Universalis

Apesar da sua posterior "conversão", a relação de Newton com a álgebra é antiga. Após ter lido as obras de nomes como Oughtred, Viète e Descartes, Newton também parece ter sido levado à *Algebra* de Gerard Kinckhuysen por Barrow, no ano de 1669. Uma anotação sobre dessa obra também foi combinada entre Newton e John Collins, mas o projeto não foi tão fortemente abraçado por Newton de começo. Novamente mostrando seu entusiasmo para a publicação de livros ingleses, Collins conseguiu persuadir Newton a expandir suas notas, que foram a ele enviadas no mesmo ano de 1669. Essas notações de Newton ficam conhecidas como "*Observações*", (Pycior, 1997, p. 176-177) e Newton permaneceu a elaborá-lo até o início da década de 1670. Em uma carta para Collins, Newton também chegou a declarar sua ideia de escrever uma original "introdução completa à álgebra" (Pycior, 1997, p. 179), mas acabou que nem esse, nem as suas "Observações", já finalizadas, tiveram a chance de serem publicadas no momento. (Pycior, 1997, p. 180)

Posteriormente, no ano de 1773, Newton passou a lecionar álgebra em vez de óptica no seu posto em Cambridge, e assim permaneceu até o ano de 1683. Apesar disso, até então, apenas suas antigas lições sobre óptica se encontravam disponíveis na biblioteca da universidade. Somente quando suas aulas de álgebra finalmente chegavam ao fim que ele começou a compor um novo manuscrito do assunto: suas *Lições de Álgebra* foram provavelmente escritas ao longo dos anos de 1683 e 1684, e foram posteriormente depositadas na biblioteca de Cambridge. (Pycior, 1997, p. 187) No que parecia um plano de publicação, Newton chegou a pegar os manuscritos novamente a fim de expandí-los, mas o projeto foi deixado de lado depois, e Newton acabou por se ocupar com outras coisas (Pycior, 1997, p. 187-189). Somente duas décadas depois, em 1707, que as suas *Lições* foram publicadas ao comporem boa parte da *Arithmetica Universalis,* publicada por *William Whiston,* sucessor de Newton na cadeira lucasiana. Newton argumenta que foi compelido a publicar esse texto para obter o suporte de seus companheiros nas eleições parlamentares de 1705, época em que já havia se afastado do mundo acadêmico e de seus estudos. (Guicciardini, 2004, p. 231) Além disso, a obra de Newton foi publicada de maneira anônima. No prefácio da obra, vemos a corroboração de que ela foi inspirada nas suas aulas: "O livro foi originalmente escrito para uso privado dos cavalheiros de Cambridge, e foi articulada em aulas públicas pelo autor, então professor lucasiano naquela universidade." (UNIVERSAL..., 1720, p. *ii*)

A *Arithmetica universalis* foi traduzida do latim para o inglês em 1720 por Raphson e Cunn, e nela foram incluídos os métodos de Halley para encontrar raízes de equações aritmeticamente. (UNIVERSAL..., 1720, p. *iii-iv*) Esta edição da obra será estudada a seguir.

6.3 Arithmetica universalis

Newton já começa a obra explicitando aquilo que Wallis transmitiu indiretamente em seu tratado: "a álgebra e a aritmética são fundamentadas nos mesmos princípios." Ambas tratam da "arte de computar", sendo que na aritmética operamos com números e na álgebra, com espécies. Dessa forma, enquanto a primeira almeja seus fins de maneira definida e particular, a álgebra o faz de maneira indefinida e "universal" (UNIVERSAL..., 1720, p. 1), perspectiva da qual o nome "aritmética universal" provavelmente advém. Isso, Newton explica, se dá por meio da obtenção de teoremas com o método analítico da álgebra, apesar de ele não nomear o método analítico aqui, apenas descrevê-lo:

> ...enquanto na aritmética as questões são apenas resolvidas procedendo-se de quantidades dadas para as buscadas, a álgebra procede de maneira retrógrada, das quantidades buscadas, como se fossem dadas, às quantidades buscadas, a fim de que possamos de alguma maneira ou outra chegar a uma conclusão ou equação, da qual se possa extrair a quantidade buscada. (UNIVERSAL…, 1720, p. 1-2)[30]

Newton ainda diz que a álgebra permite a "resolução de problemas mais difíceis, "enquanto na aritmética comum, suas resoluções seriam buscadas em vão." (UNIVERSAL…, 1720, p. 2) Ao finalizar a sua introdução, Newton sugere mais uma vez a unidade dos princípios da álgebra e da aritmética, ao dizer que ambas juntas compõem uma espécie de "ciência perfeita da computação". Desse modo, ambas podem ser tratadas indistintamente ao longo do livro:

> Mas a aritmética e todas as suas operações é tão subserviente à álgebra, que elas parecem ambas formar uma ciência perfeita da computação; e logo eu explicarei ambas juntas. (UNIVERSAL…, 1720, p. 2)[31]

Sua abordagem começa explicando algumas notações e termos, a começar pela sua concepção de número. Newton destaca que para ele, número não é apenas um conjunto, uma pluralidade de unidades, mas sim uma ideia abstraída: indica a razão atribuída entre qualquer quantidade e outra de mesma espécie, a qual tomamos por unidade. O número segundo Newton pode ser de três tipos: inteiro, fracionário ou "surdo", ou seja, incomensurável com a unidade. (UNIVERSAL..., 1720, p.2)

---

[30] ...whereas in Arithmetick QUestions are only resolv'd by proceeding from given Quantities to the Quantities sought, *Algebra* proceeds, in a retrograde Order, from the Quantities sought as if they were given, to the Quantities given as if they were sought, to the End that we may some Way or other come to a Conclusion or Equation, from which one may bring out the QUantity sought.

[31] Yet Arithmetick in all its Operations is so subservient to Algebra, as that they seem both but to make one perfect Science of Computing; and therefore I will explain them both together.

Ao falar das quantidades desconhecidas, Newton diz que "por serem desconhecidas essas quantidades não podem ser denotadas por números". Sua notação para elas reproduz Descartes, que utilizava as letras minúsculas x, y, z, etc. para designar quantidades desconhecidas, e as primeiras letras do alfabeto, a, b, c, etc. para as conhecidas. (Pycior, 1997, p. 80) Ainda como Descartes (Pycior, 1997, p. 80), Newton chega a representar quadrados da forma xx às vezes mas, para potências de grau mais elevado, ele se atém à notação exponencial da forma x^3, x^4, etc. Nesses aspectos notacionais, Newton é o primeiro inglês estudado até aqui que adere totalmente a Descartes.

Newton diz que as quantidades podem ser afirmativas ou negativas. Sua forma de defini-las é concisa, e preserva a ideia de quantidades maiores ou menor do que nada.

> As quantidades são positivas, ou seja, maiores que "nada", ou negativas, menores do que nada. (UNIVERSAL..., 1720, p.3)

Com isso, Newton segue dando exemplos reais de quantidades que podem ser entendidas como sendo positivas ou negativas, ao mesmo estilo indicado nas obras de Wallis e Kersey. Newton ainda aproveita um exemplo comum em Kersey, dizendo que um crédito pode ser entendido como um "bem positivo" enquanto uma dívida é um "bem negativo". Ao dar exemplos no movimento e na geometria, Newton segue o caso de Isaac Barrow. (Pycior, 1997, p. 192-193) Em termos de retas, por exemplo, o autor afirma que se uma reta *AB* direcionada à direita for designada como sendo positiva, então uma reta *BC* direcionada à esquerda, logo de direção oposta a *AB*, é considerada negativa, pois esta "diminui o desenho de *AB*, e o reduz a um menor, como AC, ou a nada, se C cair no ponto A, ou a menos do que nada, se *BC* for maior do que *AB* ". (UNIVERSAL..., 1720, p.3) Perante esses exemplos, vemos que Newton também parece perceber as quantidades negativas a partir de quantidades reais que possam ser assim interpretadas. Mesmo assim, apontamos que Newton em nenhum momento chama quantidades negativas de "fictícias", como fez Kersey, ou as considera como impossíveis fora de uma realidade física, como vimos no discurso de Wallis. No geral, Newton não se preocupa muito em levantar discussões filosóficas desse tipo na obra, ou sobre qualquer outro assunto. Suas observações sobre as operações aritméticas, por exemplo, são desprovidas de explicações como aquelas que vimos em Kersey e Wallis. O que é importante notarmos é que Newton age de maneira parecida com Kersey ao atribuir logo em seguida um novo significado operacional para os sinais, assim interpretado no momento em que eles estiverem em um "agregado de quantidades". (UNIVERSAL…, 1720, p. 3)

> Em um agregado de quantidades, a notação + significa, que a quantidade a qual ela prefixa, deve ser somada, e a notação -, que ela deve ser subtraída. E geralmente expressamos essas notações pelas palavras *Plus* (ou *more*) e *Minus* (ou *less*). (UNIVERSAL…, 1720, p. 3)

Um exemplo peculiar que ele dá em seguida é a operação $-5+3$, que ele diz que "denotar a diferença que surge ao subtrair 5 de 3, ou seja -2 [o texto original não coloca o sinal negativo, e escreve apenas 2, um erro que foi corrigido nas edições posteriores]". Percebemos aqui que Newton lê a operação como uma subtração, em vez de ler como "-5 somado a 3", da maneira que sua definição do sinal de + sugere em agregados de quantidades. Isso sinaliza, novamente, uma nebulosidade na separação entre subtração e negação. O exemplo geométrico que apresentamos antes merece a mesma observação, visto que ele diz que a reta BC é negativa “porque diminui AB”. Newton ainda introduz os sinais de indeterminação $\pm$ e $\mp$ de Harriot nesse momento, mas não mostra a maneira de utilizá-los.

Ao falar da multiplicação, Newton separa a definição da multiplicação para inteiros da multiplicação com surdos e frações. A multiplicação de inteiros é definida como uma regra de três: buscamos a quantidade tantas vezes maior do que o multiplicando, quanto o multiplicando for da unidade. Após isso, Newton diz que, por “falta de um termo melhor”, a multiplicação se estende aos surdos e frações como a busca de uma quantidade na mesma razão com o multiplicando que a razão entre o multiplicando e a unidade. Em seguida, Newton mostra que a multiplicação ainda pode ser feita não apenas por “números abstratos” mas também por “quantidades concretas" como retas, superfícies, pesos, movimentos, etc. A definição exige que a unidade seja uma quantidade do mesmo tipo que o multiplicando e ele mostra por exemplo, que segmentos de reta podem ser multiplicados tanto por quantidades abstratas como entre eles mesmos, resultando nesse caso em um outro segmento, do mesmo jeito que fez Descartes (Descartes, p. 2, 5):

> E se você for multiplicar quaisquer duas retas, AC e AD, uma pela outra, tome AB como unidade e desenhe BC, e paralela a ela DE, e AE será o produto dessa multiplicação; pois ela está para AD assim como AC para a unidade AB. (UNIVERSAL…, 1720, p. 4)

Newton ainda comenta o costume que se tem em dizer que o produto de dois segmentos gera um retângulo, formado pelo movimento de uma sobre a outra em ângulos retos. Aqui, Newton mostra-se novamente adepto à prática de Descartes, ao não considerar esse tipo de procedimento como uma multiplicação.

> … apesar de uma reta, de qualquer maneira que ela seja multiplicada, não pode se tornar uma superfície, e consequentemente essa geração de uma superfície por retas é bem diferente de uma multiplicação… (UNIVERSAL…, 1720, p. 4)[32]

Nas seções seguintes, Newton discute algoritmos para realizar as operações básicas, começando por operações aritméticas e depois incluindo termos algébricos contendo "espécies". Newton diz que as operações de soma e subtração são “auto-evidentes”, por exemplo, " somar 7 com 9 resulta evidentemente em 16", e "se tirarmos 9 de 17, sobram 8"(UNIVERSAL..., 1720, p.9-13). Os algoritmos são necessários apenas para operações mais trabalhosas que envolvam mais termos ou números maiores (UNIVERSAL..., 1720, p.10). Como já mencionado, Newton não tenta dar uma explicação para as operações com espécies. Vemos isso novamente na operação de multiplicação, onde a “regra dos sinais” da operação é apresentada de maneira direta:

---

[32] For tho’ a Line, however multiply’d, cannot become Surface, and consequently this Generation of a Surface by Lines is very different from Multiplication....

> Termos algébricos simples são multiplicados por meio da multiplicação de números por números, e espécies por espécies, e fazendo o sinal afirmativo, se ambos fatores forem afirmativos, ou ambos negativos; e negativo caso contrário.

A explicação da divisão para Newton por sua vez, é encontrar quantas vezes o divisor está contido no dividendo (UNIVERSAL..., 1720, p.16). Em seguida, o autor repete Wallis ao dizer que, "em termos algébricos, a divisão é realizada pela resolução do que é composto pela multiplicação". A partir disso, ele indiretamente deriva a regra dos sinais para a operação:

> Dessa forma, *ab* dividido por *a* resulta no quociente *b*. *6ab* dividido por *2a* dá *3b*; e dividido por *-2a* dá *-3b*. *-6ab* dividido por *2a* dá *-3b*, e dividido por *-2a* dá *3b*. (UNIVERSAL…, 1720, p. 21)

Após ter também explicado como operar e extrair raízes, além de reduzir e operar com frações, Newton mostra como organizar e resolver equações. (UNIVERSAL..., 1720, p.55-56). Como de costume, o objetivo é isolar a quantidade procurada em um dos lados da equação, seja ela da "dimensão" que for, de modo que os expoentes da quantidade buscada fiquem em ordem decrescente. Newton mostra 7 métodos para transformar e reduzir as equações, mas não faz menção a nenhum "princípio fundamental" para embasá-las. As regras não fogem muito do padrão que encontramos nos demais autores:

- Regra 1:Trata-se da regra de passar um termo de um lado da equação para o outro. Segundo Newton," remover termos que se destroem, e podem ser juntados em uma adição ou subtração". Exemplo: $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$. Tire de cada lado $2x$, e some $3a$, e daí resultará $5b = 8a + x$. No fim, obtemos que $\frac{bx}{a} = a$

- Regra 2:"Se houver um termo pelo qual todos os termos da equação estão multiplicados, todos eles devem ser divididos por essa mesma quantidade, o mesmo valendo no caso da divisão." Exemplo: Se $15bb = 24ab + 3bx$, divida todos os termos por b e você terá $15b = 24a + 3x$, então por 3, você terá $5b = 8a + x$; ou tendo $\frac{b^3}{ac} - \frac{bbx}{cc} = \frac{xx}{c}$, multiplique todos por c, e daí o resulta que $\frac{b^3}{a} - \frac{bbx}{ac} = xx$

- Regra 3:" Se houver qualquer fração irredutível, na qual no denominador se encontra a incógnita, de acordo com a qual as dimensões da equação inteira deve ser ordenada, todos os termos da equação devem ser multiplicados por esse denominador ou por um divisor dele. "Exemplo: Se a equação $\frac{ax}{a-x} + b = x$ precisa ser ordenada de acordo com x, multiplique todos os seus termos por $a - x$, , e daí resulta $ax + ab - bx = ax - xx$, ou $ab - bx = - xx$, e transpondo cada parte você obtém, $xx = bx - ab$.

- Regra 4: Se a incógnita estiver envolvida com um surdo irredutível, todos os outros termos devem ser transpostos para o outro lado, seus sinais devem ser mudados, e cada parte da equação deve multiplicada por si mesma, se a raíz for quadrada, duas vezes se for cúbica, etc. Exemplo: Se queremos ordenar a equação $\sqrt{aa - ax} + a = x$ de acordo com a letra x, transpomos a para o outro lado, e você obtém

$\sqrt{aa-ax}=x-a$; e tendo elevado ao quadrado as partes , temos que $aa-ax=xx-2ax+aa$, ou $0=xx-ax$, isto é, $x=a$.

Nesse exemplo, reparamos que Newton ignora a solução $x=0$, considerando apenas a solução $x=a$.

- Regra 5: “os termos, com a ajuda das regras precedentes, sendo dispostos de acordo com as dimensões de uma das letras (a incógnita), se a maior dimensão dessa letra for multiplicada por qualquer quantidade conhecida, a equação inteira deve ser dividida por essa quantidade.” Dessa forma, $2y=a$, dividindo por 2, se torna $y=\frac{1}{2}a$.
- Regra 6: “Algumas vezes a redução pode ser realizada dividindo-se a equação por uma quantidade composta.” Exemplo: $y^3 = \;:\; +byy-2cyy+3bcy-bbc$ é reduzida a $yy=2cy+bc$ ao transferirmos todos os termos para o mesmo lado, isto é, $y^3+2cyy-byy-3bcy+bbc=o$ e dividindo por $y-b$.
- Regra 7: “Algumas vezes também a redução é realizada através da extração da raiz de cada parte da equação”. Nessa regra, Newton mostra como resolver uma equação geral do segundo grau.

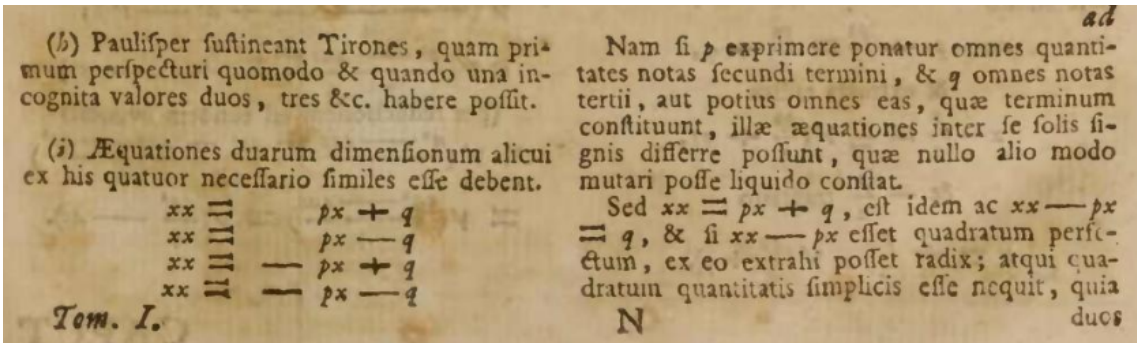
Ao apresentar a regra 7, de extração de raízes, Newton mostra como resolver uma equação geral do segundo grau. A partir do exemplo $xx=ax-bb$, ele diz:

> “some a cada lado $-ax+\frac{3}{4}aa$, e surge $xx-ax+\frac{1}{4}aa=\frac{1}{4}aa-bb$, e extraindo a raiz em ambos os lados, $x-\frac{1}{2}aa=\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa\;-bb}$, ou $x=\frac{1}{2}aa\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa\;-bb}$.” (UNIVERSAL… 1720, p. 59)

Vemos, portanto, que Newton resolve a quadrática por meio de um completamento de quadrados. A partir desse exemplo, ele deduz que o método vale “universalmente” para uma equação da forma $xx=.px.q$, onde os pontos denotam um sinal de + ou -. A sua solução geral, por sua vez, é dada por:

$$x=.\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp.q}$$

Dessa forma, Newton aborda a equação de segundo grau de uma maneira bem sucinta, ocupando menos do que uma página de seu tratado. Os pontos que ele coloca na equação para serem substituídos por sinais fazem com que os diversos “casos” de equações quadráticas sejam tratados de uma maneira unificada, exatamente como fez Wallis com seu símbolo próprio. Na versão em latim da obra de 1761, onde uma série de questões são esmiuçadas no rodapé por *Johannis Castillionei* (Newton, 1761, folha de rosto), a equação quadrática de Newton é destrinchada em quatro casos, de acordo com os sinais que podem ser colocados no lugar dos pontos. Com relação à natureza ou impossibilidade das raízes, nenhum comentário é tecido aqui, e Newton volta a esse assunto posteriormente.



ad

(h) Pauliſper ſuſtineant Tirones, quam primum perſpecturi quomodo & quando una incognita valores duos, tres &c. habere poſſit.

(i) Æquationes duarum dimenſionum alicui ex his quatuor neceſſario ſimiles eſſe debent.

$$xx = px + q$$
$$xx = px - q$$
$$xx = -px + q$$
$$xx = -px - q$$

Tom. I.

Nam ſi p exprimere ponatur omnes quantitates notas ſecundi termini, & q omnes notas tertii, aut potius omnes eas, quæ terminum conſtituunt, illæ æquationes inter ſe ſolis ſignis differre poſſunt, quæ nullo alio modo mutari poſſe liquido conſtat.

Sed $xx = px + q$, eſt idem ac $xx - px = q$, & ſi $xx - px$ eſſet quadratum perfectum, ex eo extrahi poſſet radix; atqui quadratum quantitatis ſimplicis eſſe nequit, quia

N

duos

Figura (23): Os quatro casos que "compõem" a equação quadrática geral de Newton (ARITHMETICA..., 1761, p. 97)

Na terceira seção da obra, Newton traz o conteúdo de suas *Lições sobre Álgebra* que discute como uma questão pode ser traduzida por meio de uma equação. (Pycior, 1997, p.194) Aqui, Newton mostra sua preocupação pedagógica ao mostrar um diagrama com o passo a passo para a transformação de um problema da linguagem verbal para o simbolismo algébrico.

The Queſtion in Words.	*The ſame in Symbols.*
There are ſought three Numbers on theſe Conditions:	x, y, z?
That they ſhall be continually proportional.	$x : y :: y : z$, or $xz = yy$.
That the Sum ſhall be 20.	$x + y + z = 20$.
And the Sum of their Squares 140.	$xx + yy + zz = 140$.

And ſo the Queſtion is brought to [theſe] Æquations, *viz.* $xz = yy$, $x + z + y = 20$, and $xx + yy + zz = 140$, by the Help whereof x, y, and z, are to be found by the Rules deliver'd above.

But you muſt note, That the Solutions of Queſtions are (for the moſt part) ſo much the more expedite and artificial, by how fewer unknown Quantities you have at firſt. Thus, in the Queſtion propos'd, putting x for the firſt Number, and y for the ſecond, $\frac{yy}{x}$ will be the third Proportional; which then being put for the third Number, I bring the Queſtion into Æquations, as follows:

The Queſtion in Words.	*Symbolically.*
There are ſought three Numbers in continual Proportion.	$(x, y, \frac{yy}{x}$?)
Whoſe Sum is 20.	$x + y + \frac{yy}{x} = 20$.
And the Sum of their Squares 140.	$xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$.

You have therefore the Æquations $x + y + \frac{yy}{x} = 20$, and $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140$, by the Reduction whereof x and y are to be determined.

Figura (24): A transformação de um enunciado em uma equação (UNIVERSAL..., 1720, p. 68)

A explicação é sucedida por uma série de problemas algébricos, sendo alguns numéricos, mas a maioria algébrica. Boa parte dos problemas possuem uma conotação prática, e o problema XII sobre movimento nos dá a chance de ver Newton executar a sua interpretação de quantidade negativa como um “movimento de direção contrária”. Nas últimas linhas, apontamos que ele diz que se as soluções “saírem, por acaso, negativas, isso significa que o movimento, seguido da reflexão, tende ao caminho contrário àquele ao qual A tendia antes de reflexão.” (UNIVERSAL…, 1720, p. 81)

PROBLEM XII. Having given the Magnitudes and Motions of Spherical Bodies perfectly elaſtick, moving in the ſame right Line, and meeting one another, to determine their Motions after Reflexion.

The Reſolution of this Queſtion depends on theſe Conditions, that each Body will ſuffer as much by Re-action as the Action of each is upon the other, and that they muſt recede from each other after Reflexion with the ſame Velocity or Swiftneſs as they met before it. Theſe Things being ſuppos'd, let the Velocity of the Bodies A and B, be a and b reſpectively; and their Motions (as being compos'd of their Bulk and Velocity together) will be aA and bB. And if the Bodies tend the ſame Way, and A moving more ſwiftly follows B, make x the Decrement of the Motion aA, and the Increment of the Motion bB ariſing by the Percuſſion; and the Motions after Reflexion will be $aA - x$ and $bB + x$; and the Celerities $\frac{aA - x}{A}$ and $\frac{bB + x}{B}$, whoſe Difference is $=$ to $a - b$ the Difference of the Celerities before Reflexion. Therefore there ariſes this Æquation $\frac{bB + x}{B} - \frac{aA + x}{A} = a - b$, and thence by Reduction x becomes $= \frac{2aAB - 2bAB}{A + B}$, which being ſubſtituted for x in the Celerities $\frac{aA - x}{A}$, and $\frac{bB + x}{B}$, there comes out $\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$ for the Celerity of A, and $\frac{2aA - bA + bB}{A + B}$ for the Celerity of B after Reflexion.

But if the Bodies meet, then changing the Sign of b, the Velocities after Reflexion will be $\frac{aA - aB - 2bB}{A + B}$, and $\frac{2aA + bA - bB}{A + b}$; either of which, if they come out, by Chance, Negative, it argues that Motion, after Reflexion, to tend a contrary Way to that which A tended to before Reflexion. Which is alſo to be underſtood of A's Motion in the former Caſe.

Figura (25): Exemplo de problema algébrico na Universal Arithmetick (UNIVERSAL, 1720, p. 80-81)

A mesma seção ainda contempla “como questões geométricas devem ser reduzidas a uma equação”. Uma atenção ainda maior parece ser dada a problemas dessa natureza: sessenta e uma questões de geometria seguem a partir de suas instruções, enquanto a parte aritmética possui apenas dezesseis. Pycior aponta que essa seção foi escrita quando Newton retocou as suas *Lições*, e sinaliza que no fim das décadas de 1670 e no início da década de

1680, problemas geométricos ocupavam sua mente muito mais do que os aritméticos. (Pycior, 1997, p. 188)

A última seção do texto principal da *Universal Arithmetick*, "*Como equações devem ser resolvidas"* (*How Equations are to be Solved*) também originou-se de suas *Lições*. (Pycior, 1997, p. 195),e trata a "teoria de equações". Neste capítulo, Newton define a raiz como sendo "um número que substituindo a letra ou espécie na equação que significa a raiz, fará os termos desaparecerem". As raízes negativas e positivas são ambas chamadas de reais, enquanto as raízes imaginárias são novamente chamadas de impossíveis. Newton assim as apresenta:

> Mas para as raízes há dois tipos, afirmativa, como no exemplo apresentado 1, 2 e 3, e negativa, como -5. E dentre essas algumas são muitas vezes impossíveis. Dessa forma, as duas raízes da equação $xx - 2ax + bb = 0$, que são $a + \sqrt{aa - bb}$ e $a - \sqrt{aa - bb}$ são reais quando aa é maior do que bb, mas quando aa é menos do que bb, elas se tornam impossíveis, pois então $aa - bb$ será uma quantidade negativa, e a raíz quadrada de uma quantidade negativa é impossível. Pois toda raíz possível, seja ela afirmativa ou negativa, se multiplicada por ela mesma, produz um quadrado afirmativo; logo aquela será impossível, que é produzir um quadrado negativo. (UNIVERSAL...1720, p. 194)

Pycior percebe que sua apresentação do teorema fundamental, enfraquecido pelo uso da palavra "pode", reflete também a sua hesitação com raízes impossíveis:

> Uma equação pode ter tantas raízes quanto possui dimensões, e não mais. (UNIVERSAL…, 1720, p. 194)

O capítulo é repleto de resultados, alguns novos , outros que já mencionamos aqui, como:

- a fatoração de polinômios em binômios da forma $x - a$ como Harriot;
- a composição dos coeficientes em termos das raízes do polinômio;
- o método para mudar os sinais das raízes;
- o método para aumentar ou diminuir as raízes em uma certa quantidade;
- a eliminação do segundo, ou terceiro termo de equações;
- a remoção de raízes e termos fracionários de equações, multiplicando as raízes por um certo número;
- a regra de sinais de Descartes

Elaborando a regra de sinais de Descartes, Newton também apresenta um teorema complicado que o permite achar a quantidade de raízes impossíveis de uma equação (UNIVERSAL…, 1720, p. 197), apesar de a regra não funcionar sempre, e ele não explicitar quais são esses casos. De fato, apenas em 1865 que Sylvester conseguiu provar o resultado geral (Rouse Ball, 1888, p. 274) Outro teorema que ele apresenta aqui mostra como encontrar a soma das n-ésimas potências das raízes de uma equação, mas esse ele também não se preocupa em demonstrar (UNIVERSAL…, 1720, p. 206-207).

Apesar de o texto principal do tratado terminar aqui, o seu apêndice, “Sobre a construção linear de Equações” é importante também. Nele, Newton trata da resolução numérica de equações por meio de construções geométrica, mas antes começa uma argumentação em defesa das curvas que ele pretende usar. Ele critica a maneira como os “modernos” separavam os tipos de curvas geométricas a partir de suas equações, e que “tornou-se uma lei que retas que podem ser construídas por equações de grau menor não devem ser construídas por equações de grau maior.” Sua contra-argumentação usa a figura tradicional do círculo, elementar nas construções euclidianas, e que não é utilizada por conta de sua equação, mas por sua descrição.

> Mas não é a equação, e sim a descrição que faz a curva ser geométrica. O círculo é uma curva geométrica, não porque ela pode ser expressa por uma equação, mas porque sua descrição é um postulado. Não é a simplicidade da equação, mas a facilidade de descrição, que deve determinar a escolha das retas para a construção de problemas.

Todo discurso que Newton elabora aqui parece ser feito para legitimar a sua aplicação de “conchóides” nas construções, uma curva complexa algebricamente, porém com um desenho de simples descrição. Não queremos entrar no mérito de suas intenções aqui, mas o seu discurso chega depois a mudar de tom, indicando a sua nova preferência pela geometria clássica:

> Equações são expressões de computações aritméticas, e propriamente não possuem lugar na geometria, a não ser que as quantidades verdadeiramente geométricas (ou seja, retas, superfícies, sólidos, e proporções) possam ser ditas iguais algumas a outras. Multiplicações, divisões, e computações desse tipo, são de maneira nova recebidas na geometria, e isso de maneira incautelosa, e contrária ao primeiro propósito da ciência. Pois qualquer um que considera a construção de problemas por meio de uma linha reta e um círculo, encontrado pelos primeiros geômetras, irá rapidamente perceber que a geometria foi inventada para que possamos eficientemente evitar, pelo desenho de retas, o tédio da computação. Logo essas duas ciências não devem ser misturadas. Os Antigos o fizeram industriosamente distinguindo uma da outra, de modo que nunca introduziram termos aritméticos na geometria. E os modernos, ao confundirem ambos, perderam a simplicidade em que toda elegância da geometria consiste. (UNIVERSAL, 1720, p. 229-230)[33]

Ou seja, Newton não defende apenas uma independência da geometria com relação à aritmética, como também a coloca em um patamar superior, tanto pela sua elegância como por sua eficiência e simplicidade. Os métodos “computacionais” não são aqui condenados, mas é perceptível que o autor não os defendeu com a mesma veemência de Wallis.

[33] Equations are expressions of Arithmetical Computations, and properly have no Place in Geometry, except as far as Quantities truly Geometrical (that is, Lines, Surfaces, Solids, and Proportions) may be said to be some equal to others. Multiplications, Divisions, and such sort of Computations, are newly receiv’d into Geometry, and that unwarily, and contrary to the first Design of this Science. For whosoever considers the Construction of Problems by a right Line and a Circle, found out by the first Geometricians, will easily perceive that Geometry was invented that we might expeditiously avoid, by drawing Lines, the Tediousness of Computation. Therefore these two Sciences ought not to be confounded. The Antients did so industriously distinguish them from one another, that they never introduc’d Arithmetical Terms into Geometry.And the Moderns, by confounding both, have lost the Simplicity in which all the Elegancy of Geometry consists.

O ponto mais curioso, porém, é que a citação anterior apenas apontava que ele não achava correto julgar a simplicidade de uma curva geométrica tendo em vista a sua equação mas, aqui, ele já parece ser contra qualquer envolvimento de equação na geometria que não demarque apenas uma igualdade entre figuras. Considerando-se que a obra possui uma seção em que se ensina como transformar problemas geométricos em equações, e que mais de 80 páginas são dedicadas à aplicação da álgebra à geometria, a sua defesa de uma geometria apartada pode parecer inconsistente. Não podemos deixar de lembrar também que ele dá uma interpretação cartesiana para a multiplicação de retas no começo do livro, apesar de aqui ele dizer o quão "incauteloso" essa prática moderna seria. Um possível motivo para tal inconsistência pode ser a disparidade temporal entre o momento em que esse apêndice foi escrito e o restante da obra.

6.4 Conclusão

Newton entende que a álgebra é fundamentada nos mesmos princípios que a aritmética, compartilhando assim uma visão semelhante a Wallis. Seu simbolismo já mostra o peso da influência de Descartes, e a concepção do francês de quantidades maiores e menores do que nada perduram aqui. Newton é conciso e econômico ao apresentar suas ideias e explicações, de modo que as operações com espécies não tentam ser explicadas como em Wallis e Kersey, por meio de analogias. Curiosamente, nem mesmo a ideia de quantidade contrária é por ele levantada aqui, mas vemos mais uma vez que as quantidades negativas são apresentadas juntamente a ideias como "dívida" e" movimento reverso". Mais um aspecto de sua economia é a ausência de um tratamento elaborado de equações cúbicas, e de apresentação pouco verbosa para equações quadráticas que, de certa forma, incorpora os seus vários tipos em uma única equação: $xx = .px.q$. O discurso apresentado em seu apêndice, por sua vez, parece já sinalizar a sua preferência pela geometria grega em comparação com a álgebra e à aritmética.

7 A aritmética de Cocker

Neste capítulo, faremos um breve desvio de curso, e iremos tratar a famosa *Aritmética* de Cocker, onde não encontramos nenhum tipo de prática algébrica. A importância desse estudo será entender um pouco da diferença entre a matemática que era praticada dentro das universidades, tendo como modelo as obras que vimos anteriormente, e a matemática mais popular, dos comerciantes e outros praticantes.

7.1 Edward Cocker

Edward Cocker (16312-1676) foi um calígrafo e matemático inglês, de cuja vida sabe-se muito pouco. No ano de 1657, Cocker dava aulas de escrita e aritmética na *St.Paul's Churchyard,* em Londres. Provavelmente por conta do grande fogo de 1666, Cocker mudou-se para dar aulas em Northampton, mas depois voltou a dar aulas na cidade, em Southwark. Além de suas aulas, Cocker também era famoso por suas gravações em livros, e também desenvolveu uma série de cadernos de caligrafia, onde ele bordava animais exóticos que ostentavam sua habilidade com a caneta. (Wallis, 2004) Samuel Pepys, o qual mencionamos no capítulo 1, também o elogiou por sua capacidade de desenvolver instrumentos e por suas habilidades de conversação (Howson, 1918, p. 39)

Apesar de ter acumulado fama em vida como instrutor de escrita e gravador, seu maior sucesso veio após a sua morte, em 1676. Em 1678, seu amigo e sucessor na escola de Southwark, John Hawkins (fl. 1676-1692) publicou o *Cocker's Arithmetick, being a Plain and Familiar Method*, que ele diz ter retirado dos manuscritos do falecido. O sucesso desta obra de aritmética foi tão grande que ela acumulou mais de sessenta edições diferentes, substituindo o *Ground* de Recorde como o mais popular livro de seu tempo. (Howson, 1918, p. 39) De acordo com Ruth Wallis, o sucesso enorme dessa obra deve-se muito provavelmente "por conta de ela ter sido adaptada aos requerimentos de comerciantes em vez daqueles da nobreza rural e seus tutores." (Wallis, 2004)

7.2 Cocker's Arithmetick

Indo de acordo com aquilo que Wallis disse, encontramos aqui um texto apoiado fortemente em exemplos envolvendo transações comerciais, ou exemplos práticos de outras naturezas. De fato, o autor dedica alguns capítulos para apresentar várias grandezas, como peso, moeda, comprimento, etc., e diferentes medidas para estas, além de mostrar os métodos de "redução" de uma unidade a outra. Boa parte do livro é dedicado a resolver problemas práticos específicos que envolvam essas denominações como as *single* e *double fellowships ,* ou as *alligation medial,* que são problemas que envolvem proporções e regra de três.

Antes de vermos a alguns desses problemas, veremos como Cocker fundamenta sua aritmética no começo do livro. Nas primeiras linhas, o autor traz a sua definição de aritmética: “Aritmética é uma arte da numeração ou conhecimento que ensina a enumerar bem, a doutrina de contar por meio de números.” (Cocker, 1702, p. 1)

Em seguida, o autor traça uma relação peculiar entre a geometria e a aritmética, afirmando que ambas necessitam possuir princípios iguais, ou ao menos associáveis:

> Há diversos tipos de aritmética e geometria, os quais pretendemos tratar em ordem; tratando os princípios de um às definições do outro: uma vez que como a magnitude ou grandeza é o assunto da geometria, também é a multiplicidade ou número o assunto da aritmética; e se é assim, então seus primeiros princípios e principais fundamentos, devem possuir definições iguais; ou pelo menos, uma congruência similar. (Cocker, 1702, p. 1)[34]

O número, por sua vez, é para Cocker ”aquilo com o qual a quantidade de qualquer coisa é expressa ou numerada.“ Com essa definição, Cocker argumenta que o “um” é de fato um número, diferentemente do que alguns autores alegavam, como o próprio Euclides (Roque, 2012, p. 189), que afirma que a unidade seria o começo do número e não seria portanto, um número em si. De fato, toda sua argumentação promovendo um tratamento lado-a-lado da geometria e da aritmética é contrária à prática euclidiana, que tratou grandezas e números de maneira separada.

> Dessa forma, a unidade é é número, uma vez que a parte é sempre da mesma matéria que o inteiro, a unidade é parte da multiplicidade de unidades, logo a unidade é da mesma matéria que a multiplicidade de unidades; mas a matéria da multiplicidade de unidades é número, logo a matéria da unidade é número; pois caso contrário, se de algum número dado nenhum número for subtraído, o número dado permanecerá; seja três o número dado; do qual subtraímos um (que como alguns concebem, não é número), então o número dado permanece, isso é o mesmo que dizer que permanece três, um absurdo. (Cocker, 1702, p. 1-2)

A partir dessa discussão, Cocker explora a ideia da origem de número, uma vez que a unidade não seria essa origem para o autor. Para tanto, Cocker recorre à sua relação fundamental entre geometria e aritmética, concluindo que a origem do número seria o zero, o qual ele chama de *cypher (cifra):*

> Olhando nos rudimentos da geometria, hemos de encontrar, que a definição de um ponto é de forma alguma congruente com a definição de unidade na aritmética; e logo um, ou unidade deve estar nos limites do número, e consequentemente o começo do número não se encontra no número um; pois para fazer número e magnitude congruentes em princípios, e iguais em definição, nós fazemos e constituímos uma cifra para o começo do número, ou melhor o meio entre números ascendentes e descendentes, comumente chamados absolutos ou inteiros, e negativos

[34] Hence it is that Unit is Number, for the part is of the same matter that is his whole, the Unit is part of the multitude of Units, therefore the Unit is of the same matter that is the multitude of Units; but the matter of the multitude of Units is Number, therefore the matter of Unit is Number; for else if from a given number no number be subtracted, the number given remaineth; let three be the number given; from which number subtract or take away one (which as some conceive, is no number) therefore the number given remaineth, that is to say, there remaineth three, which is absurd.

> ou números fracionários, entre os quais nada pode ser imaginado mais condizente com a definição de ponto na geometria; pois como um ponto é um número adjunto, e não é em si uma reta, assim também é o (0) *Cypher* um adjunto do número, e nenhum número em si: Como um ponto na geometria não pode ser dividido ou aumentado em partes; da mesma forma o (0) não pode ser dividido ou aumentado em partes; uma vez que tantos pontos, mesmo que infinitos, não fazem uma reta, tantos (0) *Cyphers* não fazem um número. (Cocker, 1702, p. 2)[35]

Nessa argumentação vemos como ele tenta associar o zero com o ponto, considerando o fato de que ambos, mesmo somados infinitamente, não formam uma reta ou um número, e que ambos são indivisíveis.

Logo em seguida, o autor faz outra associação peculiar entre o zero e o ponto, de maneira a fortalecer o que ele disse antes: Somar um ponto a uma reta não a aumenta, mas prolongar uma reta até um ponto a aumenta. Da mesma maneira, o zero somado não aumenta um número, mas ao ser colocado à direita dele, como se compondo uma nova casa decimal, ele também "prolonga" o número, no sentido de aumentá-lo.

> Pois a reta AB não pode ser aumentada por meio da adição do ponto C, da mesma forma que o número D não pode ser aumentado pela adição do *Cypher* E, uma vez que se você somar nada a 6, a soma será 6, mas se for permitido que AB seja estendido ou prolongado ao ponto C, de modo que AC seja feito uma reta contínua, então AB é aumentado pela adição do ponto C, da mesma forma, se permitirmos que D 6 seja prolongado até E (0) de modo que DE (60) seja um número contínuo formando 60, então 6 é aumentado com a ajuda do (0) na constituição do número (60) sessenta. (Cocker, 1702, p. 2)[36]

[35] ...looking upon the rudiments of Geometry, we shall find, that the definition of a Point is in no way congruous with the definition of an Unit in Arithmetick; and therefore one, or Unit must be in the bounds or limits of Number, and consequently the beginning of Number is not to be found in the number one; wherefore to make number and magnitude congruent in Principles, nd like in Definitions, we make and constitute a Cypher to be the beginning of number, or rather the medium between increasing and decreasing numbers, commonly called absolute or whole numbers, and negative or fractional Numbers; between which nothing can be imagined more agreeable to the definition of a point in Geometry; for as a point is an adjunct number, and it self no line, so is (0) Cypher n adjunct of number, and it self no number: And as a point in Geometry cannot be divided or increased into parts; so likewise (0) cannot be divided or increased into parts; for as many points though in number infinite do make no line, so many (0) Cyphers, though in number infinite do make no number.

[36]For the line A B cannot be increased by the addition of the point C, neither can the number D be increased by the addition of the (0) cypher E, for if you add nothing to 6, the sum will be 6, (0) neither increasing nor diminishing the number 6, but if it be granted that A B be extended or prolonged to the point C, so that A C be made a continued line, then A B is increased by the addition of the point C, in like manner if we grant D 6 be prolonged to E (0) so that D E (60) be a continued number making 60, then 6 is augmented by the aid of (0) as to the constituting the number (60) sixty

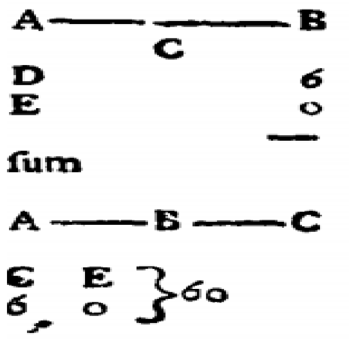


Figura (26): Associação de retas e pontos aos números e o zero. (Cocker, 1702, p. 2)

Cocker ainda diz que o fato de que a unidade é número e 0 é o começo do número é provado por todos os autores, mesmo que indiretamente e inadvertidamente, por meio das tabelas de senos e tangentes, "uma vez que o seno de 1 grau é 174524 (o raio sendo 10000000) e o começo da tabela sendo (0) e a ele responde-se 00000".

No parágrafo seguinte, Cocker deixa a geometria de lado e tenta fazer uma classificação dos números. Para ele, há dois tipos de números: os negativos e os absolutos. Os números absolutos representam os números inteiros comuns, já os números negativos não são aqueles que imaginaríamos que seriam: eles são também chamados de fracionários, quebrados, decrescentes, e representam de fato os nossos números decimais menores do que 1 e maiores do que zero. O fato de Cocker chamar esses números de negativos fica melhor explicado pela maneira como ele os explica em termos de uma "subtração de valor". Em sua maneira, a colocação de um ponto decimal (que ele chama de "*prick")* à frente de um número o *diminui* em tantas dezenas de partes, a colocação de um ponto e um zero à esquerda o diminui em tantas centenas, e assim por diante.

> Como se você fosse prefixar antes da figura 3 um ponto (.) ou *prick* dessa forma (.3) ela é então diminuída de três unidades ou inteiros, para (3) três décimos de partes de uma unidade ou inteiro; e se você prefixa um ponto e *cypher* dessa maneira (.03) é diminuído de três inteiros para 3 centenas de partes de um inteiro, e dessa maneira 5*l.* absoluto, ao se prefixar um ponto, será diminuído para 5*l* negativo, o que é cinco décimos de partes de um *Pound*, igual em valor a dez *shillings*[37], então adicionando mais *cyphers* ou dígitos, seu valor é diminuído indefinidamente. (Cocker, 1702, p. 5)[38]

Aqui percebemos claramente que esses números negativos são de fato os equivalentes às frações decimais, ou os números decimais entre 1, e 0. Logo em seguida, ele apresenta as frações e chega a fazer esta associação das frações decimais aos termos negativos. Nota-se porém, que dentro dessas duas designações de números, isto é, absolutos e negativos, termos

[37] Uma antiga moeda utilizada na Inglaterra e Reino Unido com valor nominal de um doze avos de uma libra esterlina.

[38] ...as if you would prefix before the figure 3 a point (.) or prick thus (,) it is then decreased from 3 units of integers, to (3) three tenth parts of an Unit or Integer; and if you prefix a point and cypher thus (.03) it is decreased from 3 integers to 3 hundred parts of an integer, and by this means 5l. Absolute, by prefixing of a point will be decreased to 5l. Negative, which is five tenth parts of a Pound, equal in value to ten Shillings, and so by prefixing of more Cyphers or Digits, its value is decreased in a decuple proportion ad infinitum.

decimais que incluem uma parte inteira, como 3,25, não são considerados. Posteriormente, ele chega a apresentar frações “impróprias”, que são aquelas cujo numerador é maior do que o numerador, mas ele não chega a associá-las a números decimais desse tipo. (Cocker, 1702, p. 7)

Quanto à ordenação dos números, vemos no diagrama abaixo que os números fracionários não encontram-se, para Cocker, entre a unidade e o zero, mas sim após o zero, este representando “começo e o meio do número” (Cocker, 1702, p. 5). Nota-se porém, que isso se trata apenas de uma ilustração do autor, e daí ele não interpreta que os termos decimais sejam “menores” do que zero. A sua ideia de ordem não assume o mesmo significado que o moderno.

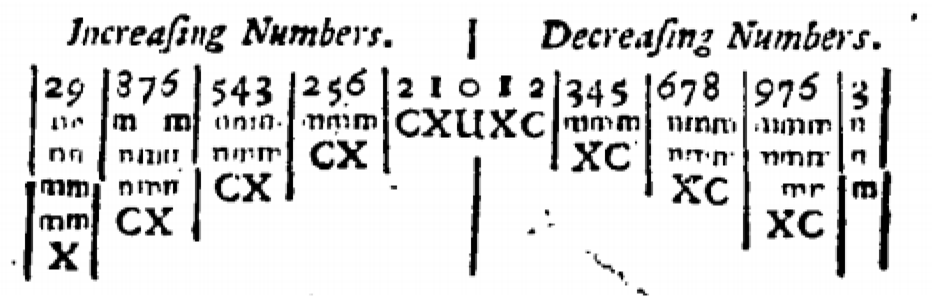


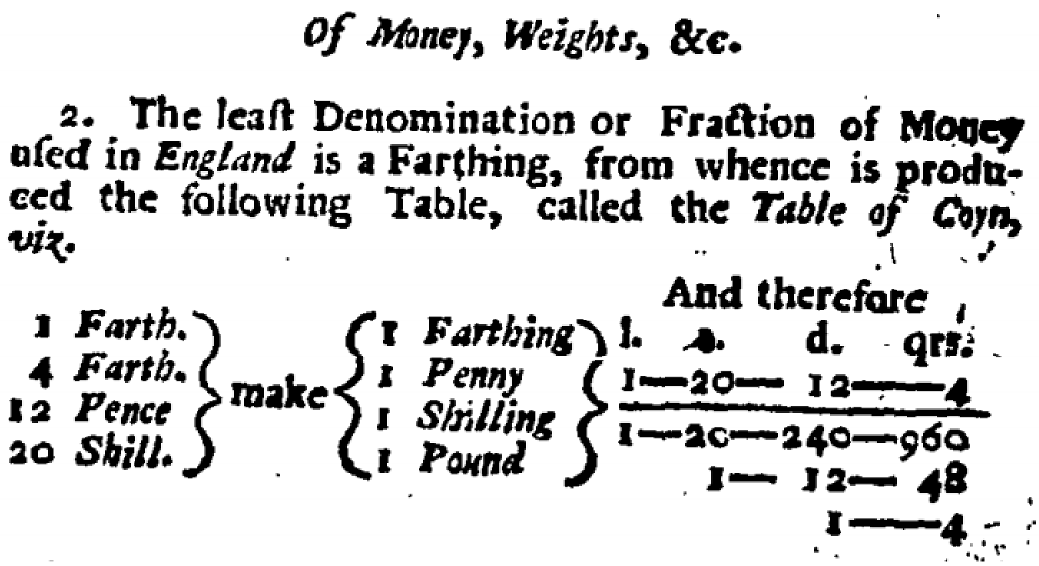
Figura (27): Esquema de Cocker sobre a “ordem dos números.”(Cocker, 1702, p. 5)

Apesar disso, diretamente do fato de que os números aumentativos e negativos encontram-se respectivamente à esquerda e à direita do zero, Cocker conclui que “a multiplicação aumenta o produto em números absolutos, mas diminui o produto em números negativos. Da mesma forma, divisão diminui o quociente em números inteiros, e aumenta em números negativos ou fracionários.” (Cocker, 1702, págs. 4-5)

Quanto às notações, apontamos ainda que Cocker representa os números inteiros com um ponto à direita do seu valor, enquanto as quantidades fracionárias apresentam um ponto à esquerda, como já vimos.

Em seguida, Cocker afirma que um número quebrado é uma parte de um número inteiro, informação a partir da qual podemos inferir que os números negativos, apesar de estarem ordenados em separado dos inteiros, e colocados após o zero, são ainda assim compõem o inteiro. Números inteiros podem se relacionar sendo compostos ou primos. Números são compostos entre si caso “tenham uma multiplicidade de unidades como medida comum”, como é o caso de 9 e 12, que possuem o 3 como medida comum. Por outro lado, números são primos entre si “caso não possuam uma unidade em comum, ou seja nenhum número pode igualmente medir ou dividi-los sem deixar resto.” (Cocker, 1702, pág. 6)

Indo ao próximo capítulo, já podemos ver com que tipo de número ele irá lidar ao longo da obra. Antes de ensinar a operar com números, ele precisa ensinar a relação que existe entre as várias grandezas representantes de dinheiro, peso, etc. É notável como ele aqui apresenta vários tipos diferentes de medições, de modo a atender às diferentes medições exercidas pelos praticantes. A título de exemplo, vemos que ele traz as diferentes medidas de peso para o algodão. (Cocker, 1702, p. 14) A apresentação é feita com uma série de diagramas que mostram a relação de proporção entre entre as diferentes denominações, as quais podemos ver à direita da figura abaixo. Apontamos, porém, que ele não ensina efetivamente a transformar uma dada quantidade de uma medida a outra; isto ele naturalmente realiza por meio de multiplicação, e apenas ensina após apresentar ter apresentado a operação:



Of Money, Weights, &c.

2. The least Denomination or Fraction of Money used in *England* is a Farthing, from whence is produced the following Table, called the *Table of Coyn*, viz.

1 *Farth.*	make	1 *Farthing*		And therefore			
4 *Farth.*		1 *Penny*	l.	s.	d.	qrs.	
12 *Pence*		1 *Shilling*	1	20	12	4	
20 *Shill.*		1 *Pound*	1	20	240	960	
				1	12	48	
					1	4	

Figura (28): a relação de proporção entre as unidades monetárias de *farthing, penny, shilling e pound. (Cocker, 1702, p. 11)*

Após uma longa apresentação desses tipos de transformação, o autor fala do seus vários tipos de ”espécies ou tipos de aritmética”. Uma dessas espécies trata-se da aritmética algébrica, à qual podemos associar o que os demais autores chamam simplesmente de álgebra, até pela maneira como ele a associa à ideia de resolver problemas mais difíceis, algo que os três últimos autores fizeram:

> Aritmética algébrica é uma arte obscura ou oculta de contagem por meio de números na resolução de questões difíceis. (Cocker, 1702, p. 19)[39]

É notável como a sua definição de aritmética algébrica transmite certa distância com relação ao assunto, ao referir-se a essa como sendo “oculta” e “obscura”. Isto ajuda a transmitir a existência de uma clara separação na sociedade entre aqueles que praticavam a álgebra e aqueles que se mantinham à aritmética vulgar. Apesar disso, o autor não se prolonga além das suas breves definições para as diferentes aritméticas, e logo parte para aquela que lhe interessa, a aritmética simples. Esta consiste em duas partes: numeração e extração de raízes; neste livro, o autor se atém à parte da numeração, que se trata das quatro operações fundamentais da aritmética. (Cocker, 1702, p. 20) Nas palavras do próprio autor:

[39] Algebraical Arithmetick, is an obscure and hidden Art of Accompting by Numbers in resolving of hard Questions.

Numeração é aquilo, a partir do qual certos números propostos, descobrimos outro número desconhecido. (Cocker, 1702, p. 20).[40]

A adição é definida por Cocker como sendo a “redução de dois ou mais números de mesmo tipo a uma única soma ou total”. Evidentemente, aqui, não vemos operações de somas de termos negativos, como víamos nos textos algébricos anteriores. No mais, a sua explicação para realizar os algoritmo é bem mais prolongada e totalmente retórica. Na figura abaixo, vemos um exemplo que ele dá somando quantidades monetárias de diferentes denominações:

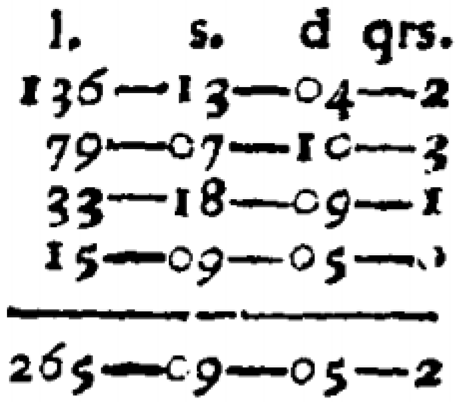


Figura (29):Soma de quantidades monetárias. (Cocker, 1702, p. 23)

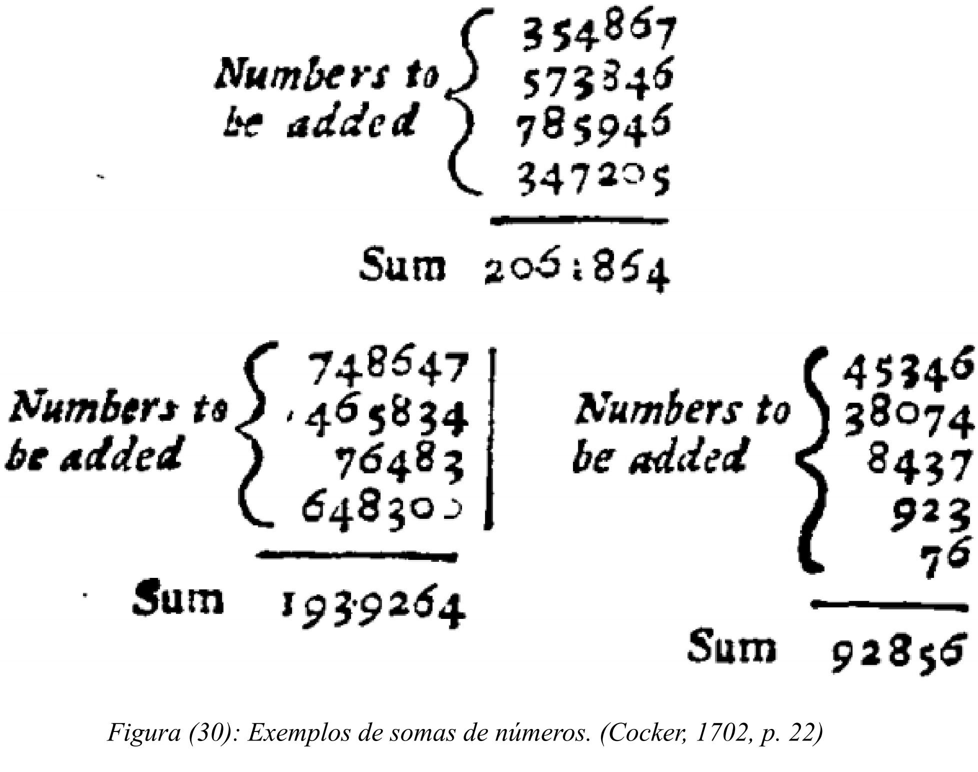


Figura (30): Exemplos de somas de números. (Cocker, 1702, p. 22)

Cocker traz sempre um método de “provar” qualquer operação, sendo que a prova é na verdade um método para checar se a resposta está correta ou não. Trata-se de uma prática

[40] Numeration is that by which certain known Numbers propounded, we discover another Number unknown.

que já se via no *Ground* de Recorde. (Howson, 1982, p. 14) Dessa maneira, se quisermos checar se o resultado de uma soma de números está correta ou não, Cocker sugere que se retire o primeiro destes números e se some o resto para obter um resultado. Após isso, somamos a esse resultado o primeiro número que havia sido retirado. Se essa soma for igual à soma que queremos checar, nossa soma está correta.

A subtração por sua vez, é "a retirada de um menor número de um maior do mesmo tipo". Aqui, percebemos como a definição já exige que o número retirado seja menor do que aquele do qual estamos subtraindo. Outra coisa que o autor faz após mostrar cada uma das sua fórmulas é mostrar os seus "efeitos" que de fato são suas interpretações dentro de algum tipo de aplicação:

> O efeito geral da subtração é encontrar as diferenças ou excessos entre dois números, e o resto quando um pagamento é feito em parte de uma soma maior, a data de livros impressos, a idade de qualquer coisa sabendo-se o ano presente, e o ano no qual eles foram feitos, criados ou construídos, ou algo do tipo. (Cocker, 1702, p.36)

A multiplicação é definida em termos de proporção e de soma iterada: " multiplicação é feita entre dois números de mesmo tipo para a produção de um terceiro, que há de estar na mesma razão com o primeiro, como o outro estiver com a unidade, e com efeito é uma maneira mais breve e artificial de uma composição de adições de vários números iguais de mesmo tipo em uma soma" . Em seguida, ele ainda traz uma segunda definição, essa já novamente nos moldes daquela de Euclides: "[...] ou tendo dois números dados, encontrar um terceiro, que há de conter um dos números tantas vezes quanto há unidades no outro." (Cocker, 1702, pág. 38)

O autor apresenta uma tabela com a tabuada de um a 9, e sugere que os alunos a tenham gravadas antes de seguir em frente na aritmética. Os efeitos das multiplicações incluem situações da geometria:

> ...segundo efeito é, tendo a largura e comprimento de qualquer coisa (como um paralelogramo, ou um plano longo), encontrar o conteúdo superficial do mesmo, e tendo o conteúdo superficial da base, e o seu tamanho, encontrar a solidez de qualquer paralelepipedo, cilindro, ou outras figuras sólidas." (Cocker, 1702, p. 45)

Aqui podemos ver que Cocker refere-se a áreas como "conteúdos superficiais", e volumes como "solidez". Outros efeitos que o autor cita é de ajudar a realizar outras regras como a regra de três, também chamada por ele de *golden Rule*(regra de ouro), ou para transformar números de uma denominação a outra, como ele havia feito antes. Dessa maneira, a transformação de um número de libras esterlinas para shillings resume-se a uma operação de multiplicação.

A divisão, por sua vez, é a "separação ou partição de qualquer número ou quantidade dada em quaisquer partes designadas, ou encontrar quão frequentemente um número está contido em outro: ou, de quaisquer dois números dados, encontrar um terceiro que há de consistir de tantas unidades quanto o um dos números estiver compreendido ou contido no outro." O autor mostra que a multiplicação e a divisão demonstram uma a outra, e além disso a própria divisão pode provar a divisão.

> Após realizar uma divisão que queremos provar, pegamos o dividendo e subtraímos dele o resto, e depois dividimos pelo quociente. caso o resultado seja o divisor, o resultado está provado. (Cocker, 1702, pág. 61-62)

No capítulo seguinte, Cocker efetivamente ensina a aplicar a multiplicação e divisão para transformar uma medida de uma denominação a outra.

A próxima etapa do livro é apresentar outro tipo de aritmética: a aritmética comparativa. Esta trata-se da "relação de números uns com os outros". (Cocker, 1702, p. 98) Nesse momento, Cocker aborda proporções e as progressões aritméticas e geométricas, dando sequência com as regras de três. A regra de três ocupa um espaço especial na obra pelo fato de que grande parte dos problemas práticos abordados a envolverem de alguma maneira. Não à toa, por conta disso, ele se refere a ela como uma "jóia preciosa da aritmética", e também a denomina alternativamente como *Golden Rule* (Regra de Ouro). (Cocker, 1702, p. 102) Vejamos como o autor define e denota proporções e regras de três:

> A regra de três (não desmerecidamente chamada de Regra de Ouro) é aquela por meio da qual encontramos um quarto número, em proporção com três números dados, de modo que esse quarto número buscado possa ter a mesma razão ou proporção com o terceiro (dado) número, assim como o segundo tem com o primeiro, donde ela também é chamada de regra da proporção.
>
> Quatro números são ditos proporcionais, quando o primeiro contém ou está contido pelo segundo, tantas vezes quanto o terceiro contém ou está contido pelo quarto. (Cocker, 1702, p. 102)

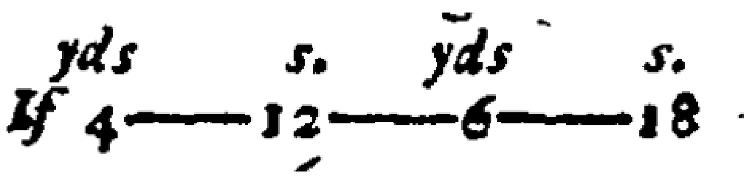


FIgura (31): Notação de proporção de Cocker. Na notação de Oughtred, equivale a 4.12::6.18. (Cocker, 1702, p. 103)

A partir daqui, podemos dizer que o restante da obra praticamente aborda um tipo diferente de problema em cada capítulo, sendo que a maioria envolve algum dos tipos de regra de três. A única exceção a isso está na apresentação das operações com frações a partir do capítulo XIX, seguindo o mesmo estilo que fez com números inteiros, a fim de poder resolver também problemas que envolva termos fracionários. Ainda com relação aos capítulos introdutórios da regra de três, podemos ver ainda os primeiros exemplos de problemas práticos; vejamos um, a título de exemplo, para mostrar o caráter aplicado que eles assumem de um modo geral.

Questão 1: Se 8 trabalhadores podem fazer um certo trabalho em 12 dias, em quantos dias 16 trabalhadores farão o mesmo? Resposta, em 6 dias.

Tendo colocados os números de acordo com a sexta regra do décimo capítulo [istoé, de acordo com a notação de proporção da figura acima], eu considero que se 8 homens podem terminar o trabalho em 12 dias, 16 homens farão o trabalho em menos (ou menos dias do que 12) logo o maior extremo deve ser o divisor, que é 16, e logo é a regra de três inversa, assim eu multiplico o primeiro e o segundo número, isto é, 8 por 12, e seu produto é 96, que dividido por 16, dá 6 dias para a solução, e em tantos dias os 16 trabalhadores realizarão o trabalho, quando 8 o fazem em 12 dias.

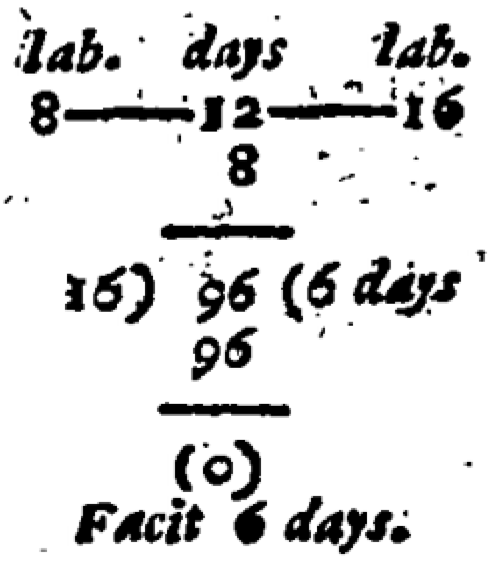


Figura (32): Diagrama da questão 1 (Cocker, 1702, p. 124)

Não há razão para apresentarmos aqui cada um dos vários tipos de problemas que Cocker apresenta no seu livro. Sendo assim, finalizaremos com a apresentação de um dele: as chamadas *alligation,* abordadas no capítulo XVII. Com essa apresentação, pretendemos mostrar como o propósito de cada um desses vários problemas é atacar algum tipo de circunstância prática comum a um certo tipo de ofício.

> A regra de *alligation* é aquela regra em proporção plural, a partir da qual resolvemos questões onde há uma composição ou mistura de diversas *simples*, como também é útil na composição de medicamentos tanto para quantidade, qualidade e preço. E suas espécies são duas, a saber, *medial* e *alternative*. (Cocker, 1702, p. 128)

Aqui traremos um exemplo específico de *alligation medial.* Cocker explica a seguir:

> *Alligation medial* é quando tendo as várias quantidades e preços de vários simples propostos, descobrimos o preço médio ou taxa de qualquer quantidade da mistura composta dessas quantidades, e a proporção é, a soma das simples a serem misturadas está para o valor total de todas as simples assim como qualquer parte da quantidade da composição ou mistura está para a média das taxas ou preço. (Cocker, 1702, p. 128-129)

Questão: Um fazendeiro mistura 20 alqueires de trigo a 5 s. por alqueire, e 36 alqueires de centeio a 3 s. por alqueire, com 40 alqueires de cevada a 2 s. por alqueire, agora eu desejo saber quanto vale um alqueire dessa mistura?

Para resolver essa questão, somamos as quantidades dadas, assim como seus valores, o que dá 96 alqueires, cujo total vale 14 i. 8 s. como aparece pelo trabalho a seguir:

bush.		l.	s.
20	of Wheat at 5 s. per Bushel, is	5	0
36	of Rye at 3 s. per Bushel, is	5	8
40	of Barley at 2 s. per Bushel, is	4	0
The Sum of the given quantities is 96,	and their value is	14	8

Figura (33): diagrama das operações feitas acima (Cocker, 1702, p. 129)

Então, digamos, pela regra de 3 direta, se 96 alqueires custam (ou valem) 14 l. 6s. quanto vale 1 alqueire?

bush. l. s. bush.
96 —— 14 —— 8 —— 1
20
96) 288 (3s.
288
(0)

Facit, 3s. per Bushel.

Figura (34): regra de três para a resolução do problema. A solução é 3 s. por alqueire. (Cocker, 1702, p. 129)

(Resposta: 3 s. por alqueire)

8 A matemática em Cambridge no século XVIII

8.1 A Escola Newtoniana

A história da universidade de Cambridge foi substancialmente mudada com a passagem de Newton por lá, a partir de 1665. Como apontamos em seu capítulo, suas teorias obtiveram um sucesso considerável, o que levou ao surgimento da chamada Escola Newtoniana; um grupo de seguidores que se utilizavam de seus métodos. Esses estudiosos haviam sofrido o impacto dos *Principia* e do *Opticks*, fazendo com que os assuntos da astronomia e a óptica geométrica se tornasse os mais almejados. A chave para estes assuntos, porém, conforme se acreditava, residia tanto na geometria clássica, sob a qual a obra de Newton havia sido apresentada, como nos métodos de fluxões, de modo que esses quatro assuntos apontados se tornaram quase os únicos interesses em Cambridge a partir de então. (Rouse Ball, 1889, p. 69, 74) Esta mudança temática foi decisiva para a história da instituição, e pode ser melhor ilustrada pela transformação que ocorreu nos exames de qualificação dos graduandos.

8.2 Senate-house Examination e o papel de Euclides nos exames de Cambridge

Durante toda Idade Média, a organização dos alunos em Cambridge não era muito diferente daqueles vistos em Oxford ou em Paris. Para que um estudante pudesse se qualificar para obter a sua graduação, uma série de exercícios eram necessários e, dentre eles, havia um debate em latim que ocorria entre dois alunos, feito em forma de silogismos. (Rouse Ball, 1905, p. 171) Ao longo dos séculos, esse dispositivo de disputas se manteve, mas o enfoque se transformava constantemente. Enquanto na idade média se cobrava muito mais questões escolásticas, o século XVII encontrou um conteúdo mais filosófico. (Rouse Ball, 1905, p. 173)

Então, na primeira década do século, alguns eventos inoportunos acabaram fazendo com que os inspetores passassem a chamar todos os alunos em um dia de Janeiro para propor um exame suplementar a essas disputas: questões orais mais individualizadas. Essas provas eram realizadas em público e ficaram conhecidas como *senate-house examinations* (exames do edifício do senado). Por conta de elas terem propiciado uma maneira ainda mais eficaz de comparar os alunos e exibir suas competências, eles acabaram por se estabelecer ao longo dos anos. (Rouse Ball, 1905, p. 175) Por volta do século 1750 ela já era reconhecida oficialmente pela universidade, e depois acabou substituindo o antigo sistema de disputas como o principal meio para avaliar os conhecimentos dos alunos. *(Rouse Ball, 1889, p. 89-90)*

A importância de conhecer esse exame reside no fato de que ele se trata da versão precoce do *mathematical tripos* atual, isto é, o exame usado para testar a aptidão matemática dos graduandos de Cambridge. No século XVIII, ele ficou conhecido como *senate-house* *examination,* mas a exigência era quase igual: todo graduando deveria ao menos ler os elementos da matemática e Euclides. *(Rouse Ball, 1889, p. 99)* Isto é, Euclides não era tratado como um assunto matemático, mas sim como uma abordagem lógica e filosófica que substituiria a filosofia que dominava os estudos do século anterior. O resultado direto disto é que a maneira lógica-filosófica-sintética dos gregos, como vimos tentativamente nas obras de Newton, ficou estabelecida como elementar na graduação de Cambridge, e veremos consequências disto nos capítulos seguintes. Essa caracterização do ensino em Cambridge fica ainda melhor vista se observarmos a sua disparidade com relação à outra grande universidade inglesa. Oxford, nesse mesmo momento, tinha seus exames focados em assuntos das ciências humanas, sem que qualquer destaque na geometria antiga ou na matemática fosse dado.

9 Os Elementos de Álgebra de Saunderson

9.1 Nicholas Saunderson

Nicholas Saunderson, conhecido por ter sido o quarto professor da cadeira Lucasiana apesar de sua cegueira, nasceu no ano de 1682 , em Thurlstone, Yorkshire, um condado no norte da Inglaterra. Seu problema de visão não era congênito; Saunderson foi atacado pela varíola, que destruiu sua córnea, enquanto uma infecção secundária de *staphilococcus* destruiu seus olhos completamente.

Nicholas teria aprendido sozinho a ler, tateando gravuras sobre pedras com seus dedos. Seu pai, um cobrador de impostos do distrito de Peniston, lhe ensinara os rudimentos da aritmética. Neste mesmo distrito, Saunderson ingressou em uma *grammar school*. Após a escola, Nicholas ajudou seu pai com seus cálculos sobre taxações, e logo era capaz de fazer contas longas por meio de uma *counting board* desenvolvida por ele próprio, chamada por John Colson de "aritmética palpável". Posteriormente, Saunderson ainda desenvolveu o que seria uma espécie de precursor do geoplano moderno para representação de figuras geométricas.

Aos 18, Saunderson recebeu aulas particulares em álgebra e geometria por Richard West. Sua destreza no aprendizado de matemática chamou a atenção de seus professores, que leram para ele os textos de Diofanto, Arquimedes e Euclides em grego original.

Em 1702, com 20 anos de idade, Nicholas foi enviado à Attercliff Academy, onde estudou principalmente lógica e metafísica, mas também estudou de maneira autônoma a matemática, pois esta não era oferecida de maneira satisfatória pela academia. Também ficou conhecido por seu interesse pela música, e sabia tocar flauta com certa habilidade.

Quando tinha 25 anos, foi encorajado por seus amigos e professores a ingressar na universidade de Cambridge, ainda que não objetivando especificamente estudar matemática lá. No ano de 1707, entrou na *Christ's College* em Cambridge, e os *fellows* do College lhe ofereceram acomodações e privilégios na biblioteca. Saunderson ficou conhecido pela sua facilidade em aprender matemática e sua facilidade em comunicar ideias. Com a aprovação de William Whiston, ocupante da cadeira Lucasiana na época, o jovem pôde começar a dar aulas de matemática na universidade. Saunderson se identificava como um Newtoniano devoto, e suas aulas sobre os *Principia*, Óptica, e o *Arithmetica Universalis* atrairam a atenção de Newton. Os dois chegaram até a realizar uma breve troca de correspondência.

Por volta do ano de 1709, a posição de William Whiston na cadeira lucasiana já estava desgastada. O professor estava sob críticas de cunho religioso, por conta de suas visões unitaristas, que iam contra a Igreja Estabelecida (a igreja anglicana). *No ano de 1710, os mestres do College* declararam Whiston culpado por crenças Arianas, e lhe removeram de sua posição em Cambridge. Saunderson era visto como o sucessor óbvio de Whiston, apesar de

Newton ter apoiado o outro candidato, Hussey. No ano de 1711, Saunderson tornou-se mestre de artes e foi eleito professor Lucasiano.

Como professor de Cambridge, Saunderson ensinou inúmeras classes de estudiosos em aulas privadas todos os anos. De acordo com Wordsworth (1877/1969, p.66), por volta de 1730, "Newton e Euclides eram apenas conhecidos por aqueles que resolvessem assistir as aulas de Saunderson." (apud Tattersall, 1992, p. 361) Saunderson parecia preferir álgebra à geometria, talvez por conta de sua cegueira. Sua posição com relação ao ensino de Euclides em Cambridge o levaram muita vezes a discussões com outros professores. Outra responsabilidade que Saunderson veio a ter em Cambridge era de dar aulas de ciências naturais, e estas ficaram bastante populares, abertas ao público geral, e logo de pouco teor matemático.

No ano de 1714, graças à sua posição na cadeira Lucasiana, Nicholas foi apontado pelo rei George I como comissionário da *Board of Longitude (junta de Longitude)*, um corpo governamental criado naquele mesmo ano para criar um esquema de premiações que pretendia encorajar pesquisadores a resolver o problema de encontrar a longitude no mar. Cinco anos depois, em 1719, foi eleito *fellow* pela *Royal Society*. Quase dez anos depois, em 1728, o rei George II conferiu 27 doutorados, entre eles o doutorado em Direito de Saunderson.

No ano de 1733, Saunderson foi atacado por uma febre severa. na mesma época, surgiu a ideia de sua primeira publicação. Seus alunos, amigos e muitos professores de Cambridge pediam para que o professor Lucasiano descansasse de suas aulas a fim de publicar suas notas sobre álgebra. O projeto durou 6 anos, mas Saunderson morreu em 1739 por conta do escorbuto, e não pôde ver a sua publicação. Essa veio um ano depois, em 1740, com a ajuda de sua mulher, seu filho e de John Colson, seu sucessor na cadeira Lucasiana, sob o nome de E*lementos de Algebra* (Tattersall, 1992, pp. 363-364). O livro ainda foi usado como texto na Royal Military Academy de Woolwich, durante a segunda metade do século XVIII. Sua segunda publicação, os *Elementos de Fluxões*, foi lançada em 1751, e contém suas ilustrações do *Principia*. Foram estas suas únicas publicações, ambas destinadas a alunos que queriam ser introduzidos aos assuntos, sem trazer muitos resultados novos, e ambas lançadas de maneira póstuma.

Nosso interesse aqui será estudar a sua obra de álgebra, *Os Elementos de Álgebra*. Como vimos, Saunderson lecionou sobre a Universal Arithmetick de Newton, e Ball sugere que estudar o seu livro poderá nos dar uma noção de como a abordagem do assunto evoluiu em Cambridge no século XVIII. (Ball, 1889, apud Tattersall, 1992, p. 364)

9.2 Os *Elementos de Algebra*

Saunderson dá uma definição para álgebra parecida com aquela de Newton: "a arte de calcular por meio de símbolos". Depois ele cita a vantagem da utilização de símbolos para representar as quantidades de um problema, e como isso permite a obtenção de um teorema geral que resolve problemas parecidos. (Saunderson, 1740, p. 49) Após essa breve apresentação da vantagem do símbolo algébrico, ele se direciona aos dois tipos de quantidade.

> Uma quantidade afirmativa é uma quantidade maior do que nada, e é conhecida pelo seu sinal + ; uma quantidade negativa é uma quantidade menor do que nada, e é conhecida pelo sinal – : dessa forma +*a* significa que a quantidade a é afirmativa, e deve ser lida dessa forma, *plus a* ou *mais a*: *-b* significa que a quantidade *b* é negativa, e deve ser lida dessa forma, *menos [minus] b* ou menos [less] menos. (Saunderson, 1740, p. 50)[41]

Sua definição, como podemos ver, não inclui o sentido somativo e subtrativo dos sinais + e -, mas ele atribui esse novo significado a eles posteriormente. Sua preocupação no momento é responder o problema comum de considerar quantidades menores do que nada como absurdas. Saunderson responde a isso por meio de exemplos reais, e formula uma passagem de quantidades afirmativas para o nada para a negação, no sentido de que há uma continuidade entre as mesmas a partir do momento que somamos ou subtraímos sucessivamente uma quantidade de mesma espécie.

> Dessa forma, uma pessoa em suas fortunas, podemos dizer que vale 2000 libras ou 1000, ou nada, ou -1000, ou -2000; onde nos dois últimos casos, se diz 1000 libras pior do que nada; dessa forma um corpo pode ter 2 graus de calor, ou um grau de calor, ou nenhum grau, ou - um grau, ou - dois graus… (Saunderson, 1740, p. 50, 51)[42]

Dessa maneira, vemos que Saunderson também legitima as quantidades negativas tendo em vista certos tipos de quantidades associadas a uma realidade, as quais podem admitir dois tipos diferentes: as maiores e as menores do que nada. Ou seja, uma dívida por exemplo pode ser entendida como uma quantidade negativa, menor do que o saldo nulo, em oposição com um saldo positivo, que pode ser entendido como uma quantidade positiva, mas ambas estão no mesmo "espectro", sendo entendidas como o mesmo tipo de quantidade. Esse "espectro" é visto claramente na citação acima, onde vemos que Saunderson exibe a passagem da afirmação para o nada para o negação, e transmite a interpretação do zero, que parece continuar sendo associado à ideia metafísica de "nada", mas também passa a ser um ponto relativo na "reta numérica", um limite comum entre as quantidades negativas e as afirmativas. Essa passagem, vemos explicitamente pela primeira vez nessa obra de Saunderson. O próprio autor diz, logo em seguida que:

> É certo que toda quantidade contrária admite um estado intermediário, que da mesma maneira toma parte de ambos extremos, e é melhor representada por uma cifra, ou 0, e se é apropriado dizer que os graus em um dos lados desse limite comum

---

[41] an affirmative quantity is a quantity greater than nothing, and is known by this sign; a negative quantity is a quantity less than nothing, and is known by this sign -: thus +*a* signifies that the quantity *a* is affirmative, and is to be read thus, plus *a*, or more *a*: -*b* signifies that the quantity is negative, and must be read thus, *minus b,* or less *b.*

[42] Thus a person in his fortune may be said to be worth 2000 pounds, or 1000, or nothing, or -1000, or -2000, in which two last cases he is said to be 1000 or 2000 pounds worse than nothing: thus a body may be said to have 2 degrees of heat, or one degree, or no degree, or - one degree, or - two degrees...

são maiores que zero, não vejo por que não deveria ser apropriado também dizer que no outro lado os graus são menores do que zero. ” (Saunderson, 1740, p. 51)

Saunderson depois ataca mais um problema que, segundo ele, as “mentes estreitas” concebem: o fato de que , como no exemplo da dívida x saldo, a denominação da quantidade muda de nome na passagem do positivo para o negativo. No caso, “divida” e “saldo” poderiam ser interpretadas como espécies distintas de quantidades, e isso poderia tornar artificial a ideia de que uma é a oposição da outra, e que ambas encontram-se no mesmo espectro. Saunderson responde ao problema alegando que:

> Mas a questão é, se duas quantidades contrárias sob dois nomes diferentes, uma quantidade sob um desses nomes não pode ser chamada menor do que nada; quando comparada à outra quantidade, apesar de estarem sob nomes diferentes...Dificuldades que surgem dessa imposição de nomes limitados sob quantidades que são em si ilimitadas, devem ser atribuídas a esses nomes, e não sob as coisas em si. (Saunderson, 1740, p. 51)

Ou seja, para ele, isso trata-se apenas de um problema nominal, que surge do fato de que associamos essas quantidades a nomes distintos no dia-a-dia mas, ainda assim, elas são da mesma natureza. Saunderson diz que na álgebra esse problema não ocorre, visto que quando trabalhamos com quantidades algébricas, a natureza delas não entra em questão, sendo distinguidas apenas pelos seus sinais, e não pelos seus nomes, de modo que $+a$ e $-a$ apesar de terem o mesmo nome "a", possuem uma contrariedade traduzida pelos sinais de $+$ e $-$. Dessa forma, poderíamos entender a letra a como um saldo, sendo que o seu sinal que irá indicar se trata-se de um saldo positivo, ou uma dívida. O fato de que a mesma letra serve para indicar tanto o saldo positivo quanto a dívida mostra que ambas são do mesmo “espectro”. Em seguida, ele chega a fazer uma interessante comparação entre os sinais e os adjetivos e as partículas da língua inglesa,dando a entender que eles conferem uma espécie de qualidade à quantidade que é representada pela letra.

> Esses sinais portanto na álgebra carregam a mesma distinção junto a elas que as *particles* [43]e e adjetivos na língua comum, como as palavras conveniente e inconveniente, feliz e infeliz, boa saúde e má saúde. (Saunderson, 1740, p. 51)[44]

Logo em seguida, Saunderson “atualiza” o significado das quantidades positivas e negativas, atribuindo agora uma ideia de “oposição em seus *efeitos*, igual à oposição em suas naturezas”. Saunderson então diz que essa que tal consideração

> ...se devidamente considerada, removeria todas as dificuldades concernentes aos sinais das quantidades que surgem na adição, subtração, multiplicação, e divisão; pois o resultado de trabalhar com quantidades positivas é conhecido; e logo operações

[43] Termos que não fazem parte de nenhuma das principais classes gramaticais da língua inglesa. São comumente associadas a termos como “off”, “up” ou “down”, que podem dar novos significados a verbos aos quais estão associados. Por exemplo. “look” significa olhar enquanto “look up” significa pesquisar.

[44] these signs therefore in Algebra carry the same distinction along with them as do particles and adjectives sometimes in common language, as in the words convenient and inconvenient, happy and unhappy, good health and bad health, etc.

de mesmo tipo com quantidades negativas podem ser conhecidas pela *regra dos contrários.* (Saunderson, 1740, p. 51-52)[45]

Essa observação é muito interessante. Saunderson tem um pressuposto em sua álgebra de que quantidades positivas e negativas tem um efeito contrário nas operações fundamentais, a chamada "regra dos contrários", e esse princípio da contrariedade ele utiliza tacitamente para explicar algumas operações feitas com quantidades negativas, partido do fato de que se sabe operar com as positivas. Enquanto Wallis deduzia a partir de uma certa interpretação das palavras, e Kersey recorria a analogias para explicar as operações, Saunderson recorrerá a essa ideia de contrariedade.

Antes de entrarmos em exemplos, apontamos que o termo efeito, mesmo utilizado por Wallis e outros, carrega portanto o caráter operacional da quantidade, ou seja considerada em uma operação com outra, de mesma "natureza" ou não. Além disso, concluímos aqui que Saunderson também faz uma clara distinção teórica entre positivo/soma e negativo/subtração, apesar de ele fazer de um jeito diferente dos demais, sem explicitar aqui que os sinais de + e - carregam também o significado operacional.

Vejamos agora a "regra dos contrários" em ação quando ele explica a ideia de somar quantidades de sinais opostos:

> Se duas quantidades da mesma denominação que possuem sinais diferentes antes deles devem ser somados, coloque apenas a diferença de seus coeficientes numéricos com o denominador comum após ele, e o sinal da quantidade maior antes pois nesse caso, as quantidades somadas sendo contrárias uma à outra, a menor quantidade, em qualquer lado que esteja, irá sempre destruir tanto da outra quanto for o seu valor (Saunderson, 1740, p. 52).[46]

Em seguida, ele diz:

> Dessa forma *+5a* somado a *-2a* faz *+3a*; como se uma pessoa me deve 5000 libras em uma conta, a quem eu devo 2000 libras em outra, o balanço sobre o total será de 3000 na minha conta. Se for objetado que essa é uma subtração e não uma adição; eu respondo que a adição de *-2a* terá sempre o mesmo efeito que a subtração de *+2a*; mas eu nego que a adição de *-2a* é o mesmo, ou terá o mesmo efeito que a subtração de *-2a* (Saunderson, 1740, p. 52-53)[47].

Vejamos primeiro que ele utiliza um exemplo de dívida para ilustrar a regra. Porém, logo em seguida, ele ataca a dúvida de que a operação tenha sido na verdade uma subtração comum. Isso, ele responde a partir de um pressuposto seu: o efeito que $-2a$ tem numa soma

[45] ...if duly attended to, would remove all difficulties concerning the signs of quantities arising from addition, subtraction, multiplication, division, etc: for the result of working by affirmative quantities in all these operations is known; and therefore like operations in negative quantities may be known by the rule of contraries.

[46] If two quantities of the sme denomination which have different signs before them are to be added together, put down only the difference of their numeral coefficients with the common denominator after it, and the sign of the greater quantity before it: for in this case, the quantities to be added being contrary one to another, the less quantity, on which side soever it lies, will always destroy so much of the other, as is equal to itself.

[47] Thus *+5a* added to *-2a* makes *+3a*; as if a person owes me 5000 pounds upon one account, to whom I owe 2000 upon another, the balance upon the whole will be 3000 pounds on my side. If it be objected, that this is subtraction, and not addition; I answer, that the addition of *-2a* will at any time have the same effect as the subtraction of *+2a:* but I deny that the addition of *-2a* is the same, or will have the same effect as the subtraction of *-2a*.

em comparação com efeito que $+2a$ teria numa subtração. A partir daqui, fica então entendido que somar um termo é equivalente a subtrair o mesmo, porém de sinal contrário.

Vejamos a regra para somar quantidades compostas. Esse exemplo deixa claro como ele comete o mesmo erro de Kersey ao considerar o sinal da expressão como representando a natureza da quantidade. Por conta disso, as quantidades negativas tornam-se “subtrativas”:

> Quando muitas quantidades de mesma denominação são somadas, das quais algumas são positivas e algumas negativas, reduza-as a duas quantidades, primeiramente, somando todas as positivas , e separadamente todas as negativas, e depois a uma apenas de acordo com a regra anterior. Dessa forma, $+10a-9a+8a-7a$, quando somadas dão... (Saunderson, 1740, p. 52).

Aqui vemos como na expressão, $-7a$ e $-9a$ são consideradas quantidades negativas, por conta do sinal, dentro de uma soma de 4 quantidades. Mas isso poderia ser interpretado também como uma subtração seguida de uma soma, seguida de uma subtração. Saunderson contorna essa ambiguidade ao não exprimir subtrações por expressões algébricas, mas sim por escrito, em seus exemplos:

> *7a* subtraído de *5a* deixa *-2a* pois *-7a* somado a *+5a* resulta em *-2a*, pelas regras de soma (Saunderson, 1740, p. 54).

Aqui vemos que a operação não é representada pela expressão $7a-5a$, pois o autor está subtraindo uma quantidade positiva de uma positiva, e a expressão citada seria interpretada como uma soma de uma quantidade positiva com uma negativa. Outra coisa que vale notar é a maneira como o autor usa o princípio dos contrários para explicar a regra de subtração, que fica então entendida partir do que foi estabelecido para a soma. A regra diz que:

> Sempre que uma quantidade algébrica simples deve ser subtraída de outra quantidade, seja simples ou composta, primeiro mude o sinal da quantidade a ser subtraída, isto é, se ela for afirmativa, torne-a ou pelo menos chame-a de negativa, e vice-versa, e então some essa quantidade assim mudada à outra

Agora, a explicação:

> … Já que subtrair qualquer quantidade de outra é o mesmo em efeito de somar o contrário, e já que mudar o sinal da quantidade a muda para o contrário do que ela era, é evidente que após essa mudança ela pode ser somada à outra, e que o resultado dessa adição será o mesmo da subtração pretendida (Saunderson, 1740, p. 54).[48]

Com relação à multiplicação e divisão, Saunderson traz uma “demonstração” interessante para as chamadas regras dos sinais, a partir de duas afirmações:

1. A partir da definição de progressão aritmética, dada como uma sequência de “números que diminuem ou aumentam com diferenças iguais” tem-se que 3, 0, -3; ou +4, 0, -4 é uma progressão aritmética

[48] for since (as was before hinted) the subtracting of any one quantity from another, is the same in effect as adding the contrary, and since changing the sign of the quantity to be subtracted, renders that quantity just contrary to what it was before, it is evident, that after such a change it may be added to the other, and that the result of this addition will be the same with that of the intended subtraction.

2. Se um conjunto de números está numa progressão aritmética, como 3,2,1 forem multiplicados por um multiplicador comum, como 4, ou se um número único, como o 4, for sucessivamente multiplicado em um conjunto de números em progressão aritmética , como 3,2,1, os produtos 12, 8, e 4, em ambos os casos, estarão em progressão aritmética (Saunderson, 1740. p. 57).

Saunderson, portanto, sem demonstrar a segunda afirmação, constata que:

1. $+4$ multiplicado por $+3$ produz $+12$
2. -4 multiplicado por $+3$ produz -12
3. $+4$ multiplicado por -3 produz -12
4. -4 multiplicado por -3 produz $+12$

No caso 2, por exemplo, "multiplicando a progressão +4, 0, -4 por +3, e teremos que os produtos estarão em progressão aritmética, como na afirmação dois; mas os dois primeiros produtos são 12 e 0; logo o terceiro será -12; logo -4 multiplicado por +3 produz +12" (Saunderson, 1740, p. 57)

Os demais casos são demonstrados de maneira similar, mas note que, ao dizer que a afirmação 2 é "auto-evidente", Saunderson já está assumindo a verdade que está querendo provar. De fato, como a afirmação deve valer também para multiplicações por números negativos, exatamente o que ele está tentando provar, já se torna evidente o resultado destas por outras quantidades.

Após essa demonstração, Saunderson traz mais uma, desta vez recorrendo novamente à meta-regra dos contrários para quantidades positivas e negativas:

> $+4$ multiplicado por $+3$ produz $+12$; logo -4 por $+3$ ou $+4$ por -3 deve produzir algo contrário a $+12$, ou seja, -12; mas se -4 for multiplicado por -3 deve produzir algo contrário a -12, isto é, +12; de modo que no último caso, tão formidável para jovens iniciantes, parece consistir de nada mais do que um princípio comum da gramática, ainda que talvez ele possa não ser sempre observado nas línguas. (Saunderson, 1740, p. 58).[49]

Em outras palavras, se o produto de + multiplicado por + resulta em + então, mudando o sinal do multiplicador para -, o resultado tem que ter sinal alterado também (pela regra dos contrários). Logo, + por - dá -. Agora, mudando o sinal do multiplicando, temos que o sinal do resultado irá mudar novamente (novamente pela regra dos contrários). Dessa maneira, temos que - por - dá +. Assim, provam-se todas as "regras dos sinais" da multiplicação. A mesma regra, ele deriva para a divisão diretamente do fato de que "o quociente deve ser tal quantidade tal que multiplicada pelo divisor resultará no dividendo".

Após ter apresentado as operações e potências, Saunderson faz a transição usual para os métodos de redução de uma equação. Curiosamente, antes disso, Saunderson estabelece quatro axiomas para fundamentá-los. Kersey, é bom lembrar, as fundamentou a partir dos

---

[49] *+4* multiplied into *+3* produces *+12*; therefore *-4* into *+3*, or *+4* into *-3* ought to produce something contrary to *+12*, that is, *-12*: but if *-4* multiplied into *+3* produces *-12*, then *-4* multiplied into *-3* ought to produce something contrary to *-12*, that is *+12; s*o that this last case, so very formidable to young beginners, appears at lst to amount to no more than a common principle in Grammar, to wit, that two negatives make an affirmative; which is undoubtedly true in Grammar, though perhaps it my not always be observed in languages.

“princípios fundamentais da aritmética”. Os axiomas de Saunderson são os seguintes: (1) Uma fração multiplicada por um inteiro implica multiplicar o numerador apenas por esse inteiro; (2) Se o inteiro que multiplica a fração for igual ao denominador, ambos se cortarão; (3) multiplicar ou dividir ambos os lados de uma equação por uma quantidade mantém a igualdade e (4) A usual regra de transposição de termos de um lado da equação para o outro, com sinal trocado.

Tendo estabelecido os métodos para reduzir uma equação, Saunderson parte diretamente à resolução de uma série de problemas de “álgebra numérica”, onde os coeficientes são números. Somente depois, no livro IV, que o autor se dedica a resolver problemas em que os coeficientes também são representados por letras, de modo que depois ele consegue derivar um teorema que permite resolver problemas de mesma natureza. Feito isso, ele começa logo a sua abordagem de equações quadráticas gerais. A sequência então traz um tratamento comum sobre teoria de equações. Não há, portanto, muita novidade a partir daí, e fecharemos a nossa análise com a sua interessante abordagem das quadráticas.

Saunderson define uma forma geral:

$$Ax^2 = Bx + C$$

As soluções, por sua vez, são dadas por $x = \frac{B \pm s}{2A}$, ou seja, $x = \frac{B+s}{2A}$, e $x = \frac{B-s}{2A}$ onde $ss = BB + 4AC$. A novidade na sua abordagem pode ser vista através da seguinte passagem:

> … A, B e C denotam quantidades integrais conhecidas, sejam elas afirmativas ou negativas, e x a quantidade desconhecida, o sinal + no outro lado da equação $Bx + C$ significando nada mais do que o fato de que as duas quantidades Bx e C devem ser somadas de acordo com as regras comuns da adição (Saunderson, 1740, p. 172).[50]

Isso significa uma clara diferença entre Saunderson e os demais autores porque, ao permitir que A, B e C sejam tanto negativos como positivos, há assim uma separação definitiva entre o sinal como operação e o sinal como “qualidade” da quantidade. Por exemplo, por mais que a quantidade C seja precedida pelo sinal de + na fórmula geral, isso não significa que C seja uma quantidade positiva, o mesmo valendo para os demais coeficientes. Em Wallis e Newton, vimos que as equações quadráticas também ficam representadas por meio de uma equação única, mas existe uma diferença crucial. Newton, por exemplo, traz a equação $xx = .px.q$, onde os pontos devem ser substituídos pelo sinal + ou -. A solução, por sua vez, também é dada de modo geral por

$$x = .\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp.q}$$

Isto é, Newton deixa em aberto os sinais dos coeficientes, transmitindo a ideia de que “o leitor deve copiar o sinal da equação em questão e colá-lo onde é indicado na solução

[50] *...A, B, and C* denote known integral quantities whether affirmative or negative, and *x* the quantity unknown, the sign + on the latter side of the equation *Bx+C* signifying no more than that the two quantities *Bx* and *C* are to be added together according to the common rules of addition, whether they be both affirmative, or both negative, or one affirmative, and the other negative.

geral”. As letras em si, portanto, representam quantidades necessariamente positivas, e ela será somada se o sinal da equação for positivo na equação, ou será subtraída, caso o sinal for negativo. A indeterminação do sinal transmitida pelo ponto seria completamente desnecessária se os sinais da equação, que precedem os coeficientes, nada dissesse sobre ele. Bastaria colocar o sinal de +, como fez Saunderson, e deixar o sinal do coeficiente livre para variar, tanto na fórmula geral como na solução.

Diante disso, dizemos que a equação de Saunderson é o primeiro exemplo entre os autores estudados de uma genuína equação quadrática geral. Fica claro ainda, que ele utiliza letras maiúsculas para representar coeficientes dessa forma, isto é, independentes dos sinais das equações. O autor ainda se utiliza do mesmo artifício, por exemplo, para apresentar a soma e produto das raízes de uma equação quadrática. Estas são dadas, respectivamente, por $-\frac{C}{A}$ e $\frac{B}{A}$.

Contudo, ele ainda assim utiliza-se de letras minúsculas que apresentam a mesma característica dos autores anteriores: são necessariamente positivas, e o que determinará seu “efeito” será o sinal que a precede na equação. Por fim, apontamos que a presente discussão sobre sinais carrega a mesma ideia daquela no capítulo de Kersey, sobre a sua demonstração da regra da multiplicação.

Recapitulando, Saunderson diz que a sua equação quadrática apresenta as raízes da forma $x = \frac{B+s}{2A}$, e $x = \frac{B-s}{2A}$, onde $ss = BB + 4AC$. Estas fórmulas podem assumir valores negativos, mas Saunderson deixa claro que raízes positivas e negativas devem ser igualmente consideradas:

> ...e essas duas raízes em todas as artes e ciências onde equações quadráticas entram em questão, são de estimação igual, sejam elas negativas ou afirmativas, ou uma afirmativa e a outra negativa (Saunderson, 1740, p. 174).

Contudo, o autor diz depois :

> Na vida comum, onde quantidades negativas não têm lugar, as raízes afirmativas de equações quadráticas são as únicas permitidas na resolução de problemas, as negativas sendo geralmente excluídas. (Saunderson, 1740, p. 174)[51]

Aqui, ele sugere a ideia de que soluções negativas não possuem uma substancialidade para serem consideradas soluções de problemas reais. Se obtemos uma solução positiva e outra negativa, mas a quantidade buscada não pode ser negativa, como dinheiro ou tempo, a solução negativa deve ser desconsiderada.

Nos exemplos, Saunderson resolve equações quadráticas tanto diretamente, aplicando a tanto a fórmula, quanto seguindo da maneira “comum”, seguindo os passos do procedimento de completamento de quadrado. Vejamos um exemplo:

[51] but in common life, where negative quantities have no place, the affirmative roots of quadratic equations are only allowed of in the resolution of problems, the negative ones being for the most part excluded.

EXAMPLE 9.

Let the equation be $15x - xx = 56$; then this equation being reſolved by the general theorem gives $x = 8$, or 7; and in the common way it is thus reſolved; $15x - xx = 56$; change all the ſigns to make xx affirmative, and you will have $xx - 15x = -56$; whence $xx - 15x + \frac{225}{4} = -56 + \frac{225}{4} = \frac{1}{4}$; therefore $x - \frac{15}{2} = \pm \frac{1}{2}$, and $x = 8$, or 7: but what I chiefly intend by this example is to ſhew, that in reſolving a quadratic equation by the general theorem there is no neceſſity of making any tranſpoſition to exhibit xx affirmative when it would otherwiſe have been negative; as for inſtance, in the equation here propoſed we had $15x - xx = 56$; tranſpoſe $15x$, and you will have $-xx$, that is, $-1xx = -15x + 56$; let this equation be referred to the general one in art. 102, and reſolved by the general theorem in art. 103, and you will have $A = -1$, $B = -15$, $C = 56$, $BB = 225$, $4AC = -224$, $ss = 1$, $s = 1$, $\frac{B+s}{2A} = \frac{-15+1}{-2} = \frac{-14}{-2} = +7$, $\frac{B-s}{2A} = \frac{-15-1}{-2} = +8$.

Figura (35): Exemplo de problema com equação quadrática (Saunderson, 1740, p. 182)

Soluções negativas são amplamente aceitas também, em todo tipo de problema. As soluções imaginárias continuam sendo chamadas de “impossíveis”, pela razão de não podem ser associadas a alguma ideia substancial em nenhuma instância, diferentemente das quantidades positivas e negativas.

9.3 Conclusão:

Saunderson estabelece que quantidades positivas e negativas possuem natureza efeitos contrários. Esse efeito refere-se a ideias como a de que somar uma quantidade negativa equivale a subtrair uma positiva. Essa meta-regra, chamada de “regra dos contrários”, ele utiliza para justificar boa parte das regras de operações. Isso mostra como, indo de Kersey até Saunderson, cada autor tentou justificar as operações algébricas de uma maneira diferente, enquanto Oughtred e Harriot não se preocuparam com isso. Além do mais, apesar de sua definição de quantidades positivas e negativas não incluírem qualquer ideia de soma ou subtração, Saunderson acaba por chamar termos subtrativos de de uma expressão algébrica de negativos. Mesmo assim, é singular a maneira como ele exibe o espectro em que as quantidades positivas e negativas coexistem, a partir de exemplos de certos tipos de quantidades. O zero, por sua vez, representa o ponto de encontro das duas “metades” do espectro, o positivo eo negativo, chamado também de “limite comum”. Sua forma geral da equação do segundo grau aponta uma diferença marcante com relação aos demais autores por apresentar coeficientes que podem ser tanto negativos como positivos, independentemente dos sinais que os precedem na equação.

10 O Tratado de álgebra de Thomas Simpson

10.1 A Royal Military Academy de Woolwich

A partir do século XVII, começou a haver uma demanda por navegadores treinados, o que levou ao estabelecimento de escolas de matemática pela florescente cidade de Londres, além de outros lugares da Inglaterra. Era reconhecido que soldados tivessem que ser literados e bem treinados com os números. Para oficiais, em particular, não somente era exigido um conhecimento sobre fortificações e desenho, mas também sobre matemática. Diante dessa demanda, foi criada a Royal Military Academy, que foi estabelecida em Woolwich, em 1741, para treinar futuros membros da artilharia e engenheiros oficiais. Outras escolas militares haviam sido estabelecidas por Londres, mas essa *RMA* se destacou largamente diante dessas. Um dos primeiros professores de matemática de lá foi Thomas Simpson, o qual também escreveu um interessante tratado de álgebra.

10.2 Thomas Simpson

Simpson nasceu em Leicestershire, Inglaterra, em 1710 e morreu no ano de 1761. Seu pai, um tecelão, queria que Simpson seguisse seus passos. Com uma educação limitada, mudou-se para Nuneaton, onde recebeu uma cópia do *Cocker's Arithmetick* e de um trabalho de Pastridge sobre astrologia, de um vendedor ambulante.O jovem Simpson avançou em seus estudos e fez sua fama com sua reputação local de cartomantes. Depois, largou seu trabalho como tecelão, e casou-se com uma viúva em Swinfield.

No ano de 1736, Simpson mudou-se para Londres, onde a prática matemática havia florescido por algumas décadas. Suas primeiras contribuições matemáticas foram publicadas no periódico *Ladies' Diary.* No ano de 1735, Simpson lançou uma proposta para publicação de seu primeiro livro, *A New Treatise on Fluxions*, assunto sobre o qual ele já havia abordado no periódico. Apesar da relativa demora para a publicação dessa obra (1737) por conta de seus trabalhos como professor, já vemos indícios de seu sucesso.

Com apoio de Martin Folkes, então presidente da Royal Society, Simpson conseguiu ser apontado como segundo professor mestre da Royal Military Academy, em Woolwich, em agosto de 1743. Dois anos depois, foi eleito *fellow* da *Royal Society*. (Wallis, 1981, pág. 444) Enquanto professor na RMA, Simpson lançou três livros-texto de sucesso: um sobre geometria, outro sobre trigonometria, e seu tratado sobre álgebra, *A Treatise on Algebra,* que teve dez edições no período de 1745 a 1826*,* além de versões americanas e alemãs. Não encontramos indícios de que o tratado tenha sido utilizado especificamente para atender os alunos da RMA, mas ela ainda assim apresenta uma prática marcadamente diferente daquelas que vimos até aqui.

10.3 Apresentação da obra

Simpson era crítico à maneira como a álgebra era abordada por outros autores. Isso ele deixa claro no começo de seu prefácio:

> … o leitor pode encontrar algumas coisas aqui a mais do que ele já viu, e talvez mais do que eles espera, como um desejo sincero de ver um assunto de tanta importância estabelecido sobre um fundamento racional, e tratado como uma ciência, capaz de demonstração, e não uma arte misteriosa, como alguns autores acharam próprio expressá-la (Simpson, 1745, p. vi).

Segundo a passagem, a preocupação de Simpson residia no fato de que alguns algebristas transmitiram o assunto de modo a torná-lo "misteriosa". Essa terminologia evoca, de certa forma, aquela usada no texto de aritmética de Cocker, que chamou a álgebra de "arte oculta ou obscura". Ao longo de sua obra, Simpson tentar explicar cada regra simbólica das operações, de modo que grande parte deste mistério fica relacionado à maneira arbitrária que as operações simbólicas são estabelecidas na álgebra. Sua maior preocupação, porém, deve ter sido a maneira como as quantidades negativas eram utilizadas, mas isso nós veremos mais abaixo. Em seguida, o autor estabelece seu objetivo com a obra:

> Como meu alvo principal nesse projeto era de estabelecer um fundamento sólido para jovens garotos, de modo a permiti-los a proceder, depois, com certa certeza e sucesso, na busca de especulações mais exaltadas, e como há muitos já familiarizados com os elementos da geometria, e pouco sabem de suas aplicações, sem as quais é vão realizar grandes avanços, eu também dei uma série de problemas geométricos com suas construções... (Simpson, 1745, p. iv).

Logo em seguida, o autor ainda aproveita para destacar que, ao resolverem analiticamente esses problemas geométricos, os alunos poderão vislumbrar algumas vantagens do método sintético-dedutivo sobre o analítico:

> Esses problemas podem ser úteis para os jovens iniciantes resolverem algebricamente; assim eles da mesma forma verão as vantagens que o método antigo sintético de raciocínio possui, em muitos casos, com relação à análise, especialmente em questão de beleza e clareza (Simpson, 1745, p. iv).

Ou seja, apesar da presente obra tratar-se de uma apresentação analítica da álgebra, o autor ainda assim parece reconhecer a maior "beleza e clareza" do método sintético. Com relação a isso, vale apontar que Simpson era um defensor dos métodos analíticos modernos, e defendia uma reforma na análise matemática de Cambridge. Em um prefácio de seu último trabalho, Miscellaneous Tracts, *de 1757,* Thomas Simpson chega a fazer uma crítica à ortodoxia dos newtonianos de seu país:

> Por um cultivo diligente da análise moderna...matemáticos estrangeiros têm, ultimamente, sido capazes de empurrar suas pesquisas mais adiante em vários aspectos, do que Sir Isaac Newton e seus seguidores aqui (Simpson, 1981, p. 444).

10.4 O Tratado de Álgebra

O livro começa com uma definição da álgebra que, mais vez, segue aquela dada por Newton: “Álgebra é a arte da computação por meio da qual os problemas mais difíceis são resolvidos, quando suas soluções seriam buscadas em vão na aritmética comum.” (Saunderson, 1745, p. 1) Em seguida, ele faz uma comparação entre essa e a aritmética:

> Na aritmética cada dígito tem um valor determinado pelo lugar em que se posiciona, mas na álgebra, ou aritmética especiosa, onde quantidades são designadas por letras, cada caráter ou letra pode representar qualquer quantidade, seja conhecida ou desconhecida (Simpson, 1745, p. 1).

Para designar essas quantidades conhecidas e desconhecidas, Simpson também utiliza as mesmas notações de Descartes, e sua fala mostra uma consolidação da mesma:

> A fim de distinção, as quantidades conhecidas ou dadas (em qualquer questão) são denotadas pelas letras iniciais do alfabeto *a, b, c, d, etc.* e as desconhecidas ou requeridas, pelas últimas, *x, y, z, etc* (Simpson, 1745, p. 1).

Já com relação aos sinais, Simpson os define em termos operacionais, e quantidades negativas ou positivas isoladas não chegam a ser mencionadas nesse momento.

> O sinal + significa que a quantidade à qual ela está prefixada deve ser adicionada... O sinal - significa que a quantidade à qual ela está prefixada deve ser subtraída...Também, aquelas quantidades às quais o sinal + está prefixado são chamadas de afirmativas, e aquelas às quais o sinal - está prefixado, negativas (Simpson, 1745, p. 2).[52]

Sua apresentação das operações, porém, fica marcada por uma ausência da consideração de quantidades negativas isoladas em primeiro momento, e o autor recorre a uma argumentação diferente.

Adição:

Caso 1: Se nas quantidades a serem adicionadas houver termos que são iguais e todos possuem o mesmo sinal, some os coeficientes dos termos, e a essa soma junte as letras comuns a cada termo, prefixando o sinal comum.

Thus $3ab$ added to $2ab$ makes $5ab$
And $5a + 2b$ added to $2a + 4b$ will make $7a + 6b$
Alſo $5a — 2b$ and $12a — 4b$, added together, make $17a — 6b$.

Figura (36): exemplos de somas de quantidades em que termos de mesma natureza possuem mesmo sinal. (Simpson, 1745, p. 9)

[52] The Sign + signifies that the Quantity to which it is prefix’d is to be added… The Sign - signifies that the Quantity to which it is prefix’d is to be subtracted...Also, those Quantities to which the Sign + is prefix’d are call’d affirmative, and those to which the Sign - is prefix’d, negative.

Vejamos como ele explica o manuseio simbólico da regra. Para o caso de quantidades simples, como no primeiro exemplo, ele demonstra de maneira simples: se tenho 3 vezes de uma certa quantidade e também duas vezes dessa mesma, então eu tenho 5 vezes dessa quantidade. Basta, portanto, somar os números que prefixam as quantidades, como sugere a regra. Como quantidades negativas não entram em cena, maiores explicações não se torna necessárias. O segundo exemplo, por sua vez, segue de maneira direta dessa explicação.

Agora, vejamos como ele argumenta sobre o terceiro caso, em que somamos quantidades compostas com subtrações, a saber, *5a -2b* e *12a - 4b*: Primeiramente ele considera que se a soma fosse apenas *12a* com *5a*, o resultado seria *17a*. Porém, ele nota que a primeira quantidade, não é apenas *5a*, ela "quer" *2b* de *5a,* enquanto a útlima *quer 4b* de *12a*. Logo, ele conclui que a soma deve também "querer" tanto *2b* e *4b* de *17a,* e portanto deve ser igual a *17a - 6b* ou "o que sobra quando, de *17a*, a soma das deficiências é descontada." (Saunderson, 1745, p. 9)

Vemos então que ele usa uma ideia parecida com Wallis, ao atribuir à quantidade subtrativa o sentido de "remoção", um "desejo", uma "deficiência". Como as quantidades subtrativas não estão isoladas, a associação fica ainda mais simples, pois a ideia de "querer" está especificamente relacionada a querer algo de alguma coisa: como um dos termos somados quer *2b* e o outro quer *4b*, decorre que a soma, ou a junção", irá querer ambas. Dessa forma, temos que o resultado é *17a querendo 2b* e querendo *4b;* logo, *querendo 6b*. Passando isso para a linguagem algébrica, temos que o resultado é *17a - 6b.* Repare ainda que uma explicação análoga permite explicar o caso 2, em que temos quantidades com a mesma letra, mas sinal diferente.

Caso 3: Quando nas quantidades a serem somadas há termos sem outros da mesma espécie, escreva eles, com seus sinais próprios. (Simpson, 1745, p. 10)

Ou seja, ele diz que, se queremos somar termos que consistem de letras diferentes, como *a* e *b*, devemos apenas uní-las em uma expressão. Dessa forma, *a somado* a *b* resulta em *a+b*. Sua explicação é simples também aqui: Quantidades diferentes não podem ser reunidas em uma única soma, e logo não podem ser somadas de outra forma se não pelos seus sinais Por exemplo, se supormos *a* como sendo uma coroa, e *b*, um shilling a soma não será nem duas coroas nem dois *shillings*, mas sim uma coroa mais um *shilling*. (Simpson, 1745, p. 10)

A subtração, por sua vez, é dada por uma única regra, a usual:

Subtração:

> Subtração de quantidades algébricas é realizada mudando todos os sinais do subtraendo, e então conectando todas as quantidades, como na adição (Simpson, 1745, p. 11).

Thus $5b$ ſubtracted from $8b$ leaves $8b - 5b$ or $3b$; and $5a + 3b$ ſubtracted from $8a$ leaves $8a - 5a - 3b$ or $3a - 3b$. Alſo $5a - 3b$ from $7a + 5b$ leaves $2a + 8b$.

Moreover $12ax - 3bc - 5a^2$ from $20ax + 5bc - 7a^2$ leaves $20ax + 5bc - 7a^2 - 12ax + 3bc + 5a^2$ or $8ax + 8bc - 2a^2$.

Figura (37): Exemplos de subtração de quantidades algébricas. (Simpson, 1745, p. 11)

Simpson explica a regra a partir do último exemplo acima, isto é, subtrair $12ax - 3bc - 5a^2$ de $20ax + 5bc - 7a^2$:

Caso o primeiro termo, *12ax,* tivesse sido subtraído, o restante seria $20ax + 5bc - 7a^2 - 12ax$, mas como a quantidade proposta é menos do que *12ax* tanto por *3bc* e $5a^2$, é óbvio que o resto verdadeiro deve ser maior do que $20ax + 5bc - 7a^2 - 12ax$ pela soma dessas duas quantidades, e logo igual a $20ax + 5bc - 7a^2 - 12ax + 3bc + 5a^2$.

Ou seja, ele primeiro subtrai o termo positivo, o que é feito simplesmente agregando-o ao minuendo. Após isso, ele repara que subtraiu-se uma quantidade maior do que se deveria, pois o termo original era menor do que *12ax:* era *12ax* menos *3bc e* $5a^2$. Portanto, devemos "somar de volta" esses dois termos para obter o resultado correto, isto é, $20ax + 5bc - 7a^2 - 12ax + 3bc + 5a^2$. Logo, os sinais das quantidades subtrativas *3bc* e $5a^2$ são transformados na operação de subtração.

Multiplicação

A multiplicação é apresentada através de um longo processo mas o que nos interessa concentra-se na sua explicação da multiplicação de termos compostos:

> Quando quantidades compostas devem ser multiplicadas, multiplique cada termo do multiplicando por cada termo do multiplicador sucessivamente, conectando os vários produtos que surgem dessa maneira com os sinais do multiplicando, se aquele do multiplicador for afirmativo, mas com sinal contrário, se negativo (Simpson, 1745, p. 20).

Antes de estabelecer o caso geral, ele explica primeiro o caso em que uma das quantidades multiplicadas é simples.

Como sugere a regra, multiplicar uma quantidade composta da forma *a + b - c - d* com uma quantidade simples *f* resulta em *af + bf - cf - df.* A argumentação de Simpson é que, primeiramente, o produto dos termos afirmativos *a + b* será *af+bf*, pois multiplicar uma quantidade por outra é apenas tomar o multiplicando tantas vezes como há unidades no multiplicador (Essa é a definição que ele dá para a multiplicação, isto é, mais um autor que imita Euclides), e tomar o multiplicando inteiro *a + b* qualquer número de vezes (*f*) é o mesmo que tomar todas as suas partes (*a, b)* o mesmo número de vezes, e somá-las. Além disso, como *a+b-c-d* denota o excesso dos termos afirmativos (*a* e *b*) sobre os negativos (*c* e *d*), logo multiplicar *a + b-c-d* por *f* é simplesmente tomar o dado excesso *f* vezes;; mas *f* vezes o excesso de uma quantidade sobre outra é, manifestadamente, igual a *f* vezes o primeiro menos *f* vezes o segundo, Logo, o produto será igual a *af+bf-cf-df. (Simpson, 1745, p. 21)*

A partir desse resultado ele prova diretamente como se multiplicam quantidades compostas por outra composta:

Seja agora proposto multiplicar *A - B* por *C - D* (onde *A* e C representam, respectivamente a soma de todos termos afirmativos de um multiplicando e multiplicador qualquer, e *B* e *D* as somas dos negativos) então o produto é expresso por *+AC - BC - AD + BD*. [...] multiplicar *A - B* por *C - D* é apenas tomar *A - B* tantas vezes quanto houver unidades em *C - D*: Agora, (de acordo com o método para multiplicar quantidades compostas) eu primeiramente tomo *A - B, C* vezes , e a quantidade que surge daí será *+AC - BC* (pelo que foi demonstrado acima). Mas, era para eu ter tirado *A- B* apenas *C - D* vezes*,* logo, nessa primeira operação, eu a tirei *D* vezes em excesso; donde, é manifesto que, para ter o produto verdadeiro, eu devo deduzir *D vezes A - B* de *+AC - BC*, a quantidade assim achada; mas *D* vezes *A - B* (pelo que já foi provado) é igual a *+AD - BC -AD + BD, o*u escrito com os sinais mudados , dá o real produto *+AC - BC - AD + BD*. (Simpson, 1745, p. 22)

Logo em seguida, Simpson começa uma notável discussão sobre quantidades negativas. Acontece que, tendo demonstrado a regra, Simpson observa que o que acontece com os sinais dos termos do multiplicando e multiplicador segue a "regra simbólica comum" de que sinais iguais produzem + e sinais diferentes produzem -. Contudo, ele observa que muitos autores deduzem daí que o mesmo resultado vale caso consideremos quantidades negativas isoladas:

> Mas no final das contas deve-se esperar que um cuidado particular deve ser tomado para aqueles casos em que uma quantidade negativa, *-b*, deve ser multiplicada por uma afirmativa, *+c*, e quando duas quantidades negativas, como *-b* e *-c*, devem ser multiplicadas, quando elas estão sozinhas, independentes de todas outras quantidades: O que alguns podem pensar, deve, de acordo com bom método, ter sido explicado antes pelas regras para quantidades compostas, como é o método seguido para a maioria dos autores no assunto. (Simpson, 1745, p. 23)[53]

Diante disso, ele então ataca a própria ideia de que quantidades negativas ou mesmo imaginárias possam ser consideradas isoladas em primeiro lugar. Sendo essas quantidades "absurdas", tampouco faria sentido multiplicá-las.

> Deve ser considerado que tanto $-b$ quanto $-c$, desse jeito solitárias, são, em um sentido tão impossíveis quanto quantidades como $\sqrt{-b}$ ou $\sqrt{-c}$; uma vez que o sinal $-$, de acordo com as regras estabelecidas de notação, mostra que a quantidade deve se subtraída, mas subtrair algo de nada é impossível, e a notação ou

[53]But after all it may be expected that some particular Notice should be taken of those Cases where a negative Quantity, as *-b*, is to be multiply'd by an affirmative one, as *+c*, and where two negative Quantities, and *-b* and *-c*, are to be multiply'd together, when they stand alone, independent of all other Quantities: Which, some may think, ought, according to good Method, to have been explained before the Rules for Compound Quantities, as it is the Method followed by almost all Authors on the Subject.

> suposição de uma quantidade de fato menor do que nada, absurda e chocante para a imaginação. (Simpson, 1745, p. 254) [54]

Ou seja, a dificuldade em conceber quantidade negativas surge a partir de sua concepção substancial que vimos nos demais autores. Quantidades negativas não são consideradas de maneira abstrata, mas sim associadas à ideia metafísica de "menos do que nada", o que para Simpson não é intuitivo.

Por conta dessa restrição, o autor diz que pretende abordar a questão de outra forma. Simpson diz que, quando estamos resolvendo um problema sem recorrer a operações com quantidades negativas, cada passo transmite uma ideia real, por envolver quantidades estritamente positivas. Contudo, se, ao abstrairmos as premissas do problema por meio do simbolismo, e permitirmos a utilização de quantidades negativas nas manipulações, segundo as regras comumente aceitas para elas, tendemos a obter o resultado correto:

> Dada a equação $a - x/b = c - a$. Subtraindo a quantidade *a* de ambos os lados , obtemos $-x/b = c - a$; que multiplicado por *-b* (de acordo com a regra geral) resulta em $x = -cb + ab$; ou seja, $-x/b$ por $-b$ dá +*x*; c por -*b*; -*cb*, e -*a* por -*b*; $+ab$ (Simpson, 1745, p. 25).

Ou seja, o que ele quer dizer é que, ainda que as quantidades do problema sejam necessariamente positivas, é normal que, ao longo do manuseio de uma equação, aconteça de aparecerem quantidades negativas solitárias em um dos lados. Isso não é um problema. Mais do que isso, se supormos as regras dos sinais usuais e transformarmos uma equação desse tipo por meio de multiplicações, ainda assim conseguimos obter o resultado correto. No exemplo, quando ele multiplicou a equação $-x/b = c - a$ por *-b ;* logo, as quantidades isoladas $-x/b$ por -*b*, ele chegou ao resultado correto do problema. Isso, ele conclui porque a equação pode ser resolvida sem que seja necessário recorrer a quantidades negativas, de modo que cada operação é "clara e demonstrável", e o resultado obtido é o mesmo do método anterior.

O autor porém destaca que, apesar de os resultados coincidirem e a equação poder ser resolvida por meio do artifício das regras gerais dos sinais, isto não implica que a ideia de multiplicar quantidades negativas se torna razoável:

> Mas então, não é consequência de qualquer raciocínio que eu possa ser capaz de formar sobre $-\frac{x}{b}$ e -*b*, ou sobre +*c* e -*b*, considerados independentemente, que eu sei que o produto tem de ser expresso dessa maneira (Simpson, 1745, p. 25) .

Em outras palavras, o fato de que podemos supor o produto com quantidades negativas e obtermos a resposta correta consiste de uma "coincidência", pois o mesmo não pode ser explicado de maneira racional. Em seguida, ele dá mais um exemplo desse tipo, dessa vez envolvendo quantidades "imaginárias". Poderíamos manipulá-las

[54] For it ought to be considered that both -*b* and -*c*, as they stand here alone, are, in one sense, as much impossible Quantities as √-*b* and √-*c;* since the Sign -, according to the established Rules of Notation, shews the quantity, to which it is prefix'd, is to be subtracted, but to subtract something from nothing is impossible, and the Notion or Supposition of a Quantity actually less than Nothing, absurd and shocking to the Imagination.

“estrategicamente” para obter resultados verdadeiros, mas que raciocínio evidencia que tal operação é factível?

> Da mesma forma na equação $a - \frac{x^2}{b} = c$ (encontrar x), ao transpor a e tomar a raiz quadrada de ambos os lados, deveríamos ter $\sqrt{-\frac{x^2}{b}} = \sqrt{c-a}$; e isso multiplicado por $\sqrt{-b}$ resultará $\sqrt{x^2}$ $(ou\ x)$ $= \sqrt{-cb+ab}$: O que também parece ser verdade... Mas, mesmo assim, não é por qualquer raciocínio que eu possa formar, sobre a multiplicação de quantidades imaginárias consideradas independentemente, que eu posso provar que seus produtos devem ser expressos. Seria bastante absurdo fingir demonstrar o que o produto de duas expressões deve ser, as quais são impossíveis em si mesmas, e de cujos valores não podemos formar uma ideia (Simpson, 1745, p. 25, 26).

Suas palavras finais para encerrar esse caso referem-se a uma utilidade que as quantidades ditas impossíveis possuem: descobrir a impossibilidade de um problema.

> Pois é claro que em todas as questões relacionadas a números abstratos, ou onde a magnitude apenas de algo é proposto a ser investigado, em que nenhuma consideração de posição, ou valores contrários podem acontecer, a solução será de toda maneira tão impossível quando a conclusão sai negativa como quando é afetada por uma raiz imaginária (Simpson, 1745, p. 26).[55]

Nesse momento, ele ainda sugere que quantidades negativas poderiam ser consideradas como soluções legítimas dentro de contextos que envolvam “posição contrária”, entre outras coisas. Não vemos exemplos desse tipo acontecerem no livro, mas a passagem transmite uma ideia parecida com aquela que vimos em Wallis: as quantidades negativas não existem se a consideradas de maneira abstrata, como as positivas, mas apenas se estivermos em um contexto onde elas possam ser interpretadas de alguma forma. Fora desses casos, porém, elas possuem a utilidade de demarcar a impossibilidade do problema, além, é claro, de servirem de “ferramentas intermediárias” na resolução de equações. Na prática, portanto, apesar de sua crítica à legitimidade de proposições sobre operações com quantidades negativas, seu sistema algébrico não se diferencia muito com relação aos autores anteriores. É notável também que, na sua definição de subtração, não se exige que a quantidade a ser subtraída seja menor do que a quantidade diminuída, uma restrição que veremos em seguida, feita de modo a evitar quantidades negativas em qualquer expressão algébrica. Sobre a divisão, Simpson deriva diretamente da multiplicação que a regra dois sinais se mantém, quando dividimos uma quantidade composta por uma simples. (Simpson, 1745, p. 27)

Simpson apresenta 6 regras para redução de uma equação simples, a fim de se obter o valor da incógnita x. Destacamos a regra 6, que diz que no caso de a equação ser simples, isto é, se a maior potência da incógnita ser 1, o problema se resolve por meio das regras. Caso

[55] For it is plain that in all Questions relating to abstract Numbers, or where the Magnitude only of something is proposed to be investigated, in which no Considerations of Position, nor contrary Values can take place, the solution will be altogether as impossible, when the Conclusion comes out a negative quantity, as if it was actually affected with an imaginary Surd; since in one Case, it is required that a Number should be actually less than nothing, and in the other, that the double Rectangle of two Numbers should be greater than the Sum of their Squares; both which are equally impossible.

contrário, outros recursos precisam ser explicitados para resolvê-la. (Simpson, 745, p. 65) Em seguida, o autor traz uma série de exemplos de problemas sobre equações simples.

Suppoſe $\frac{ax^2+ac^2}{a+x} = ax+b^2$; to find x.

Here I perceive that neither the firſt, ſecond, nor the third Rule (yet) obtains; but, according to the fourth, I multiply by $a+x$, and there comes out $ax^2+ac^2 = \overline{ax+b^2}\times\overline{a+x}$, or $ax^2+ac^2 = a^2x+ab^2+ax^2+b^2x$; which, ordered according to the third, gives $-a^2x-b^2x = ab^2-ac^2$, and, changing all the Signs, $a^2x+b^2x = -ab^2+ac^2$, that is, $\overline{a^2+b^2}\times x = -ab^2+ac^2$; whence (by Rule 6.) $x = \frac{-ab^2+ac^2}{a^2+b^2}$. So that if $a = 1$, $b = 2$ and $c = 3$, then will $x = \frac{-4+9}{1+4} = 1$.

Figura (38): Exemplo de problema aritmético (Simpson, 1745, p. 65)

Aproveitamos o exemplo acima para confirmar que Simpson não vê problema em deixar um termo com sinal negativo encabeçando uma expressão algébrica. Grande parte dos problemas aritméticos apresentados por Simpson são desprovidos de uma contextualização real, mas ainda assim vemos exemplos de problemas aplicados envolvendo quantidades monetárias, etc. :

What Sum of Money is that, from which 5 l. being ſubtracted, two Thirds of the Remainder ſhall be 40 l?

Let x repreſent the required Number of Pounds; then, when 5 *l.* is taken away, there will remain $x-5$, and two Thirds of this is $\frac{2\times\overline{x-5}}{3}$ or $\frac{2x-10}{3}$, which, by the Queſtion is $=40$; that is $\frac{2x-10}{3}=40$; wherefore, by multiplying both Sides of the Equation by 3, we have $2x-10=120$, and, by adding 10 to both Sides, $2x=120+10=130$, conſequently $x=\frac{130}{2}=$ 65 *l.*

Figura (39): Exemplo de problema aritmético envolvendo quantidades monetárias (Simpson, 1745, p. 79)

Nossa próxima preocupação será com as equações quadráticas, que são abordadas no meio desses problemas aritméticos. Essas equações são divididas em dois tipos: “Simples” e “afectadas” (*Adfected*). A equação quadrática simples envolve apenas o quadrado da raiz, como é o caso da equação $xx = ab$” (Simpson, 1745, p. 98) Esse tipo de equação é resolvido simplesmente por meio da extração de raiz de ambos os lados. Uma equação quadrática “afetada” envolve a incógnita e seu quadrado, e é resolvida através do método de completamento de quadrado. Segundo Simpson, estas são comumente divididas em três casos, de acordo com as diferentes variações de sinais. A forma 3 atesta como, na prática, Simpson tampouco vê problemas em manter quantidades negativas isoladas em uma equação:

1. $x^2 + 2ax = b^2$
2. $x^2 - 2ax = b$
3. $x^2 - 2ax =- b^2$

Vemos que ele coloca $2ax$ logo após ter dado um exemplo em que aplica o método de completamento do quadrado:

Term: Thus, in the Equation $x^2 + 2ax + a^2 = b^2 + a^2$, the ſquare Root of the left-hand Side, $x^2 + 2ax + a^2$, is expreſſed by $x + a$ (for $\overline{x+a} \times \overline{x+a} = x^2 + 2ax + a^2$) whence it is manifeſt that $x + a = \sqrt{b^2 + a^2}$, and therefore $x, = \sqrt{b^2 + a^2} - a$, whence x is known. Theſe Kinds of Equations, it is alſo to be obſerved, are commonly divided into three Forms, according to the different Variations of the Signs: Thus $x^2 + 2ax = b^2$ is call'd an Equation of the firſt Form; $x^2 - 2ax = b$, one of the ſecond Form; and $x^2 - 2ax = - b^2$, one of the third Form; but the Method of extracting the Root,

Figura (40): O completamento de quadrado e a derivação das três formas de equação quadrática (Simpson, 1745, p. 98-99)

Não sabemos, porém, dizer por que razão ele manteve $2ax$ e b^2 ao descrever os casos gerais, nem por que no caso 2, ele coloca b. Logo em seguida, Simpson diz que os dois primeiros casos são resolvidos como no exemplo, por completamento de quadrado, mas no terceiro caso, "a raíz do lado conhecido, no lado direito, deve ser expresso com o sinal $\pm$; x tendo duas diferentes valores nesse caso." (Simpson, 1745, p. 99)

But, now, as to the Ambiguity, taken notice of, in the third Form, where $x^2 - 2ax = - b^2$, or $x^2 - 2ax + a^2 = a^2 - b^2$, the Root of the right-hand Side, it is evident, may be either $x - a$, or $a - x$ (for either of theſe ſquared, produce the ſame Quantity) therefore in the former of theſe Caſes $x = a + \sqrt{a^2 - b^2}$, and in the latter, $x = a - \sqrt{a^2 - b^2}$, and either of theſe Values anſwer the Conditions of the Equation. The ſame Ambiguity would likewiſe happen in the ſecond Form, $x^2 - 2ax = b^2$, where x, either, $= a + \sqrt{a^2 + b^2}$, or, $a - \sqrt{a^2 + b^2}$, did not we know, from the Nature of the Expreſſion, that the latter of theſe Values is negative, or leſs than nothing.

Figura (41): As soluções dos três casos de equações quadráticas (Simpson, 1745, p. 99)

Em sua argumentação vemos que ele não discute sobre a condição de que a seja maior do que b na solução $a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ do terceiro caso, de modo que soluções impossíveis não são aqui abordadas. Estas contudo, são levantadas nos capítulos seguintes, onde vemos a teoria de equações.. *A*o apresentar o método de Harriot de representar polinômios como produto de binômios, vemos Simpson referir-se às raízes negativas naturalmente, sem nem mesmo fazer uma nota sobre a sua posição diante desse tipo de raiz. Esta prática, ele mantém ao apresentar outros resultados logo em seguida. Na figura abaixo, vemos como ele se refere a raízes negativas ao utilizar o conhecido método para encontrar raízes racionais de polinômios:

Ex. 1. Let the Equation $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$, be propofed; then, the Divifors of (10) the laft Term being $+1, -1, +2, -2, +5, -5, +10, -10$, let thefe Quantities be fucceffively fubftituted inftead of x, and we fhall have,

1ft, $1 - 4 - 7 + 10 = 0$; therefore 1 is one Root of the Equation.

2dly, $-1 - 4 + 7 + 10 = 12$; therefore -1 is no Root.

3dly, $8 - 16 - 14 + 10 = -12$; therefore 2 is no Root.

4thly, $-8 - 16 + 14 + 10 = 0$; therefore -2 is another Root.

5thly, $125 - 100 - 35 + 10 = 0$; therefore 5 is the third Root.

Figura (42): método para descoberta de raízes racionais de um polinômios. Repare que ele encontra a raiz -2, a qual ele não descarta. (Simpson, 1745, p. 128).

10. 5 Conclusão

O tratado de Simpson é marcado por uma crítica substancialista à legitimidade das operações com quantidades negativas, bem como da própria existência dessas na álgebra. Apesar disso, as quantidades "absurdas" acabam por servir normalmente em sua prática como ferramentas para obtenção de soluções de problemas, algo que fica permitido através da abstração que o simbolismo algébrico permite na tradução das informações de um problema. Sua concepção de álgebra, portanto, não se distancia muito das outras na prática.

11 O Tratado de MacLaurin

11. 1 Colin MacLaurin

Colin MacLaurin nasceu em Kilmodan, Escócia, no ano de 1698. Era o mais jovem dos três irmãos. Seu pai, John MacLaurin morreu quando Colin tinha apenas seis semanas de vida, e foi acolhido pelo seu tio, Daniel, ministro de Kilfinnan.

Em 1709, entrou na Universidade de Edimburgo, onde leu divindade por um ano. Lá, também conheceu Simson, professor de matemática, que o apresentou à geometria dos antigos.

Em 1715, defendeu a tese *On the Power of Gravity* que lhe rendeu título de mestre de artes. O título lhe rendeu vaga como tutor de matemática da Marischal College, em Aberdeen, mesmo sendo ainda um adolescente na época. Nessa época estava trabalhando na sua obra *Geometria organica,* publicada em 1720, com *imprimatur* de Newton. (Scott, 1981, pág. 609)

Nos anos de 1725, foi apontado professor da Universidade de Edimburgo, dando aula sobre uma série de tópicos incluindo os livros de Euclides, trigonometria esférica, astronomia, e os *Principia* de Newton. No ano de 1719 foi apontado *fellow* da Royal Society.

No ano de 1742, publicou seu *Tratado de Fluxões,* descrito como a primeira publicação lógica e sistemática dos métodos de Newton, sendo um modelo de rigor até a análise de Cauchy ser lançada em 1821. (Scott, 1981, pág. 610)

Quando um exército das Terras Altas da Escócia marchou sobre Edimburgo na revolta de 1745, Maclaurin organizou a defesa da cidade, campanha a qual o deixou diante de uma exaustão da qual nunca recuperou. A cidade caiu diante dos jacobitas — o grupo radical que pretendia recolocar a dinastia Stuart no trono escocês, irlandês e inglês— e Maclaurin teve que fugir da Inglaterra. Voltou a Edimburgo quando se viu que os jacobitas não iriam ocupar a cidade, mas a provação que ele enfrentou atacaram a sua saúde. Ele morreu logo depois, aos 48 anos. (Scott, 1981, pág. 612)

Enquanto professor da Universidade de Edimburgo, MacLaurin desenvolveu um sistema algébrico, que foi por ele utilizado em suas aulas, e que fora aprimorado ocasionalmente ao longo do tempo, até que ficasse pronto para publicação.Em uma carta datada de 1729 a Martin Folkes, então presidente da Royal Society, Maclaurin já havia deixado claro seu desejo em escrever um tratado sobre álgebra.(MacLaurin, 1748, p. *v*)

MacLaurin nunca teve a chance de ver seu tratado ser publicado, pois faleceu precocemente em 1746, mas ele deixou o manuscrito com sua editora, que o publicou dois anos depois, em 1748. Esse manuscrito continha o corpo do *A treatise on Algebra* (*Um Tratado sobre Álgebra*), o tratado sobre álgebra do jeito que que MacLaurin desejava publicar. A este o manuscrito, a editora fez algumas pequenas alterações, adicionando alguns outros escritos de Maclaurin, devidamente encaixados ao restante da obra, além de algumas expansões de suas demonstrações.

De acordo com a seção *To the Reade*r da obra, que não consta autoria, afirma-se que os objetivos de MacLaurin ao escrever essa obra teriam sido três:

1. Apresentar os princípios fundamentais da Álgebra, de maneira concisa, e contendo um conteúdo expressivo de exemplos para cada regra que ele apresenta. MacLaurin não rejeitava certos tipos de aplicação da Álgebra, ainda que exemplos dessas aplicações não tenham sido dadas, mas deixou de resolver problemas geométricos nessa obra porque seria necessário conhecimento prévio dos Elementos da Geometria, dos quais os Elementos da álgebra devem ser mantidos distintos.Além disso, o autor teria pensado que a tarefa de aplicar a geometria à álgebra já havia sido realizada de maneira completa por Isaac Newton em sua obra Universal Arithmetick, onde uma série de exemplos de problemas de geometria analítica são resolvidos.
2. Ainda com relação à obra de Newton, MacLaurin disse também desejar que seu tratado servisse de comentário a ela. Ele traz uma demonstração para a "regra de Newton", quanto ao tipo das raízes de equações polinomiais.
3. Após ter apresentado a natureza das equações, e os métodos para encontrar suas raízes, seja em expressões finitas ou em séries convergentes, queria considerar a relação entre equações envolvendo duas variáveis e linhas geométricas, a chamada doutrina do *Loci*; e a construção de equações. (Maclaurin, 1748, p. *vi-viii*)

Estruturalmente, o livro segue precisamente a linha sugerida por esses objetivos. Na parte I, vemos os fundamentos da álgebra, onde são apresentados os símbolos, as operações, e as equações de primeiro e segundo grau, entre outros problemas básicos. Em seguida, na parte II, vemos que ele faz como Saunderson e apresenta um conteúdo na mesma natureza que aquele visto em *How Equations are to be solved* de Newton. Finalmente, na parte III, ele apresenta a doutrina do *Loci.* Nosso interesse será especificamente na parte I, onde poderemos ver como o autor fundamenta a sua álgebra e como ele irá proceder com números negativos.

10.2 Um Tratado de Álgebra

O livro começa de uma maneira bem parecida com aquela vista na *Aritmética Universal* do Newton. De fato, Wallis se refere à álgebra usando este mesmo termo utilizado por Newton, e refere-se à aritmética como "aritmética comum" (enquanto Newton a chamou pelo termo "vulgar"), sendo ambas métodos de "computação". Como já poderíamos imaginar a partir dessa relação nominal, Maclaurin logo repete a relação fundamental existente entre a aritmética e a álgebra, também vista em Wallis: ambas procedem "sob as mesmas regras e operações", e a álgebra caracteriza-se por ser um "método geral de computação por meio de sinais e símbolos." (MacLaurin, 1748, p. 1)

Depois, ele ainda diz que o fato de que a álgebra está sob as mesmas bases da aritmética não é algo danoso para sua utilidade ou evidência, uma vez que a aritmética "é permitida a ser uma das mais claras e evidentes das ciências". Contudo, MacLaurin diz que é preciso tentar aliviar a dificuldade que surge a partir do uso de símbolos; uma preocupação que parece refletir os comentários vistos em Cocker sobre a "aritmética algébrica": é necessário explicar o significado dos símbolos. Somente assim será possível eliminar qualquer "obscuridade" que possa surgir a partir de seu uso, e assim podermos tirar proveito da generalidade que eles permitem (Maclaurin, 1748, p. 2). A esse propósito o capítulo primeiro se presta, como vimos nos textos anteriores: o autor tenta explicar o significado dos símbolos e das operações algébricas à sua maneira.

Seu argumento começa a partir de uma comparação entre a álgebra e a geometria, e sua fala mostra uma posição elogiosa à primeira. A álgebra, diz o autor, trata-se de uma linguagem mais abstrata e distante dos objetos que representa, mas por isso mesmo, é mais abrangente e preparada:

> Na geometria, retas são representadas por retas, triângulos por triângulos, e outras figuras por uma do mesmo tipo; mas, na Álgebra, quantidades são representadas pelas mesmas letras do alfabeto...Na geometria, as representações são mais naturais, na álgebra, mais arbitrárias. A primeira é como as primeiras tentativas de representar objetos, o que era feito traçando-se desenhos semelhantes, o último corresponde mais ao uso presente da linguagem e da escrita. Dessa forma, a evidência da geometria é algumas vezes mais simples, enquanto que o uso da álgebra, mais extensivo e pronto; especialmente agora que as matemáticas foram aplicadas a muitas questões (Maclaurin, 1748 p. 2).[56]

A partir dessa aplicabilidade da álgebra às demais ciências que ele tece seu argumento a favor da necessidade do maior simbolismo algébrico:

> Nessas ciências, não é apenas a magnitude que é objeto de contemplação: mas há muitas 'afecções' [affections] e propriedades de quantidades, e operações a serem realizadas sobre elas, que devem ser consideradas. Na estimação de razão e proporção de quantidades, magnitude apenas é considerada. (elem. 5. Def. 3) Mas a natureza das propriedades das figuras dependem da posição das linhas que a unem, assim como suas magnitudes. Ao tratar do movimento, a direção do movimento assim como sua velocidade; e a direção de forças que geram ou destroem movimento, assim como suas força, devem ser consideradas...É necessário portanto que outros símbolos sejam admitidos na álgebra além de letras e números que representam a magnitude das quantidades (MacLaurin, 1748, p. 2).

[56] In Geometry, Lines are represented by a Line, Triangles by a Triangle, and other FIgures by a Figure of the same kind; but, in Algebra, Quantities are represented by the same Letters of the Alphabet; and various Signs have been imagined for representing their Affections, Relations, and Dependencies. In Geometry the Representations are more Natural, in Algebra more Arbitrary: The former are like the first Attempts towards the Expression of Objects, which was by drawing their Resemblances: the latter correspond more to the present Use of Languages and Writing. Thus the Evidence of Geometry is sometimes more simple and obvious; but the Use of Algebra more extensive, and often more ready: especially since the mathematical Sciences have acquired so vast an Extent, and have been applied to so may Enquiries.

Ou seja, nas ciências, várias propriedades dos objetos precisam ser levadas em conta, e não apenas a sua "magnitude". Na óptica, por exemplo, não apenas o tamanho da imagem importa, mas também muitas outras propriedades como o brilho, a posição etc. Segundo essa concepção é que a qualidade positiva ou negativa de uma quantidade será explicada, como veremos logo a seguir. A partir disso, ele começa a definir uma série de símbolos, a começar pela igualdade (=), e desigualdade (> e <). (MacLaurin, 1748, p. 2)

Maclaurin então se direciona aos sinais de + e -. Primeiramente, ele define quantidade como sendo "aquilo que é constituído de partes, ou que é capaz de ser maior ou menor. Pode ser aumentada pela adição e diminuída pela subtração." (Maclaurin, 1748, p. 3)

A partir disso, Maclaurin diz que quantidades podem entrar numa computação de duas maneiras: como um "incremento", ou como um "decrescimento", ou seja, somando ou subtraindo. O sinal de + indica que a quantidade soma, e o sinal de - indica que a quantidade diminui. Depois, o autor identifica que quantidades que somam são chamadas positivas, e quantidades que diminuem são quantidades negativas. Dessa forma:

> A quantidade representada por a, $+a$ significa que a deve ser somado, mas $-a$ significa que a deve ser subtraído.... $+a-b$ denota a quantidade que surge quando da quantidade a, a quantidade b é subtraída. (MacLaurin, 1748, p. 4)[57]

Portanto, vemos que as quantidades *+a* e *-a,* para MacLaurin, parecem carregar um significado operacional. As suas quantidades "negativas" são consideradas decrescimentos, logo são consideradas no sentido de estarem subtraindo. Essa definição mostra uma diferença clara entre MacLaurin e os autores anteriores, que separaram os significados de afirmação/negação e soma/subtração nas suas definições.

> Quando $a=b$, então $a-b=0$; e quando a é menor do que b, $a-b$ é em si um decrescimento (MacLaurin, 1748, p. 4)[58]

Ou seja, o resultado da operação *a-b* será um termo negativo que, mesmo considerado em si, é considerado um decrescimento. Logo, as quantidades negativas são consideradas de maneira isolada, mas elas sempre carregam o significado de "decrescimento". O importante a ser considerado é que, apesar de suas definições de quantidade já incluírem uma ideia operacional, ele irá mesmo assim realizar somas e subtrações com acréscimos e decrescimentos "puros". A parte mais curiosa, porém, é que MacLaurin faz uma observação semelhante àquela de Saunderson. Após ter definido quantidades, ele diz:

> Logo, qualquer quantidade entra nas computações algébricas de duas maneiras diferentes que possuem efeitos contrários; tanto como incremento ou

---

[57] Thus, the quantity being represented by *a*, *+a* imports that *a* is to be added, or represents an Increment; but *-a* imports that *a* is to be subtracted and represents a *Decrement.*

[58] ...when *a=b*, then *a-b=0,* and when a is less than b, then *a-b* is itself a Decrement.

> decrescimento; isto é, como uma quantidade a ser adicionada ou a ser subtraída (MacLaurin, 1748, p. 4).[59]

Esta passagem sugere que MacLaurin carrega também o mesmo pressuposto, a chamada "regra dos contrários", que diz que as quantidades possuem efeitos contrários nas operações. Isso fica mais claro depois, na seguinte passagem:

> Uma quantidade que deve ser adicionada é da mesma maneira chamada de positiva, e uma quantidade a ser subtraída é dita negativa: elas são igualmente reais, mas opostas, de modo que uma tira o efeito da outra em qualquer operação, quando são iguais em termos de quantidade. Dessa forma, $3-3=0$ e $a-a=0$. Mas apesar de $+a$ e $-a$ serem iguais em quantidade, não supomos na álgebra que $+a=-a$, pois para inferir igualdade nessa ciência, elas não apenas devem ser iguais em termos de quantidade mas também de qualidade, de modo que em toda operação, uma possui o mesmo efeito que a outra. Um decrescimento pode ser igual a um incremento, mas em todas as operações possui um efeito contrário (MacLaurin, 1748, p. 6-7).

Ou seja, na álgebra de MacLaurin, quantidades possuem uma magnitude, uma "quantidade", e um efeito, uma qualidade, que fica representada pelo sinal. Essa qualidade, por sua vez, pouco difere em significado com o pressuposto de Saunderson: pode assumir duas formas, sendo que uma é o contrário da outra, no sentido de possuírem efeitos contrários em todas as operações e "se destruírem quando juntas" (MacLaurin, 1748, p. 5). A própria noção de "qualidade" fica de certa forma entendida na álgebra de Saunderson, no momento em que ele faz a associação dos sinais ao papel qualitativo dos adjetivos da língua inglesa. Como veremos, as semelhanças não serão apenas teóricas, e MacLaurin também se utilizará da meta-regra para demonstrar algumas das suas operações algébricas.

Essa interessante dualidade presente na álgebra de Maclaurin e implícita em Saunderson marca uma clara diferença conceitual desses autores com relação àqueles do século anterior. Quanto à origem dessa concepção, podemos dizer que ela já havia sido levantada pelo francês Bernard de Fontenelle. Em sua obra *Éléments de la géométrie de l'infin de 1727,* afirma que:

> Logo, toda magnitude positiva ou negativa, não apenas possui seu ser numérico, a partir do qual ele é um certo número, uma certa quantidade, mas possui além disso, seu ser específico, a partir do qual ele é uma certa coisa oposta a outra. Eu digo oposto a outra, porque é apenas por essa oposição que ele obtém um ser específico (Fontenelle, 1727, p. 170).[60]

Também não é difícil imaginar como sua concepção possa ter sido disseminada até alcançar o matemático britânico: Fontenelle era secretário permanente da *Academie des Sciences,* ocupando um cargo altamente respeitado. Ele mantinha-se atualizado sobre novos desenvolvimentos na ciência e correspondia com cientistas de vários países europeus.

---

[59] Hence is, that any Quantity may be supposed to enter into *Algebraic Computations* two different ways which have contrary Effects: either as an *Increment* or as a *Decrement,* that is, as a Quantity to be added, or as a Quantity to be Subtracted.

[60] Donc toute grandeur positive ou négative n'a pas seulement son être *numérique*, par lequel elle est un certain nombre, une certaine quantité, mais elle a de plus son être spécifique, par lequel elle est une certaine *Chose opposée* à une autre.

De acordo com MacLaurin, essa ideia de oposição das quantidades algébricas pode ser vista de maneira análoga nas ciências. Por exemplo,

> Um movimento para baixo pode ser igual a um movimento para cima, e a depressão de uma estrela abaixo do horizonte pode ser igual à elevação de uma estrela acima dele: mas essas posições são opostas, e a distância das estrelas é maior do que se uma delas estivessem no horizonte de modo a não ter elevação acima ou depressão abaixo dela (MacLaurin, 1748, p. 7).[61]

Nesse momento, ele reitera que é por conta da sua natureza contrária que as quantidades subtrativas são consideradas menores do que nada, mas mesmo assim são tão reais quanto as positivas. Isso, contudo, não significa que as subtrativas não necessitem de contextos como esses, que permitam a sua interpretação. Como ele diz antes, não faz sentido dizer que existe uma quantidade de matéria negativa, de efeito contrário a uma quantidade positiva de matéria; a natureza desta quantidade é de tal forma a admitir apenas “quantidades positivas.” (MacLaurin, 1748, p. 5):

> Esa mudança de qualidade apenas ocorre quando uma quantidade é de tal natureza de modo a admitir uma contrariedade ou oposição. Não sabemos nada análogo a isso em quantidades consideradas de maneira abstrata, e não podemos subtrair uma quantidade maior de matéria de uma menor, ou uma maior quantidade de luz de uma menor. E a aplicação dessa doutrina a qualquer arte ou ciência deve ser derivada dos princípios conhecidos da ciência (MacLaurin, 1748, p. 6).[62]

A passagem não deixa dúvidas de que as quantidades subtrativas não podem ser consideradas de maneira puramente abstrata.

Indo agora às operações, poderemos verificar como MacLaurin utiliza o pressuposto da contrariedade das quantidades nas suas explicações. Suas definições não fogem do padrão, mas vejamos como ele justifica a regra da operação de quantidades de sinais contrários:

> Regra: Subtraia o menor coeficiente do maior, prefixe o sinal do maior ao resto, e junte a letra ou letras comuns. Essa regra é facilmente deduzida da natureza das quantidades positivas e negativas (MacLaurin, 1748, p. 11).

Aqui vemos que ele diz que a regra pode ser deduzida, especificamente a partir da “natureza das quantidades positivas e negativas”. Poderíamos assumir que ele está se referindo ao seu pressuposto do efeito contrário, que é utilizado nessa mesma regra por Saunderson, mas vemos isso de maneira explícita na subtração.

---

[61] A motion downwards may be equal to a Motion upwards, and the Depression of a Star below the Horizon may be equal to the Elevation of a Star above it: But those Positions are opposite, and the Distance of the Stars is greater than if one of them was at the Horizon so as to have no Elevation above it, or Depression below it. It is on account of this contrariety that a Negative Quantity is said to be less than Nothing, because it is opposite to the Positie, and diminishes it when joined to it, whereas the Addition of 0 has no Effect.

[62] This Change of Quality however only takes place where the Quantity is of such a Nature as to admit of such a Contrariety or Opposition. We know nothing analogous to it in Quantity abstractly considered, and cannot subtract a greater Quantity of Matter from a lesser, or a greater Quantity of Light from a lesser.

Case III. To add Quantities that are unlike.

Rule. *Set them all down one after another, with their Signs and Coefficients prefixed.*

EXAMPLES.

To $+2a$	$+3a$
Add $+3b$	$-4x$
Sum $2a+3b$	$3a-4x$

To $4a+4b+3c$
Add $-4x-4y+3z$

Sum $4a+4b+3c-4x-4y+3z$

Figura (43): Regra para somar quantidades de letras diferentes. Esta não é deduzida, mas dada em termos puramente simbólicos(MacLaurin, 1748, p.11)

A “regra geral da subtração” diz que você deve “mudar o sinal da quantidade a ser subtraída para o sinal contrário, e então somá-la assim mudada à quantidade da qual ele deveria ser subtraído (de acordo com a regra do capítulo da soma). A soma resultante por essa adição será o restante”. MacLaurin então explica que essa de maneira similar a Saunderson, destacando a contrariedade das quantidades dentro das operações:

> Pois subtrair qualquer quantidade, seja ela positiva ou negativa, é o mesmo que somar a de tipo oposto (MacLaurin, 1748, p. 11).[63]

EXAMPLES.

From $+5a$	$8a-7b$
Subtract $+3a$	$3a+4b$
Remaind. $5a-3a$, or $2a$	$5a-11b$

From $2a-3x+5y-6$
Subtract $6a+4x+5y+4$

Remaind. $-4a-7x \quad 0-10$

Figura (44): Exemplos de subtração fornecidos por MacLaurin (MacLaurin, 1748, p. 11)

Após essa explicação, MacLaurin tenta oferecer mais uma, especificamente para o caso de subtrair quantidades negativas.

[63] For, to subtract any Quantity, either Positive or Negative, is the same as to add the opposite Kind.

> É evidente que subtrair ou remover um decréscimo é o mesmo que somar um incremento igual. Se tirarmos *-b* de *a-b*, sobra *a*; e se somarmos *+b* a *a-b*, a soma é *a* da mesma forma. De modo geral, a subtração de uma quantidade negativa é equivalente a somar seu valor positivo.[64]

É notável que, aqui, ele recorre a um sentido literal de "remover" ao mesmo estilo de Wallis. Como "remover" o símbolo *-b* de *a-b* resulta em *a*, mesmo resultado que surgiria se somássemos *+b*, decorre que subtrair quantidades negativas é o mesmo que somá-las. Com relação à multiplicação, o autor recorre a um argumento mais uma vez similar a Wallis.

Caso 1. Primeiramente, ele diz que multiplicar uma dada quantidade por uma quantidade positiva *+a* a *+n* significa somar *a* (*n* vezes), logo o produto resulta em *na*, que é evidentemente positivo.

Caso 2. Para o caso de o multiplicando ser negativo (*-a*), e multiplicador, positivo (*n*), a concepção da multiplicação se mantém, e basta somar o termo negativo *n* vezes para obter o resultado. Como já se sabe somar quantidades negativas, descobre-se que o resultado é *-na* e, portanto, negativo.

Caso 3. Agora, no caso de o multiplicador ser negativo, MacLaurin diz que fica implícito, que deve ser feita uma subtração iterativa. Logo, quando *+a* for multiplicado por *-n*, o significado é que *+a* deve ser subtraído tantas vezes quanto há unidades em *n.* Assim, o produto é negativo, igual a *-na*.

Caso 4. Agora, se pretendemos multiplicar uma quantidade negativa, *-a*, por outra, *-n*, basta subtrair *-a* tantas vezes como há unidades em *n.* Como já foi mostrado que subtrair uma quantidade negativa equivale a somá-la, o resultado será positivo, igual a *+na*. (MacLaurin 1748, p. 12-13)

Em seguida ele ainda oferece uma outra explicação para os casos 3 e 4. Vejamos a do caso 3:

> Pelas definições, *+a-a = 0*, então se multiplicarmos *+a-a* por *n,* o produto deve sumir ou ser *0*, pois o fator *a-a* é *0.* O primeiro termo do produto é *+na* (pelo primeiro caso). Logo o segundo termo do produto deve ser *-na* que destrói *+na*; de modo que o produto inteiro deve ser *+na -na=0.* Logo, *-a* multiplicado por *+n* dá *-na* (MacLaurin, 1748, p. 13).[65]

Aqui, vemos que ele tenta demonstrar a regra dos sinais com quantidades negativas como Kersey, isto é, identificando-a em uma quantidade subtrativa dentro de um binômio. Além disso, ele também assume uma espécie de associatividade. A diferença nessa

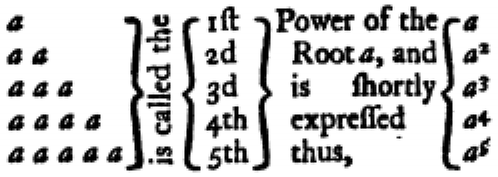
---

[64] It is evident that to subtract or take away a Decrement is the same as adding an equal Increment. If we take away *-b* from *a-b*, there remains *a;* and if we add *+b* to *a-b*, the Sum is likewise *a*. In general, the Subtraction of a Negative Quantity is equivalent to adding its Positive Value..

[65] By the Definitions, *+a - a = 0*; therefore, if we multiply *+a - a* by *n*, the Product must vanish or be *0*, because the Factor *a - a* is 0. The first Term of the Product is *+na* (by case I). Therefore the second Term of the Product must be *-na* which destroys *+na*; so that the whole Product must be *+na - na = 0.* Therefore *-a* multiplied by *+n* gives *-na*.

demonstração é que ele recorre à ideia de que quantidades de sinais opostos “se destroem”, enquanto Kersey teve de assumir as regras de transposição de termos de uma equação de um lado para o outro. Uma prova análoga depois é feita para “provar” o caso 4. Das regras, também decorre a regra de multiplicar termos compostos, que consiste em multiplicar cada termo do multiplicando por cada um do multiplicador, seguindo a regra dos sinais.

Na mesma seção, o autor ainda define ideia de potências, como uma multiplicação sucessiva de uma mesma quantidade. A notação é apresentada, novamente, tanto segundo o padrão de Harriot como o de Descartes.



a	is called the	1ſt	Power of the	a
aa		2d	Root a, and	a^2
aaa		3d	is ſhortly	a^3
$aaaa$		4th	expreſſed	a^4
$aaaaa$		5th	thus,	a^5

Figura (45): As duas notações para potências (MacLaurin, 1748, p. 16)

No capítulo dedicado às potências, o autor diz que multiplicar potências de uma mesma quantidade significa somar seus expoentes, enquanto dividi-las significa subtrair os expoentes. MacLaurin chega a expoentes negativos a partir disso:

> Se você divide uma potência menor por uma maior, o expoente desse quociente deve ser, segundo essa regra, negativo. Logo, $\frac{a^4}{a^6} = a^{4-6} = a^{-2}$. Mas $\frac{a^4}{a^6} = \frac{1}{a^2}$, logo $\frac{1}{a^2}$ é expresso também como a^{-2} (MacLaurin, 1748, p. 38).

Além disso, da mesma maneira, MacLaurin consegue concluir que $a^0 = 1$. Vale, porém, notar que esses resultados são alcançados a partir dessas novas definições algébricas para operações com potências. As ideias de a^0 ou potências negativas podem ser consideradas inconsistentes com a definição de potência que ele havia dado antes, isto é, como produtos iterados.

Outra regra que ele estabelece simbolicamente e sem explicações diz que: “qualquer quantidade colocada no denominador de uma fração pode ser transposta ao numerador, se o sinal de seu expoente for trocado. Dessa forma, $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$ e $\frac{1}{a^{-3}} = a^3$.”(Maclaurin, 1748, p. 36)

Depois, ele usa a regra da multiplicação para mostrar que quando uma quantidade é negativa, suas potências irão revezar entre positivas e negativas, sendo positivas quando o expoente for par e negativas quando o expoente for ímpar. Por conta disso, “ qualquer potência que tem um sinal negativo pode ter tanto uma raiz positiva quanto uma negativa. Logo, a raíz de $+a^2$ pode ser $+a$ ou $-a$, porque $+a \times + a$, e $-a \times - a$ dão $+a^2$ de resultado. Em seguida o autor fala de raízes de quantidades negativas, reconhecendo que elas somente são possíveis se o índice for ímpar. “Logo, a raíz de $-a^2$ não pode ser designada, e é o que chamamos de quantidade imaginária ou impossível.” (Maclaurin, 1748, p. 43)

No capítulo sobre equações, MacLaurin traz 8 regra para reduzir equações simples, isto é, equações de uma variável, em que esta aparece sem potenciação. Vale apontar que Maclaurin inclui uma regra em na verdade não temos uma equação, mas sim duas equações aparecem, uma envolvendo outra incógnita. Trata-se da regra 8 que diz que “ podemos substituir uma quantidade na equação por outra igual a ela” (Maclaurin, 1748, pág. 67). Trata-se de um sistema simples.

As regras 1, 2, 3, 4, 5 e 7 continuam a seguir um padrão: referem-se a somar, subtrair quantidades de ambos os lados da equação ou multiplicar, dividir, extrair uma raiz, ou elevar a uma potência ambos os lados da equação. Notamos, apenas, que ele tem uma regra para “passar uma quantidade para outro lado com sinal invertido”, e outra para “cortar quantidades iguais nos dois lados da equação”, duas regras que poderiam ter sido reunidas em apenas uma.

A regra 6 já se trata de uma particularidade de MacLaurin Nela ele mostra como uma proporção pode ser interpretada como uma equação: “Uma proporção envolvendo quantidades desconhecidas pode ser transformada numa equação, fazendo o produto dos extremos igual ao produtos dos meios. “ (MacLaurin, 1748, p. 66)

If $12 - x : \frac{x}{2} :: 4 : 1$
then $12 - x = 2x \ldots 3x = 12 \ldots$ and $x = 4$.

Or if $20 - x : x :: 7 : 3$
then $60 - 3x = 7x \ldots 10x = 60 \ldots$ and $x = 6$.

Figura (46): a transformação de uma proporção em uma equação (MacLaurin, 1748, p. 66)

A partir dessas regras, MacLaurin faz como Saunderson e resolve uma série de problemas envolvendo equações simples. Vemos nesse momento que ele utiliza as letras x e y para denotar incógnitas, e as vogais para as quantidades conhecidas. Depois, em um suplemento do capítulo, ele ainda aborda a extração de raízes cúbicas de binômios da forma $A \pm B\sqrt{-q}$, que surgem na resolução de equações do terceiro grau. (MacLaurin, 1748, p. 127)

Seu próximo passo é abordar equações quadráticas. Maclaurin as define de uma maneira menos abrangente: envolvendo o quadrado de uma quantidade desconhecida e essa quantidade multiplicada por outra conhecida. (Maclaurin, 1748, pág. 85) O autor não menciona problemas que envolvam apenas o quadrado da quantidade desconhecida como uma equação quadrática; esse tipo de problema é abordado nas regras de resolução de equações simples, especificamente naquela sobre extração de raízes.

A resolução de equações quadráticas é apresentada a partir de uma regra geral, ainda que de maneira retórica, que nada mais é do que a ideia de completar quadrados. A partir dela, ele aborda o seguinte exemplo:

Suppoſe $y^2+ay=b$

Add the Square of $\frac{a}{2}$ to both Sides . . . $y^2+ay+\frac{a^2}{4}=b+\frac{a^2}{4}$

Extract the Root, $y+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{b+\frac{a^2}{4}}$

Tranſpoſe $\frac{a}{2}$, $y=\pm\sqrt{b+\frac{a^2}{4}}-\frac{a}{2}$.

FIgura (47): O primeiro exemplo de equação quadrática apresentado por MacLaurin (MacLaurin, 1748, p. 86)

A primeira coisa a ser notada é que MacLaurin não faz como os demais autores, e não organiza as equações quadráticas em casos, nem mesmo uma equação geral. O exemplo acima foi apenas para explicitar as regras de resolução, e ele não a chama de equação geral ou algo do tipo. De fato, o autor logo depois apresenta alguns outros exemplos com coeficientes algébricos de sinais diferentes, o que mostra que *a* e *b* não são coeficientes independentes dos sinais da equação, como os de Saunderson. MacLaurin, por exemplo, resolve a equação quadrática $y^2 - ay = b$, cuja solução é dada por $\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$. O exemplo não foi feito para mostrar que trata-se de outro "tipo", mas apenas que, quando a raiz dentro de uma solução —no caso $\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$— não é exata, podemos aproximá-la através de seu método de aproximação de raízes. Ao comentar sobre os casos em que as soluções são impossíveis, isto é, imaginárias, MacLaurin poderia simplesmente dizer que isso aconteceria quando b fosse negativo e que $-(b) > \frac{a^2}{4}$, de modo a termos uma regra geral para tal ocorrência. Contudo, MacLaurin aborda o problema com um exemplo específico e mesmo este é construído de maneira que a qualidade do coeficiente a (se é positivo ou negativo) não seja de relevância:

Example, ſuppoſe

$y^2-ay+3a^2=0$

then $y^2-ay=-3a^2$

add $\frac{a^2}{4}$ to both, $y^2-ay+\frac{a^2}{4}=-3a^2+\frac{a^2}{4}=$

$=-\frac{11a^2}{4}$

extract the Root, $y-\frac{a}{2}=\pm\sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$

and $y=\frac{a}{2}\pm\sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$.

whence the two Values of y muſt be imaginary or impoſſible, becauſe the Root of $-\frac{11a^2}{4}$ cannot poſſibly be aſſigned.

Figura (48): Exemplo apresentado para mostrar a ocorrência de raízes impossíveis (MacLaurin, 1748, p. 87)

Dessa maneira, vemos aqui um desvio de MacLaurin com relação aos outros, ao não sistematizar as equações quadráticas em diferentes casos. Quanto à natureza das raízes, MacLaurin tampouco tem problemas com soluções negativas. Logo após seu primeiro exemplo, o autor diz que “a raiz quadrada de qualquer quantidade , como $+aa$ pode ser $+a$ ou $-a$; e logo toda equação quadrática admite duas soluções” (MacLaurin, 1748, pp. 86) . Os problemas que o autor resolve posteriormente comprovam:

EXAMPLE II.

To find a Number from the Cube of which if you subtract 19, and multiply the Remainder by that Cube, the Product shall be 216.

Call the Number required x, and then, by the Question,

$$\overline{x^3-19}\times x^3=216$$

$$x^6-19x^3=216$$

Put $x^3=z \ldots x^6=z^2$, **and it will be**

$$z^2-19z+\frac{361}{4}=216+\frac{361}{4}=\frac{1225}{4}$$

and $\sqrt{\ } \ldots z-\frac{19}{2}=\pm\frac{35}{2}$

whence $z=\frac{19\pm35}{2}=27$ **or** $=-8$.

but $x=\sqrt[3]{z}$, **wherefore** $x=+3$ **or** -2.

Figura (49): exemplo de problema que recai em um equação quadrática (MacLaurin, 1748, p. 93).

As raízes imaginárias, por sua vez, são novamente abordadas depois, na seção que aborda a chamada “regra de Newton”, sem perderem o status de soluções imaginárias ou impossíveis.

11.3 Conclusão

A concepção de Maclaurin para quantidade a considera sob duas características: a sua quantidade e a sua qualidade. Em última análise, essa concepção não difere muito daquela de Saunderson, que considerava que as quantidades de sinal positivo tinham efeito contrário nas operações se comparadas às que possuem sinal -. MacLaurin destaca que quantidades negativas são tão reais quanto as positivas, mas a sua definição para elas transmite a ideia de decrescimento, de modo que elas são de fato, quantidades subtrativas. A sua equação do segundo grau mostra que o autor não a sistematizou em diferentes formas, ou definiu uma equação geral, como fizeram os autores anteriores. Por conta disso, ele também não estabelece uma fórmula para as raízes, com a qual seria possível simplesmente substituir os valores dados em um problema para resolvê-lo. Quanto às raízes, ele reconhece as raízes negativas normalmente, enquanto ignora as "impossíveis".

12 O Sinal Negativo de Francis Maseres

12.1 Francis Maseres

Nascido em Londres, Francis Maseres é filho de uma família de franceses protestantes que haviam sido forçados a fugir da França devido à perseguição religiosa que sucedeu a revogação do Édito de Nantes. No ano de 1752, tornou-se bacharel de artes em Clare College, Cambridge, com as mais altas honrarias em matemática. Algum tempo depois, ele passou alguns anos praticando direito sem muito sucesso, até ser indicado procurador geral por Quebec[66], posto em que serviu até o ano de 1769. Quando retornou à Inglaterra, foi indicado como *Cursitor Baron of the Exchequer*[67], um respeitável cargo da corte inglesa, o qual ele serviu até a sua morte em 1824.

Sua carreira foi marcada por forte interesse em questões políticas, em particular em questões sobre o Canadá e colônias americanas. Outra peculiaridade da longa carreira de Maseres foram as suas contribuições matemáticas, marcadas por uma rejeição à álgebra e um preconceito contra "quantidades negativas e impossíveis". Curiosamente, Maseres acabou influenciado o ensino de álgebra por algumas décadas com sua aritmética, e provavelmente seu maior legado consiste de publicações em que ele tenta trazer a matemática a um público maior, seja através de obras originais ou reimpressões de obras anteriores. Uma de suas primeiras obras, *Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra* foi publicada em 1758 (Schaaf, 1970, n.p), e constitui uma verdadeira declaração contra o uso de quantidades negativas na álgebra. A ela nos direcionamos agora, a fim de entender esse novo tipo de movimento que começa a surgir na álgebra inglesa.

12.2 Dissertação sobre o uso do sinal negativo na álgebra

O livro de Maseres trata-se de um documento em defesa de uma novo tratamento à álgebra, mais alinhada ao método geométrico dos antigos, os quais, conjectura Maseres:

> … nos deixaram com ótimos livros excelentes de geometria, escritos com o máximo de elegância e precisão, mas nada sobre álgebra; por meio dos quais, os escritores modernos, tendo sido cuidados para tratar a primeira ciência com perspicuidade e elegância, mas foram informais e imprecisos em suas maneiras de tratar a última. (Maseres, 1756, p. ii)[68]

[66] Uma das províncias do Canadá.
[67] Um dos juízes da corte Inglesa conhecida como a *Exchequer of Pleas.*
[68] …..the ancients have left us several excellent books of Geometry, written with the utmost elegance and accuracy, but nothing concerning Algebra; by which means, the modern writers having these excellent models before them, have been careful to treat the former science with perspicuity and elegance, but have been loose and inaccurate in their manner of treating the latter.

Maseres visa estabelecer a álgebra como uma ciência de demonstração certa, como se considerava que a geometria e a aritmética eram, cujas bases eram entendidas como sendo auto-evidentes. Tal mudança de perspectiva na álgebra toma foco na discussão sobre o papel do sinal de negação e das quantidades negativas na álgebra. Sobre elas, Maseres começa a obra já estabelecendo:

> A ideia mais clara que pode, como apreendo, ser formada de uma quantidade negativa é aquela de uma quantidade que é subtraída de outra maior do que si mesma (Maseres, 1756, p. 1).[69]

Esta definição, portanto, já marca uma clara separação com relação aos autores anteriores. A quantidade negativa agora é apenas uma quantidade que é subtraída de uma outra quantidade maior do que ela. Maseres transmite que as quantidades negativas não existem como um "inteiro", mas sim como o que consideramos uma quantidade positiva sendo subtraída de uma outra quantidade positiva. Ele ainda deixa bem claro: para uma soma $a + b$, a pode ser maior ou menor do que b, mas se b for subtraído de a; b precisa ser menor do que a.

Os sinais de + e - existem no contexto da operação de subtração, isto é não faz sentido o número -2 ou +2 para Maseres, tampouco a operação $-2 + 3$, apesar de esta resultar em 1, que é positivo, uma vez que o sinal – precedendo o 2 indica que este número deveria estar sendo subtraído de um outro número precedente. Aqui vemos que Maseres é ainda mais restritivo do que Simpson, pois esse permitia que equações fossem encabeçadas por quantidades subtrativas. Em suma, os sinais de – e + possuem um único significado para Maseres: as operações de subtração e soma. A ideia de afirmação e negação, por sua vez, sequer existe. A passagem, além de exibir isso, mostra como ele se preocupa que as suas expressões simbólicas transmitam ideias concretas (Maseres, 1758, p.1-2).

> Logo, é evidente uma quantidade simples nunca pode ser marcada com nenhum dos sinais, ou considerada afirmativa ou negativa; pois se qualquer quantidade simples, como b, é marcada com o sinal + ou o sinal - sem designar uma outra quantidade, como a, à qual ela deve ser somada ou da qual ela deve ser subtraída, o símbolo terá sentido nenhum ou significado; dessa forma, se for dito que o quadrado de -5 ou o produto de -5 por -5 é igual a $+25$, uma afirmação dessas deve significar não mais que 5 vezes 5 é igual a 5, sem qualquer consideração com os sinais, ou deve ser apenas loucura e jargão ininteligível (Maseres, 1758, p. 2).

Sua proposta portanto é que o simbolismo algébrico passe a transmitir ideias reais; uma qualidade a qual as representações da geometria dos antigos possuiria, enquanto à álgebra moderna lhe faltava. De fato, seu apreço pelo método geométrico dos antigos é expresso inúmeras vezes e, de fato, sua intenção era conceber uma álgebra com metodologia semelhante. Em um dado momento, o autor alega que o quinto livro de Euclides apresenta provas para proposições algébricas, uma vez que procedem inteiramente de raciocínios sobre a magnitude e proporção das quantidades consideradas, sem qualquer consideração por suas posições ou outras propriedades particulares. (Maseres, 1758, p. 8) Dessa forma, a

[69] The clearest idea that can, as I apprehend, be formed of a negative quantity is that of a quantity that is subtracted from another greater than itself.

particularidade da grandeza geométrica em questão é abstraída, e Maseres defende que desse modo, as provas euclidianas nesse instante são algébricas, ou diferem de uma prova algébrica "apenas em notação". E é precisamente nesse sentido que a álgebra possui algum valor para Maseres: servir de linguagem, assim como a escrita ou os desenhos geométricos, para ideias necessariamente concretas.

As primeiras proposições de Maseres tratam de questões como a distributividade na soma e subtração, e a comutatividade. Para realizar essas provas, Maseres utiliza-se de alguns princípios que são pontualmente mencionados, e ditos evidentes. Um exemplo é o princípio que diz que se a duas quantidades desiguais c e $a - b$, a quantidade b for adicionada, o excesso de $c + b$ sobre a, ou a quantidade $c + b - a$, será igual ao excesso de c sobre $a - b$". As proposições ficam, portanto, demonstradas tendo em vista uma interpretação numérica para as letras.

Após a demonstração da distributividade para a subtração, i.e,

$$m(a-b) = ma - mb$$

Maseres expande a ideia para mostrar o resultado de multiplicações com distribuições envolvendo somas e subtrações:

$$(p-q + r - s + t)(a - b +d - e +f) \qquad (*)$$

Nesse momento, ele aproveita para discutir a relação do resultado com aquilo que o que demais autores chamam de regra dos sinais, ao mesmo estilo de Simpson. Na álgebra de Maseres, como vimos, sequer faz sentido discutir se $(-5)(+5) = +25$ ou -25, uma vez que os sinais somente fazem sentido dentro de uma operação de soma ou subtração entre mais de uma quantidade. Os termos +5 e –5 inexistem, só existe o "5". Portanto, qualquer associação dessa regra, que envolve quantidades compostas sendo operadas, com quantidades negativas puras, não faz sentido. (Maseres, 1758, p. 12)

A discussão central para mostrar sua diferente concepção de álgebra, contudo, toma posição na parte sobre equações quadráticas. Segundo Maseres, toda equação quadrática pode ser simplificada nas três formas “usuais”:

(i) $xx + px = r$

(ii) $xx - px = r$

(iii) $px - xx = r$

As equações (i) e (ii) são sempre possíveis e possuem uma única solução, enquanto que a (iii) somente é possível se r for menor ou igual a $\frac{pp}{4}$. Essas afirmações são demonstradas por Maseres por meio da teoria dos incrementos que ele aborda logo antes, e que basicamente fundamenta todo o resto do livro. Como podemos perceber também, sua notação para quantidades conhecidas e desconhecidas, além de potências, também preserva aquela de Descartes.

Em seu comentário a respeito das quantidades de raízes que as equações quadráticas apresentam para outros autores, Maseres aponta que o fato de as equações do tipo (i) alegadamente possuírem duas soluções parte do princípio de que "consideram-se duas equações como se fossem apenas uma." Por exemplo, um problema que gere equação:

$$xx+2x = 15$$

teria como soluções +3 e –5 Isso, segundo Maseres acontece porque se consideram as 2 equações *xx + 2x = 15* e *xx - 2x = 15*. Como podemos perceber, se considerarmos soluções negativas, vemos que a raiz negativa do caso (i) constitui a solução positiva do caso (ii) e vice-versa. Logo, como Maseres interpreta *-5* como sendo *5*, considerar a solução *-5* na equação (i) constitui o erro de mesclar a equação *xx + 2x = 15*, cuja única raiz verdadeira seria +3, e , *xx - 2x = 15*, essa sim tendo raíz +5.

‘ Sua explicação para essa unificação de equações parte da ideia de que, substituindo –5 por *x* em *xx + 2x = 15*, temos *25-15=10*, que seria na realidade uma equação da segunda forma. De modo geral, substituindo a solução negativa de (i) , isto é, $\frac{-\sqrt{pp+4r}-p}{2}$ – que é largamente considerada pelos demais autores – por *x* na equação geral $xx+px=r$, obtemos uma equação do tipo (ii):

$$\frac{pp+4r+pp+2p\sqrt{pp+4r}}{4} - p \times \frac{\sqrt{pp+4r}+p}{2} = r$$

Ou seja, o que ele faz é substituir o valor negativo na equação (i), e supor válidas as operações usuais com elas. O produto *xx* resultará em um positivo, enquanto o produto *px* resultaria em um termo negativo, mas Maseres “reinterpreta” o sinal negativo, que passa a se tornar o sinal de subtração da equação. Em termos modernos, supondo a raíz negativa *-b*:

$$(-b)(-b) + p(-b) = r$$

Como *p* é positivo, o produto *p(-b)* é igual ao negativo (*-pb*) :

$$b^2 + (-pb) = r$$

Agora, reinterpretando o sinal negativo da quantidade negativa *-pb*, ele conclui que:

$$b^2 - pb = r$$

Ou seja, como ele tacitamente transpõe o sinal de - para o sentido subtrativo da equação, ele conclui que o que encontramos na verdade foi que b é solução de uma equação da forma (ii), pois $b^2 - pb = r$ significa que *b* é raiz de *xx - px = r*.

Maseres segue então com uma prolongada crítica a essa prática de mesclar equações. Segundo ele, unificar equações, gerando soluções duplas, algumas sendo negativas, constitui uma confusão. O autor alega que é por conta disso que alguns problemas, ao serem escritos em formas algébricas, geram soluções para além daquelas que satisfazem o que o enunciado pretendia que fosse achado. Qualquer desvio dessa regra demonstra um método obscuro para Maseres, um excesso de premissas na expressão algébrica. O simbolismo algébrico nada mais é do que uma linguagem em símbolos que substitui uma proposição na linguagem verbal, e logo não deve incluir informações que vão além dela:

> O número de respostas que respondem a um problemas que produzem uma quadrática, ou a qualquer outra equação, irá admitir será sempre igual ao número de raízes pertencentes à equação produzida por ela, exceto os casos em que algumas das condições do problema não estão expressos na equação... se, na resolução de uma equação produzida por um problema duas equações são unidas e consideradas como

uma, não é surpresa que uma das raízes não possui conexão com o problema proposto, mas pertence a outro bem diferente desse (Maseres, 1758, p. 29).[70]

> Essa conexão entre o problema e a equação produzida por eles é, como foi observado antes, quase auto-evidente, ou pode ser deduzida ao considerarmos o que significa um problema e a equação produzida por ele; pois uma equação produzida por um problema (se ele expressa todas as condições do problema), é uma proposição expressando em símbolos, ou a linguagem da álgebra, exatamente as mesmas ideias, suposições, e questões que estão expressas no problema em palavras, ou linguagem comum (Maseres, 1758, p. 33,34).

Desse modo, quando reconhecidas as raízes negativas dos casos (i) e (ii), a tradução do problema para uma equação causa uma "generalização exagerada", um dos riscos que ele cita para o uso indiscriminado da poderosa ferramenta da linguagem algébrica. A ocorrência de soluções duplas em algumas ocasiões do tipo (iii), por sua vez, não recai nesse mesmo tipo de problema. Nesse caso, o que ocorre é que falta informação; a linguagem algébrica não consegue contemplar toda informação contida no problema, de modo que sua regra fica preservada. Vejamos um exemplo tirado do livro de Saunderson, onde Maseres mostra a união de duas equações do caso (i) e (ii):

> O 74º problema, que concerne bovinos, evidentemente admite uma única resposta; e, de acordo, a equação $xx + 4x = 320$ admite apenas uma raiz, que é 16; pois, a somando 4 a ambos lados da equação, temos $xx + 4x + 4 = 324$; logo $x+2 = 18$, e $x=16$. Se raízes negativas forem admitidas, hemos de ter $x+2 = +18$ ou -18, e $x=16$ ou -20: mas o último desses números é na realidade a raiz da equação $xx - 4x = 320$; que é bem diferente do primeiro, e pertence a um problema bem diferente; pois, se $xx - 4x = 320$, hemos de ter $xx-4x + 4 = 324$, donde $x - 2 = 18$, e $x = 20$ (Maseres, 1758, p. 30).

Essa antipatia pela ideia de que um método possa resultar em soluções além daquela buscada revela o "foco no específico" que a álgebra deve ter para ele, assim como tem a geometria antiga. Maseres não identifica o simbolismo algébrico como uma ferramenta generalizante e capaz de resolver "problemas idênticos", como colocavam os autores anteriores, mas sim como uma tradução simbólica de uma proposição específica; um problema específico.

De fato, a expressão "foco no específico" foi a mesma utilizada por Hankel para caracterizar o método sintético, e podemos ver nessa dissertação a mesma postura. Maseres resolve problemas algébricos de uma maneira não muito diferente daquelas como os gregos resolviam os geométricos:

> Para cada caso diferente possível em relação à posição das linhas dadas e procuradas em um problema, haverá um problema ou teorema específico para o geômetra grego; e os maiores matemáticos da antiguidade consideravam necessário, em seus escritos, investigar todos os casos concebíveis, muitas vezes bastante numerosos de forma independente uns dos outros, e com igual detalhe e precisão. Por exemplo, o famoso livro de Apolônio περί λόγου ἀποτομῇ (de sectione rationis),

[70] ...the number of answers a problem that produces a quadratic, or indeed any other equation, will admit of, is always equal to the number of roots belonging to the equation produced by it, exception those cases only in which some of the conditions of the problem are not expressed in the equation.

investiga um problema idêntico em cerca de 80 casos diferentes apenas pela situação (Hankel, 1875, p. 2).[71]

Diretamente de sua concepção sintética, podemos concluir especificamente o porquê de Maseres precisar enumerar as equações quadráticas em casos distintos que precisam ser resolvidos separadamente. Nos autores que vimos anteriormente, pudemos perceber que a mesma separação ocorria muito mais por conta de uma dificuldade de distinção entre o duplo significado do sinal - nas expressões algébricas; mas essa mesma causa não pode se apresentar aqui, pois Maseres atribui bem o significado único de subtração para esse sinal, sendo que isso constituiu o próprio objetivo da obra. Aqui, essas equações acabam representando mais do que casos diferentes, mas sim problemas diferentes e, como sugeriu Hankel, "para cada caso, um teorema". Ele jamais poderia derivar uma equação geral como a de Saunderson pois isto implicaria um método para encontrar a solução de vários problemas de uma vez, uma generalização à qual a álgebra não deveria se propor, assim como a geometria. Na álgebra de Maseres, encontramos pela primeira vez um fundamentalismo proibitivo da prática de generalizar resultados. A passagem a seguir mostra sua concepção de maneira inequívoca.

> Esse método de unir duas equações diferentes pode talvez parecer ter seu uso; mas, eu confesso, eu não consigo vê-lo: pelo contrário, deveria parecer que perspicuidade e precisão requeiram que duas equações, ou proposições, que são em suas naturezas diferentes uma da outra, e são resultados de condições e suposições diferentes, deveriam ser cuidadosamente distinguidas uma da outra, e tratadas separadamente, cada uma por si, como vem sob consideração. (Maseres, 1756, p. 29) [72]

E, por conta disso que ele acusa Saunderson de "perder sua perspicuidade" ao tentar resolver equações quadráticas, cúbicas e biquadráticas, onde soluções negativas se fazem presentes. (Maseres, 1758, p. 34)

> Era pra ser desejado, dessa forma, que raízes negativas nunca tivessem sido admitidas na álgebra, ou fossem novamente descartadas dela: pois se isso fosse feito, há uma boa razão de imaginar, que as objeções que muitos homens cultos e engenhosos fazem às computações algébricas, como sendo obscuras e complexas com noções quase ininteligíveis, seriam dessa forma removidas; tornando certo que a

[71] So viele in Bezug auf die Lage der gegebenen und gesuchten Linien unterscheidbare Fälle in einer Aufgabe möglich sind, so viele gesonderte Probleme oder Theoreme sind fürr den griechischen Geometer vorhanden, und die grossten Mathematiker des Alterthums haben es für nothwendig gehalten, in ihren Schriften die sämmtlichen denkbaren, oft sehr zahlreichen Fälle von einander unabhängig, und mit gleicher Ausführlichkeit und Genauigkeit zu untersuchen. So behandelt z. B. des Apollonius berühmte Schrift (des sectione rationis) eine unddieselbe Aufgabe in etwa 80 nur durch die Lage verschiedenen Fällen.

[72] This method of uniting together two different equations may perhaps have its uses; but, I must confess, I cannot see them: on the contrary, it should seem that perspicuity and accuracy require, that two equations, or propositions, that are in their nature different from each other, and are the results of different conditions and suppositions, should be carefully distinguished from each other, and treated of separately, each by itself, as it comes under consideration.

> álgebra, ou aritmética universal é, em sua própria natureza, uma ciência não menos simples, clara e capaz de demonstração do que a geometria (Maseres, 1758, p. 34).[73]

Esta última passagem nos mostra como todo problema da álgebra é, em última instância, atrelada à consideração das quantidades negativas, as quais não podem ser concebidas a partir da percepção humana; um problema que teria surgido a partir da abstração dos símbolos da álgebra, enquanto a geometria por natureza sempre preserva sua clareza e evidência.

12.3 Conclusão

Maseres tenta aqui apresentar a álgebra de maneira sintética, inspirado pelo objetivo de livrar a ciência de ideias que não sejam intuitivas, como quantidades negativas, comumente entendidas como sendo "menores do que nada". Segundo ele é por conta da consideração dessas que a linguagem algébrica foge de seu escopo por permitir generalizações impertinentes e exageradas. Dessa maneira, a sua crítica assume um tom mais profundo do que aquela de Simpson, não se limitando às concepções específicas de número negativo, mas estendendo-se para o conceito geral de álgebra: essa linguagem, para ele, deve servir ao específico, apenas substituindo uma proposição real da linguagem verbal e suas condições, o que marca uma clara ruptura com as concepções anteriores, as quais identificavam a álgebra pelo método analítico e seu poder generalizante. No caso das equações quadráticas, por exemplo, a consideração de raízes negativas no caso $xx+px=r$ significaria a sua resolução conjunta com a equação $xx - px = r$, o que constitui um erro por contemplar informações além daquelas contidas na expressão dos problemas. Dessa forma, vemos em Maseres uma crítica inédito na prática de obter generalizações de resultados na álgebra.

[73] It were to be wished therefore that negative roots had never been admitted into algebra, or were again discarded from it: for if this were done, there is good reason to imagine, that the objections which many learned and ingenious men now make to algebraic computations, as being obscure and perplexed with almost unintelligible notions, would be thereby removed; it being certain that algebra, or universal arithmetic, is, in its own nature, a science no less simple, clear, and capable of demonstration, than geometry.

13 A álgebra de William Frend

13.1 William Frend

William Frend nasceu em 1757 em Canterburry, Inglaterra, filho de George Frend, um comerciante e duas vezes prefeito da cidade. William estudou na tradicional *King's School* até 1771. Como seu pai o pretendia na área de negócios, William foi depois enviado à comuna francesa de Saint-Omer para aprender o francês. Posteriormente, foi enviado a Quebec, Canadá, onde, pelo pouco tempo em que lá permaneceu, voluntariou-se nas tensões políticas que se tinham com as colônias americanas. (William, 1889, l.20)

Após retornar à sua casa, Frend veio a se formar pelo Christ`s College, Cambridge, em 1780, e depois foi para Jesus College, onde veio a ser *fellow* e tutor. No ano de 1780, Frend tornou-se diácono na igreja anglicana e avançou depois ao sacerdócio em 1783. Contudo, em 1787, ele largou a igreja anglicana e passou a seguir o unitarianismo. Frend foi banido de Cambridge em 1793 tanto por conta de sua nova visão religiosa quanto por suas visões políticas radicais, as quais ele expressou na obra *Peace and Union Recommended to the Associated Bodies of Republicans and AntiRepublicans (Paz e União Recomendada aos Corpos Associados dos Republicanos e Antirepublicanos).* Além de unitariano, Frend era também um *Whig* convicto.

Após sua expulsão de Cambridge por heresia, Frend lançou seu *Principles of Algebra*, em 1796, onde tornou pública mais uma forma de rejeição ao pensamento dominante de Cambridge, dessa vez como um opositor dos números negativos. (Pycior, 1982, p. 396) Essa oposição provavelmente surgiu sob influência das ideias trazidas por Maseres: Frend refere-se a ele como "o restaurador da álgebra" (Frend, 1796, p. viii), e um longo apêndice de sua autoria é incluído no tratado algébrico, onde são abordadas as regras de Cardano.

13.2 The Principles of Algebra

O prefácio não deixa dúvidas que Frend tinha um objetivo pedagógico com esta obra. Ele começa apresentando uma metodologia minuciosa para o aprendizado de matemática para jovens estudantes. De acordo com ele, a álgebra que é apresentada pela maioria dos autores contém uma série de obscuridades que precisam ser sanadas. Seu maior problema encontra-se no uso de quantidades negativas, e Frend ataca as associações que são feitas a realidades como dívidas, além da definição estabelecida de "menor do que nada". Estes são aspectos que vimos em quase todos os demais autores mas, aqui, Frend se dirige especificamente à álgebra de MacLaurin.

> Números lá são divididos em positivos e negativos, e uma tentativa de explicar a natureza dos negativos é feita, por meio de alusões a dívidas e outras

partes. Agora, quando uma pessoa não consegue explicar os princípios de uma ciência sem referência a metáforas, a probabilidade é que ele nunca pensou com precisão sobre o assunto....tentar tirar um número de um menor do que ele mesmo é ridículo. Mas isso é tentado por alguns algebristas, que falam de números menores do que nada, de multiplicar negativos com negativos, assim produzindo um número positivo, de números imaginários (Frend, 1796, p. x).[74]

Frend considera que essas noções corrompem o significado de número que, segundo ele, é "a mais clara e mais distinta da mente humana" (Frend, 1796, p. ix); A álgebra, por sua vez, depende da clareza desse conceito para que possa ser fundamentada sob bases também claras. Somente assim, diz Frend, os alunos deixarão de ter tanta dificuldade com o assunto.

Na solução de equações de segunda ordem, ele verá em quais casos as duas raízes podem ser descobertas numa equação ilimitada, e dessas duas raízes, qual é aplicável à questão particular. Ele verá que não há dificuldade na mudança de sinais na soma subtração, multiplicação e divisão, pois isto resulta da natureza dos termos compostos. Ele não mais irá se importar com raízes negativas de uma equação, já que esse tipo de coisa não pode existir numa equação, e se uma raíz impossível vier a surgir na conclusão, ele irá atribuí-la a um erro em seu raciocínio ou a uma premissa falsa (Frend, 1796, p. *xi-xii*).[75]

A passagem acima novamente nos demonstra que ideias como a de subtrair quantidades negativas ou a regra dos sinais da multiplicação constituíam obstáculos conceituais comuns. Sua preocupação em clarear a álgebra dessas dificuldades é bem vista quando ele estabelece o significado do simbolismo algébrico de maneira similar a Maseres, porém de maneira ainda mais didática: cada equação precisa ser transparente em significado, no sentido que ela possa ser diretamente traduzida em palavras, símbolo por símbolo. A fim de ensinar essas traduções da álgebra para linguagem verbal, ele então apresenta os termos que cada símbolo representa:

Para + diga soma; para - tomar (isto é, retirar); para × "into" (ou seja, multiplicado por); para ÷ por (isto é, dividido por)... (Frend, 1796, p. 4).[76]

Dessa forma, ele é capaz de traduzir uma equação para a sua língua. Por exemplo, a equação:

---

[74] Numbers are there divided into two sorts, positive and negative; and an attempt is made to explain the nature of negative numbers, by allusion to book-debts and other arts. Now, when a person cannot explain the principles of a science without reference to metaphor, the probability is, that he has never thought accurately upon the subject….but to attempt to take it away from a number less than itself is ridiculous. Yet this is attempted by algebraists, who talk of a number less than nothing, of multiplying a negative number into a negative number and thus producing a positive number, of a number being imaginary.

[75] In the solution of equations of the second order, he will see in what cases two roots may be discovered in an unlimited equation, and, of these two roots, which is applicable to his particular question. He will see, that there is no difficulty in the change of marks in adding, subtracting, multiplying and dividing, as it necessarily results from the nature of the compound term. He will no longer trouble himself with the number of negative roots in an equation, as there cannot be such things in an equation; and if there should be an impossible root in the conclusion, he will impute it to the proper cause, either to an error in his mode of reasoning, or to false premisses.

[76] For + say add; for - take (that is take away); for x into (that is, multiply into); for ÷ by (that is, divide by)...

$$a - b + c \times \frac{d}{e} = f \backsim g$$

Figura (50): Equação traduzida em palavras por Frend. (Frend, 1796, p. 4)

Pode ser lida como "de *a* tome *b*, some c multiplicado por *d* por *e*, e isso é igual a diferença de *f* e *g"*. (Frend, 1796, p. 4)

O sinal da diferença $\backsim$ que vemos acima é particularmente revelador por mostrar a sua preocupação de que toda expressão faça sentido:

> $\backsim$ é o sinal da diferença: $a \backsim b$ significa a diferença dos dois números *a* e *b*, que serão *a - b* ou *b - a*, respectivamente se *a* é maior ou menor do que *b.* (Frend, 1796, p. 4)

Ou seja, por ter definido que *a-b* significa "*b* tomado de *a",* mas necessariamente quando *a* é maior do que *b*, ele precisa estabelecer um sinal para a ocasião em que precisa-se expressar a diferença entre duas quantidades, sem que se saiba qual delas é a maior. Dessa maneira, mesmo quando falta uma informação relevante numa proposição que se pretende traduzir para a álgebra, ele ainda assim consegue transmiti-la sem cair em absurdos.

Dessa sua definição para o sinal - em termos verbais, fica claro também que não há quantidades negativas, mas sim quantidades "as quais tomamos de outras". Não podemos escrever *-b* isolado pois isso não pode ser traduzido em palavras. É preciso que *b* tome de outra quantidade, e que essa seja maior do que *b*. Portanto, as quantidades subtrativas existem em meio a expressões como *a - b* ou *a + b - d* . Além disso, é claro, essa restrição faz com que Frend não permita que se faça como Simpson, que colocava quantidades negativas puras ao longo de equações:

> Novamente, escrever $-b \times c - a = -f$ não é apenas impróprio mas também absurdo, como se vê ao tentar lê-la (Frend, 1796, p. 5).[77]

Portanto, os sinais ficam dissociados das ideias de afirmação/negação assim como ocorreu com Maseres, e passam a representar as palavras "somar" e "subtrair" (Frend, 1796, p. 3). Uma interpretação direta disso é que as quantidades não "possuem" mais sinais, como Kersey, Wallis e outros colocavam, pois estes representam relações entre quantidades e não propriedades delas.

A partir de suas traduções literais, Frend então parte para "demonstrar" as operações fundamentais da álgebra. Assim como fez Simpson, elas ficam fundadas a partir de uma interpretação aritmética e intuitiva, onde as quantidades simplesmente representam números positivos. A diferença é que, aqui, em nenhum momento é trazida qualquer analogia em que a quantidade seja associada a dinheiros ou objetos quaisquer. Como vimos acima, Frend é contrário à ideia de que se tenha que depender de analogias e exemplos para explicar ideias fundamentais. Estas devem ser explicadas exclusivamente a partir dos claros conceitos da

[77] Again, to write thus $b \times c - a = -f$, is not only improper, but absurd, as will be seen by attempting to read it.

álgebra. No exemplo a seguir, ele explica a ideia de subtrair quantidades compostas que possuem um sinal de subtração de maneira semelhante a Simpson:

- Subtrair $(a-2b)$ de $(a-b)$ resulta em $2a\ +b\ +2b$

Explicação: Ao tirarmos a, o resultado é $2a+b$, mas ao fazermos isso, um número maior do que a questão demanda é retirado, uma vez que apenas a diferença entre a e $2b$ deveria ter sido retirada. O resultado, dessa forma, é menor do que deveria ser, pela quantidade $2b$, que deve ser somada para dar o verdadeiro resultado $2a+b+2b$ (Frend, 1796, p. 11).

A ideia anterior é aproveitada para explicar também o caso de subtrairmos dois termos compostos, ambos possuindo subtrações dentro deles.

- Subtrair *(2a - 2b)* de *(3a - 4b)* resulta em *a - 2b*

Explicação: "Ao tirarmos $2a-2b$ de $3a$, obtemos o resultado $a+2b$; mas o número do qual o outro deveria ter sido retirado não era $3a$, mas sim $3a-4b$; dessa forma, $4b$ ainda deve ser retirado do resto de $3a$, após a primeira retirada, para dar o resultado verdadeiro." (Frend, 1796, p. 12)

É notável, porém, que Frend mostra o cuidado de tratar casos como do exemplo "retirar $5a-9b-6c$ de $9a-13b+5c$". Ao reunirmos os termos, obtemos $4a\ -13b\ +9b\ +11c$ onde teriamos que subtrair o termo *13b* de *9b* de mesma natureza, algo impossível, uma vez que a quantidade subtraída deve ser menor do que aquela que ela subtrai. Para resolver isso, Frend coloca da seguinte forma:

> ... mas, como *13b* pode ser considerado como consistindo de duas partes, *9b* e *4b*, podemos escrever os nossos termos dessa forma, *4a - 9b - 4b +11c + 9b*; e agora, retirando *9b* de *9b*, resta a soma verdadeira *4a - 4b +11c* (Frend, 1796, p. 13).

Na multiplicação, Frend não tenta fazer associação alguma à regra dos sinais. Ele acaba demonstrando cada caso de acordo com os sinais de quantidades binomiais. Veja o que ele diz sobre a operação de multiplicar $a-b$ *por* $a+2b$: "o termo que surge da multiplicação $b\times 2b$ deve permanecer no produto a ser retirado, uma vez que o termo estava a ser retirado no termo composto $a-b$" (Frend, 1796, p. 18)

$$\begin{array}{rl} \text{Mult.} & a - b \\ \text{into} & a + 2b \\ \hline a\text{'s prod.} & a^2 - ab \\ 2b\text{'s prod.} & \quad + 2ab - 2b^2 \\ \hline \text{Prod.} & a^2 + \ ab - 2b^2. \end{array}$$

Figura (51): exemplo de produto de quantidades compostas. (Frend, 1796, p. 18)

Para o caso de haver uma subtração no multiplicador, Frend dá o exemplo $a+b \times a-b$, e traz uma explicação mais detalhada: “Sabemos que $a+b \times a = a^2 + ab$. porém, isso é demais, uma vez que estamos multiplicando $a+b$ por um número menor que a, diferindo do mesmo por b. Dessa forma, devemos tirar b, $a+b$ vezes para obtermos o real produto.” (Frend, 1796, p. 19)

Logo em seguida, Frende resolve exemplos envolvendo produtos entre termos compostos, ambos contendo subtrações como $a-b \times a-b$. Nesse caso, o autor não explicita o seu raciocínio, mas $a-b \times b = ab - b^2$ e, de acordo com o raciocínio colocado anteriormente, como o termo b está subtraindo no multiplicador, subtraímos $ab - b^2$ do resultado. (Frend, 1796, p. 20)

Mult.	$a - b$
into	$a - b$
from *a*'s prod.	$a^2 - ab$
take *b*'s prod.	$ab - b^2$
Prod.	$a^2 - 2ab + b^2$.

Figura (52): multiplicação de quantidades compostas contendo sinal subtrativo (Frend, 1796, p. 20)

Para a divisão, Frend apresenta as regras para cortar termos comuns do numerador e divisor, a simplificação de números, a partir da divisão do numerador e divisor por fatores comuns, e também mostra como dividir termos compostos por outros termos compostos.

Após as operações básicas, Frend parte para a resolução de equações. Sua definição de equação reitera a sua ideia de que elas são apenas frases reescritas na linguagem simbólica da álgebra:

> Uma equação é uma sentença em caráteres algébricos, expressando a igualdade de dois termos.A proposição *8+3* é igual a *11*, é uma equação, e é dessa maneira escrita, *8 + 3 = 11* (Frend, 1796, p. 29).

Para transformá-las, Frend diz que há 4 princípios “inegáveis” (Frend, 1796, p. 30) dos quais a resolução depende, os quais não diferem das noções comuns de Euclides:

1. “Se números iguais são somados a números iguais, as somas são iguais”

Se $a+d=b+c$

então, $a+d+e=b+c+e$

Ou, se $3+5=8$, então $3+5+7=8+3+4$

2. "Se números iguais são tirados de números iguais, o resto é igual”

Se $a+b=c+d$, tire c de um lado e f, seu igual, do outro. $a+b-e=c+d-f$

$6+4=10$, tire 7 da esquerda e $5+2$ da direita, e obtemos $6+4-7=10-5-2$

3. "Números iguais multiplicados por números iguais resultam em números iguais."

Se $a=b$ e $c=d$, então $ac=bd$

4. "números iguais divididos por números iguais resultam em quocientes iguais."

Se $a=b$, e $c=d$, então $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

Se $12+36 = 48$, como $6=4+2$, $\frac{12}{6}+\frac{36}{6}=\frac{48}{4+2}$ (Frend, 1796, p. 30-31)

Frend diz que os princípios são feitos para "libertar" a quantidade desconhecida de todos os outros números, de modo que o desconhecido fica de um lado da equação, e os números conhecidos, do outro. A partir desses princípios ele deriva os métodos para isolar a incógnita. Mais uma vez demonstrando que sua álgebra precisa ser legível, ele sugere que cada equação em seus procedimentos precisam ter um significado quando consideradas em si: "na equação $a+2x = x+b$, se transpormos os termos na forma $a-b = x-2x$, obtemos uma equação absurda pois $x<2x$. O certo seria $2x-x = b-a$".

> Sempre que, em um lado de uma equação um número está a ser retirado de um menor do que ele, o erro está ou na pessoa que o propôs ou naquele que tentou resolver a equação proposta (Frend 1796, p. 39).[78]

Sendo assim, fica reiterado que a prática de Simpson de usar quantidades negativas em equações como ferramentas intermediárias é condenada por Frend.

Com relação às equações quadráticas Frend estabelece as seguintes quatro formas às quais qualquer uma pode ser reduzida. (Frend, 1796, p. 100)

I. $x^2=b$

II. $x^2+ax=b$

III. $ax-x^2=b$

IV. $x^2-ax=b$

Frend descobre as raízes como Maseres, ainda que sem seguir com uma demonstração em termos de incrementos. A forma 1 pode ser resolvida diretamente, extraindo-se a raiz quadrada de ambos lados da equação, enquanto as demais possuem apenas as soluções positivas :

II. $x = \sqrt{b+\frac{a^2}{4}}-\frac{a}{2}$ (Frend, 1796, p. 104-105)

III. $x=\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}+\frac{a}{2}$ (Frend, 1796, p. 106)

IV. $x= \sqrt{\frac{a^2}{4}-b}+\frac{a}{2}$ e $x=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$

---

[78] Wherever, on one side of an equation, a number is to be taken from one less than itself, the error is either in the person who proposed, or in him who attempted to solve the proposed equation.

Em seguida, ele naturalmente estabelece as condições para que essas soluções façam sentido na linguagem comum, isto é, não sejam negativas nem imaginárias. No quarto caso por exemplo, torna-se necessário que $\frac{a^2}{4}$ seja maior do que *b*.

Da mesma forma que vimos em Maseres, aqui, cada uma das quatro formas ficam abordadas como problemas separados. Ele, por exemplo, nem mesmo observa que o caso 1 poderia ser interpretado como um caso específico da forma II, na ocasião de o coeficiente *a* ser nulo. A diferença é que Frend não apresenta um discurso como Maseres, no sentido de associar soluções negativas como uma uma mistura das formas; e o mesmo silêncio se aplica à dupla solução no caso IV. Contudo, é perceptível que a separação dos 4 casos emana dos mesmos princípios da dissertação de seu antecessor: as equações precisam transmitir uma proposição razoável e específica, de modo que não há lugar para generalizações como a equação geral de Saunderson. Daí podemos novamente fazer alusão àquilo que Hankel disse sobre o foco no específico que caracteriza o sintetismo dos geômetras gregos. Os dois autores, assim, ficam associados não simplesmente pelo fato de rejeitarem as quantidades negativas, mas sim pelo fato de essa rejeição ser explicada por uma caracterização sintética da álgebra. E esse sintetismo, como podemos ver mais uma vez aqui, fica explícito principalmente na necessidade de desmembrar as equações quadráticas nos casos (II,) (III) e (IV), o mesmo acontecendo com as cúbicas que, aqui, contabilizam 14 tipos distintos.

Após a abordagem das equações biquadráticas também, o livro apresenta uma série de apêndices, dentre os quais temos as regras de Cardano apresentadas por Maseres. Depois desses apêndices, Frend finaliza o livro com a parte II, onde podemos ver mais indícios de seu sintetismo algébrico. Aqui, ele tenta refutar a estabelecida teoria das equações e substituí-la pela sua "verdadeira forma." (Frend, 1796, capa [parteII]) Segundo ele, por exemplo, o teorema fundamental que diz que toda equação admite tantas soluções quanto for o maior índice de *x* é absurdo, pois assim estamos contabilizando raízes negativas e imaginárias. Por conta disso, torna-se também errado assumir que toda equação possa ser fatorada em binômios como os de Harriot, onde aparece a raíz de sinal trocado. Na passagem abaixo, ele critica que, da fatoração de uma equação na forma $(x+a)(x+a+b)$, se conclua que um número negativo $c = a+b$ seja raiz dela; um artifício que fica comparado às coisas inusitadas e complicadas vistas na região de *Balnibarbi* em *As viagens de Gulliver.*

> Apesar de ser correto que, na instância acima, onde $(x + a)(x +a + b)$ produz a equação dada, $a+b$ é somado a x, mas por uma ficção estranha, foi suposto que $a+b$ é tomado de x, e que $a + b$ é igual a um número c, a ser chamado ou de negativo ou de um número impossível. A natureza desses números fictícios agora se tornaram objeto de questionamento, e, em vez de buscar as raízes da equação, mesmo homens importantes, imitando os filósofos de uma região bem conhecida que estavam extraindo raios de sol de pepinos, desperdiçaram o óleo da meia-noite de maneira igualmente lucrativa, ao estabelecerem os direitos e privilégios de quantidades impossíveis. (Frend, 1796, p. ix-*x* [parte II])[79]

[79] Though it is certain that in the instance above, where $(x+a)(x+a+b)$ produces the given equation, $a+b$ is added to x, yet by a strange fiction it was to be supposed that $a+b$ is taken from x, and that $a+b$ is equal to a number c, to be called either a negative or an impossible number. The nature of these fictitious numbers now

Assim, todas as imprecisões da teoria de equações da álgebra tradicional decorrem diretamente do fato de que soluções impossíveis ficam sendo consideradas. De acordo com Frend, isso é fruto do ”desejo natural do homem” em querer universalizar resultados. Existe sim uma “teoria verdadeira de equações”, este é de fato o nome da parte II do livro, mas isso não significa uma “teoria geral de equações”. Mais uma vez, portanto, as falas de Hankel são evocadas, e a prova evidente do método sintético vem logo a seguir: a teoria divide as equações em uma série de classes distintas a serem tratadas em separado.

> Dessa maneira, do desejo natural do homem em chegar o mais rápido possível à conclusão geral, o pensamento se sugeriu por si, que todas as equações poderiam ser produzidas por uma multiplicação de termos complexos similares, e que a analogia que havia sido observada entre copartes[80]e raízes de certas equações deveria ser estendida em geral a todas as equações. (Frend, 1796, p. *viii* [parte III])[81]

13.3 Conclusão

Com essa obra, fica claro que William Frend pretendia propagar a mesma mentalidade de oposição aos números negativos exposta por Maseres, dessa vez, de uma maneira mais didática e preocupada em estabelecer os princípios gerais da álgebra. Uma noção que acaba se tornando basilar nesses autores é que a álgebra deve ser uma linguagem que traduz uma proposição concreta e, especificamente em Frend, cada símbolo fica minuciosamente associado a um termo. Por conta disso, práticas vistas em Simpson de permitir que equações possuam quantidades negativas isoladas são consideradas erradas. Isso, por sua vez, acontece porque -*a* nada significa, uma vez que os sinais representam relações entre quantidades e não possuem a segunda função de caracterizar quantidades. Diante disso, as quantidades também não são afirmações nem negações aqui, mas simplesmente quantidades. Marcadamente, Frend se mostrou opositor das analogias que vimos anteriormente para, de certa forma, legitimar ou explicar quantidades negativas. Para ele, a álgebra deveria estar ancorada na ideia “clara” de número, o que não permite noções consideradas obscuras como algo “menor do que nada” ou raízes destas. Naturalmente, suas equações quadráticas e cúbicas são separadas em uma série de formas, das quais apenas são admitidas as raízes positivas (apesar de ele não usar esse termo, por acreditar que números são simplesmente números, e não são nem positivos nem negativos, assim como Maseres).

---

became an object of inquiry, and, instead of searching after the roots of an equation, even grave men, imitating the philosophers of a well-known region, who were extracting sun-beams from cucumbers, wasted the midnight oil just as profitably in settling the rights and privileges of impossible quantities.

[80] Termo utilizado por Frend para se referir a coeficientes de uma variável.

[81]Hence, from the natural desire of mankind to come as soon as possible to a general conclusion, the thought suggested itself, that all equations might be produced by a multiplication of similar complex terms, and that the analogy which had been observed between the coparts and roots of certain equations might be extended in general to all equations.

14 Charles Hutton e a álgebra na RMA

Neste capítulo iremos olhar para mais um professor da Royal Military Academy de Woolwich: Charles Hutton. Sua publicação matemática, que bem reflete a prática dentro da academia militar, nos ajudará a perceber o uso da álgebra dentro de um contexto diferente.

14.1 Charles Hutton

Charles Hutton foi um matemático e agrimensor. Nascido em 1737 em Newcastle, Inglaterra, Hutton sofreu um acidente aos sete anos enquanto brigava com outras crianças, e teve seu cotovelo deslocado. Por conta dessa lesão, o jovem Hutton acabou por não seguir os passos de seus irmãos e de seu pai e padrasto nos trabalhos braçais na mina de carvão local, e foi enviado a uma escola em Jesmond para aprender a ler e escrever. (HUTTON, CHARLES..., 2008)

Na escola Hutton obteve grande sucesso, e posteriormente, começou a estudar matemática na escola de *Mr. James*, em Newcastle. Trabalhando de maneira majoritariamente autodidata, Hutton conseguiu adquirir conhecimento suficiente em matemática para se estabelecer e abrir uma escola de matemática em Newcastle, mas ele também dava aulas na escola secundária principal de Newcastle. Hutton ainda tinha uma série de alunos particulares de donos de terras locais, o que o ajudou muito a crescer em sua carreira. Uma de suas alunas, inclusive, veio a se tornar sua esposa futuramente. (HUTTON, CHARLES..., 2008)

Hutton publicou seu primeiro livro-texto em 1764, intitulado *The Schoolmaster's Guide or a Complete System of Practical Arithmetic* (O Guia do instrutor ou um Sistema Completo de Aritmética Prática). Posteriormente, Hutton também se tornou agrimensor, e realizou um levantamento de terra localmente em 1770. Alguns anos antes, em 1767, ele também havia escrito um elaborado tratado sobre mensuração. (HUTTON, CHARLES..., 2008)

Como dissemos no capítulo sobre Simpson, as escolas militares na época eram marcadas por uma matemática de caráter aplicado e, por conta disso, Hutton teve larga vantagem diante da concorrência, quando um exame público foi realizado para preencher o posto de professor de matemática da RMA, no ano de 1773. Um ano após ingressar na RMA, Charles Hutton foi eleito à Royal Society, e serviu como secretário estrangeiro de 1779 a 1783. Após publicar *The force of Fired Gunpowder and the Velocities of Cannon Balls* em 1778, recebeu a *Coupley Medal* da Royal Society, a medalha que premia conquistas excepcionais em pesquisa em qualquer área da ciência. No período em que ensinou na RMA, Hutton trouxe uma série de contribuições para a matemática, geralmente com obras que tinham mais enfoque na prática e utilidade do que na originalidade. Sua obra mais conhecida talvez seja *The Mathematical And Philosophical Dictionary*, de dois volumes. publicado em 1795, que inclui uma série de biografias de matemática. De fato, essa obra é uma contribuição pioneira para a história da matemática. (HUTTON, CHARLES..., 2008)

Já bem estabelecido e inspirado por anos de experiência dando aulas na RMA, e também sob forte influência dos livros e abordagens predominantes na academia, Hutton escreveu posteriormente *A course of mathematics for cadets of the Royal Military Academy* (Um Curso de matemática para cadetes na Academia Militar Real)*,* um livro-texto que foi pela primeira vez publicado em 1798. (Hutton, 1798, iii) O autor se aposentou das salas de aulas no ano de 1807, e faleceu no ano de 1823. (HUTTON, CHARLES..., 2008)

14.2 A Course of Mathematics

Escrito especificamente para os alunos da Academia de Woolwich, Hutton deixa claro no prefácio do livro que a obra possui enfoque nas aplicações, e rejeita o que ele chama de "especulações":

> … coletar e organizar os mais úteis princípios em uma forma conveniente e prática, demonstrá-las de uma forma direta e concisa, e ilustrá-los com exemplos apropriados; rejeitando qualquer que possa parecer apenas questão de mera curiosidade; e manter apenas aquelas partes e ramos que tiverem uma tendência direta e aplicação a algum propósito útil na vida, especialmente na profissão militar, a qual os senhores educados nessa Academia almejam (Hutton, 1798, p. iv).

Ao longo do livro, cada seção é terminada com uma série de problemas contextualizados na prática, e de um modo geral, grande parte dos problemas tem seus dados em termos de coisas como dinheiro, pesos, medidas, etc. É interessante perceber que o livro de Hutton é um dos grandes exemplos na nova tendência de livros didáticos incluírem listas de exercícios para os leitores resolverem, para além dos problemas que são resolvidos pelo próprio autor. Esses problemas requerem que o leitor seja capaz de interpretar o problema e modelá-lo, em contraste com problemas precedentes, mais introdutórios, em que deve-se apenas resolver questões como operações ou equações dadas.

A obra é subdividida em aritmética, álgebra e geometria, sendo subdividida nessa ordem. Aqui, daremos destaque à seção de álgebra, que traz boa parte dos problemas abordados na aritmética de volta, agora tratados de maneira generalizada através das quantidades algébricas conhecidas e desconhecidas. Apesar disso, ele ainda assim reconhece a relação estreita entre as duas, ao definir a álgebra remetendo à maneira de Newton: "a arte de computar por meio de símbolos, um tipo geral de aritmética, ou uma maneira universal de computar."

Com relação à notação, vemos que Hutton também não escapa do padrão, e utiliza principalmente as letras iniciais do alfabeto para representar quantidades conhecidas, e as últimas letras, x, y, z, u, etc., para as desconhecidas. A diferença é que aqui já não vemos mais as representações do tipo aa ou xx para potências de segundo grau. (Hutton, 1798, p. 161)

A definição que Hutton dá a quantidades positivas e negativas também remete às operações, apesar de ele fazer como MacLaurin, e reconhecer as quantidades negativas de maneira isolada mesmo assim:

> Quantidades positivas são aquelas que são a serem adicionadas, ou possuem o sinal +. Como a ou $+a$...Quantidades negativas são aquelas que são a serem subtraídas. Como $-a$, ou $-2ab$, ou $-3ab^2$ (Hutton, 1798, p. 163).[82]

Hutton segue o texto explicando as operações dentro da álgebra, a começar pela adição.

Caso 1. Quando os as quantidades são de mesmo tipo, e têm sinais iguais:

> Primeiramente, escreva o sinal comum; após o qual, escreva a soma dos coeficientes, encontrado por meio da adição destes; ao qual anexe a letra ou letras comuns da quantidade de mesmo tipo. Dessa forma, "$3a$ somado a $5a$ dá $8a$. E $-2ab$ somado a $-7ab$ dá $-9ab$. E $5a+7b$ somado a $7a+3b$ dá $12a+10b$.

Caso 2. Quando as quantidades são iguais mas possuem sinais desiguais.

> Some todos os coeficientes positivos em uma soma, e todos os negativos em uma outra. Subtraia a menor dessas somas da maior, e à essa diferença prefixe o sinal do maior e adicione a quantidade comum. Então, $+5a$ e $-3a$, unidos, fazem $+2a$. E $-5a$ e $+3a$, unidos, fazem $-2a$.

Caso 3. Quando quantidades são de tipos diferentes.

> Tendo coletado todas as quantidades de mesmo tipo, como nos casos anteriores, escreva aquelas que são diferentes, uma após a outra, com seus respectivos sinais." (Hutton, 1798, p. 165-169)

No rodapé desses casos, Hutton traz uma tentativa de fundamentar essas operações, e aqui podemos ver novamente a recorrência a analogias. Hutton explica que termos com as mesmas letras representam quantidades similares, sejam elas quilos de carne, segundos, centímetros, bolas, ou o que for. Por isso, "no primeiro exemplo, onde as quantidades são $3a$ e $5a$, o que quer que a represente no primeiro termo ($3a$) será a mesma coisa no outro ($5a$), então 3 vezes qualquer coisa e cinco vezes essa mesma coisa, juntas, deve totalizar 8 vezes essa mesma coisa. Se a denotar um shilling, então $3a$ é 3 shilling, $5a$ é 5 shillings, e a soma será 8 *shillings*. Da mesma forma, $-2ab$ e $-7ab$, ou -2 vezes qualquer coisa e -7 vezes essa mesma coisa, juntos somam -9 vezes essa coisa… Com relação ao terceiro caso, onde as quantidades são de coisas diferentes, é claro que estas não podem ser unidas em uma só, a ao ser que por meio de seus sinais: desse modo, por exemplo, se a representar uma coroa, e b, um shilling, então a soma de a e b não pode ser nem $2a$ nem $2b$, ou seja, nem 2 coroas, nem 2 shillings, mas apenas uma coroa mais um shilling, isto é, $a+b$." (Hutton, 1798, p. 166)

Hutton ainda afirma que nessa última regra a palavra "soma" não é propriamente usada, e diz que a ideia dessa operação é a "incorporação de diferentes quantidades algébricas em uma única massa, ou expressão algébrica". Nos exemplos presentes nos casos acima, podemos ver que quantidades negativas sendo utilizadas fora do contexto da operação de subtração e são aparentemente tratadas como quantidades em si. Contudo, Hutton demonstra

[82] Positive or Affirmative Quantities are those which are to be added or have the sign +. As *a* or +*a*, or *ab*: for when the quantity is found without a sign, it is understood to be positive, or to have the sign + prefixed.

certa distância com relação a essa visão. Segundo Hutton, “pode parecer um paradoxo, que o que é chamado adição na álgebra pode algumas vezes significar uma adição, e algumas vezes uma subtração. Mas o paradoxo só surge por uma falta de nome dado ao processo algébrico; pelo emprego de um termo antigo em um novo e mais amplo sentido.” (Hutton, 1798, pg. 166) Essa visão se aproxima daquela exposta por Condillac no mesmo ano que a obra de Hutton, e também com o que o francês Nicolas Chuquet expunha em 1498. Hutton provavelmente se refere ao fato de que podermos somar quantidades negativas com positivas; operação que pode ser interpretada como uma subtração, ou mesmo somar quantidades negativas, resultando em quantidades negativas. Essas operações não fazem sentido no escopo da aritmética de Hutton. A dúvida surge da dificuldade em dissociar quantidades negativas da ideia de subtração, mesmo estas sendo utilizadas fora de contextos operatórios, como vemos em resultados nos casos acima. O fato de Hutton ter chamado tal situação de paradoxal também nos faz assumir que o autor tenta associar esse tipo de operação a exemplos tangíveis e práticos.

Na mesma estrutura da soma, a subtração algébrica é em seguida apresentada, segundo uma única regra: “escrever em uma linha as primeiras quantidades a partir das quais a subtração é para ser feita, e abaixo delas, colocar todas as outras quantidades compondo o subtraendo; colocando quantidades de mesmo tipo uma abaixo da outra, como na adição. Então, mude todos os sinais da linha inferior ou considere-os como mudados, após isso, junte os termos exatamente como na adição.” (Hutton, 1798, p.170) No rodapé, Hutton traz uma explicação nos moldes daquelas que vimos em MacLaurin e Saunderson, isto é, assumindo uma ideia de contrariedade da soma e subtração:

> De modo que unir uma quantidade negativa com uma positiva tem o efeito de diminuí-la, ou subtrair dela uma quantidade positiva igual, logo subtrair uma quantidade positiva (que é o oposto de somar ou unir) é o mesmo que adicionar uma quantidade negativa igual. Da mesma forma, subtrair uma quantidade negativa é o mesmo que somar ou unir uma quantidade positiva igual (Hutton, 1798, p. 170)[83]

A multiplicação também é dividida em três casos, sendo o primeiro o da multiplicação entre duas quantidades simples. Quando multiplicamos uma quantidade por outra, Hutton diz que devemos multiplicar os coeficientes dos dois termos, e afixar no produto todas as letras nesses termos. Com relação aos sinais, ele oferece uma demonstração semelhante à de MacLaurin, porém mais rápida por conta de ele assumir que a comutatividade da multiplicação também vale com quantidades negativas:

Quando $+a$ é multiplicado por $+b$, isso implica $+a$ deve ser tomado tantas vezes quanto há unidades em b, e como a soma de qualquer número de termos positivos é positivo, segue que $+a \times +b$ resulta em $+ab$...Quando $-a$ multiplica $-b$: aqui, $-a$ precisa ser subtraído tantas vezes quanto há unidades em b: mas subtrair negativos é o mesmo que adicionar positivos, pela oposição entre a soma e subtração; consequentemente o produto é $+ab$ (Hutton, 1798, p. 172).

---

[83] So that, since to unite a negative quantity with a positive one of the same kind has the effect of diminishing it, or subducting an equal positive one from it, therefore to subtract a positive (which is the opposite of uniting or adding) is to add the equal negative quantity. In like manner, to subtract a negative quantity, is the same in effect as to add or unite an equal positive one.

Mas Hutton ainda oferece uma demonstração algébrica alternativa para o produto entre quantidades subtrativas. Nela, é perceptível que ele precisa assumir que vale que $a \times - b =- ab$:

> Uma vez que $a - a = 0$, então $(a - a) \times - b = 0$ também, pois 0 multiplicado por qualquer quantidade é ainda 0 ; e já que primeiro termo do produto , $a \times - b$ é igual a $- ab$ pelo segundo caso, então o último termo do produto, $- a \times - b$ deve ser $+ ab$ para tornar a soma $= 0$, ou $- ab + ab = 0$, isto é, $- a \times - b =+ ab$ (Hutton, 1798, p.172).

O segundo caso refere-se a quando um dos termos é composto, no qual a quantidade simples irá multiplicar cada termo da quantidade composta como no caso 1. Já o terceiro caso ocorre quando ambas quantidades são compostas, no qual cada quantidade do multiplicador multiplica cada quantidade do multiplicando como no caso 1, respeitando os sinais.

Com relação à divisão algébrica, vale apontar que Hutton deixa claro que o objeto fração, além de poder ser considerada como uma expressão de uma parte ou partes de um todo, também representa uma operação de divisão entre o numerador e o divisor, sendo esta a operação a inversa da multiplicação. Assim como na multiplicação, na divisão, vale que "dividir sinais iguais resulta em +, e dividir sinais diferentes resulta em –." (Hutton, 1798,175) Como o divisor multiplicado pelo quociente deve resultar no dividendo, a explicação para a propriedade dos sinais da divisão segue diretamente da prova feita na multiplicação.

Ao falar da "evolução" (*evolution*), ou extração de raízes de termos algébricos, Hutton ressalta que qualquer raiz de índice par de uma quantidade positiva poderá ser tanto positiva quanto negativa. Hutton diz que: "a raiz quadrada de $+ a^2$ é $+ a$ ou $- a$ uma vez que $+ a \times + a =+ a^2$, e $- a \times - a = + a^2$. Daí, Hutton ainda deduz que a raiz de índice par de quantidades negativas é impossível. Quando o índice for ímpar, a raiz de qualquer quantidade será única e terá o mesmo sinal da própria quantidade.

> Dessa forma, a raiz cúbica de $+ a^3$ é $+ a$ e a raíz cúbica de $- a^3$ é $- a$, uma vez que $+ a \times + a \times + a =+ a^3$, e $- a \times - a \times - a =- a^3$. (Hutton, 1798, p. 192)

Posteriormente, Hutton finalmente fala sobre a resolução de equações, primeiramente abordando equações simples. Em seguida, o autor apresenta sete regras para a redução. Para Hutton, as regras também são fundadas em princípios gerais auto-evidentes, ou seja, "realizar operações iguais em quantidades iguais, quando é evidente que os resultados devem ainda ser iguais, seja por adições iguais, ou subtrações, ou multiplicações, ou divisões, ou raízes, ou potências.

As equações quadráticas são abordadas logo em seguida, e o as divide em três formas:

1. $x^2 + ax = b$
2. $x^2 - ax = b$
3. $x^2 - ax =- b$

Podemos ver que esses tratam-se dos casos usuais, com a diferença de que a terceira equação fica multiplicada por *-1.* Hutton apresenta uma regra geral de maneira retórica e não algébrica, assim como MacLaurin. O método consiste do completamento de quadrados, e aproveitaremos para deixar aqui os seus quatro passos:

1.Transponha todos os termos que envolvem a quantidade desconhecida para um lado da equação , e os termos conhecidos para o outro, e deixe-os arranjados de acordo com suas dimensões, como nas 3 formas acima.

2. Quando o quadrado da quantidade desconhecida tiver qualquer coeficiente prefixado a ele, divida todos os termos por esse coeficiente; o que transforma a equação a uma das três formas acima.

3. Então, complete o lado da quantidade desconhecida da seguinte maneira: Tome a metade do coeficiente do segundo termo e eleve-o ao quadrado, e some esse quadrado a ambos os lados da equação, então o lado que envolve a quantidade desconhecida será um quadrado completo.

4. Extraia a raiz quadrada de ambos os lados da equação, e o valor da quantidade desconhecida estará determinado, como foi requerido, tornando a raiz do lado conhecido ou + ou -, o que dará duas raízes da equação ou dos valores da equação desconhecida. (Hutton, 1798, p. 238-239)

Dessa forma, ele acaba resolvendo as equações completando quadrados em vez de substituir valores em uma forma geral. Ainda assim, ele deriva fórmula das raízes a fim de estudar os seus sinais. Hutton percebe, por exemplo, a ocorrência de raízes negativas na terceira forma, além da ocorrência de raízes imaginárias, as quais ele chama também de impossíveis:

> Se b for maior do que $\frac{1}{4}a^2$, a solução da questão proposta será impossível. Afinal, uma vez que o quadrado de qualquer quantidade (seja ela negativa ou positiva) é sempre positiva, a raiz quadrada de uma quantidade negativa é impossível, e não pode ser caracterizada. Mas se b for maior do que $\frac{1}{4}a^2$, então $\frac{1}{4}a^2 - b$ é uma quantidade negativa; e logo $\sqrt{\frac{1}{4a^2} - b}$ é impossível, ou imaginário; consequentemente, nesse caso, $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4a^2} - b}$, ou as duas raízes ou valores de x, são ambos impossíveis, ou imaginários.(Hutton, 1798, p.240)

A seguir temos um exemplo da maneira como Hutton resolve uma equação quadrática:

Dado que $3x^2 - 3x + 6 = 5\frac{1}{3};$ encontre x.

Aqui, $x^2 - x + 2 = 1\frac{7}{9},$ ao dividirmos por 3,

E $x^2 - x = 1\frac{7}{9} - 2$ pela transposição;

Também, $x^2 - x + \frac{1}{4} = 1\frac{7}{9} - 2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{36}$, pelo completamento de quadrado.

Dessa forma, $x - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{36}} = \pm\frac{1}{6}$ por meio da evolução;

Logo, $x = \pm\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\ ou \frac{1}{3}.$ (Hutton, 1798, 241)

Depois, o autor aborda as equações de graus acima de 2 de maneira conjunta. Para resolver qualquer equação não trivial de grau 3 ou maior, o autor utiliza a regra da dupla posição, um método de tentativa e erro que na verdade resulta em uma aproximação para as raízes da equação. Hutton diz que "há muitas regras particulares e prolixas para resolver alguns casos de equações de grau maior que dois. Mas elas todas podem ser facilmente resolvidas pela seguinte regra fácil de Dupla posição, algumas vezes chamada de tentativa e erro." (HUTTON, 1798, 248)[84].

Essa passagem mostra como sua preocupação não está em derivar resultados algébricos gerais, mas sim em resolver problemas, de modo que aproximações suficientemente boas bastam. O autor não apresenta qualquer método associado ao de Cardano para a cúbica. Em uma nota, porém, Hutton relaciona o grau da equação ao número de soluções por meio do teorema geral:

> Toda equação possui tantas raízes quanto contiver dimensões. Ou seja, a equação simples possui uma raíz, a equação quadrática possui dois valores ou raízes, uma cúbica possui três raízes, uma biquadrática possui quatro raízes e assim por diante. (Hutton, 1798, p. 250)[85]

Podemos assumir, pela forma como o autor tratou das equações quadráticas, que ao contabilizar as raízes de equações de várias dimensões, o autor inclui aquelas consideradas "impossíveis" ou "imaginárias", mas o autor não discute mais sobre a generalidade da regra.

[84] There are many particular, and prolix rules, usually given for the resolution of some of the above-mentioned powers or equations. But they may be all easily resolved by the following easy rule of Double Position, sometimes called Trial-and-Error.

[85] Every equation has as many roots as it contains dimensions, or as there are units in the index of its highest power. That is, a simple equation has only one value of the root; but a quadratic equation has two values or roots, a cubic equation has three roots, a biquadratic equation has four roots, and so on.

15 A Resposta de Robert Woodhouse à crítica aos Negativos

15.1 Resposta à crítica de Francis Maseres e William Frend e o estado da álgebra na Inglaterra na virada do século

Como vimos anteriormente, a investigação das incertezas presentes nos fundamentos da álgebra acabou dando origem a uma concepção limitante no sistema desenvolvido por Francis Maseres e William Frend. Com eles, o que se chama de álgebra é na verdade um sistema onde as expressões representam ideias substanciais específicas, e as quantidades são estritamente concretas positivas. A álgebra deveria se preocupar menos em generalizar resultados, e tratar-se de uma linguagem que transmite uma proposição concreta e suas respectivas condições. Dentro desta epistemologia, torna-se impossível subtrair uma quantidade maior de outra menor, uma vez que os objetos precisam ser inteligíveis e, logo, não podem ser menores do que nada.

Em se tratando das quantidades negativas, a crítica dos dois parece ter surtido efeito no momento em que alguns pensadores britânicos concordaram que havia questões dubitáveis na fundamentação da álgebra. Uma figura que repercutiu as críticas de Maseres e Frend foi William Greenfield, um matemático amador e professor de retórica na Universidade de Edimburgo. Em seu discurso de 1784 diante da Royal Society de Edimburgo, Greenfield diz que:

> Uma reclamação permanece, a qual parece ser muito bem fundada, de que o método das quantidades negativas, assim como tem sido o caso com algumas outras regras da arte, é apoiado mais por indução e analogia do que por demonstração matemática...os contos demasiado vagos e insatisfatórios, e muitas vezes misteriosos da questão, os quais são dados por escritores da maior eminência, servem apenas para mostrar, que apesar de eles estarem satisfeitos com a certeza do método, eles ainda assim percebem que alguma coisa ainda permanece a ser explicada, e sobre a qual nenhuma boa explicação foi dada. (Greenfield apud Pycior, 1788, p.134-135).

Apesar do aparente reconhecimento que havia problemas fundamentais na álgebra, Greenfield encontrava-se relutante com a ideia de reduzir a álgebra a uma ciência de quantidades positivas, e lançou argumentações em defesa das quantidades negativas. O motivo para essa postura de conservação da álgebra era principalmente utilitário, uma vez que o sistema suscitado por Maseres limitava considerações práticas que a inclusão de quantidades negativas permitia. (Pycior, 1981, p. 29-30) Na falta de uma solução para a inquietação, Greenfield solicitou aos algebristas, incluindo Maseres, que “exercessem diligência e ingenuidade, confirmando em vez de destruindo; demonstrando até onde podemos depender do método de quantidades negativas e não derrubando de uma vez uma parte tão grande do labor dos algebristas modernos." (Greenfield apud Pycior, 1981, 136). Na Inglaterra, uma crítica de teor parecido veio de Robert Woodhouse, um graduado em Cambridge, apesar de este ir mais além, ao tentar refutar os argumentos disparados por Maseres e Frend contra os negativos. Antes de vermos a vida e obra deste autor, veremos o teor de sua crítica aos sintéticos.

15.2 A crítica de Robert Woodhouse de 1800

A crítica de Robert Woodhouse veio no ano de 1800, e encontra-se contida dentro de uma breve resenha dos *Princípios* de William Frend e do seu apêndice escrito por Maseres. Ao elencar algumas das falas que esses autores reproduziram contra as quantidades negativas, Woodhouse tenta mostrar as precipitações contidas nelas. Vejamos o que ele tem a dizer sobre a alegação de Maseres de que ele, assim como Frend, havia expurgado sua obra da "loucura e do absurdo" das quantidades negativas:

> Este tom e linguagem decisivo, nós acreditamos, pode apenas ser justificado por uma prova rigorosa do absurdo e inutilidade das quantidades negativas; uma prova pela qual buscamos em vão nas obras desses dois autores; já que não consideramos a questão resolvida porque não podemos conceber uma quantidade abstrata negativa, ou porque um matemático as definiu como sendo "menores do que nada", ou porque problemas podem ser resolvidos sem o auxílio delas (Woodhouse, 1800, p. 180).[86]

No trecho acima, Woodhouse defende que seria necessária uma demonstração formal de que as quantidades negativas são realmente absurdas ou inúteis para que pudessem ser de fato desconsideradas de maneira inquestionável. O fato de que alguns autores as definiram de maneiras imprecisas como "quantidades menores do que nada" tampouco devem compor um argumento suficiente, afinal, estas concepções erradas não são definitivas. Como ele coloca na subsequente análise dos *Princípios* de Frend:

> As concepções equivocadas de um ou dois autores, com relação a quantidades negativas, não constitui uma razão justa e suficiente para a exclusão deles; e muitos matemáticos distintos perseveraram em usar quantidades negativas em seus cálculos, depois de terem criticado as noções absurdas formadas deles (Woodhouse, 1800, p. 183).[87]

Ou seja, enquanto alguns autores desenvolveram concepções equivocadas, outros admitiram a incapacidade de conceber quantidades negativas, mas perseveraram em

[86] This decisive tone and language, we think, can only be justified by a strict proof of the absurdity and inutility of negative quantities; a proof for which we seek in vain in the works of these two authors; since we do not deem the question decided because we cannot conceive an abstract negative quantity, or because a mathematician has defined them to be "*nihilo minores,*" or because problems can be solved without their aid.
[87] The misconceptions of one or two authors, concerning negative quantities, constitute no just and sufficient reason for their exclusion; and many distinguished mathematicians have persevered in using negative quantities in their calculations, after they had animadverted on the absurd notions formed of them.

utilizá-las em seus cálculos. Esta utilidade prática que elas possuem, Woodhouse afirma, não precisa ser deixada de lado enquanto não houver uma demonstração de que elas são inúteis, algo que Frend nem Maseres teriam feito. Vemos, portanto, uma preocupação em conservação do modelo contemporâneo de se utilizar quantidades negativas, não por comodismo, mas porque faltam argumentos formais contra eles. No mais, suas últimas linhas mostram a sua batalha com a concepção de quantidades negativas abstraídas de ideias concretas, além de uma utilidade exclusivamente ferramental atribuída a elas.

> A verdadeira ideia das quantidades negativas, e a exposição da definição ininteligível dada a elas por alguns autores, não são de dias recentes; e não podem ser atribuídas àquela inundação de luz que foi derramada nos tempos modernos, dissipar as nuvens que ainda estão suspensas sobre a ciência humana. Nunca torturamos nossas mentes na concepção da ideia de quantidades negativas abstratas ou impossíveis, mas as consideramos como meios usados para encurtar e facilitar os cálculos. Até que uma prova clara e decisiva da inutilidade delas for exibida, devemos seguir o sistema antigo das coisas (Woodhouse, 1800, p. 183, 184)[88]

15.3 Robert Woodhouse e sua resposta ao texto de 1800

Woodhouse graduou-se no Caius College em Cambridge como Senior Wrangler em 1795 (Koppelman, online) e, logo em seguida, tornou-se fellow em dois colleges, trabalhando como tutor nelas até se tornar professor lucasiano em 1820 (Schubring, 2005, p. 426). Além disso, Woodhouse também exerceu por vários anos o cargo de moderador do Tripos, e tornou-se posteriormente professor Plumiano de Astronomia e filosofia experimental (Becher, 1980, p. 394). Na universidade, Woodhouse esforçou-se para "infiltrar" os avanços da análise matemática europeia, indo em contramão à ortodoxia sintética que ainda predominava em Cambridge. Entre suas bandeiras, podemos citar que ele defendia a notação diferencial continental, as funções derivadas de Lagrange, e a crença de que os fundamentos do cálculo deveriam ser esvaziados das teorias dos limite e das fluxões de Newton, além de quaisquer dispositivos externos como aqueles advindos da mecânica ou da geometria. (Becher, 1980, p. 395)

Dentro dessa linha, as sua ideias foram expostas na sua obra de 1803, intitulada *The Principles of Analytical Calculation,* tendo em vista a expansão da notação continental na universidade (Becher, 1980, p. 395) O livro em si não se trata de um tratado algébrico mas sim de uma teoria geral do cálculo e, uma vez que seu cálculo apresenta-se fundamentado nos princípios algébricos, seu livro traz no começo uma apresentação dos fundamentos da ciência a seu modo. Dentro de sua nova fundamentação, as quantidades negativas se tornam um assunto preponderante; enquanto seu texto de 1800 tentava invalidar o argumento de Frend e Maseres, o de 1803 visa estabelecer as quantidades negativas como sendo objetos legítimos

[88] The true idea of negative quantities, and the exposure of the unintelligible definition given of them by some authors, are not of late date; and cannot be attributed to that flood of light which has been poured on modern times, to dissipate the clouds that yet hang over human science. We have never tortured our minds to conceive the idea of abstract negative or impossible quantities, but have considered them as means used to abridge and facilitate calculation. Until a clear and decisive proof of their inutility be exhibited, we must follow the antient system of things...

da álgebra, segundo sua concepção de rigor. Essa abordagem nova ainda reflete aquilo que ele já havia exposto antes em uma memória de 1801 dirigida a matemáticos de Cambridge, intitulado *On the necessary truth of certain conclusions obtained by Means of Imaginary Quantities* (*Da verdade necessária de certas conclusões obtidas por meio de quantidades imaginárias*).

15.4 A matemática simbólica de Robert Woodhouse

As primeiras linhas de seus *Princípios* estabelecem o que formaria a base de sua análise:

> Os axiomas ou princípios auto-evidentes, como, quando quantidades iguais são somados a, ou subtraídos de quantidades iguais, as somas ou restos são iguais, etc, sendo reais em todas as ciências, formam em parte a base do cálculo analítico; desses o processo de dedução começa, e é expresso por caráteres arbitrários e suas combinações, o significado dos quais deve ser fixado por definição e convenção (Woodhouse, 1803, p. 1).[89]

A fim de melhor expor o que ele quis dizer com isso, Woodhouse volta a alguns princípios fundamentais da aritmética. Nesta ciência, os objetos principais são formados por "conjuntos de unidades", e são combinados segundo certas operações definidas em termos dessa natureza numérica dos objetos. Essas operações, por sua vez, podem ser expressas simbolicamente em termos mais gerais; uma espécie de simbolismo em que todos os caráteres representam uma quantidade não especificada de unidades:

> Em seus significados mais simples, os símbolos +, - e = denotam soma subtração e igualdade aritmética: dessa forma $a \pm b = c$ significa que se tantas unidades existentes em b forem somadas a ou subtraídas de tantas unidades quanto há em *a,* então a soma ou diferença será igual a tantas unidades quanto há em *c.* (Woodhouse, 1803, p. 1)

Tais significados intuitivos dos símbolos eram por sua vez usados para demonstrar algumas proposições. Uma delas era o princípio da transposição que, simbolicamente, diz que podemos passar um caráter para o outro lado de uma igualdade com seu sinal devidamente trocado. Contudo, dentro do contexto das definições aritméticas, existem certas condições pelas quais a transposição fica limitada. Para começar, necessitamos considerar uma equação em que os números subtraídos sejam maiores do que aqueles dos quais os subtraímos, de modo que a expressão

$$a - b = c$$

somente faz sentido se a for maior do que b ($a > b$). Dentro dessa condição, poderíamos somar *b* unidades a ambos lados da equação e concluir que

[89] The axioms or self-evident principles, such as, when equal quantities are added to, or subtracted from equal quantities, the sums, or remainders are equal, etc. being true in all sciences, form in part the base of Analytical Calculation; from these the process of deduction begins, and is expressed by arbitrary characters and their combinations, the meaning of which is to be fixed by definition and conventions.

$$a = c + b$$

Portanto, *simbolicamente*, o que ocorreu foi que b foi transposto para o outro lado da equação, com o sinal precedente trocado de - para +. A questão é que esta manipulação simbólica possui uma explicação concreta: consiste na verdade da soma de b unidades aos dois lados iguais da equação. Somente por conta deste significado aritmético que tal manipulação simbólica faz sentido, e este significado consiste da sua demonstração propriamente dita. Em outras palavras, a regra é determinada pelo significado dos símbolos. Não faz sentido, portanto, dizer que, pelo princípio de transposição, poderíamos deduzir que se pode transpor *a e c,* deduzindo que:

$$-a = - b - c$$

uma vez que o símbolo $-a$ seria destituído de significado concreto. Afinal, de acordo com a definição do símbolo -, de que quantidade estamos subtraindo a unidades? Foi esta a mesma reclamação que Maseres e Frend tiveram com expressões desse tipo, que encontravam-se presentes nos demais livros de álgebra aqui apresentados. Assim, a transposição fica limitada pelo fato de que os sinais possuem um significado concreto que deve ser respeitado.

As regras "arbitrárias" da álgebra

Diferentemente dos algebristas sintéticos, porém, Woodhouse não se prende a equações estritamente dotadas de significado concreto. Dados os devidos enunciados, ele permite então ultrapassar os limites simbólicos do arranjo considerado antes.

> Mas ele [o princípio da transposição] anunciaria mais, se ela ordenasse que as quantidades fossem transferidas de um lado da equação para o outro, mudando os sinais + -, pois então por esta regra, poder-se-ia deduzir $- c - b = -a,$ uma proposição ininteligível, e que de princípios evidentes e inferência estrita, nunca poderia ter sido obtida: Se então, pelo bem da comodidade no cálculo, tal regra for estabelecida, ela é parcialmente arbitrária, e supõe alguma convenção prévia, e as equações como $-c - b= -a$ devem ser entendidas por meio de suas equações equivalentes $c + b = a$ para os quais pela operação da mesma regra eles podem sempre ser reduzidas (Woodhouse, 1803, p. 2).[90]

Woodhouse, neste momento, generaliza o resultado simbólico que se depreende do princípio de transposição. Aquilo que antes era limitado pelo significado concreto da equação, agora, fica permitido. Podemos assim depreender, pela regra da transposição expandida, que $c + b = a$ implica $-c - b= -a$, uma equação desprovida de significado até então que, ao ser considerada, nos leva a considerar também o seu elemento $-b$.

Woodhouse parece não fazer nada de diferente com relação aos demais algebristas não sintéticos, mas há uma diferença na maneira como ele legitima esta proposição da

[90] ...but it would announce more, if it ordered quantities to be transferred, from one side of the equation to the other, changing the signs + -, for then by this rule, there might be deduced $-c -b = -a$, an unintelligible proposition, and which from evident principles and strict inference, could never have been obtained: If then for the sake of commodiousness in calculation, such a rule be laid down, it is partly arbitrary, and supposes some previous convention, and the equations such as $-c - b = -a$ are to be understood by means of their equivalent equations $c + b = a$ to which by the operation of the same rule they may always be reduced.

transposição. Enquanto os demais autores alegavam que a regra de transposição "generalizada" se originava de princípios auto-evidentes, mesmo incluindo quantidades negativas, ou a partir de regras de cuja origem não era explicitada, Woodhouse deixa claro que é logicamente impossível inferi-la a partir dos princípios usados na aritmética. A regra, na verdade, trata-se de uma convenção, uma verdade estabelecida pelo autor, tendo em vista alguma "comodidade de cálculo", e que não pode ser considerada verdadeira a partir de nenhuma definição aritmética. Neste ponto encontramos o cerne da argumentação de Woodhouse para legitimar as suas quantidades negativas e as operações com as mesmas, tendo sido esta a tese por ele defendida no seu comunicado de 1801.

> Convencido em minha própria mente que, não pode haver nem paradoxos nem mistérios inerentes e inexplicáveis em um sistema de caráteres de nossa própria invenção, e combinados de acordo com regras de cuja origem e alcance podemos certificar, eu busquei na presente memória, mostrar por que certas conclusões obtidas por meio de quantidades imaginárias são necessariamente verdadeiras: efetuá-lo é meu objetivo principal; um subordinado é mostrar que o método fundado em símbolos imaginários é espaçoso e próprio para ser adotado, por conta de sua fácil e extensiva aplicação. (Woodhouse, 1801, p. 93)[91]

Como ele coloca, o seu sistema algébrico fica entendido como um sistema de símbolos inventados com regras que podem ser tornadas certas. Aquela dependência dos símbolos de significados reais fica dissipada e a álgebra passaria a ser entendida como um sistema de manipulação arbitrária de símbolos. Veremos mais passagens que corroboram essa visão de álgebra mas, como já vimos na passagem anterior, o significado do símbolo é imaterial para garantir a sua veracidade, pois sua manipulação depende daquilo que nós inventamos.

A interpretação que se poderia ter disso é de uma álgebra que funciona como um jogo qualquer, o xadrez por exemplo, em que as regras não são originadas de algum tipo de verdade absoluta contida em suas peças mas, mesmo assim, podemos deduzir se alguma jogada é verdadeira ou não, tendo em vista as regras estabelecidas pelo seu inventor. Da mesma maneira que é inegável que o bispo se movimenta diagonalmente pelo tabuleiro porque assim estabeleceu o seu criador, é inegável também que podemos transpor letras de um lado para o outro de uma equação, trocando os sinais que os precedem, afinal, assim permitiu o seu criador. É por conta desta concepção epistemológica que ele diz no título do artigo que verdades obtidas por meio de quantidades imaginárias são "verdades necessárias".

Além disso, podemos agora demarcar uma característica importante sobre o processo de generalização da transposição, que encontra-se alinhada com essa concepção de álgebra: Tal extensão da regra é uma extensão sobre manipulação de símbolos, e não sobre uma extensão de operação. O novo objeto *-b* é obtido ao transportarmos o sinal de subtração para

[91] Convinced in my own mind, that there can be neither paradoxes nor mysteries inherent nd inexplicable in a system of characters of our own invention, and combined according to rules, the origin and extent of which we can precisely ascertain, I have endeavoured; in the present memoir, to shew why certain conclusions obtained through the means of imaginary quantities are necessarily true: to effect this is my prime object; a subordinate one is, to shew that the method founded on imaginary symbols is commodious, and proper to be adopted, because of easy and extensive application.

o outro lado da equação, degenerando seu significado original concreto. Pela descrição do processo em si, enxerga-se que ele é sobre símbolos e não sobre a natureza dos objetos algébricos ou sobre operações. O conceito de número, para Woodhouse, é imaterial na álgebra.

Na prática, já se percebe que o sistema de símbolos e as suas regras são, como ele diz, apenas "parcialmente arbitrários" quanto às suas origens: os sinais operacionais +, -, ×, ÷, etc, que são providos de significado aritmético e suas devidas limitações, são retidos no seu sistema. Teremos uma melhor noção dos motivos e consequências disso após vermos as regras de operações segundo Woodhouse. Além disso, enxerga-se em seu discurso que a busca por um significado nos símbolos não perde completamente a sua relevância: Woodhouse repetidas vezes argumenta que, apesar das equações que figuram quantidades negativas parecerem "absurdas" se consideradas de maneira abstrata, elas fazem perfeito sentido se comparadas a alguma equação equivalente a ela à qual podemos relacionar um significado real. Dessa maneira $-c-b=-a$ não é inteligível, mas pode ser entendida por meio da equação equivalente $c+b=a$, a qual faz sentido na aritmética. Por equivalente, ele se refere a uma equação que pode ser encontrada a partir de outra, após algumas manipulações simbólicas, transposições, no caso.

15.5 O significado das quantidades negativas

Em linha com a concepção algébrica de Woodhouse que acabamos de ver, está a sua defesa das quantidades negativas como objetos legítimos:

> Se quantidades negativas forem o objeto de demonstração, deve ser em consequência de alguma regra arbitrária. A regra para transposição introduz quantidades negativas, e leva a equações sem significado direto... (Woodhouse, 1803, p. 7)[92]

A significância desta afirmação encontra-se em dois fatores: Primeiramente, como dissemos, as quantidades negativas surgem a partir de uma extensão da regra simbólica da transposição com quantidades concretas. Esta extensão permite que surjam novos arranjos simbólicos, sem que se discuta o conceito o qual representam. Quantidades negativas, portanto, são fruto de uma reordenação simbólica de equações concretas.

Em segundo lugar, apontamos uma diferença de rigor aqui presente: diferentemente dos autores anteriores, as quantidades negativas não são legitimadas a partir de analogias, ou são simplesmente apresentadas sem qualquer tipo de enunciação formal. Elas surgem através de uma dedução que inicia-se a partir de um princípio claramente enunciado pelo autor. Com relação à prática de se recorrer a analogias para fundamentar um conhecimento algébrico, ele diz:

[92] It has already been observed that, if negative quantities are made the object of demonstration, it must be in consequence of some arbitrary rule. The rule of transposition introduces negative quantities, and leads to equations of no direct meaning...

> As noções que haviam sido feitas algumas vezes de quantidades negativas são tão defeituosas, como os métodos pelos quais as regras para suas multiplicações foram privadas; eles foram consideradas quantidades menores do que 0, por suas naturezas tentaram ser explicadas, por ilustração desenhada de transações mercantis, ou por propriedades de figuras geométricas; a primeira noção é manifestamente ilustrativa e absurda, a segunda é meramente ilustrativa e não prova nada; além disso, ela de alguma forma assume a premissa, pois, que se uma quantidade positiva representa uma reta desenhada em uma direção, uma quantidade negativa deve ser usada para denotar uma quantidade em direção oposta é, de maneira nenhuma uma verdade auto-evidente, e é de fato uma consequência da definição pela qual a aplicação da álgebra à geometria é feita, e de certas propriedades dos símbolos negativos estabelecidos previamente por meio das regras da álgebra. (Woodhouse, 1803, p. 7, 8)[93]

Segundo ele, quantidades negativas são destituídas de significado real inerente; elas são, afinal, símbolos apenas. Portanto, precisamos enunciar suas operações para então tentar encaixar alguma interpretação externa a esse sistema. Uma vez que interpretações acabam por assumir, ainda que tacitamente, o significado de uma quantidade negativa, significados estes que não são auto-evidentes, nem foram antes estabelecidas como verdades, a demonstração de suas existências por analogia acaba por assumir a premissa, constituindo assim um erro lógico. Por não satisfazerem o rigor lógico-dedutivo do autor é que analogias de um modo geral precisam ser descartadas da fundamentação algébrica. Ocorre, portanto, uma inversão no processo de raciocínio de Woodhouse: faz-se necessário definir as regras da manipulação simbólica primeiramente para que somente depois eles possam ser interpretados tendo em vista alguma realidade que seja congruente com tais definições.

Operações

Vejamos como Woodhouse legitima as operações com as quantidades negativas.
Antes disso, apontamos que Woodhouse não se preocupa em enunciar as regras de todas as operações algébricas dentro de todas as circunstâncias possíveis, como os demais autores geralmente articulavam no início de seus tratados. O autor parece apenas selecionar algumas operações para discorrer sobre, a fim de pontualmente mostrar os erros cometidos nos sistemas algébricos comuns até então, e evidenciar as regras arbitrariamente assumidas como sendo suas reais explicações. Como dissemos, a obra não consiste de um tratado da álgebra mas sim um tratado de cálculo que tem a sua álgebra como base.

---

[93] The notions that have been sometimes formed of negative quantities are as faulty, as the methods by which the rules for their multiplication have been proved; they have been considered as quantities less than 0, or their nature has been attempted to be explained, by illustration drawn from mercantile transactions, of from the properties of geometrical figures; the first notion is manifestly an absurd one, the second merely illustrative and proves nothing; besides, it in some sort begs the question, for, that, a positive quantity representing a line drawn in one direction, a negative quantity must be used to denote a line drawn in an opposite direction, is by no means a self-evident truth, and is in fact a consequence of the definition, by which the application of Algebra to Geometry is made, and of certain properties of negative symbols previously established by the rules of Algebra.

Woodhouse não se preocupa, portanto, em explicar a regra da soma de uma quantidade negativa com uma positiva ou outra negativa mas, em compensação, tenta explicar o que seria subtrair uma quantidade negativa, um caso que vimos dar origem a uma série de explicações diferentes. Vejamos este caso:

> Deve ser observado que a prova comum é defeituosa, cuja prova é assim declarada; É requerido subtrair $-b$ de a; $a = a + b - b$, subtraia $-b$ e sobra $a + b$; mas essa subtração é de fato um *apagamento*, e não é uma operação, que segue necessariamente do significado da palavra subtração e da noção que temos de $-b$; subtrair uma quantidade negativa pode ser usada como uma frase para significar a adição de uma quantidade positiva, mas não significa necessariamente isto: ou seja, essa equivalência das duas expressões não é uma consequência certa e necessária, a partir das noções que temos de subtração e quantidade negativa (Woodhouse, 1803, p. 2).[94]

Alguns autores anteriores da presente pesquisa deduziram a regra de que "subtrair uma quantidade negativa é o mesmo que somar a mesma quantidade positiva" a partir de analogias com saldos de dinheiro ou, como fez John Wallis, a partir de uma interpretação literal de subtrair como "remover" ou apagar. Na passagem acima, Woodhouse ataca diretamente o problema que vê nesse tipo de demonstração. Afinal, ao equivaler a ideia de subtração com a de "remover" uma quantidade da equação, estamos utilizando uma premissa que não havia sido antes explicitada, pois tal operação não decorre diretamente da definição de subtração ou de quantidade negativa. Em linha com esta declaração e a anterior crítica às analogias na álgebra, esta equivalência de significado entre "subtrair" e "remover a quantidade" até pode ser feita, mas não é necessária, de modo que ela não pode ser considerada uma prova de validade sem que antes tenha sido enunciada, estipulada por convenção.

Segundo esta linha de raciocínio, as regras operacionais com quantidades negativas de todos os autores anteriormente vistos na pesquisa cairiam por terra, por não terem sido enunciadas formalmente como regras assumidas ou devidamente provadas a partir de regras assumidas. A regra dos contrários de Saunderson, por exemplo, é um pressuposto ou é demonstrável? E, se for demonstrável, a partir de que pressuposto ou princípio auto-evidente ela foi deduzida? Os autores dão a entender que são regras embutidas no significado dos sinais, fato de cuja origem eles não discorrem, nem estabelecem como sendo uma regra assumida. Posteriormente, veremos que George Peacock, que foi muito provavelmente influenciado por Woodhouse, fez uma crítica ainda mais inequívoca a autores por conta dessas regras operacionais de origem não explicitada.

Vejamos então o processo que leva Woodhouse a legitimar uma regra de **subtração de quantidades negativas**:

[94] For, it is to be observed, that the common proof is defective, which proof is this stated; It is required to subtract $-b$ from a; $a = a + b - b$ subtract $-b$, and there remains $a + b$; but this subtraction is in fact an effacing, or blotting out, and is not an operation, that necessarily follows from the meaning of the word subtraction and from the notion we have of $-b$; to subtract a negative quantity, may be used as a phrase to signify the addition of a positive quantity, but it does not necessarily signify it: that is, this equivalence of the two expressions is not a sure and necessary consequence, from the notions we have of subtraction and of a negative quantity.

Se $x = a$ *e* $y=b+d$, pela regra de transposição,

$$-y = -b - d$$

Subtraindo essa equação pela equação $x=a$ *e a operação é expressa como*

$$x - (-y) = a - (-b) - (-d);$$

agora **se onde quer que exista - - for colocado +**, chegamos em uma equação

$$x + y = a + b + d$$

que é verdadeira, como aparece ao somarmos as duas equações originais: logo em todo caso, $x - (-a)$ é propriamente expresso por $x + a$ (Woodhouse, 1803, p. 3).

Primeiramente, é notável que Woodhouse acaba por assumir que - - pode ser substituído por um sinal de +, mas o autor nada discorre sobre o fato de esta regra ser estabelecida arbitrariamente ou não. Ele simplesmente "testou" que, considerando-se a regra, não se verifica contradição nenhuma com equações dotadas de significado aritmético. Veremos que uma investigação semelhante acontecerá para a regra de multiplicação, mas o autor deixará evidente que a regra de sinais nesse caso foi assumida. Dessa maneira, imagina-se que o mesmo esteja acontecendo aqui, apesar de o autor não ter sido claro.

Fora isso, percebemos que Woodhouse consegue de maneira inédita, na presente pesquisa, representar simbolicamente uma subtração de uma quantidade negativa: Subtrair $-y$ de x fica representado por $x - (-y)$, uma expressão que os demais autores não utilizavam, de modo que a operação era sempre representada verbalmente. Ainda assim, verificamos que perdura ainda a ideia de que símbolos algébricos dependem do sinal negativo externo para serem considerados negativas. Relembrando, na matemática moderna, $-x$ significa o inverso de x, de modo que $-x$ não se trata necessariamente de um número negativo. Isto acontece na ocasião de x já ser em si negativo, fazendo com que $-x$ seja positivo. Dessa maneira, as letras acabam representando quantidades positivas para Woodhouse, enquanto o sinal "externo" a ele que determina se ele será positivo ou negativo. Isso, contudo, fica melhor entendido vista a maneira como as quantidades negativas são apenas entendidas simbolicamente, isto é, como uma quantidade positiva com um sinal - na sua frente.

Vejamos agora como Woodhouse encontra as regras da **multiplicação**. Este caso é interessante pois, antes de estabelecer a regra, Woodhouse mostra como a multiplicação poderia ser demonstrada na aritmética:

> Faça $a = b - c$ $(b > c)$, então $x - y$ tomado $(b - c)$ vezes é menos do que $x - y$, tomando b vezes por $x - y$ tomado c vezes.: $(x - y)(b - c) = (x - y)b - (x - y)c = xb - yb - (xc - yc) = xb - yb - xc + yc$. (Woodhouse, 1803, p. 5)

Dessa maneira, a regra aritmética de multiplicação, assim como a anterior regra de transposição e qualquer outra operação, podem todas ser provadas, tendo em vista que as letras representam conjuntos de unidades, e as operações com essas podem ser explicadas por noções que eram consideradas auto-evidentes. Até aqui, destacamos novamente, vemos uma sistema similar ao proposto por Maseres e Frend, isto é, um simbolismo limitado pelas definições aritméticas. Porém, como vimos, Woodhouse diferencia-se por abrir espaço para pressupostos além daqueles "auto-evidentes":

> Esse é o único caso em que a partir de princípios evidentes podemos provar que o produto de sinais iguais é + e de diferentes, -, e já que, independentemente de apontamentos arbitrários, os símbolos de quantidades reais apenas podem ser objetos de demonstração, se qualquer regra é estabelecida para a multiplicação de *-a* por $\pm b$, ou de *x - y* por $-b$ $(x < y)$ tal regra deve ser subsequente de certas convenções: o objeto a ser obtido pela extensão de uma regra, ou o que é a mesma coisa ao fazê-la em parte arbitrária, é comodidade do cálculo (Woodhouse, 1803, p. 4, 5).[95]

Recapitulando, a expansão da regra de transposição trata-se na verdade de uma generalização da regra simbólica, que advém de preceitos auto-evidentes, para casos em que o sentido aritmético é perdido. Podemos agora transpor *a e c* na equação *a -b=c,* fazendo surgir a equação *-a=-b-c*, algo que não poderia ser provado aritmeticamente, mas que, de certa forma, imita a regra demonstrável de transposição aritmética, agora sem se limitar às suas definições.

A equação *-a=-b-c* não faz sentido para Woodhouse, mas é legítima simplesmente porque decorre de um pressuposto declarado pelo autor, uma convenção. Nestes momentos, os sinais perdem os seus significados aritméticos originais (Woodhouse, 1803, p.4)

Agora, na passagem acima, vemos que o mesmo processo de generalização de regras simbólicas demonstráveis da aritmética acaba sendo realizado para que se crie também a regra da multiplicação, que passa então a ser assumida como sendo verdadeira. Se *x >y, e b>c,* a igualdade *(x - y)(b - c)= xb - yb - xc + yc* é demonstrável, como vimos, por meio de conceitos aritméticos. Deste fato podemos perceber um padrão que esta verdade aritmética assume ao ser expressa simbolicamente: é o caso da chamada regra dos sinais da multiplicação, que diz que, no contexto da multiplicação de quantidades compostas,o resultado do produto de quantidade precedidas por sinais iguais terá sinal +, e o produto de quantidades precedidas por sinais diferentes, será -,

Pois, estabelecendo que a mesma vale mesmo para expressões que não podem assumir um significado aritmético, como *x - y* por *-b se x<y,* as quais devem ser considerados por decorrerem da anterior generalização da regra de transposição, temos então uma regra "expandida", que não pode ser demonstrada, mas que é verdade por convenção. Sendo assim, *(-b)(a) = -ab,* não por conta da demonstração anterior, mas porque assim se estabeleceu, tendo em vista a preservação e expansão da regra simbólica demonstrável no caso aritmético.

O que devemos depreender disto é que é intencional que as regras da aritmética "simbólica" de Maseres e Frend ficam todas preservadas dentro deste sistema, de modo que expressões algébricas desprovidas de "absurdos" como quantidades negativas ou subtrações

[95] This is the only case in which from evident principles we can prove, that the product of like signs is +, and of unlike -: and since, independently of arbitrary appointment, the symbols of real quantities, can only be made the object of demonstration, if any rule is laid down for the multiplication of *-a*, by *+-b*, or of *x - y* by +-b (*x < y*) such rule must be subsequent to certain conventions: the object to be obtained by extending a rule, or what is the same thing by making it in part arbitrary, is commodiousness of calculation.

impossíveis, podem ser interpretadas como se fossem equações aritméticas de fato, mesmo estando dentro de um sistema expandido que abre espaço para novos arranjos simbólicos.

Dessa forma, podemos dizer, a álgebra comporta a aritmética em símbolos, tratando-se de uma generalização de suas regras simbólicas demonstráveis para expressões que nela não faziam sentido. Esta relação não é necessária, mas feita visando uma "comodidade de cálculo", ou a "fácil e extensiva aplicação". Ou seja, ela permite que se aproveitem as aplicabilidades das quantidades negativas e suas operações, sendo que, agora, estas estão suportadas por bases fundamentais mais sólidas, segundo o autor. Vejamos a seguir:

Sabemos pela aritmética que $(x-y)a = xa - ya$ $(x > y)$ **e** $(v-w)b = vb - wb$ $(v > w)$ Agora, supondo $x - y = v - w$ e $a = b$, então pela regra da transposição, essas equações podem aparecer sob a forma

$$y - x = w - v \text{ e } -a = -b;$$

e se $y - x$ for multiplicado por $-a$, $w - v$ por *-b,* **fazendo o produto de sinais iguais + e de diferentes -**, o resultado é

$$-ya + xa = -wb + vb \text{ ou } xa - ya = vb - wb$$

o qual se sabe constituir uma verdadeira equação. (Woodhouse, 1803, p. 5)

A relação entre a aritmética e a álgebra na concepção de Woodhouse será ainda mais explorada no próxima seção, mas percebe-se como suas regras são verificadas a partir da verificação de sua consistência com uma condição aritmética. O objetivo, portanto, é demonstrar que as regras assumidas não levam a contradições com as da aritmética, de modo que o seu sistema esteja perfeitamente consistente com as regras com quantidades concretas. A passagem que vem logo em seguida fortalece essa ideia, ao apontar que a generalização não leva a "erros", no sentido de preservar as premissas aritméticas.

> Dessa maneira parece que a regra da multiplicação de sinais pode ser tornada geral, já que pode ser provada em todos os casos: onde a multiplicação de fato [aritmética] deve ser realizada e já que, empregada em mero cálculo algébrico, não pode levar a erro, pois o resultado deve sempre ser considerado com referência às premissas (Woodhouse, 1803, p. 5).[96]

15.5 Um "esboço" do princípio da permanência de Woodhouse

Pudemos em várias instâncias perceber que tanto os símbolos quanto as regras simbólicas estabelecidas por Woodhouse não são arbitrárias em sua origem, mas são inspiradas nos símbolos aritméticos e nas regras que são demonstráveis aritmeticamente. De fato, tanto o seu *Princípios* quanto a memória de 1801 apresentam declarações que nos ajudam a entender melhor o raciocínio de Woodhouse ao fazê-lo dessa maneira:

---

[96] Hence it appears, that the rule for multiplication of signs may be made general, since it can be proved true in all cases, where actual multiplication is to be performed, and since, employed in mere algebraical calculation it cannot lead into error, because the result must always be considered with reference to the premises...

> Agora, toda demonstração por sinais, deve em última instância permanecer nas observações feitas em objetos individuais; e todas as variedades da transformação e combinação de sinais, com exceção das que são arbitrárias e convencionais, devem ser reguladas por propriedades observadas como pertencentes às coisas das quais os sinais são representantes. Demonstrações por sinais são mostradas verdadeiras por referência a coisas individuais que os sinais representam; e é mostrada como sendo geral, pelo comentário de que a operação é a mesma, qualquer que seja a coisa significada, ou, em outras palavras, que a operação é independente das coisas significadas (Woodhouse, 1801, p. 90).[97]

Sem fazer referência aos termos específicos da matemática, o que Woodhouse está dizendo é que:

1. Se símbolos representam conjuntos de unidades, devemos demonstrar suas operações tendo em vista essa qualidade. É assim que procedemos nas demonstrações das regras da aritmética simbólica.
2. Apontamos a convenção de que as operações são sempre as mesmas, não importa que objeto estamos operando.
3. Os símbolos da álgebra são gerais, no sentido de que não possuem um significado inerente.
4. Portanto. as operações na álgebra, mesmo quando feita com objetos que não são números, devem seguir as mesmas regras de operações que os números.

A fala ajuda a estruturar o raciocínio que o leva a obter as regras operacionais na álgebra segundo um processo logicamente consistente, como antes havíamos mencionado: ao descrevermos operações aritméticas, consideradas providas de um significado "real", por meio de símbolos, podemos encontrar certos padrões nos resultados, os quais nos referimos como regras, apesar de todas elas serem demonstráveis à luz daquilo que os símbolos representam: números. Ao destituir os símbolos de significados inerentes, ou seja, ao torná-los "gerais", porém, podemos preservar as regras deduzidas a partir do objeto específico número para símbolos sem significado específico. A validade desta generalização das regras, nós garantimos pelo fato de que assim estabelecemos por meio de uma declaração.

Portanto, fica ainda mais claro aqui que a relação entre aritmética e álgebra, não é intrínseca mas feita desta forma. O fato de que as regras simbólicas da aritmética são preservadas surgem a partir de uma declaração, um comentário (*remark*) de que assim será. Uma consequência natural desta "extensão das regras" vai ser aquilo que apontamos anteriormente: mais do que reter os símbolos operacionais +, -, ×, ÷, *etc.* da aritmética, suas

[97] Now all demonstration by signs, must ultimately rest on observations made on individual objects; and all the varieties of the transformation and combination of signs, except what are arbitrary and conventional, must be regulated by properties observed to belong to the tings of which the signs are the representatives. Demonstration by signs is shewn to be true, by referring to the individual things the signs represent; and is shewn to be general, by remarking that the operation is the same, whatever is the thing signified, or, in other words, that the operation is independent of the things signified.

regras ficam preservadas na ocasião de as quantidades serem interpretáveis à luz da aritmética. A nova ciência é consistente com o sistema limitado pelos preceitos da aritmética.

Woodhouse provê em seguida um exemplo com termos imaginários que ajuda a ilustrar como ele convencionalmente retém as regras simbólicas das operações aritméticas para as quantidades "insignificantes", como as imaginárias e as negativas.

> … nada pode ser afirmado com relação ao produto de $(a+b\sqrt{-1})$ e $(c+d\sqrt{-1})$, ou com relação à forma $na=b\sqrt{-1}$; e tudo que se pode transmitir pela forma $(a+b\sqrt{-1})\times(c+d\sqrt{-1})$ é, que os caráteres devem ser combinados da mesma maneira que os sinais das quantidades reais; de modo que $(a+b\sqrt{-1})\times(c+d\sqrt{-1})$ é equivalente a $ac+ad\sqrt{-1}+cb\sqrt{-1}-bd$, não assim demonstradas mas assim colocadas, por extensão da regra demonstrada por sinais reais para caráteres que são insignificantes. (Woodhouse, 1801, p. 93)

Exemplos similares são apresentados nos *Princípios*, mas destacamos um comentário novo presente nele: Woodhouse reconhece que objetos como as quantidades negativas e imaginárias não são simplesmente inventadas arbitrariamente para somente então assumirmos como operar com elas.

> Em seus significados mais simples os símbolos + - × designam adições, subtrações, multiplicações, a serem feitas na suposição de que os caráteres conectados por esses símbolos podem ser entendidos como unidades: e nessa suposição, as primeiras regras para transposição e multiplicação são demonstradas; mas subsequente à extensão de regras, pelas quais equações sem significado direto, e símbolos incapazes de serem aritmeticamente computados são introduzidos, esses símbolos tomam um significado mais extensivo. (Woodhouse, 1803, p. 9-10).[98]

Elas são, portanto, também criadas, a partir da permissão de que as regras fujam de seus limites impostos pelas definições originais dos sinais operacionais. Foi esse o caso da generalização da transposição dando origem a equações com "caráteres isolados com o sinal de subtração na frente". Depois que essas quantidades novas surgem dessa forma, é que então as mesmas regras generalizadas nos mostrarão como operar com elas. Dentro da fala do autor, é importante perceber mais uma vez como ele aponta que extensões como as que foram feitas com a regra de transposição dão origem a novos símbolos apenas. Sua fala sempre marca a ausência de uma concepção da ideia de número negativo. As quantidades negativas são apenas um símbolo de um número com um sinal - na sua frente, o qual foi reposicionado segundo uma regra do autor. Os símbolos operacionais, portanto, tem seu significado estendido apenas no sentido de que agora novos símbolos precisam ser combinados com eles. Quantidades negativas ou complexas não representam uma extensão do domínio dos números positivos concretos, mas apenas novos símbolos com os quais o autor se preocupa em estabelecer regras de combinação.

[98] In their simplest meaning the symbols + - x designate additions, subtractions, multiplications, to be made on the supposition, that the characters connected by these symbols, can be resolved into units: and on this supposition, the first rules for transposition and multiplication are demonstrated; but subsequently to the extension of rules, by which equations of no direct meaning, and symbols incapable of being arithmetically computed are introduced, these symbols take a more extensive signification.

Em se tratando de expressões algébricas gerais, o mesmo processo de extensão de regras o permite também estabelecer o significado de expressões como a^{-n}, dada a regra para quando o expoente é positivo:

Se $\frac{a^n}{a^m}$ é a^{n-m} $(n>m)$ ou $\frac{1}{a^{m-n}}$ se $m>n$

Então, fazendo $a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$, quando n é menor do que m, temos que

$a^{-(n-m)}$ representa $\frac{1}{a^{m-n}}$ ou a^{-q} , onde $q = n\text{-}m$

Então a^{-q} e $\frac{1}{a^q}$ são equivalentes.

Da mesma maneira, a^0 é feito equivalente a 1 (Woodhouse, 1803, p. 9).

15.6 Conclusão

A álgebra de Woodhouse pode ser vista como uma resposta às inseguranças que matemáticos possuíam com relação à maneira como os entes negativos eram apresentados na álgebra. Sabia-se da aplicabilidade deles e dos significados que esses objetos poderiam adquirir em determinados contextos, mas a recorrência destes contextos como forma de argumentação para defesa deles como objetos legítimos da matemática, ou para explicar suas operações, era algo questionável para alguns. Woodhouse surge então com um modelo em que a álgebra surge a partir de uma espécie de transição simbólica de um sistema embasado em quantidades positivas concretas. Neste último, as letras representam quantidades positivas, e suas proposições são demonstradas tendo em vista a natureza inteligível das quantidades como coleções de unidades. Woodhouse, então, preserva as regras demonstráveis deste sistema mas, ao permitir que os símbolos percam sua qualidade ”real” e passem a representar qualquer quantidade, as mesmas regras podem ser generalizadas, o que leva ao surgimento de equações e símbolos sem significado direto, como *-c-b=-a*. De acordo com Woodhouse, isto é permitido a partir do fato de que a álgebra deve ser entendida como um sistema de símbolos que seguem transformações estabelecidas por convenção. Esta, inclusive constitui a maior diferença conceitual em sua álgebra com relação aos autores anteriores. Woodhouse defende a ideia de que seus objetos e proposições não precisam ser compreendidos concretamente para serem considerados verdadeiros. A álgebra trata de símbolos e regras assumidas que não dependem de evidência, o que por si torna suas proposições em “verdades necessárias”.

Assim, *-a* torna-se uma quantidade legítima, mesmo não possuindo um significado direto, pelo fato de que a ele surge a partir de uma generalização da transposição da aritmética, uma regra legítima por ter sido convencionada assim. Surgem assim quantidades que não são concretas, por ele chamadas também de “absurdas”, em contraponto com as quantidades aritméticas. Além disso, a maneira como as regras são convencionadas fazem com que a sua álgebra acabe sendo consistente com a aritmética. Apesar da suposta abstração da concretude que seu simbolismo sugere, é notável que, algumas vezes, equações contendo símbolos abstratos tentam ser compreendidos tendo em vista uma equação equivalente que seja dotada de significado aritmético, demonstrando assim uma persistência na busca por sentido concreto.

Mais importante ainda, é perceptível que Woodhouse não estabelece um conceito de número em sua teoria. Woodhouse faz com que quantidades negativas surjam a partir de uma manipulação simbólica, não as entendendo a partir de soluções de equações. Dessa maneira "-*a*" não é visto como um número, mas como algo da forma "a quantidade *a* com o sinal de menos na frente", uma vez que este surge exatamente a partir da transposição da quantidade concreta *a* com seu sinal operacional - para outro lado da equação. Tal transição feita a partir de um fenômeno interno da matemática como a transposição, mostra a imaterialidade do conceito de número para Woodhouse: Após o surgimento desses novos símbolos é que Woodhouse se preocupa em combiná-los com os sinais operacionais, e assim chamar essas combinações assumidas de operações: a única transição que ocorre é do simbolismo concreto para um simbolismo abstraído. As operações não se estendem para novos domínios numéricos; elas apenas passam a representar novos tipos de combinações de símbolos.

Isto não ocorre, por exemplo na concepção do alemão Hermann Hankel. onde o número negativo -*a* não surge a partir de um rearranjo simbólico com quantidades concretas. Com ele, o conceito de número é previamente separado do conceito de quantidade. Dessa maneira, as operações com o domínio dos números naturais fica definido em primeiro lugar para, em seguida, haver a introdução de novos números, os quais ficam definidos unicamente a partir de equações com operações que respeitem as mesmas propriedades das operações com os números de domínio anterior. Dessa maneira, um número negativo $\overline{a}$ pode ficar definido pela equação $a + \overline{a} = 0$, a qual estende o significado da operação +. Sua existência não é defendida a partir de manipulações simbólicas mas conceitualmente, como sendo o oposto do número positivo *a* na operação de soma. É neste sentido que a operação de soma fica realmente estendida para domínios maiores de números, tendo suas propriedades retidas nesses novos domínios, em vez de ser compreendida em termos de combinações de símbolos.

16 O novo modelo de álgebra simbólica de George Peacock

16.1 O movimento precursor da Reforma Analítica em Cambridge

A proposta nova de Woodhouse para uma fundamentação do cálculo e, conjuntamente, da álgebra, não sucedeu na universidade de Cambridge. Seus *Princípios* não obtiveram aceitação no currículo e a notação fluxional e a fundamentação físico-geométrica continuou a prevalecer nos livros-texto. (Enros, 1980, p. 395) Além disso, sua postura na crítica à rejeição dos negativos parece ter acontecido de maneira isolada. (Schubring, 2005, p. 426)

Podemos entender a relutância à propagação de ideias como as de Woodhouse a partir daquilo que já vimos a respeito do ensino em Cambridge. Lá, a matemática ainda era dominada pelo método sintético que não somente era associado à matemática de Newton, mas também à educação liberal promovida pela universidade, voltada para o desenvolvimento dos poderes da mente, em oposição à profissionalização do assunto e à análise. (Enros, 1983, p. 30, 31) Esta visão, por sua vez, era refletida no *Senate House Examination*, que testava a aptidão dos jovens graduandos da universidade, e que muito exigia da parte deles. A ortodoxia sintética de Cambridge contrastava-se com a matemática continental, dominante, por exemplo, na França (Barret, 1814, apud Enros, 1983, p. 31), e pela qual Woodhouse havia sido influenciado.

Apesar do *status quo*, a insatisfação de alguns alunos com este sistema de ensino de Cambridge, somada tanto ao estudo da matemática de fora como ao desejo pela promoção de pesquisa e desenvolvimento da matemática fez surgir a Analytical Society, fundada pelos estudantes Charles Babbage e Michael Slegg, em 1812. A partir de então, um grupo maior se formou e passou a realizar reuniões para discutir seus trabalhos matemáticos, sempre de teor analítico (Enros, 1983, p. 27), e com uma concepção de cálculo alinhada àquela de Woodhouse (Becher, 1980, p. 395). É importante frisar, porém que esta Sociedade não tinha objetivo de reformar o ensino de matemática em Cambridge mas sim de promover a pesquisa e desenvolvimento da matemática, algo que acreditavam ser possível por meio da análise. (Enros, 1983, p. 37, 40) Realizar uma reforma institucional, inclusive, teria sido uma tarefa difícil, visto que seus membros eram, em sua maioria, graduandos de Cambridge e, apesar de muitos terem obtido certo sucesso em suas carreiras na universidade, não possuíam ainda tanta influência de decisão. (Enros, 1983, p. 32)

Assim como ocorreu com Woodhouse, a produção da *Analytical Society* não obteve muito sucesso em primeiro momento, como o próprio membro Herschel admite: a posterior graduação e afastamento de membros, a dificuldade de conciliar os estudos preferenciais com os obrigatórios, e o próprio desconhecimento que se tinha sobre a matemática analítica na Inglaterra dificultou a abertura de espaço para as ideias novas trazidas pelo grupo. (Enros, 1983, p. 40) A maior contribuição do grupo foi a publicação de um conjunto de memórias, escritos majoritariamente pelos dois membros mais ativos do grupo, Charles Babbage e Herschel (Enros, 1983, p. 34). Inclusive, um indicativo do quão diferentes os textos eram em comparação com os tradicionais está no fato de que a impressão deles foi bastante dificultada pela falta de dígitos nas máquinas para algumas notações (Enros, 1983, p. 34, 35).

Em 1814, o grupo já se encontrava desintegrado e, nos anos seguintes, poucos dos membros continuaram envolvidos com o movimento analítico por meio de publicações matemáticas (Enros, 1983, p. 40). A maioria havia embarcado nas carreiras religiosas ou de direito e, alguns anos depois, apenas George Peacock ainda estava ativo no movimento pela reforma dos fundamentos da álgebra (Enros, 1983, p. 41). Contudo, as influências por trás da formação da *Analytical Society*, bem como seus objetivos permaneceram e floresceram após a sua dissolução, de modo que podemos dizer que a Sociedade é uma precursora do movimento analítico que de fato reformou a matemática da universidade posteriormente (Enros, 1983, p. 42). Alguns sinais de sua importância também já podiam ser vistos em algumas mudanças sofridas na *Senate House Examination* a partir de 1817 (Enros, 1983, p. 26).

16.2 Os ensaios não publicados de Charles Babbage

Iremos nos direcionar agora a Charles Babbage, um dos principais membros da *Analytical Society*, por conta de um importante texto algébrico que ele deixou.

Babbage (1791 - 1871) partiu cedo de Cambridge, logo após a sua graduação em 1814. mas manteve contato com a matemática e com seus colegas da Sociedade. Na década seguinte, embarcou na construção da "máquina analítica", a invenção à qual ele é mais associado, rendendo-lhe o título de "pai da computação". Tal empreendimento lhe ocupou pelos 50 anos restantes de sua vida, e sua produção matemática parece ter secado por volta desta época. (Dubbey, 1978, p. 2, 6) Apesar disto, Babbage assumiu a cadeira de professor lucasiano em 1828, cargo que ocupou por 11 anos sem aparentemente ter residido em Cambridge ou dado uma aula (Dubbey, 1978, p. 7).

O texto de Babbage que mais nos interessa faz parte de uma coleção de ensaios não publicada, intitulada *The Philosophy of Analysis* (*A Filosofia da Análise*). Os ensaios, que tratam-se, majoritariamente, de textos inacabados, datam de cerca de 1821 e, atualmente, se encontram no Museu Britânico, apesar de alguns dos ensaios mencionados na primeira página estarem faltando (Dubbey, 1978, p. 92). Como aponta Dubbey, o provável motivo para a não publicação dos ensaios vem de um motivo já conhecido. Bromhead, que também fez parte da Analytical Society, demonstrou bastante entusiasmo pelo projeto de seu colega, porém, poucas pessoas na Grã-Bretanha tinham o mesmo interesse ou eram capazes de compreender textos com o conteúdo que esse possuía. Houve uma tentativa de publicação por parte de Babbage no *Edinburgh Journal of Science*, mas essa foi contestada por David

Brewster, de modo que mais nenhuma tentativa parece ter sido feita posteriormente (Dubbey, 1978, p. 93-94).

O terceiro ensaio dessa coleção, intitulado *General notions respecting Analysis (my theory of identity) [Noções Gerais a respeito da Análise (minha teoria de identidade)]* é particularmente interessante pois, nele, encontramos uma concepção de álgebra parecida com aquela proposta por Woodhouse 20 anos antes. Nossa breve análise parte de três passagens reveladoras extraídas do texto de Charles Dubbey.

A primeira passagem mostra o primeiro ponto de encontro entre Babbage e Woodhouse: o entendimento da álgebra como uma linguagem dos sinais generalizada e independente de quaisquer interpretações que possam ser feitas destes sinais:

> Número é sem dúvida um dos assuntos mais extensivos dos assuntos aos quais a Análise foi aplicada; geometria ocupa o segundo lugar em questão de extensão, nenhuma dessas pode expressar todas as relações indicadas pela linguagem dos sinais; a raiz quadrada de um inteiro por exemplo não é capaz de uma expressão numérica em termos finitos a não ser que ela seja um quadrado perfeito; enquanto na geometria é sempre possível expressar o resultado de uma extração. (Dubbey, 1978, p. 104 apud Babbage, -, p. 46)

A segunda passagem reforça a primeira, além de trazer um segundo ponto de alinhamento entre os autores: O sinal de igualdade passa a significar uma igualdade entre os resultados operacionais com as letras em ambos lados dela, em vez de indicar uma "igualdade de unidades":

> O objeto que proponho tentar é separar inteiramente a Análise ou a linguagem dos sinais de todas suas várias aplicações rejeitando dela não meramente considerações geométricas mas mesmo aquelas de número e mostrar que quando vista dessa maneira ela em última instância consiste em proposições que são puramente idênticas ou pelo menos que a significação de qualquer equação significa nada mais do que quando todas as operações que são indicadas em cada lado são executadas toda letra que ocorre no outro lado se encontrará sob circunstâncias precisamente similares no outro lado e em qualquer caso quaisquer letras põem-se como representantes de outras essas últimas devem ser substituídas por aquelas antes que a identidade torne-se aparente. (Dubbey apud Babbage, -, p. 44)

Por fim, apresentamos a seguinte passagem, que mostra um tercecio ponto de alinhamento: Babbage norteia-se de maneira similar a Woodhouse para a obtenção de definições operacionais generalizadas.

> $x^a \times x^b = x^{a+b}$. Essa equação que é verdadeira para números inteiros não necessariamente subsiste quando os expoentes são frações, e tampouco isso segue dos pressupostos originais; tampouco ela subsiste necessariamente quando a e b são quantidades imaginárias. De modo a dar significado a tais expressões devemos dar recurso a uma nova definição e para evitar ambiguidade é extremamente conveniente que as novas definições devam incluir a antiga como um caso particular, isso foi logrado ao assumirmos a equação $x^a \times x^b = x^{a+b}$ como a definição das operações denotadas pela aplicação dos expoentes à quantidade x. (Dubbey, 1978, p. 106 apud Babbage, -, p. 43)

Então, se na aritmética simbolizada, podemos demonstrar que $x^a \times x^b = x^{a+b}$, podemos definir que a mesma regra será válida na álgebra, isto é, que a mesma regra valerá para quaisquer valores de *a* ou *b,* sejam eles negativos, imaginários, ou quaisquer outros. Aqui, destacamos que tal extensão da regra não é demonstrada, mas apenas assumida como sendo verdadeira, de maneira similar ao jeito como Woodhouse a fez. A maneira como as regras são estabelecidas, tendo em vista a preservação das regras aritméticas, também reflete a preocupação que Woodhouse teve em fazer como que o sistema tivesse a aritmética como um “caso particular”, no momento em que, ao atribuirmos valores estritamente positivos às letras, o resultado é aritmeticamente verdadeiro. Dessa maneira, os princípios algébricos não são fundados em verdades aritméticas, mas apenas inspirados nas suas regras demonstráveis. Suas regras, na verdade, tratam-se de pressupostos deliberadamente estabelecidos pelo autor. Como Dubbey destaca em seu texto, todos estes pontos alinham-se também com a concepção de George Peacock, mais um do círculo de Cambridge que fez parte da Analytical Society.

16.3 George Peacock

Peacock nasceu em 1791 em Denton, no norte da Inglaterra. No ano de 1809 ele ingressou na Trinity College de Cambridge, onde se formou com altíssimas honrarias em matemática, atrás neste quesito apenas de Herschel, que fez parte da Analytical Society com ele. Apesar desses feitos, Herschel aponta que seu colega havia ingressado na universidade “sem muita experiência com textos matemáticos, os quais não se estendiam muito além dos assuntos estudados no primeiro ano de Cambridge na época.” (Herschel, 1859, p. 536 apud Enros, 1983, p. 30). No ano de 1814, Peacock tornou-se *fellow* do Trinity College e, no ano seguinte, tornou-se tutor do mesmo colégio.

Alguns anos depois, Peacock começou também sua carreira clerical: foi ordenado diácono em 1819 e, em 1822, recebeu sua ordenação como padre em Norwich. Além disso, serviu também como vigário de Wymewold de 1826 a 1835. No ano de 1836, Peacock tornou-se professor Lowndeano de Astronomia e Geometria e, três anos após assumir esse cargo, foi apontado como deão da catedral de *Ely*, onde permaneceu até sua morte em 1858 (Connor, online). Esse novo cargo o fez partir de Cambridge em 1839, e seu cargo de professor Lowndeano tornou-se uma sinecura, o que acabou causando protesto de alguns de seus colegas acadêmicos (Pycior, 1981, p. 25 apud Anon. 1858, 744).

Sua participação na Analytical Society está longe de representar o seu único empenho por reformas, seja na matemática ou em outros assuntos. Como moderador do *Mathematical Tripos* em alguns anos, Peacock colocou problemas no exame dentro da notação continental, algo que chegou a lhe render algumas críticas. (Pycior, 1981, p. 26). Além disto, Peacock é reconhecido por sua participação de um movimento pela reforma do estatuto de Cambridge, que incluiu uma petição para impedir exames religiosos que barravam a entrada de dissidentes na universidade. Os esforços da comissão da qual ele fez parte, inclusive, ajudou a passar tal reforma, e Cambridge abandonou testes religiosos como requisitos para a entrada nos cursos de graduação, com exceção daqueles sobre divindade. (Pycior, 1981, p. 26-27)

Todas essas atitudes, somadas a outras, fizeram com que alguns dos obituários de Peacock destacassem o vigor que ele teve por reformas ao longo de sua carreira. (Pycior, 1981, p. 26) Sua grande obra de álgebra, o *Treatise on Algebra* (*Tratado sobre Álgebra*) está alinhada com seu espírito reformador. Nela, Peacock lança uma argumentação a favor de uma álgebra simbólica que distancia-se das concepções desenvolvidas pelos algebristas dos séculos anteriores, alinhando-se proximamente com o que Woodhouse e seu colega Babbage propuseram anteriormente. Dubbey traz argumentos que sugerem que Peacock provavelmente leu a coleção de Charles Babbage, apesar de o autor não fazer nenhuma menção a ele: Peacock não somente manteve contato com seu colega, como também leu "atentamente" a alguma versão de seus ensaio da *Filosofia de Análise,* como aponta uma carta escrita por ele a Babbage (Dubbey, 1978, p. 96). Por conta do reconhecimento que a obra de Peacock obteve pelo desenvolvimento da álgebra na Inglaterra, iremos nos direcionar a ela neste momento.

16.4 A crítica De Peacock à concepção comum de álgebra

Peacock abre o seu tratado trazendo o seu objetivo com a obra:

> … conferir à álgebra o caráter de uma ciência demonstrativa, fazendo seus primeiros princípios co-extensivos com as conclusões que foram fundadas sobre eles (Peacock, 1830, p. *v*).

De acordo com essa ambição, Peacock alega encontrar inconsistências nos primeiros princípios da ciência, algo que fica sinalizado pela dificuldade que é costumeiramente enfrentada nos primeiros princípios da ciência (Peacock, 1830, p. *v*). Segundo ele, os problemas surgem a partir da relação que é tecida entre álgebra e aritmética, no sentido de que a primeira fica entendida como uma mera "modificação" da segunda:

> Álgebra sempre foi considerada uma mera modificação da aritmética que surgiu a partir do uso de linguagem simbólica, e as operações de uma ciência foram transferidas para a outra sem qualquer declaração de uma extensão de seus significados e aplicações: dessa maneira símbolos são assumidos como sendo gerais e ilimitados representantes de toda espécie de quantidade: as operações de soma e subtração em seus significados aritméticos simples, são assumidos como sendo denotados pelos sinais + e -, e a serem usados na conexão de tais símbolos uns com os outros: multiplicação e divisão, duas operações inversas na aritmética, são supostas igualmente aplicáveis a todas quantidades que símbolos possam denotar, sem qualquer modificação necessária em seus significados (Peacock, 1830, p. *vi*).[99]

Em seguida, ainda na mesma linha da crítica acima, Peacock diz que:

[99] Algebra has always been considered as merely such a modification of Arithmetic as arose from the use of symbolical language, and the operations of one science have been transferred to the other without any statement of an extension of their meaning and application: thus symbols are assumed to be the general and unlimited representatives of every species of quantity: the operations of Addition and Subtraction in their simple arithmetical sense, are assumed to be denoted by the signs + and -, and to be used in connecting such symbols with each other: Multiplication and Division, two inverse operations in Arithmetic, are supposed to be equally applicable to all quantities which symbols may denote, without any necessary modification of their meaning...

> … dessa forma, não é considerado necessário que a adição e subtração devam ser confinadas a quantidades de mesmo tipo ou que quantidades subtraídas devam ser menores do que a quantidade da qual elas são subtraídas: e quando a violação dessa restrição... levou à existência independente dos sinais + e -, não é considerado que por esse uso adicional deles, tenhamos de toda maneira abandonado as definições dessas operações na prática mas não em nome (Peacock, 1830, p. *vii*).

Ou seja, de acordo com Peacock, ocorre um erro no momento em que as operações da aritmética têm seus nomes retidos na álgebra sem que haja uma devida extensão de significado dessas operações na nova ciência, o que se torna necessário a partir do momento que não mais se está lidando exclusivamente com os objetos da aritmética. Ao mesmo tempo, as limitações que existiam para essas operações são desfeitas sem maiores considerações, fazendo com que surja a dicotomia entre as "quantidades positivas" e "quantidades negativas", sem ainda assim que haja preocupação em destacar a diferença de significado para as operações nesse âmbito "ampliado". Fica parecendo, assim, que ainda estamos lidando com as operações homônimas que encontramos na aritmética simples, o que não é verdade, visto estas já não possuem as mesmas limitações e que estamos lidando agora com objetos novos. Em linha com esta crítica, podemos lembrar, por exemplo, do caso de John Wallis, que alegava que suas demonstrações para as regras das operações partiam da aritmética comum, sendo que ele estava agora lidando com quantidades negativas puras.

Essa associação entre as duas ciências que outros teriam construído se torna alvo de seguidas críticas pelo autor, que pensa na álgebra como uma ciência "que trata dos sinais e símbolos apenas, e independentes dos valores específicos dos símbolos em si." (Peacock, 183, p. *vii*).

> É essa derivação imediata da álgebra a partir da aritmética e a conexão próxima que tentou-se preservar entre as duas ciências, que levou à formação da opinião de que uma é realmente fundada na outra. (Peacock, 1830, p. *vii-viii*)[100]

O próprio termo "aritmética universal" de Newton, o qual faz alusão ao que seria a ciência basilar da álgebra, é criticado pelo autor no começo do livro:

> Ela foi chamada de "Aritmética Universal"; mas essa definição é defeituosa, a partir do momento que ela designa como objeto geral da ciência, o que apenas pode ser considerado como uma de suas aplicações (Peacock, 1830, p. 1).[101]

Após compreendermos melhor a proposta de Peacock, retornaremos a estas críticas que ele tece à chamada "aritmética universal". De qualquer maneira, já fica sinalizada a conotação que a obra possui em seu corpo: a reconstrução dos fundamentos da álgebra de acordo com a visão de rigor lógico-dedutivo do autor. A partir dela, o autor constrói os seus próprios fundamentos para a ciência algébrica, com o cuidado de mostrar qual seria a verdadeira relação entre ela e a aritmética.

---

[100] It is this immediate derivation of Algebra from Arithmetic, and the close connection which it has been attempted to preserve between those sciences, which has led to the formation of the opinion, that one is really founded upon the other.

[101] it has been termed Universal Arithmetick; but this definition is defective, inasmuch as it assigns for the general object of the science, what can only be considered as one of is applications.

16.5 Os pressupostos da álgebra simbólica de Peacock

Como veremos, a álgebra de Peacock sugere uma certa transição do simbolismo com significado inerente de quantidades aritméticas para um simbolismo independente de interpretações, assim como sugeriu Woodhouse, ainda que sob pressupostos diferentes. Tal transição é extensamente delineada apenas no capítulo III, intitulado *Observações sobre os os primeiros princípios e operações fundamentais da álgebra*, e uma breve discussão similar ainda é trazida no prefácio do autor. No primeiro capítulo da obra, os fundamentos da álgebra são estabelecidos ponto a ponto de maneira mais direta, sem tanta referência a tal transição. Dessa maneira, veremos a maneira como ele fundamenta a álgebra no capítulo I para depois vermos como ele tenta construir a álgebra a partir da aritmética, bem como a maneira como esse processo de transição pode ser entendido como uma "extensão".

O primeiro passo na construção de seu sistema algébrico é o estabelecimento daquilo que os símbolos podem representar:

> Os símbolos da álgebra podem ser feitos representantes de toda espécie de quantidade: seja ela abstrata ou concreta: as operações às quais elas são sujeitas são perfeitamente gerais e são em nenhum respeito afetadas pela natureza das quantidades as quais os símbolos denotam, sendo determinadas apenas pelas definições e pressupostos que constituem os primeiros princípios da ciência (Peacock, 1830, p. 1). [102]

Peacock inicia já pressupondo que os símbolos podem representar quaisquer quantidades, não importa de que natureza elas sejam. Isto significa que já não estamos lidando apenas com quantidades que admitem uma interpretação aritmética e, portanto, sejam estritamente positivas, mas o conceito de quantidade segue proximamente associado aos caráteres da álgebra, algo que veremos mais a fundo em breve. Na citação, vemos ainda uma sinalização de uma concepção de álgebra nos mesmos moldes daquela de Woodhouse, a começar pelo estabelecimento de um pressuposto logo no começo. Um trecho posterior deixa isso mais evidente:

> Álgebra pode ser considerada, em sua forma mais geral, como *a ciência que trata das combinações de sinais arbitrários e símbolos por meio de leis definidas porém arbitrárias*: pois nós podemos assumir quaisquer regras para a combinação e incorporação de tais símbolos, contanto que nossas suposições não sejam inconsistentes umas com as outras (Peacock, 1830, p. 71). [103]

Ou seja, a álgebra em sua essência consiste no estabelecimento de símbolos, a maneira como os combinamos, e apenas isso. Para tanto, essas regras precisam ser

[102] The symbols of Algebra may be made the representatives of every species of quantity, whether abstract or concrete: the operations to which they are subject are perfectly general, and are in no respect affected by the nature of the quantities which the symbols denote, being determined solely by the definitions and assumptions which constitute the first principles of the science.

[103] Algebra may be considered, in its most general form, as *the science which treats of the combination of arbitrary signs and symbols by means of defined though arbitrary laws*; for we may assume any laws for the combination and incorporation of such symbols, so long as our assumptions are independent, and therefore not inconsistent with each other.

devidamente pré-definidas pela pessoa, e é nesse sentido que Peacock as entende como sendo "arbitrárias": elas são livremente escolhidas e não são de maneira nenhuma regidas necessariamente por algum referencial ou condição prévia, o que as separa de uma concepção onde os símbolos representam ideias fixas, e as regras acabam por se tornar consequências da interpretação dos símbolos. Na álgebra, a única restrição é que as regras sejam logicamente consistentes. A maneira como Peacock constrói tais pressupostos, contudo, se difere do procedimento de Woodhouse. Sobre isso, destacamos o seu primeiro pressuposto, que diz que os símbolos da álgebra podem ser feitos representantes de toda espécie de quantidade. Ou seja, apesar da concepção geral de uma álgebra abstraída de significado direto, o importante é perceber que sua construção de pressupostos assume que os caráteres passam a representar quantidades, tornando esse conceito basilar, e não o conceito de número. As diferenças com relação a Woodhouse então se mantém no estabelecimento dos sinais + e -:

> Em símbolos de quantidades concretas de mesmo tipo, outras relações além daquelas de maior ou menor podem ser consideradas: dessa forma se os símbolos representarem retas, algumas podem representar retas desenhadas em uma direção, algumas retas em direção oposta… para que os símbolos possam ser capazes de representar tais relações, eles *em todos os casos* terão de ser afetados por um dos sinais + ou -, os quais são igualmente usados para denotar as operações de adição e subtração (Peacock, 1830, p. 3).

O próximo pressuposto estratégico, consiste em dizer que as quantidades serão sempre colocadas junto a sinais + e -, mesmo fora do contexto de operações, algo que ele chama em outros momentos como a suposição da "independência dos sinais de adição e subtração". Esta foi feita tendo em vista que o sinal de + e - fica entendido como uma espécie de qualificador da letra. Trata-se de uma interpretação semelhante àquela feita por Maclaurin e Saunderson. Mesmo assim, destacamos que, ainda que a regra tenha sido estabelecida tendo em vista uma utilidade interpretativa para eles, ela é declaradamente assumida de maneira que independe dedutivamente de uma interpretação dos sinais. Independentemente disso, destacamos mais uma vez que o conceito de quantidade fica assumidamente associada aos símbolos, e de tal maneira que os sinais de + e - tornam-se apenas um "qualificador" de um caráter que é exclusivamente positivo. Naturalmente, veremos que isso implica o conceito de número negativo não ser considerado. Ao vermos a explicação sobre a passagem da aritmética para a álgebra, isso ficará ainda mais evidente.

Comparativamente, podemos então ver que as quantidades da forma *-a* não são estabelecidas da mesma maneira como ocorreu em Woodhouse, através da transposição. Elas são já assumidas como objetos da manipulação simbólica de Peacock. Ainda assim, veremos que Peacock oferece uma alternativa para o surgimento desses símbolos, de modo que eles também se tornam fruto de uma manipulação simbólica assumida. De qualquer forma, vemos que, em ambos casos, o "objeto negativo" da álgebra surge de de pressupostos de conotação simbólica em vez de serem concebidos no contexto de resolução de equações.

Seu próximo passo é estabelecer o que ele chama de "regra da concordância dos sinais", que trata-se da regra que diz como encontrar o resultado de uma operação na álgebra simbólica, seja ela a soma, subtração, divisão ou multiplicação. A grande questão é que aquelas regras que haviam sido demonstradas na aritmética são retida mas, desta vez, não são demonstráveis, mas apenas assumida como sendo verdade (Peacock, 1830, p. 71). Quanto a esta ideia da retenção assumida de regras aritméticas, voltaremos mais tarde mas, na passagem abaixo, ele reforça a importância que esse princípio simbólico possui, além do fato de que ele é assumido, e não demonstrado.

> Na combinação de símbolos pelas operações da adição e subtração, que são denotadas pelos mesmos sinais + e -, , pelos quais os símbolos em si são afetados, sinais similares ou dissimilares devem se unir, o que é expediente, de modo a evitar confusão, incorporar em apenas um. Em ambos casos, elas são sujeitas às seguintes regras gerais, as quais são assumidas e não provadas, e as quais podem ser consideradas como constituintes de um dos mais importantes dos primeiros princípios dessa ciência (Peacock, 1830, p 3).

O princípio é então exposto da seguinte maneira:

> Sempre que dois sinais similares se juntarem, seja + e + ou - e -, eles são substituídos pelo sinal simples +: mas se os dois sinais são dissimilares, seja + e - ou - e +, eles são substituídos pelo sinal simples - (Peacock, 1830, p 3).[104]

Na prática, estas regras simbólicas que irão definir de fato o que a soma e a subtração, multiplicação e divisão serão nessa nova álgebra. Ou seja, aquilo que era antes desenvolvido conceitualmente pelos autores, aqui se torna um princípio fundamental deliberadamente assumido pelo autor, e delineado puramente em termos simbólicos: não existe mais um conceito de contrariedade inerente aos sinais o qual explicaria as suas operações, ou qualquer outro tipo de interpretação dada a eles. A única noção relevante é a maneira como eles são simbolicamente combinados segundo um pressuposto. A partir dessa regra, qualquer resultado operacional, mesmo sobre quantidades compostas, pode ser descoberto. Além disso, mais um pressuposto é assumido por Peacock: a comutatividade dos símbolos.

> Pode ser assumido como um princípio geral, que em todas as quatro operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, em que símbolos são combinados ou incorporados uns com os outros, é indiferente em que ordem os símbolos nos resultados são escritos, ou quando mais operações do que uma são realizadas, em qual ordem elas sucedem. (Peacock, 1830, p. 4)

Vejamos agora como as regras são colocadas de maneira mais específica para soma e subtração.

Regra da Adição:

“ A operação de adição é denotada pelo sinal + o qual, quando combinado com os sinais de cada uma das quantidades a serem adicionadas, deixa-os iguais a antes.“

[104] it may be assumed as a general principle, that in all the four operations of addition, subtraction, multiplication, and division, in which symbols are combined or incorporated with each other, it is indifferent in what order the symbols in the result are written, or when more operations than one are performed, in what order they succeed each other.

Dessa maneira a soma de a e b é *a +b*: de *a* e *-b*, é $a + (-b) = a - b$: de *-a* e *-b* é $-a + (-b) = -a - b$: e similarmente em outros casos (Peacock, 1830, p. 10).

Regra da Subtração:

"A operação de subtração é denotada pelo sinal - , o qual, quando combinado com os sinais de cada uma das quantidades a serem subtraídas, irá mudar todos."

Dessa maneira, a diferença entre *a* e *b* é *a - b*: de *a* e *-b* é *a - -b* ou *a + b*: de *-a* e *b* é *- a - b: de -a* e *-b* é *-a - -b*, ou *-a + b*: e similarmente em outros casos (Peacock, 1830, p. 16).

No caso da multiplicação e divisão, naturalmente, o princípio da combinação de sinais por si explica a regra dos sinais. Nos capítulos anteriores, vimos que tais regras foram explicadas de diferentes formas.

Regra da Multiplicação:

"Os sinais do produto são determinados pelo princípio geral declarado no artigo 7 [regra da concordância dos sinais."

$$(1)\, a \times b = ab$$
$$(2)\ a \times - b = - ab$$
$$(3) - a \times - b = ab$$
$$(4)\ - a \times b = - ab$$

Em seguida, as regras também são melhor especificadas para os casos que incluem quantidades compostas ou coeficientes numéricos Com relação à divisão, as regras simbólicas acabam ficando divididas em três casos e ficam mais complexas, uma vez que a manipulação simbólica no caso da divisão com polinômios fica dificilmente expressa em termos verbais. O mais importante, porém, é compreender que o autor explica tais regras pelo mesmo princípio que funda as demais operações, partindo do fato de que a divisão é o inverso operacional da multiplicação.

Divisão:

"O modo de realizar essa operação, devemos ter em mente, é o inverso da multiplicação (Artigo 10): sob esse princípio as regras para a divisão em todos casos são fundadas."

$a \div - b = \frac{-a}{b}$: isso é evidente já que $\frac{a}{-b} \times - b = a$ (Art. 10); e $\frac{-a}{b} \times - b = \frac{-a \times -b}{b} = \frac{ab}{b} = a$ (Art. 10); isto é, $\frac{a}{-b}$ e $\frac{-a}{b}$, sendo multiplicado pela mesma quantidade produz o mesmo resultado: elas são dessa maneira quantidades equivalentes (Peacock, 1830, p. 42).

16.6 A transição da aritmética para a álgebra

Vejamos então como a álgebra pode ser entendida a partir de um raciocínio que se origina na aritmética. O que ele chama de "primeira transição" da aritmética para a álgebra trata-se da consideração de um sistema que continua preso às restrições e definições da aritmética. Esse sistema, ele chama de **álgebra aritmética** e, na prática, trata-se do mesmo sistema desenvolvido por William Frend e Francis Maseres. Neste sistema, as quantidades são de caráter concreto exclusivamente.

> Os símbolos da álgebra, inteiramente fundados sob esta base, denotariam números, sejam eles inteiros, fracionários, ou magnitudes que admitam representação numérica, sem abraçar o que lhes afetam ou suas propriedades (Peacock, 1830, p. 65) [105]

Vemos portanto um passo inicial similar àquele dado por Woodhouse para iniciar sua argumentação de extensão de significado das operações simbólicas. Como era de se esperar, nessa primeira álgebra, quantidades como *-a* ou *-b* não existem: os sinais de + e - denotam as operações de soma e subtração apenas, e é isto que ele quer transmitir ao dizer que o que afeta as quantidades não fica abarcado: os "sinais independentes" não existem aqui. Com relação a isso, temos mais uma sinalização de que os sinais independentes das quantidades da álgebra são apenas representantes de uma suposta propriedade das quantidades, sendo a letra entendida como uma quantidade positiva sempre.

Na álgebra aritmética, destaca Peacock, as quantidades possuem limites com relação a seus valores relativos e, dessa maneira, não são arbitrárias com relação às suas magnitudes. (Peacock, 1830, p. 66) Além disto, suas regras simbólicas são descobertas, mas sempre a partir de uma dedução que parte dos princípios da aritmética. Um exemplo de regra simbólica demonstrável diz que, ao subtrair uma quantidade composta de outra, alteramos todos os sinais da quantidade subtraída e, ao somarmos, mantemos os sinais da quantidade somada.

Em suma, toda regra simbólica neste sistema está fundamentada na definição aritmética das operações. Este simbolismo aritmético, Peacock demonstra legitimar através de seu *Relatório sobre o Progresso e Presente Estado de certas vertentes da Análise,* publicado no ano de 1833. Ao se referir à concepção de Maseres e Frend, ele diz:

> Os argumentos que eles utilizaram foram irrespondíveis, quando avançados contra a forma sob a qual os princípios da álgebra eram exibidos nas obras elementares e todas as outras daquele período, e que eles continuaram a manter desde então, com alterações sem muita importância; e o sistema da álgebra que foi formada pelo primeiro desses autores [Maseres] foi perfeitamente lógica em completa, sendo todas conexão de suas partes capazes de demonstração estrita, mas houve uma grande multitude de resultados algébricos e proposições de valor e consistência inquestionável que eram inconciliáveis com este sistema, ou, de toda forma, não dedutíveis a partir dele; e entre eles, a teoria da composição de equações, que Harriot

[105] The symbols of Algebra, entirely founded upon such a basis, would denote numbers, whether whole or fractional, or such magnitudes only, as admitted of numerical representation, without embracing their affections or properties.

> deixou de uma maneira tão completa, e que tornou necessário considerar que quantidades negativas e mesmo impossíveis possuem existência real na álgebra, não importa o quão vã possa ser a tentativa de interpretar os seus significados (Peacock, 1833, p. 190).[106]

Fica claro, portanto, que Peacock reconhece a álgebra aritmética como um sistema legítimo, apesar de também reconhecer a limitação que a sua associação a quantidades especificamente aritméticas acarreta na generalidade de proposições algébricas. Na segunda edição, porém, Peacock demonstra mais uma vez o seu suporte a essa concepção limitante de álgebra ao desenvolvê-la mais inteiramente na segunda versão do seu tratado, como veremos posteriormente.

Tendo proposto o sistema da álgebra simbólica, Peacock começa a construir sobre ele o que seria de fato seu sistema de álgebra geral, que vimos fundamentado anteriormente, o qual ele chama de **álgebra simbólica**.

O primeiro passo da transição da álgebra aritmética para a simbólica se dá por meio da generalização da linguagem, isto é, a suposição de que os símbolos, que antes representavam quantidades numéricas, podem agora representar quaisquer quantidades, não importando de que natureza elas sejam.

> Em primeiro lugar, podemos corretamente generalizar a representação dos símbolos de quantidades numéricas que eles devem denotar em um sistema, para quantidades que são ilimitadas, tanto em natureza e suas magnitudes, as quais eles podem denotar na outra (Peacock, 1830, p. 69, 70).

Sobre essa passagem de linguagem, vemos Peacock atribuí-la ao pressuposto da independência dos sinais + e -, uma vez que

> É a admissão desse princípio, em qualquer maneira a qual somos levados a ele, que torna necessário considerar os símbolos não meramente como representações gerais de números, mas de qualquer espécie de quantidade, e da mesma maneira dar uma forma às definições da operação da álgebra, as quais devem as tornar independentes de qualquer ciência subordinada: pois em primeiro lugar,os símbolos o que quer que denotem, devem ser ilimitados em valor, e é apenas quando eles deixam de ser números abstratos que hemos de ser permitidos de interpretar os efeitos que os sinais + e - (ou quaisquer outros sinais) essencialmente ligados a eles podem supostamente expressar (Peacock, 1830, p. *ix*).[107]

[106] The arguments which they made use of were unanswerable, when advanced against the form under which the principles of algebra were exhibited in the elementary and all other works of that period, and which they have continued to retain ever since, with very trifling and unimportant alterations; and the system of algebra which was formed by the first of these authors was perfectly logical and complete, the connexion of all its parts being capable of strict demonstration; but there were a great multitude of algebraical results and propositions, of unquestionable value and of unquestionable consistency with each other, which were irreconcilable with such a system, or, at all events, not deducible from it; and amongst them, the theory of the composition of equations, which Harriot had left in so complete a form, and which made it necessary to consider negative and even impossible quantities as having a real existence in algebra, however vain might be the attempt to interpret their meaning.

[107] It is the admission of this principle, in whatever manner we are led to it, which makes it necessary to consider symbols not merely as the general representatives of numbers, but of every species of quantity, and likewise to give a form to the definition of the operations of Algebra, which must render them independent of any subordinate science: for in the first place the symbols, whatever they denote, must be unlimited in value, and it

A passagem traz de volta algumas ideias já abarcadas. Além de mostrar a independência das proposições algébricas de qualquer de suas aplicações, ela demonstra sua concepção de que números são estritamente positivos e que, na álgebra, quantidades mais gerais são tratadas, as quais têm uma propriedade evidenciada pelos sinais + e -. Sendo assim, *-a* e *+a* representam uma mesma quantidade, cada uma dotada de uma propriedade diferente, a qual é transmitida pelo seu sinal independente.

Sua álgebra portanto, não é marcada por uma extensão do domínio dos números positivos; essa não é a sua preocupação. A transição da aritmética para a álgebra incorre a suposição de que as quantidades algébricas representam quantidades mais gerais em vez de "números abstratos", sendo essa a sua vantagem. Fica então claro que a ideia de que apenas números positivos são de fato números perdura, e que os sinais independentes são um pressuposto que necessariamente exige a separação da concepção numérica dos objetos da álgebra.

O segundo passo da transição trata-se da generalização da operação de subtração, a qual era limitada na aritmética: a operação $a - b$ torna-se igualmente possível em todos os casos. Como na álgebra, os símbolos são gerais e não mais possuem restrições intrínsecas de valor ou natureza, uma restrição da subtração não se torna mais necessária, uma vez que os símbolos em si não mais carregam uma qualidade relativa de ser maior ou menor do que outros.

> Como os símbolos a e b transmitem nenhuma ideia de maior ou menor, devemos assim considerar $a - b$ como igualmente possível, na álgebra simbólica, seja a maior do que b ou b maior do que a (Peacock, 1830, p. 70).

E, na passagem abaixo, o autor expressa que tal redefinição da operação não se trata de uma necessidade que advém da nova universalidade dos símbolos, mas sim de um pressuposto efetivado pelo autor que, logicamente, não decorre de nenhum princípio aritmético:

> Essa generalização da operação denotada por - é, na realidade um pressuposto, no sentido de que ela não é uma consequência que pode ser deduzida da operação de subtração como ela é definida e usada na aritmética e na aritmética algébrica (Peacock, 1830, p. 71).

Diferentemente daquilo que ele havia exposto no capítulo introdutório, aqui, essa generalização da subtração é que fará surgir as quantidades isoladas com sinal -.

> Faça $b = a + c$. Então $a - b = a - (a+c)$. Pela generalização da operação -, a expressão torna-se equivalente a $a - a - c$. Logo, cortando as letras *a,* ela torna-se equivalente a - *c* (Peacock, 1830, p. 71).

A generalização da subtração, portanto, leva à consideração dos sinais + e - independentemente das operações de soma e subtração. Ao olharmos a maneira como as quantidades negativas são "descobertas" no processo acima, podemos ver como isto ocorre através de uma manobra simbólica, assim como Woodhouse o fez a partir da transposição, de

---

is only by this ceasing to be abstract numbers that we shall be enabled to interpret the affections which the signs + or - (or any other signs) essentially attached to them may be supposed to express...

modo que o sinal de - também fica ressignificado de um passo para o outro. Assim, ainda que possamos dizer que estas são estabelecidas sem a recorrência a interpretações a priori, apontamos o mesmo que dissemos sobre Woodhouse: elas surgem a partir de símbolos que antes representavam quantidades positivas, conjuntamente com uma ressignificação dos sinais delas, em vez de surgirem a partir de resultados de resolver equações. Peacock chega a considerar uma segunda via para suas pressuposições, onde a independência dos sinais independe da generalização da subtração, e *-a* não surge através da manipulação, mas isso em nada afeta o que já foi dito. Os símbolos da forma *-a* continuam sendo compreendidos como "uma quantidade *a* com um sinal - na frente" , e o conceito de número não se emancipa das quantidades positivas concretas.

O que pode ser considerado o passo final da transição é a definição das manipulações simbólicas decorrentes das operações algébricas. No capítulo introdutório, vimos como elas ficam definidas a partir do pressuposto da regra de concordância dos sinais. Aqui, ele tenta explicar o motivo pelo qual a regra foi colocada desta maneira para as operações, evidenciando assim o paralelo que se estabelece entre as duas ciências:

> Na álgebra simbólica, assumimos a existência de duas operações, denotadas por + e -, as quais são igualmente definidas como inversas uma da outra: se agora assumirmos que os mesmos sinais + e - denotam adição e subtração da álgebra aritmética, hemos de deduzir como uma consequência necessária, a regra para concordância de sinais iguais e desiguais, a partir da natureza previamente entendida e definida das operações. (Peacock, 1830, p. 72)[108]

O raciocínio por trás dessa dedução está alinhado com aquele que Woodhouse usou para derivar regras operacionais sob quaisquer símbolos: supondo as operações da álgebra, que trata de quantidades gerais, como sendo a mesma das quantidades especificamente aritméticas, podemos deduzir a regra da concordância dos sinais, uma vez que ela se aplica na aritmética, ainda que nesta ela seja demonstrável e limitada por sua concepção fechada a quantidades positivas. Essa relação fica novamente evidente ao final da seguinte crítica que ele faz sobre o uso de interpretações para fundamentar a álgebra, em detrimento do uso de pressupostos:

> Uma das consequências mais importantes dessa visão dos princípios e operações da álgebra, é a completa separação que ela causa entre as leis para combinação de símbolos e os princípios de suas interpretações: em sistemas comuns de álgebra, a interpretação prévia, assumida ou entendida, das operações da álgebra, determina ou pretende determinar, os resultados que são obtidos, e as leis das combinações simbólicas: mas o caso é revertido no sistema que eu me aventurei a propor, onde as leis das combinações simbólicas são assumidas, não arbitrariamente, mas com uma referência geral a suas interpretações antecipadas na ciência subordinada da aritmética, enquanto as interpretações dos resultados obtidos são inteiramente determinados em acordo com estas leis por uma referência aos valores

[108]...in Symbolical Algebra, we assume the existence of two operations, denoted by + and -, which are likewise defined to be the inverse of each other: if we now assume the same signs + and -, to denote Addition and Subtraction in Arithmetical Algebra (Art. 62), we shall deduce, as a necessary consequence, the rule for the concurrence of like and unlike signs (Art. 63), from the previously understood and defined nature of these operations.

específicos dos símbolos...mantendo-se em mente, porém, que tais interpretações nunca são matematicamente necessárias em qualquer caso... (Peacock, 1830, p. *xx*, *xxi*).[109]

A consequência direta das operações serem assumidas desta maneira, Peacock argumenta, é o estabelecimento de relação entre as ciências

> De modo a manter o paralelo entre as duas ciências, nós assumimos a mesma regra ou lei de sinais na álgebra simbólica, que da mesma forma também define seu significado: enquanto, portanto, os símbolos representam quantidades aritméticas, somos permitidos de interpretar o significado das operações + e - como sendo idênticas em todo respeito à adição e subtração aritmética; quando as quantidades denotadas pelos símbolos não mais são aritméticas, sejam elas números com sinais negativos ligados a elas, retas ou áreas ou qualquer outra quantidade, suas interpretações, quando admitem alguma, devem ser feitas em acordo com as suposições previamente feitas a seu respeito. (Peacock, 1830, p. 72)[110]

Em outras palavras, assim como Woodhouse, Peacock define as leis assumidas da álgebra visando preservar as leis demonstráveis da aritmética. Desse modo, no momento em que uma expressão da álgebra é desprovida de sinais independentes, ela pode ser interpretada como uma expressão sobre operações de quantidades concretas positivas. Mas, no caso de algum simbolismo ser incongruente com a aritmética, a interpretação das operações deve apenas estar de acordo com os pressupostos estabelecidos para a álgebra. Esta é mais uma demarcação de Peacock de que as operações da álgebra são fundadas unicamente em pressupostos e não em interpretações.

O motivo pelo qual Peacock procedeu dessa maneira para estabelecer seus pressupostos segue também o mesmo argumento do comodismo de cálculo de Woodhouse. A alegada liberdade que existe na álgebra para o estabelecimento de regras simbólicas não é explorada de várias maneiras arbitrárias porque, para Peacock, é importante que a linguagem possa ser de alguma maneira frutífera, isto é, passível de alguma interpretação. Por conta disso, ele propôs que a aritmética fosse a sua "ciência de sugestão", ou seja, a fonte a partir da qual ele obtém suas regras simbólicas, sem se ater às suas limitações.

> … para que, porém, essa ciência não seja algo sobre especulações inúteis e estéreis, escolhemos uma ciência subordinada como um guia apenas, e não como um

[109]One of the most important consequences of this view of the principle and operations of Algebra, is the complete separation which it effects of the laws for the combination of symbols from the principles of their interpretation: in common systems of Algebra, the previous interpretation, assumed or understood, of the operations of Algebra, determines, or is supposed to determine, the results which are obtained, and the laws of symbolical combinations: but the case is reversed in the system which I have ventured to propose, where the laws of symbolical combinations are assumed, not arbitrarily, but with a general reference to their anticipated interpretation in the subordinate science of arithmetic, whilst the interpretations of the results obtained are entirely determined in accordance with those laws by a reference to the specific values of the symbols.

[110] ...in order to keep up the parallel between the two sciences, we assume the same law or rule of signs in Symbolical Algebra, which likewise further defines the meaning of the operations denoted by + and -, as in every respect identical with Arithmetical Addition and Subtraction: when the quantities denoted by the symbols are no longer arithmetical, whether they be numbers with negative signs attached to them, or lines or areas on any other quantities, their interpretation, when admit of any, must be in perfect accordance with the assumptions previously made respecting them… it being kept in mind, however, that such interpretations are never mathematically necessary in any single case...

> fundamento para nossos pressupostos, e a moldamos de modo que a álgebra possa se tornar a forma mais geral daquela ciência, quando os símbolos denotam as mesmas quantidades que são os objetos de suas operações (Peacock, 1830, p. 71).

Como já ficou evidenciado por várias falas dele, nem por isso, ele quer dizer que existe uma relação lógica entre os princípios de uma ciência e a outra: a aritmética nada mais é do que uma ciência de sugestão, a partir da qual ele retira suas regras puramente simbólicas, e este é um ponto afirmado algumas vezes tanto por Peacock como Woodhouse.

> Tais pressupostos, apesar de serem sugeridos pela álgebra aritmética, e possuírem a mais próxima analogia a seus princípios e leis, não são por conta disso menos arbitrárias: elas são escolhidas e não deduzidas, de modo que as duas ciências podem possuir leis comuns e operações comuns, contanto que as quantidades que esteja sujeitas a elas forem comuns; e que assim podemos transferir as conclusões deduzidas pela ciência mais geral para aquela que é menos (Peacock, 1830, p. 74)[111]

A fala ainda ajuda a mostrar mais uma vez como Peacock significa o mesmo que Woodhouse ao se referir às leis da álgebra como sendo arbitrárias, no sentido de que elas são escolhidas pelo autor e não podem ser demonstradas, diferentemente dos princípios da álgebra aritmética, as quais não podem ser escolhidas. É dessa maneira que, para Peacock, a relação entre as duas ciências "não é necessária, mas apenas convencional" (Peacock, 1830, p. viii). Uma vez que os princípios da álgebra são arbitrários e não podem ser deduzidos da aritmética nem de nenhum outro assunto, a relação que foi feita entre as duas não se trata de uma necessidade, mas algo feito dessa maneira por questões utilitárias. Por isso a relação entre elas é apenas uma "convenção".

Dando prosseguimento às operações, o mesmo raciocínio é utilizado para se definirem as operações de multiplicação e divisão. A fim de mostrar novamente como as regras demonstradas da aritmética são utilizadas nos pressupostos da álgebra, vejamos como Peacock reage a três proposições demonstradas na álgebra aritmética.

1. $a(b+d) = ab+ad$
2. $(a+b)(c-d) = ac -ad +bc -bd$
3. $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$

De acordo com essas deduções, "parece que quantidades precedidas por sinais iguais produzem, quando incorporadas pela multiplicação, um resultado que é precedido pelo sinal +, e quando elas são precedidas por diferentes sinais o resultado é precedido pelo sinal de - (Peacock, 1830, p. 67).

Estabelecendo isto como uma regra simbólica, temos assumida a regra dos sinais da operação.

---

[111]...such assumptions, though suggested by Arithmetical Algebra, and bearing the closest analogy to its principles and laws, are not on that account the less arbitrary: they are chosen and not deduced, in order that the two sciences may have common laws and common operations, as long as the quantities which are subject to them are common; and that we may thus be enabled to transfer the conclusions deduced by the more general science to the one which is less so.

> Na álgebra simbólica assumimos a existência de duas operações, denotadas por $\times$ e $\div$, ou pela posição dos símbolos com relação um ao outro, que são da mesma maneira inversos um ao outro. Na álgebra aritmética quando as quantidades incorporadas são compostas, deduzimos uma regra para a incorporação dos sinais + e -, como uma consequência necessária de seus significados : na álgebra simbólica, esses sinais vão juntos, ao realizarmos estas operações, sejam as expressões compostas ou simples: assumimos, portanto, como temos a liberdade de fazer, a mesma regra para a incorporação dos sinais (Peacock, 1830, p. 72).[112]

E, finalmente, a comutatividade precisa ser assumida também:

> Em um sistema [álgebra aritmética], é requerido que se prove que é indiferente em que ordem as operações se sucedem: na outra [álgebra simbólica] é assumido que seja assim. (Peacock, 1830, p. 73)

16.7 Questionamento de Peacock: da relação entre a álgebra e a aritmética

Tendo estabelecido os primeiros princípios da álgebra de Peacock, incluindo as quatro operações mais básicas, vale agora tentar melhor compreender a crítica que ele lançou à concepção comum de álgebra.

A característica definitiva do sistema algébrico construído por Peacock, como pudemos ver, trata-se do estabelecimento de pressupostos os quais o autor utiliza para definir os objetos com os quais a ciência lida, além das operações que são realizadas sobre estes. Mais do que isso, como aponta o próprio autor seguidas vezes, tais pressupostos são sempre "assumidos", e logo não são descoberto por meio de nenhum processo dedutivo que parta dos princípios da aritmética, ainda que muitas das regras se baseiem em regras demonstradas na álgebra aritmética. Segundo o autor, o estabelecimento de pressupostos que não possuem uma relação lógica com a aritmética é o que efetiva uma separação entre as duas ciências. Ao se referir à primeira suposição simbólica que ele menciona, isto é, aquela sobre a independência dos sinais, o autor diz:

> E é essa suposição que efetiva a separação entre a álgebra aritmética e a simbólica, e que torna necessário estabelecer os princípios dessa ciência sob uma base dela própria: pois a suposição em questão resulta de nenhum processo de raciocínio a partir do dos princípios e operações da aritmética...ele deve ser considerado, então como um princípio independente, que é sugerido como um meio de esquivar de uma dificuldade que resulta da aplicação de operações aritméticas a símbolos gerais (Peacock, 1830, p. ix).

A dificuldade a que o autor se refere é provavelmente a limitação do significado das ,operações aritméticas, as quais não permitem que operemos com quantidades dotadas de

[112] ...in Symbolical Algebra, we *assume* the existence of two operations, denoted by x or ÷, or by the position of the symbols with respect to each other, which are likewise the inverse of each other (Art. 8 and 10): in Arithmetical Algebra, when the quantities incorporated are compound, we deduce a rule for the incorporation of the signs + and -, as a *necessary consequence* of their previously ascertained meaning (Art. 65): in Symbolical Algebra, such signs come together, in performing these operations, whether the expressions are compound or simple: we *assume*, therefore, as we are at liberty to do, the same law of the incorporation of signs (Art. 7.)

certas relações que lhe permitam uma a atribuição de “sinais independentes”. Esta ruptura é exatamente o que incomodou o autor ao perceber que alguns autores não a mencionavam em seus próprios sistemas, como pudemos ver em suas críticas. Dessa maneira, podemos dizer que a recorrência a princípios pressupostos e independentes na álgebra é a maneira que o autor encontra de satisfazer o seu padrão de rigor e solucionar o problema que enxerga nos fundamentos da ciência. Tendo estes pontos em mente, voltemos à sua crítica à chamada aritmética universal. Em sua origem, com Newton, a aritmética universal e a aritmética comum foram associadas da seguinte forma:

> Ambas são fundadas nos mesmos fundamentos e almejam o mesmo fim, isto é, aritmética definitivamente e particularmente, Álgebra indefinidamente e universalmente (Universal…, 1720, p. 1)

Dessa maneira, Newton deliberadamente diz que a álgebra e a aritmética são fundadas sob os mesmos princípios. O motivo pelo qual isto deve ter incomodado Peacock pode ser entendido ainda melhor em uma crítica que ele tece ao Cours d’Analyse de Cauchy no *Relatório* de 1833:

> Ele subsequentemente dá aqueles sinais [+ e -] uma interpretação convencional, denotando quantidades que são opostas uma à outra; e assumindo a existência de quantidades afetadas por sinais independentes, e denotando $+A$ por a e $-A$ por b, ele diz que
>
> $$+ \quad (+A) = +A$$
> $$- \quad (+A) = -A$$
> $$+ \quad (-A) = -A$$
> $$- \quad (-A) = +A$$
>
> o que ele considera como sendo uma prova suficiente da regra da concordância dos sinais em quaisquer operações que eles possam ocorrer; apesar de ser necessário um exame bem pequeno desse processo de raciocínio para mostrar que ele envolve vários pressupostos arbitrários e interpretações que podem ou não ser consistentes uns com os outros… dessa maneira, ‘subtração é o inverso da adição na aritmética; então dessa maneira, também, subtração é o inverso da adição na álgebra, mesmo quando aplicada a quantidades afetadas com os sinais + e -, e quaisquer que sejam estas quantidades’. Mas isto é uma conclusão ou um pressuposto? ou de que maneira podemos explicar em palavras o processo que a mente segue em efetivar tais deduções? ... O sistema que ele seguiu não meramente no estabelecimento das operações fundamentais mas também na interpretação do que ele chama de *expressões simbólicas e equações simbólicas*, requerem a introdução de novas convenções, que não são menos arbitrárias porque são feitas necessárias para o propósito de fazer os resultados da ciência consistentes um com o outro... (Peacock, 1833, p. 193)

Da mesma maneira que Peacock questiona se a regra da concordância dos sinais de Cauchy trata-se de um pressuposto ou de uma conclusão feita a partir de outra proposição, o mesmo poderia ser questionado sobre as regras operacionais introduzidas na álgebra de Newton, ou mesmo sobre a origem das quantidades negativas. Trata-se de uma crítica que vimos presentes também em Woodhouse, e que reflete a preocupação destes autores em ter cada proposição fundada em um pressuposto ou em alguma outra proposição, ou seja, tendo sua origem lógica claramente demarcada. Ainda que percebamos que a álgebra de Newton não se está fundada nos mesmos preceitos da aritmética, o autor alega o contrário, mas acaba apresentando regras que estariam sendo tacitamente assumidas.

Como dissemos anteriormente, John Wallis e demais autores também dão pistas de que vêem uma conexão em princípios entre a álgebra e a aritmética ao alegar que as operações algébricas da primeira derivam diretamente dos princípios da segunda. Esta perspectiva, de acordo com Peacock, esconde uma série de pressupostos que são particulares da ciência simbólica da álgebra, e que de modo algum podem ser derivados a partir dos princípios aritméticos, a começar pela suposição da independência dos sinais e da redefinição das operações.

16.8 O Princípio da Permanência de Formas Equivalentes:

Logo após Peacock ter definido as principais operações da álgebra, o autor estabelece um norte para as suas investigações dentro da ciência, antes declarando um novo significado ao sinal "=". Esta redefinição ou generalização do conceito de igualdade trata-se de mais um claro alinhamento entre Woodhouse, Babbage e Peacock:

> Assim, todas as operações fundamentais são simbólicas, e agora podemos deduzir resultados simbólicos e formas equivalentes por meio delas sem qualquer consideração pelos princípios de qualquer outra ciência. Por isso introduzimos o sinal = para substituir as palavras *o resultado algébrico de* ou *algebricamente equivalente a,* para conectar os resultados obtidos com a representação simbólica que os produz ...(Peacock, 1830, p . *xi*).

Vemos, portanto que o símbolo passa a indicar uma equivalência algébrica entre duas formas. Este significado o autor deixa mais claro posteriormente: duas expressões, ou formas, são algebricamente equivalentes quando os membro da equação podem ser reduzidos a um mesmo a partir de operações algébricas (Peacock, 1830, p. 101). Por isso que ele pode ser lido como "o resultado algébrico de" ou, como ele também coloca, "dá como resultado" (Peacock, 1830, p. 100) A partir deste significado, fica claro que o símbolo = na álgebra desconsidera os valores específicos dos símbolos, mas apenas considera se é possível que eles se tornem idênticos por meio de alguma(s) operação algébrica. Diferentemente, no caso da igualdade aritmética ou comum, consideramos os valores dos símbolos ao dizer que estes são iguais (Peacock, 1830, p. 100).

A partir disto, podemos dizer que $\frac{a^2-x^2}{a-x}=a+x$ é uma equivalência algébrica pois a divisão de a^2-x^2 por a-x dá como resultado, $a+x$, (Peacock, 1830, p. 101) desconsiderando-se qualquer valor que possa ser atribuído aos símbolos. O resultado pode ser obtido simbolicamente a partir das regras operacionais supostas pelo autor.

A busca por formas equivalentes na álgebra acaba naturalmente tornando-se um dos grandes nortes da ciência, porém, esta prática pode ser fortemente facilitada pelo que ele chama do **"princípio da permanência de formas equivalentes"**.

> Qualquer forma que seja algebricamente equivalente a outra, quando expressa em símbolos gerais, deve ser verdadeira, qualquer que seja aquilo que os símbolos denotam.
>
> De modo inverso, se descobrimos uma forma equivalente na álgebra aritmética ou qualquer outra ciência subordinada, quando os símbolos são gerais em forma mas específicos em suas naturezas, o mesmo deve ser uma forma equivalente, quando os símbolos são gerais em suas naturezas assim como em suas formas (Peacock, 1830, p. 104).[113]

A partir da percepção deste princípio que o autor se vê capaz de deduzir formas equivalentes na álgebra simbólica a partir das formas equivalentes que são demonstráveis na álgebra aritmética, a ciência de sugestão. Por exemplo, ele consegue estabelecer a equivalência:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

na álgebra simbólica, isto é, que a equivalência vale para quaisquer valores de n e m, sejam eles positivos, negativos, inteiros ou fracionários. Uma vez que as leis algébricas de combinação de símbolos são assumidas de modo a coincidir com as leis de ciências subordinadas como a aritmética, a demonstração de uma equivalência na ciência subordinada deverá implicar a mesma equivalência simbólica na álgebra simbólica, onde os símbolos não possuem natureza específica e podem adquirir valores mais gerais, isto na condição de assumirmos que uma forma equivalente de fato exista para ela. (Peacock, 1830, p. 104-105) Desta forma, como podemos demonstrar que $a^n \times a^m = a^{n+m}$ é válido quando n e m são números inteiros, ao assumirmos que $a^n \times a^m$ possua uma forma equivalente também na álgebra simbólica, o princípio nos garante que forma equivalente deverá ser a^{n+m} também,

> ...pois essa forma não pode passar por nenhuma mudança, de acordo com os pressupostos que fizemos, a partir de qualquer mudança na natureza de seus símbolos, e deve assim continuar os mesmos quando os símbolos são números: se, portanto, descobrirmos essa forma em qualquer caso, o descobrimos para todos os outros (Peacock, 1830, p. 103-104).[114]

Ou seja, se a forma é equivalente para valores especificamente aritméticos dos símbolos, ela deverá ser também equivalente se generalizarmos a natureza dos símbolos, uma vez que as leis simbólicas não dependem dessas naturezas, e são assumidas de modo a coincidir na álgebra e na aritmética. Logo, tendo demonstrado formas equivalentes na álgebra aritmética, podemos descobrir a mesma equivalência na álgebra simbólica, ao assumirmos

---

[113]"*Whatever form is Algebraically equivalent to another, when expressed in general symbols, must be true, whatever those symbols denote.*"

Conversely, if we discover an equivalent form in Arithmetical Algebra or any other subordinate science, when the symbols are general in form though specific in their nature, the same must be an equivalent form, when the symbols are general in their nature as well as in their form.

[114] For this form can undergo no change, according to the assumptions which we have made, from any change in the nature of its symbols, and must therefore continue the same when the symbols are numbers: if, therefore, we discover this form in any one case, we discover it for all others.

que ela exista. Este princípio, o autor utiliza não apenas para generalizar as operações com expoentes na álgebra, mas também declara sua validade para a expansão da forma binomial $(1+x)^n$ (Peacock, 1830, p. 106), por exemplo. Finalmente, devemos perceber ainda que o seu princípio alinha-se com aquele que Woodhouse também havia articulado em seu artigo de 1801, ainda que sem dar um nome a ele, e ainda com o que Babbage disse brevemente em seu ensaio. Assim, percebemos que não somente os autores visavam a retenção das regras simbólicas da aritmética tendo em vista a preservação de sua aplicabilidade, como também se preocuparam em explicar o princípio que permite que tais generalizações sejam realizadas.

16. 9 A segunda edição do *Tratado* de Peacock

Na década seguinte, Peacock lançou a segunda edição de seu tratado de Álgebra, desta vez separando-o em dois volumes: um foi lançado em 1842 e trata exclusivamente a aritmética, e o outro, publicado em 1845, trata a álgebra simbólica. Em seu prefácio, Peacock oferece uma razão para tal separação:

> Eu não considerava então [na primeira edição] necessário separar a exposição de uma ciência totalmente da outra. Uma consideração mais amadurecida do assunto, porém, me convenceu da expediência desta separação; pois é extremamente difícil, quando as duas ciências são tratadas simultaneamente, manter seus princípios e resultados separados um do outro, e para obviar a confusão, obscuridade e falso raciocínio que daí surge: uma curta declaração sobre as províncias dessas duas ciências tornará essa dificuldade suficientemente manifesta. (Peacock, 1842, p. *iii, iv*) [115]

Peacock acredita então que a separação fundamental que ele propôs em seu primeiro tratado não ficou livre de possíveis dificuldades didáticas. Isto ocorreu por conta de as duas ciências terem sido abordadas juntamentes, uma em comparação à outra, sem que houvesse um claro estabelecimento dos fundamentos de cada uma em separado.

A consequência da divisão do tratado em dois volumes é a exposição de cada definição da aritmética simbólica e demonstração de proposições de uma maneira lenta. Não há necessidade de vermos cada definição e proposição aqui, mas é suficiente dizer que seu primeiro volume apresenta a aritmética numa estrutura parecida com o tratado de William Frend, cobrindo mais de 400 páginas.Pode-se entender que o objetivo de Peacock com este volume é didático, visando deixar clara a maneira como se derivam as regras simbólicas na aritmética e sob que preceitos podemos estendê-los na álgebra, mas tal atitude apenas reforça sua concordância com a concepção de Maseres e Frend de um simbolismo limitado por quantidades concretas e positivas, a utilidade da qual é limitada pela falta de generalidade,

[115] I did not then consider it necessary to separate the exposition of one science altogether from the other. A more matured consideration of the subject, however, has convinced me of the expediency of this separation; for it is extremely difficult, when the two sciences are treated simultaneously, to keep their principles and results apart from each other, and to obviate the confusion, obscurity and false reasoning which thence arises: a short statement of the distinct and propr provinces of these two sciences will make this difficulty sufficiently manifest.

uma qualidade destacada da álgebra. Dessa maneira, a concepção do Peacock não significa uma ruptura profunda conceitual com a álgebra sintética.

Esta crítica se reflete na maneira como é feita a abordagem das equações resoluções.de segundo grau em ambos os volumes. Sobre isso, apontamos primeiramente que praticamente todos os capítulos tratam só de formas de fazer operações, e há somente um capítulo não muito extenso sobre elas, sendo que este único foca mais em demarcar formas do que em resoluções.

No volume da aritmética, Peacock naturalmente chega a três tipos de equação similares aos tipos encontrados pelos sintéticos, e sob as mesmas restrições nas soluções:

1. $x^2 + 2ax = b$ com solução $x = \sqrt{(a^2 + b)} - a$
2. $x^2 - 2ax = b$ com solução $x = \sqrt{(a^2 + b)} + a$
3. $2ax - x^2 = b^2$ com solução $x = \sqrt{(a^2 - b)} + a$ (Peacock, 1842, p. 223, 224)

Com relação à dupla solução que pode acontecer no terceiro caso, Peacock as chama de "ambíguas" e traz uma declaração que ecoa Maseres, demarcando a falta de generalidade presente nesta concepção por conta do apelo que as equações possuem em significar uma proposição real, uma tradução de um problema:

> As generalizações da álgebra simbólica, que torna equações praticáveis sob qualquer circunstância, irá permitir que designemos duas raízes ou valores à quantidade desconhecida em qualquer equação quadrática, sejam elas possíveis e que possam ser consideradas e interpretadas na aritmética ou não: mas na visão que demos a tais equações nos artigos precedentes, devemos considerar tais valores duplos de *x*, sempre que eles ocorrem, como marcas de indeterminação nos problemas que fornecem as equações, ou nas equações em si: pois eles indicam a existência de dois valores do símbolo ou número buscado, que igualmente responde às condições propostas, e consequentemente mostra que essas condições não são suficientes em fornecer sua definição absoluta e sem ambiguidade (Peacock, 1842, p. 227).[116]

Como indicado na passagem, este problema não ocorre na álgebra simbólica. No segundo volume a equação quadrática é subdividida em 4 formas:

1. $x^2 - px - q = 0$
2. $x^2 + px - q = 0$
3. $x^2 - px + q = 0$
4. $x^2 + px + q = 0$

[116] The generalizations of Symbolical Algebra, which make operations practicable under all circumstances, will enable us to assign two roots or values of the unknown symbol in every quadratic equations, whether they be possible and such as can be considered and interpreted in Arithmetic, or not: but in the view which we have given of such equations in the preceeding Articles, we must regard such double values of x, whenever they occur, as marks of indeterminateness in the problems which furnish the equations, or in the equations themselves: for they indicate the existence of two values of the symbol or number sought for, which equally answer the proposed conditions, and consequently shew that those conditions are not sufficient to furnish its absolute and unambiguous determination.

sendo que Peacock diz que a última é a única que pertence exclusivamente à álgebra simbólica (Peacock, 1842, p. 77) Vemos portanto que o problema antes mencionado dos coeficientes indicarem quantidades estritamente positivas acaba por impedir também que Peacock possua uma equação geral do segundo grau. De qualquer maneira, neste caso, soluções imaginárias e negativas são reconhecidas. Além disso, na ocasião de estarmos diante de um problema onde quantidades negativas sejam passíveis de uma interpretação, o problema da ambiguidade novamente surge. Ao resolver a equação $x^2 + 12x + 35 = 0$, e encontrar a dupla solução $x = -7$ e $x = -5$, ele diz:

> Esta solução é aritmeticamente impossível: mas se valores negativos forem reconhecidos como admitindo interpretação, a solução é também ambígua como o caso precedente [problema aritmético com duas soluções] (Peacock, 1845, p. 80).[117]

O autor, porém, destaca que a ambiguidade não acontece quando estamos pensando no problema sem considerar algum tipo de interpretação. E, isto somente é possível de acontecer na álgebra simbólica, onde os símbolos não estão limitados por uma realidade. Vejamos o que ele diz ao resolver o seguinte problema:

"Dividir o número 10 em duas partes, cujo produto há de ser igual a 24."

Ao obter as soluções $x = 5 \pm \sqrt{-1}$, Peacock alega que o problema é impossível *no sentido em que foi proposto*, isto é, pelo fato de o enunciado sugerir que as soluções devem ser números segundo a sua concepção concreta de número. Apesar disto, "aquelas raízes irão satisfazer as condições simbólicas do problema, pois suas somas $= 5 + \sqrt{-1}$ + $5 - \sqrt{-1} = 10$"(Peacock, 1845, p. 84).

Isto é, a equação gerada pelo problema é impossível por não possuir soluções interpretáveis à luz de seu enunciado. Contudo, destituindo tal equação da interpretação do problema, ela possui duas soluções legítimas, as quais satisfazem suas condições puramente simbólicas: $5 + \sqrt{-1}$ e $5 - \sqrt{-1}$. Não somente isso, como o fato de duas soluções surgirem não fazem com que Peacock a chame de "ambígua". Percebamos, finalmente, como a raíz imaginária é dita satisfazer apenas simbolicamente a equação, demarcando como este é entendido como um símbolo abstrato que pode ser manipulado de modo a satisfazer a equação, mas não como um número. Isso mais uma vez mostra seu foco no simbolismo em detrimento de um conceito precedente de número: As soluções de equações não fazem surgir um novo domínio de número.

16. 10 Reação à Algebra de Peacock

Peacock é reconhecido por ter influenciado uma escola de algebristas com sua concepção de álgebra simbólica, entre eles, De Morgan, Boole e Gregory. Sua concepção, porém, também não foi imune a críticas. William Roward Hamilton foi um dos que contestou

[117] This solution is arithmetically impossible: but if negative values be recognized as admitting of interpretation, the solution is also ambiguous like the one preceding.

a ideia de manipular símbolos segundo regras arbitrárias e, consequentemente, derivando verdades sem apelo à intuição. Em uma carta escrita a Graves em 1835, ele diz:

> Nós [Hamilton e Graves] pertencemos a polos opostos na álgebra; já que você, como Peacock, parece considerar a álgebra como um sistema de sinais e suas combinações," um tanto análogos a silogismos expressos em letras; enquanto eu nunca estou satisfeito a não ser que eu pense que posso olhar além ou através dos sinais para a coisa significada. Eu habitualmente desejo encontrar ou fazer na álgebra um sistema de demonstração repousado finalmente em intuições, análogo de alguma maneira ou outra à Geometria como foi apresentada por Euclides (Graves 1885 2, 143 apud Pycior, 1981, p. 40).

Alguns anos depois, Hamilton voltou às suas críticas:

> Quando eu li aquela obra pela primeira vez...e certamente por um longo tempo depois, ela me pareceu...que o autor designou reduzir a álgebra a um mero sistema de símbolo, e nada mais; um assunto de ganchos de panelas e cabides, de pinceladas pretas sob papel branco, a ser feito de acordo com um conjunto de regras fixo porém arbitrário: e eu me recuse, em minha própria mente, a dar o alto nome de ciência ao resultado de tal sistema; como eu deveria, mesmo agora, considerar um excesso de cortesia, da maneira que que ele for permitido por costume, falar de xadrez como uma "ciência", apesar de ele poder ser chamado de um "jogo científico" (Graves, 1885, 2, 528 apud Pycior, 1981, p. 40-41).

Tais críticas mostram como o conhecimento tido como científico ainda era associado a seu lastro na concretude das ideias, enquanto Peacock propôs que esta apenas serve para prover significados a posteriori às verdades algébricas.

16. 11 Conclusão

Peacock é associado ao chamado movimento da álgebra simbólica e por justa causa: a álgebra dele assim como a de Woodhouse, tem como principal característica a sua definição geral que sequer recorre a ideias matemática, apenas repousando na ideia de sistemas simbólicos providos de regras arbitrárias. Diante disso, precisamos demarcar que Peacock tampouco conseguiu chegar a um conceito de números negativos - , muito devido a ruptura sintética e sua adaptação à mesma, além da falta da diferenciação entre quantidades e números, que não contemplado na sua concepção de simbolismo. Contrastando a novamente a concepção do inglês com a de Hermann Hankel, podemos enxergar a separação crucial a partir dos seus princípios da permanência que, apesar de homônimos introduzem uma extensão distinta. Em Hankel, o conceito de número é previamente separado do conceito de quantidade, Dessa maneira, as operações com o domínio dos números naturais fica definido em primeiro lugar para, em seguida, haver a introdução de novos números, os quais ficam definidos unicamente a partir de equações com operações que respeitem as mesmas propriedades das operações com os números de domínio anterior. Dessa maneira, um número negativo $\overline{a}$ pode ficar definido pela equação $a+\overline{a}=0$, a qual estende o significado da operação +: Agora podemos operar com esses novos objetos, sem que seus resultados fiquem alterados quando operamos estritamente com números do domínio anterior. Neste sentido, ocorre de fato a extensão do domínio dos números.

Peacock, por sua vez, chega a trazer um novo princípio da permanência, mas este igualmente estende apenas o significado dos símbolos a partir de quantidades específicas. Como vimos, a quantidade *-b* é vista como uma quantidade *b* marcada por uma relação representada pelo sinal -, e pode ser originada em seu sistema a partir da generalização da subtração para os casos não comportados na aritmética, a qual acarreta numa ressignificação do sinal - de uma operação para uma parte constituinte do símbolo *-b*. Dessa forma, sua intenção era apenas criar novos arranjos simbólicos e depois associar interpretações independentes a eles, segundo o contexto de um problema. Nada se fala sobre um conceito de número negativo, e os termos como *-b ou* $\sqrt{-b}$ são apenas um rearranjo de símbolos. Eles podem satisfazer simbolicamente uma equação, no sentido de que, se substituídas na incógnita, levam a uma "formas equivalentes", mas não são objetos em si definidos a partir de uma equação onde o símbolo é imaterial. Com Hankel, o que se estende é a operação considerada em si, independentemente dos símbolos. A conceitualização prévia de número é o que permite que ocorra uma extensão de seu domínio a partir de equações e suas operações.

17 Síntese

A álgebra inglesa do início do século XVII fica marcada pelos nomes mais influentes de William Oughtred e Thomas Harriot. Essas duas figuras se associam pelo fato de que ambas são universitárias, mas não tiveram treinamento formal matemático nas suas respectivas instituições. Seus tratados foram elaborados no contexto de mecenas que os apadrinharam. De um modo geral, a álgebra deles se caracteriza por uma influência de Viète, mas marcada por um simbolismo mais enxuto. Em ambos vemos que os conceitos das quantidades literais e suas operações aritméticas são apresentadas puramente em termos simbólicos sem qualquer tentativa de fundamentá-las ou explicá-las, e quantidades negativas fazem-se presentes, ainda que, em Oughtred, sirvam apenas como ferramentas de cálculo para problemas aplicados à geometria.

As décadas seguintes marcaram uma ausência de livros algébricos. Nas três últimas décadas do século, vimos os tratados de John Kersey, John Wallis e Isaac Newton, apesar deste último somente ter sido publicado no século seguinte. Esses três livros marcam um direcionamento à concepção de que a álgebra está fundamentada nas mesmas bases da aritmética comum, com a diferença de que esta permite resolver mais problemas por conta do poder generalizador do método analítico. Estruturalmente, ainda vemos que os livros dedicam uma parte exclusiva à “teoria de equações”, onde se mostra como estas são construídas, as relações entre raízes coeficientes, etc., elaborações que, podemos dizer, originaram-se a partir de Harriot e Descartes. Nas obras subsequentes, podemos ver que essa abordagem fica mantida. Uma diferença que vemos especificamente em Kersey e John Wallis é que as operações algébricas precisam ser explicadas a partir de algum artifício. Além disso, os três fazem questão de associar a dualidade afirmação/negação a ideias concretas como dívida/saldo, movimento contrário/movimento para a frente, etc. O conceito de quantidade, porém torna-se basilar, enquanto os números permanecem confinado aos positivos. Apesar do tratamento abstraído das quantidades negativas em equações descontextualizadas, Wallis deixa claro que “não se pode conceber um número negativo de maneira abstrata”. Podemos ainda dizer que, a partir destes autores, fica de certa forma moldada a abordagem da álgebra nas universidades inglesas.

O século seguinte vê uma manutenção dessa abordagem nas obras de MacLaurin e Nicholas Saunderson, sendo estas representantes da álgebra que era praticada em Cambridge no momento. A diferença principal, porém, encontra-se na maneira como estes autores concebem o duplo caráter da quantidades: nas palavras de MacLaurin, as quantidades possuem, além de sua quantidade, uma qualidade, a qual é contrária nas quantidades positivas e negativas, e expressa pelos sinais + e -. Tal noção mais desenvolvida de quantidade pode ser vista como um alinhamento com uma concepção desenvolvido no exterior, especificamente pelo francês Fontenelle em seus *Éléments de la géométrie de l’infin de 1727.*

> … toda magnitude positiva ou negativa, não apenas possui seu ser numérico, a partir do qual ele é um certo número, uma certa quantidade, mas possui além disso, seu ser específico, a partir do qual ele é uma certa coisa oposta a outra. Eu digo oposto a outra, porque é apenas por essa oposição que ele obtém um ser específico (Fontenelle, 1727, p. 170).

No tratado dos ingleses, a ideia da oposição inerente entre as quantidades positivas e negativas fica manifesta nas operações algébricas, no sentido de que estas ficam agora fundamentadas no que Saunderson chama de “regra dos contrários”. Podemos ver outra característica notória especificamente na obra de Nicholas Saunderson, no tratamento de equações quadráticas. Pela primeira vez, podemos ver uma equação geral, onde os coeficientes podem ser tanto negativos como positivos e os sinais das equações marcam apenas uma operação. Em outras palavras, é esta a primeira vez em que as “letras” de uma expressão algébrica podem ser substituídas tanto por quantidades afirmativas ou negativas, independentemente dos sinais que as conectam.

Paralelamente a estes matemáticos, encontramos uma ruptura conceitual em autores que se opõem à ideia de quantidades negativas ou “menores do que nada”, por conta de estas irem contra uma epistemologia substancialista. O primeiro representante que vimos nesse sentido foi Thomas Simpson, um professor da RMA de Woolwich. Nele, as quantidades negativas e suas as regras são contestadas tendo em vista a suposta falta de referência real que estas ideias podem ter. No entanto, sua concepção não é muito desenvolvida, e as quantidades negativas permanecem sendo usadas como ferramentas de cálculo e compreendidas exclusivamente no contexto de quantidades que admitam uma noção de oposição.

Maseres e Frend, em seguida, carregam uma crítica mais profunda ao defenderem uma ruptura na concepção da álgebra em si. Segundo eles, a álgebra permanece sendo a “aritmética universal”, mas isso significa que ela transmite uma ideia substancial por meio de símbolos da mesma maneira que uma proposição a transmite por meio de palavras, ou a geometria, por meio de figuras. Sendo assim, a impossibilidade das quantidades negativas isoladas fica explicada pelo fato de que o sinal - significa literalmente “de...tome...”, e logo uma relação entre duas quantidades, a primeira sendo maior do que a segunda, como na aritmética.

A característica da álgebra, portanto, encontra-se na capacidade de transmitir por meio de símbolos a ideia clara e específica de uma proposição ou problema, e não em seu poder de generalizá-los, como exaltavam os analistas anteriores. Essa concepção se identifica com os comentários tecidos por Hankel a respeito do método sintético que era utilizado pelos gregos antigos na abordagem de problemas geométricos, de modo que vemos surgir uma “álgebra sintética”.

> Os antigos só conhecem a abordagem de desenvolvimento progredindo sinteticamente do particular ao mais geral, do simples ao composto; o que falta para eles são princípios e métodos gerais. Eles têm uma preferência forte pelo específico e pela maior limitação de conceitos. (Hankel, 1875, p. 1)

Essa concepção sintética limitante fica perceptível na abordagem das equações de segundo grau, onde Maseres diz que, ao permitir que soluções negativas sejam consideradas, comete-se o erro de resolver duas equações em uma. Isto em si é um erro pois ele acredita que essa prática insere premissas na representação simbólica que não estavam presentes na apresentação do problema, e que isso se configura como uma espécie de "generalização exagerada" que compromete a linguagem algébrica. Portanto, as equações quadráticas da álgebra sintética precisam ser separada em casos: consistem de problemas distintos, e generalizá-las em uma única equação implicaria encontrar soluções de outros problemas além daquele que se pretende resolver.

Podemos contrastar a abordagem desses dois com aquela que surgia na França, e que encontra em Lazare Carnot (1753-1823) um de seus mais notáveis proponentes. Nessa região, a transição epistemológica que ocorria era caracterizada pela maior valorização dos sentidos na significação dos objetos matemáticos, e Carnot, nesse contexto, acreditava que havia uma superioridade da geometria com relação à álgebra. Maseres, por sua vez, apenas achava que o simbolismo algébrico havia sido subvertida pelos modernos, que nele inseriram ideias como as quantidades menores do que nada. De qualquer maneira, as operações algébricas ficam igualmente restringidas por uma visão substancialista, de modo que $a(b\text{-}c) = ac - bc$ também somente é possível quando a > b. Para os casos que vão além dessa restrição, Carnot recorre somente à geometria. Segundo ele, não existe uma quantidade algébrica negativa, mas sim uma reta orientada no sentido contrário. Essa sim, poderia ser perceptível.

> A partir daí eu concluo…que toda quantidade negativa isolada é um ser criado pela razão, e que aquelas que ocorrem no cálculo não passam de simples formas algébricas, incapazes de representar qualquer quantidade real e efetiva…" (Carnot, 1803, p. xviii apud, Schubring, 2012, p. 58)

Dessa maneira a álgebra também ficou suplantada na França, dada a influência que teve a visão de Carnot. Ambos movimentos, tanto na França como na Inglaterra, tinham em vista uma tentativa de atribuir uma ideia substancial aos símbolos algébricos, da mesma maneira que a geometria o fazia naturalmente por meio da evidência de suas figuras. Tentar conceber uma ideia de número negativo segundo essas visões ou, menos ainda, de operações com estas quantidades, tende ao insucesso.

A virada do século, por sua vez, viu também mais uma virada conceitual acontecendo na Inglaterra. De maneira bem característica, Robert Woodhouse, de Cambridge, criticou as concepções de Maseres e Frend por estas não terem formalmente demonstrado a impossibilidade de uma concepção clara de quantidades negativas, uma vez que suas críticas teriam sido direcionadas especificamente a concepções errôneas que circulavam, como a de quantidades menores do que nada. Diante de sua própria crítica, Woodhouse elaborou seu próprio sistema algébrico, o qual foi influente na posterior concepção de Peacock de 1830. Ambas visões ficam principalmente marcadas pela concepção da álgebra em que os símbolos e suas regras arbitrárias são seus elementos fundamentos primários. A diferença que isso implica no método dedutivo dessa álgebra é que as analogias e interpretações devem suceder e não preceder o estabelecimento das proposições e objetos matemáticos; estes podem ser estabelecidos por meio de pressupostos assumidos sem qualquer tipo de referência, substancial ou não. Partindo então de um simbolismo lastreado numa interpretação substancial aritmética, Woodhouse "transita" para a sua álgebra através da suposição da generalização da regra de transposição, a qual podia ser demonstrada na aritmética mas que, agora, fica generalizada de maneira puramente arbitrária, de modo a dar luz a equações sem significado direto, como $-a = -b -c,$ que resultou da equação $b+c =a,$ provida de sentido à luz da aritmética. É unicamente por meio desta consequência de seu pressuposto que quantidades negativas se tornam legítimas, independentemente do sentido que elas possam ou não ter. Com Peacock, o processo de estabelecimento de leis segue um caminho diferente, a começar pelo estabelecimento de que os símbolos podem representar quantidades gerais em vez de especificamente aritméticas, o que já demonstra o papel fundamental do conceito de quantidade para ele, apesar do seu "simbolismo puro". As quantidades negativas para Peacock na verdade são apenas quantidades positivas com o sinal independente - na frente, um outro pressuposto o qual ele estabelece. Já com relação ao estabelecimento das operações simbólicas com esses elementos que surgem a partir de pressupostos, tanto Peacock quanto Woodhouse recorrem a um princípio que os permite generalizar as regras simbólicas demonstráveis da aritmética para esse novo sistema com símbolos sem natureza específica.

O conceito de número negativo na Inglaterra até Peacock (1830)

Como pudemos ver ao longo da presente pesquisa, o conceito de quantidade, e não de número, esteve presente nos fundamentos da álgebra até o tratado de Peacock de 1830. O conceito de número permaneceu associado exclusivamente aos positivos, os únicos que poderiam ser considerados de uma maneira abstrata, sem a consideração da natureza das quantidades. Enquanto as concepções de Woodhouse e Peacock marcaram uma visão simbólica da álgebra, a qual permitia a declaração de preceitos arbitrários e interpretações ou analogias não serviam de argumento para qualquer proposição, o confinamento pressuposto ao conceito de quantidade trouxe consequências similares aos autores anteriores, os quais não seguiam a mesma linha de rigor: as soluções negativas, ainda que consideradas em certos problemas, não eram entendidas como componente de um mesmo domínio que os números positivos, isto é, o domínio dos números inteiros. Ainda que no processos de generalização , víssemos equações isoladas envolvendo soluções negativas, perdurou a noção de que estas não poderiam ser concebidas de maneira abstrata, diferentemente das positivas. Além disso, as associações que eram feitas entre negativos e positivos formando um mesmo espectro era ora defendida em termos analógicos, como vimos em Saunderson, ora em termos simbólicos, como se vê em Peacock, que associa a sequência -1, -2, -3… ao "resultado simbólico" da operações sucessivas de subtração de *1*, a começar por *0 - 1*; Em seus termos, o número *-1* fica associado ao número abstrato 1 com o sinal de -, e não é um número em si.

Uma boa maneira de ver como a associação da álgebra ao conceito de quantidade dificultou a clarificação das operações com números negativos na Inglaterra se dá através de uma comparação com algumas concepções que estavam sendo desenvolvidas na Alemanha, no século XIX. A concepção de Förstemann de 1817, por exemplo, já se inicia com a importante separação entre os conceitos de quantidade e número, algo que não se viu em nenhuma das obras inglesas vistas aqui. Nela, números como o 0, os inversos multiplicativos e os números negativos foram introduzidos tendo em vista as operações. Assim, os números negativos ficam definidos apenas como o oposto aditivo dos números positivos, com os quais as operações já estavam previamente estabelecidas. Dessa maneira, o oposto da soma, que não existia no domínio anterior, agora existe. Isto significa que a equação $a+x=0$, onde a é positivo, agora possui uma solução: o número $\overline{a}$. Note como a notação é feita de maneira a separar o sinal da subtração do sinal "qualificador" dos números negativos. Esse processo, portanto, assume uma extensão do domínio dos números, uma vez que, no domínio original, o oposto da soma não existia, mas , através da definição de $\overline{a}$, agora existe. Para Peacock, e mesmo para os demais autores, ainda que as quantidades negativas fossem entendidas também como opostas aditivas das quantidades positivas, como se via pela terminologia comum de que "elas se destroem quando unidas", elas não eram definidas por tal propriedade. Além disso, é preciso olhar para o passo anterior para enxergar melhor a diferença: o conceito de quantidade ainda perdurava, de modo que analogias fossem utilizadas para legitimar suas operações ou fossem entendidas apenas em termos de um arranjo simbólico com uma quantidade positiva acompanhada de um sinal - passível de interpretação. Os números em si portanto eram apenas os positivos, mesmo após tais extensões.

Outro matemático alemão que nos ajuda a perceber a limitação existente nas concepções da álgebra simbólica inglesa é o já mencionado Hermann Hankel. Este igualmente inicia sua concepção fazendo uma separação entre o conceito de número e o de quantidade, colocando o primeiro como seu conceito básico, além de reter também a ideia do oposto aditivo que por si define o objeto negativo. Foi através desse autor que descobrimos um princípio da permanência que precede o de Peacock e, dada a sua concepção que prioriza o número, este fica norteado de maneira distinta:

> Com a intenção de não cair no abtruso, hemos de sujeitar as operações envolvendo objetos mentais a tais regras formais que eles podem conter, em si mesmos, as operações envolvendo objetos intuitivos, e os números expressando suas razões como subordinados (Hankel, 1867, p. 11 apud Schubring, 2005, p. 602).

Ou seja, esse é o princípio o qual Hankel utiliza para estender os domínios numéricos. As regras operacionais no domínio precedente fica mantida dentro do novo domínio construído. E, como ele bem destaca, tais extensões não são necessárias, mas tratam-se de convenções. Sobre as regras dos sinais, as quais ele assume como sendo verdadeira, ele diz:

> Todo esforço será pouco para esclarecer que essas equações [as regras dos sinais] jamais poderão ser demonstradas formalmente; elas são convenções arbitrariamente estabelecidas para que se preserve o formalismo já existente nos cálculos...Contudo, uma vez definidas, todas as demais leis da multiplicação derivam delas por necessidade. (Hankel, 1867, p. 41 apud Schubring 2012, p. 63)

Foi com grande surpresa que descobrimos um princípio homônimo ao de Peacock. A diferença conceitual que os subjaz, então, é reveladora. No caso de Peacock, o princípio de permanência concerne uma generalização das equivalências demonstradas sob símbolos de natureza específica, como os da aritmética, para a álgebra, onde os símbolos são assumidamente, quantidades quaisquer. A maneira como o princípio é enunciado mostra como a transição é bem distinta: a preservação das operações das quantidades concretas são assumidas sob símbolos que compreendem qualquer arranjo não substancial como imaginários, negativos, ou qualquer outro. Enxerga-se portanto, como esses novos objetos não são definidos a partir de equações como foi feito por Hankel. Estes são vistos como arranjos simbólicos os quais podem servir como "resultados simbólicos" de equações. Pode-se operar com esses objetos, no sentido de que podemos realizar as regras agora estabelecidas a partir do princípio, mas eles não se definem a partir de equações que, por si, estendem os significados das operações. Diretamente ligado a isso encontra-se o fato de que a resolução de equações toma uma posição secundária em seu tratamento da álgebra. Peacock parece muito mais preocupado em construir as regras da sua linguagem simbólica do que resolver equações e obter resultados gerais.

É por conta disso que pode-se dizer que a álgebra simbólica da Inglaterra não constitui parte do fenômeno que ocorria na Alemanha. Lá, a separação conceitual entre quantidades e números foi um assunto imaterial dentro das teorias algébricas. De fato, nem mesmo uma ruptura pode ser marcada com relação a Maseres e Frend: como vimos, Peacock retém a concepção dos dois como sendo legítimas, e constrói todo um tratado de uma álgebra igualmente limitada pela mesma visão substancialista dos dois. Diante disso, uma nova questão que se coloca diante desse tema é: em que momento a Inglaterra adere à concepção da *Zahlbereichserweiterung*, isto é, a noção de estender os domínios dos números por meio de equações?

Referências

Anon. [Isaac Newton] *“Universal Arithmetick: or, a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution”*. London: Senex, 1720.

Almeida, Marcel. *O Tratado de John Wallis e suas relações com a álgebra britânica.* Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro, UFRJ/ IM, 2010.

Becher, Harvey. *Woodhouse, Babbage, Peacock and Modern Algebra.* Historia Mathematica 7, págs 389-400. Arizona: 1980

Cajori, Florian. *A History of Mathematical Notations: Two Volumes Bound as One*., Nova York: Dover Publications, 1993.

Cajori, Florian. *William Oughtred, a Great Seventeenth Century Teacher of Mathematics*. Chicago: Open Court, 1916.

Cocker, Edward. *Cocker's Arithmetick*., Londres: 1702

Corrêa, Bruna. *A introdução à arte analítica de François Vième: comentários e tradução*. Dissertação de mestrado. Rio de Janeiro, UFRJ/ IM, 2009

Courtney, William. *Frend, William*. Dictionary of National Biography ,1885-1900, Volume 20.

Descartes, Renè. *The Geometry of René Descartes: with a Facsimile of the First Edition.* Tradução de Marcia L. Latham e David Eugene Smith. Dover Publications: 1954, p. 2-5.

Dubbey, John. *The Mathematical Work of Charles Babbage.* Cambridge: Cambridge University Press, 1978.

Enros, Philip. *The Analytical Society (1812-1813): Precursor of the Renewal of Cambridge Mathematics.* Historia Mathematica 10,págs. 24-47. Toronto: 1983.

Euclides. *Os Elementos*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

Fontenelle, Bernard. *Éléments de la géométrie de l'Infini*, Paris: Imprimerie Royale, 1727.

Frend, William. *The Principles of Algebra*. London: J. Davis para G.G. e J. Robinson 1796.

Guicciardini, Niccolò. *Gênios da Ciência: Isaac Newton*, Tradução de Luciano Vieira et. al. Scientific American, São Paulo: 2005.

Guicciardini, Niccolò. *Dot-age: Newton's Mathematical Legacy in the Eighteenth Century*, Early Science and Medicine, Volume 9, 2004.

Guicciardini, Niccolò. *John Wallis as Editor of Newton's Mathematical Work.* Royal Society: 2011

Hankel, Hermann. *Die Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung.* Leipzig: B.G. Teubner, 1875.

Howson, Geoffrey. *A history of mathematics education in England.* Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

Hutton, Charles. *A course of mathematics for cadets of the Royal Military Academy.* London*, 1799*

Kersey, John. *The Elements of that Mathematical Art Commonly Called Algebra.* London: W. Godbid, 1673.

MacLaurin, Colin. *A Treatise of Algebra.* London: Millar e Nourse, 1748.

Maseres, Francis. *A Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra*. London: Payne, 1758.

Newton, Isaac. *Arithmetica Universalis, sive de Compositione et Resolutione Arithmetica*. Amsterdam: 1761

Oughtred, William. *Arithmeticae in numeris et speciebus instituto...quasi clavis mathematicae,* London: Harper, 1648.

Peacock, George. *A Treatise on Algebra*. London: J. & J.J. Deighton, 1830.

Peacock, George. *Report on the Recent Progress and Present State of certain branches of Analysis*. págs. 185 - 352, 1833

Peacock, George. *A Treatise on Algebra Vol. I- Arithmetical Algebra.* Cambridge:J.J Deighton, 1842.

Peacock, George. *A Treatise on Algebra Vol. II On Symbolical Algebra and its Applications to the Geometry of Position.* Cambridge: J & J.J. Deighton, 1845.

Pycior, Helena. *Early Criticism of the Symbolic Approach to Algebra*. Historia Mathematica 9, págs. 392-412. Winsconsin: 1982

Pycior, Helena. *Symbols, Impossible Numbers and Geometric Entanglements.* 1ª edição*,* Cambridge University Press. Nova York: 1997

Pycior, Helena. *George Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra*. Historia Mathematica 8, págs 23-45. Winsconsin: 1981.

Roque, Tatiana, *História da Matemática - Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Rouse Ball, Walter. *A History of the Study of Mathematics at Cambridge*. Cambridge: Cambridge University Press, 1889.

Rouse Ball, Walter W. *A Short Account of the History of Mathematics*. New York: Courier Corporation, 1960.

Rouse Ball, Walter W. Mathematical recreations and essays. New York: 1905

Saunderson, Nicholas. *The Elements of Algebra.* Cambridge: University Pr., 1740.

Schubring, Gert. *Conflicts between generalization, rigor and intuition : number concepts underlying the development of analysis in 17-19th century, France and Germany.* New York: Springer, 2005.

Simpson, Thomas. *A Treatise on Algebra*, .primeira ed. London: Nourse, 1745

Stedall, Jacqueline. *A Discourse Concerning Algebra: English Algebra to 1685.* New York: Oxford University Press, 2002.

Stedall, Jacqueline. *The Greate Invention of Algebra: Thomas Harriot's Treatise on Equations*. Oxford: Oxford University Press, 2003.

Seltman, Muriel & Robert Goulding. *Thomas Harriot's Artis Analyticae Praxis - An English Translation with Commentary*. New York: Springer, 2007.

Tattersall, J. *Nicholas Saunderson: The Blind Lucasian Professo*r, Historia Mathematica 19 (1992). págs. 356-370

Wallis, *John. A Treatise of Álgebra Both Historical and Practical: shewing The Original, Progress, and Advancement thereof, from time to time, and by what Steps it hath attained to the height at which now it is*. Oxford: John Playford, 1685.

Woodhouse, Robert. *The Principles of Analytical Calculation*. Cambridge University Press, Cambridge: 1803

Woodhouse, Robert. *On the necessary truth of certain conclusions obtained by means of imaginary expressions*. págs 89-119, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London:* 1801.

Websites consultados:

"Fellow". Britannica. Disponível em : https://www.britannica.com/topic/fellow. Acesso em: 28/09/2019

"Records of the Company of Watermen and Lightermen at Guildhall Library". Disponível em https://archives.history.ac.uk/guildhallmanuscripts/water.html. Acesso em: 10/08/2019.

Schaaf, William. *Maseres, Francis*. Dictionary of Scientific Biography. Disponível em http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830902850.html . Acesso em: 16/06/2018. Nova York: 1970-1990

Scott, J. *Colin MacLaurin*. Dictionary of Scientific Biography. Disponível em http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/DSB/Maclaurin.pdf. Último acesso em: 1011/2018

"Hutton, Charles", Complete Dictionary of Scientific Biography. Disponível em : https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/hutton-charles . Acesso em: 16/06/2018.

'The Copley Medal'.2006. Disponível em: https://web.archive.org/web/20051215224953/https://royalsociety.org/page.asp?id=1736 . Acesso em: 16/06/2018

Cohen, I. *Dictionary of Scientific Biography*. Disponível em : https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/physics-biographies/sir-isaac-newton#2830903155 . Acesso em: 12/06/2018, Nova York: 1970-1990.

Koppelman, Elaine. *Woodhouse, Robert.* 2008*,* Dictionary of Scientific Biography. Disponível em : https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/DSB/Woodhouse.pdf Acesso em: 18/07/2019.

Wallis, Ruth. *Cocker, Edward.* Oxford Dictionary of National Biography. Disponível em http://www.oxforddnb.com/view/10.1093/ref:odnb/9780198614128.001.0001/odnb-9780198614128-e-5779. Acesso em 21/08/2018.

Zulichemii, C. Hugemii. P*hilosophical Transactions of the Royal Society*. Publicado: 1674 . Acessível em https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1673.0030, Acesso em: 25/01/2019 págs. 6073-6074.

"William Oughtred". Encyclopedia of World Biography. Disponível em https://www.encyclopedia.com/people/history/historians-miscellaneous-biographies/william-oughtred , Acesso em 17/12/2018