UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

JOÃO CARLOS CALDATO CORREIA

ARGUMENTAÇÃO, PROVA E DEMONSTRAÇÃO: UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE AS CONCEPÇÕES DE INGRESSANTES NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RIO DE JANEIRO

2018

JOÃO CARLOS CALDATO CORREIA

ARGUMENTAÇÃO, PROVA E DEMONSTRAÇÃO:
UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE AS CONCEPÇÕES DE INGRESSANTES NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Lilian Nasser

RIO DE JANEIRO

2018

CIP - Catalogação na Publicação

C145a

Caldato, João
Argumentação, prova e demonstração: uma investigação sobre as concepções de ingressantes no curso de licenciatura em matemática / João Caldato. -- Rio de Janeiro, 2018.
218 f.

Orientadora: Lilian Nasser.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2018.

1. concepções. 2. licenciatura em Matemática. 3. argumentação. 4. prova. 5. demonstração. I. Nasser, Lilian, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

JOÃO CARLOS CALDATO CORREIA

ARGUMENTAÇÃO, PROVA E DEMONSTRAÇÃO: UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE AS CONCEPÇÕES DE INGRESSANTES NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Banca Examinadora

Prof.ª Dr.ª Lilian Nasser
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ
Professora Orientadora (Presidente)

Prof.º Dr.º Victor Giraldo
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ
Coordenador do PEMAT/UFRJ

Prof.ª Dr.ª Miriam Cardoso Utsumi
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP

Prof.º Dr.º Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP

Rio de Janeiro, 26 de setembro de 2018.

À Sonia e ao José, anjos que Deus me presenteou como pais.

À Stella, minha cor, minha flor, minha cara.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por me sustentar, por ser o meu refúgio nos momentos de fraqueza, por ser meu fogo abrasador, por me guiar nos caminhos percorridos. Agradeço ainda a Nossa Senhora Aparecida e a Nossa Senhora de Fátima por intercederem pelas minhas orações.

À professora Lilian Nasser, a qual foi muito além das suas atribuições como orientadora. Agradeço pelo conhecimento compartilhado, pelas correções imediatas, pela disponibilidade, mesmo quando regressei às minhas origens. Mas, agradeço, especialmente, pela amizade, pelas conversas e por se mostrar uma torcedora das minhas pequenas vitórias. Obrigado pela inspiração como educadora matemática!

Ao professor Saddo Almouloud, por fazer parte da banca examinadora e pelas críticas construtivas, as quais foram essenciais para o desenvolvimento e conclusão desta pesquisa.

À professora Miriam Utsumi, por ser um dos membros da banca examinadora e pelas valiosas contribuições. Agradeço ainda pelo incentivo e motivação em dar continuidade aos meus estudos na pós-graduação. Saiba que este trabalho talvez nem existisse senão fossem os seus ensinamentos, os quais me proporcionaram o gosto pela pesquisa científica.

Ao professor Victor Giraldo, pelo aceite em participar da banca examinadora. Agradeço ainda pelos ensinamentos de Análise Real, mas, sobretudo, pelos ensinamentos com seu próprio exemplo como educador. Além disso, saiba que se o PEMAT/UFRJ é um programa de pós-graduação que acolhe os seus integrantes, muito se deve à humanidade do seu coordenador.

A todos os docentes do PEMAT/UFRJ, em especial, aos professores Ana Teresa, Claudia Segadas, Gérard Grimberg e Gert Schubring pelos ensinamentos e aprendizados.

À minha turma de mestrado e agregados, sem os quais esta conquista não teria o mesmo significado. Em vocês, encontrei não apenas colegas de faculdade, mas amigos que espero levar por toda a vida. Agradeço pelos momentos compartilhados, os quais estão guardados em fotografias e vídeos, mas, sobretudo, dentro de mim. A vocês, meus caros amigos André, Débora, Elion, Jeff, Jocilea, Luciano, Mara, Mário, Rodolpho, Shila, Sonny, Tiago, Vinícius, meu muito obrigado!

A todas as pessoas que fizeram parte da minha vida carioca. Nesta cidade tive a oportunidade de conhecer tanta gente do bem e de bom coração, e novamente agradeço a Deus por ouvir as minhas preces. Agradeço a todas as amizades cariocas, de religião, de trilha, de praia, de mesa de bar, de futebol. Em especial, aos queridos, Andréia, Brandão, Dani, Débora, Diego, Elison, Fábio, Leandro, Lucas Barbiere, Lucas Melo, Mayra, Nathy, Simone, Ulisses e Tati.

Aos coordenadores dos cursos de Licenciatura em Matemática que participaram desta pesquisa, por autorizar a coleta de dados em suas respectivas instituições de ensino. Aos professores dessas instituições por viabilizarem as aplicações dos questionários. E, especialmente, aos 78 licenciandos ingressantes, pelo comprometimento e dedicação em responder às questões propostas. Espero que, de alguma forma, esta pesquisa possa ter reflexos positivos em suas formações enquanto futuros professores.

Ao corpo docente e administrativo do Colégio Augusto Marques e do Colégio Zeta, por me receberem de braços abertos. Aos meus antigos e atuais alunos, por me mostrarem que fiz a escolha correta: ser professor. Saibam que o meu anseio por me tornar um profissional melhor se deve muito a vocês. Por isso, muito obrigado por existirem na minha vida!

A todos os meus professores, desde o primário até a formação universitária. Sempre tive muito respeito, carinho e admiração pelos meus educadores, mesmo que não concebesse a ideia de um dia me tornar um deles. Hoje, ao exercer o magistério, faço questão de exaltar o potencial dos meus alunos, pois, talvez esta conquista não fosse possível sem essa atitude dos mestres que encontrei nas salas de aula, sobretudo, na escola Regina Valarini. Por esta razão, agradeço, especialmente, aos educadores Maria Catarina, D.ª Leninha, D.ª Terezinha, Agda, Clécio, Néia, Sazima, Alice, Manuel, Beth, Edna Zuffi, Renata Meneghetti, Ana Navarro, Regilene Oliveira, Janete Crema, Helena Matos.

Aos caros amigos Carlos, Hugo, João, Joice (por me apresentar este caminho), Júlia, Kleber, Mary, Mayanne, os quais a vida me presenteou e que me mostraram que a verdadeira amizade sobrevive a distâncias. Obrigado pelos momentos de felicidades compartilhados.

À minha família, de sangue e de coração, que sempre torceram e rezaram por mim. Em especial, aos amores da minha vida: ao meu pai José, à minha mãe Sonia e à minha irmã Stella. Obrigado pelo amor e proteção, mesmo quando não estive fisicamente por perto. Saibam que esta conquista é totalmente dedicada a vocês!

Ao Lucas Mazzi, por expandir meu horizonte teórico sobre argumentação e provas.

E a todos que contribuíram de algum modo para a minha formação humana e acadêmica.

Jccc

One's conceptions of what mathematics is affects one's conception of how it should be presented. One's manner of presenting it is an indication of what one believes to be most essential in it [...]. The issue, then, is not, What is the best way to teach? but, What is mathematics really all about? (HERSH, 1986, p. 13).

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar as concepções de ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática sobre argumentação, prova e demonstração. Ao todo, 78 licenciandos ingressantes, de três intuições públicas de Ensino Superior, participaram da coleta de dados, que consistiu na aplicação de um questionário. Tanto a elaboração quanto a análise desse instrumento foram norteadas, principalmente, pela tipologia de provas de Balacheff (1988) e pelos esquemas de provas de Harel e Sowder (1998). Os dados coletados foram submetidos a uma abordagem quanti-qualitativa, gerando, para cada uma das questões propostas no questionário, a descrição das respectivas Análises Didáticas (análises a *priori* e a *posteriori*), à luz do referencial teórico e da revisão de literatura. Os resultados obtidos evidenciaram um conhecimento limitado por parte dos licenciandos a respeito das potencialidades da prova e que a simples aparência do argumento associada à linguagem algébrica, muitas vezes, é suficiente para convencê-los, ainda que seja logicamente contraditória. Ademais, emergiu das concepções dos ingressantes uma contradição entre a preferência e a noção de prova matemática admitida pela maioria deles com o modo utilizado para validar conjecturas. Em vista disso, constatou-se que, em geral, os estudantes associam tanto “demonstração” quanto “prova” ao significado de validar algo, apesar de que, muitos deles, assinalam a necessidade de verificar uma afirmação por meio de exemplos, mesmo depois de prová-la. Isto sugere que uma demonstração nem sempre é suficiente para persuadir o licenciando sobre a veracidade de um enunciado. Constatou-se ainda que, em geral, os participantes deste estudo preferem as justificativas mais “formais”, àquelas que se enquadram na prova conceitual (BALACHEFF, 1988) e no esquema de prova analítica (HAREL; SOWDER, 1998), ainda que, na prática, a maioria deles não saiba como desencadear uma argumentação lógica e não domine as técnicas de prova, como, por exemplo, o Princípio da Indução Finita. Isto pode ser um indicativo de que o ensino de Matemática, especialmente na Educação Básica, privilegia mais os procedimentos em detrimento da compreensão dos conceitos. Por esta razão, defendemos que os cursos de formação inicial, devem proporcionar aos futuros professores, a oportunidade de conceber a temática da argumentação e provas como um recurso metodológico a ser utilizado em sala de aula, a fim de criar um ambiente favorável ao uso de atividades exploratório-investigativas.

Palavras-chave: concepções; licenciatura em Matemática; argumentação; prova; demonstração.

ABSTRACT

This research has the objective to investigate the conceptions of freshmen students in the course of formation of Mathematics teachers on argumentation, proof and demonstration. A total of 78 novice students, from three public Superior Education intuitions, had participated in the collection of data, which consisted in the application of a questionnaire. Both the elaboration and the analysis of this instrument had been guided, mainly, by the Balacheff typology of proofs (1988) and by Harel and Sowder proof schemes (1998). The collected data had been submitted to a quantitative-qualitative approach, generating, for each one of the questions proposed in the questionnaire, the description of the respective Didactic Analyses (a *priori* and a *posterior* analyses), under the light of the theoretical framework and the revision of literature. The results gave evidence that a group of these students had a limited knowledge regarding the potentialities of proof and that the simple appearance of the argument associated with the algebraic language, many times, is enough to convince them, despite they may be logically contradictory. Moreover, a contradiction emerged from the conceptions of the freshmen students, between the preference and the notion of mathematical proof admitted by the majority of them with their way to validate conjectures. In sight of this, it could be concluded that, in general, the students associate both “demonstration” and “proof” to the meaning of validating something, although many of them designate the need to verify an affirmative by means of examples, even after proving it. This suggests that a demonstration nor always is enough to persuade the future teacher about the veracity of a statement. It is also evidenced that, in general, the participants of this study prefer the “formal” justifications to that fitting in the conceptual proof (BALACHEFF, 1988) and in the analytical proof schemes (HAREL; SOWDER, 1998), despite that, in the practice, the majority of them does not know how to develop a logical argumentation and does not dominate the proof techniques, as, for example, the Principle of Mathematical Induction. This can be an indicative that the teaching of Mathematics, especially in the Basic Education, privileges more the procedures in detriment of the understanding of the concepts. For this reason, we defend that the courses of initial formation must provide to future teachers the chance to conceive the thematic of argumentation and proofs as a methodological resource to be used in classroom, in order to create an environment favorable to the use of exploratory-investigative activities.

Key-words: conceptions; formation of Mathematics teachers; argumentation; proof; demonstration.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Durante a minha trajetória como aluno na Educação Básica, não tive oportunidades de desenvolver e conhecer os porquês da Matemática. O meu contato inicial com questões relacionadas à argumentação e provas ocorreu somente em 2011, já na universidade, logo no início da graduação, no curso de Licenciatura em Matemática. Recordo-me que na disciplina de Geometria Analítica, a professora demonstrou todas as fórmulas relacionadas à distância no plano e no espaço. Recordo-me também que, no 1º bimestre de 2010, no 3º ano do Ensino Médio, minha professora abordou os mesmos tópicos relacionados à distância no plano e a equação da circunferência, no entanto, ela se limitou em apresentar somente as fórmulas, sem nenhuma justificativa. E neste intervalo de tempo de exatamente um ano, quando a professora da universidade justificou essas expressões, indaguei-me quais seriam as razões pelas quais a professora do Ensino Médio não fez o mesmo. A partir desse momento, comecei a me questionar sobre as justificativas para tantas outras fórmulas, que até então assumia como verdadeiros dogmas, sem contestá-los.

Acredito que esta postura acrítica está presente na maioria dos alunos da Educação Básica, no que se refere ao ensino de Matemática, pois ao longo dos meus 12 anos como aluno de escola pública, nunca fui incentivado a argumentar e demonstrar qualquer resultado, e consequentemente, não me questionava sobre os porquês agregados a essa ciência. Ao longo de minha trajetória escolar também observei inúmeros alunos que possuíam forte resistência a Matemática, os quais, muitas vezes, alegavam a falta de sentido e de utilidade das suas expressões e fórmulas.

A minha motivação em investigar sobre argumentação e provas sucedeu em 2015 enquanto procurava programas de pós-graduação em Educação Matemática. Ao estudar temas para desenvolver o trabalho de conclusão na disciplina de Metodologia de Pesquisa, o qual consistia na elaboração de um anteprojeto de mestrado, interessei-me pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ) e ao pesquisar possíveis questões que gostaria de investigar na Pós-Graduação, observei que a temática sobre argumentação e provas era abordada nas dissertações e teses do programa. O título do trabalho desenvolvido na época foi “As concepções de professores e alunos sobre argumentação, prova e demonstração em Matemática", o qual foi revisado e publicado em 2017[1].

Atrelado a esse fato, em 2015 também tive a oportunidade de realizar um intercâmbio de 6 meses na Universidade do Porto em Portugal e vivenciar um pouco da realidade educacional portuguesa. Durante o estágio, atentei-me para o Exame Final Nacional do Ensino Secundário, uma prova escrita aplicada aos alunos do 12º ano de escolaridade pelo governo português e que compõe parte da nota deles para o ingresso nas universidades. Ao estudá-la, constatei que esse exame não se limitava apenas a questões que privilegiavam a reprodução de técnicas ou a memorização de fórmulas, pois o mesmo as fornecia no início da prova, mas enfatizava o pensamento matemático dos alunos. Ressalto ainda a presença marcante das expressões "justifique", "explique", "prove que" e "mostre que" nos enunciados das questões[2].

Desta forma, as minhas experiências no âmbito escolar e acadêmico instigaram a minha curiosidade e reflexão sobre a temática de argumentação e provas com vista ao ensino de Matemática. Ora como aluno da Educação Básica, onde não houve estímulo ao ensino-aprendizagem de argumentação e provas. Ora como aluno na universidade, onde se privilegiou uma abordagem dedutiva e axiomática por meio das demonstrações formais. E ora como estagiário do ensino português, onde se observou uma ênfase maior do que o sistema brasileiro, em questões que envolvem a habilidade de argumentação e de raciocínio lógico dedutivo dos alunos.

De acordo com Nasser e Tinoco (2003), após o Movimento da Matemática Moderna houve o abandono do raciocínio dedutivo e das demonstrações nas aulas da Educação Básica. Segundo as autoras, a maioria das escolas adota um modelo de ensino em que o aluno é levado a resolver extensivas listas de exercícios repetitivos, que para ele não têm significado algum, os quais consistem em aplicações diretas de fórmulas ou na repetição de técnicas apresentadas pelo professor. Elas destacam que o aluno não é questionado ou levado a pensar sobre a resposta do problema, ou seja, se de fato ela é plausível e coerente com a pergunta, e constatam que "os jovens não estão habituados a pensar e comunicar suas ideias" (p. 1).

Ainda de acordo com Nasser e Tinoco (2003), esse fato não foi observado apenas no Brasil, mas sim internacionalmente, e a investigação sobre argumentação e provas vem

---

[1] Para maiores informações, consulte Caldato, Utsumi e Nasser (2017).
[2] Para maiores informações, consulte Portugal (2015a) e Portugal (2015b).

recebendo atenção cada vez maior de educadores matemáticos em pesquisas apresentadas em congressos e publicações em periódicos. Percebendo a multiplicidade de abordagens sobre o tema, Reid e Knipping (2010) apresentam um levantamento dos autores e discutem as principais linhas de pesquisa adotadas nos trabalhos envolvendo esta temática em Educação Matemática.

Diante deste acervo de publicações, empreendi um levantamento bibliográfico das pesquisas recentes nos programas de pós-graduação, enfocando a questão da argumentação e provas no e para o ensino de Matemática. Além de permitir a familiarização com a temática investigada, viabilizou as escolhas teóricas (HAREL; SOWDER, 1998; BALACHEFF, 1988) e metodológicas para a interpretação dos resultados.

Ordem (2015), que inspirou os procedimentos metodológicos adotados nesta pesquisa, verificou que os licenciandos concluintes em Matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique não utilizavam critérios consistentes para avaliar as demonstrações e que as suas concepções sobre argumentação e provas são simples rituais dissociados de uma de suas principais funções, a de validar ou refutar conjecturas e propriedades.

Tais resultados são importantes, pois alguns estudos mostram que os alunos explicitam melhor seus argumentos matemáticos quando são colocados em contato com atividades, currículo e docentes preparados para a construção dessa habilidade. Entretanto, como observado por Aguilar Júnior (2012), de modo geral, os professores não estão inclinados ao desenvolvimento de atividades que possibilitem a construção de tal habilidade em sala de aula.

Isto sugere que a demonstração na formação inicial se limita a uma mera ferramenta para os licenciandos. Para Garnica (2002) a demonstração seria

> [...] fundamental nos cursos de formação de professores, não como mero recurso técnico, mas numa abordagem crítica, que possibilitasse uma visada panorâmica nos modos de produção e manutenção da “ideologia da certeza” para que, a partir disso, pudessem ser produzidas formas alternativas de tratamento às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aula reais. (p. 94).

Pietropaolo (2005) também defende o uso de demonstração nos cursos de formação inicial sob uma perspectiva mais ampla. Para ele, as provas não devem ser utilizadas somente para a compreensão da Matemática, mas também para refletir sobre a “evolução” do pensamento matemático, por meio de uma perspectiva didática, curricular e histórica.

Acreditamos que, nesta perspectiva, o futuro professor teria condições de inserir a prática argumentativa na Escola Básica, em qualquer contexto matemático, seja Aritmética, Álgebra ou Geometria, por meio de procedimentos empíricos e/ou dedutivos (NUNES; ALMOULOUD, 2013).

Além disso, acreditamos também que para atingir um dos principais objetivos do ensino da Matemática, que consiste no desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento crítico dos alunos, segundo os documentos oficiais, o raciocínio argumentativo e demonstrativo precisa estar presente nas salas de aula e a única forma de garantir efetivamente que isso ocorra é por meio da formação e da prática docente.

E é por esta razão que o nosso trabalho teve inicialmente a preocupação de investigar as concepções de professores sobre argumentação, prova e demonstração. No entanto, a literatura revelou a existência de estudos similares que utilizaram como sujeitos de pesquisa professores em exercício (AGUILAR JUNIOR, 2012; KNUTH, 2002a, 2002b) ou licenciandos em fase de conclusão de curso (ORDEM, 2015; MATEUS, 2015). Logo, em busca do ineditismo e a fim de possibilitar futuras investigações com os mesmos sujeitos, a nossa pesquisa se direcionou aos cursos de formação inicial de três instituições públicas, restringindo a amostra a licenciandos ingressantes em Matemática. Por ingressantes consideramos os discentes que ingressaram em 2017, ano em que foi feita a coleta de dados.

A partir do estudo preliminar e da curiosidade do autor, formulou-se a seguinte questão de pesquisa:

Quais as concepções de ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática sobre argumentação, prova e demonstração?

O objetivo geral é investigar as concepções de licenciandos ingressantes sobre argumentação, prova e demonstração matemática e para que isso seja possível, esta pesquisa busca atingir os seguintes objetivos específicos:

- Compreender como os licenciandos ingressantes interpretam e avaliam as argumentações de alunos sobre conteúdos presentes no currículo da Educação Básica;

- Identificar como os licenciandos ingressantes validam alguns resultados matemáticos da Educação Básica.

Entendemos que as concepções de um sujeito estão intrinsecamente associadas ao seu conhecimento e por isso possibilitam uma análise desse saber. Em virtude disso, nesta pesquisa adotamos a noção proposta por Artigue (1990), que define "concepção" como um ponto de vista local sobre um dado objeto. Em particular, quando dizemos concepções dos licenciandos ingressantes, nos referimos aos significados que esses futuros professores atribuem às noções de argumentação, prova e demonstração; às estratégias que utilizam para interpretar e avaliar as justificativas de alunos; às funções que associam a uma demonstração e ao modo como validam conjecturas matemáticas.

De acordo com a literatura e com base em nossas experiências, a expectativa é que os dados coletados com os ingressantes evidenciem que suas concepções sobre argumentação, prova e demonstração são limitadas. Acredita-se que a maior parte dos estudantes não saiba como validar matematicamente uma conjectura, e que muitos deles se autoconvencem por meio de experimentos empíricos.

Nesta introdução destacamos algumas considerações inicias em relação à temática investigada, frutos do levantamento bibliográfico, o qual possibilitou a definição dos marcos teórico e metodológico que sustentam este estudo. Apresentamos ainda as questões e os objetivos de pesquisa que nortearam os procedimentos de análise, bem como as justificativas e as motivações que fundamentaram a escolha deste tema. E visando responder à questão de pesquisa, esta dissertação se estruturou em cinco capítulos:

O capítulo 1 é dedicado à revisão de literatura sobre argumentação, prova e demonstração. Inicialmente problematizamos essas noções e apresentamos as definições adotadas neste estudo. Em seguida, descrevemos as funções da prova principalmente à luz de De Villiers (1990, 1999) e algumas pesquisas (KNUTH, 2002a, 2002b; GARNICA, 1996; ORDEM, 2015; FERREIRA, 2016; MATEUS, 2015; PIETROPAOLO, 2005; AGUILAR JUNIOR, 2012) sobre demonstração na formação inicial e continuada de professores de Matemática. Além disso, discutimos a potencialidade de *softwares* de Geometria Dinâmica com vista a uma *práxis* argumentativa na Educação Básica.

No capítulo 2 abordamos os referencias teóricos adotados, que consistem na Tipologia de Provas de Balacheff (1988) e nos Esquemas de Provas de Harel e Sowder (1998), sobre os quais se apoia a análise dos dados. Além disso, expomos uma discussão teórica sobre a noção de concepção e o sentido adotado neste estudo com base em Artigue (1990).

No capítulo 3 apresentamos o delineamento da pesquisa, retomando a questão, os objetivos e as justificativas que a norteiam e descrevemos os procedimentos de coleta e de análise dos dados, bem como a caracterização das instituições e dos sujeitos participantes deste estudo.

Já o propósito do capítulo 4 é apresentar o questionário respondido pelos licenciandos ingressantes e descrever as respectivas Análises Didáticas (a *priori* e a *posteriori*) das sete questões propostas à luz do referencial teórico.

No capítulo 5, das considerações finais, destacamos o papel da revisão da literatura nesta pesquisa e a importância do referencial teórico e dos procedimentos metodológicos adotados. Além disso, fazemos uma síntese dos resultados que emergiram na análise dos dados, apresentamos algumas implicações deste estudo e perspectivas para futuras investigações. Incluímos ainda as referências utilizadas e os apêndices, com destaque para o questionário respondido pelos sujeitos pesquisados.

A importância de se investigar as concepções de futuros professores é porque elas influenciam diretamente as escolhas e as práticas de ensino (bem-sucedidas ou não) em sala de aula (KNUTH, 2002b; THOMPSON, 1992; PONTE, 1992). Particularmente, com relação às concepções sobre argumentação, prova e demonstração, como elas

> [...] influenciam inevitavelmente tanto o papel como a natureza da instrução da prova matemática dentro de uma sala de aula de matemática, o conhecimento limitado neste aspecto pode suscitar sentimentos de incerteza e falta de confiança quando se trata de ensinar um conceito. (VARGHESE, 2009, p. 49, tradução nossa).

Em linhas gerais, este estudo constitui uma pesquisa exploratória, de campo, que aplicou um questionário a uma amostra por conveniência de 78 licenciandos ingressantes de três instituições públicas, cujos dados foram analisados numa abordagem quanti-qualitativa.

CAPÍTULO 1
LITERATURA DE PESQUISA SOBRE ARGUMENTAÇÃO, PROVA E DEMONSTRAÇÃO

Este capítulo é dedicado à revisão de literatura sobre argumentação, prova e demonstração. Começamos problematizando essas noções no âmbito da Matemática e da Educação Matemática. Em seguida, apresentamos as funções da prova principalmente à luz de De Villiers (1990, 1999) e algumas teses e dissertações sobre demonstração na formação inicial de professores. Por fim, discutimos a potencialidade de ambientes dinâmicos com vista a uma *práxis* argumentativa na Educação Básica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) evidenciam que o ensino de Matemática na Educação Básica deve garantir o desenvolvimento de certas capacidades aos alunos, tais como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação, validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, visando o eixo norteador dos PCN: a construção da cidadania (BRASIL, 1998a, p. 56-57).

As terminologias como argumentar, conjecturar, justificar, formular, construir, demonstrar, estão disseminadas neste documento, constituindo objetivos gerais no ensino desta ciência. Contudo, os PCN evidenciam que

> uma argumentação não é, contudo, uma demonstração. A argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido. Assim, a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração. (BRASIL, 1998a, p. 70).

Deste modo, com base no título da nossa pesquisa, queremos investigar quais são as concepções de ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática sobre algumas dessas terminologias. Logo, para melhor sustentarmos nossas análises e conclusões devemos ter claros os significados adotados neste estudo para as noções de argumentação, prova e demonstração e faremos isso a partir de uma discussão teórica descrita na seção a seguir.

1.1 DISCUSSÃO TEÓRICA SOBRE AS NOÇÕES[3] DE ARGUMENTAÇÃO, PROVA E DEMONSTRAÇÃO

Para problematizar as noções de argumentação, prova e demonstração e apresentar as definições adotadas nesta pesquisa, começamos descrevendo uma problemática que percebemos na literatura: a tradução do inglês para o português. Em seguida, discutimos os significados da noção de prova no cotidiano, no âmbito da Matemática e da Educação Matemática e no final desta seção apresentamos uma distinção entre provas que provam e provas que explicam e nos posicionamos quanto à aceitação de demonstrações visuais.

1.1.1 Uma problemática presente na literatura: a questão da tradução

A literatura deste trabalho é predominantemente em inglês. Logo, a questão da tradução para o português se torna uma problemática, principalmente quando o vocabulário é específico do idioma. Por isso, neste trabalho tivemos o cuidado de inserir como nota de rodapé a expressão original utilizada pelo pesquisador. Em virtude disso, nesta seção abordamos dois termos utilizados frequentemente pela literatura: *proof* e *proving*. Esses termos são traduzidos para o português como prova e provando, respectivamente. Todavia, como veremos a seguir, a compreensão dessas noções vai além da mera tradução.

Para problematizar isso, utilizamos como referência o capítulo 2 do livro escrito por Reid e Knniping (2010), em que os autores discutem o uso das palavras *proof* e *proving* e tentam estabelecer o uso "correto" destas palavras na pesquisa em Educação Matemática. No entanto, eles ficam apenas na tentativa, pois no decorrer do capítulo chegam à conclusão de que não é possível criar categorias para o uso desses termos na pesquisa científica, já que o real significado está atrelado ao contexto em que estão inseridas.

---

[3] É importante destacar que os termos argumentação, prova e demonstração não são *objetos* (ou noções) *matemáticos*, mas sim *paramatemáticas*, segundo Yves Chevallard (1991). Os objetos paramatemáticos, diferentemente dos primeiros, geralmente não são ensinados de forma explícita, tampouco são avaliados diretamente. Eles se caracterizam por serem ferramentas auxiliares no processo de construção de conceitos matemáticos e são concebidos como "ideias possíveis de serem 'aprendidas' no fluxo da própria aprendizagem. [...] Sempre se pede para resolver uma equação ou demonstrar um teorema, mas quase nunca se pergunta o que é uma equação, uma demonstração ou definição matemática." (PAIS, 2008, p. 36-37). Neste sentido, equação, demonstração, definição são alguns exemplos de objetos paramatemáticos. Por esta razão, neste estudo, referimos à argumentação, à prova e à demonstração como noções (paramatemáticas, implicitamente). Além disso, apenas para fins teóricos a respeito da Transposição Didática proposta por Chevallard, o pesquisador também se refere a *objetos protomatemáticos*, que resumidamente consistem em habilidades que antecedem o próprio conhecimento matemático como, por exemplo, a capacidade de raciocínio lógico.

É possível observar que muitos educadores matemáticos utilizam os termos *proof* e *proving* de diferentes formas, inclusive o uso dessas palavras (e de seus cognatos) pode ter significados diferentes num mesmo artigo. Para ilustrar isso, utilizaremos um fragmento extraído de Hoyles e Küchemann (2002, p. 194[4] apud REID; KNNIPING, 2010, p. 27):

> Even when students seem to understand the function of *proof* in the mathematics classroom [...] and to recognise that *proofs* must be general, they still frequently fail to employ an accepted method of *proving* to convince themselves of the truth of a new conjecture, preferring instead to rely on pragmatic methods and more data[5]. (Grifo nosso).

Com base na descrição de Reid e Knniping (2010, p. 28), observe que na primeira linha, a palavra *proof* é utilizada no singular e remete à ideia de prova como um conceito. Já *proofs* é escrita no plural e nesse contexto se refere à noção de prova como objeto. E *proving* é utilizada para designar um processo, no caso, um método válido de prova, mas poderia também ser utilizada para designar uma ação, como sugere a frase "*John is proving the theorem*" ("João está provando o teorema") e que remete à ideia de elaborar uma prova.

Para uma melhor compreensão dessas categorias, sugerimos a leitura deste livro, já que não iremos detalhá-las neste trabalho, pois não são utilizadas no contexto da formação inicial do professor de Matemática aqui no Brasil. O nosso intuito era apenas problematizar que existem diferentes significados para o uso destes termos e isso foi importante para melhor compreendermos a problemática de pesquisa.

Quando se trata de trabalhos publicados na língua inglesa, Reid e Knipping (2010, p. 32) afirmam que dificilmente a palavra *demonstration* é utilizada como sinônimo de prova matemática na literatura atual[6]. Entretanto, em idiomas de origem neolatina como, por exemplo, o frânces, o italiano, o espanhol e o português, o uso de palavras cognatas (*démonstration*, *dimostrazione*, *demostración*, demonstração) continua sendo empregado. É possível observar isso no trabalho do pesquisador francês Nicholas Balacheff (1987), onde distingue os termos *démonstration*[7] e *preuve*, como veremos na próxima subseção.

---

[4] HOYLES, C; KÜCHEMANN, D. Students' understandings of logical implication. **Educational Studies in Mathematics**, v. 51, n. 3, p. 193-223, 2002.

[5] Mesmo quando os alunos parecem entender a função da *prova* na aula de matemática [...] e reconhecer que as *provas* devem ser gerais, eles ainda não conseguem empregar um método aceitável de *prova* para convencer a si próprios da validade de uma nova conjectura, preferindo, em vez disso, utilizar métodos pragmáticos e mais dados (tradução nossa).

[6] Segundo os autores, o uso atual deste termo, em geral, refere-se a um protesto político ou a uma apresentação com o intuito de mostrar como algo funciona.

[7] Quando o pesquisador escreve em língua inglesa, ele tem a preocupação de utilizar como tradução a expressão *mathematical proof* (prova matemática), como é possível observar em Balacheff (1988).

1.1.2 Possíveis significados no cotidiano, na Matemática e na Educação Matemática

A palavra prova está presente no cotidiano, na Matemática e na Educação Matemática. Entretanto, devido aos diferentes contextos em que é utilizada, nem sempre refletimos sobre os possíveis significados deste termo.

Na linguagem coloquial brasileira, por exemplo, a palavra prova e seus cognatos podem assumir diferentes conotações. Para exemplificar isso, observe as frases descritas no quadro 1:

Quadro 1 - Os significados da palavra prova e seus cognatos na linguagem coloquial.

Frases de uso cotidiano	Significado de prova e seus cognados
"Amanhã haverá prova de Matemática."	Teste
"Hoje tenho a prova de salto em distância."	Competição esportiva
"Não encontrei nenhuma prova contra ele."	Evidência
"Submeti-o a inúmeras provas."	Experimento
"Acho que vou tirar a prova real."	Comprovação
"Você tem que provar esse vinho."	Degustação
"Irei provar que estou dizendo a verdade."	Legitimidade
"Então me prove!"	Convencimento

Fonte: Autoria própria

Entretanto, quando nos referimos à palavra prova e seus cognatos no âmbito científico, em geral, significa convencer algo ou alguém. Portanto, é importante para esta pesquisa problematizar o significado dessa palavra no campo da Matemática e da Educação Matemática.

Uma das pioneiras a discutir os significados da prova foi Hanna (1990), apresentando uma distinção entre prova formal e prova aceitável[8]. Para a autora, a prova formal é constituída por uma sequência finita de sentenças, cuja primeira é um axioma, as seguintes são outros axiomas ou consequências lógicas dedutivas e a última é a que deve ser provada (p. 6). Essa abordagem foi desenvolvida para eliminar a necessidade do recurso à evidência intuitiva e ao julgamento humano, ambos vistos como fontes potenciais de erro. O produto da prova formal, uma vez aceito como verdade, tem validade universal e atemporal. E do ponto de vista teórico, o objetivo é sistematizar e estruturar o conhecimento matemático em um

[8] Tradução nossa do original *formal proof* e *acceptable proof,* respectivamente.

sistema dedutivo de axiomas, definições, proposições e teoremas (GODINO; RECIO, 1997, p. 315-316).

Entretanto, especialmente nas décadas de 70 e 80, matemáticos e educadores matemáticos começaram a reavaliar o papel das estruturas axiomáticas e da prova formal, e concluíram que a prova poderia ter diferentes níveis de rigor e ainda ter o mesmo nível de aceitação (HANNA, 1990, p. 7-8). A pesquisadora se refere a essa nova percepção como prova aceitável. E nesse sentido, a aceitação de um resultado na comunidade matemática se torna um processo social, que é mais em função da compreensão e do significado da prova do que da linguagem formal e do rigor matemático.

Douek (1999) também apresenta uma distinção similar entre prova formal e prova matemática[9]. Para definir prova formal, a autora se reporta ao trabalho de Duval[10] que oferece uma perspectiva cognitiva para isso. Ela define "[...] 'prova formal' como uma prova reduzida a um cálculo lógico" (p. 128, tradução nossa). Já a definição de prova matemática abrange "as provas de Euclides, bem como as provas publicadas nos livros didáticos de matemática no Ensino Médio e as provas dos matemáticos modernos, divulgadas em workshops ou publicadas em revistas científicas" (p. 128-129, tradução nossa). Em outras palavras e em consonância com a perspectiva de prova aceitável proposta por Hanna (1990), prova matemática se refere ao que é legitimado atualmente pelas pessoas que trabalham no campo da Matemática.

Outra distinção semelhante é feita por Godino e Recio (1997), em que diferenciam o significado da prova no âmbito da fundamentação matemática e no contexto denominado matemática profissional. Os autores também abordam o seu significado no cotidiano, nas ciências empíricas e no ensino da matemática elementar. Apesar disso, a maioria desses contextos evidencia algo em comum: validar as afirmações por meio de argumentos, ainda que possam ser articulados por procedimentos distintos (PIETROPAOLO, 2005, p. 48-49).

Já alguns educadores matemáticos remetem "prova" a um processo de raciocínio e não necessariamente a uma dedução lógica. Para Harel e Sowder (1998), por exemplo, "a ênfase é sobre o pensamento do aluno em vez de ser sobre o que ele ou ela escreve" (p. 276, tradução nossa). Deste modo, essa conceituação difere de todas que apresentamos até agora, já que esses autores concebem a prova numa perspectiva subjetiva. Segundo Harel e Sowder (2007),

---

[9] Tradução nossa do original *formal proof* e *mathematical proof*, respectivamente.
[10] DUVAL, R. Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. **Educational Studies in Mathematics**, v. 22, n. 3, p. 233-261, 1991.

> [...] uma prova é o que estabelece a verdade para uma pessoa ou comunidade. Com esta interpretação, "prova" indica uma atividade que pode permear todo o currículo de matemática, desde o jardim de infância, bem como todo o desenvolvimento histórico da matemática. (p. 3, tradução nossa).

Essa noção subjetiva de prova é a principal característica do que estes autores denominam por esquema de prova, conforme veremos no capítulo 2. Quando os pesquisadores querem se referir à noção matematicamente institucionalizada de prova, utilizaram a expressão "prova matemática". Além disso, todas as nomenclaturas conceituadas pelos pesquisadores – prova, *proving* e esquema de prova – são direcionadas ao ato de uma pessoa ou comunidade verificar a validade de uma afirmação (REID; KNIPPING, 2010, p. 31).

Para Healy e Hoyles (1998), "a prova é o coração do pensamento matemático e do raciocínio dedutivo, que sustenta o processo de prova, e o que distingue a Matemática das ciências empíricas" (p. 1, tradução nossa). Porém, segundo Martin e Harel (1989[11] apud HEALY; HOYLES, 2000, p. 396), os estudantes de Matemática não possuem clareza sobre a distinção entre o raciocínio dedutivo e a argumentação empírica ou informal.

Já para os matemáticos[12], os termos prova e demonstração são considerados sinônimos, conforme evidencia Balacheff (1987). Na visão do pesquisador, isso provoca um obstáculo à pesquisa científica relacionada a essa temática. Deste modo, o autor propõe uma distinção entre tais noções:

> Chamamos de **explicação** o discurso que visa tornar compreensível o caráter de verdade, apresentado pelo locutor, de uma proposição ou de um resultado. As razões podem ser discutidas, recusadas ou aceitas.
> Chamamos **prova** uma explicação aceita por certa comunidade num determinado momento. Esta decisão pode ser objeto de um debate em que o significado é a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.
> No contexto da comunidade matemática, apenas as explicações que adotam uma forma particular podem ser aceitas como provas. Elas são uma sequência de enunciados seguindo regras determinadas: um enunciado é conhecido como verdadeiro, ou é deduzido daqueles que o precedem por meio de uma regra de dedução tomada num conjunto bem definido de regras. Chamamos essas provas de **demonstração**. (BALACHEFF, 1987, p. 147-148, tradução nossa[13]).

---

[11] MARTIN, W. G.; HAREL, G. Proof frames of preservice elementary teachers. **Journal for Research in Mathematics Education,** v. 20, n. 1, p. 41-51, 1989.
[12] Por matemáticos apenas, nos referimos aos especialistas da área que atuam no âmbito acadêmico.
[13] Tradução nossa dos vocábulos originais em frânces *explication*, *preuve* e *démonstration*, respectivamente.

Conforme é possível observar, Balacheff concebe a prova como um discurso e fornece uma visão ampliada para essa noção, na qual estão incluídas provas matemáticas (ou demonstrações), que se distinguem das outras provas pela sua forma e caráter hipotético dedutivo.

Deste modo, no âmbito exclusivo da Matemática, Balacheff adota prova e demonstração com significados equivalentes. “Se uma prova foi plenamente aceita pela comunidade matemática, então ela teria adquirido o status de rigorosa, embora a noção de rigor tenha sofrido algumas adaptações no decorrer do tempo” (PIETROPAOLO, 2005, p. 49). Entretanto, ao mencionar comunidade matemática, Balacheff não deixa explícito se isso se restringe apenas aos matemáticos ou engloba também a comunidade de professores; apesar de acreditarmos que ele se restringe ao primeiro grupo.

Assim como Balacheff (1987), Garnica (1996) considera os termos prova e demonstração como sinônimos no contexto matemático. É possível observar também que sua conceituação é semelhante à do pesquisador francês, pois para Garnica uma demonstração “é o que atesta a veracidade ou autenticidade, a garantia, o testemunho, o processo de verificação da exatidão de cálculos e raciocínios, a dedução que mantém a verdade de sua conclusão apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras” (p. 9).

A seguir, apresentamos com mais detalhes a correlação existente entre os estudos de Garnica e de Balacheff, especialmente com base numa publicação do primeiro pesquisador em 2002, na qual emerge a noção de etnoargumentação no âmbito da Educação Matemática.

Garnica (2002) problematiza a noção de demonstração no âmbito da Educação Matemática, em especial, com vista à prática dos agentes que efetivamente atuam em salas de aula. Com base na revisão bibliográfica do seu doutorado em 1995, o autor afirma que na época faltavam referências sobre prova rigorosa no contexto da formação de professores e que isso lhe possibilitou olhar para a prova como uma atividade social e negociada em comunidade, a partir do que Michel Foucault chama de “regime de verdade”.

> Segundo Foucault, cada comunidade tem seu regime de verdade, sua ‘política geral’ de verdade. A manifestação desse regime está presente nos tipos de discurso que uma comunidade acolhe e faz funcionar como válidos. São os mecanismos e as instâncias que permitem distinguir os enunciados verdadeiros dos falsos, a maneira como se sanciona uns e outros; as técnicas e procedimentos que são válidos para a obtenção da verdade; o estatuto daqueles que têm o encargo de dizer o que funciona como verdadeiro. (GARNICA, 2002, p. 93).

Durante a leitura foi impossível não associar o texto de Garnica com a definição proposta por Balacheff (1987), o qual também faz menção à prova como um discurso que visa validar uma proposição no seio de uma determinada comunidade. Isso reforça a noção de prova numa perspectiva mais ampla, em que os critérios de validade estão sujeitos a uma comunidade específica e, por isso, não podem ser definidos a *priori* como parâmetros globais.

Por meio de estudos sobre as formas de linguagem (natural e artificial), Garnica (2002) sugere que a prova rigorosa passasse a ser considerada por educadores matemáticos como um dentre os possíveis modos de argumentação acerca do objeto matemático. Até porque a Matemática escolar ou a acadêmica consiste em apenas “uma dentre as várias Matemáticas existentes, uma dentre as várias formas de apreensão do mundo, uma dentre as Etnomatemáticas” (p. 96). Neste sentido, o pesquisador afirma que não existiria uma visão tão dicotômica em relação às argumentações formais e informais.

Em virtude disso, a principal ponderação feita por Garnica (2002), é que por abranger várias Etnomatemáticas, a Educação Matemática não pode simplesmente tomar para si as conceituações específicas da Matemática acadêmica ou formal, aquela que é desenvolvida na prática científica. Deste modo, o pesquisador estabelece a possibilidade de relativizar posições classicamente hegemônicas acerca das demonstrações, as quais no âmbito da Educação Matemática o autor denomina por etnoargumentações.

> Etnoargumentações – “demonstrações” em sentido amplo – têm, sempre, a função de convencer, tomado “convencimento”, aqui, como a negociação que se estabelece para a atribuição de significados. A essa ampliação de escopo vincula-se uma ampliação das próprias concepções sobre Matemática. (GARNICA, 2002, p. 98).

1.1.3 As definições adotadas nesta pesquisa

Conforme observado na subseção 1.1.2 e salientado por Almouloud (2007b, p. 5), “as discussões a respeito de provas e demonstrações são inúmeras e extensas uma vez que o tema pode ser abordado sob diversas óticas”. Portanto, para melhor sustentarmos nossas análises e conclusões, devemos ter claros os significados adotados nesta pesquisa para os termos argumentação, prova e demonstração e faremos isso à luz das definições apresentadas por Balacheff (1987).

Parafraseando o pesquisador francês, conceituamos esses termos da seguinte forma:

- **Argumentação:** consiste num discurso destinado a convencer alguém sobre a veracidade de uma afirmação. O interlocutor, por sua vez, pode aceitar, recusar ou discutir as razões apresentadas;
- **Prova**: consiste numa argumentação legitimada por certa comunidade. E uma vez que adquire uma dimensão social, é denominada prova no âmbito dessa comunidade;
- **Demonstração:** refere-se à prova quando situada no âmbito da comunidade matemática devido à particularidade da sua estrutura neste grupo social. É composta por uma sequência de afirmações articuladas segundo uma lógica dedutiva preestabelecida.

Chamamos a atenção para a alteração que fizemos na conceituação proposta em Balacheff (1987). Os PCN consideram que "a argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la" (BRASIL, 1998a, p. 70). Em virtude disso e com base em nossas concepções, acreditamos que uma explicação não visa necessariamente convencer outrem.

Além disso, em consonância com Almouloud (2007b, p. 3), note que a conceituação de Balacheff permite inferir que uma prova pode ser aceita por um grupo social num determinado momento, mas rejeitada por outros grupos sociais, ou até mesmo pelo mesmo grupo em outros contextos. Para ilustrar isso, recorremos à pesquisa de Godino e Recio (1997, p. 317), que afirmam que algumas técnicas de prova inadequadas no domínio matemático podem ser válidas em outros. Por exemplo, nas Ciências Sociais as práticas argumentativas são baseadas principalmente no método empírico indutivo e neste contexto um contraexemplo não é capaz de invalidar completamente a afirmação, ao contrário do âmbito matemático. E segundo os pesquisadores Healy e Hoyles (1998) e Almouloud (2007b), a noção de demonstração como um procedimento dedutivo de validação é algo que caracteriza a Matemática e a distingue das ciências experimentais.

Deste modo, assim como Garnica (1996), Pietropaolo (2005) e Aguilar Júnior (2012), ao longo desta pesquisa utilizamos, salvo indicações contrárias, os verbos demonstrar e provar no âmbito matemático, ou seja, como sinônimos, fazendo menção à definição de demonstração (ou prova matemática) proposta por Balacheff (1987). Em virtude disso, quando utilizarmos a palavra prova neste estudo, fica implícito que a mesma se encontra no domínio matemático. No caso das tentativas de demonstração dos participantes utilizamos também as nomenclaturas provas informais ou provas pragmáticas.

É importante destacar que nesta pesquisa valorizamos as tentativas de prova dos alunos, pois por defendemos que as demonstrações devem ser trabalhadas na Educação Básica, se faz necessário que o professor de Matemática desenvolva atividades argumentativas,

> [...] incentivando a elaboração e verificação de conjecturas por meio de exemplos e contraexemplos e análise de situações que levem os alunos a perceber a necessidade de uma validação precisa de sua conjectura e de uma justificativa calcada em afirmações matemáticas já demonstradas (teoremas e axiomas). (DIAS, 2009, p. 38).

Todavia, para que isso ocorra efetivamente em sala de aula, além do professor compreender e dominar as técnicas de prova, ele deve vivenciar atividades exploratório-investigativas ao longo de sua formação na Licenciatura.

Nesta subseção tivemos o cuidado de problematizar os termos argumentação, prova e demonstração em diferentes contextos e adotar as definições propostas por Balacheff para efeitos acadêmicos. Contudo, a nossa maior preocupação é identificar quais são os significados que emergem nos licenciandos ingressantes com relação a esses termos, do que propriamente a distinção entre eles.

1.1.4 Provas que provam *versus* provas que explicam

Com o advento da nova percepção sobre os diferentes níveis de formalidade de prova, os educadores matemáticos reexaminaram o seu lugar no currículo com o intuito de valorizar o papel da prova como meio de comunicação e como “argumento convincente”. E diante desse contexto, Hanna (1990, p. 8-9) relata que houve uma tendência de buscar formas alternativas de demonstrar e validar os resultados matemáticos em sala de aula, em detrimento da prova formal e isso motivou uma série de estudos (LERON, 1983[14]; VOLMINK, 1988[15]; MOVSHOVITZ-HADAR, 1988[16]; ALIBERT 1988[17]) sobre a temática de argumentação e

[14] LERON, U. Structuring mathematical proofs. **American Mathematical Monthly**, v. 90, n. 3, p. 174-185, 1983.
[15] VOLMINK, J. The role of proof in students' understanding of geometry. **Unpublished paper presented at the AERA Annual Meeting**, New Orleans, 1988.
[16] MOVSHOVITS-HADAR, N. Stimulating presentation of theorems followed by responsive proofs. **For the learning of mathematics**, v. 8, n. 2, p. 12-19, 1988.

provas. Além desses, a pesquisa de Balacheff (1988) também foi mencionada. Relembremos que o autor investigou como os alunos solucionavam o problema de determinar o número de diagonais em um polígono qualquer.

Apesar da substancial contribuição de todos esses autores, Hanna (1990, p. 9) afirma que eles conceberam a prova principalmente como um argumento válido, o que contraria a sua percepção, visto que no seu entendimento uma argumentação deve ser válida e explicativa. E diante desse contexto, a autora apresenta uma distinção entre **provas que provam** (apenas mostram que o resultado é verdadeiro) e **provas que explicam** (não apenas mostram, mas também fornecem uma lógica baseada nas ideias/propriedades matemáticas que justificam as razões de ser verdadeiro).

A fim de exemplificar essa diferença, demonstraremos a seguinte afirmação de duas maneiras distintas: a soma dos n primeiros números naturais ímpares é dada por $S_n = n^2$.

Demonstração 1:

Para $n = 1$, o resultado é verdadeiro, pois $S(n) = 1 = 1^2$.
Assim, assumindo que a propriedade é válida para k arbitrário, ou seja, $S(k) = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1 = k^2$, é possível mostrar que continua valendo para $n = k + 1$. De fato, pois $S(k+1) = (1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.
Portanto, a afirmação é verdadeira para $k + 1$ se é verdade para k. Por indução finita, a propriedade é válida para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração 2:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & S & = & 1 & + & 3 & + & \ldots & + & (2n-3) & + & (2n-1) \\
+ & S & = & (2n-1) & + & (2n-3) & + & \ldots & + & 3 & + & 1 \\
\hline
 & 2S & = & 2n & + & 2n & + & \ldots & + & 2n & + & 2n
\end{array}
$$

É possível observar que em $S(n)$ há n parcelas de $2n$, o que implica que $2S = n(2n)$. Logo, a soma dos n primeiros ímpares é dada por $S_n = n^2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

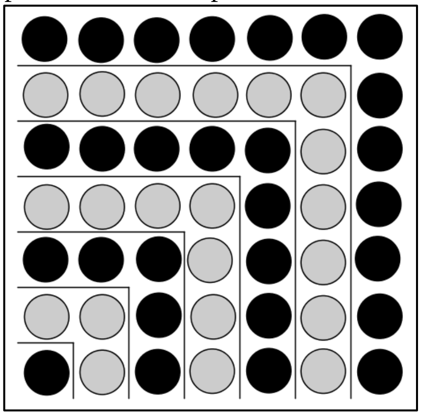
Note que na primeira demonstração a fórmula foi provada por indução. No entanto, esse argumento não evidencia quais são os reais motivos que levam a fórmula $S_n = n^2$ ser verdadeira e por isso a referência a provas que apenas provam. Já na segunda, ao recorrer à noção de simetria, que é fundamental para a demonstração, se torna compreensível o porquê da fórmula ser dada por n^2 e por isso a referência a provas que explicam. Para Hanna (1990,

[17] ALIBERT, D. Towards new customs in the classroom. **For the learning of mathematics**, v. 8, n. 2, p. 31-35, 1988.

p. 9) ambas são legítimas do ponto de vista matemático, pois cumprem com o propósito de garantir a validade da afirmação.

É importante destacar que não existe um padrão para elaborar uma prova explicativa. Segundo Hanna (1995, p. 47), esse tipo de prova pode envolver diferentes estratégias como, por exemplo, um padrão observável ou ainda uma representação visual, como sugere Nelsen (1993) em seu livro intitulado "*Proofs Without Words*" (Provas sem palavras), no qual justifica o resultado anterior por meio de uma prova visual (discutiremos sobre isso na subseção 1.1.5), conforme ilustra a figura 1:

Figura 1 - Prova explicativa e visual para a soma dos n primeiros ímpares.



$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Fonte: Nelsen (1993, p. 71).

É importante destacar também que uma prova convincente não é sinônima de prova explicativa, pois como ressalta Hanna (1990, p. 12), é possível estar convencido de que a afirmação seja verdadeira e desconhecer as razões que garantem isso como, por exemplo, as demonstrações por indução finita. Portanto, não é a questão do convencimento que distingue as provas que provam das que explicam, já que o foco da prova explicativa está na compreensão do raciocínio matemático que justifica a veracidade do resultado. Contudo, em seu artigo publicado uma década depois, Hanna (2000, p. 8, tradução nossa) evidenciou que "[...] essa prova também é mais convincente e mais provável que leve a novas descobertas".

Com relação a essa discussão, acreditamos que em geral as provas explicativas tendem a ser mais convincentes do que aquelas que simplesmente provam, já que a compreensão do argumento favorece a convicção. Contudo, não podemos afirmar categoricamente que a questão do convencimento é um fator determinante para distingui-las. Para exemplificar, considere uma demonstração por redução ao absurdo, ela pode ser persuasiva e ao mesmo tempo não ser explicativa.

Além disso, em consonância com Hanna (1995, 2000) consideramos que os professores, especialmente da Educação Básica, devem optar sempre que possível pelas provas explicativas e considerar a Geometria um campo fértil para apresentar esse tipo de prova aos alunos, pois, em geral, as demonstrações geométricas explicam as propriedades. Entretanto, para que a aprendizagem seja significativa aos estudantes não basta o docente optar apenas pelos argumentos válidos e explicativos, ele deve também levar em considerações outros fatores, tais como, a linguagem utilizada, os conhecimentos prévios dos discentes e o nível de escolaridade.

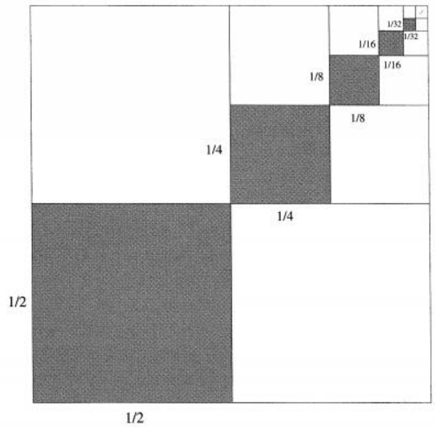
1.1.5 A problemática sobre provas visuais

Hanna (2000) questiona o uso intensificado da visualização, isto é, se, ou até que ponto

> [...] as representações visuais podem ser usadas, não apenas como evidência de uma declaração matemática, mas também em sua justificativa. Diagramas e outros auxílios visuais têm sido usados há muito tempo para facilitar a compreensão. Eles foram bem-vindos como acompanhamentos heurísticos à prova, onde podem inspirar o teorema a ser provado e abordar a própria prova. Neste sentido, é bem aceito que um diagrama é um componente legítimo de um argumento matemático. [...]. Eles não foram considerados substitutos da prova tradicional, no entanto, pelo menos até recentemente. Hoje, há muita controvérsia sobre esse tema, e a questão agora está sendo explorada por vários pesquisadores. (HANNA, 2000, p. 15, tradução nossa).

Neste momento é importante para o desenvolvimento da pesquisa nos posicionar quanto à problemática sobre provas visuais. Na pesquisa de Borwein e Jörgenson (2001) eles levantam a seguinte questão: “Uma representação visual pode ser considerada uma prova?”. Para os autores, enquanto a prova matemática tradicionalmente segue uma sequência dedutiva de sentenças, uma prova visual seria apresentada como uma imagem estática. Eles apontam que tal imagem pode conter a mesma informação que a primeira, mas não exibe um caminho explícito para obtê-la, “[...] deixando o espectador estabelecer o que é importante (e o que não é) e em que ordem as relações devem ser analisadas” (p. 899, tradução nossa). Por esta razão, estes pesquisadores acreditam que, em geral, as provas visuais tendem a ser limitadas quanto à generalização. Todavia, no decorrer do artigo, eles descrevem algumas provas visuais convincentes como, por exemplo, o diagrama ilustrado na figura 2 retirado do livro de Nelsen (1993), o qual prova a convergência de uma série geométrica.

Figura 2 - Argumento visual para provar a convergência de uma série geométrica.



$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{3}$$

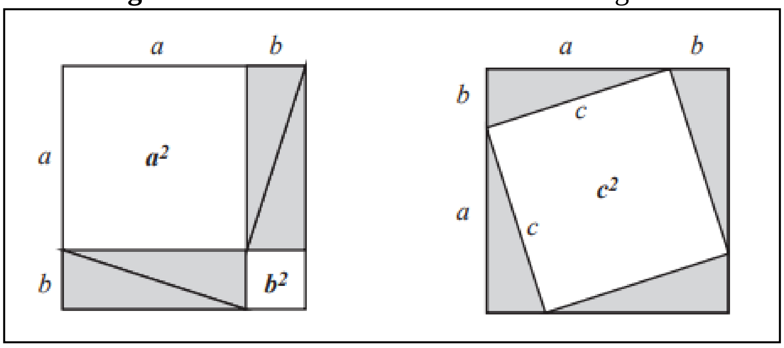
Fonte: Borwein e Jörgenson (2001, p. 899).

Apesar dos próprios pesquisadores não terem respondido definitivamente à questão introdutória, ao problematizar o lugar das representações visuais na Matemática, eles acreditam que algumas podem ser denominadas como provas (HANNA, 2000, p. 16-17).

Por sua vez, Reid e Knipping (2010, p. 135-137) enquadram a prova visual como uma subcategoria de provas genéricas, as quais utilizam argumentos baseados em exemplos representativos de uma classe de objetos. Esta conceituação não somente lembra o que Balacheff define como exemplo genérico, como os próprios pesquisadores fazem menção a isso. Com relação à Harel e Sowder (1998), eles associam provas genéricas ao esquema de prova transformacional (p. 149).

Com o intuito de exibir uma prova visual, os pesquisadores canadenses recorrem ao trabalho de Tall (1995), em particular, à prova indiana para o Teorema de Pitágoras que utiliza a comparação de dois quadrados de lado $a+b$ para justificar a igualdade $a^2+b^2=c^2$, como mostra a figura 3, a qual também é possível encontrar em Nelsen (1993).

Figura 3 - Prova visual do Teorema de Pitágoras.



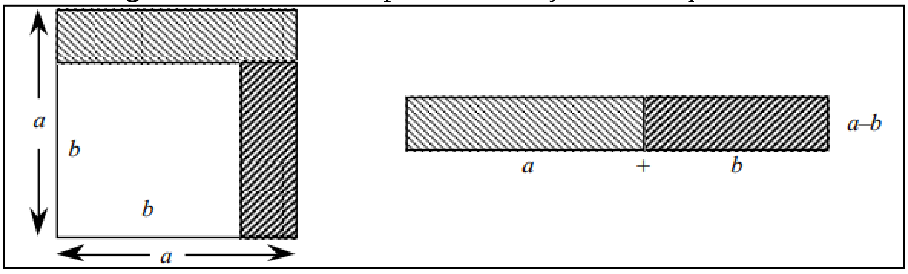
Fonte: Tall (1995, p. 5).

Sobre essa prova, David Tall afirma que para compreendê-la é essencial imaginar os triângulos como objetos dinâmicos. Além disso, ele evidencia que

> [...] qualquer desenho real terá valores específicos para a e b, mas esse diagrama pode ser visto como um *protótipo*, típico de *qualquer* triângulo retângulo. Isso fornece um tipo de prova que muitas vezes é denominada ‘genérica’; ela permite ‘ver o [caso] geral no específico’. (TALL, 1995, p. 6, tradução nossa).

Contudo, o pesquisador ressalta que um dos pontos fracos da prova visual se deve à limitação dos diagramas, visto que sua aplicação se estende apenas à classe de objetos em questão. Para exemplificar isso observe a figura 4, na qual Tall utiliza argumentos visuais para justificar a identidade algébrica $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, que expressa a diferença de dois quadrados.

Figura 4 - Prova visual para a diferença entre de quadrados.



Fonte: Tall (1995, p. 6).

Note que essa prova possui certas limitações, pois se aplica apenas aos números reais positivos, com $a > b$ e, como sabemos, a identidade algébrica para a diferença de dois quadrados é válida para quaisquer números reais. Além disso, Tall (1995, p. 9, tradução nossa) afirma que “o que é satisfatório para um indivíduo em fase de desenvolvimento pode se tornar insatisfatório mais tarde”, ou seja, a prova visual ilustrada na figura 4 poderia ser convincente para os alunos do Ensino Fundamental, mas devido a suas restrições poderia também ser questionada por estudantes do Ensino Médio ou do Superior.

Com base nas discussões anteriores e em consonância com Reid e Knipping (2010), nesta pesquisa consideramos que as provas visuais constituem um estágio de transição entre o raciocínio empírico e o dedutivo, apesar de julgarmos que estejam mais próximas da noção de prova conceitual (BALACHEFF, 1988), conforme detalharemos no capítulo 2. E ainda que não se enquadrem na conceituação de prova matemática de Balacheff, já que o pesquisador a define como sendo um discurso, acreditamos que se uma representação visual satisfizer as características essenciais do esquema de prova transformacional de Harel e Sowder (1998), ou seja, generalidade, pensamento operacional e dedução lógica (veja a página 64), é possível aceitá-la para validar uma conjectura.

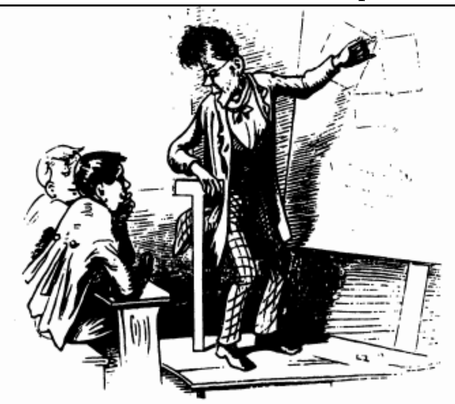
Na próxima seção discutimos detalhadamente cada uma das funções da prova segundo De Villiers (1990, 1999) e finalizamos apresentando outros pesquisadores que também contribuíram para o desenvolvimento desta temática, tais como Renz (1981), Van Asch (1993) e Hanna e Jahnke (1996).

1.2 FUNÇÕES DA PROVA

A literatura mostra que, em geral, os alunos da Educação Básica não percebem a necessidade de provar uma afirmação matemática, especialmente quando se trata de resultados que são visualmente óbvios e que podem ser facilmente comprovados empiricamente (DE VILLIERS, 1999). Podemos citar vários fatores que podem contribuir para disseminar esse pensamento entre os estudantes, tais como, a ausência de demonstrações em vestibulares e concursos e a preferência por aprender métodos procedimentais e simplistas, em detrimento do raciocínio lógico dedutivo. Além disso, as tentativas de demonstrar algo que os alunos já estão convencidos de que é verdadeiro fazem com que eles não atribuam nenhuma função (utilidade/significado) à prova.

A charge de Wilhelm Busch, ilustrada na figura 5, retrata o ponto de vista de professor e aluno sobre a necessidade de demonstrar um resultado, a qual tende a ser comum na Educação Básica. Note que a fala do discente remete ao esquema de prova autoritário.

Figura 5 - Prova matemática: a visão do professor e do aluno[18].



Professor: "... e agora eu irei provar este teorema."
Aluno: "Por que se preocupa em provar isso, professor? Eu acredito em sua palavra."

Fonte: Renz (1981, p. 86).

[18] Do original *The Mischief Book* por Wilhelm Busch (tradução nossa).

Em virtude disso, De Villiers (1990, 1999) descreve algumas funções da prova e discute brevemente suas implicações para o ensino com base no trabalho de Bell[19]. Para o pesquisador uma demonstração pode assumir o papel de:

- Verificação / Convicção (validar uma afirmação);
- Explicação (esclarecer as razões de uma afirmação ser verdadeira);
- Sistematização (organizar os vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, definições, proposições e teoremas);
- Descoberta (descobrir/inventar novos resultados);
- Comunicação (transmitir o conhecimento matemático);
- Desafio intelectual (satisfação pessoal).

Tradicionalmente, a função da prova tem sido vista quase que exclusivamente como a de verificar a veracidade de uma afirmação. De Villiers (1999, p. 2) cita alguns autores (KLINE, 1973[20]; ALIBERT, 1988[21]; HANNA, 1989[22]; VOLMINK, 1990[23]) que parecem definir a prova apenas em termos de sua função de **verificação/convicção**. Em virtude disso, o autor não ignora a importância dessa função, especialmente nos casos em que os resultados não são intuitivos, mas evidencia uma perspectiva mais ampla, em oposição a uma unilateralidade da prova como único e absoluto meio de verificação.

Para De Villiers (1999, p. 3-4), os professores de Matemática tendem a acreditar que a prova é o único meio que fornece a convicção ao matemático da validade de uma conjetura. Entretanto, ele sugere que a prova não é necessariamente um pré-requisito para a convicção, até porque a convicção é provavelmente mais utilizada como um pré-requisito para a construção de uma prova. Para exemplificar isso, podemos citar a conjectura dos primos gêmeos e a hipótese de Riemann[24], os quais mesmo não possuindo até hoje uma demonstração, possuem uma “evidência heurística” tão forte que transporta a convicção de que tais resultados sejam verdadeiros (DAVIS; HERSH, 1983, p. 369[25] apud DE VILLIERS, 1999, p. 4). Além disso, para verificar a validade de uma sentença, os matemáticos também buscam construir contraexemplos.

[19] BELL, A. W. A study of pupils’ proof-explanations in Mathematical situations. **Educational Studies in Mathematics**, v. 7, n. 1-2, p. 23-40, 1976.
[20] KLINE, M. **Why Johnny can't add:** the failure of the new math. New York: St. Martin's Press, 1973.
[21] ALIBERT, D. Towards New Customs in the Classroom. **For the Learning of Mathematics**, v. 8, n. 2, p. 31-35;43, 1988.
[22] HANNA, G. More than formal proof. **For the Learning of Mathematics**, v. 9, n. 1, p. 20-23, 1989.
[23] VOLMINK, J. D. The Nature and Role of Proof in Mathematics Education. **Pythagoras**, v. 23, p. 7-10, 1990.
[24] Para maiores informações sobre ambos, consulte Oliveira (2013).
[25] DAVIS, P. J.; HERSH, R. **The Mathematical Experience**. Great Britain: Pelican Books, 1983.

Reid e Knipping (2010, p. 81) afirmam que a verificação é a função mais assumida no ensino, assim como na visão dos alunos na pesquisa de Healy e Hoyles (2000, p. 417). Entretanto, a prova como meio de verificação pode até validar uma conjectura, mas nem sempre permite uma explicação satisfatória das razões que implicam em sua veracidade. Na maioria dos casos, quando os resultados em questão são intuitivos e/ou são apoiados por evidências empíricas convincentes, a função da prova não é da verificação, mas sim da **explicação**. Para exemplificar isso, podemos pensar nas provas por indução ou por redução ao absurdo, as quais validam uma sentença, porém não descrevem os motivos que fazem com que ela seja verdadeira, como vimos na subseção 1.1.4.

A prova também é uma ferramenta indispensável para a **sistematização** de vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, definições, proposições e teoremas. Neste contexto, as provas contribuem para identificar inconsistências lógicas e/ou argumentos circulares, a fim de unificar e simplificar a teoria matemática por meio da integração de resultados e conceitos de campos distintos. Portanto, o principal objetivo desta função não é verificar se certas declarações são realmente verdadeiras, mas sim “organizar logicamente afirmações que são conhecidas como verdades em um todo coerente e unificado” (DE VILLIERS, 1999, p. 10, tradução nossa).

Apesar de parecer contraditório, em geral, os resultados matemáticos são descobertos por métodos intuitivos e/ou quase empíricos, antes da produção de uma prova. Contudo, a História da Matemática descreve alguns fatos que foram descobertos ou inventados de modo dedutivo como, por exemplo, as geometrias não Euclidianas. Portanto, a função da prova nem sempre consiste em verificar um resultado ou explicar as razões dele ser verdadeiro, mas muitas vezes consiste num meio de **descoberta** para novos resultados (DE VILLIERS, 1999, p. 7-8).

Para De Villiers (1999, p. 10-11) a prova também é um meio de **comunicação** entre as pessoas que fazem matemática, ou seja, ela consiste numa forma única de comunicar resultados da Matemática entre matemáticos, entre professores e alunos e entre os próprios estudantes. Neste sentido, a prova recai num processo social de disseminação do conhecimento matemático na sociedade e isso contribui para o seu aperfeiçoamento e identificação de erros, bem como à sua rejeição por meio da construção de contraexemplos. Além disso, Hanna e Jahnke (1996) afirmam que o papel mais significativo da prova é promover a compreensão matemática em sala de aula, e para isso a ênfase precisa ser colocada na comunicação do significado de uma demonstração e não apenas em meros procedimentos formais.

Já para os matemáticos, a prova constitui também um **desafio intelectual**, assim como um jogo de quebra-cabeças ou de palavras cruzadas e que ao elaborá-la desperta uma satisfação pessoal. Você poderia até se perguntar: “Por que os matemáticos gostam de provar os resultados?”. O educador matemático De Villiers (1999, p. 11, tradução nossa) responde essa pergunta parafraseando o famoso comentário de Mallory sobre o seu motivo em escalar o Monte Everest: “Provamos nossos resultados porque eles estão lá. [...] Muitas vezes, a dúvida não é a existência da montanha (a validade do resultado), mas se (e como) poderemos conquistá-la (prová-lo)”.

Contudo, nem todas as funções da prova são essenciais para o aprendizado da Matemática na Educação Básica e por isso não devem receber a mesma importância na prática docente (DE VILLIERS, 1990). Hanna defende que na Educação Matemática a principal função da prova é de explicação enquanto que na Matemática acadêmica seria de verificação. “Por esta razão, a prova não deve ser realizada em sala de aula como um ritual, visando vagamente refletir a prática matemática, mas sim como uma atividade instrutiva e significativa” (HANNA, 1995, p. 47, tradução nossa).

Para atingir este propósito, De Villiers (1999) sugere que os professores se orientem pela sequência ilustrada na figura 6, não de forma puramente linear, mas numa espécie de abordagem em espiral, em que as funções anteriores possam ser revisitadas e expandidas.

Figura 6 - Sequência para introduzir a noção de prova matemática à luz de suas funções.

Fonte: De Villiers (1999, p. 12).

De Villiers ressalta que quando os estudantes investigam uma conjectura, mas que a *priori* já se sentem convictos da sua veracidade, a prova como meio de verificação não se torna significativa e motivadora. Por isso a necessidade de planejar atividades que despertem a curiosidade e o interesse dos alunos, optando sempre que possível por investigações que privilegiem a explicação do resultado. Conforme veremos na seção 1.4, os *softwares* de ambientes dinâmicos de Geometria constituem ambientes favoráveis para promover esse propósito. Além disso, na visão desse pesquisador, com a qual concordamos, a função de verificação deve ser utilizada nos casos em que as afirmações geram dúvidas nos discentes. E em longo prazo, o estudante deve compreender que uma das funções da prova é sistematizar vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, definições, proposições e teoremas.

Contudo, ao dissertar sobre as funções da prova, De Villiers (1999, p. 11) ressalta que esta lista não está completa e menciona outros dois autores (RENZ, 1981; VAN ASCH, 1993) que escreveram a respeito dessa temática.

Em seu artigo, Van Asch (1993) apresenta argumentos favoráveis e contrários ao uso da prova. Dentre as suas considerações positivas, ele descreve que a prova pode ajudar a memorizar um teorema, pôr fim a um processo de busca e produzir um algoritmo; acreditamos que tais afirmações constituem novas funções para uma demonstração.

No entanto, julgamos que “memorizar um teorema” não seria a nomenclatura correta, visto que a memorização não está atrelada necessariamente à aprendizagem e defendemos uma abordagem argumentativa justamente por acreditar que a mesma pode contribuir para melhorar a compreensão do estudante. Sendo assim, adotamos esse papel da prova no sentido de **ajudar a lembrar de resultados importantes**. Essa função também é citada em Renz (1981, p. 87).

Para ilustrar essa função da prova, podemos pensar no cálculo de matrizes inversas de ordem 2. Dada a matriz $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2x2}$, com $\det(\mathrm{A}) \neq 0$, sabemos que é possível determinar a matriz inversa A^{-1} resolvendo um sistema linear. Porém, outra resolução seria simplesmente utilizar a seguinte fórmula

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}_{2x2},$$

que pode ser recordada rapidamente por meio de argumentos dedutivos utilizando um sistema linear e que é válida para determinar a inversa de qualquer matriz inversível.

Sobre o papel de ajudar a **pôr fim a um processo de busca**, podemos exemplificar com o seguinte exercício: Considere a função real f, de lei de formação $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e determine, se possível, o(s) valor(es) de x tal que $f(x) = 2$. Note que se um estudante utilizasse verificações numéricas para encontrar a solução do problema, todas elas seriam em vão, visto que o exercício não admite solução no conjunto dos números reais. Para justificar isso, basta igualar a função f a dois, obtendo a equação $2x^2 + 1 = 0$, a qual é possível provar que não possui soluções no conjunto dos números reais; e isso resultaria em pôr fim às tentativas do estudante para encontrar resposta do problema.

E quando Van Asch (1993, p. 305) afirma que o método da prova pode **produzir um algoritmo**, ele exemplifica utilizando a demonstração do teorema que é conhecido como "Algoritmo de Euclides", utilizado na divisão entre dois números pelo método da chave.

Outros pesquisadores que também contribuíram para o desenvolvimento desta temática foram Hanna e Jahnke (1996), que ao citar as funções da prova descritas por De Villiers, adicionaram três novas finalidades. A primeira é a **construção de uma teoria empírica**. Para ilustrá-la, os autores citam as leis de Kepler sobre o movimento planetário, as quais eram apoiadas em observações astronômicas e geravam incertezas naquela época. Contudo, a contribuição de Issac Newton foi fundamental, pois o físico foi capaz de deduzir as leis de Kepler utilizando leis empiricamente bem estabelecidas, as quais são conhecidas hoje como leis de Newton e lei da gravitação universal. Nesse sentido, Reid e Knipping (2010, p. 78) afirmam que a prova de Newton desempenhou um papel importante na construção da gravidade como uma teoria empírica.

Os pesquisadores também sugerem a **exploração do significado de uma definição ou das consequências de uma hipótese** como uma possível função da demonstração. Para exemplificar podemos pensar nas provas de limite por definição, do Cálculo I, as quais ajudam a compreender melhor o significado da noção de limite em ternos de épsilons e deltas. Ressaltamos que Van Asch (1993) já havia mencionado em seu trabalho essa perspectiva da prova.

E por fim, Hanna e Jahnke (1996, p. 903, tradução nossa) acrescentam a "**incorporação de um fato bem conhecido numa nova estrutura, permitindo uma nova percepção**" como uma função da prova, mas não fornecem exemplos. Contudo, Reid e Knipping (2010) exemplificam com o Teorema Fundamental do Cálculo, pois "ao mostrar que as integrais são antiderivadas, a prova reposiciona numerosos fatos sobre as derivadas de várias funções como, por exemplo, as funções cujas integrais são conhecidas" (p. 78, tradução nossa).

1.3 PESQUISAS SOBRE DEMONSTRAÇÃO NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Nesta seção apresentamos inicialmente a pesquisa de Knuth (2002a, 2002b) que investigou as concepções de professores da Educação Básica sobre a natureza e o papel da prova. Em seguida, descrevemos o estudo de Garnica (1996), o qual discute sobre o significado da prova rigorosa nos cursos de Licenciatura em Matemática, com base em duas perspectivas: o fascínio da técnica e o declínio da crítica. Finalizamos esta seção com outras teses e dissertações (ORDEM, 2015; FERREIRA, 2016; MATEUS, 2015; PIETROPAOLO, 2005; AGUILAR JUNIOR, 2012) sobre demonstração na formação inicial ou continuada de professores de Matemática.

Knuth (2002a, 2002b) investigou as concepções de professores de Matemática da Educação Básica em dois estágios, respectivamente[26]. No primeiro o foco era as concepções dos docentes sobre a natureza e o papel da prova na Matemática, enquanto o segundo focalizava o contexto da Matemática do ensino secundário[27]. Para a coleta dos dados foram realizadas duas entrevistas semiestruturadas com os participantes, uma para cada foco.

Os resultados apresentados em Knuth (2002a) sugerem que as concepções dos professores sobre a natureza da prova matemática são limitadas e apontam também uma compreensão inadequada sobre o que constitui uma demonstração. Por exemplo, as características dos argumentos que os docentes consideravam mais convincentes, em geral, relacionavam-se mais à forma (por exemplo, a aparência de ser uma prova por indução) do que ao raciocínio apresentado. Além disso, vários deles afirmaram que se sentiam mais convencidos por uma verificação empírica, mesmo cientes de que o argumento não consistia em uma prova matemática.

Para o autor, tais limitações se tornam uma preocupação central para a formação de professores, dado que a literatura (BORKO; PUTNAM, 1996[28]; BROPHY, 1991[29]) evidencia que as concepções dos docentes sobre um assunto influenciam diretamente a sua prática e, consequentemente, o aprendizado dos seus alunos. Por outro lado, os resultados da pesquisa indicaram que os professores reconhecem a variedade de funções que a prova desempenha em Matemática, tais como: verificação, explicação, comunicação, descoberta e sistematização.

[26] Em Knuth (2002a) participaram 16 professores do ensino secundário, dos quais a maioria tinha mestrado e o tempo de atuação variava de 3 a 20 anos. Já em Knuth (2002b) houve a participação de um docente a mais.
[27] No Brasil seria equivalente ao ciclo com ínicio no 9º do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio.
[28] BORKO, H.; PUTNAM, R. Learning to teach. In: CALFEE, R.; BERLINER, D. (Eds.), **Handbook of educational psychology**. New York/NY: Macmillan, 1996. p. 673-725.
[29] BROPHY, J. Conclusion to advances in research on teaching. In: BROPHY, J. (Ed.), **Advances in research on teaching:** Teachers' subject matter knowledge and classroom instruction, v. 2. Greenwich/CT: JAI Press, 1991. p. 347-362.

Contudo, o pesquisador chama a atenção para a ausência de uma visão da prova como uma ferramenta para promover a compreensão da Matemática.

Esta constatação também foi evidenciada em Knuth (2002b), no qual o pesquisador descreve que os professores tendem a conceber a prova de uma forma pedagogicamente limitada, ou seja, como um tópico de estudo (objeto matemático) e não como um meio para compreender a Matemática (objeto paramatemático). Em virtude disso, o autor não foi negligente e fez questão de ressaltar a importância que os cursos de formação exercem nas concepções desenvolvidas pelos os docentes. Além disso, o pesquisador constatou que a maioria dos professores (82,4% da amostra) não considera a demonstração como papel central da Matemática no ensino secundário, questionando inclusive a sua adequação a todos os alunos. Por outro lado, todos os docentes consideraram a prova informal (essencialmente argumentações empíricas) como uma ideia central nas aulas ao longo desse nível de escolaridade.

Com base no parágrafo anterior, é importante destacar que a experimentação é essencial na Matemática, sobretudo no Ensino Fundamental, a fim de instigar os alunos a buscarem justificativas para validar suas conjecturas. Entretanto, em longo prazo isso pode ter efeitos colaterais na formação do estudante, como, por exemplo, conceber verificações numéricas como demonstrações e/ou não saber investigar uma afirmação a não ser por argumentos empíricos.

Por sua vez, Garnica (1996) discute o significado da prova rigorosa na formação inicial do professor de Matemática, à luz da Fenomenologia (pesquisa qualitativa na perspectiva do fenômeno situado), a partir da análise de nove depoimentos de professores-pesquisadores em Matemática ou em Educação Matemática. Dessa análise emergiram duas "categorias abertas", as quais ressaltam a importância da prova rigorosa na formação do docente, mas são geradas por leituras distintas: uma de natureza técnica e outra de natureza crítica[30]. Cada um desses modos carrega visões divergentes, referentes à prova "rigorosa" e como abordá-la nos cursos de Licenciatura.

O pesquisador destaca que, na leitura técnica, a prova é caracterizada pelo rigor absoluto, cuja função é a de meramente validar/verificar um resultado. Por outro lado, a leitura crítica abrange a possibilidade de diferentes formas de rigor, não ignorando a

[30] Garnica (1996) define o vocábulo "técnico" como um conjunto de procedimentos bem definidos, destinados a produzir certos resultados e pode ser entendido por oposição à reflexão. Já o vocábulo "crítico" diz respeito ao "exame de um princípio ou de um fato, a fim de produzir sobre ele um juízo de apreciação" (p. 18).

importância do saber técnico. Logo, nesta última perspectiva, outras normas de condutas que não as formais podem ser tidas como válidas. Neste contexto, Garnica (1996) afirma que a leitura técnica parece estar filiada ao exercício profissional da Matemática e relacionada às disciplinas de conteúdos matemáticos durante a formação do professor. Por outro lado, ele faz menção a Educação Matemática como o campo de origem da leitura crítica a respeito da prova rigorosa nos cursos de Licenciatura, por se contrapor

> [...] à esfera da produção científica da Matemática, por um certo dinamismo que lhe é próprio, quer no uso de metodologias alternativas, quer por não desvincular prática científica e prática pedagógica, tendendo a valorizar o processo em detrimento do produto, tentando, ainda, estabelecer seus próprios parâmetros para qualificar suas investigações. (GARNICA, 1996, p. 22).

Contudo, Garnica não responsabiliza unicamente as disciplinas pedagógicas por esta leitura crítica sobre a prova rigorosa nos cursos de Licenciatura. O autor defende que as disciplinas de conteúdo matemático também devem oferecer a oportunidade de refletir sobre esta temática. O fragmento a seguir corrobora este fato: “A abordagem histórico-filosófica à questão da prova, procurando por seus fundantes, poderia ser implementada tanto em disciplinas específicas quanto nas pedagógicas, com metodologias “de Licenciatura” ou “de Bacharelado.” (GARNICA, 1996, p. 25).

A releitura que fazemos deste artigo é que, independentemente do enfoque da disciplina, a formação do professor deveria atingir os propósitos tanto da técnica, essencial para o “fazer matemática”, quanto da crítica, fundamental para ensinar matemática, sobretudo na Educação Básica.

Com um propósito similar a esta pesquisa, Ordem (2015) investigou as concepções de prova e demonstração em Geometria Plana de futuros professores de Matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique. Recorrendo, dentro outras, aos modelos teóricos de Balacheff (1988) e Harel e Sowder (1998), o autor desenvolveu sua pesquisa com 19 licenciandos do 4º ano de graduação, a partir da aplicação de questionários e da realização de entrevistas com os participantes. Para responder à questão de pesquisa, o autor estudou as estratégias e/ou justificativas dos licenciandos em tarefas que exigem provas ou demonstrações; identificou o papel e analisou o significado que os futuros professores atribuem à prova e à demonstração e analisou os critérios utilizados por eles para avaliar argumentos sobre algumas propriedades geométricas. Dentre os resultados obtidos, a análise dos dados mostrou que os futuros docentes não utilizam critérios consistentes para avaliar provas e demonstrações, pois apresentam distinções entre validar e demonstrar uma propriedade. Por exemplo, a maioria deles considerou que o uso de *softwares* ou de recorte/dobradura são procedimentos válidos para mostrar a invariância da soma dos ângulos internos de um triângulo, porém não são argumentos suficientes para constituir uma demonstração. Além disso, o pesquisador constatou que as concepções dos concluintes sobre provas e demonstrações são simples rituais dissociados de uma de suas funções principais, a de validar ou refutar conjecturas e propriedades.

Com ênfase também na Geometria, Ferreira (2016) realizou sua pesquisa com futuros professores de Matemática, a fim de investigar o ensino e a aprendizagem de Geometria via provas e demonstrações na Universidade do Estado da Bahia. A pesquisadora analisou livros de Geometria, aplicou questionários aos licenciandos e desenvolveu uma sequência didática. Os resultados do estudo evidenciaram que as concepções de provas e demonstrações dos estudantes são influenciadas pelos livros didáticos. Entretanto, esta sequência provocou uma evolução de provas pragmáticas para provas conceituais e com relação às funções da demonstração, os discentes passaram a realizá-las não apenas com a função de validação, mas também com a função de explicação, sistematização e comunicação. Deste modo, a autora afirma que foi possível (re)construir os saberes destes licenciandos, no que se refere a quadriláteros, prova e demonstração.

Por sua vez, Mateus (2015) também desenvolveu uma sequência de atividades com licenciandos em fase de conclusão do curso da Universidade Federal de Sergipe, as quais exploravam provas sob os pontos de vista didático e curricular. O objetivo era investigar se essa sequência favorecia a ressignificação da importância do processo de ensino de conceitos e atitudes concernentes a esse tema. Os resultados mostraram que os estudantes passaram a adotar um sentido mais amplo para as provas, admitindo substituir a reprodução das demonstrações presentes nos livros pelo fazer matemática, incluindo experimentações, argumentações, conjecturas e, quando fosse necessário, provas rigorosas.

Avançando na temática da formação inicial, Pietropaolo (2005) evidenciou a necessidade de (re)significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da formação de professores de Matemática. Para desenvolver a pesquisa, o autor averiguou as recomendações dos atuais currículos a respeito das argumentações e provas na Educação Básica, analisou as interpretações e avaliação dos professores a respeito de provas elaboradas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e ao contrastar com as falas de pesquisadores e professores, buscou compreender o papel das demonstrações nos cursos de Licenciatura e suas implicações na formação inicial. Dentre os resultados obtidos, identificou-se um consenso entre os entrevistados, quanto à "prova" como um recurso pedagógico bastante rico nas aulas de Matemática na Educação Básica, desde que atribua a essa palavra um sentido mais amplo do que o convencional, isto é, não se limitar à reprodução das provas descritas nos livros, mas na perspectiva de "fazer matemática", levando o aluno a experimentar, argumentar e conjecturar.

E, apesar de sua pesquisa não ser direcionada à formação inicial de professores, Aguilar Junior (2012) investigou como docentes já em exercício valorizam e aceitam os diversos níveis e tipos de argumentação apresentados por alunos do Ensino Fundamental. A metodologia adotada para a análise dos dados foi baseada em Hoyles (1997). Em síntese, a pesquisa mostrou que os alunos expõem melhor seus argumentos matemáticos quando são colocados em contato com atividades, currículo e professor preparados para a construção dessa habilidade em sala de aula.

1.4 PROVA EM AMBIENTES DINÂMICOS DE GEOMETRIA

Nesta seção, sugerimos novas abordagens ao ensino de Geometria com vista à necessidade de argumentações e, consequentemente, de provas. Conforme já citamos, em sala de aula, a prova deve ser utilizada para favorecer a compreensão matemática e certamente o maior desafio é encontrar métodos eficazes de atingir esse objetivo. Os pesquisadores Hoyles e Jones (1998), De Villiers (1999), Hanna (2000) e Arcavi e Hadas (2000) sugerem que uma possibilidade é o uso de ambientes dinâmicos de Geometria. É importante mencionar que para nos referenciar a esses ambientes ditos dinâmicos utilizaremos a terminologia Geometria Dinâmica (GD), usual nas pesquisas em Educação Matemática.

Para Arcavi e Hadas (2000), os *softwares* de GD podem ser comparados a "laboratórios virtuais" e a sua utilização pode favorecer a aprendizagem significativa de Geometria, desde que seja acompanhada por atividades que despertem a curiosidade nos alunos. Além de descrever uma abordagem interessante baseada numa situação problema (determinar a área máxima de um triângulo sob certas condições), os autores indicam cinco características que os ambientes de GD têm a potencialidade de promover: **visualização**, pois não apenas permitem que o aluno construa e visualize as figuras, como também possibilitam transformar essas construções em tempo real; **experimentação**, pois permitem que o aluno meça, compare e altere as construções, a fim de testar suas conjecturas e buscar contraexemplos; **reflexão**, pois a partir de situações cujo resultado seja inesperado, o aluno tem a oportunidade de refletir sobre o seu próprio conhecimento; ***feedback***, pois se torna mais efetivo o estudante experimentar e confrontar suas conjecturas do que receber a informação diretamente do professor. Deste modo, essas características incentivam a capacidade de argumentação do aluno, levando-o a **explicar e provar** a propriedade em questão.

É importante deixar claro que, em nossa concepção, a exploração de uma propriedade em ambientes de GD não minimiza ou abandona a necessidade de prová-la. Como ressalta Hanna (2000),

> A exploração era uma faceta importante da prática matemática muito antes dos computadores serem inventados e não era visto como inconsistente com a visão da matemática como uma ciência analítica [...]. O que realmente precisamos fazer, é claro, não é substituir a prova pela exploração, mas fazer uso de ambos. (p. 14, tradução nossa).

Em consonância com a citação anterior, acreditamos que os *softwares* de GD são potenciais ferramentas no processo de exploração e investigação dentro da sala de aula, permitindo que os alunos estabeleçam *links* entre o raciocínio empírico e dedutivo e fornecendo ideias para a elaboração de uma demonstração.

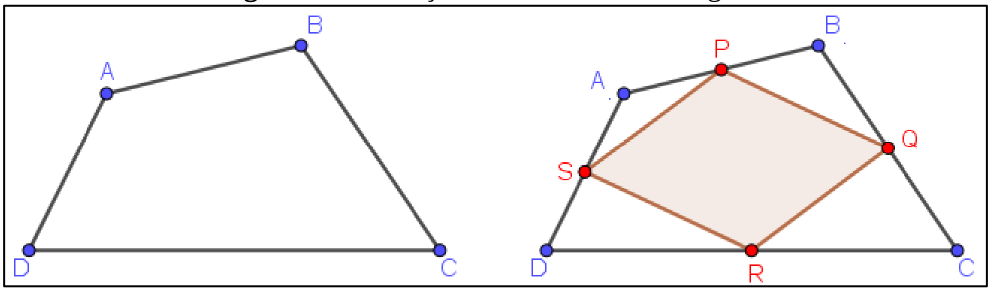
Além disso, concordamos com Hanna e Jones (1998) de que se a prova for apresentada de maneira tradicional, simplesmente substituindo a lousa pela tela do computador, encontraremos pouca melhoria nas concepções dos estudantes. Somente será possível avançar nesta temática sobre argumentação e provas na Educação Básica, se durante o processo de ensino-aprendizagem os professores tiverem a preocupação de problematizar e refletir juntamente com seus alunos, todas as etapas e construções desenvolvidas nos ambientes virtuais.

A reflexão que propomos é repensar nas funções dos ambientes virtuais no ensino de Geometria com vista à necessidade da prova, de modo que o computador não se torne uma simples ferramenta para apresentar velhas abordagens, mas que seja utilizado com potencialidade para estabelecer um novo modelo de aprender, ensinar e fazer matemática, como sugere Arcavi e Hadas (2000). Essa perspectiva deve ser estimulada tanto na Educação Básica quanto nos cursos de Licenciatura, pois, em geral, os mesmos não oferecem experiências virtuais enriquecedoras aos licenciandos durante a sua formação, se limitando a ofertar disciplinas que os auxiliam no manuseio de *softwares* ou de linguagens computacionais.

O futuro professor, por sua vez, deve se conscientizar de que o uso de *softwares* de GD não garante que os mesmos se tornem significativos no processo de ensino-aprendizagem. Isso requer um preparo adequado de sua parte e a elaboração de atividades exploratório-investigativas que potencializem a utilização dessas ferramentas, a fim de que os alunos questionem a veracidade das atividades desenvolvidas e busquem argumentos matemáticos para justificá-las.

Uma atividade que julgamos ser adequada para este fim é o Teorema de Varignon, o qual afirma que o quadrilátero $PQRS$ obtido ligando os pontos médios dos lados de um quadrilátero $ABCD$ qualquer é sempre um paralelogramo, conforme ilustra a figura 7:

Figura 7 - Ilustração do Teorema de Varignon.



Fonte: Autoria própria.

A exploração de polígonos por meio do *GeoGebra* permite visualizar um caminho para a demonstração. O ambiente dinâmico permite perceber que os lados opostos do quadrilátero, cujos vértices são os pontos médios do quadrilátero original, são sempre paralelos a uma das diagonais. A partir da identificação de triângulos semelhantes é possível, então, provar o teorema. E deste modo, os alunos podem criar conjecturas sobre os casos especiais em que o quadrilátero original é um paralelogramo genérico, um retângulo, um losango ou um quadrado.

CAPÍTULO 2
REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo apresentamos os modelos teóricos que norteiam a análise dos dados desta pesquisa: a Tipologia de Provas de Balacheff (1988) e os Esquemas de Provas de Harel e Sowder (1998). Porém, inicialmente fazemos uma discussão teórica sobre a noção de concepções e nos posicionamos quanto ao sentido adotado neste estudo.

2.1 DISUCUSSÃO TEÓRICA SOBRE A NOÇÃO DE CONCEPÇÕES

A literatura sugere que esse termo foi utilizado por anos nas pesquisas em Educação Matemática sem que houvesse uma definição explícita. Neste estudo, abordamos essencialmente as interpretações propostas nas pesquisas de Knuth (2002b), Thompson (1992), Ponte (1992) e Artigue (1990), as quais sugerem que as concepções dos professores sobre um assunto influenciam a sua prática em sala de aula, no sentido em que apontam caminhos, fundamentam decisões, etc.

Knuth (2002b), por exemplo, investigou as concepções de professores com vista à prática da Matemática científica e escolar. Ao mencionar "concepção" em seu artigo, o pesquisador faz referência ao trabalho de Grossman[31], o qual utiliza esse termo para se referir aos domínios de conhecimento e das crenças em conjunto:

> Em vez de tratar o conhecimento e as crenças dos professores como domínios separados, utilizo o termo "concepções" para representar os dois domínios em conjunto. Embora separar os conhecimentos e as crenças dos professores sirva como uma heurística útil para pensar e estudar os fatores que influenciam as práticas instrucionais dos professores, a separação é menos distinta na realidade do que na teoria. (KNUTH, 2002b, p. 85, tradução nossa).

Contudo, em Knuth (2002b) não fica claro o que o pesquisador considera como conhecimento e como crenças e, consequentemente, o seu entendimento a respeito do termo concepções. Por outro lado, identificamos na literatura, autores que escabelem uma explícita distinção entre ambos os termos como, por exemplo, Alba Thompson, uma das pioneiras a investigar as concepções dos professores sobre a Matemática. Thompson (1992) diferencia

[31] GROSSMAN, P. **The making of a teacher:** Teacher knowledge and teacher education. New York: Teachers College Pres, 1990.

crenças de conhecimento a partir da análise de três características essenciais. A primeira evidencia que as crenças podem estar associadas a graus distintos de convicção, diferentemente do conhecimento que não possui essa dimensão de variação. A segunda aponta o caráter não consensual das crenças, ou seja, um sujeito está ciente de que os outros podem ter convicções distintas. E a última característica distintiva diz respeito à existência de critérios para avaliar e julgar a validade do conhecimento, os quais são inexistentes para as crenças. Contudo, a pesquisadora assinala a possibilidade de mudança ao longo dos anos, à medida que antigas teorias são substituídas por novas: "[...] o que pode ter sido legitimamente alegado como conhecimento de uma só vez pode, à luz de teorias posteriores, ser julgado como crença. Inversamente, uma crença outrora mantida, com o tempo, pode ser aceita como conhecimento à luz de novas teorias de apoio." (p. 130, tradução nossa).

E a partir desta distinção, Thompson refere-se às concepções dos professores como uma estrutura mental mais que ampla, que engloba, dentre outros elementos, as crenças, conforme se observa no fragmento a seguir:

> A concepção do professor sobre a natureza da matemática pode ser vista como as crenças conscientes ou subconscientes, conceitos, significados, regras, imagens mentais e preferências deste professor em relação à disciplina da matemática. Essas crenças, conceitos, visões e preferências constituem os rudimentos de uma filosofia da matemática, embora para alguns professores, estas podem não estar desenvolvidas e articuladas em uma filosofia coerente. (THOMPSON, 1992, p. 132, tradução nossa).

Ponte (1992) também se reporta ao domínio cognitivo, porém destaca as influências individuais e sociais na formação das concepções de um sujeito. Para o pesquisador,

> As concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva. Actuam como uma espécie de filtro. Por um lado, são indispensáveis pois estruturam o sentido que damos às coisas. Por outro lado, actuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de actuação e compreensão. As concepções formam-se num processo simultaneamente individual (como resultado da elaboração sobre a nossa experiência) e social (como resultado do confronto das nossas elaborações com as dos outros). Assim, as nossas concepções sobre a Matemática são influenciadas pelas experiências que nos habituamos a reconhecer como tal e também pelas representações sociais dominantes. (PONTE, 1992, p. 1).

De acordo com Menezes (1995, p. 9-10), as formulações para o termo concepções propostas por ambos os pesquisadores apresentam visões substancialmente diferentes. Enquanto Thompson (1992) tem uma preocupação mais extensiva, enumerando os diversos elementos que constituem as concepções, a definição de Ponte (1992) remete a algo mais compreensivo, orientada para a explicação dos fatos. Além disso, este último educador também apresenta uma visão diferente em relação às crenças e ao conhecimento, ao ressaltar que não há a necessidade de distingui-los como incompatíveis. Ele afirma que em todo o conhecimento intervêm necessariamente crenças[32]:

> Existe um ponto, para além do qual não consegue ir a racionalidade humana, entendida como a capacidade de formular raciocínios lógicos, definir conceitos com precisão, e organizar de forma coerente os dados da experiência. Para além da racionalidade entramos no domínio das crenças, que são indispensáveis pois sem elas o ser humano ficaria virtualmente paralisado, sem ser capaz de determinar cursos de acção. (PONTE, 1992, p. 8).

A partir disso, o pesquisador concebe “as crenças com uma parte do conhecimento relativamente ‘pouco elaborada’, em vez de vê-los como dois domínios disjuntos, [uma vez que] nas crenças predominariam a elaboração mais ou menos fantasista e a falta de confrontação com a realidade empírica” (p. 8), enquanto no conhecimento predominariam os aspectos experienciais e a argumentação racional. E diante desse contexto, “as concepções podem ser vistas como o pano de fundo organizador dos conceitos” (p. 8). Deste modo, Ponte considera que tanto as concepções como as crenças fazem parte do conhecimento do professor, tendo as primeiras um caráter mais geral e estruturante (MENEZES, 1995, p. 9).

A seguir apresentamos a noção de concepção segundo a pesquisadora francesa Michèle Artigue. E para melhor compreendê-la, utilizamos os estudos de Almouloud (2007a) e de Ordem (2015).

Artigue (1990) define uma concepção como um ponto de vista local sobre um dado objeto, caracterizado por:

> - situações que lhe servem de ponto de vista de partida: situações ligadas à aparição da concepção ou para as quais ela constitui um ponto de vista particularmente bem adequado;
> - sistemas de representações mentais, icônicas, simbólicas;
> - propriedades, invariantes, técnicas de treinamento, métodos específicos (implícitos e explícitos). (ARTIGUE, 1990 apud ALMOULOUD, 2007a, p. 152).

[32] Ponte (1992) distingue o conhecimento (ou saber, considerado por ele como sinônimo), do ponto de vista “macro”, em três características: o saber científico, o saber profissional e o saber comum. Porém, nesta pesquisa não nos aprofundaremos sobre o assunto.

Por “ponto de vista local” entendemos que a autora se refere a um “cenário” momentâneo, visto que as concepções de um indivíduo estão sujeitas a uma dimensão temporal, ou seja, com o decorrer do tempo ele pode apresentar uma multiplicidade de concepções possíveis a um mesmo objeto.

Segundo Artigue (1990), a concepção sobre um objeto está estritamente associada ao saber em questão. Por isso, ela evidencia que as concepções se tornam um meio para a análise desse conhecimento e para a elaboração de situações didáticas, a fim de observar o comportamento do estudante durante um processo de aprendizagem. Com efeito, a autora defende que existem dois tipos diferentes de concepções: as *concepções matemáticas a priori*, possíveis para uma dada noção e as *concepções desenvolvidas* pelos alunos no seu ambiente cultural ou durante um processo de aprendizagem (ALMOULOUD, 2007a, p. 152). Além disso, ela afirma que a noção de concepção atende a duas necessidades diferentes:

> - evidenciar a pluralidade dos pontos de vista possíveis num mesmo objeto matemático, diferenciar as representações e os modos de tratamento que lhe são associados, evidenciar sua adequação à resolução de problemas;
> - auxiliar o pesquisador em didática da matemática a questionar a suposta clareza da comunicação didática proposta pelos modelos empiristas de aprendizagem, permitindo-lhe diferenciar o saber que o ensino quer transmitir e os conhecimentos efetivamente construídos pelos alunos. (ARTIGUE, 1990 apud ALMOULOUD, 2007a, p. 151-152).

Deste modo, Almouloud (2007a), sustentado por Artigue (1990), afirma que as concepções “são modelos construídos pelo pesquisador para analisar as situações do ensino e os comportamentos cognitivos dos alunos” (p. 152). O educador salienta ainda que elas permitem interpretações e previsões, mas com o intuito somente de descrever parte do funcionamento cognitivo do estudante. É importante destacar que essa caracterização vai ao encontro do nosso entendimento a respeito deste termo. As situações propostas no questionário (ou os modelos construídos) permitiram investigar as concepções dos licenciandos sobre as noções de argumentação, prova e demonstração. Contudo, por se tratar de um domínio cognitivo, é importante destacar que as análises e ponderações apresentadas neste estudo se baseiam essencialmente no nosso ponto de vista enquanto pesquisadores. Em vista disso, estão sujeitas a critérios subjetivos, uma vez que “as interpretações em termos de concepções que podemos fazer das observações dos alunos [ou no caso dos licenciandos] não são, então, necessariamente as únicas pertinentes, nem mesmo as mais pertinentes. É necessário concebê-las como interpretações possíveis [...].” (ALMOULOUD, 2007a, p. 155).

Ainda segundo Artigue, com base em um dos seus estudos[33], no qual investigou as concepções de crianças (7 a 10 anos) sobre a noção de circunferência, a partir de diferentes caracterizações envolvendo tal objeto matemático, a pesquisadora afirma

> A distinção que temos feito entre o objeto matemático, que é único, e as variadas concepções que podem estar associadas a ele, parece importante para nós. Ela constitui, dentro da pesquisa, uma ferramenta para analisar situações-problema propostos aos estudantes, bem como seus procedimentos. (ARTIGUE, 1990, p. 268, tradução nossa).

Particularmente em nosso estudo, os objetos (no caso, paramatemáticos) são as noções de argumentação, prova e demonstração, para as quais os licenciandos podem apresentar uma pluralidade de concepções. Portanto, o nosso objetivo geral consiste em investigá-las. Todavia, é preciso estar atento, pois conforme adverte Artigue (1990, p. 270), o importante para o pesquisador não é estabelecer um catálogo de concepções possíveis, mas sim estudar a articulação entre concepções e situações em um dado aprendizado (no caso, as concepções mobilizadas pelos licenciandos durante o primeiro período do curso de graduação, e, particularmente, as que também foram desenvolvidas ao longo de sua trajetória escolar).

Neste momento, após apresentar as noções de concepção propostas por três pesquisadores, é importante identificarmos as principais semelhanças e diferenças entre elas e nos posicionar quanto ao sentido adotado neste estudo, apesar de considerarmos que o significado de concepção seja algo tão complexo para se restringir a uma só interpretação.

Todas as definições se referem ao domínio cognitivo de um sujeito, porém cada uma tem suas especificidades. Por exemplo, a noção de Thompson (1992) está fortemente associada ao que a autora entende por crenças e, consequentemente, dissociada a sua compreensão de conhecimento, visto que ela estabelece uma distinção entre ambos os termos. Além disso, em sua definição são "enumerados" os diversos elementos que constituem as concepções. Já Ponte (1992) se refere à concepção como "uma espécie de filtro", no sentido de tentar compreender a ocorrência dos fatos e destaca as influências individuais (resultado da própria experiência) e sociais (resultado do confronto com outrem) no processo de formação das concepções de um sujeito. No entanto, segundo o educador, as concepções, assim como as crenças, fazem parte do conhecimento do indivíduo (no caso, do professor). Do mesmo modo, Artigue (1990) também considera que as concepções de um sujeito manifestam os

[33] Para maiores informações, consulte: ARTIGUE, M; ROBINET, J. Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 3.1, p. 5-64, 1982.

conhecimentos que ele construiu relativamente a um dado saber, mas destaca uma dimensão temporal ao conceituá-la como “pontos de vista locais sobre um dado objeto”. Contudo, talvez a maior diferença em relação aos outros dois autores, seja o fato de Artigue evidenciar que a noção de concepção auxilia o pesquisador a investigar situações de ensino e aprendizagem, no sentido de que a distinção entre um dado objeto e a variedade de concepções associada a ele consiste numa ferramenta de análise para tais situações.

Em virtude da discussão anterior, nesta pesquisa adotamos a noção proposta por Artigue (1990), por entendermos que as concepções de um sujeito estão intrinsecamente associadas ao seu domínio de conhecimento e por considerar que elas viabilizam uma possível análise desse saber. Particularmente, quando dizemos concepções dos licenciandos ingressantes nos referimos:

- À pluralidade dos pontos de vista manifestados a *priori* sobre argumentação, prova e demonstração no âmbito matemático;
- Às estratégias utilizadas para interpretar e avaliar as argumentações de alunos fictícios;
- Às finalidades associadas à prova no contexto da Matemática acadêmica e escolar;
- Às representações e às justificativas empregadas para validar conjecturas matemáticas;
- Ao discernimento concernente a terminologias específicas do sistema lógico dedutivo, tais como hipótese, tese e recíproca.

2.2 A TIPOLOGIA DE PROVAS SEGUNDO BALACHEFF (1988)

Balacheff (1988) desenvolveu uma pesquisa com estudantes franceses de 13 a 14 anos, em que investigou como os discentes validavam o problema de determinar o número de diagonais em um polígono qualquer. Por meio da análise dos dados, ele elaborou uma tipologia de provas organizadas em **provas pragmáticas** e **provas conceituais**[34].

As provas pragmáticas se baseiam na verificação empírica para justificativa de propriedades e regularidades, ou seja, através da observação, exemplos, desenhos, as quais

[34] É também possível encontrar na literatura traduzido como provas intelectuais.

Vergnaud (1981[35] apud BALACHEFF, 1988, p. 217) define como “recursos de ação”. Já as provas conceituais não usufruem desses recursos e são caracterizadas pela linguagem matemática baseada na argumentação e em teorias que permitem a validação de uma propriedade, não se limitando a meras constatações numéricas.

Balacheff (1988, p. 218) destaca quatro principais níveis considerando os raciocínios e conhecimentos apresentados ao elaborar uma prova: **empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico** e **experiência mental**[36].

A seguir apresentamos a descrição detalhada desses tipos de prova propostas por Balacheff. E para exemplificá-los, vamos considerar a proposição “A soma dos n primeiros números naturais é dada por $\frac{n(n+1)}{2}$” e identificar possíveis raciocínios para cada um dos níveis de provas.

O empirismo ingênuo é baseado na observação, em que o aluno assume como verdade a conjectura de um enunciado através da verificação de poucos e simples casos, sem questionamento algum quanto às suas peculiaridades. A figura 8 ilustra o primeiro nível de prova:

Figura 8 - Exemplo de raciocínio classificado como empirismo ingênuo.

Como a soma dos cinco primeiros números naturais é dada por $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, e ao substituir a incógnita na expressão $\frac{n(n+1)}{2}$ por 5 também resulta em 15, segue que a propriedade é verdadeira.

Fonte: Autoria própria.

Já na experiência crucial se utiliza um experimento particular para investigar a veracidade de uma proposição. A principal diferença com o anterior é a evidência de generalização, a qual se dá pela realização de experiências, na busca de um resultado geral. A figura 9 ilustra o segundo nível de prova:

[35] VERGNAUD, G. Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. **Actes du Vieme Colloque de PME**, v. 2. Grenoble: Edition IMAG, p. 7-17, 1981.

[36] Tradução nossa do original *naive empiricism*, *crucial experiment*, *generic example* e *thought experiment*, respectivamente.

Figura 9 - Exemplo de raciocínio classificado como experiência crucial.

Como a soma de números naturais resulta em um natural, o resultado do numerador da expressão $\frac{n(n+1)}{2}$ deve ser divisível por dois. Mas, como $1x2 = 2$, $2x3 = 6, 3x4 = 12$ e assim por diante, segue que um número natural multiplicado pelo seu sucessor é sempre par. Deste modo, para ver se a propriedade é verdadeira, basta verificá-la para um número par e para um número ímpar. Para $n = 4$, a soma dos quatro primeiros números naturais é dada por $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, e ao substituir a incógnita na expressão $\frac{n(n+1)}{2}$ por 4 também resulta em 10. Já para $n = 5$, a soma dos cinco primeiros números naturais é dada por $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, e ao substituir a incógnita na expressão anterior por 5 também resulta em 15. Portanto, segue que a propriedade é verdadeira.

Fonte: Autoria própria.

No exemplo genérico, como a nomenclatura sugere, elege-se um exemplo como representante da classe de objetos para explicitar as razões que validam a propriedade com o intuito de deduzir as características que representam essa classe. A figura 10 ilustra o terceiro nível de prova:

Figura 10 - Exemplo de raciocínio classificado como exemplo genérico.

Para verificar essa propriedade, considere $n = 6$. Considere ainda a soma dos seis primeiros números naturais, adicionada à mesma soma escrita em ordem decrescente:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 \\ 6 & + & 5 & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 7 & + & 7 & + & 7 & + & 7 & + & 7 & + & 7 \end{array}$$

Note que o resultado dessa operação é $6\ x\ 7$, mas como a soma foi adiciona duas vezes, é necessário dividir por dois. Logo, a afirmação é verdadeira, pois a soma dos seis primeiros números naturais é dada por $\frac{6 \text{ x } 7}{2}$, que pode ser reescrito como $\frac{6(6+1)}{2}$.

Fonte: Autoria própria.

Por fim, a experiência mental se baseia no raciocínio lógico dedutivo para garantir a validade de uma propriedade de forma genérica (para toda a classe de objetos) e não por meio de exemplos ou de um representante particular. A figura 11 ilustra o quarto nível de prova:

Figura 11 - Exemplo de raciocínio classificado como experiência mental.

Considere a soma S dos n primeiros números naturais, a começar em 1 até n. Considere também a soma inversa de n até 1, que por ser uma operação comutativa também pode ser expressa pela letra S. Adicionando ambas as somas, tem-se:

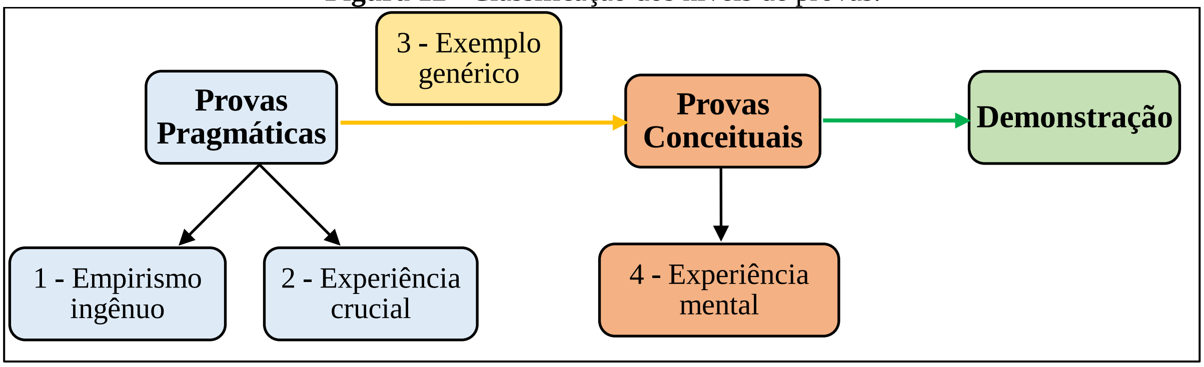
$$\begin{array}{ccccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n-1 & + & n \\ S & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1 & + & n+1 \end{array}$$

Como há n parcelas de $n+1$, implica que $2S = n(n+1)$. Logo, a afirmação é verdadeira, pois soma dos n primeiros números naturais é dada por $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Fonte: Autoria própria.

Na figura 12 apresentamos um diagrama que ilustra nossa interpretação da tipologia de provas proposta por Balacheff:

Figura 12 - Classificação dos níveis de provas.



Fonte: Autoria própria.

Note que na figura 12 é possível verificar que os tipos de provas remetem a uma transição evolutiva da noção de demonstração (do empirismo ingênuo à experiência mental). Portanto, para que um aluno possa atingir o nível mais elevado, isto é, da experiência mental, e seja capaz de não somente compreender o significado de uma demonstração, mas também de demonstrar, é necessário que ele vivencie todos os níveis anteriores. E para que ocorra esta transição entre eles é fundamental que o professor crie condições favoráveis para isso, uma vez que "[...] no ambiente da sala de aula, se o professor não instiga o aluno a justificar as suas afirmações, este pode não enxergar motivos para empreender uma validação para suas conjecturas, se contentando em exemplificá-las." (DIAS, 2009, p. 33).

No entanto, se o professor em formação inicial não vivenciar situações que o levem a refletir sobre as funções e a importância da argumentação e provas no ensino de Matemática, como o mesmo poderá pensar numa prática semelhante quando for lecionar na Educação Básica? Esperamos ao longo desta pesquisa fomentar a discussão e colaborar com reflexões sobre a formação dos licenciandos com vista a esta problemática.

Retomando a discussão sobre o referencial teórico adotado, vimos que os dois níveis categorizados como provas pragmáticas remetem a uma racionalidade empírica e não estabelecem a veracidade da afirmação. Porém, como ressalta Balacheff (1988), são chamados de "prova porque são reconhecidos como tais pelos produtores" [no caso, os estudantes] (p. 218, tradução nossa).

Balacheff (1988) chama a atenção para a linguagem utilizada ao elaborar uma demonstração. Ele afirma que não é possível determinar o nível da prova apenas por meio de características linguísticas, pois é "o conhecimento sobre o processo de produção de prova que permite tomar uma decisão sobre a sua validade e seu nível" (p. 228, tradução nossa). Como exemplo, considere a resposta do Igor descrita na questão 2 do questionário aplicado aos estudantes, que apesar de evidenciar o uso da linguagem matemática formal, os argumentos em si não são válidos (veja a página 101). Deste modo, para que um aluno atinja a experiência mental é necessário que o mesmo construa habilidades cognitivas e linguísticas, e segundo Balacheff (1988, p. 225), a dificuldade relacionada à linguagem consiste em expressar as operações num objeto abstrato (uma classe de objetos). Deste modo, a linguagem na elaboração de uma prova formal não deve ser apenas um meio de comunicação, mas também uma ferramenta para deduções lógicas.

2.3 OS ESQUEMAS DE PROVAS SEGUNDO HAREL E SOWDER (1998)

Harel e Sowder (1998) desenvolveram um estudo utilizando a metodologia *teaching experiment* com alunos americanos do Ensino Médio e do Superior, com o objetivo de investigar como os estudantes provam ou justificam, mais especificamente, como eles averiguam ou persuadem outrem sobre a validade de uma afirmação matemática. A terminologia utilizada para se referir a isso no artigo é esquemas de prova[37]. Os autores chamam a atenção que o esquema de prova de uma pessoa é idiossincrático e pode variar de campo para campo, mesmo dentro da própria Matemática como, por exemplo, da Álgebra para a Geometria. Além disso, a noção de esquema de prova não deve se restringir à prova matemática[38] no sentido convencional.

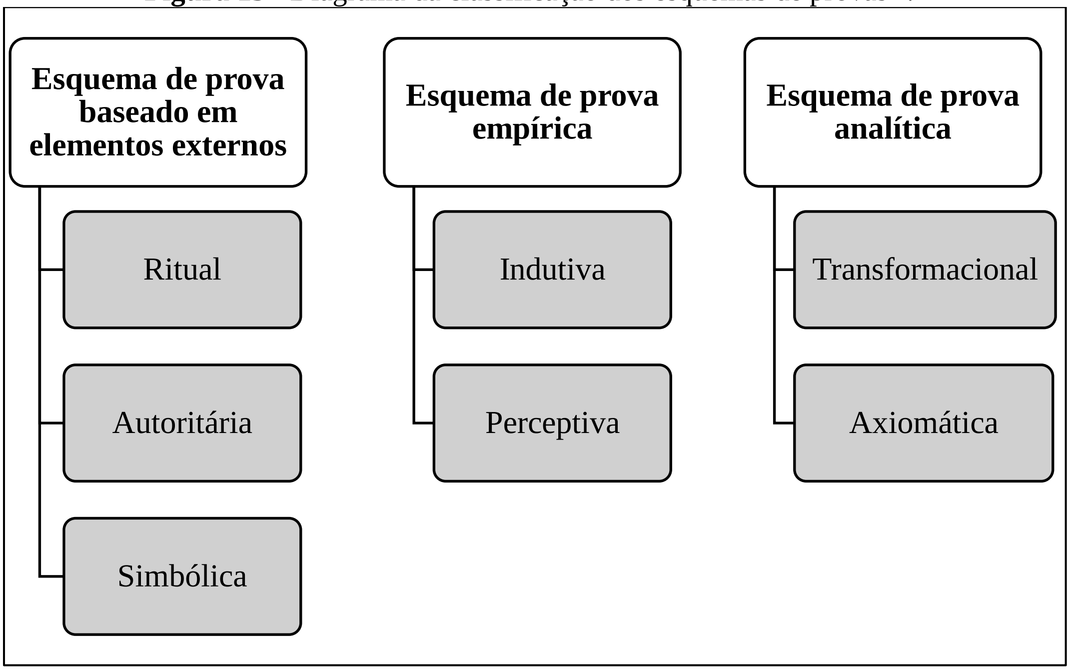
Para definir o que denotam por esquema de prova, os autores apresentam uma discussão preliminar sobre algumas terminologias. Uma afirmação pode ser concebida pelo

[37] Tradução nossa do original *proof schemes*.
[38] Para os autores a prova matemática (*mathematical proof*) diz respeito ao esquema de prova analítica.

indivíduo como uma conjectura ou um fato. A diferença entre ambas reside na (in)certeza sobre a veracidade da afirmação. Ambas as definições são bases para a noção de *proving*[39], que diz respeito ao processo empregado pelo indivíduo para tirar as dúvidas sobre a veracidade de uma afirmação, ou seja, como as conjecturas são refutadas ou transformadas em fatos. E segundo Harel e Sowder (1998), isso inclui dois subprocessos[40]: averiguar (eliminar as dúvidas pessoais) e persuadir (eliminar as dúvidas alheias). Desta maneira, o esquema de prova de uma pessoa é definido como sendo a junção de ambos subprocessos. Observe que as definições de processo e esquema de prova são centradas nos estudantes. Além disso, como os próprios autores mencionam, essas definições são subjetivas, pois podem ser variantes de acordo com as pessoas, os contextos, as épocas, as culturas e as civilizações em que estão inseridas (HAREL; SOWDER, 2007, p. 6-7).

Como resultado desse estudo exploratório, Harel e Sowder (1998) identificaram três categorias principais de esquemas de provas: **esquema de prova baseado em elementos externos, esquema de prova empírica** e **esquema de prova analítica (ou dedutiva)** [41]. E cada uma destas categorias possui suas subcategorias, conforme mostra a figura 13.

Figura 13 - Diagrama da classificação dos esquemas de provas[42].



Fonte: Autoria própria.

---

[39] Ao longo do texto utilizaremos a expressão “processo de prova” como tradução para essa terminologia.
[40] Harel e Sowder (1998) utilizam os termos *ascertaining* e *persuading* que foram traduzidos, respectivamente, por averiguar e persuadir.
[41] Tradução nossa do original *external conviction proof schemes*, *empirical proof schemes* e *analytical proof schemes*, respectivamente.
[42] As provas transformacionais e axiomáticas possuem ainda outras subdivisões segundo Harel e Sowder (1998, p. 245), as quais não foram abordadas neste trabalho.

É importante mencionar que essa classificação não ocorreu a *priori*, mas emergiu das dúvidas e convicções apresentadas pelos alunos durante os episódios de *teaching experiments*. Além disso, os autores afirmam que cada uma das categorias representa um estágio cognitivo, uma habilidade intelectual no desenvolvimento matemático dos estudantes e que esses esquemas não são mutuamente excludentes. Portanto, pode acontecer do mesmo aluno utilizar mais de um esquema de prova. A seguir detalhamos cada uma das três categorias identificadas na figura 13, bem como suas respectivas subcategorias, descrevendo seus significados e apresentando exemplos que ilustram o respectivo esquema de prova.

O esquema de prova baseado em elementos externos, como a nomenclatura sugere, são fatores externos ao problema que influenciam na convicção ou na forma como um estudante convence outrem sobre uma determinada sentença matemática. Esses fatores estão relacionados, por exemplo, ao modo como o argumento é apresentado, e, em virtude disso, Harel e Sowder (1998) propõem a seguinte subdivisão ilustrada no quadro 2:

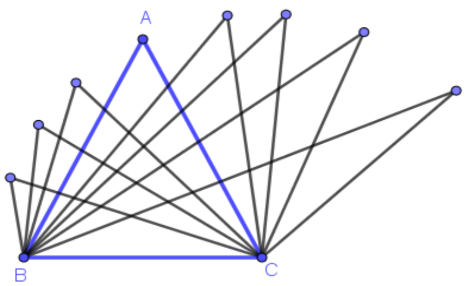
Quadro 2 - Subcategorias do esquema de prova baseado em elementos externos.

<table>
<tr><th>Subcategorias</th><th>Descrição e Exemplo(s)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Ritual</td><td>Verifica-se esse esquema quando o estudante aceita a prova simplesmente pela sua aparência e não pela coerência do argumento desenvolvido. Por outro lado, também pode se verificar quando o aluno, mesmo convencido pelo argumento, a questão estética (a falta de símbolos, por exemplo) o coloca em dúvida se de fato constitui uma prova matemática.</td></tr>
<tr><td>Por exemplo, os estudantes universitários de currículos tradicionais podem aceitar como prova geométrica apenas aquelas em que o raciocínio é organizado no formato de duas colunas (afirmações e razões). E nesse contexto, mesmo quando outros tipos de argumentos são apresentados, eles não os validam como uma demonstração, justamente por causa da sua aparência e não pela coerência do raciocínio desenvolvido.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Autoritária</td><td>A validade da sentença é ratificada pelo uso de argumento de autoridade.</td></tr>
<tr><td>Quando o estudante se reporta ao professor ou ao livro didático, por exemplo, para validar uma propriedade. Por exemplo: “A fórmula de Bhaskara é verdadeira, pois o professor a escreveu na lousa”.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Simbólica</td><td>Este esquema é percebido quando o estudante descreve uma resolução por meio da manipulação de símbolos, porém tais operações nem sempre possuem significados para o aluno.</td></tr>
<tr><td>Bia simplificou a expressão algébrica abaixo da seguinte forma:
$$\frac{v+t}{u+t} = \frac{v+\cancel{t}}{u+\cancel{t}} = \frac{v}{u}$$
E tanto ela quanto seus colegas aceitaram sua resolução como válida.
(HAREL; SOWDER, 2007, p. 7)</td></tr>
</table>

Fonte: Autoria própria.

Já o esquema de prova empírica se refere quando a validade de uma sentença é influenciada por evidências numéricas a partir da verificação de um ou mais exemplos ou através da percepção. O quadro 3 apresenta as subcategorias para este esquema:

Quadro 3 - Subcategorias do esquema de prova empírica.

<table>
<tr><th>Subcategorias</th><th>Descrição e Exemplo(s)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Indutiva</td><td>Ocorre quando o estudante busca averiguar e persuadir outrem sobre a validade de uma afirmação por meio de uma avaliação quantitativa (cálculos numéricos, substituição numérica numa expressão algébrica). Em linhas gerais, para legitimar uma sentença genérica, o aluno utiliza um ou mais exemplos particulares[43].</td></tr>
<tr><td>Para verificar a validade da seguinte sentença “A soma de dois números ímpares é sempre par”, César fez alguns cálculos em seu caderno, tais como, $1 + 5 = 6$, $3 + 3 = 6$, e concluiu que a afirmação era verdadeira.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Perceptiva</td><td>Verifica-se quando o aluno, para validar uma propriedade, utiliza imagens mentais rudimentares baseadas em sua percepção direta.
É importante destacar que, nesse contexto, Harel e Sowder (1998, p. 255) definem “imagens mentais rudimentares” como àquelas que consistem na “coordenação da percepção, mas que falta a capacidade de transformar ou antecipar os resultados de uma transformação” (tradução nossa).</td></tr>
<tr><td>É possível olhar para o triângulo ABC (figura 14) e perceber duas igualdades: que os lados AB e AC têm o mesmo comprimento e que os ângulos ACB e ABC são congruentes. Se essa observação é meramente perceptiva, o observador não será capaz de perceber a relação entre ambas (que uma resulta da outra). Por outro lado, em uma observação que envolve transformações (ver o próximo esquema de provas), a mesma imagem pode ser vista como apenas uma das possíveis transformações da figura. Por exemplo, o triângulo isósceles ABC na figura 14 pode ser visto como um caso especial (em que os ângulos opostos AC e AB são congruentes) entre todos os demais casos possíveis que resultam da variação do ponto A na semicircunferência de centro C e raio AC (em que os ângulos opostos AC e AB não são congruentes).
Figura 14 - Exemplo de esquema de prova perceptiva.

Fonte: Harel e Sowder (1998, p. 256).</td></tr>
</table>

Fonte: Autoria própria.

[43] Não confunda o esquema de prova indutiva com prova por indução.

Por fim, o esquema de prova analítica, em síntese, é caracterizado pelo uso do raciocínio dedutivo. Entretanto, os autores observam que isso vai além do que usualmente chamamos de "método de demonstração matemática", isto é, um processo que envolve uma sequência de enunciados, os quais são deduzidos por meio de certas regras lógicas, a partir de um conjunto de afirmações que são aceitas sem provas (também conhecidos como axiomas). Esta categoria compreende as subdivisões descritas no quadro 4:

Quadro 4 - Subcategorias do esquema de prova analítica.

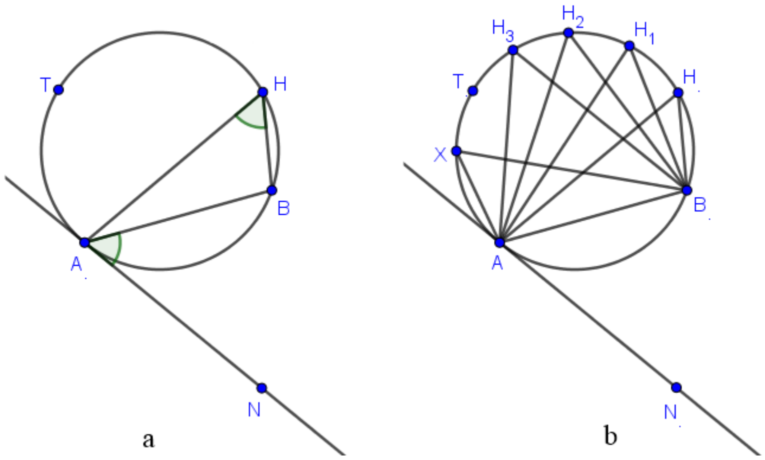
(continua)

Subcategorias	Descrição e Exemplo(s)
Transformacional	Este esquema de prova é assim chamado por envolver a criação e transformação de *imagens mentais* por meio do processo dedutivo, e possui três características essenciais: **generalidade, pensamento operacional** e **dedução lógica**. A generalidade diz respeito à preocupação do aluno em validar a afirmação nos seus aspectos gerais, e não apenas em casos particulares. Já o pensamento operacional é observado quando o aluno estabelece metas e busca antecipar os resultados durante o processo de investigação. Por fim, ele compreende que a justificativa matemática deve ser baseada em regras de dedução lógica. É importante destacar que, nesse contexto, Harel e Sowder (1998, p. 258) definem "imagens mentais" como àquelas que apoiam as experiências mentais. Embora os autores não explicitem isso no artigo, acreditamos que seja possível pensar em "experiências mentais" segundo a perspectiva de Balacheff (1988).
	Durante uma aula de Matemática, enquanto se discutia a relação entre o ângulo inscrito AHB e o ângulo formando entre reta tangente AN e a corda AB (figura 15a), Jeff argumentou que ambos os ângulos eram congruentes, pois quando o ponto H se move ao longo do arco ATH (desenhando algo similar a figura 15b na lousa), a sequência de ângulos inscritos $AH_1B, AH_2B, AH_3B, \ldots$, era formada. Ele observou que essa sequência, incluindo os ângulos AXB, onde X é um ponto sobre o arco ATH, são congruentes entre si (por arco capaz). E concluiu que, quando X coincide com o ponto A, o ângulo AXB se torna BAN e, portanto, os ângulos BAN e BHA são congruentes.

Quadro 4 – Subcategorias do esquema de prova analítica.

(continuação)

<table>
<tr>
<td>Transformacional</td>
<td>
Figura 15 - Exemplo de esquema de prova transformacional.



Fonte: Harel e Sowder (1998, p. 260).
</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Axiomática</td>
<td>Os autores evidenciam que esse esquema é uma extensão epistemológica do esquema de prova transformacional. Por isso, também apresenta as três características descritas anteriormente: generalidade, pensamento operacional e dedução lógica. Entretanto, neste esquema o estudante parte do princípio que, em qualquer processo de prova, se deve começar por um conjunto de axiomas e definições, a fim de validar a afirmação.</td>
</tr>
<tr>
<td>O modelo geométrico euclidiano é o exemplo clássico do modelo axiomático de prova, pois neste contexto se parte de premissas (axiomas, definições e postulados), levando a obter resultados (proposições, teoremas e corolários) dentro deste sistema.
(AGUILAR JUNIOR, 2012, p. 35)</td>
</tr>
</table>

Fonte: Autoria própria.

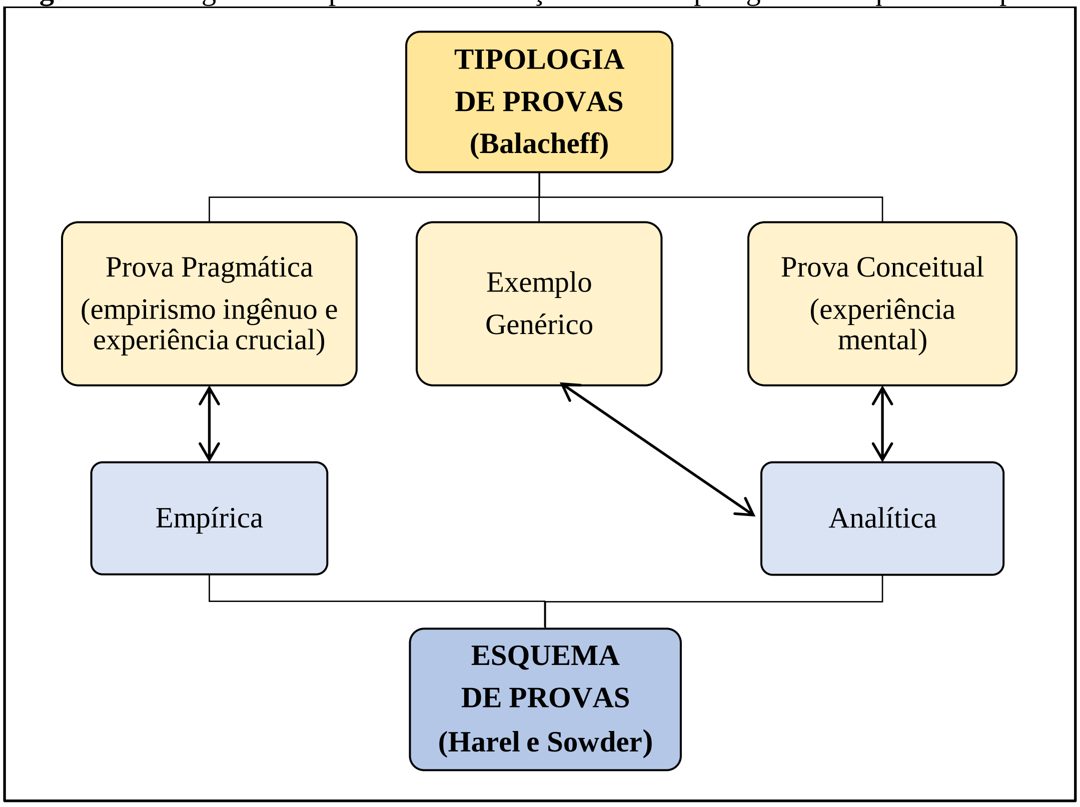
A seguir discutimos as relações entre as classificações apresentadas por Balacheff (1988) e Harel e Sowder (1998, 2007), a fim de salientarmos as principais semelhanças e diferenças e também justificarmos a escolha de ambos os modelos teóricos.

2.4 COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS DE BALACHEFF E DE HAREL E SOWDER

De acordo com as descrições apresentadas anteriormente, é possível observar algumas articulações entre a tipologia e os esquemas de provas. A noção de prova pragmática cunhada por Balacheff (1988), em que se enquadram os níveis de prova intitulados empirismo ingênuo e experiência crucial, remete à definição de Harel e Sowder (1998) para a categoria denominada esquema de prova empírica (especialmente, a descrição do esquema de prova indutiva), visto que em ambos os modelos teóricos essas terminologias se referem ao uso de argumentos empíricos para validar uma sentença matemática. Já a noção de prova conceitual, onde está situado o nível de prova intitulado experiência mental, remete à descrição do esquema de prova analítica, pois faz menção ao uso de argumentos dedutivos para validar uma afirmação. Quanto ao nível de prova denominado exemplo genérico, que consiste num estágio de transição entre a prova pragmática e conceitual, também remete à descrição do esquema de prova analítica, por satisfazer as três características essenciais, descritas no quadro 4: generalidade, pensamento operacional e dedução lógica (HAREL; SOWDER, 2007, p. 9).

Com base nisso, apresentamos um diagrama na figura 16 que ilustra nossa interpretação acerca da verossimilhança entre a classificação proposta na tipologia e nos esquemas de provas:

Figura 16 - Diagrama das possíveis articulações entre a tipologia e os esquemas de provas.



Fonte: Autoria própria.

É possível observar na figura 16 que o esquema de prova baseado em elementos externos não foi relacionado neste diagrama. E a razão disso é que em Balacheff (1988) não encontramos nenhum tipo de prova similar a essa categoria de Harel e Sowder (1998).

Além disso, foi possível constatar que a principal diferença entre ambos os modelos teóricos é com relação ao nível epistemológico. Como vimos, a tipologia de provas foi elaborada por meio de uma abordagem experimental, em que Balacheff analisou as respostas apresentadas pelos alunos para validar certa sentença matemática. Nela é possível observar níveis de provas que remetem a uma transição evolutiva da noção de demonstração (do empirismo ingênuo à experiência mental). Já o esquema de provas, por ter sido elaborado por meio da metodologia *teaching experiment*, permitiu que Harel e Sowder levassem em consideração não apenas as respostas escritas pelos estudantes, mas também o modo como eles averiguavam ou persuadiam outrem sobre a validade de uma conjectura. Nesta dissertação, a metodologia que adotamos se aproxima mais da que foi utilizada por Balacheff, visto que as nossas análises e conclusões têm como base um questionário respondido pelos licenciandos e não teremos a oportunidade, pelo menos no mestrado, de investigar o modo como eles persuadem outrem (por exemplo, seus alunos) sobre a validade de uma afirmação matemática.

Como vimos na seção 2.3, as definições das terminologias utilizadas por Harel e Sowder são centradas no aluno, e por essa razão, a maior preocupação deles é caracterizar o que, na perspectiva do estudante, pode ser considerado como prova. Todavia, apesar dos esquemas de provas serem organizados em três categorias que indicam certa evolução na forma de validar as sentenças matemáticas (da convicção externa ao dedutivo), estes pesquisadores não estabeleceram nenhum estágio de transição entre eles, ao contrário de Balacheff (AGUILAR JUNIOR, 2012, p. 33). Portanto, enquanto a tipologia apresenta níveis de prova que reporta a uma transição evolutiva da noção de demonstração, os esquemas de provas se organizam em (sub)categorias que remetem a uma perspectiva subjetiva de validade, que pode variar de acordo com o indivíduo. Essa distinção se deve, principalmente, à noção de prova adotada por cada um dos autores, conforme discutimos no capítulo 1.

Em síntese, a escolha de ambos os modelos teóricos foi motivada por acreditarmos que elas não se sobrepõem, mas se complementam. Desta forma, os estudos de Balacheff (1988) e Harel e Sowder (1998) nortearam a nossa pesquisa, desde a elaboração dos questionários até a interpretação dos dados coletados com os licenciandos ingressantes (especialmente nas questões 2, 5, 6 e 7, nas quais os participantes deveriam avaliar ou elaborar justificativas para algumas conjecturas matemáticas e estes trabalhos sustentaram as respectivas análises didáticas descritas no capítulo 4).

CAPÍTULO 3
DELINEAMENTO DA PESQUISA

Neste capítulo indicamos algumas razões que justificam a nossa pesquisa, retomamos a questão e os objetivos que a norteiam e apresentamos os procedimentos metodológicos adotados, assim como a caracterização das instituições e dos sujeitos participantes deste estudo.

3.1 PROBLEMÁTICA DE PESQUISA

A argumentação matemática é importante no âmbito da Educação Básica, uma vez que os próprios PCN do Ensino Fundamental orientam os docentes que

> [...] no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (BRASIL, 1998a, p. 71).

Deste modo, a apresentação e o desenvolvimento da argumentação aos alunos de terceiro e quarto ciclos são importantíssimos na prática docente, a fim de proporcionar a eles a oportunidade de ampliar e consolidar suas habilidades e competências referentes à argumentação e demonstração de resultados matemáticos no Ensino Médio. Essa abordagem visa auxiliá-los no desenvolvimento do raciocínio lógico, uma vez que

> [...] a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (BRASIL, 1998b, p. 40-41).

Além das orientações prescritas nos PCN, outro documento oficial que incentiva a prática de argumentação e provas nas salas de aula do Ensino Fundamental é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a qual está sendo implementada e espera que os alunos

> [...] desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental. (BRASIL, 2017, p. 221).

A proposta descrita na BNCC é que no decorrer dos anos escolares, os estudantes não se limitem a verificações de conjecturas por meio de evidências empíricas, mas que eles saibam empreender argumentações cada vez mais formais para validá-las. O fragmento a seguir extraído do documento referente ao Ensino Médio destaca esse fato:

> Os estudantes deverão ser capazes de fazer induções por meio de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais. Assim, ao formular conjecturas, mediante suas investigações, eles deverão buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não precisa ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve incluir também argumentos mais "formais", sem que haja necessidade de chegarem à demonstração de diversas proposições. (BRASIL, 2018, p. 532).

A partir da leitura e dos fragmentos extraídos dos PCN e da BNCC, é possível constatar que existe, ao menos no discurso, um incentivo à prática voltada ao uso de argumentação e provas na Educação Básica e que um dos principais objetivos da Matemática seria desenvolver o raciocínio lógico e o pensamento crítico dos alunos. Mas será que na prática essa abordagem é realmente exercida? E esses objetivos são realmente atingidos?

Ainda que não seja o foco deste estudo responder a tais perguntas, como os sujeitos pesquisados são licenciandos ingressantes e muitos deles recém-egressos da Educação Básica, foi possível ter uma percepção se as orientações descritas pelos documentos oficiais estão sendo empreendidas nas escolas e se os discentes estão desenvolvendo as habilidades e competências referentes à argumentação e provas. Além disso, como a nossa investigação diz respeito às concepções de ingressantes nos cursos de Licenciatura em Matemática, foi possível também refletir sobre a importância desta temática para a formação desses futuros professores.

Em virtude disso e com base na literatura, formulamos a seguinte questão de pesquisa:

Quais as concepções de ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática sobre argumentação, prova e demonstração?

O objetivo geral é investigar as concepções de licenciandos ingressantes sobre argumentação, prova e demonstração matemática e para que isso seja possível, esta pesquisa busca atingir os seguintes objetivos específicos:

- Compreender como esses licenciandos interpretam e avaliam as argumentações de alunos sobre conteúdos presentes no currículo da Educação Básica;
- Identificar como esses licenciandos validam alguns resultados matemáticos da Educação Básica.

A questão e os objetivos propostos nesta dissertação são importantes para a pesquisa em Educação Matemática, pois as concepções de licenciandos ingressantes sobre argumentação, prova e demonstração terão influência direta nas escolhas e práticas de ensino desses futuros professores, assim como no modo em que irão interpretar e avaliar as produções de seus alunos (VARGHESE, 2009; ORDEM, 2015).

Na seção a seguir apresentamos os procedimentos metodológicos que viabilizaram a realização deste estudo, em especial, a coleta e a análise dos dados.

3.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Segundo os objetivos de pesquisa descritos na seção 3.1, o foco deste estudo não é explicar quais são os fatores que influenciam para/na prática docente voltada ao uso de argumentação e provas ou descrever as características dos licenciandos que dominam ou utilizam essa prática. Os nossos objetivos estão direcionados em explorar as concepções de licenciandos ingressantes sobre as noções de argumentação, prova e demonstração com vista ao ensino de Matemática.

Com base nisso e nos tipos de pesquisas segundo os objetivos propostos por Gonsalves (2001), esta pesquisa é classificada como exploratória, pois

> [...] se caracteriza pelo desenvolvimento e esclarecimento de ideias, com objetivo de oferecer uma visão panorâmica, uma primeira aproximação a um determinado fenômeno que é pouco explorado. Esse tipo de pesquisa também é denominado "pesquisa de base", pois oferece dados elementares que dão suporte para a realização de estudos mais aprofundados sobre o tema. (GONSALVES, 2001, p. 65).

Na continuidade desta seção detalhamos os procedimentos metodológicos que foram adotados para atingir os objetivos desta pesquisa, a começar pelos procedimentos e instrumentos de coleta de dados. Em seguida, caracterizamos as três Instituições de Ensino Superior que participaram deste estudo, bem como os respectivos cursos de Licenciatura em Matemática e os estudantes envolvidos. Descrevemos ainda como sucedeu a aplicação dos questionários com os licenciandos ingressantes e os procedimentos utilizados para a análise e interpretação dos dados coletados.

3.2.1 Procedimentos de Coleta

Para a coleta de dados, elaboramos um questionário (veja o Apêndice A) para ser respondido por licenciandos ingressantes em Matemática, o qual continha perguntas relacionadas ao perfil do mesmo, aos significados dos termos argumentação, prova e demonstração e à validade de alguns resultados da Educação Básica, que em geral são apresentados sem nenhuma justificativa. A seguir, apresentamos uma síntese dos objetivos de cada uma das 7 questões propostas no questionário.

Na questão 1 os licenciandos ingressantes deveriam atribuir significados para os termos argumentação, prova e demonstração no âmbito da Matemática. A segunda questão objetivava compreender como eles interpretam e avaliam algumas argumentações para o fato da soma dos ângulos internos de um triângulo ser sempre igual a 180º. Já o objetivo da questão 3 era identificar como os discentes relacionavam as funções da prova com o nível de escolaridade adequado para sua aplicação (Educação Básica e/ou Ensino Superior). Na questão 4 investigamos o grau de concordância dos estudantes sobre algumas afirmações concernentes à prova matemática. As três questões seguintes eram puramente matemáticas, inseridas no contexto da Geometria ou da Álgebra: na questão 5, o intuito era identificar como os participantes argumentavam que um dado quadrilátero era um paralelogramo; na questão 6, eles deveriam mostrar que o produto de três números inteiros consecutivos é múltiplo de três; e na questão 7, além do intuito de analisar as estratégias utilizadas pelos estudantes para validar o Teorema de Pitágoras, objetivávamos também identificar se eles dominavam o que era hipótese, tese e recíproca no contexto matemático.

É importante destacar que não detalhamos o questionário neste capítulo, pois assim como a pesquisa de Ordem (2015), todas as questões submetidas aos sujeitos pesquisados foram descritas com a respectiva análise a *priori* no capítulo 4.

3.2.2 Caracterização das Instituições de Ensino Superior

Para o desenvolvimento desta pesquisa foram escolhidas três Instituições de Ensino Superior (IES). Todas as instituições participantes são públicas, sendo um instituto federal, uma universidade estadual e uma universidade federal, os quais denotaremos, respectivamente, por IES 1, IES 2 e IES 3.

A seguir descrevemos em linhas gerais como é a forma de ingresso, o turno e a duração do curso de Licenciatura em Matemática e as disciplinas oferecidas no primeiro semestre nas três instituições que participam desta pesquisa.

Na IES 1 o curso de Licenciatura em Matemática é noturno e tem duração de 4 anos. A forma de ingresso na instituição é pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e no primeiro período estão previstas seis disciplinas relacionadas, respectivamente, a Fundamentos da Matemática (ou Pré-Cálculo), Vetores, Geometria Analítica, Física, Álgebra Linear e Metodologia Científica.

Diferentemente da instituição anterior, na IES 2, cuja forma de admissão é pelo ENEM ou pelo vestibular próprio, os estudantes ingressam na carreira de Matemática, e somente após o primeiro ano é que fazem a escolha entre a Licenciatura e/ou Bacharelado. Nesta instituição, a formação do licenciando é integral e dura 4 anos. No primeiro período estão previstas quatro disciplinas relacionadas, respectivamente, a Fundamentos da Matemática, Cálculo, Geometria Analítica e Programação de Computadores, e logo no segundo período, os discentes têm contato com a primeira disciplina pedagógica do curso.

Por fim, na IES 3, a graduação de Licenciatura em Matemática é oferecida em período integral e também no noturno. Os sujeitos que participaram da pesquisa são estudantes do curso noturno, cuja duração é 4,5 anos. A forma de ingresso também é pelo ENEM e no primeiro semestre os licenciandos cursam quatro disciplinas relacionadas, respectivamente, a Geometria Euclidiana, Geometria Analítica, Cálculo e Programação de Computadores.

A escolha das IES participantes da pesquisa foi motivada, por um lado, pela minha trajetória de vida, pois tiveram influência direta ou indiretamente em minha formação, resultando em um desejo de desenvolver a pesquisa de mestrado nas respectivas instituições, além de viabilizar e facilitar o contato inicial com os coordenadores e professores do curso de Licenciatura em Matemática, que se sucedeu virtualmente por meio de e-mails. Por outro lado, as instituições participantes estão localizadas em três cidades com características diferenciadas (em número de habitantes, por exemplo), de dois estados brasileiros da região Sudeste, o que fornece uma amostra com trajetórias pessoais, escolares e acadêmicas completamente distintas. Deste modo, tivemos a oportunidade de constituir uma amostra que tende a ser mais representativa dos licenciandos ingressantes e, consequentemente, de assegurar maior validade a nossa pesquisa.

3.2.3 Aplicação do questionário

Para coletar dados com os licenciandos ingressantes em Matemática, uma pesquisa de campo foi desenvolvida, por meio da aplicação de um questionário. Segundo Gonsalves (2005), esse é o tipo de estudo que

> [...] pretende buscar a informação diretamente com a população pesquisada. A pesquisa de campo é aquela que exige do pesquisador um encontro mais direto. Nesse caso, o pesquisador precisa ir ao espaço onde o fenômeno ocorre – ou ocorreu – e reunir um conjunto de informações a serem documentadas. (GONSALVES, 2005, p. 67).

Antes de descrever como foram as aplicações dos questionários nas IES, é importante destacar alguns fatores relativos à coleta de dados. Primeiramente, os estudantes não foram avisados previamente sobre a realização do estudo de campo, pois, caso contrário, poderia exercer qualquer tipo de influência sob as turmas investigadas, sobretudo, na quantidade de participantes. Por isso, todos os discentes que estavam presentes na data da aplicação responderam ao questionário, caracterizando assim uma amostra por conveniência. Além disso, o pesquisador fez questão de participar de todas as aplicações realizadas nas IES, com o intuito de também expor os objetivos e perspectivas deste trabalho e divulgar o programa de pós-graduação no qual está inserido. É importante destacar ainda três fatos sobre as aplicações: em todas as turmas foram destinados cerca de 10 minutos para uma breve explicação sobre as sete questões que compunham o questionário antes que os estudantes começassem a respondê-lo; o pesquisador esteve à disposição para sanar qualquer tipo de dúvida apresentada pelos participantes durante a aplicação; os estudantes foram liberados de sala à medida que terminavam de responder o questionário.

A seguir, descrevemos como consistiram as aplicações dos questionários com os licenciandos nas três IES, as quais ocorreram durante o mês de agosto de 2017.

Na IES 1 a aplicação do questionário ocorreu na disciplina de Cálculo I. Na ocasião, todos os 38 alunos eram do curso de Licenciatura em Matemática e a duração das atividades propostas foi de 1h16min[44]. A tabela 1 mostra a distribuição dos licenciandos da IES 1 que responderam o questionário com relação ao ano de ingresso na instituição.

Tabela 1 - Distribuição dos licenciandos da IES 1 com relação ao ano de ingresso.

Ano de ingresso	**Frequência**
2017	31
2016	7
TOTAL	**38**

Fonte: Autoria própria.

Conforme podemos observar na tabela 1, 38 estudantes participaram da aplicação do questionário. No entanto, para a análise dos dados levaremos em consideração somente os 31 que foram respondidos pelos licenciandos ingressantes em 2017.

Já na IES 2, a aplicação do questionário ocorreu na primeira disciplina pedagógica presente no curso de Matemática e por esse fator, dentre outros, acaba atraindo estudantes de outros cursos de graduação. Ao todo 37 discentes participaram da aplicação das atividades que durou cerca de 1h55min. A tabela 2 mostra a distribuição dos estudantes da IES 2 que responderam ao questionário com relação ao(s) ano(s) de ingresso na instituição e ao respectivo curso de graduação.

Tabela 2 - Distribuição dos estudantes da IES 2 com relação ao(s) ano(s) de ingresso e ao respectivo curso de graduação.

Ano(s) de ingresso	**Curso**	**Frequência**
2017	Matemática[45]	28
2017 e 2014	Matemática aplicada	4
2016 e 2014	Matemática bacharelado	3
2016	Estatística	1
2012	Engenharia elétrica	1
TOTAL		**37**

Fonte: Autoria própria.

[44] Refere-se ao intervalo de tempo entre a distribuição dos questionários aos estudantes até a devolução do questionário pelo último discente presente em sala.
[45] Nesta instituição os estudantes ingressam na carreira de Matemática, e somente após o primeiro ano é que fazem a escolha entre a Licenciatura e/ou Bacharelado.

Conforme podemos observar na tabela 2, 37 discentes participaram da aplicação do questionário. Contudo, para a análise dos dados levaremos em consideração somente os 28 que foram respondidos pelos estudantes pertencentes à carreira de Matemática que ingressaram no ano de 2017[46].

Por fim, na IES 3 a aplicação do questionário ocorreu em dois momentos. Primeiramente com os discentes matriculados na disciplina “Cálculo de uma variável I”, os quais haviam reprovado no primeiro período. Ao todo eram 13 estudantes e a duração das atividades propostas foi de 1h07min. Posteriormente, aplicamos o questionário com os 14 licenciandos matriculados na disciplina “Cálculo de uma variável II”, onde a aplicação da atividade durou 1h16min. Exclusivamente nesta instituição, aplicamos o questionário em duas disciplinas, pois como ambas não podem ser cursadas concomitantemente, uma parcela dos estudantes ingressantes em 2017 não iria responder as atividades propostas, o que poderia prejudicar a nossa investigação. Na ocasião todos os 27 alunos eram do curso de Licenciatura em Matemática.

A tabela 3 ilustra a distribuição dos licenciandos da IES 3 que responderam o questionário com relação ao ano de ingresso na instituição.

Tabela 3 - Distribuição dos licenciandos da IES 3 com relação ao ano de ingresso.

Ano de ingresso	Frequência
2017	19
2016	4
2015	4
TOTAL	**27**

Fonte: Autoria própria.

Conforme descrito na tabela 3, participaram das aplicações 27 alunos da IES 3. No entanto, para a análise dos dados levaremos em consideração somente os 19 questionários respondidos pelos licenciandos ingressantes em 2017.

Deste modo, ao todo 102 estudantes de três IES participaram da aplicação do questionário. Contudo, para a análise dos dados nos restringiremos aos que foram respondidos pelos 78 licenciandos ingressantes em 2017, designados respectivamente por L1, L2, ..., L78.

[46] Como a aplicação do questionário foi realizada no início do 2° período do primeiro ano, os estudantes pertencentes à carreira de Matemática não haviam escolhido ainda entre a Licenciatura e/ou o Bacharelado. Portanto, como na data da aplicação não foi possível distinguir ambos os grupos, para o desenvolvimento desta pesquisa englobaremos esses 28 alunos na categoria de licenciandos ingressantes.

A tabela 4 sintetiza a distribuição da nossa amostra de acordo com as Instituições de Ensino Superior (IES).

Tabela 4 - Distribuição dos licenciandos ingressantes em relação às IES.

IES	Frequência
IES 1	31
IES 2	28
IES 3	19
TOTAL	**78**

Fonte: Autoria própria.

Acreditamos que seja válido mencionar que o maior anseio que tínhamos em relação à aplicação dos questionários era que eventualmente os estudantes pudessem ficar desestimulados em respondê-los, em virtude da quantidade de páginas. Entretanto, logo na primeira aplicação e isso se sucedeu nas demais, observamos o comprometimento por parte dos discentes, corroborado pelo tempo gasto para a realização das atividades propostas, conforme observamos no questionário do L70, o qual escreveu: *"Gostaria de ficar mais, mas tenho aula",* mesmo após permanecer em sala durante quase duas horas-aula de aplicação. Ou ainda por frases ditas ou escritas pelos próprios discentes, tais como *"Foi legal responder"*, *"Parabéns pela iniciativa"* ou *"Muito obrigada e foi um prazer te ajudar na sua pesquisa"*.

3.2.4 Caracterização dos licenciandos ingressantes

A partir deste momento, não teremos mais a preocupação de distinguir os estudantes por IES, visto que não é o foco desta pesquisa comparar os respectivos cursos de formação inicial. Portanto, descrevemos a seguir a caracterização dos licenciandos ingressantes em seus aspectos gerais.

Com relação aos licenciandos ingressantes que responderam aos questionários, podemos assegurar que a amostra selecionada por conveniência é bastante heterogênea. Conforme já mencionamos, por efetuar esta pesquisa em instituições localizadas em três cidades com características bem diferentes, de dois estados brasileiros da região Sudeste, os sujeitos pesquisados possuem trajetórias pessoais, escolares e acadêmicas completamente distintas, incluindo participantes que são naturais de outras regiões do país, recém-egressos do Ensino Médio e até mesmo pessoas que ficaram mais de 20 anos afastadas dos estudos.

Dos participantes da pesquisa, 60,3% deles cursaram a Educação Básica predominantemente em escolas públicas estaduais, enquanto 39,7% estudaram principalmente em instituições particulares. Com relação à sua formação durante o Ensino Básico, a tabela 5 apresenta a distribuição das respostas (Sim, Parcialmente ou Não) apresentadas pelos licenciandos ingressantes oriundos de escolas públicas estatuais e particulares para a seguinte pergunta descrita na introdução do questionário: Durante a sua Educação Básica, houve estimulo à prática voltada ao ensino-aprendizagem de prova/demonstração matemática?

Tabela 5 - Distribuição das respostas dos licenciandos ingressantes com relação à sua formação na Educação Básica direcionada à prática de prova matemática.

Houve estímulo?	Alunos oriundos de Escolas Estaduais	Alunos oriundos de Escolas Particulares	Frequência
Sim	2	5	7
Parcialmente	14	13	27
Não	30	13	43
Em branco	1	0	1
TOTAL	**47**	**31**	**78**

Fonte: Autoria própria.

Com base na tabela 5, chama a atenção o percentual de discentes que responderam negativamente e que são oriundos de escolas estaduais (63,8%) em relação aos que são oriundos de escolas particulares (41,9%). O L2 que estudou em escola pública, ao afirmar que o ensino da Matemática *"era praticamente robotizado, era jogado a fórmula na lousa e nada mais"* retrata a vivência do autor desta dissertação. No entanto, independente de qual seja a trajetória do discente, algo é certo: a formação durante a Educação Básica está longe de ser adequada à prática direcionada ao uso de argumentação e provas, visto que menos de 9% dos licenciandos ingressantes responderam afirmativamente. Como não faz parte dos objetivos desta pesquisa eleger quais são os fatores que influenciam isso, não vamos nos estender no assunto. Contudo, é inegável que a formação dos alunos, sobretudo no Ensino Médio, tem se restringido à preparação de vestibulares e concursos e, em virtude disso, a aprendizagem de demonstrações se tornou desinteressante, visto que usualmente não são cobradas nesses exames. Essa também é a percepção do L70 que dissertou: *"Muitas vezes o problema é a falta de tempo, indiretamente imposta pelo vestibular que faz com que as aulas sejam 'vomitadas'"*, ou seja, meras reproduções.

3.2.5 Procedimentos de Análise

Para a análise dos dados coletados, a fim de interpretá-los e inferir quais são as concepções dos licenciandos ingressantes sobre argumentação, prova e demonstração, concebíamos que a abordagem seria apenas qualitativa. Porém, à medida que se sucedeu a análise dos questionários respondidos pelos participantes, constatamos a necessidade de aliar um enfoque quantitativo. Na questão 2, por exemplo, como os discentes deveriam atribuir notas às diferentes argumentações, utilizamos algumas medidas estatísticas (média aritmética, mediana, moda e desvio-padrão), a fim de apontar índices expressivos e confrontar com as categorias identificadas qualitativamente. Já na questão 4 houve a necessidade de recorrermos a outras medidas estatísticas para construir um gráfico do tipo *boxplot*. E por apresentar quadros ou tabelas com indicadores de frequência, observou-se também a exigência de uma abordagem quantitativa nas demais questões.

Particularmente na questão 1, para auxiliar na interpretação dos dados, utilizamos o *software* IRAMUTEQ (*Interface de R pour les Analyses Multidimensionnelles de Textes et de Questionnaires*), o qual permite análises estatísticas sobre dados textuais. Isto traz à tona um paradigma existente entre pesquisas quantitativas e qualitativas. Neste sentido, Camargo e Justo (2013) evidenciam que *softwares* como o IRAMUTEQ contribuem para que "[...] se supere a dicotomia clássica entre quantitativo e qualitativo na análise de dados, na medida em que possibilita que se quantifique e empregue cálculos estatísticos sobre variáveis essencialmente qualitativas – os textos" (p. 514). Deste modo, esta pesquisa se caracteriza por descrever uma abordagem quanti-qualitativa.

No capítulo 4, detalhamos todas as questões que foram submetidas aos sujeitos desta pesquisa, com a respectiva análise a *priori* e a *posteriori* em relação às aplicações dos questionários. Esse procedimento metodológico foi motivado pela pesquisa de Ordem (2015), ao qual o autor se reporta como Análise Didática. Apesar do pesquisador não ter mencionado isso em seu estudo, acreditamos que essa análise tem inspiração na Engenharia Didática, a qual segundo Artigue[47] possui as seguintes fases: análises prévias; construção das situações e análise a *priori*; experimentação; análise a *posteriori* e validação. Não compete a nós fazermos um comparativo entre ambos os procedimentos, porém uma notória, e talvez a mais expressiva diferença, seja o fato da Engenharia Didática ser caracterizada "por um esquema

[47] ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308, 1988.

experimental com base em 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino" (ALMOULOUD, 2007a, p. 169).

Além disso, conforme descrito nos procedimentos de coleta, esta pesquisa consistiu num estudo de campo, e com base em Gil (2002), o procedimento de análise dos questionários respondidos pelos estudantes se baseou em três etapas: redução dos dados, categorização dos dados e interpretação dos dados. Segundo Gil (2002, p. 133), a "redução dos dados consiste em um processo de seleção, simplificação, abstração e transformação dos dados originais", e por meio dessa etapa foi possível selecionar apenas os questionários respondidos pelos licenciandos ingressantes em 2017 e analisar as diferentes respostas desses estudantes para as questões propostas. Já a categorização consiste na organização dos dados, a partir de um conjunto de categorias descritivas fundamentadas na literatura e no referencial teórico da pesquisa. Desta forma, os estudos apresentados no capítulo 1, e principalmente, os modelos teóricos de Balacheff (1988) e de Harel e Sowder (1998) possibilitaram categorizar e interpretar as respostas dos estudantes ingressantes. Por fim, Gil (2002) destaca que a interpretação dos dados exige constantes retomadas ao campo e à literatura, e até mesmo a coleta de dados adicionais. Na ocasião, não houve a necessidade de retornar às IES para coletar outros dados, porém, durante todo desenvolvimento da pesquisa surgiram novas referências, as quais foram importantes para melhor compreendermos as respostas descritas pelos participantes.

É importante deixar claro que não temos a pretensão de generalizar as conclusões deste estudo a todos os ingressantes nos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil. No entanto, é nosso objetivo validar os resultados para os sujeitos que constituíram a nossa amostra e, principalmente, fomentar a discussão e a reflexão sobre a formação inicial dos professores a respeito de argumentação e provas para o ensino de Matemática.

A seguir apresentamos maiores informações sobre o *software* de análises estatísticas utilizado durante a análise a *posteriori* da questão 1.

O *software* IRAMUTEQ foi desenvolvido pelo pesquisador francês Pierre Ratinaud[48]. No Brasil, o seu uso iniciou em 2013 e tomamos conhecimento por meio da publicação de

[48] Para maiores informações, acesse: RATINAUD, P. (2009). **IRAMUTEQ:** Interface de R pour les Analyses Multidimensionnelles de Textes et de Questionnaires. Disponível em: <http://www.iramuteq.org>. Acesso em: 21 ago. 2018.

Camargo e Justo[49] (2013), que utilizamos para apresentar algumas informações a respeito desse programa.

Segundo Camargo e Justo, esse *software* foi inspirado no mesmo algoritmo do ALCESTE (*Analyse Lexicale par Context d'un Ensemble de Segments de Texte*) desenvolvido por M. Reinert. Optamos por utilizar o IRAMUTEQ, pois além do seu acesso gratuito, o programa é ancorado no *software R*, possibilitando diferentes processamentos e análises estatísticas de textos, tais como: análises lexicais clássicas, pesquisa de especificidades de grupos, classificação hierárquica descendente, análises de similitude, nuvem de palavras, dentre outras. Em particular, na questão 1, utilizamos as análises lexicais e de similitude para auxiliar na interpretação dos dados.

É importante destacar que buscamos outros autores das ciências humanas e sociais que empregaram o uso do IRAMUTEQ. A constatação foi que universidades renomadas do Brasil e do Exterior têm utilizado esse *software* em suas pesquisas para descrever análises estatísticas sobre banco de dados textuais.

[49] Professores da área de Psicologia da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), respectivamente.

CAPÍTULO 4
DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS

Para a coleta dos dados, elaboramos um questionário (veja o Apêndice A) que foi aplicado aos estudantes das três IES participantes. Esse instrumento era composto por 7 questões, com o intuito de investigar as concepções sobre argumentação, prova e demonstração mobilizadas pelos licenciandos, a partir de situações em que fosse possível identificar, por exemplo, como eles interpretam/avaliam as argumentações de alunos e validam conjecturas matemáticas.

Deste modo, a partir dos questionários respondidos pelos 78 licenciandos ingressantes, neste capítulo descrevemos as Análises Didáticas (a *priori* e a *posteriori*). Para cada questão, apresentamos na análise a *priori* as referências que nortearam a sua elaboração, os objetivos a serem atingidos, os focos sob os questionários respondidos e formulamos também eventuais hipóteses com base na literatura e nas nossas concepções. Imediatamente após a análise a *priori* de cada questão, descrevemos a análise a *posteriori*, na qual apresentamos essencialmente a categorização e a interpretação dos dados, a partir de recortes ou fragmentos extraídos dos questionários. É importante destacar que nesta pesquisa, as categorias para os dados coletados emergiram, essencialmente, durante a análise dos questionários respondidos pelos licenciandos, conforme se observa nas questões 1, 2, 5, 6 e 7.

Além disso, destacamos ainda, em consonância com Gil (2002), que durante a etapa de categorização dos dados, é usual em estudos de abordagem qualitativa, que o conjunto inicial de categorias seja reexaminado e modificado sucessivamente pelo pesquisador, a fim de que se torne mais abrangente e representativo. De fato, apesar de termos indicado nas análises a *priori* qual seria o foco sob os questionários respondidos, durante as análises a *posteriori*, com destaque para a questão 7, houve a necessidade de modificar ou criar novas categorias.

A seguir, apresentamos a descrição e as análises de cada questão proposta no questionário e finalizamos este capítulo com uma síntese dos principais tipos de argumentações identificados nas análises a *posteriori* das questões 5, 6 e 7(a). Além disso, é importante mencionar que o uso da palavra “licenciando(s)” e da letra L no decorrer desta dissertação se refere apenas aos estudantes ingressantes nas IES no ano de 2017.

4.1 ANÁLISE DA QUESTÃO 1

4.1.1 Análise *a priori* da questão 1

Em consonância com a literatura, as concepções de professores influenciam as práticas de ensino em sala de aula (KNUTH, 2002b; THOMPSON, 1992; PONTE, 1992). Particularmente, as concepções de futuros professores sobre as noções de argumentação, prova e demonstração terão influência direta nas escolhas e práticas de ensino desses educadores, assim como no modo que irão interpretar e avaliar as produções de seus alunos. Além disso, devido à intervenção social no processo de formação das concepções de um indivíduo, é bem provável que o modo como os professores concebem esses termos influencie também as concepções dos seus alunos (CALDATO; UTSUMI; NASSER, 2017, p. 90).

Deste modo, nesta questão os estudantes deveriam conceituar os seguintes termos no âmbito matemático: argumentação, demonstração e prova. Contudo, ainda que o objetivo geral deste estudo seja investigar as concepções de ingressantes sobre essas terminologias com vista ao ensino de Matemática, acreditamos que mais importante do que identificar e distinguir como eles definem tais noções (recordemos que neste estudo adotamos as definições propostas por Balacheff (1987)), seja identificar como eles validam os resultados e compreender como eles interpretam e valorizam as argumentações de alunos. Entendemos desta maneira, pois por se tratar de uma questão totalmente aberta, os sujeitos poderiam responder algo que não condiz com suas próprias convicções ou devido à quantidade de participantes, poderia haver um grande número de categorias que inviabilizaria uma análise adequada.

4.1.2 Análise *a posteriori* da questão 1

O objetivo desta questão era identificar como os licenciandos interpretam os termos argumentação, demonstração e prova no âmbito matemático. Contudo, por se tratar de uma questão totalmente aberta, em que os estudantes poderiam discursar livremente o seu entendimento sobre tais noções, foi necessário utilizar a *priori* um *software* de análises estatísticas, a fim de apoiar a categorização das respostas apresentadas pelos discentes durante a análise qualitativa.

Deste modo, inicialmente realizamos as análises lexical clássica e de similitude (ou de semelhanças) no *software* IRAMUTEQ. Na análise lexical, o programa essencialmente identifica a frequência de palavras (ou formas) no *corpus* textual e as reduz com base em suas raízes (lematização). O *corpus* é construído pelo pesquisador e consiste no conjunto de textos que se pretende analisar. No caso desta questão, elaboramos um *corpus* para cada um dos termos (argumentação, demonstração e prova), segundo as definições apresentadas pelos licenciandos. Além disso, esta análise cria um dicionário das formas reduzidas, das quais é possível identificar o número de *hapax* (palavras com frequência um) e a quantidade de formas ativas e suplementares, conforme as classes gramaticais selecionadas (CAMARGO; JUSTO, 2013, p. 515). As classes definidas como ativas foram: adjetivo, advérbio, formas não reconhecidas, nome comum e verbo.

Posteriormente, submetemos cada um dos *corpus* à análise de similitude, a qual

> [...] se baseia na teoria dos grafos, possibilita identificar as coocorrências entre as palavras e seu resultado traz indicações da conexidade entre as palavras, auxiliando na identificação da estrutura de um *corpus* textual, distinguindo também as partes comuns e as especificidades em função das variáveis ilustrativas (descritivas) identificadas na análise. (CAMARGO; JUSTO, 2013, p. 516).

Essa análise permite visualizar a relação entre as palavras e a sua conectividade dentro de cada comunidade e a ligação entre as várias comunidades. Por exemplo, nos dendogramas que apresentaremos a seguir, os vocábulos estão organizados pelo tamanho da letra, de acordo com a sua frequência no *corpus* textual. Desde modo, foi possível identificar a *priori*, como os sujeitos articulavam algumas formas para conceituar os termos argumentação, demonstração e prova. É importante destacar que nessa análise o *software* selecionou apenas as formas reduzidas ativas e, por essa razão, as formas reduzidas suplementares foram descartadas.

4.1.2.1 Concepções dos licenciandos sobre a noção de argumentação

Conforme vimos no capítulo 1 e sustentado por Balacheff (1987), definimos o termo argumentação como sendo um discurso destinado a convencer um sujeito sobre a verdade de uma proposição, o qual pode aceitar, recusar ou discutir as razões apresentadas. Além disso, evidenciamos uma distinção entre argumentar e explicar, visto que uma explicação não visa necessariamente convencer alguém.

Entretanto, como será que os licenciandos conceituam o termo argumentação no âmbito da Matemática? Para tentarmos responder a essa pergunta, inicialmente realizamos uma análise de similitude (figura 17) no *software* IRAMUTEQ. O *corpus* (referente à argumentação) foi constituído por 76 textos (dois licenciandos afirmaram que não sabiam responder), no qual emergiram 912 ocorrências (palavra ou formas), sendo 356 palavras distintas, reduzidas por lematização a 281 formas (ativas ou secundárias), das quais 153 (ou 54,4%) ocorreram uma única vez. Deste modo, constatou-se a existência de quatro palavras que mais se destacaram nos discursos dos participantes: “Utilizar”, “Determinado”, “Assunto” e “Algo”. Delas se ramificaram outras expressões representativas, tais como: “Matemático”, “Ideia”, “Afirmação”, “Provar”, “Explicar”, “Como” e “Mostrar”.

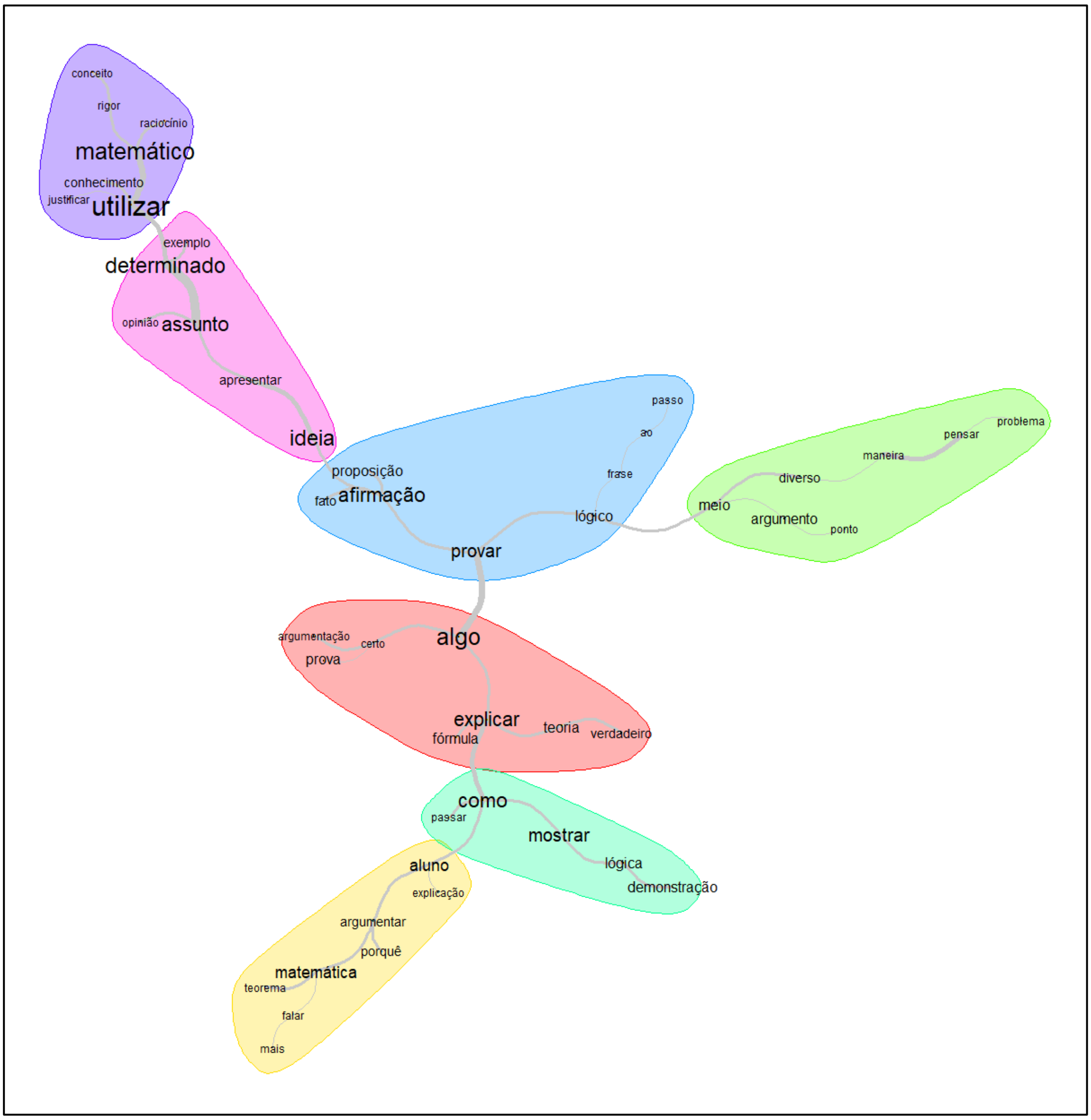
É importante destacar que as 7 comunidades (em cores distintas) indicadas na figura 17, auxiliaram na análise qualitativa dos questionários, pois, ao partir para a leitura já tínhamos uma expectativa do que poderíamos encontrar nos discursos dos participantes, facilitando a categorização das respostas. Deste modo, após a análise quanti-qualitativa, elencamos 7 diferentes significados atribuídos para o termo argumentação (destaca-se entre parênteses, quando possível, a(s) cor(es) correspondente(s) na figura 17), os quais descrevemos na tabela 6 com suas respectivas frequências:

Tabela 6 - Significados atribuídos para o termo argumentação.

Significados	Frequência
Problematizar/debater um determinado assunto/ideia (rosa)	19
Mostrar/provar algo (azul, verde-água)	11
Explicação (vermelho)	10
Encadeamento lógico (roxo)	9
Raciocínio matemático (verde-claro)	5
Convencimento (amarelo)	3
Outros	19
Não definiram	2
TOTAL	**78**

Fonte: Autoria própria.

Figura 17 - Dendograma de similitude do termo argumentação[50].



Fonte: Autoria própria.

Note que os três significados com maior frequência descritos na tabela 6 estão em consonância com as comunidades do dendograma de similitude (figura 17), sendo que o maior percentual dos estudantes (24,4% da amostra) interpretou o termo argumentação com o sentido de problematizar/debater um determinado assunto, ideia ou teoria, conforme observamos nos seguintes discursos:

[50] Para a análise, o *software* selecionou 49 formas reduzidas ativas com ocorrências maiores ou iguais a três, as quais listamos com as respectivas frequências entre parênteses: Utilizar (12); matemático, algo (10); ideia, determinado, como, afirmação (9); explicar, assunto (8); provar, mostrar (7); prova, matemática, aluno (6); teoria, proposição, meio, lógico, lógica, fórmula, demonstração, argumento (5); verdadeiro, teorema, porquê, passo, maneira, fato, exemplo, diverso, conhecimento, argumentar, apresentar (4); rigor, raciocínio, problema, ponto, pensar, passar, opinião, mais, justificar, frase, falar, explicação, conceito, certo, argumentação, ao (3).

"É a apresentação de uma ideia ou ponto de vista sobre determinado assunto." (Resposta do L32)

"É uma discussão em que uma pessoa expõe observações e cria hipóteses para tentar provar algo." (Resposta do L34)

"Comentar e discorrer, sem necessidade de provar ou demonstrar." (Resposta do L53)

Observe que o L53 fez questão de evidenciar uma distinção entre argumentação e prova/demonstração. Entretanto, outros não apresentaram tal diferença. Para 11 respondentes, radical[51] argumentar é equivalente a mostrar, provar ou justificar algo, como ilustra os fragmentos a seguir:

"É a partir de um teorema se prova através da lógica matemática se tal teorema ou teoria é verdadeiro ou falso." (Resposta do L43)

"Utilizar axiomas e teoremas já provados para justificar uma afirmação." (Resposta do L64)

Diferentemente da nossa concepção, 10 licenciandos definiram o termo argumentação como sinônimo de explicação como, por exemplo, o L28 que dissertou: *"Utilizar de seus conhecimentos para a explicação de um tema"*. Ou ainda como o L22 que definiu como *"Explicar, por meio de desenhos, procedimentos e ideias o motivo de algo ser ou não verídico"*. Observe que no seu entendimento, o ato de argumentar está atrelado ao uso de desenhos.

Verificou-se ainda que 9 participantes atribuíram à noção de argumentação o significado de encadeamento lógico (ou dedução), conforme observamos na resposta do L55: *"São frases/afirmações com o intuito de mostrar ao leitor algum passo de uma demonstração"*. E 5 estudantes associaram esse termo ao raciocínio matemático, como afirmou o L62: *"Analisar a validade de informação, com base em raciocínios matemáticos abstratos ou concretos"*.

Apenas 3 licenciandos se referiram ao termo argumentação com o significado de convencer algo ou alguém, que consiste na interpretação adotada neste estudo. O estudante

---

[51] Radical é o elemento comum de palavras cognatas, também chamadas de palavras da mesma família. É responsável pelo significado básico da palavra.

L57, por exemplo, dissertou: *"Trazer fatos para tentar convencer outra pessoa a respeito de alguma informação".*

Por fim, na classe intitulada "Outros", reunimos os significados para a noção de argumentação que tiveram frequência de no máximo dois, os quais julgamos que não eram necessários detalhar neste estudo. Apenas para mencionar três exemplos, o estudante L51 afirmou que argumentar consiste na parte inicial da prova; já o L75 associou às possibilidades de solução de um problema matemático; e o L33 se referiu a utilidade/aplicabilidade de certo conteúdo matemático. Observamos ainda que somente dois licenciandos não souberam descrever o significado do termo argumentação.

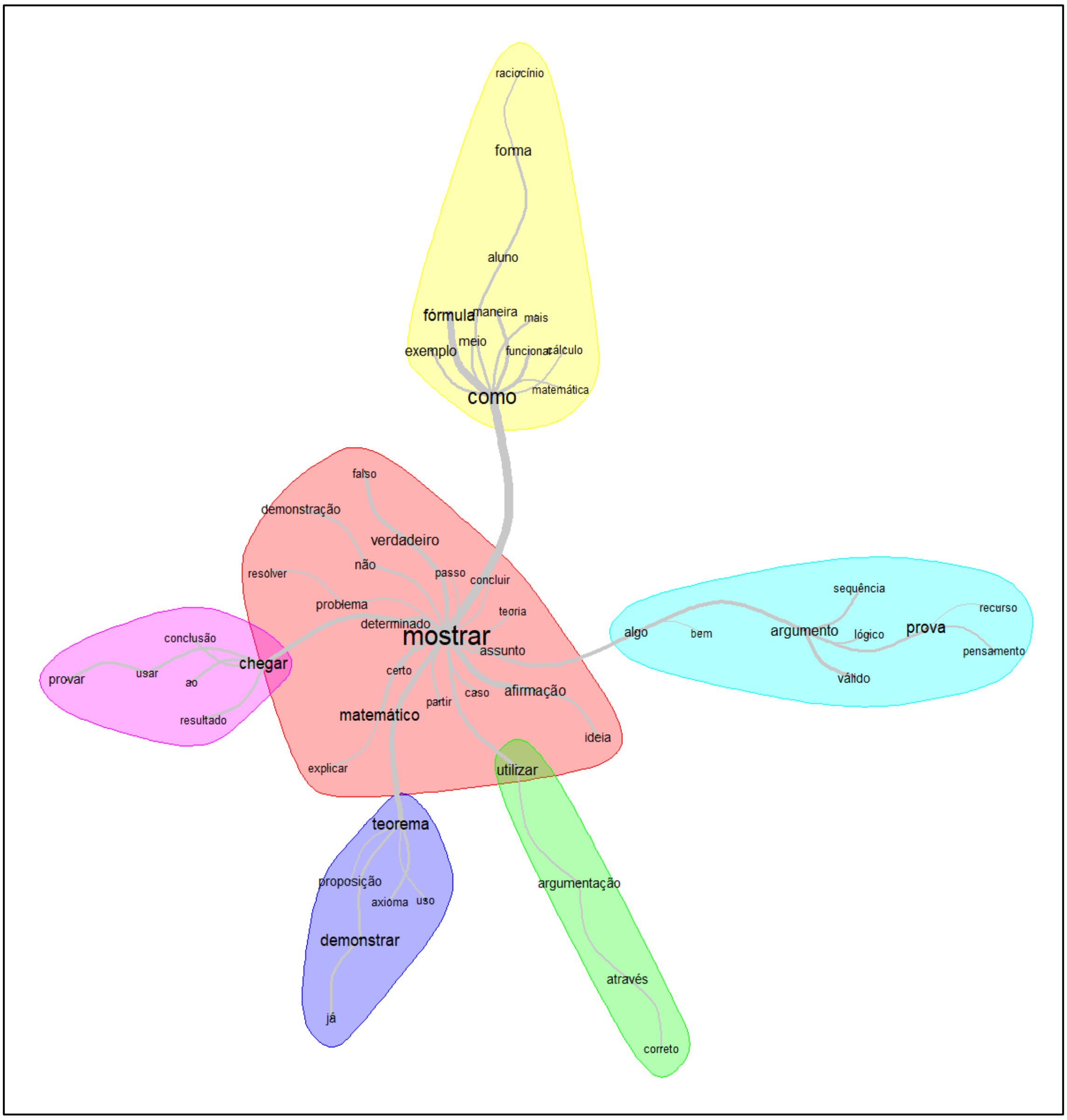
Portanto, com base na tabela 6, é possível afirmar que o significado de argumentação não é uma unanimidade entre os licenciandos, visto que houve várias interpretações para essa noção, sendo que muitas delas foram descritas com significados equivalentes aos termos prova e demonstração (mostrar/provar algo) ou sem nenhuma correlação com a ideia de argumentar no âmbito matemático (conforme descrito no parágrafo anterior).

4.1.2.2 Concepções dos licenciandos sobre as noções de demonstração e prova

No capítulo 1 problematizamos os possíveis significados para as noções de demonstração e prova e adotamos ambos como sinônimos no âmbito exclusivamente matemático. Entendemos que uma demonstração é composta por uma sequência de afirmações articuladas, segundo uma lógica dedutiva preestabelecida. Entretanto, nesta questão o nosso objetivo era identificar as definições apresentadas pelos licenciandos no âmbito da Matemática. Para isso, iniciaremos a análise dos significados atribuídos ao termo demonstração, posteriormente ao termo prova. Finalizaremos esta subseção estabelecendo uma comparação entre ambos.

Ao compilar as definições atribuídas pelos licenciandos ao termo demonstração no *software* IRAMUTEQ, constatou-se por meio da análise de similitude que o radical "Mostrar" se destacou nos discursos dos participantes, ocupando o centro do dendograma (figura 18) e que a partir dele se ramificaram outras terminologias e comunidades. O *corpus* (referente à demonstração) foi constituído por 77 textos (um licenciando afirmou que não sabia responder), no qual emergiram 1.048 ocorrências (palavra ou formas), sendo 363 palavras distintas, reduzidas por lematização a 274 formas (ativas ou secundárias), das quais 155 (ou 56,6%) eram *hapax*.

Figura 18 - Dendograma de similitude do termo demonstração[52].



Fonte: Autoria própria.

Posteriormente à análise estatística, esperávamos encontrar no estudo qualitativo uma gama de definições que remetiam à ideia de mostrar/provar algo, em consonância com a figura 18. Esse fato foi corroborado segundo os índices da tabela 7, a qual apresenta os 4 diferentes significados atribuídos ao termo demonstração com suas respectivas frequências (destaca-se entre parênteses, quando possível, a(s) cor(es) correspondente(s) na figura 18).

[52] Para a análise, o *software* selecionou 56 formas reduzidas ativas com ocorrências maiores ou iguais a três, as quais listamos com as respectivas frequências entre parênteses: mostrar (30); como (20); teorema, fórmula, chegar (12); prova, matemático, demonstrar (11); verdadeiro, utilizar, argumento (10); forma, exemplo (9); algo, afirmação (8); provar, proposição, meio (7); não, demonstração, assunto, argumentação, aluno (6); válido, problema, maneira, já, ideia, determinado, através, ao (5); usar, resultado, recurso, raciocínio, passo, lógico, funcionar, falso, conclusão, certo, axioma (4); uso, teoria, sequência, resolver, pensamento, partir, matemática, mais, explicar, cálculo, correto, concluir, caso, bem (3).

Tabela 7 - Significados atribuídos para o termo demonstração.

Significados	Frequência
Validar um resultado / Mostrar algo (vermelho, rosa, azul)	51
Processo/desenvolvimento da prova (amarelo, verde-água, verde-claro)	7
Resolução de problemas (vermelho)	5
Outros	14
Não definiram	1
TOTAL	**78**

Fonte: Autoria própria

Note que o maior percentual dos licenciandos (65,4% da amostra) definiu o termo demonstração com o significado de validar um resultado ou mostrar que algo (teorema, fórmula, afirmação, etc.) é verdadeiro, conforme observamos nas respostas a seguir:

"Conjunto de argumentos que consegue partir de fatos já conhecidos e demonstrados e mostrar se outra afirmação é verdadeira ou falsa (em alguns casos, indeterminada)." (Resposta do L44)

"Mostrar todos os passos e etapas necessárias para sair de algo que se conhece e se tem bem definido (provado) e concluir algo que ainda não se sabe/não é provado." (Resposta do L45)

"Forma de validar uma proposição." (Resposta do L71)

"Sequência lógica de argumentos com a ideia de mostrar a validade de uma sentença, fórmula ou afirmação." (Resposta do L61)

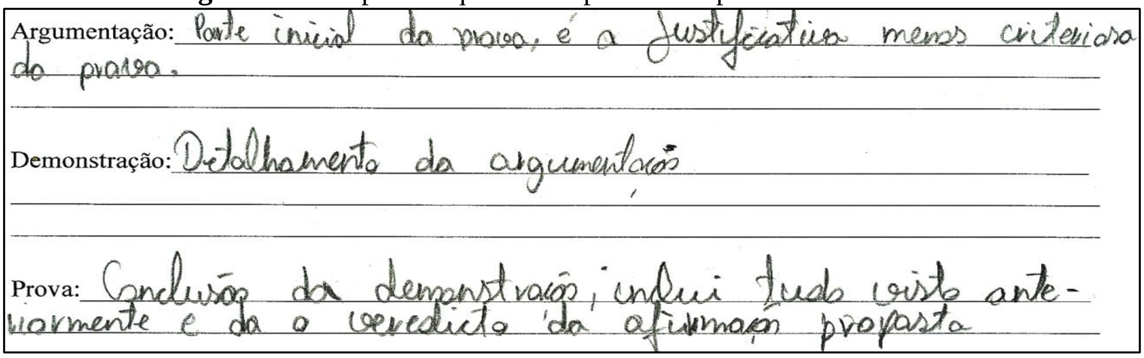
Note também que a definição do licenciando L61 se assemelha a que propomos neste estudo, exceto pela parte em que ele restringe a demonstração à função de verificação/convicção, no sentido de De Villiers (1990, 1999).

Todavia, apesar da maioria da amostra ter associado o termo demonstração ao significado de validar uma afirmativa, como vimos na tabela 7, foi possível identificar diferentes níveis de formalidade e de rigor para o cumprimento deste propósito. Na concepção do estudante L59, por exemplo, uma demonstração consiste em *"mostrar que uma afirmação é verdadeira a partir de axiomas e teoremas"*, ou seja, resultados já provados ou aceitos como verdades absolutas. Já o participante L21 é bem menos rigoroso com relação ao modo de validar uma afirmação, pois para ele basta exibir *"algum exemplo que demonstre a aquela pessoa que a ideia testada sobre aquele assunto tem algum fundamento de verdade"*.

Além disso, verificou-se que alguns discentes associam uma demonstração ao uso de letras/incógnitas, mais especificamente à Álgebra, conforme se nota na resposta do L2: *"A demonstração já está ligada em mostrar da onde que veio determinada fórmula em outras palavras, o porquê que foi feita e como foi pensada, em manipulações algébricas"*. Já outros evidenciam a possibilidade de uma demonstração visual, conforme a definição do L25: *"Mostrar de forma visual a outra pessoa com o âmbito de ela conseguir compreender (o passo a passo)"*.

Para 7 discentes, o termo demonstração está atrelado ao processo ou desenvolvimento da prova, visto que nessas circunstâncias as definições propostas pelos licenciandos, em geral, fazem menção à prova como uma etapa de conclusão, ou seja, ao resultado da demonstração. Esse fato é bem caracterizado na resposta do estudante L51 (figura 19), o qual estabelece uma hierarquia entre as terminologias descritas na questão 1, começando pela argumentação (introdução), passando pela demonstração (desenvolvimento) e finalizando com a prova (conclusão).

Figura 19 - Resposta à questão 1 apresentada pelo licenciando L51.


Argumentação: Parte inicial da prova, é a justificativa menos criteriosa do prova.

Demonstração: Detalhamento da argumentação

Prova: Conclusão da demonstração, inclui tudo visto anteriormente e da o veredicto da afirmação proposta

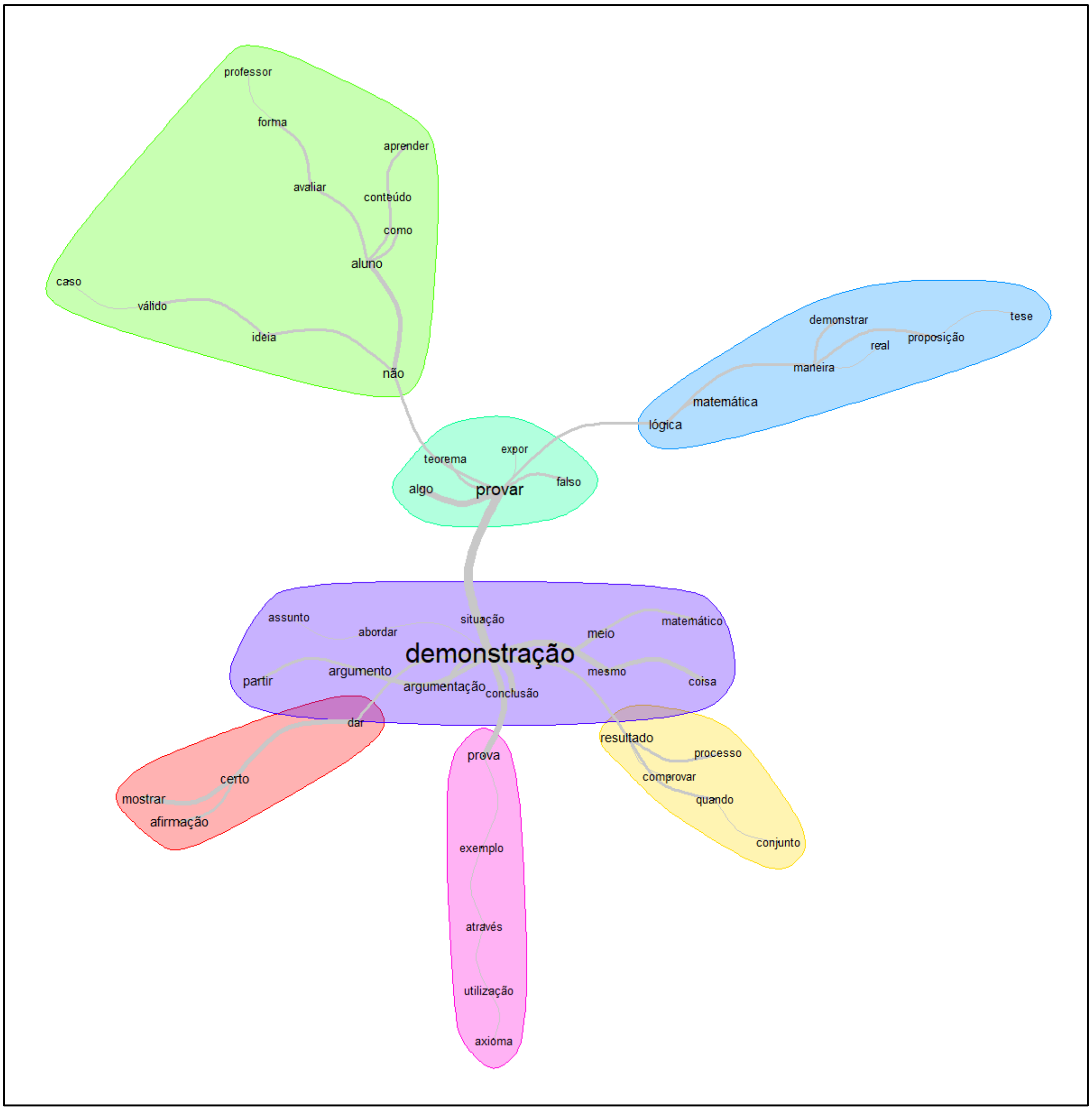
Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L51.

Observou-se ainda que 5 estudantes interpretam o termo demonstração com o significado de resolução de problemas, como sugere o discurso do discente L29: *"Situação geral de determinado assunto, que engloba todas as possibilidades de resolução"*.

Por fim, na classe "Outros", reunimos os significados para o termo demonstração que tiveram frequência de no máximo dois, as quais não detalharemos nesta pesquisa. Apenas para citar dois exemplos, houve respostas em que o termo demonstração foi relacionado com método de aprendizagem ou como meio de explicação. Além disso, evidenciamos que apenas um licenciando não soube como definir essa terminologia.

Com relação às definições atribuídas pelos licenciandos ao termo prova, inicialmente também realizamos a análise de similitude (figura 20), verificando que a palavra "Demonstração" se destacou nos discursos dos sujeitos, diretamente ligada ao radical "Provar", e a partir delas se ramificaram outras nomenclaturas e comunidades. Destaca-se que o *corpus* (referente à prova) foi constituído por 77 textos (um licenciando deixou em branco), no qual emergiram 905 ocorrências, sendo 345 palavras distintas, reduzidas em 274 formas (ativas ou secundárias), das quais 154 (ou 56,2%) eram *hapax*.

Figura 20 - Dendograma de similitude do termo prova[53].



Fonte: Autoria própria.

[53] Para a análise, o software selecionou 49 formas reduzidas ativas com ocorrências maiores ou iguais a três, as quais listamos com as respectivas frequências entre parênteses: demonstração (32); provar (13); não (9); prova, aluno (8); argumento, afirmação (7); partir, mostrar, lógica, algo (6); resultado, meio, matemática, forma, certo, avaliar, argumentação (5); válido, quando, mesmo, matemático, maneira, ideia,demonstrar, dar, conteúdo, conclusão, como, coisa (4); utilização, tese, teorema, situação, real, proposição, professor, processo, falso, expor, exemplo, conjunto, comprovar, caso, axioma, através, assunto, aprender, aborda (3).

Após a compilação dos dados, chamou a nossa atenção na figura 20, a comunidade situada no canto superior esquerdo, em que se destacam as palavras “Aluno”, “Avaliar”, “Forma” e “Professor”, sugerindo que alguns licenciandos conceituaram o termo prova como instrumento de avaliação. Esse fato foi evidenciado na análise qualitativa dos questionários, em que observamos 6 diferentes interpretações para a noção de prova (destaca-se entre parênteses, a(s) cor(es) correspondente(s) na figura 20), os quais apresentamos na tabela 8 com suas respectivas frequências:

Tabela 8 - Significados atribuídos para o termo prova.

Significados	Frequência
Validar um resultado / Mostrar algo (roxo, verde-água, vermelho, azul)	31
Instrumento de avaliação (verde-claro)	12
Conclusão da demonstração (amarelo)	10
Sinônimo de demonstração (roxo)	10
Verificação numérica (rosa)	3
Outros	11
Em branco	1
TOTAL	**78**

Fonte: Autoria própria.

Aproximadamente 40% dos respondentes associaram o termo prova ao ato de validar um resultado ou mostrar/provar/demonstrar que uma afirmação é verdadeira, conforme observamos nas seguintes respostas:

“É conseguir demonstrar que para qualquer variável que sua ideia não irá entrar em contradição, será sempre verdadeira.” (Resposta do L32)

“Mostrar por argumentação matemática que certa ideia ou afirmação é válida para um número N de casos.” (Resposta do L78)

“Conjunto de ***processos lógicos*** *que quando aplicados a afirmações básicas permite elaborar, a partir delas, outras mais complexas, que carregam um resultado geral.”* (Resposta do L44)

“Uso de argumentos corretos, com uma perspectiva de ***lógica matemática*** *e o uso de um sistema axiomático, para concluir algo.”* (Resposta do L45)

Dentre esses fragmentos, destacam-se os dois últimos, pois apenas 5 estudantes (dentre eles o L44 e o L45) relacionaram explicitamente a noção de prova à lógica matemática. Contudo, é importante ressaltar que, apesar das tabelas 7 e 8, apresentarem o significado de "Validar um resultado / Mostrar algo" tanto para a noção de demonstração quanto para a de prova, respectivamente, isso não significa que os licenciandos que se enquadraram em ambas as classes considerem os termos como sinônimos. Até porque, criamos na tabela 8, uma classe intitulada "Sinônimo de demonstração", em que incluímos apenas os sujeitos que escreveram isso explicitamente nas suas respostas. Para uma melhor compreensão, apresentamos os extratos dos questionários de dois participantes:

*"**Demonstração**: Conjunto de argumentos que consegue partir de fatos já conhecidos e demonstrados e mostrar se outra afirmação é verdadeira ou falsa (em alguns casos, indeterminada). **Prova**: Conjunto de processos lógicos que quando aplicados a afirmações básicas permite elaborar, a partir delas, outras mais complexas, que carregam um resultado geral."* (Resposta do L44)

*"**Demonstração**: Forma de validar uma proposição. **Prova**: Forma de validar um teorema."* (Resposta do L71)

Com base nas definições apresentadas pelos estudantes L44 e L71, é possível constatar que apesar de ambos se referirem a demonstração e a prova com o significado de validar/mostrar algo, as conceituações que eles propõem são notoriamente distintas. Por isso, não consideramos que eles adotam ambos os termos como sinônimos. Além disso, emerge também a percepção de que eles concebem a prova como uma forma mais rigorosa e formal de validar uma afirmativa.

Ainda com relação aos licenciandos que associaram o termo prova ao ato de validar um resultado, observamos que 3 sujeitos definiram como sendo a *"união do argumento com demonstração para provar uma proposição, corolário, teorema, etc."* (Resposta do L38).

O segundo significado mais associado à noção de prova foi de instrumento de avaliação (teste ou exame), que emergiu nas respostas de 12 sujeitos, conforme se verifica no discurso do L24: *"É um recurso que deve existir para você professor ter uma ideia de como a sala está indo, quais conhecimentos ela está conseguindo absorver, saber das dificuldades da sala e trabalhar em cima disso"*. A pesquisa de Aguilar Junior (2012, p. 74) também evidenciou um resultado semelhante, pois ao investigar as definições de 60 professores para "prova matemática", o pesquisador constatou que na segunda posição, com 25% da amostra, o termo prova era relacionado com avaliação. Podemos especular que essa concepção equivocada se deve aos diversos significados de "prova" na língua portuguesa, como vimos no capítulo 1.

Além disso, ao analisar os questionários desses 12 licenciandos como um todo, verificamos que nenhum deles conseguiu validar matematicamente as questões 5, 6 e 7(a), nas quais deveriam descrever justificativas para alguns resultados. Esse fato pode ser um indicativo de que quando os estudantes apresentam uma concepção limitada sobre a noção de prova, em geral, não conseguem obter êxito em suas argumentações.

Já 10 participantes associaram a noção de prova ao resultado ou à conclusão de uma demonstração, conforme é possível observar nos fragmentos a seguir, os quais evidenciam a demonstração como uma etapa do desenvolvimento da prova:

"É o resultado final de uma argumentação, aliada a uma demonstração que quando concretizadas comprovam tal ponto de vista." (Resposta do L12)

"A prova é o que segue e/ou a consequência da demonstração, ou seja, a conclusão." (Resposta do L55)

Já relatamos que, no contexto matemático, os termos demonstração e prova são tidos como sinônimos. Entretanto, apenas 10 licenciandos afirmaram isso explicitamente em suas respostas. Logo, podemos conjecturar que esse índice é mais um indicativo de que para a maior parte da amostra existe uma diferença entre ambos os termos, principalmente, com relação ao rigor e ao nível de formalidade.

Em vista disso e instigados pela conjectura descrita anteriormente, buscamos comparar e sintetizar algumas definições dos licenciandos que acreditam haver diferenças entre demonstração e prova no quadro 5.

Quadro 5 - Diferenças entre demonstração e prova, nas concepções dos licenciandos[54].

(continua)

Licenciando	Demonstração	Prova
L15	Mostrar utilizando números ou letras.	Provar, através do desenvolvimento de teoremas e fórmulas.
L25	Mostrar de forma visual a outra pessoa.	Uma maneira de demonstrar que alguma coisa é real.

[54] Para elaborar este quadro consideramos apenas os licenciandos que associaram o termo demonstração aos significados "Validar um resultado / Mostrar algo" ou "Processo/desenvolvimento da prova" (Tabela 7), assim como os participantes que relacionam o termo prova com "Validar um resultado / Mostrar algo" ou "Conclusão da demonstração" (Tabela 8).

Quadro 5 – Diferenças entre demonstração e prova, nas concepções dos licenciandos.

(continuação)

L35	Mostrar como se faz.	Mostrar que da forma que foi demonstrada funciona.
L38	Recursos para fortalecer sua prova.	União do argumento com demonstração para provar uma afirmação.
L39	Uso de axiomas e teoremas já provados para demonstrar a tese.	Resultado final do processo.
L51	Detalhamento da argumentação.	Conclusão da demonstração.
L64	Utilizar axiomas e teoremas já provados para justificar uma afirmação.	Utilizar majoritariamente axiomas para provar uma afirmação.
L68	São os passos feitos para que se chegue a uma conclusão.	É a junção dos argumentos, da demonstração e da conclusão.
L70	Exposição da prova de alguma proposição feita.	Utilização e encadeamento de proposições para mostrar algo.
L71	Forma de validar uma proposição.	Forma de validar um teorema.
L73	Demonstrar com figuras o raciocínio que leva à prova.	É mostrar algebricamente a tese a partir da hipótese.
L76	É a utilização de exemplos e métodos para chegar num resultado.	É a maneira lógica e sistemática de demonstrar um determinado assunto.
L78	Mostrar uma afirmação por raciocínio lógico-matemático.	Mostrar por argumentação matemática.

Fonte: Autoria própria.

Diante dos fragmentos extraídos dos questionários dos licenciandos, podemos observar no quadro 5, a existência de contrastes relacionados ao rigor e a formalidade, visto que a maioria das conceituações sugerem que a prova estaria relacionada a algo mais formal ou a uma possível generalização, enquanto a demonstração estaria mais relacionada à informalidade ou a uma etapa que antecede a prova.

Verificou-se ainda que 3 discentes associaram a palavra prova a uma verificação numérica (ou prova real), conforme dissertou o licenciando L72: *"A substituição das incógnitas da demonstração por valores numéricos [...]"*. Na classe "Outros", agrupamos os significados para "prova" que tiveram frequência de no máximo dois, os quais não detalharemos neste trabalho. E somente um licenciando deixou a resposta em branco.

Portanto, com base nos diversos significados atribuídos e catalogados nas tabelas 7 e 8, podemos inferir que a maioria dos licenciandos ingressantes concebe os termos demonstração e prova como distintos, ainda que a maior frequência associada a ambos foi o de validar/mostrar algo. Além disso, com base na seção 1.2, em que foram problematizados os diferentes papéis da prova, constatamos que apenas as funções de verificação/validação, explicação e sistematização emergiram nas definições dos sujeitos pesquisados.

4.2 ANÁLISE DA QUESTÃO 2

4.2.1 Análise *a priori* da questão 2

A segunda questão do questionário está diretamente relacionada a um dos objetivos específicos desta pesquisa, o qual consiste em compreender como os licenciandos interpretam e avaliam as argumentações de alunos. Desta maneira, podemos afirmar que ela constitui uma das questões-chave para o desenvolvimento deste estudo.

Esta questão descreve três situações baseadas na seguinte afirmação: "A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a 180º". A justificativa dessa escolha é porque a soma dos ângulos internos de um polígono, no caso o triângulo, é um tópico usualmente abordado desde o Ensino Fundamental e, consequentemente, um resultado geométrico conhecido pelos licenciandos desde a Educação Básica. Além disso, com base em nossos conhecimentos e na literatura, a escolha desse resultado se deve ao potencial que ele apresenta em possibilitar a criação de diferentes argumentos para justificá-lo, tanto é que nesta questão apresentamos nove respostas diferentes dadas por alunos fictícios para validá-lo. Por esta razão é que optamos por focar na interpretação e na avaliação empreendidas pelos licenciandos, em vez de simplesmente solicitar que eles demonstrassem este resultado (como fizemos nas questões 5 e 6).

Na situação I supomos que os licenciandos fossem professores de uma turma da Educação Básica e pediram para que os seus alunos argumentassem sobre esta afirmação. No caso, solicitamos aos participantes que avaliassem cada um dos nove argumentos numa escala de 0 a 10 e justificassem as notas atribuídas. Este procedimento de investigação foi inspirado no trabalho de Healy e Hoyles (1998), no qual as autoras realizaram um estudo sobre as concepções dos alunos a respeito de provas em Álgebra. Em uma parte da pesquisa, elas propuseram aos alunos que analisassem provas elaboradas supostamente por outros estudantes para duas proposições[55], e dentre as diferentes respostas realizassem duas tarefas: escolher

[55] As provas se referiam às seguintes proposições: "Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par" e "Quando você multiplica três números consecutivos quaisquer, o resultado é sempre múltiplo de seis".

aquela que mais se aproximaria da sua solução, caso ele tivesse que provar a mesma proposição e escolher àquela que o seu professor atribuiria maior nota.

Os trabalhos de Pietropaolo (2005), Aguilar Junior (2012) e Ordem (2015) também utilizaram esse procedimento metodológico em suas pesquisas. No entanto, em nenhum deles as provas foram interpretadas/avaliadas por licenciandos ingressantes, como é o caso desta pesquisa.

A seguir apresentamos as nove respostas diferentes dadas por alunos fictícios na ordem em que foram descritas no questionário e, respectivamente, apresentamos comentários relativos à validade dos argumentos com base em Balacheff (1988) e Harel e Sowder (1998). É importante mencionar que ambos os modelos teóricos foram importantes tanto na elaboração dessas respostas quanto na análise das produções dos licenciandos.

Figura 21 - Argumentação da Ana descrita na questão 2.

Resposta da Ana: Eu desenhei vários triângulos e medi todos os ângulos cuidadosamente com o auxílio do transferidor e fiz a seguinte lista e como em todos eles a soma foi de 180°, a afirmação é verdadeira.

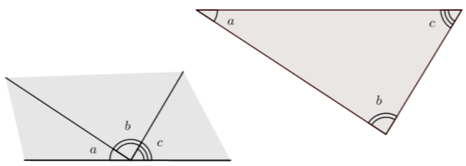
$$
\begin{array}{ccccccc}
60° & + & 60° & + & 60° & = & 180° \\
37° & + & 52° & + & 91° & = & 180° \\
112° & + & 26° & + & 42° & = & 180° \\
30° & + & 120° & + & 30° & = & 180° \\
3° & + & 87° & + & 90° & = & 180°
\end{array}
$$

Fonte: Autoria própria.

Na figura 21 temos a resposta de Ana, que validou a afirmação apenas para alguns casos particulares e não para qualquer triângulo, sem mencionar a imprecisão do instrumento de medida adotado. Deste modo, é possível categorizar esse argumento como empirismo ingênuo na tipologia de provas ou ainda como um esquema de prova indutiva.

Figura 22 - Argumentação do Bruno descrita na questão 2.

Resposta do Bruno: Eu desenhei um triângulo escaleno, recortei os ângulos e coloquei-os juntos. Observei que os ângulos do triângulo formaram um ângulo de meia volta. Logo a afirmação é verdadeira. Eu também repeti esse procedimento num triângulo isósceles e num triângulo equilátero, e cheguei ao mesmo resultado.

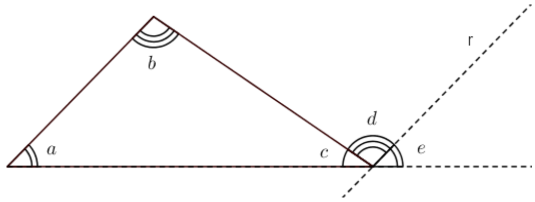


Fonte: Autoria própria.

Assim como o argumento anterior, o processo de validação do Bruno ilustrado na figura 22 também é impreciso. Apesar de ter tido o cuidado de repetir o procedimento para três tipos de triângulos e de fornecer um *insight* sobre a veracidade da afirmação, sua resposta está longe ser rotulada como uma demonstração, afinal um ou vários exemplos não são suficientes para validar uma propriedade matemática. Logo podemos classificar o argumento de Bruno como experiência crucial ou ainda como um esquema de prova perceptiva.

Figura 23 - Argumentação do Carlos descrita na questão 2.

Resposta do Carlos: Eu prolonguei a base do triângulo e desenhei uma reta r paralela a um dos lados do triângulo. Notei que $d = b$, pois são ângulos alternos internos entre duas retas paralelas. Além disso, observei que $e = a$, pois são ângulos correspondentes entre duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Logo, $c + d + e = 180°$ e, portanto, $a + b + c = 180°$. Deste modo, a afirmação é verdadeira.

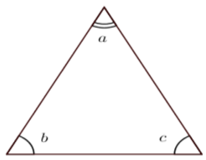


Fonte: Autoria própria.

Com relação à figura 23 é possível observar que Carlos durante o seu processo de prova não se restringiu a casos particulares, mas descreveu uma sequência de argumentos dedutivos, marcada por um uso correto da linguagem matemática e de conceitos preliminares para mostrar que a afirmação é verdadeira. Em virtude disso, a resposta do Carlos consiste numa demonstração. Logo é possível classificá-la como um esquema de prova analítica e afirmar que esse aluno atingiu o nível de prova denominado experiência mental por Balacheff.

Figura 24 - Argumentação da Dani descrita na questão 2.

Resposta da Dani: Eu desenhei um triângulo isósceles com o ângulo $b = 65°$. Como o triângulo é isósceles, os ângulos da base são iguais $(b = c)$. Logo, $a + 2b = 180°$. Como $b = 65°$, temos que $a = 180° - 2.65°$, ou seja, $a = 50°$. Assim, $a = 50°$, $b = 65°$, e $c = 65°$ e, portanto, $a + b + c = 180°$. Desta forma, a afirmação é verdadeira.

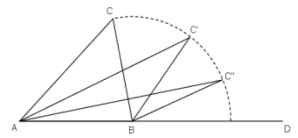


Fonte: Hoyles (1997, p. 12).

Na figura 24, é possível observar que Dani utilizou uma retórica excessivamente algébrica, porém ao mesmo tempo contraditória. Primeiramente, esta resposta se restringe ao caso em que o triângulo é isósceles, o que já não garante a generalidade do argumento, ou seja, para qualquer triângulo. Em segundo lugar, esse processo de validação também não garante que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo isósceles seja 180°, pois assume como premissa que o ângulo b vale 65º. Até este ponto poderíamos afirmar que Dani se baseou numa verificação empírica para validar a afirmação. No entanto, este argumento apresenta uma inconsistência lógica: a tese e a hipótese são idênticas. Ao afirmar que $a + 2b = 180°$, ela utiliza aquilo que se quer provar (tese) como algo já conhecido (hipótese). Portanto, pensando nos licenciandos que possam validar essa resposta, podemos enquadrá-la como um esquema de prova baseado em elementos externos (ritual e simbólico), visto que são fatores externos ao problema que influenciam na convicção do estudante, especialmente por sua aparência e manipulações simbólicas. Além disso, segundo o nosso entendimento, não é possível classificar a resposta da Dani na tipologia de provas visto que a argumentação é inconsistente.

Figura 25 - Argumentação do Edu descrita na questão 2.

Resposta do Edu: Eu observei que quando o vértice C se aproxima da reta AB, as medidas dos ângulos A e C se aproximam de 0° e a medida do ângulo B se aproxima de 180°. Logo a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

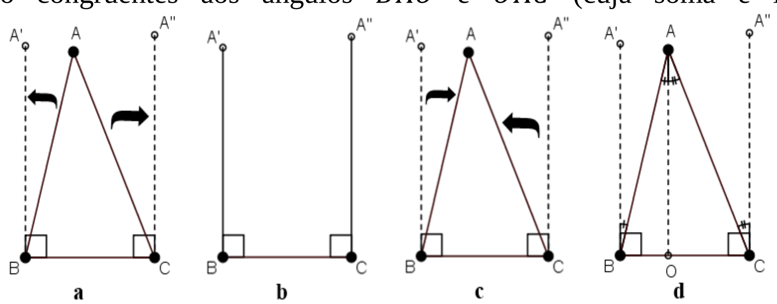


Fonte: Ordem (2015, p. 211).

Por sua vez, Edu recorreu ao uso de ambientes de GD para confirmar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, ao notar que a medida de B tende a um ângulo raso, como é possível observar na figura 25. Na visão de Harel e Sowder (1998) essa resposta se enquadra como um esquema de prova perceptiva. Já na tipologia de Balacheff, essa argumentação pode ser enquadrada apenas como uma experiência crucial, pois apesar das potencialidades ofertadas pelos *softwares* de GD, Edu se limitou a uma simples exploração que não fornece ideias para a construção de uma prova.

Figura 26 - Argumentação do Fábio descrita na questão 2.

Resposta do Fábio: Eu pensei da seguinte forma. Imagina que os lados AB e AC do triângulo ABC são girados em direções opostas com relação aos vértices B e C (*figura a*), respectivamente, até que seus ângulos com o segmento BC serem 90° (*figura b*). Esta ação transforma o triângulo ABC na figura $A'BCA''$, onde os segmentos $A'B$ e $A''C$ são perpendiculares ao segmento BC. Logo, a soma dos ângulos $A'\hat{B}C + B\hat{C}A'' = 180°$. Para recriar o triângulo ABC, basta girar novamente os segmentos $A'B$ e $A''C$ em direções opostas até que os pontos A' e A'' gerem o ponto A (*figura c*). Note que nessa ação eu devo descontar os ângulos $A'\hat{B}A$ e $A''\hat{C}A$, mas, ao mesmo tempo, eu devo acrescentar o novo ângulo $B\hat{A}C$. Porém, ao traçar o segmento AO perpendicular a BC, observei que os ângulos $A'\hat{B}A$ e $A''\hat{C}A$ são congruentes aos ângulos $B\hat{A}O$ e $O\hat{A}C$ (cuja soma é igual ao ângulo $B\hat{A}C$), respectivamente, pois são ângulos alternos internos (*figura d*). Logo, a soma dos ângulos internos ao triângulo permanece igual a 180° e, portanto, a afirmação é verdadeira.



Fonte: Harel e Sowder (1998, p. 259).

Na figura 26 temos uma resposta que se enquadra no esquema de prova transformacional. Fábio "vê o triângulo como uma entidade dinâmica; é um produto de sua própria construção imaginativa, não de uma percepção passiva" (HAREL; SOWDER, 1998, p. 259, tradução nossa). E é justamente por essa razão que não constitui um esquema de prova perceptiva. Além disso, em sua resposta é possível observar as três características essenciais da natureza transformacional, descritas no quadro 4. Para isso, note que todas as ações do Fábio estão direcionadas a validade da afirmação em sua **generalidade**, não se limitando a casos particulares. Ao transformar o triângulo, ele conseguiu **antecipar os resultados**, a saber, que as mudanças nos ângulos B e C causadas pelas transformações seria compensada pela criação do ângulo A. E por meio do **raciocínio dedutivo**, ele conclui que a soma dos ângulos internos de um triângulo é de fato 180º. Já na tipologia de Balacheff, a resposta do Fábio pode ser enquadrada como exemplo genérico, conforme discutimos na subseção 1.1.5, apesar de admitirmos que o seu discurso esteja mais próximo da noção de prova conceitual. Contudo, é importante mencionar que essa categorização reflete apenas a nossa concepção, visto que na literatura de pesquisa observamos que esse argumento gera divergências. Enquanto alguns pesquisadores como, por exemplo, Knuth (2002b, p. 68) o considera como uma demonstração, outros afirmam que esse tipo de argumento auxilia apenas a desenvolver a intuição e não deve ser considerado como uma prova matemática, pois requer um nível maior de formalidade (FISCHBEIN, 1982[56] apud REID; KNIPPING, 2010, p. 40).

Figura 27 - Argumentação da Gabi descrita na questão 2.

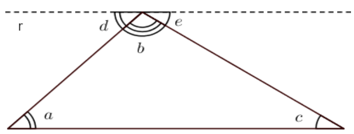
Resposta da Gabi: Como estudei no livro que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada pela fórmula $S_n = (n-2)$ x 180°, onde n é o número de lados do polígono, basta substituir por $n = 3$. Logo, obtive que $S_3 = 180°$, mostrando que a afirmação é verdadeira.

Fonte: Autoria própria.

Como é possível observar na figura 27, Gabi recorreu ao uso de um argumento de autoridade, que se enquadra no esquema de prova autoritária de Harel e Sowder. Segundo as definições adotadas nesta pesquisa, este processo de validação não constitui uma prova matemática. Sem mencionar ainda a inconsistência do argumento, pois para deduzir a fórmula $S_n = (n-2)\ x\ 180°$, é necessário saber como premissa que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a $180°$, e no caso, Gabi assumiu a fórmula como um pré-requisito para validar a proposição. Além disso, acreditamos que não é possível categorizar a resposta da Gabi em nenhum dos tipos de provas de Balacheff, visto que a argumentação é cíclica.

Figura 28 - Argumentação da Helena descrita na questão 2.

Resposta da Helena: Eu desenhei uma reta r paralela à base do triângulo. Observei que $d = a$ e $e = c$, pois são ângulos alternos internos entre duas retas paralelas. Assim, $d + b + e = 180°$, pois estão sob uma linha reta. Logo, $a + b + c = 180°$. Portanto, a afirmação é verdadeira.



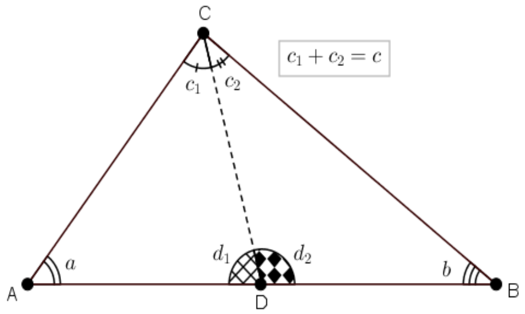
Fonte: Autoria própria.

[56] FISCHBEIN, E. Intuition and Proof. **For the Learning of Mathematics**, v. 3, n. 2, p. 9-18, 1982.

A resposta de Helena ilustrada na figura 28 é uma versão adaptada da descrita por Carlos, porém essa tende a ser mais utilizada em livros didáticos. A única diferença entre ambas é com relação ao traço da reta r paralela a um dos lados do triângulo. Mas será que os licenciandos também se atentaram a isso? Na realidade um dos nossos questionamentos é se as medidas de posição das respostas de Carlos e Helena seriam similares. E foi justamente por esta razão que inserimos ambas no questionário. A nossa conjectura era que a resposta de Helena, por ser mais familiar aos estudantes, tenderia a obter maiores notas do que a de Carlos.

Figura 29 - Argumentação do Igor descrita na questão 2.

Resposta do Igor: Eu dividi o triângulo ABC em dois triângulos menores ADC e BCD, e chamei de x a soma dos ângulos de um triângulo. Desta forma, no triângulo ACD se tem $a + c_1 + d_1 = x$ e no triângulo BCD se tem $b + c_2 + d_2 = x$. Portanto, $a + b + c_1 + c_2 + d_1 + d_2 = 2x$, o que resulta em $a + b + c + 180° = 2x$. Como a soma dos ângulos internos no triângulo ABC é dada por $a + b + c = x$, substituindo na equação anterior se tem $x + 180° = 2x$, e, portanto $x = 180°$. Logo, a afirmação é verdadeira.



Fonte: Van Asch (1993, p. 303).

Assim como a resposta fornecida por Dani, Igor também utilizou uma retórica excessivamente algébrica, porém os seus argumentos são contraditórios, como é possível verificar na figura 29. Ao afirmar que a soma dos ângulos internos nos triângulos ACD e BCD é igual a x, ele parte da premissa que tal soma é sempre a mesma para quaisquer triângulos. Logo, ele utiliza aquilo que se quer provar (tese), no caso mostrar que essa soma é sempre igual a 180º, como algo já conhecido (hipótese), não constituindo uma demonstração. Mesmo assim, em consonância com a pesquisa de Hoyles (1997), a nossa conjectura é que a maioria dos licenciandos validaria a resposta do Igor atribuindo notas elevadas, pelo fato dele ter utilizado fortemente a linguagem matemática, ainda que haja inconsistência nos argumentos. Deste modo, por acreditar que a maioria dos licenciandos aceitaria essa resposta simplesmente pelo uso da linguagem simbólica e de manipulações algébricas é que a classificamos como um esquema de prova baseado em elementos externos (ritual e simbólico). Além disso, segundo o nosso entendimento, não é possível classificar a argumentação de Igor na tipologia de provas por ser contraditória.

A seguir apresentamos o quadro 6 que sintetiza a classificação dos nove argumentos descritos na questão 2, segundo a nossa compreensão dos modelos teóricos de Balacheff (1988) e Harel e Sowder (1998).

Quadro 6 - Classificação teórica dos argumentos descritos na questão 2.

ARGUMENTOS DOS ALUNOS	TIPOLOGIA DE PROVAS	ESQUEMAS DE PROVA
Ana	Empirismo ingênuo	Indutiva
Bruno	Experiência crucial	Perceptiva
Carlos	Experiência mental	Analítica
Dani	Sem classificação	Ritual e simbólico
Edu	Experiência crucial	Perceptiva
Fábio	Exemplo genérico	Transformacional
Gabi	Sem classificação	Autoritária
Helena	Experiência mental	Analítica
Igor	Sem classificação	Ritual e simbólico

Fonte: Autoria própria.

Com base no quadro 6, podemos agrupar as nove respostas anteriores em três níveis decrescentes de validade, segundo a nossa concepção do que pode ser considerada uma demonstração:

- Por utilizarem o raciocínio dedutivo, as respostas do Carlos, da Helena e do Fábio são as que mais se aproximam da noção de demonstração adotada nesta pesquisa, pois validam a propriedade geométrica para qualquer triângulo;
- Ainda que as respostas de Ana, Bruno e Edu não garantam a validade da afirmação para todos os triângulos, acreditamos que tais justificativas, por meio do uso de figuras e exemplos, auxiliam na investigação da propriedade, fornecem *insights* sobre a veracidade da sentença e até mesmo ideias para construir uma demonstração;
- Já as respostas da Dani, do Igor e da Gabi, por apresentarem argumentos contraditórios, não validam a propriedade geométrica para nenhum triângulo.

É importante ressaltar que esses níveis de validade refletem apenas a nossa concepção sobre em que consiste uma prova matemática, pois segundo Weber (2003[57] apud ORDEM, 2015, p. 215), o que pode ser considerado uma demonstração depende da autoridade de quem avalia a produção. E foi justamente com o intuito de compreender como os licenciandos interpretam e avaliam as produções de estudantes que elaboramos a situação I.

A seguir descrevemos as situações II e III desta questão, bem como seus objetivos e as nossas conjecturas.

Na situação II supomos também que os licenciandos fossem professores da Educação Básica e iriam lecionar sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. No caso, perguntamos aos participantes se eles utilizariam algum/alguns dos nove argumentos descritos e solicitamos uma justificativa para a resposta.

E na situação III supomos que os licenciandos fossem realizar um teste da disciplina de Geometria Euclidiana, no qual foi solicitado que eles mostrassem que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual 180º. No caso, perguntamos aos participantes se eles utilizariam algum dos nove argumentos descritos e solicitamos uma justificativa para a resposta.

Basicamente o nosso objetivo em elaborar ambas as situações era para observar se a concepção dos licenciandos sobre argumentos válidos se alterava de acordo com o nível de escolaridade, ou seja, na Educação Básica e no Ensino Superior. A nossa conjectura era de que não mudaria, visto que os licenciandos tenderiam escolher as respostas que se basearam na lógica dedutiva em ambas as situações, ou seja, as argumentações do Carlos, do Fábio e da Helena. Porém, como já mencionamos anteriormente, por ser mais familiar aos estudantes, acreditamos que a reposta de Helena seja a preferência dos futuros professores tanto no teste de Geometria Euclidiana quanto para lecionar na Educação Básica.

4.2.2 Análise *a posteriori* da questão 2

Recordemos que esta questão era composta por três situações distintas baseadas na seguinte afirmação: “A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é

[57] WEBER, K. Students’ difficulties with proof. **The Mathematical Association of America**, n. 8, jun. 2003 (não paginado).

sempre igual a 180º”. Iniciaremos esta análise pela situação I, na qual o objetivo era compreender como os licenciandos interpretam e avaliam as argumentações de nove alunos.

4.2.2.1 Análise das produções dos licenciandos na situação I

Ao analisarmos os 78 questionários respondidos pelos licenciandos, elaboramos oito categorias com o intuito de facilitar a interpretação dos dados. Elas fazem menção às justificativas que:

1. Valorizaram a argumentação;
2. Afirmaram que a argumentação era válida apenas para os casos listados;
3. Afirmaram simplesmente que a argumentação não era válida ou não era convincente;
4. Destacaram a imprecisão do método utilizado ou a ausência de rigor matemático;
5. Observaram a inconsistência lógica dos argumentos;
6. Alegaram que o raciocínio apresentado era confuso ou complexo;
7. Evidenciaram erros conceituais dos licenciandos;
8. Sem justificativa.

Observamos que apesar do processo de avaliação ocupar um papel de destaque na situação I, para a elaboração dessas categorias o mais importante foi interpretar como o licenciando justificava cada nota atribuída. Além disso, ao longo desta análise deve emergir o real significado de cada uma delas, a partir dos fragmentos extraídos dos questionários respondidos pelos participantes. Entretanto, a seguir expomos de forma bem resumida à necessidade de cada uma das oito categorias.

A primeira categoria diz respeito àqueles que valorizaram a argumentação para um triângulo qualquer (ainda que a nota atribuída não seja a máxima). Já a segunda se refere àqueles que afirmaram que os argumentos apresentados eram válidos apenas para os casos listados e não para todos os triângulos. A terceira faz menção àqueles que escreveram que o argumento não provava a afirmação ou àqueles que não validaram a argumentação porque não era convincente. A quarta categoria diz respeito àqueles que destacaram que o método utilizado era impreciso ou a ausência de rigor matemático. Relacionada às categorias anteriores, a quinta se refere aos estudantes que perceberam uma inconsistência lógica na argumentação. Optamos por criá-la, pois era importante sabermos se os estudantes seriam capazes de observar que os argumentos propostos por Dani, Gabi e Igor eram contraditórios. A sexta categoria se constitui das justificativas que alegaram que o raciocínio apresentado era de difícil compreensão e por isso acarretava dúvidas. Já a penúltima diz respeito às justificativas que evidenciaram erros conceituais por parte dos licenciandos, relacionados a tópicos de Geometria ou a noção de prova matemática. E a última categoria se refere aos estudantes que não apresentaram justificativas, seja porque não souberam como validar a resposta, ou por não compreender a argumentação ou simplesmente por deixar em branco.

É importante destacar que estas categorias não são disjuntas, isto é, pode ocorrer de uma justificativa se enquadrar em mais de uma categoria como, por exemplo, o licenciando ter gostado da resposta, mas ressalta a necessidade de formalizar melhor os argumentos apresentados. Para esse tipo de caso, além de verificar a nota atribuída, teremos o cuidado de observar as demais justificativas e a questão como um todo, a fim de categorizá-la da melhor forma possível.

Com base nisso, o quadro 7 apresenta a distribuição dos licenciandos em relação às categorias descritas anteriormente:

Quadro 7 - Distribuição dos licenciandos em relação às justificativas para a situação I (questão 2).

CATEGORIAS Justificativas que:	**ARGUMENTOS DOS ALUNOS[58]**									***Frequência (em %)[59]***
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	
Valorizaram a argumentação	19	31	67	21	21	38	27	64	45	*47,4%*
Afirmaram que a argumentação era válida apenas para os casos listados	18	16	0	34	0	0	0	0	0	*9,7%*
Afirmaram que a argumentação não era válida ou não era convincente	17	2	0	1	12	0	4	0	1	*5,3%*
Destacaram a imprecisão do método utilizado ou a ausência de rigor matemático	21	26	0	4	30	6	32	0	1	*17,1%*
Observaram a inconsistência lógica dos argumentos	0	0	0	13	0	0	3	0	15	*4,4%*
Alegaram que o raciocínio apresentado era confuso ou complexo.	0	0	0	0	2	14	0	1	3	*2,8%*
Evidenciaram erros conceituais dos licenciandos	1	0	6	1	1	2	0	8	3	*3,1%*
Sem justificativa	2	3	5	4	12	18	12	5	10	*10,1%*
Total	78	78	78	78	78	78	78	78	78	*100%*

Fonte: Autoria própria.

[58] Por uma questão estética, optamos em utilizar apenas a primeira letra do nome para se referir ao argumento do(a) aluno(a), no caso, A para a resposta da Ana, e assim sucessivamente.
[59] Para o cálculo da frequência (em %), consideramos que, como o tamanho da amostra era de 78 sujeitos e cada um deveria apresentar 9 justificativas, o número total de justificativas seria de 702. Deste modo, somamos o número de justificativas presentes em cada uma das categorias e calculamos a porcentagem em relação ao número total de 702.

A fim de facilitar a descrição das justificativas e atribuir significado a estes índices, descrevemos a seguir uma análise das respostas dos licenciandos para cada uma das categorias listadas no quadro 7. Contudo, antes de iniciarmos a descrição dos resultados, recordemos que os argumentos apresentados variavam em relação aos níveis de validade. As respostas do Carlos, da Helena e do Fábio eram sustentadas pelo raciocínio dedutivo e eram as que mais se aproximavam da noção de prova matemática adotada nesta pesquisa. Já as respostas da Ana, do Bruno e do Edu não constituíam provas matemáticas, mas forneciam *insights* sobre a veracidade da soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180º, em nosso entendimento. E as respostas da Dani, do Igor e da Gabi não eram consistentes para validar essa propriedade geométrica, pois apresentavam argumentos contraditórios ou de autoridade.

Justificativas que valorizaram a argumentação

É possível identificar no quadro 7 que esta categoria apresentou a maior frequência (47,4%) e, dentre os licenciandos que se propuseram a apresentar alguma justificativa, foi a única que apresentou sujeitos em todas as colunas. Isto significa que independentemente do nível de validade, todos os argumentos foram valorizados por um percentual, representativo ou não, da amostra. Dentre as 9 argumentações, as que mais se destacaram foram as respostas do Carlos e da Helena, as quais eram baseadas no raciocínio dedutivo e apresentaram índices superiores a 80% de aceitação.

Com relação à resposta do Carlos, 67 participantes (85,9% da amostra) valorizaram o seu argumento, o qual era correto do ponto de vista matemático, pois garantia a validade da afirmação para todos os triângulos. A seguir apresentamos na íntegra algumas dessas justificativas:

“10, Carlos provou através de conceitos geométricos (ângulos alternos internos, ângulos correspondentes) a afirmação, além disso, esta prova é válida tanto para triângulos isósceles, escalenos e equiláteros”. (Justificativa do L43)

“10, o aluno conseguiu utilizar argumentos matemáticos convincentes e gerais para demonstrar que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180°.” (Justificativa do L62)

“8, demonstra a veracidade da informação com a ajuda de uma reta auxiliar.” (Justificativa do L29)

"9, Carlos desenvolveu uma argumentação sólida e dotada de conhecimentos importante sobre ângulos. Porém, podemos encontrar alguma dificuldade de precisão para executarmos isso em certos tipos de triângulos." (Justificativa do L22)

É importante mencionar que justificativas como a do L22 confirmam que as categorias criadas para analisar a situação I não são necessariamente disjuntas. Neste fragmento foi possível observar uma valorização do argumento de Carlos, uma referência à imprecisão do método e até mesmo um erro conceitual do licenciando sobre a noção de prova. Portanto, para categorizar as justificativas dos participantes nos baseamos também na nota atribuída e, principalmente, na análise do questionário como um todo, contrastando com as respostas atribuídas aos demais argumentos.

Semelhante aos dados observados na resposta do Carlos, 64 licenciandos (82% da amostra) também valorizaram o argumento que foi apresentado corretamente por Helena, como o L62, que atribuiu nota 10 e dissertou: *"[...] Helena utilizou dados matemáticos corretos e conseguiu argumentar a afirmação de uma forma genérica (triângulo qualquer), além de justificar cada afirmação utilizada para se chegar a essa conclusão"*. Ou ainda como o L75 que também avaliou com nota máxima e afirmou que a argumentação proposta por Helena é *"a forma mais exata e simples de provar"* o resultado geométrico em questão. Houve ainda quem se mostrou um pouco mais rigoroso na correção, como o L66, ao afirmar que *"Helena usou fatos verdadeiros para chegar ao que queria, porém não provou o fato de ângulos alternos internos serem iguais"*, mas atribuiu nota 9. E observamos também que alguns licenciandos que atribuíram nota máxima e valorizaram a resposta de Carlos, identificaram que o argumento de Helena era similar e enfatizaram isso em suas justificativas, conforme notamos no discurso do L12: *"10, desenhar uma reta paralela a permitiu associar os ângulos formados, como Carlos demonstrou"*.

Contudo, apesar dos dois argumentos mais valorizados pelos estudantes serem pautados na dedução lógica, a resposta do Igor, mesmo sendo logicamente inconsistente, também teve índice de aceitação superior à metade da amostra, com 45 licenciandos (57,7% da amostra). Para exemplificar, considere os dois fragmentos a seguir:

"10, por meio do conhecimento de equações e dotada de uma argumentação sólida e bem ilustrada, Igor provou com clareza a afirmação." (Justificativa do L22)

"10, usou um argumento visual ($d_1 + d_2 = 180°$), bom uso da álgebra, generalizou, assumiu uma incógnita como valor da soma." (Justificativa do L68)

Os demais argumentos apresentados para validar a soma dos ângulos internos de um triângulo tiveram índices de aceitação inferior à metade da amostra, os quais apresentamos a seguir, em ordem decrescente de porcentagem.

A resposta do Fábio, por exemplo, teve incidência de 48,7%, ou seja, 38 licenciandos valorizam o seu argumento. Alguns deles exaltaram a sua originalidade, como o L60 que atribuiu nota 8 e afirmou que ele *"usou muito bem os conhecimentos matemáticos e usou a criatividade".* Já outros, atribuíram nota máxima, como o L43, que chamou a atenção para a excelente argumentação visual proposta por Fábio. Ou como o L22, que valorizou a interdisciplinaridade do argumento: *"9, desenvolveu uma argumentação segura e correta, baseada em muita interdisciplinaridade dentro da matemática"*, mas ressaltou que *"em triângulos escalenos, por exemplo, o procedimento acima pode não ser tão eficaz".* No entanto, em nenhum momento Fábio particulariza o seu argumento para um tipo específico de triângulo, e visualmente falando, a figura sugere que o triângulo seja escaleno. Portanto, na ocasião o licenciando deve ter se confundido com as terminologias, talvez querendo se referir a triângulos obtusângulos.

Com relação às justificativas para a resposta do Bruno, verificamos que 31 estudantes (39,8% da amostra) valorizaram a sua argumentação, conforme se observa nos extratos a seguir:

"10, ideia inovadora e um jeito simples de explicar." (Justificativa do L8)

"10, sua interpretação não abre espaço para possíveis equívocos, pois demonstrou com triângulos de diferentes características o ponto de vista. Partiu de um pressuposto menor e definiu uma premissa maior." (Justificativa do L12)

"9, ele usou de experimentos e garantiu uma generalização." (Justificativa do L68)

É importante destacar que outras três justificativas para o argumento do Bruno nos chamaram a atenção. O L20, por exemplo, atribuiu nota máxima "*pela percepção em que recortando e colando os três ângulos do triângulo daria 180º"*, ou seja, esse estudante valoriza o esquema de prova perceptiva de Harel e Sowder (1998). Já o L46 que também deu nota máxima, rotulou a resposta do Bruno, assim como da Ana, como *"prova prática".* Isto sugere que esse licenciando concebe argumentos empíricos como uma demonstração. E o L58 justificou sua nota 9.5, pois "*o método visual/palpável, durante a fase de aprendizado é um dos melhores que já vivenciei"*. Essa justificativa se destacou porque foi justamente para o

Bruno que o licenciando concedeu a maior nota (veja o Apêndice B), motivado por ter vivenciado essa experiência na Educação Básica. Deste modo, podemos inferir que as práticas significativas relacionadas ao processo de argumentação, sejam elas concretas ou abstratas, parecem ser importantes para a formação dos alunos.

Com relação à resposta da Gabi, observa-se que 27 licenciandos (34,6% da amostra) valorizaram o seu argumento. Por exemplo, o L27 exaltou o seu modo de pensar atribuindo nota máxima, por *"utilizar de outra fórmula para demonstrar algo [...]"*. Além dessa, chamou nossa atenção o L37, ao exaltar que a aluna foi *"rápida e conclusiva"*, mas sublinhou que não houve uma demonstração prática. Neste contexto não fica explícito ao que ele quis se referir, mas verificando a sua conceituação de demonstração na questão 1, ele afirma: *"[...] demonstrar como é a resposta,* ***por meio de cálculos*** *bem claros e bem formulados sobre certo assunto"*. Logo, acreditamos que o L37 se refere à ausência de um método empírico para corroborar o resultado.

Em seguida, com um índice de 26,9% de aceitação por parte da amostra (21 licenciandos), aparecem os argumentos da Dani e do Edu. Os sujeitos L9 e L75, por exemplo, ao atribuírem boas notas à resposta de Dani, dissertaram, respectivamente: *"8, demonstrou de forma sábia com poucos argumentos e utilizando operações matemáticas simples."* e *"10, a aluna sabe que no triângulo isósceles os ângulos da base são iguais, sabe que a soma dos ângulos internos são 180º, sendo assim a afirmação é verdadeira"*. Já com relação à resposta do Edu, destacamos duas justificativas, a do L42 que deu nota máxima, justificando que ele o convenceu por meio do desenho e do L24 que atribuiu nota 9 pelo raciocínio correto, mas ressaltou que somente foi possível por causa do auxílio de *softwares*.

Por fim, com 24,3% da amostra (19 estudantes) aparecem as justificativas que valorizaram a resposta da Ana, e dentre elas, mencionamos a do L11 que atribuiu nota máxima, já que foram utilizados *"diversos triângulos com uma boa variação de ângulos internos que sempre somam 180º, portanto está correto",* e a do L30 que deu nota *"7, porque* [Ana] *procurou a forma mais rápida de desenvolver"*. Contudo, é importante destacar que dentre os nove diferentes argumentos, certamente o da Ana foi a menos consensual entre os participantes, visto que não houve predominância de nenhuma categoria, conforme podemos verificar no quadro 7.

Justificativas que afirmaram que a argumentação era válida apenas para os casos listados

Esta categoria emergiu nos questionários dos licenciandos apenas nos argumentos descritos por Ana, Bruno e Dani, a qual representa 9,7% do número total de justificativas. De certo modo, é compreensível esta percepção, visto que esses alunos fictícios fizeram uso de casos particulares em suas investigações. Em especial, no caso da Dani, ainda que sua justificativa fosse contraditória, ela se restringiu a um determinado triângulo isósceles. Possivelmente em virtude disso, a justificativa de 34 licenciandos (43,6% da amostra) se enquadra nesta categoria, a qual foi a que mais se destacou neste argumento. A resposta do L22 corrobora esse fato: *"5, ela apresentou em um caso particular de triângulos (isósceles) e mostrou com clareza que a soma de seus ângulos é 180°. Mas em nenhum momento ficou "provado" que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°".*

Para 18 licenciandos (23,1% da amostra) a argumentação descrita por Ana se enquadrava nesta categoria e era válida apenas para os cinco casos listados. A seguir apresentamos na íntegra algumas destas justificativas:

"3, pois ela mostrou que para alguns casos é valido, mas não se pode afirmar que sempre é válido." (Justificativa do L47)

"5, a argumentação só é válida para os casos listados." (Justificativa do L78)

E para 16 participantes (20,5% da amostra), os argumentos apresentados por Bruno validaram a afirmação somente para os casos listados, isto é, para os três triângulos que foram recortados. As respostas dos estudantes L34 e L69, respectivamente, confirmam isso: "*3, mesmo que esse feito possa ser observado em todos os triângulos que você recortou, não está provado para qualquer triângulo genérico"* e *"1, um triângulo escaleno qualquer não confirma todos os outros".*

Justificativas que afirmaram que a argumentação não era válida ou não era convincente

Esta categoria faz menção aos licenciandos que afirmaram que o argumento em questão não validava o resultado geométrico, os quais na maioria das vezes não descreviam os motivos para isso e zeraram as notas (por exemplo, respostas como "não prova", "errado", "incorreto", "não é adequada") e aos estudantes que julgaram que a argumentação apresentada não era convincente. Além disso, esta categoria representa 5,3% do número total de justificativas e, dentre elas, se destacam aquelas que foram descritas pelos futuros professores para os argumentos da Ana e do Edu.

Verificou-se que 17 participantes (21,8% da amostra) invalidaram ou não se convenceram com a resposta descrita por Ana, alegando principalmente que vários exemplos não eram suficientes para justificar uma afirmação, conforme dissertaram os sujeitos L52 e L54, respectivamente, após zerarem a nota: *"Uma série de exemplos a respeito de uma proposição não prova, necessariamente, a mesma" e "Isso não significa que a afirmação seja verdadeira para qualquer triângulo. Isso não demonstra a afirmação"*.

No caso da resposta do Edu, as justificativas de 12 licenciandos (15,4% da amostra) se enquadraram nesta categoria. Dentre eles, houve quem afirmou que o argumento não era convincente como, por exemplo, o L71, ao atribuir nota 4 e descrever o seguinte questionamento: *"não me convenceu. Quem me garante que os ângulos serão 180º?"*. Já outros afirmaram que não era válido, seja por causa de algum motivo aparente, como vemos na justificativa do L63, *"não prova para quando o ângulo A e C não é 0º"*; ou ainda simplesmente não descreveram os motivos, como podemos observar nos discursos dos sujeitos L8, L39, L58, respectivamente: *"não é suficiente"*, *"lógica confusa"* e *"muito vaga"*.

Com relação aos outros argumentos dos alunos fictícios em que identificamos justificativas que se enquadraram nesta categoria, observamos que: 4 participantes (5,1% da amostra) invalidaram a resposta da Gabi, como o L49 que zerou a nota alegando que ela simplesmente aplicou uma fórmula e não provou nada; 2 estudantes afirmaram que a resposta do Bruno não provava a afirmação, como vemos no fragmento a seguir: *"[...] não concluiu que realmente a soma dos ângulos internos é 180"*; um licenciando afirmou que a resposta da Dani era inconvincente; e outro sujeito afirmou que o argumento do Igor não era válido, apesar de exaltar a sua criatividade.

Justificativas que destacaram a imprecisão do método utilizado ou a ausência do rigor matemático

Esta categoria diz respeito àqueles que destacaram que o método utilizado era impreciso (por exemplo, baseados em aproximações ou meramente intuitivos) ou a ausência do rigor matemático (por exemplo, baseado em figuras ou escasso de argumentos algébricos), e representa 17,1% do número total de justificativas, a segunda categoria com maior frequência. Dentre elas, se destacam as justificativas apresentadas pelos licenciandos para os argumentos da Gabi, do Edu, do Bruno e da Ana.

Com relação à resposta da Gabi, observou-se que as justificativas de 32 licenciandos (41% da amostra) se enquadram nesta categoria, especialmente por ter assumido a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo como verdadeira, sem ao menos demonstrá-la. Os extratos a seguir corroboram isso:

"5, ela foi até inteligente ao testar a afirmação por meio desta fórmula, porém não passa de uma mera verificação, donde a justificativa acerca da maneira com que se chega a essa afirmação, por meio de argumentos lógicos, foi deixada de lado." (Justificativa do L22)

"6.5, como chegou nesta fórmula? Infelizmente precisamos fundamentar nossas ideias." (Justificativa do L38)

"6, a aluna parece saber que uma prova já estabelecida pode ser utilizada em demonstrações futuras. Contudo, o desconhecimento sobre os fundamentas da ferramenta utilizada mostra a falta de rigor matemático." (Justificativa do L44)

"3, donde saiu essa fórmula? Como você sabe que ela é realmente verdadeira? Interessante olhar pelo lado de que o triângulo se aplica a esses polígonos, mas da próxima não tome tudo como verdade ou explique um pouco da origem dessa fórmula." (Justificativa do L67)

"4, não houve argumentação lógica, somente pegou uma equação e substituiu um número." (Justificativa do L78)

Já na resposta de Edu, 30 estudantes (38,5% da amostra) evidenciaram que a imprecisão do método ou a ausência de fundamentação, principalmente por ele se basear na intuição. As justificativas a seguir corroboram esse fato:

"6, embora Edu não tenha cometido equívoco em sua análise, ele lidara apenas com aproximações e que não evidencia uma argumentação 100% confiável." (Justificativa do L22)

"5, esta prova está baseada muito no achismo, estabeleça afirmações e demonstrações mais concretas." (Justificativa do L38)

"7, uma lógica, mas não completamente fundamentado, por fim, incompleta." (Justificativa do L31)

"2, os argumentos apresentados são superficiais para justificar a sentença apresentada." (Justificativa do L32)

"8, Edu usa um processo limite, mas também não generaliza o caso." (Justificativa do L41)

Com relação ao argumento de Bruno, verificou-se que 33,3% da amostra (26 participantes) alegaram que o método utilizado por ele era impreciso, conforme descreveu o L22: *"8, a ideia do Bruno foi inteligente, mas não é totalmente eficaz na prática, uma vez que pode haver pequenas imprecisões no recorte que podem comprometer o teste."* Ou alegaram a ausência de rigor matemático, seja por utilizar apenas figuras, como afirmou o L15, pois *"apenas desenhando geometricamente fica difícil provar [...]*.", seja por utilizar apenas argumentos concretos, como dissertou o L57: *"8, neste caso, o aluno comprovou empiricamente para quaisquer triângulos, mas mesmo assim, a demonstração matemática deixou a desejar."* Inserida nesta categoria encontramos ainda a justificativa do L52 que atribuiu nota 2, afirmando que Bruno se baseou em uma simples percepção visual. Ao contrário do L20, que exaltou essa característica (veja a página 108), o L52 não valoriza o esquema de prova perceptiva, indicando que o processo avaliativo de dois futuros professores pode ser bem divergente devido às suas concepções sobre a validade de um argumento.

Por fim, as justificativas de 21 estudantes (26,9% da amostra) para o argumento da Ana foram classificadas nesta categoria, principalmente por ela se basear em cálculos com o auxílio do transferidor, conforme destacou o L5: *"A ideia do transferidor é ótima forma de conferir a afirmação, mas poderia haver casos onde ele não consegue medir o ângulo e então você não poderia provar que é verdadeiro".* Já para o L72, Ana não provou realmente a afirmação, pois utilizou um método baseado em estimativas. A seguir, apresentamos outras três justificativas interessantes, as quais estão relacionadas às concepções destes licenciandos sobre a noção de prova matemática:

"3, o fato de desenhar vários triângulos e medir cuidadosamente seus ângulos não serve com como argumento para a afirmação anterior, uma vez que existem infinitos triângulos e se um deles não obedecer a afirmação, ela será falsa." (Justificativa do L22)

“6, a aluna mostra conhecimento sobre os diferentes tipos de triângulos e a intuição de que esses podem possuir propriedades diferentes. Mas falta de conhecimento acerca das bases de uma demonstração, que não pode ser dada em listagens.” (Justificativa do L44)

“6, ao pensar desta forma, Ana associa matemática à experimentação, desta forma, não desenvolve o mínimo de abstração necessária para um posterior desenvolvimento, deixando apenas a intuição presente, não é ruim, mas não é uma explicação completa.” (Justificativa do L70)

É importante destacar que esta categoria relacionada à ausência de rigor matemático e à imprecisão do método foi a que mais se destacou nas respostas descritas por Ana, Edu e Gabi, conforme se observa no quadro 7. Além disso, em todos os argumentos que não constituíam provas matemáticas, mas forneciam *insights* sobre a veracidade da soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180º, no caso, as respostas da Ana, do Bruno e do Edu, esta categoria teve presença marcante em todas elas.

Com relação aos demais argumentos dos alunos fictícios em que esta categoria esteve presente, verificados que: 6 licenciandos (7,7% da amostra) julgaram que a resposta do Fábio era pouco fundamentada, pois se baseava em desenhos e/ou em meras aproximações, carecia de argumentos algébricos e que não garantia a validade para qualquer triângulo; 4 estudantes (5,1% da amostra) destacaram que o método utilizado pela Dani era impreciso, já que ao desenhar um triângulo nem sempre será possível obter a medida do ângulo *b* (que no caso era igual a 65º); e um sujeito alegou a falta de rigor matemático na resposta proposta pelo Igor: *“7, boa intuição mas faltou justificar algumas premissas no meio do argumento”* (Justificativa do L51).

Justificativas que observaram a inconsistência lógica dos argumentos

Ainda que esta categoria esteja relacionada com algumas das anteriores, optamos por destacá-la, a fim de identificar se os licenciandos foram capazes de observar a inconsistência lógica presente nos argumentos propostos por Dani, Gabi e Igor. Contudo, conforme descrevemos a seguir, pouquíssimos estudantes conseguiram evidenciar tais contradições, tanto é que esta categoria representa apenas 4,4% do número total de justificativas.

No caso da resposta da Dani, apenas 13 estudantes (16,7% da amostra) conseguiram observar que os argumentos utilizados eram contraditórios, visto que ela utilizou a própria tese para justificar a afirmação. A seguir apresentamos algumas das justificativas propostas por esses licenciandos:

"0, a sua lógica foi cíclica, ou seja, usou um argumento para justificar o mesmo. Isso não prova nada. Você afirmou o que quis provar." (Justificativa do L52)

"0, o aluno utilizou-se da afirmação para prová-la, o que é um absurdo. Além disso, baseou-se em um caso específico." (Justificativa do L48)

"0, considerando um único caso e assumindo aquilo que se quer provar, pode tornar a compreensão de qualquer tópico da matemática complexo, isso releva deficiência no raciocino lógico." (Justificativa do L70)

Com relação à reposta da Gabi, apesar do alto índice relacionado à falta de rigor matemático como vimos na categoria anterior, apenas três estudantes (3,8% da amostra) evidenciaram que a fórmula assumida por ela é consequência direta da soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180º, a qual precisava ser justificada, conforme ilustra a justificativa do L69: *"2, ela não demonstrou, usou uma fórmula que tem como parte da prova o que se quer provar"*.

E apenas 15 participantes (19,2% da amostra) foram capazes de interpretar a resposta de Igor corretamente e apontar fundamentos inconsistentes como, por exemplo, o L53 ao atribuir nota 3, justificando que o aluno *"assumiu que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo são iguais"*. Além disso, dentre esses sujeitos, chamou a nossa atenção a justificativa de alguns licenciandos, os quais apesar de terem destacado essa contradição lógica, atribuíram boas notas (entre 7 e 8) alegando que o raciocínio algébrico do Igor estava correto. As respostas dos discentes L52 e L64, respectivamente, corroboram esse fato: *"8, o pensamento está correto, no entanto você partiu do pressuposto de que x é um valor fixo em todos os casos genéricos, sem provar."* e *"7, ele fez manipulações corretas nas equações, porém usa do próprio enunciado para demonstrá-lo"*.

Justificativas que alegaram que o raciocínio apresentado era confuso ou complexo

Esta categoria emergiu nos questionários dos licenciandos apenas nos argumentos descritos por Edu, Fábio, Helena e Igor, a qual representa 2,8% do número total de justificativas, o menor índice de frequência descrito no quadro 7.

Apresentamos inicialmente as justificativas dos licenciandos para a resposta do Fábio, a qual teve o maior percentual dentre estes quatro. Para 14 estudantes (17,9% da amostra), o seu raciocínio era complicado e gerava dúvidas, sobretudo se fosse abordado no Ensino Básico, conforme afirma o L9: *"8, porém é uma forma muito complexa para um aluno da Educação Básica para absorver o que se está afirmando"*. Ou ainda como disserta o L40: *"4, raciocínio confuso, prolongado. Existe uma lógica, porém poderia ser mais simples"*. Atrelado a esse fato, a resposta do Fábio foi a que teve o maior índice de licenciandos (23,1% da amostra) que não apresentaram justificativas. Contudo, é importante destacar que esses números não nos surpreenderam, pois durante as aplicações dos questionários, esta resposta foi a que mais gerou questionamentos por parte dos discentes. Acreditamos que pelo fato dela ter sido traduzida do inglês e por ser um argumento pouco usual, a retórica pode ter ficado enfadonha e/ou desconexa para os estudantes e isso refletiu na análise dos dados.

Os demais argumentos se enquadraram nesta categoria com frequências baixíssimas: 3 licenciandos mencionaram que os argumentos utilizados pelo Igor não eram claros; 2 participantes afirmaram que o raciocínio do Edu era confuso ou complexo; e apenas um estudante avaliou a reposta da Helena como complexa.

Justificativas que evidenciaram erros conceituais dos licenciandos

Durante a análise dos questionários respondidos pelos licenciandos, identificamos que algumas justificativas apresentavam erros conceituais, relacionados a tópicos de Geometria ou à noção de prova matemática. Em virtude disso, optamos por criar esta categoria. É importante destacar que apenas 3,1% do número total de justificativas se enquadram neste grupo. Curiosamente, os argumentos do Carlos e da Helena, os quais foram os mais valorizados pelos estudantes, foram também neles em que identificamos os maiores índices de justificativas com equívocos conceituais.

Na resposta do Carlos, por exemplo, 6 estudantes (7,7% da amostra) apresentaram erros conceituais, especialmente relacionados à noção de prova matemática. Podemos verificar isso na justificativa do L60 que atribuiu nota 7 alegando que esta reposta não generaliza a prova. O L70 também atribuiu nota 7, apontando a necessidade de realizar uma investigação empírica antes de uma demonstração. Já o L10 não foi capaz de compreender a generalidade do argumento para qualquer triângulo, ao afirmar que Carlos "*usou somente um caso, ficando vago a resposta"*. Por fim, o L29 julgou que esta resposta não estava totalmente correta, pois *“demonstra a veracidade da informação com a ajuda de uma reta auxiliar”*. Essa justificativa (e a que foi atribuída à resposta do Igor: *“Me provou se utilizando de triângulos auxiliares, e seus ângulos, e não com o triângulo original da questão.”*) sugere uma visão equivocada desse licenciando para a noção de demonstração, na qual não se pode fazer uso de elementos auxiliares. Além disso, ele não adotou os mesmos critérios no decorrer da sua avaliação, já que atribuiu nota 10 à resposta de Helena que também utilizou uma reta suporte.

Com relação à resposta da Helena, nas justificativas de 8 licenciandos (10,2% da amostra) emergiram erros conceituais. O L36, por exemplo, atribuiu nota 5 para a solução de Helena, afirmando que não era possível garantir a igualdade entre os ângulos $d = a$ e $e = c$, os quais eram alternos internos, enquanto o L8 concedeu nota 5, alegando que a resposta não era uma justificativa, apesar de ter valorizado o argumento de Carlos. Além dele, os estudantes L60, L70 e L10 tornaram a cometer os mesmos equívocos conceituais evidenciados na resposta de Carlos.

A seguir apresentamos os outros argumentos dos alunos fictícios em que identificamos justificativas equivocadas por parte dos licenciandos, em ordem descrente de porcentagem.

Na resposta de 3 discentes (3,8% da amostra) para o argumento do Igor foi possível apurar algum erro conceitual como, por exemplo, o L46 que apresentou uma concepção equivocada da noção de prova, ao dissertar: “*4, pois a prova poderia ser aplicada mesmo sem a divisão do triângulo, assim apenas assumindo $a + b + c = 180°$”*. Em sua visão, o argumento poderia ter sido iniciado já utilizando a tese. Já o L70 mencionou que o raciocínio do Igor era válido, contudo era pobre empiricamente.

Dentre os licenciandos que atribuíram justificativas ao argumento do Fábio, identificamos que em 2 deles cometeram erros conceituais relacionados à noção de demonstração. Para o L15, Fábio deveria *“provar numericamente”* e segundo o L70, assim como na resposta do Igor, ressaltou que *“apesar da argumentação e prova ser válida, ela é, de certa forma, enfadonha e existe muita atenção e abstração, além disso, **empiricamente falando, ela é pobre**”*. Note que ambos fazem menção à necessidade da prova conter argumentos empíricos.

E com relação às justificativas atribuídas pelos licenciandos às argumentações de Ana, de Dani e de Edu, identificou-se que apenas uma delas se enquadrou nesta categoria. O L15, por exemplo, cometeu um erro conceitual geométrico, ao atribuir nota 1 à Ana, alegando que em um triângulo encontramos *"apenas ângulos agudos e um ângulo reto [...]"*. Já o L4 zerou a nota da Dani, ao afirmar que no *"triângulo isósceles todos os lados são iguais, não apenas os da base"*. E novamente o L15, que zerou a nota do Edu e apresentou a seguinte indagação em sua justificativa: *"sem valores numéricos, é possível provar essa teoria?"*. Aparentemente na concepção desse licenciando, assim como na do L70 que descrevemos anteriormente, só seria possível demonstrar um resultado por meio de argumentos empíricos.

Sem justificativas

Esta categoria se refere aos estudantes que não apresentaram justificativas, seja por não saberem como validar um determinado argumento, seja por não compreenderem a argumentação ou simplesmente não responderam. Em teoria, o número total de justificativas na questão 2 (situação I) deveria ser de 702 (9 argumentos para cada um dos 78 licenciandos), porém na prática, 10,1% desse número estiveram em branco por um dos motivos citados anteriormente. É importante destacar que todos os argumentos tiveram um percentual de respostas em branco.

Conforme já comentamos, a resposta do Fábio foi a que apresentou o maior índice, com 23,1% da amostra (18 licenciandos). Posteriormente, aparecem os argumentos do Edu e da Gabi, com uma frequência de 12 estudantes (15,4% da amostra) cada um. Em seguida, 12,8% da amostra (10 respondentes) não forneceram justificativas para a resposta do Igor. Além disso, os argumentos da Ana, do Bruno, do Carlos, da Dani e da Helena tiveram frequências menores ou iguais a 5 em relação à amostra.

Tendo concluído a descrição das justificativas dos licenciandos por categorias, apresentamos a seguir uma análise estatística das notas atribuídas pelos licenciandos na situação I e concluímos esta subseção com uma reflexão sobre as concepções de três estudantes com base na questão 1.

Análise estatística das notas atribuídas pelos licenciandos

A fim de expor algumas considerações sobre a situação I, apresentamos o quadro 8 que mostra o comportamento das notas dos estudantes para os nove argumentos em função das medidas de posição (média aritmética, mediana e moda) e dispersão (desvio-padrão). As notas atribuídas pelos licenciandos ingressantes às respostas dos alunos fictícios se encontram no Apêndice B.

Quadro 8 - Medidas de posição e dispersão das notas atribuídas pelos licenciandos às respostas dos alunos na situação I (questão 2).

MEDIDAS DE POSIÇÃO E DISPERSÃO	**ARGUMENTOS DOS ALUNOS**								
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
Média aritmética	5,7	7,2	9,3	5,7	5,7	7,9	6,6	9,3	8
Mediana	6	8	10	6	6	9	7	10	9
Moda	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Desvio-padrão	3	2,5	1,5	3,1	3,3	2,9	3	1,3	2,8

Fonte: Autoria própria.

Com base nas medidas estatísticas constantes no quadro 8, descrevemos alguns comentários sobre as notas atribuídas pelos licenciandos aos nove argumentos descritos na situação I:

- É possível observar que os argumentos do Carlos e da Helena foram os preferidos pelos licenciandos, visto que tiveram a maior média e mediana e tiveram os menores índices de dispersão, ou seja, foram as respostas que receberem as notas mais regulares em relação à média aritmética. Além disso, 49 estudantes (62,8% da amostra) atribuíram nota máxima para ambos os argumentos. Isto ratifica a preferência da amostra pelas respostas baseadas em deduções lógicas e que se enquadram na definição de prova matemática adotada nesta pesquisa. Note que a argumentação do Fábio teve a quarta melhor média aritmética, praticamente com os mesmos índices atribuídos à resposta do Igor;
- Como vimos no quadro 7, a resposta do Igor teve o terceiro maior percentual de licenciandos (57,7% da amostra) que valorizaram a sua argumentação e, consequentemente, isso explica porque deteve a terceira melhor média das notas com 8,0. Este fato corrobora a nossa conjectura, já que a maioria validou o argumento do Igor e atribui notas elevadas;
- Dentre as três respostas (Ana, Bruno e Edu) que não se enquadravam como prova matemática, mas que em nossa concepção forneciam *insights* sobre a veracidade da afirmação, a argumentação do Bruno foi a preferida pelos licenciandos, detendo a quinta melhor média aritmética com 7,2 e o terceiro menor desvio-padrão com 2,5. Acreditamos que os fatores relacionados à

criatividade, à capacidade de visualização, à acessibilidade para o desenvolvimento com os alunos da Educação Básica e, especialmente, à investigação com os três tipos de triângulos, influenciaram na preferência pelo discurso do Bruno em relação aos da Ana e do Edu;

- Com relação as três respostas (Dani, Gabi e Igor) que não validavam a propriedade geométrica para nenhum triângulo, observamos no quadro 7 que não houve um consenso entre os licenciandos, visto que para cada uma das respostas predominou uma categoria diferente. Este fato foi reforçado pelas medidas de dispersão descritas no quadro 8, as quais foram próximas ou superiores a 3 pontos;
- O argumento da Dani, juntamente com o da Ana e do Edu, foi o que teve a menor média das notas atribuídas pelos licenciandos. Entretanto, com base no quadro 7 isso se justifica especialmente porque 34 estudantes (43,6% da amostra) alegaram que a argumentação da Dani era válida apenas para o triângulo isósceles, já que apenas 13 estudantes constataram uma contradição em seu raciocínio;
- O argumento do Edu foi um dos que apresentaram a menor média e foi o que recebeu as notas mais dispersas em relação à média aritmética, já que 68% da amostra atribuíram notas entre 2,4 e 9,0. Isso nos sugere que foi a argumentação menos consensual entre os estudantes;
- Por fim, nos chama a atenção que a moda das notas em todos os argumentos foi 10, ainda que alguns deles apresentassem raciocínios bem diferentes.

Refletindo sobre as concepções de três licenciandos com base na questão 1

Durante a análise a *posteriori* da situação I, verificamos que os únicos participantes que atribuíram nota máxima para todas as respostas foram os licenciandos L11, L16 e L73 (veja o Apêndice B). E isso nos levou a seguinte pergunta: Se os nove diferentes argumentos foram validados, quais seriam então as concepções de argumentação, prova e demonstração desses licenciandos? Na tentativa de respondê-la, recorremos às respostas fornecidas por esses licenciandos na questão 1.

Na visão do L11 a **argumentação** consiste em utilizar fundamentos matemáticos para discutir uma determinada situação; a **demonstração** também consiste em utilizar fundamentos matemáticos para mostrar a eficácia de uma prova; e a **prova** é comprovar e ter como correto um termo matemático.

Já o L16 não apresentou nenhuma definição para essas nomenclaturas, o que ele fez foi comentar sobre a importância de cada uma delas. Em sua visão a **argumentação** é importante para saber a utilidade e a aplicabilidade de certo conteúdo; uma **demonstração** serve para saber sua origem; e a **prova** deve que ser utilizada como ferramenta de sondagem.

Por fim, o L73 diz que a **argumentação** fornece os parâmetros utilizados na construção de uma ideia; uma **demonstração** remete a figuras e raciocínios que levam à prova; e a **prova** é mostrar algebricamente a tese a partir da hipótese.

Observe que para nenhum dos três estudantes está clara a necessidade da demonstração ou da prova apresentar um raciocínio lógico dedutivo. O L73 foi o que mais se aproximou disso, ao conceituar que a tese tem como premissa a hipótese. Entretanto, ele concebe a demonstração como uma etapa antecedente à prova. Já as definições do L16 sugerem que o mesmo não tem clareza sobre esses termos, ao limitar a noção de prova a uma simples verificação. E as definições propostas pelo L11 foram similares, pois todas seriam baseadas em fundamentos matemáticos.

Deste modo, inferimos que estes três licenciandos, não possuem clareza sobre o que constitui uma demonstração ou prova matemática. Por consequência, qualquer argumentação que lhes fosse apresentada possivelmente seria válida, ainda que fosse contraditória, como de fato ocorreu na situação I.

4.2.2.2 Análise das produções dos licenciandos nas situações II e III

Elaboramos as situações II e III para verificar qual ou quais eram os argumentos preferidos dos licenciandos para validar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º durante uma aula na Educação Básica e num possível teste de Geometria Euclidiana no Ensino Superior. Deste modo, poderíamos observar se as concepções dos licenciandos sobre argumentos válidos se altera de acordo com o nível de escolaridade.

Como os envolvidos poderiam escolher mais de um argumento na situação II, a frequência total superou o número de participantes. E apesar da orientação para escolher apenas um argumento na situação III, observou-se que muitos também indicaram mais de uma resposta. O quadro 9 descreve a frequência das escolhas feitas pelos licenciandos em ambas as situações:

Quadro 9 - Distribuição das escolhas dos licenciandos com relação ao(s) argumentos(s) preferido(s) para ser(em) utilizado(s) no Ensino Básico e no Superior.

Argumento(s) escolhido(s) para utilizar no:	**ARGUMENTOS DOS ALUNOS**								
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
Ensino Básico (Situação II)	15	28	33	9	14	6	10	44	11
Ensino Superior (Situação III)	2	2	21	4	3	3	2	31	13

Fonte: Autoria própria.

É possível verificar no quadro 9 que nossa hipótese se confirmou parcialmente, pois havíamos conjecturado que os licenciandos tenderiam a escolher os argumentos baseados em deduções lógicas, no caso, de Carlos e da Helena. Em geral, a justificativa para tal escolha era porque eles descreveram *"os pensamentos mais fáceis de compreender"* (Justificativa do L4). Isso nos mostra que as motivações dos participantes eram mais baseadas na compreensão do argumento do que no nível de escolaridade que hipoteticamente seria desenvolvido. Além disso, ratificamos a conjectura de que a resposta de Helena seria a preferida, tanto num teste de Geometria Euclidiana quanto para lecionar na Educação Básica, por ser mais familiar aos participantes.

Entretanto, como ressaltamos no parágrafo anterior, a nossa hipótese foi confirmada parcialmente, pois a argumentação do Fábio que também era baseada no raciocínio dedutivo teve pouquíssima adesão, sendo o menos preferido para ser ensinado na Educação Básica. Como vimos no quadro 7, apesar de 38 estudantes (48,7% da amostra) terem validado essa argumentação, 32 participantes (41% da amostra) não apresentaram justificativas na situação I ou alegaram que o raciocínio do Fábio era complexo e gerava dúvidas. Acreditamos que esse último dado interferiu no voto dos respondentes, pois uma vez que eles não tenham compreendido muito bem o argumento apresentado, dificilmente o escolheriam.

Além destas primeiras impressões, durante a análise da situação II encontramos alguns dados interessantes, os quais descrevemos a seguir:

- Para o ensino na Educação Básica, uma resposta muito comum foi eleger o raciocínio de Bruno, o terceiro mais votado, para adquirir intuição com o uso de recortes e, posteriormente, utilizar os argumentos de Carlos ou de Helena para formalizar e demonstrar de fato que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, como sugere o seguinte fragmento, extraído do questionário do L74: “*[...]* [Bruno] *para mostrar uma forma mais simples de ver o problema, fazendo os alunos se aproximar do problema de uma maneira prática e o segundo* [Helena] *usando afirmações matemáticas verdadeiras para demonstrar que é valido para qualquer triângulo.”;*

- Verificou-se que alguns licenciandos, mesmo sendo ingressantes no curso, já possuem a preocupação de que seus futuros alunos realmente compreendam os conceitos. Isso ficou claro nas respostas dos participantes que escolheram vários tipos de argumentos, alegando que desta forma *“já daria para abranger as diferentes formas para todos entenderem”* (Justificativa do L27). O L67, por exemplo, dissertou: *“Utilizaria primeiramente na introdução rápida e intuitiva a Ana e o Edu, depois faria o experimento do Fábio e se a sala estivesse muito avançada utilizaria a do Carlos e da Helena. Para casa pediria o teste de recorte do Bruno. Utilizaria esses por causa dos tipos de alunos que existem e que não gostam da matéria tentarem ver com a intuição, só depois partiria para a formalidade e por último deixaria eles fazerem com as próprias mãos.”*;
- Na análise a *priori* da questão 1, afirmamos que ela ajudaria a compreender melhor como os licenciandos concebem os termos argumentação, prova e demonstração ao longo do questionário. No caso, ela foi importante para interpretarmos a resposta do L33, que descreveu: *“Sim. Os argumentos do Bruno, da Dani e do Edu para* ***demonstrar*** *que a afirmação é verdadeira. E as respostas do Carlos e da Helena para* ***provar*** *que a afirmação é verdadeira”*. É evidente que ele concebe esses termos de formas distintas e suas respostas na questão 1 corroboram com isso. Segundo o L33, a demonstração remete a *“um exemplo específico”*, como os raciocínios de Bruno, Dani e Edu, já a prova se refere a *“qualquer exemplo do objeto de estudo”*, como os argumentos de Carlos e Helena;
- Foi possível observar também alguns erros conceituais relacionados à noção de prova matemática, segundo a definição adotada nesta pesquisa. O L15, por exemplo, escolheu a explicação da Helena e da Dani, a qual seria válida para *“provar numericamente”*. Já o L42 optou pelo argumento da Gabi, pois o uso da fórmula $S_n = (n-2)x180°$ seria a forma mais fácil e didática para justificar a propriedade geométrica na Educação Básica. Porém ele não foi capaz de observar que essa argumentação é cíclica. Por fim, o L31, após dizer

que utilizaria primeiramente as demonstrações do Bruno, do Carlos, da Helena e do Igor, afirmou que *"por fim* [utilizaria] *o da Ana para provar que está correto"*. Ou seja, para ele as demonstrações anteriores não foram suficientes para assegurar a veracidade da afirmação;

- Além dos dados descritos no quadro 9, 5 estudantes não souberam responder ou responderam incorretamente e um participante afirmou que não escolheria nenhum dos nove argumentos, pois não os considerava adequados em termos de linguagem e clareza para serem ensinados na Educação Básica. Tanto é que esse licenciando não atribuiu nenhuma nota máxima na situação I.

E durante a análise da situação III também encontramos outros dados interessantes, os quais apresentamos a seguir:

- Como observamos no quadro 9, as argumentações de Carlos e de Helena foram disparadamente a preferência dos estudantes no âmbito acadêmico. Entretanto, apesar da resposta de Igor ter recebido praticamente a mesma quantidade de votos nas situações II e III, é possível constatar que no Ensino Superior o seu argumento ocupou o terceiro lugar com folga, visto que o quarto recebeu apenas 4 votos. Acreditamos que isso se deve ao fato de Igor ter utilizado uma retórica excessivamente algébrica, ainda que a lógica seja inconsistente. Os estudantes L2 e L68 destacaram isso, respectivamente: "*Utilizaria o método de Igor por ser um modo mais fácil de compreensão e de grau algébrica"* e *"Igor apresenta um argumento mais algébrico, sem nenhum valor para a soma, chegando no valor"*. Já o L45 afirmou que na Educação Básica as manipulações algébricas poderiam causar aversão nos alunos, mas foi a escolhida num possível teste de Geometria Euclidiana. Quanto ao L70, ele declarou que utilizaria o argumento de Carlos, Helena ou de Igor, pois todos *"são formalmente corretos"*. Além desses estudantes, o L50 também optou pela resposta do Igor, *"pois existe um rigor matemático maior na demonstração dele, onde ele define cada ângulo e generaliza o seu valor [...]"*.
- Na situação III também foi possível observar algumas noções equivocadas sobre prova matemática, como o L46 ao afirmar que *"utilizaria o* [argumento] *de Gabi, pois seria mais adequado para o nível superior"*, ou ainda como o L6 que *"usaria algo como a resposta da Dani, pois parece ser o meio mais simples de provar"*. Já o L29 utilizaria o argumento de Helena para demonstrar

a afirmação, mas mencionou também o uso da resposta de Ana para provar por exemplos. Tanto é que foram os únicos argumentos para os quais o estudante atribuiu nota 10 na situação I. Além disso, ele não concebe os termos prova e demonstração como sinônimos, conforme averiguamos na sua resposta descrita na questão 1;

- Além dos dados descritos no quadro 9, 16 estudantes não dissertaram ou responderam incorretamente e 4 participantes afirmaram que não escolheriam nenhum dos argumentos apresentados, por não serem formais o suficiente como, por exemplo, o L78 que justificou: *"Não pelo fato de estarem errados, mas pelo fato de não estarem com o formalismo necessário em uma demonstração"*. Já o L60 afirmou que "*nenhum dos argumentos serve para o âmbito geral"*, tanto é que não atribuiu nenhuma nota máxima.

4.3 ANÁLISE DA QUESTÃO 3

4.3.1 Análise a *priori* da questão 3

Como vimos no capítulo 1, uma demonstração pode assumir diferentes papéis dependendo do contexto em que está inserida. Nesta questão, o objetivo era identificar como os licenciandos relacionam o nível de escolaridade (Educação Básica e/ou Ensino Superior) com as funções da prova no âmbito da Matemática. Deste modo, solicitamos aos ingressantes que assinalassem com um "X" no quadro 10, qual seria o contexto (apenas na Matemática acadêmica, apenas na Matemática escolar, em ambas, em nenhuma) em que cada uma das seguintes funções da prova poderia ser utilizada. No caso do estudante não saber o que responder, ele poderia assinalar ainda a opção "Não Sei" (NS).

Quadro 10 - Extrato da questão 3 do questionário aplicado aos licenciandos.

(continua)

Funções da prova	Apenas na matemática acadêmica	Apenas na matemática escolar	Em ambas	Em nenhuma	NS
Validar uma afirmação					
Explicar as razões de uma afirmação ser verdadeira					
Sistematizar os vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, definições, proposições e teoremas					
Descobrir/inventar novos resultados					

Quadro 10 – Extrato da questão 3 do questionário aplicado aos licenciandos.

(continuação)

Transmitir o conhecimento matemático					
Satisfação pessoal					
Produzir um algoritmo					
Produzir um algoritmo					
Pôr fim a um processo de busca					
Ilustrar o significado de uma definição					
Ajudar a lembrar de resultados importantes					
Desenvolver o pensamento lógico					
Outra(s):					

Fonte: Autoria própria.

Observe que optamos por apresentar uma lista das principais funções da prova e solicitar que os licenciandos julgassem a opção mais adequada, a fim de identificar possíveis relações com o nível de escolaridade. Nesse sentido, por se tratar de uma questão parcialmente fechada e, por consequência, direcionar as respostas dos participantes, talvez não seja possível, apenas com ela, afirmar categoricamente qual o principal papel da demonstração no âmbito da Matemática acadêmica ou escolar, segundo as concepções dos estudantes.

Em contrapartida, com objetivos e metodologias distintas, Knuth (2002a, 2002b) foi capaz de dissertar com propriedade quais eram as funções os professores consideraram mais importantes na Matemática e na escola secundária, visto que as respostas emergiram de questões abertas durante as entrevistas semiestruturadas, tais como: "Qual o propósito de prova na Matemática?" e "Por que ensinar provas na Matemática da escola secundária?". Com relação às concepções dos professores sobre o papel da prova na Matemática, Knuth (2002a, p. 386) identificou que, para todos os 16 educadores, o principal papel era estabelecer a verdade de uma afirmação (meio de validação). Houve também outras funções vinculadas à demonstração (com suas respectivas frequências), tais como: meio de comunicação (12), de descoberta ou sistematização dos resultados (8) e de explicação (3).

Já com relação às concepções dos professores sobre o papel da demonstração no contexto da Matemática escolar, a maioria deles (13 entre 17) apontou o desenvolvimento do raciocínio lógico como sendo a principal função, de acordo com Knuth (2002b). Dez docentes consideraram a prova como uma construção social, ou seja, como um meio se comunicar matematicamente, e nesse sentido, é a própria comunidade escolar que determina quais os argumentos são aceitos ou não. Note que essa interpretação remete à definição de Balacheff

(1987), a qual adotamos nesta pesquisa. Além disso, 7 professores assinalaram a função explicativa; 4 indicaram que o papel era exibir o raciocínio dos alunos, com o intuito de avaliar o nível de compreensão deles; e outros 4 enxergaram a prova como uma oportunidade dos alunos criar/descobrir resultados matemáticos, a fim de permitir que eles "[...] se tornem produtores de conhecimentos, em vez de consumidos do conhecimento de outros." (KNUTH, 2002b, p. 81, tradução nossa).

Para concluir a análise a *priori* desta questão, apresentamos algumas ponderações sobre os itens descritos no quadro 10, à luz de uma seção proposta em Knuth (2002b), em que o autor problematiza a prova no âmbito do ensino secundário.

Inicialmente o pesquisador apresenta várias funções (verificação, explicação, comunicação, descoberta e sistematização) que a demonstração desempenha na Matemática. Com base nisso, ele afirma que apesar de terem sido propostas no âmbito da ciência, elas também podem ser abordadas com vista ao ensino secundário.

Por exemplo, Knuth (2002b, p. 65) afirma que na Matemática escolar a prova tem assumido essencialmente o papel de verificar resultados previamente conhecidos, atitude essa que pode ser uma das causas da desmotivação por parte dos alunos em elaborar justificativas. Entretanto, ele destaca que com a utilização de *softwares* de GD em algumas práticas, a finalidade de descobrir novos resultados vem ganhando espaço nas aulas de Geometria. Outro exemplo extraído do artigo é que o educador pressupõe que a maioria dos alunos concebe os resultados da Matemática escolar como independentes uns dos outros. Em vista disso, ele propõe que durante o ensino de Geometria sejam dadas oportunidades para os estudantes refletirem sobre a organização do sistema dedutivo.

Outra função que podemos transpor para a Matemática escolar é a de ilustrar o significado de uma definição. Por exemplo, o conjunto dos números racionais é definido como sendo a reunião de todos os números da forma $\frac{a}{b}$, em que $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Para ilustrar a impossibilidade da divisão por zero, podemos supor a sua validade e mostrar para aos alunos que obteríamos contradições. Acredita-se que esse tipo de discussão fornece aos estudantes uma visão de que a Matemática é uma ciência logicamente estruturada. Além disso, no capítulo 1, descrevemos outros exemplos no contexto do Ensino Básico para ajudar a lembrar de resultados importantes, pôr fim a um processo de busca e produzir um algoritmo (veja as páginas 42 e 43).

Com relação às demais funções que foram listadas no quadro 10, acreditamos que seja notória a sua utilidade na Matemática escolar, conforme problematizamos na seção 1.2, à luz de De Villiers (1990, 1999). Logo, em nossa concepção, todas elas podem ser utilizadas em ambos os contextos, tanto na Matemática acadêmica como na escolar. Evidentemente, cada contexto possui papéis que se sobressaem como, por exemplo, na Educação Básica, em que os principais são referentes à explicação (HANNA, 1990) e ao desenvolvimento do raciocínio lógico (KNUTH, 2002b). Todavia, é importante ressaltar que essa classificação foi norteada pelas nossas concepções e por isso não devem ser vistas como a "resposta correta".

4.3.2 Análise *a posteriori* da questão 3

Nesta questão o objetivo era identificar como os licenciandos relacionavam os papéis da prova no âmbito da Matemática acadêmica e/ou escolar. Após a análise dos questionários, apresentamos no quadro 11, a distribuição das escolhas feitas por eles para cada função. É importante destacar que, alguns discentes escolheram mais de uma opção num mesmo item, por isso, suas respostas foram invalidadas e que as maiores frequências se encontram em azul.

Quadro 11 - Distribuição das respostas dos licenciandos com relação aos níveis de escolaridade sobre algumas funções da prova matemática[60].

Funções da prova	Apenas na matemática acadêmica	Apenas na matemática escolar	Em ambas	Em nenhuma	NS	Em branco ou inválida	Total
Validação	10	2	**63**	0	1	2	78
Explicação	9	1	**66**	0	0	2	78
Sistematização	**56**	1	16	1	4	0	78
Descoberta	**36**	1	22	12	6	1	78
Comunicação	3	4	**69**	0	0	2	78
Satisfação pessoal	7	1	**47**	17	4	2	78
Produzir um algoritmo	**36**	1	21	8	11	1	78
Pôr fim a um processo de busca	19	6	**22**	20	10	1	78
Ilustrar uma definição	11	8	**54**	2	0	3	78
Ajudar a lembrar de resultados	5	9	**53**	4	5	2	78
Desenvolver o raciocínio	6	4	**67**	0	0	1	78

Fonte: Autoria própria.

[60] Por uma questão estética, neste quadro optamos por abreviar as funções da prova. Para consultar o original apresentado no questionário dos licenciandos veja o quadro 10.

Com base no quadro 11, observamos que nas concepções dos licenciandos, a maioria das funções da prova pode ser utilizada tanto na Matemática acadêmica como na escolar, em consonância com as concepções de Knuth (2002b), com as quais concordamos. Podemos inferir isso, uma vez que os papéis de validação, explicação, comunicação, satisfação pessoal, ilustrar o significado de uma definição, ajudar a lembrar de resultados importantes e desenvolver o pensamento lógico atingiram frequências acima de 60% da amostra.

Contudo, apesar da função “pôr fim a um processo de busca” ter apresentado a maior frequência relacionada a ambos os níveis de escolaridade, note que isso não foi um consenso entre os estudantes, visto que 20 afirmaram que não se aplica a nenhum dos contextos, 19 assinalaram o contexto da Matemática acadêmica e 10 não souberam responder. Neste sentido, a maioria dos participantes não se lembrou de certos conteúdos, tais como equações e inequações, em que muitas das vezes é necessário restringir o conjunto universo para determinar ou garantir a inexistência de soluções (veja o exemplo da página 42).

Os únicos papéis que apresentaram um predomínio em um único contexto, no caso da Matemática acadêmica, foram: a prova como meio de sistematização, de produzir um algoritmo e de descoberta. Acreditamos que tais respostas podem ser consideradas como adequadas, visto que essas funções são, de fato, mais evidentes no âmbito universitário.

O papel de sistematizar os vários resultados em um sistema dedutivo (de axiomas, definições, proposições e teoremas), por exemplo, está mais distante da Matemática abordada na Educação Básica, uma vez que atualmente o ensino de Geometria nas escolas não sugere uma abordagem axiomática. Contudo, apesar de não defendermos uma abordagem euclidiana nas aulas de Geometria, é importante que o professor problematize com seus alunos a estruturação do sistema dedutivo, conforme dissertamos na análise a *priori*, pois, muitos estudantes, concebem os resultados matemáticos como independentes uns dos outros, como, por exemplo, o conceito de semelhança e o Teorema de Tales.

Com relação ao papel de produzir um algoritmo, o próprio Van Asch (1993) que incluiu essa função em sua lista, apresenta como exemplo a demonstração do teorema que é conhecido como “Algoritmo de Euclides”, usualmente estudado no início da graduação em Matemática. Porém, esse algoritmo é o mesmo que utilizamos ao dividir dois números pelo método da chave. Evidentemente, não estamos defendendo que se demonstre esse resultado nos anos iniciais, quando a criança tem os primeiros contatos com o conceito de divisão. No entanto, a estrutura curricular do Ensino Médio prevê o ensino de polinômios, o qual necessita do método da divisão por chave. Consequentemente, acreditamos que se o professor souber argumentar a funcionalidade do algoritmo de Euclides, isso favorecerá a compreensão da divisão polinomial por parte dos estudantes, pois não se limitarão a ritos procedimentais, como usualmente é observado. Além disso, note no quadro 11 que esta foi a função com o maior índice de estudantes que não souberam responder.

Assim como as duas funções anteriores, a de descobrir/inventar novos resultados também tende a ser mais notável no âmbito acadêmico, uma vez que se idealiza que na Universidade residem os produtores de conhecimento e nas escolas estão apenas os que reproduzem. Contudo, é importante que os futuros professores concebam essa função também na Matemática escolar, pois, mais interessante do que apresentar um resultado ao aluno, é deixá-lo descobrir por si mesmo. Como já descrevemos anteriormente, uma possibilidade é a utilização de ambientes de GD como, por exemplo, o Teorema de Varignon (veja a página 50), em que a partir da exploração da figura no *software*, o estudante poderá elaborar suas próprias conjecturas e obter conclusões, visando a descoberta de "novos" resultados.

É importante destacar que na opção "Outras" descrita na questão 3, identificamos três "novos" papéis sugeridos por três licenciandos: fazer com que não tome apenas como verdade, formalidade matemática e maior entendimento da matéria. Entretanto, acreditamos que eles têm correlação, respectivamente, com as seguintes funções da prova listadas nesta mesma questão: validação, sistematização e explicação.

Deste modo, com base nos índices apresentados nas duas primeiras colunas do quadro 11, podemos inferir que, de modo geral, se uma dada função é considerada útil no contexto da Matemática escolar, ela também se aplica ao âmbito universitário, uma vez que, ao somar as frequências das opções "apenas na matemática acadêmica" e "em ambas", o percentual é maior do que 50% em todos os papéis da prova. Por outro lado, não é possível afirmar a recíproca.

4.4 ANÁLISE DA QUESTÃO 4

4.4.1 Análise a *priori* da questão 4

A presente questão foi inspirada na tarefa 14 sobre as funções da demonstração proposta na tese de Ordem (2015, p. 338) e elaborada com base na literatura. Numa escala[61] de 1 (Discordo Totalmente – DT) a 5 (Concordo Totalmente – CT), os licenciandos deveriam avaliar qual o grau de concordância com cada uma das afirmações expressas no quadro 12. No caso de não saber o que responder, o estudante poderia assinalar a opção "Não Sei" (NS).

Quadro 12 - Extrato da questão 4 do questionário aplicado aos licenciandos[62].

		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**NS**
a.	Para provar que uma afirmação é falsa, basta exibir um contraexemplo.						
b.	É possível provar uma propriedade matemática por meio de ambientes de geometria dinâmica como o *GeoGebra*.						
c.	Para demonstrar que um resultado é verdadeiro, podemos utilizar como argumentos a explicação do professor ou a exibição num livro.						
d.	A verificação empírica de uma conjectura por meio de muitos exemplos constitui uma prova matemática.						
e.	Ao provar que um enunciado geral é verdadeiro, segue que todos os casos específicos também são válidos.						
f.	Só constitui uma prova matemática quando se utiliza o processo lógico dedutivo baseado em um sistema axiomático (axiomas, definições, proposições e teoremas).						
g.	É possível utilizar apenas um desenho para provar um resultado matemático.						
h.	Após mostrar que uma hipótese é verdadeira, é preciso verificar com alguns exemplos para ter certeza.						
i.	Apesar de não serem considerados argumentos válidos em uma demonstração, utilizar figuras e buscar exemplos auxilia na investigação e fornece ideias para executá-la.						
j.	Ao provar uma sentença matemática não é necessário verificar exemplos particulares.						
k.	Na Educação Básica, os professores devem priorizar as provas que explicam em relação às provas que apenas confirmam o resultado.						

Fonte: Autoria própria.

Harel e Sowder (1998) chamam a atenção para a problemática da prova por exemplo(s), na qual os estudantes tendem a validar suas conjecturas por meio de verificações empíricas, sendo que, muitas das vezes, utilizam apenas um simples exemplo. Isso também foi constatado nas pesquisas de Aguilar Junior (2012) e Caldato, Utsumi e Nasser (2017), em que se verificam a predominância do empirismo ingênuo nas justificativas dos discentes. Em virtude disso, durante os episódios do *teaching experiments*, na tentativa de mostrar aos estudantes a limitação de métodos indutivos, Harel e Sowder observaram uma confusão entre

[61] Apesar de não explicitarmos no enunciado da questão, para a análise dos questionários respondidos adotamos os demais valores desta escala como sendo: 2 (Discordo), 3 (Indiferente) e 4 (Concordo).
[62] A identificação das afirmações por itens é apenas para facilitar a análise, uma vez que não constava no questionário aplicado com os licenciandos.

a possibilidade da prova por contraexemplo com a impossibilidade da prova por exemplo(s). Por esta razão, eles afirmam que os alunos raramente utilizam provas por contraexemplo, por não se sentirem convencidos da sua validade. O texto expõe ainda que o mesmo ocorre com provas por contradição. Apesar dessa problemática, os autores ressaltam que a verificação empírica pode ajudar a gerar ideias de prova ou fornecer *insights* sobre a validade de uma conjectura.

Deste modo, a questão 4 tem por objetivo investigar o grau de concordância sobre algumas afirmações relacionadas à prova matemática, tais como: o lugar de argumentos baseados em exemplos e contraexemplos; o papel de representações e ambientes dinâmicos na busca de validar uma conjectura; a aceitação de argumentos de autoridade baseados na explicação do professor ou na exibição de um livro; a problemática entre provas que explicam e provas que provam.

A seguir, apresentamos alguns comentários relativos às afirmações descritas nos questionários dos licenciandos, mencionando qual seria o grau de concordância mais coerente para cada sentença, segundo a nossa opinião:

a. Em sua pesquisa, Harel e Sowder (1998, p. 253) observaram que quando o estudante encontra um contraexemplo para uma dada afirmação, em sua concepção, ela ainda continua sendo válida, pois consiste em apenas uma exceção. Entretanto, ao exibir um contraexemplo para qualquer sentença matemática, já é suficiente para garantirmos que ela é falsa. Portanto, concordamos totalmente e o grau adequado é (5);

b. Em consonância com Hanna (2000) e segundo as nossas concepções, a experimentação de uma propriedade em ambientes dinâmicos como o *GeoGebra*, não substitui a necessidade de demonstrá-la. Por isso, julgamos que o grau adequado é (1). Segundo Garnica (2002, p. 95), a utilização da informática para desenvolver provas é uma questão altamente polêmica. Contudo, acreditamos que tais ferramentas podem ser úteis no processo de investigação, auxiliando o estudante a elaborar uma demonstração;

c. Quando uma sentença é ratificada pelo uso de argumento de autoridade, seja pela explicação do professor ou exibição num livro, fazemos menção ao esquema de prova autoritário segundo Harel e Sowder (1998). Entretanto, segundo as definições adotadas nesta pesquisa, esse tipo de argumento não consiste numa demonstração. Logo, discordamos totalmente, atribuindo grau (1);

d. O raciocínio empírico pode até ser qualificado como provas pragmáticas de acordo com Balacheff (1988). Entretanto, como o próprio autor faz menção, só são assim denominadas, pois são reconhecidas como tais pelos alunos, e não por consistir efetivamente numa prova matemática segundo a definição adotada na subseção 1.1.3. Portanto, exceto os contraexemplos, não existem verificações empíricas passíveis de validar uma conjectura matemática. Por esta razão, discordamos totalmente e atribuímos grau (1);

e. Uma vez que o enunciado está demonstrado para o caso geral, segue imediatamente que todos os casos específicos são válidos. Por exemplo, se provarmos que certa propriedade é válida para todos os quadriláteros, segue diretamente que também é válida para todos os quadrados, sem a necessidade de construir uma nova demonstração. Portanto, concordamos totalmente e o grau adequado é (5);

f. Segundo a definição de Balacheff (1987) adotada nesta pesquisa, uma prova matemática (ou demonstração) é uma sequência de enunciados seguindo determinadas regras: um enunciado pode ser assumido como verdadeiro (chamado de axioma) ou é deduzido daqueles que o precedem. Deste modo, se torna possível sistematizar vários resultados num sistema axiomático (axiomas, definições, proposições e teoremas) baseado em deduções lógicas. Contudo, consideramos que o termo “só” seja muito restritivo, pois, não se enquadram nesta definição as provas por absurdo ou por contraexemplos. Por esta razão, consideramos que o grau adequado é (3);

g. Com base na subseção 1.1.5, discordamos que **apenas** com um desenho seja possível provar um resultado matemático, devido à imprecisão ou aos limites de generalização. Portanto, em nossa concepção o grau adequado é (1). Contudo, nesta pesquisa, admitimos a possibilidade de uma representação visual ser aceita na validação de uma conjectura, desde que satisfaça as três características essenciais do esquema de prova transformacional (generalidade, pensamento operacional e dedução lógica). Em Nelsen (1993) é possível encontrar várias representações que remetem a um raciocínio lógico dedutivo como, por exemplo, a prova explicativa e visual para a soma dos n primeiros números ímpares ilustrada na figura 1;

h. Ao verificar que uma conjectura ou uma hipótese é válida por meio de uma demonstração, devido ao seu caráter genérico, é dispensável qualquer tipo de verificação empírica. Portanto, discordamos totalmente e o grau adequado é (1);

i. Embora o raciocínio empírico e o uso de quaisquer figuras não caracterizem argumentos suficientes para validar uma sentença matemática, certamente utilizá-los durante o processo de prova auxilia na investigação, fornece *insights* sobre a veracidade e pode até proporcionar ideias para construir uma demonstração. Portanto, concordamos totalmente e atribuímos grau (5);

j. A formulação desta afirmativa contradiz o que foi descrito no item (h)**.** Logo, o grau adequado é (5);

k. Em consonância com Hanna (1995), acreditamos que os professores, especialmente da Educação Básica, devem optar, sempre que possível, pelas provas explicativas em relação àquelas que apenas confirmam o resultado. Por serem baseadas nas propriedades que justificam as razões do resultado ser verdadeiro, as demonstrações explicativas tendem a ser mais convincentes aos alunos. Por isso, atribuímos grau (5).

4.4.2 Análise *a posteriori* da questão 4

Recordemos que o objetivo desta questão era investigar o grau de concordância sobre algumas afirmações concernentes à prova matemática. Após a análise dos questionários que foram respondidos pelos licenciandos, sintetizamos as suas escolhas no quadro 13, o qual apresenta a distribuição das respostas fornecidas por eles com relação aos níveis de concordância para as onze afirmações descritas nesta questão. Contudo, ressaltamos que foram consideradas as respostas de 76 estudantes, visto que os outros dois preencheram incorretamente o quadro e foram invalidadas.

Em cada linha do quadro 13 colocamos em azul (claro e mais escuro) o que foi concordante com o grau que sugerimos como adequado na análise a *priori*. Respectivamente, em vermelho (claro e mais escuro) o que foi discordante da nossa visão. Por exemplo, no item (a) concordamos totalmente que ao encontrarmos um contraexemplo para uma dada afirmativa, já é suficiente para garantirmos que ela é falsa e, por isso, atribuímos grau (5). Logo, os graus 4 e 5 estão em azul claro e mais escuro, respectivamente. Assim como os graus 2 e 1 estão em vermelho claro e mais escuro, respectivamente. Optamos ainda por deixar o grau (3) em amarelo, pois representa o público não concordou e nem discordou da afirmação (ponto neutro).

Quadro 13 - Distribuição das respostas dos licenciandos com relação aos níveis de concordância sobre algumas afirmações relacionadas à prova matemática.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**NS**	**Total**
a. Para provar que uma afirmação é falsa, basta exibir um contraexemplo.	7	6	13	**16**	**33**	1	*76*
b. É possível provar uma propriedade matemática por meio de ambientes de geometria dinâmica como o *GeoGebra*.	7	4	10	**19**	**17**	19	*76*
c. Para demonstrar que um resultado é verdadeiro, podemos utilizar como argumentos a explicação do professor ou a exibição num livro.	10	12	17	**22**	**13**	2	*76*
d. A verificação empírica de uma conjectura por meio de muitos exemplos constitui uma prova matemática.	**22**	**14**	11	10	5	14	*76*
e. Ao provar que um enunciado geral é verdadeiro, segue que todos os casos específicos também são válidos[63].	12	8	15	**16**	**21**	3	*75*
f. Só constitui uma prova matemática quando se utiliza o processo lógico dedutivo baseado em um sistema axiomático (axiomas, definições, proposições e teoremas).	3	3	18	**17**	**26**	9	*76*
g. É possível utilizar apenas um desenho para provar um resultado matemático.	**35**	**11**	18	8	3	1	*76*
h. Após mostrar que uma hipótese é verdadeira, é preciso verificar com alguns exemplos para ter certeza.	18	12	9	**10**	**26**	1	*76*
i. Apesar de não serem considerados argumentos válidos em uma demonstração, utilizar figuras e buscar exemplos auxilia na investigação e fornece ideias para executá-la.	1	2	5	**15**	**53**	0	*76*
j. Ao provar uma sentença matemática não é necessário verificar exemplos particulares.	**34**	**17**	10	7	6	2	*76*
k. Na Educação Básica, os professores devem priorizar as provas que explicam em relação às provas que apenas confirmam o resultado.	8	3	17	**18**	**26**	4	*76*

Fonte: Autoria própria.

Para efeitos de análise, a fim de facilitar a escrita das considerações, faremos a junção das opções (1) e (2) para referir à ideia de discordância e a junção das opções (4) e (5) para remeter à ideia de concordância. Até porque, acreditamos que a diferença entre Concordo e Concordo Totalmente (ou Discordo e Discordo Totalmente) seja na ênfase concebida pelo sujeito para uma dada afirmação, mas ainda assim ambas fazem menção ao ato de concordar (ou discordar).

[63] Um dos licenciandos ingressantes não forneceu resposta para o item (e).

A seguir dissertamos alguns comentários sobre as afirmações mencionadas na questão 4, com base nos dados apresentados no quadro 13:

- Apesar da observação feita por Harel e Sowder (1998), na qual os estudantes tendem a confundir a possibilidade da prova por contraexemplo com a impossibilidade da prova por exemplo(s), os itens (a) e (d) evidenciaram, respectivamente, que parte significativa dos participantes desta pesquisa possuem clareza com relação a essa problemática, já que 49 licenciandos (62,8% da amostra) concordaram que o uso de contraexemplos é suficiente para garantir que uma afirmação é falsa e quase a metade da amostra (36 participantes) discordou que a verificação empírica de uma conjectura constitui uma prova matemática. Entretanto, destacamos que a segunda opção mais escolhida no item (d) foi (NS), em que 14 sujeitos (18% da amostra) não souberam o que responder nesta afirmativa;
- Com relação ao item (c), que faz menção ao uso de argumentos de autoridade para ratificar uma propriedade, 35 licenciandos (44,9% da amostra) concordaram que é possível utilizar a explicação do professor ou a exibição num livro para demonstrar que um resultado é verdadeiro, reportando ao esquema de prova autoritário de Harel e Sowder (1998). Entretanto, segundo as definições adotadas, esse tipo de argumento não consiste numa prova matemática. Por outro lado, 22 estudantes (28,2% da amostra) discordaram desta afirmação. Além disso, é possível observar certa incerteza sobre a possibilidade de utilizar argumentos de autoridade para validar um resultado, pois a segunda opção mais escolhida no item (c) foi a (3), a qual representa 21,8% da amostra;
- No item (e), 37 participantes (47,4% da amostra) concordaram que ao provar que um enunciado geral é verdadeiro, segue imediatamente que todos os casos específicos também são válidos, o que está de acordo com a noção de demonstração adotada neste estudo. É possível observar ainda que 20 estudantes (25,6% da amostra) discordaram desta afirmação e que 15 discentes (19,2% da amostra) não concordaram e nem discordaram;
- Em consonância com as nossas concepções, observou-se no item (g) que a maioria dos licenciandos (59% da amostra) discordou que um simples desenho é suficiente para demonstrar um resultado matemático. No entanto, quando

foram questionados no item (b) sobre a possibilidade de provar uma propriedade por meio de ambientes de GD como o *GeoGebra*, 46,2% da amostra (36 estudantes) concordou com tal afirmação. Isso nos parece contraditório, pois ambos fazem menção a argumentos unicamente visuais, sendo que a principal diferença entre eles é o caráter dinâmico que os *softwares* de GD oferecem aos usuários. Ainda com relação ao item (b), observou-se que foi a afirmação que mais apareceu a opção (NS), assinalada 19 vezes. Para esse fato temos duas conjecturas: a primeira é que os licenciandos não possuem conhecimentos sobre o que seriam os *softwares* de GD; e a segunda, que julgamos ser mais provável, é que tal assunto nunca foi problematizado com eles, isto é, o quão aceitável é uma demonstração que utiliza a tecnologia como recurso, como o famoso caso do Teorema das Quatro Cores[64], que foi demonstrado pela primeira vez em 1976, por Appel e Haken, utilizando um computador e que até hoje não possui uma demonstração sem auxílio da tecnologia;

- Verificou-se no item (f) que 43 licenciandos (55,1% da amostra) concordaram que **somente** constitui uma prova matemática quando se utiliza o processo dedutivo baseado num sistema axiomático, excluindo a possibilidade de outros tipos de demonstração como, por exemplo, por redução ao absurdo ou por contraexemplo. Entretanto, dentre esses estudantes, 16 também concordaram que era possível provar uma propriedade por meio de ambientes de GD e 20 também concordaram que era possível demonstrar um resultado utilizando argumentos de autoridade, o que resulta numa lógica contraditória, permitindo inferir que: como a amostra foi constituída por ingressantes, muitos deles não dominam o significado de "sistema lógico dedutivo" e, consequentemente, a concepção de prova matemática que eles possuem está longe das definições adotadas nesta pesquisa. Por outro lado, apenas 18 estudantes (23% da amostra) atribuíram grau (3) no item (f), o que seria a resposta adequada segundo a nossa concepção e apenas 6 discentes (7,6% da amostra) discordaram desta afirmação;
- Conforme se observou nos itens (d) e (g), o maior percentual dos licenciandos afirmou corretamente que não é possível provar uma sentença matemática por

[64] Para maiores informações, consulte Souza (2001).

meio de exemplos ou de simples desenhos. Entretanto, parte significativa da amostra (68 estudantes, o maior índice de aceitação) concordou que mesmo não sendo considerados argumentos válidos, o uso de figuras e exemplos auxilia na investigação e fornece ideias para construir uma demonstração, conforme assinalava o item (i);

- No item (k), a maioria dos licenciandos (56,4% da amostra) concordou com Hanna (1990), de que na Educação Básica os professores devem priorizar as provas que explicam em relação às provas que apenas confirmam o resultado. Apenas 11 estudantes (14,1% da amostra) discordaram desta afirmação;
- Por fim, o resultado que mais nos impressionou ficou por conta dos itens (h) e (j). Com base na afirmação (j), parte significativa dos licenciandos (65,4% da amostra) discordou que ao provar uma sentença matemática não é necessário verificar exemplos particulares, ou seja, para 51 estudantes, a demonstração de uma conjectura tem que ser sucedida por uma verificação empírica, a fim de assegurar a sua veracidade. E na afirmação (h) que contradizia o item (j), isso foi ratificado, pois quase metade da amostra (36 participantes) concordou que após validar genericamente uma hipótese, é preciso ainda verificar com alguns exemplos para ter certeza. É bem verdade que 30 licenciandos (38,5% da amostra) também discordaram desta afirmação. No entanto, isso não altera o fato de não ser consensual entre os ingressantes de que uma demonstração não requer comprovação empírica.

Para finalizarmos a análise desta questão, propomos também um olhar mais global sobre os dados apresentados no quadro 13. Ao invés de fazermos as junções das opções (1) e (2) para nos referirmos à ideia de discordância e das opções (4) e (5) para remeter à ideia de concordância, atribuiremos valores a essas opções, conforme observado em várias pesquisas desenvolvidas no grupo Psicologia da Educação Matemática[65] (PSIEM), as quais estão voltadas para a análise das crenças, valores e atitudes em relação à Matemática e à Estatística. As pontuações atribuídas aos itens da escala foram: Discordo Totalmente (DT) = 1 ponto; Discordo (D) = 2 pontos; Não Concordo e Nem Discordo = 3 pontos; Concordo (C) = 4 pontos; Concordo Totalmente (CT) = 5 pontos. Em vista disso, elaboramos o quadro 14, que apresenta algumas medidas estatísticas das pontuações atribuídas aos graus de concordância em relação às onze afirmações descritas na questão 4.

---

[65] Para maiores informações, consulte: <http://psiem.net/home>. Acesso em: 26 ago. 2018.

Quadro 14 - Medidas estatísticas dos graus de concordância atribuídos pelos licenciandos às afirmações concernentes à prova matemática (questão 4) [66].

MEDIDAS ESTATÍSTICAS	AFIRMAÇÕES										
	(a)	**(b)**	**(c)**	**(d)**	**(e)**	**(f)**	**(g)**	**(h)**	**(i)**	**(j)**	**(k)**
Valor Mínimo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1º quartil	3	3	2	1	2	3	1	2	4	1	3
Mediana (ou 2º quartil)	4	4	3	2	4	4	2	3	5	2	4
3º quartil	5	5	4	3	5	5	3	5	5	3	5
Valor Máximo	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Média aritmética	3,8	3,6	3,2	2,4	3,4	3,9	2,1	3,2	4,5	2,1	3,7
Desvio-padrão	1,3	1,3	1,3	1,3	1,4	1,1	1,2	1,6	0,8	1,3	1,3

Fonte: Autoria própria.

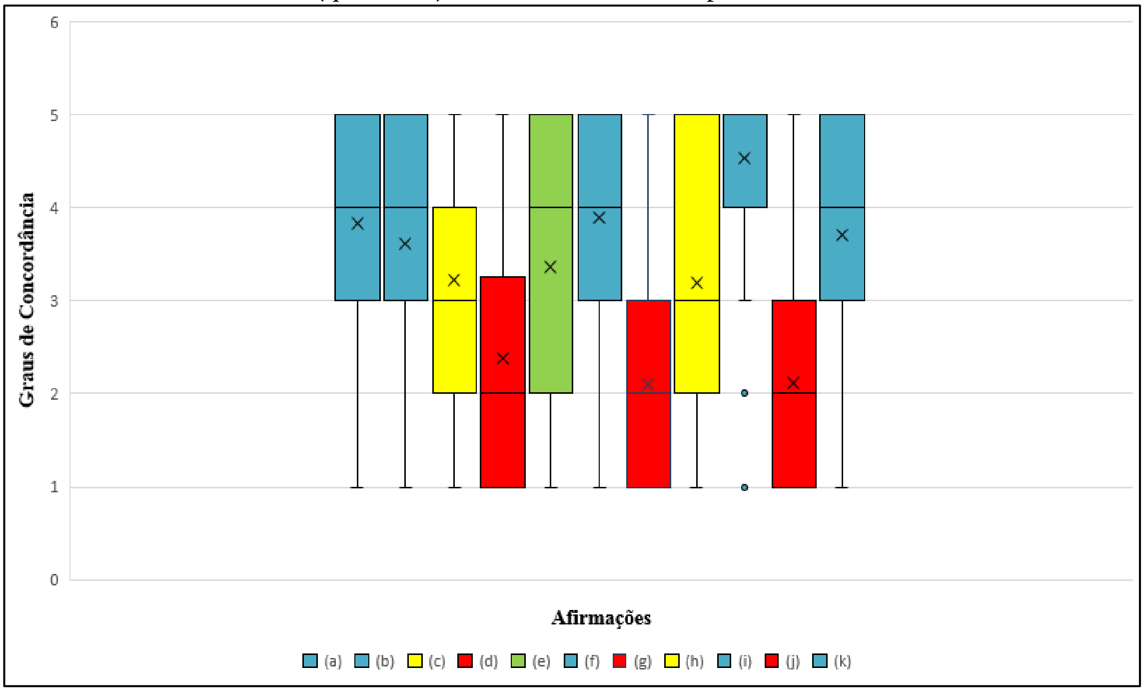
As cinco primeiras medidas estatísticas (valor mínimo, 1º quartil, mediana ou 2º quartil, 3º quartil e valor máximo) do quadro 14 foram calculadas para elaborarmos um gráfico do tipo *boxplot* (gráfico de caixa), o qual nos permitiu uma melhor visualização sob os níveis de concordância, para cada uma das onze afirmações. Este tipo de diagrama é utilizado para avaliar a distribuição empírica dos dados e foi construído com o auxílio do *software* Microsoft Excel. As “caixas” do gráfico ilustrado na figura 30 mostram o intervalo que contém os 50% dos valores centrais dos dados (entre o primeiro e o terceiro quartil), sendo que a mediana é demarcada com uma linha central e a média aritmética é marcada com um “x”. As linhas acima e/ou abaixo das caixas indicam a variabilidade fora do quartil superior e do quartil inferior, respectivamente. Além disso, os valores discrepantes (também chamados de *outliers*) foram plotados como pontos individuais.

Tendo em vista que o ponto médio da escala é 3, todas as afirmações em que a média ficou acima de 3, evidenciam uma tendência de concordância. Por outro lado, todas as afirmações em que a média ficou abaixo de 3, mostram uma tendência de discordância. Deste modo, no gráfico *boxplot* (figura 30) colocamos em azul as “caixas” que tiveram os valores centrais acima 3. Em vermelho estão as “caixas” que apresentaram os valores centrais abaixo de 3. Em verde está a “caixa” que teve os valores centrais compreendidos entre 3 e 4, a qual está mais inclinada à tendência de concordância. E em amarelo estão as “caixas” que tiveram

[66] Para a elaboração do quadro 14 não foram considerados os estudantes que assinalaram a opção NS (Não sei). Os cálculos das medidas estatísticas foram realizados no *software* Microsoft Excel, a partir do somatório das pontuações atribuídas aos graus de concordância para cada uma das onze afirmações descritas na questão 4. Além disso, em cada afirmação a quantidade de respondentes foi variável, pois levamos em consideração somente os que assinalaram um dos cinco graus de concordância possíveis (Discordo Totalmente a Concordo Totalmente).

os valores centrais compreendidos entre 2 e 4, nas quais não é possível observar uma tendência de concordância ou de discordância.

Figura 30 - *Boxplot* dos graus de concordância em relação às afirmativas sobre a prova matemática (questão 4), de acordo com as respostas dos licenciandos.



Fonte: Autoria própria.

Ao interpretar o gráfico ilustrado na figura 30, foi possível observar que ele reforça as nossas considerações descritas com base no quadro 13. Adotando a reta que passa pelo grau 3 (ponto médio da escala) como a linha tênue entre a noção de concordância e de discordância, é possível constatar no gráfico quatro tendências:

- Os itens (a), (b), (f), (i) e (k), os quais dizem respeito, respectivamente, à possibilidade de provas por contraexemplos, à possibilidade de demonstração em ambientes de GD, à caracterização da prova matemática pelo processo lógico dedutivo, à possibilidade de utilizar figuras e exemplos para auxiliar na elaboração de uma demonstração e à utilização de provas explicativas na Educação Básica, evidenciam uma tendência de concordância por parte dos licenciandos. É possível afirmar isso, pois em todos esses itens a média e a mediana estão acima do ponto médio da escala. Além disso, conforme já havíamos destacado, a afirmação descrita no item (i) foi a de maior índice de concordância entre os estudantes, visto que apresentou a menor variabilidade;
- Os itens (d), (g) e (j), os quais dizem respeito, respectivamente, à verificação empírica consistir numa prova matemática, à utilização de um mero desenho

como meio de demonstrar um resultado e à desnecessidade de verificação numérica quando se prova uma conjectura, evidenciam uma tendência de discordância por parte dos licenciandos. É possível afirmar isso, pois em todos esses itens a média e a mediana estão abaixo do ponto médio da escala;

- Os itens (c) e (h), os quais dizem respeito, respectivamente, à possibilidade de utilizar argumentos de autoridade para demonstrar um resultado matemático e à necessidade de verificação numérica após provar uma conjectura, apresentaram uma média aritmética muito próxima do ponto médio da escala e ambos tiveram a mediana igual a 3. Isso indica que a amostra ficou dividida pela metade, entre os que concordaram e os que discordaram com tais itens. A única diferença entre ambos é com relação ao tamanho das "caixas", visto que o item (h) foi mais heterogêneo quando comparado com o item (c), por apresentar um maior desvio-padrão (veja o quadro 14). Logo, os dados são inconclusivos, visto que não é possível observar uma tendência de concordância ou de discordância nesses itens;
- Apesar do item (e), o qual afirma que uma demonstração garante que todos os casos particulares são válidos, não ser consensual entre os estudantes, uma vez que a "caixa" cruza a linha tênue, observe que essa afirmação tende a se aproximar mais da noção de concordância. É possível afirmar isso, pois a média aritmética e a mediana estão acima do ponto médio da escala, ainda que o desvio-padrão tenha sido o segundo maior do quadro 14.

4.5 ANÁLISE DA QUESTÃO 5

4.5.1 Análise a *priori* da questão 5

A quinta questão do questionário foi retirada e adaptada do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) do ano 2008, o qual consiste em um dos instrumentos de avaliação para estudantes do Ensino Superior. O exame é obrigatório e ocorre anualmente, sendo que a cada três anos, o Ministério da Educação (MEC) aplica a prova para um determinado grupo de cursos, com o objetivo de avaliar e acompanhar o processo de aprendizagem e o desempenho dos discentes na graduação. Porém, não são todos que fazem esta prova. O exame incluía dois grupos de estudantes por amostragem, os quais se encontravam em momentos distintos da graduação: um grupo, considerado ingressante, àqueles que tinham iniciado o respectivo curso no ano da aplicação; e outro, considerado concluinte, àqueles que tenham cumprido pelo menos 80% da carga horária mínima do currículo do curso da IES.

Observamos que na época, ambos os grupos eram submetidos à mesma prova. Atualmente, o ENADE é aplicado apenas aos concluintes, e as notas do ENEM são usadas para avaliar o desempenho dos ingressantes no Ensino Superior. Esse exame é composto de itens de múltipla escolha e de questões discursivas, tanto para a Licenciatura, quanto para o Bacharelado.

Na figura 31, apresentamos na íntegra a questão discursiva 40 de componente específico do curso de Licenciatura em Matemática presente no exame em 2008:

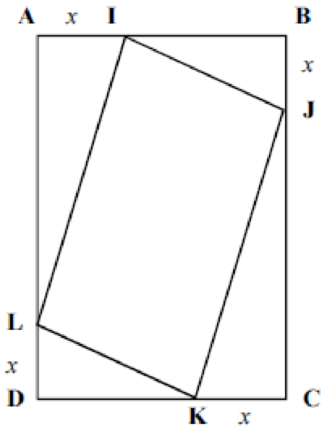
Figura 31 - Questão discursiva 40 do ENADE/2008.

No retângulo $ABCD$ ao lado, o lado AB mede 7 cm, e o lado AD mede 9 cm. Os pontos I, J, K e L foram marcados sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, de modo que os segmentos AI, BJ, CK e DL são congruentes.

a) Demonstre que o quadrilátero $IJKL$ é um paralelogramo. (valor: 3,0 pontos)

b) Escreva a função que fornece a área do paralelogramo $IJKL$ em função de x e determine, caso existam, seus pontos de máximo e mínimo. (valor: 4,0 pontos)

c) Na resolução desse problema, que conceitos matemáticos podem ser explorados com alunos do ensino fundamental e do ensino médio? (valor: 3,0 pontos)



Fonte: Brasil (2008a, p. 17).

Esta questão não foi escolhida aleatoriamente. A motivação em colocá-la no questionário, mesmo que apenas o item (a), é porque ela poderia fornecer um resultado interessante para o nosso estudo. Com base no relatório do ENADE/2008 da área de Matemática, a maioria dos ingressantes deixou a questão 40 em branco ou obteve nota zero (67,4% e 9,2%, respectivamente), visto que a mediana foi inferior à média, como se pode observar na tabela 9.

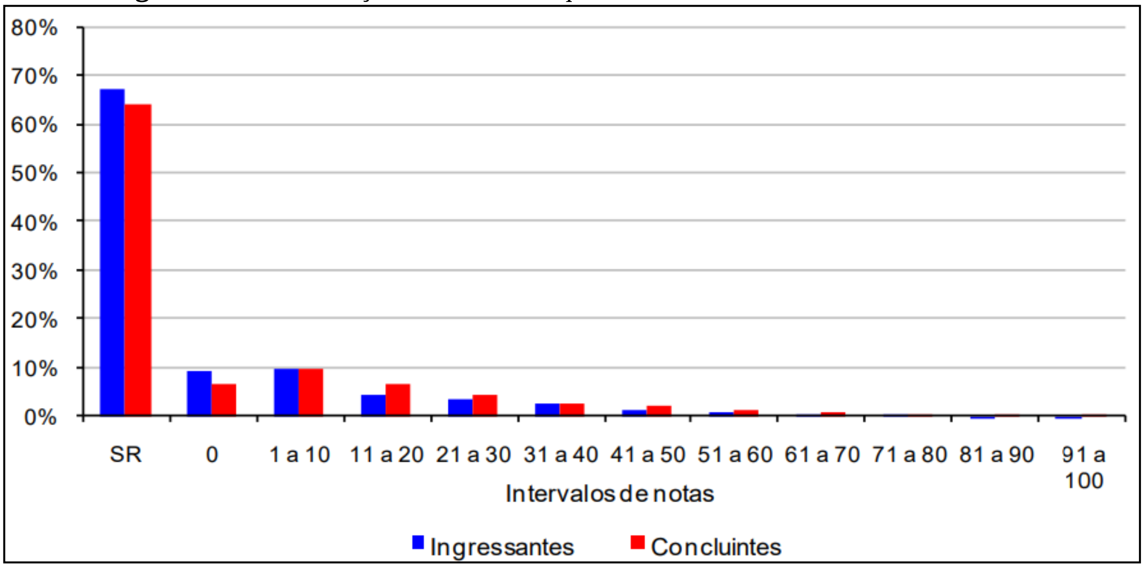
Tabela 9 - Estatísticas básicas da questão discursiva 40 de componente específico do curso de Licenciatura em Matemática do ENADE/2008, por grupo de estudantes.

Estatísticas	Total	Grupo	
		Ingressantes	Concluintes
Presentes	19.322	9.255	10.067
Média	6,5	5,4	7,8
Erro-padrão da média	0,1	0,1	0,1
Desvio-padrão	14,6	12,6	16,5
Nota mínima	0	0	0
Mediana	0	0	0
Nota máxima	100	100	100

Fonte: Brasil (2008b, p. 79).

Entre os estudantes ingressantes que pontuaram, é possível verificar na figura 32, que o maior percentual (9,7%) de notas foi no intervalo de 1 a 10 pontos e apenas 2% deles alcançaram notas superiores a 51 pontos. Esses dados nos surpreenderam, uma vez que havia a oportunidade de não zerar a questão respondendo ao item (c), indicando conceitos matemáticos usados na resolução da questão, quando poderiam ser citados, entre outros, o Teorema de Pitágoras, congruência de triângulos, comparação de ângulos, propriedades dos quadriláteros e o estudo do gráfico da função quadrática.

Figura 32 - Distribuição das notas da questão discursiva 40 do ENADE/2008.



Fonte: Brasil (2008b, p. 80).

É interessante destacar ainda que a maioria dos concluintes não respondeu à questão ou obteve nota zero (64,6% e 6,7%, respectivamente). Dentre os que pontuaram, o maior percentual (9,7%) de notas também foi de 1 a 10 pontos e somente 4% deles alcançaram notas superiores a 51 pontos, conforme se nota na figura 32.

Deste modo, é possível constatar na tabela 9 e na figura 32, que a variabilidade entre ambos os grupos foi similar, especialmente com base nos desvios-padrão. Logo, o desempenho médio dos concluintes foi muito semelhante ao dos ingressantes, fato esse que nos chamou bastante a atenção.

Nesta questão, a nossa hipótese era de que obteríamos resultados e dados similares aos que foram descritos no relatório do ENADE/2008 para os sujeitos pesquisados, ou seja, que a maioria dos licenciandos deixaria a questão em branco ou não conseguiria apresentar uma resposta coerente para o problema proposto.

Ainda com base nesse relatório, o texto descreve alguns comentários relativos à correção da questão 40. A citação a seguir evidencia os principais erros cometidos pelos alunos:

> Alguns estudantes confundiram o conceito de semelhança com o de congruência de triângulos e consideraram que um quadrilátero que possui apenas um par de lados opostos congruentes é um paralelogramo. Outros estudantes consideraram que um quadrilátero cujos pares de lados opostos são congruentes é retângulo. (BRASIL, 2008b, p. 80).

Durante a análise a *posteriori* investigamos também se esses erros estiveram presentes nas respostas dos sujeitos que constituíram a nossa amostra.

A questão 5 foi o primeiro exercício puramente matemático presente no questionário. Ressaltamos novamente que apenas o item (a) da questão 40 foi solicitado. No entanto, optamos por reescrevê-lo da seguinte forma: Mostre que o quadrilátero $IJKL$ é um paralelogramo. A preferência em utilizar a expressão “mostre que” ao invés de “demonstre que”, é porque não queríamos influenciar o licenciando a pensar que a solução, necessariamente, era uma demonstração. O uso de tal expressão, assim como “prove que”, poderia ter um efeito negativo no desempenho do estudante, por acreditar, por exemplo, que não seria capaz de elaborar uma prova e/ou demonstração. Além disso, poderíamos comprometer as resoluções dos licenciandos que diferenciaram “prova” e “demonstração” na questão 1.

Com efeito, essa discussão está norteada pelos objetivos específicos deste estudo, pois queríamos investigar quais eram os argumentos utilizados pelos licenciandos para validar certas conjecturas. Na questão 5, em particular, o intuito era identificar como eles legitimavam uma afirmação inserida no contexto da Geometria e que poderia ser também problematizada no âmbito da Educação Básica. É importante destacar que a partir dessa identificação, foi possível criar as categorias de análise, as quais emergiram durante o estudo dos questionários respondidos pelos licenciandos.

A seguir descrevemos o padrão de resposta esperado para essa questão e sugerido pelo próprio ENADE/2008:

> Para demonstrar que IJKL é um paralelogramo o estudante pode mostrar que os triângulos IBJ e KDL são congruentes; da mesma forma o triângulo IAL é congruente ao triângulo KCJ. Em seguida, **usa-se a propriedade dos paralelogramos:** um quadrilátero com lados opostos congruentes é um paralelogramo. Outra forma é mostrar pela definição identificando os ângulos... (BRASIL, 2008c, p. 2, grifo nosso).

4.5.2 Análise a *posteriori* da questão 5

Recordemos que o objetivo desta questão era identificar os argumentos utilizados pelos licenciandos para validar uma afirmação geométrica. Em particular, eles deveriam mostrar que o quadrilátero $IJKL$ é um paralelogramo (veja a figura 31). Neste estudo, definimos um paralelogramo como sendo um quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos e, consequentemente, é possível provar por congruência de triângulos e ângulos alternos internos a seguintes propriedades: um quadrilátero com lados ou ângulos opostos congruentes é um paralelogramo. Essas propriedades estiveram presentes nas resoluções de vários licenciandos, conforme se observa no quadro 15. Contudo, é importante mencionar que tais propriedades são equivalentes à nossa conceituação, pois, tudo depende do modo como se define um paralelogramo. Assim sendo, consideramos como corretas as respostas dos licenciandos que não justificaram essas propriedades, após mostrar corretamente a congruência entre os triângulos, uma vez que eles poderiam adotá-las como definição de paralelogramo ou como simplesmente utilizá-las, conforme sugere o padrão de resposta descrito na análise a *priori*.

Com base nisso, apresentamos no quadro 15, os tipos de respostas observadas nas resoluções dos licenciandos, os quais identificamos durante a análise dos questionários:

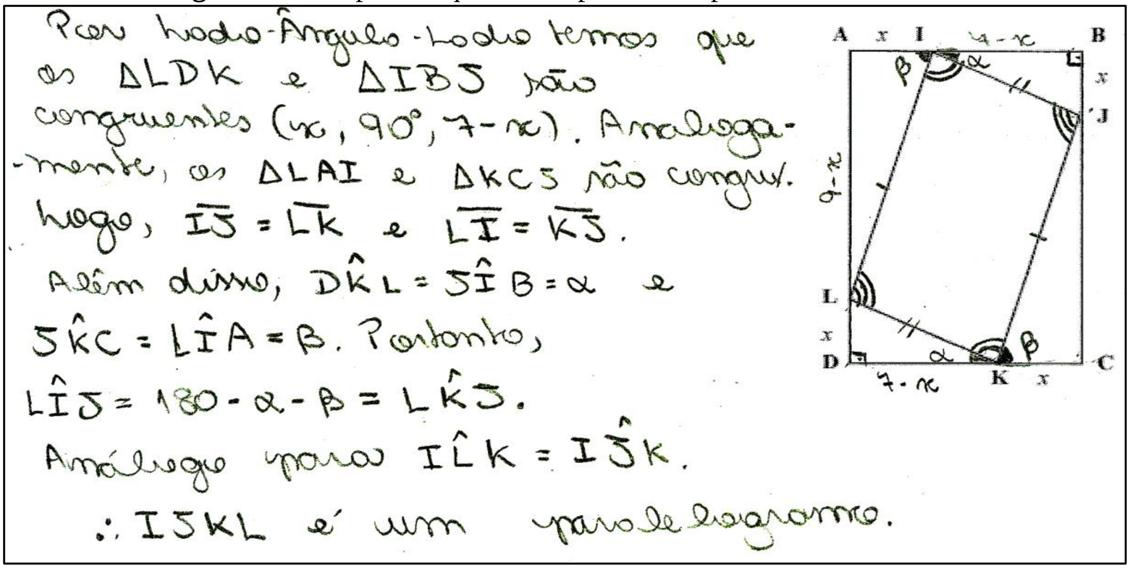
Quadro 15 - Distribuição dos tipos de respostas dos licenciandos na questão 5.

Tipos de respostas	Frequência
Mostrou a congruência entre os triângulos e utilizou uma das propriedades.	26
Demonstrou a tese utilizando outros argumentos.	6
Apresentou algum erro conceitual.	12
Apenas escreveu os lados do retângulo $ABCD$ em função de x corretamente ou afirmou que a tese era imediata.	5
Sem justificativa.	29
TOTAL	**78**

Fonte: Autoria própria.

No quadro 15 se verifica que 32 licenciandos conseguiram mostrar a tese proposta na questão 5, em graus diferentes de rigor e de formalidade. Dentre eles, o argumento mais usual, e presente em 26 questionários, foi mostrar a congruência entre os triângulos e utilizar uma das propriedades descritas anteriormente. O estudante L66, por exemplo, inicialmente justificou a congruência pelo caso LAL, a partir da identificação dos ângulos constatou que o quadrilátero $IJKL$ possuía os ângulos opostos congruentes e concluiu que o polígono é um paralelogramo, conforme ilustramos na figura 33.

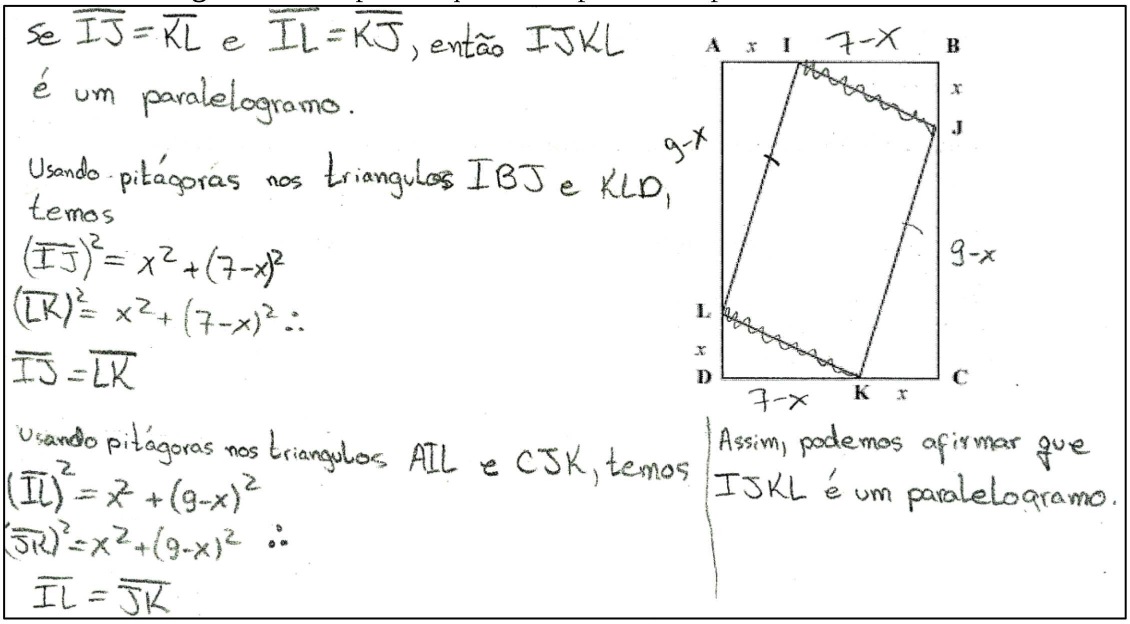
Figura 33 - Resposta à questão 5 apresentada pelo licenciando L66.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L66.

Já o participante L74, que também se enquadrou nesta classe, utilizou estratégias ligeiramente distintas em relação ao L66. Na figura 34, observamos que ele mostrou a congruência entre os triângulos pelo Teorema de Pitágoras (caso LLL) e concluiu que, como o quadrilátero $IJKL$ possui dois pares de lados congruentes, obtêm-se um paralelogramo.

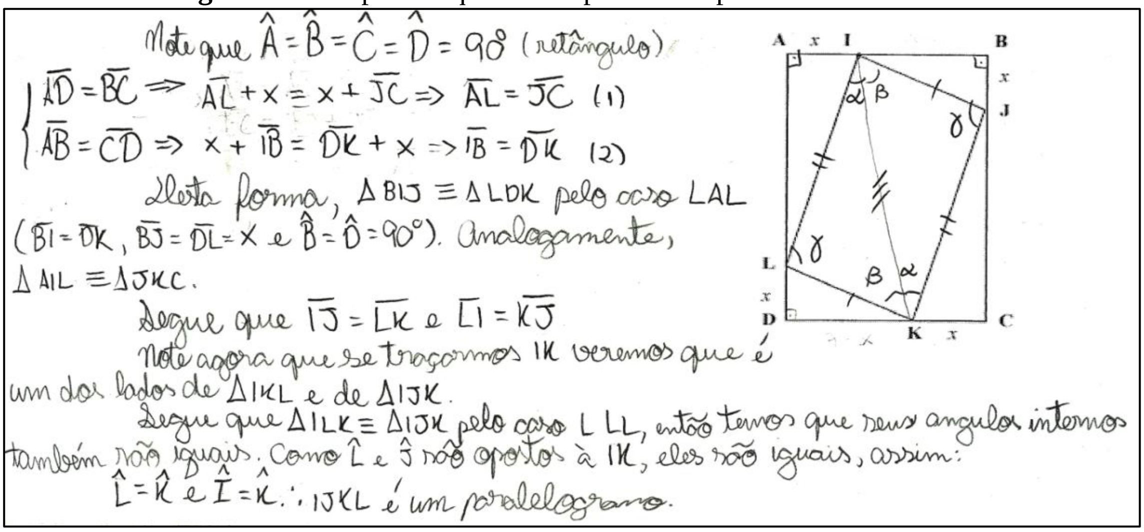
Figura 34 - Resposta à questão 5 apresentada pelo licenciando L74.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L74.

É importante destacar duas situações observadas nas resoluções destes 26 licenciandos. Primeiramente, três deles tiveram a preocupação de demonstrar a propriedade utilizada, o que julgamos ser a solução ideal para um professor em exercício. No caso do sujeito L70, após mostrar que os lados opostos do quadrilátero $IJKL$ são congruentes pelo caso LAL, ele traçou a diagonal $\overline{IK}$ e provou também que os pares de lados desse quadrilátero são paralelos, utilizando noções de congruência (caso LLL) e de ângulos alternos internos, como vemos na figura 35:

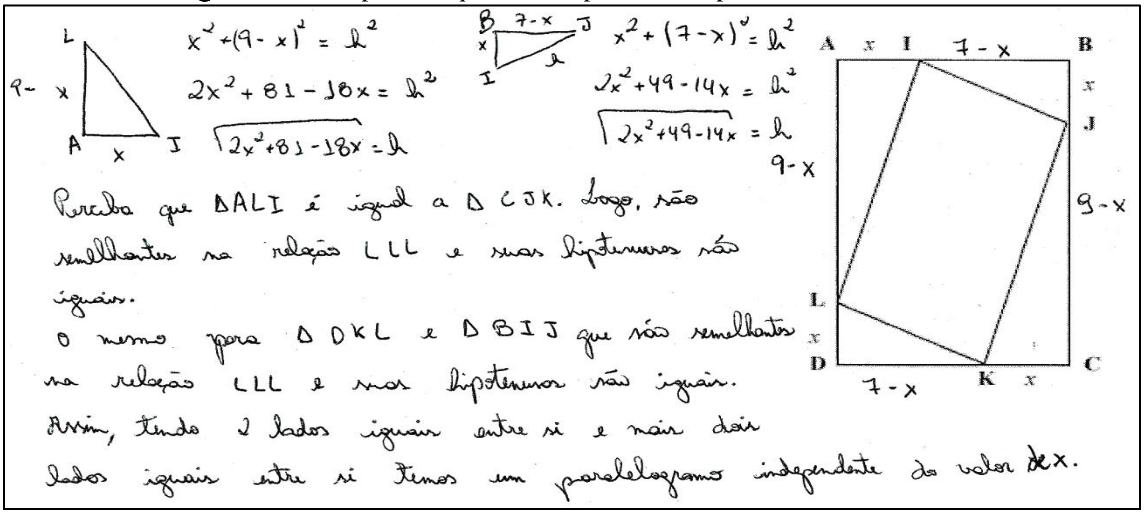
Figura 35 - Resposta à questão 5 apresentada pelo licenciando L70.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L70.

Além disso, dois deles mostraram a congruência entre os triângulos e utilizaram uma das propriedades. Por ora nenhuma novidade com relação aos demais, porém, em seus discursos, notamos referências ao conceito de semelhança de triângulos, como é possível notar na figura 36, que mostra a resposta do discente L67:

Figura 36 - Resposta à questão 5 apresentada pelo licenciando L67.

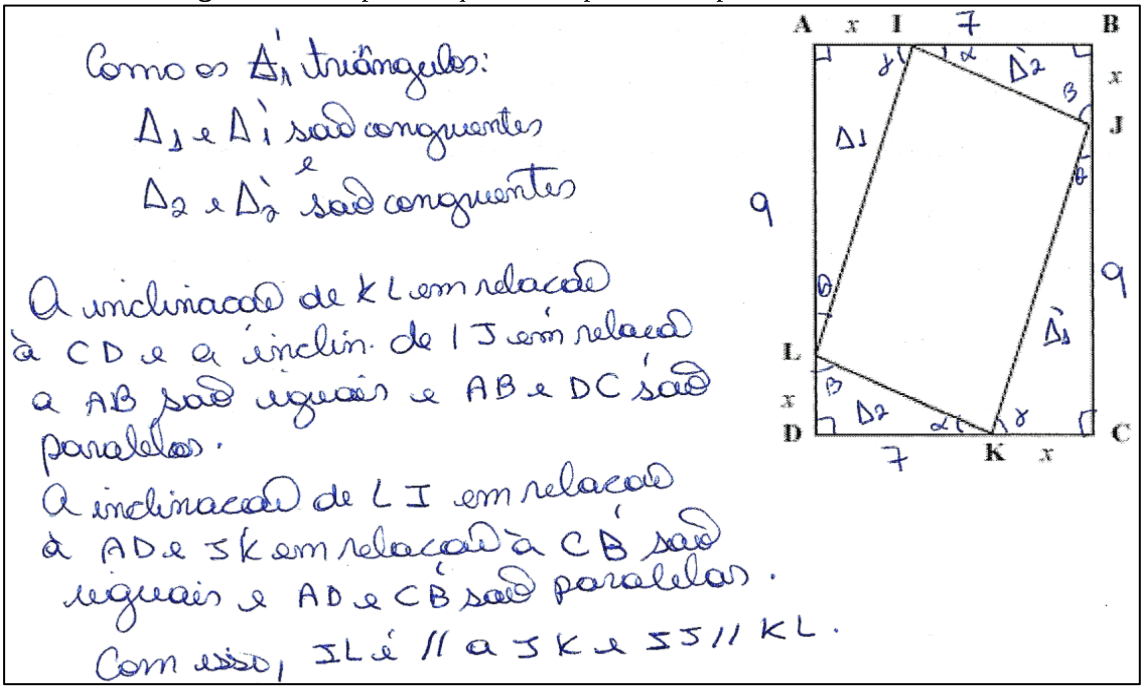


Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L67.

Apesar disso, consideramos a resposta do L67 como correta, uma vez que o caso LLL é um critério tanto de congruência quanto de semelhança para triângulos. Na realidade, a congruência é um caso particular de semelhança, em que a constante de proporcionalidade entre lados homólogos sempre será um. Além disso, o estudante justificou corretamente pelo Teorema de Pitágoras que os lados opostos do quadrilátero $IJKL$ são congruentes, ainda que a expressão usada pelo estudante foi "*lados iguais entre si*". Ainda que não seja o caso do L67, acreditamos que a causa de muitos alunos (ou oriundos) da Educação Básica confundirem os critérios de semelhança com os de congruência, esteja relacionado ao ensino meramente focado na identificação dos casos, e não na compreensão e na distinção entre esses conceitos. Em vista disso, os estudantes são levados a uma confusão entre as siglas usadas na identificação dessas noções.

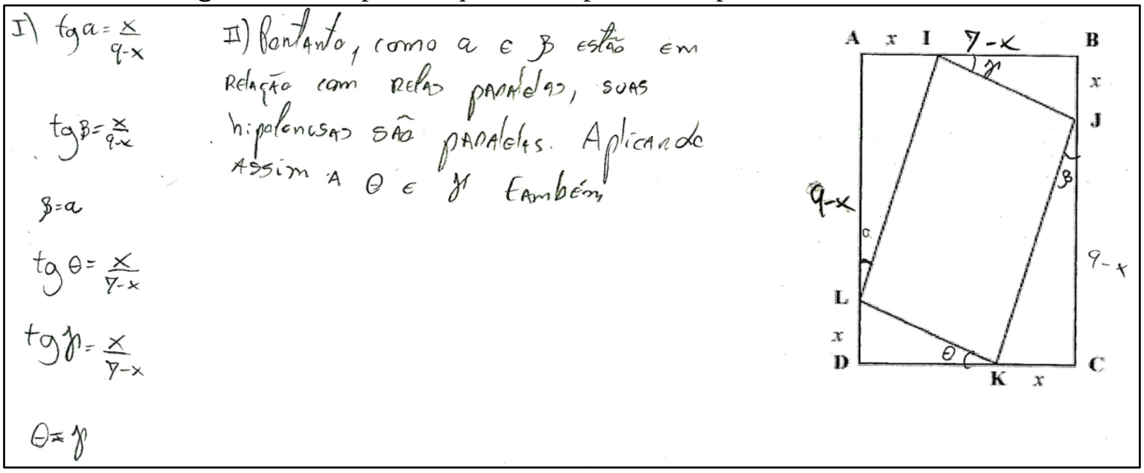
Ainda com relação aos licenciandos que conseguiram demonstrar a afirmação, observamos que 6 deles utilizaram outros tipos de argumentos, mais especificamente, três estratégias diferentes. A primeira delas foi empregada por 3 estudantes, os quais mostraram corretamente a congruência entre os triângulos e justificaram a tese com base na inclinação dos lados do quadrilátero $IJKL$ em relação ao retângulo $ABCD$. As figuras 37 e 38 ilustram as respostas do discentes L73 e L46, respectivamente.

Figura 37 - Resposta à questão 5 apresentada pelo licenciando L73.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L73.

Figura 38 - Resposta à questão 5 apresentada pelo licenciando L46.

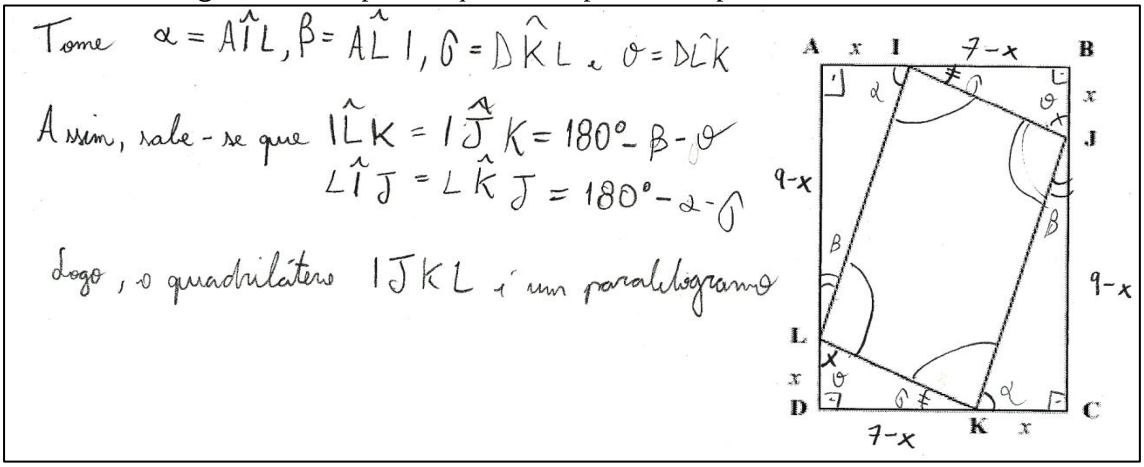


Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L46.

Note que a partir da identificação dos ângulos dos quadriláteros (ainda que a ilustração sugira que o mesmo atribuiu valores equivocados para as medidas dos lados do retângulo), o L73 observou a congruência entre os triângulos e por meio da inclinação dos lados do quadrilátero $IJKL$ em relação aos lados opostos do retângulo $ABCD$ (que são paralelos, por hipótese), concluiu o paralelismo entre eles. Optamos por apresentar também a resolução do L46, pois apesar de utilizar a inclinação dos lados, a sua argumentação foi inédita, visto que ele fez uso das relações trigonométricas no triângulo retângulo (no caso a tangente) para concluir a igualdade entre dois pares de ângulos.

A segunda estratégia foi utilizada por 2 licenciandos, os quais mostraram que os ângulos opostos do quadrilátero $IJKL$ são congruentes apenas por meio da identificação dos ângulos dos triângulos, sem recorrer aos casos de congruência. Essa possibilidade de resolução também foi indicada no padrão de resposta esperado pelo ENADE/2008. Na figura 39 apresentamos a resposta do L45, um dos estudantes que empregou esse argumento.

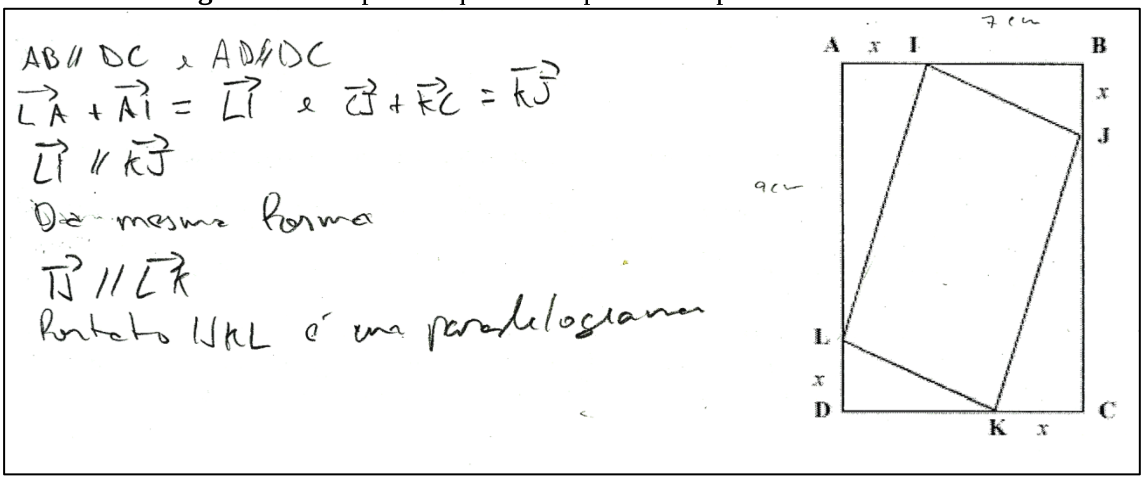
Figura 39 - Resposta à questão 5 apresentada pelo licenciando L45.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L45.

Finalmente, a terceira estratégia foi empregada apenas pelo licenciando L63, o qual aplicou seus conhecimentos de Geometria Analítica, especialmente, a adição de vetores para mostrar a tese, conforme exibimos na figura 40:

Figura 40 - Resposta à questão 5 apresentada pelo licenciando L63.



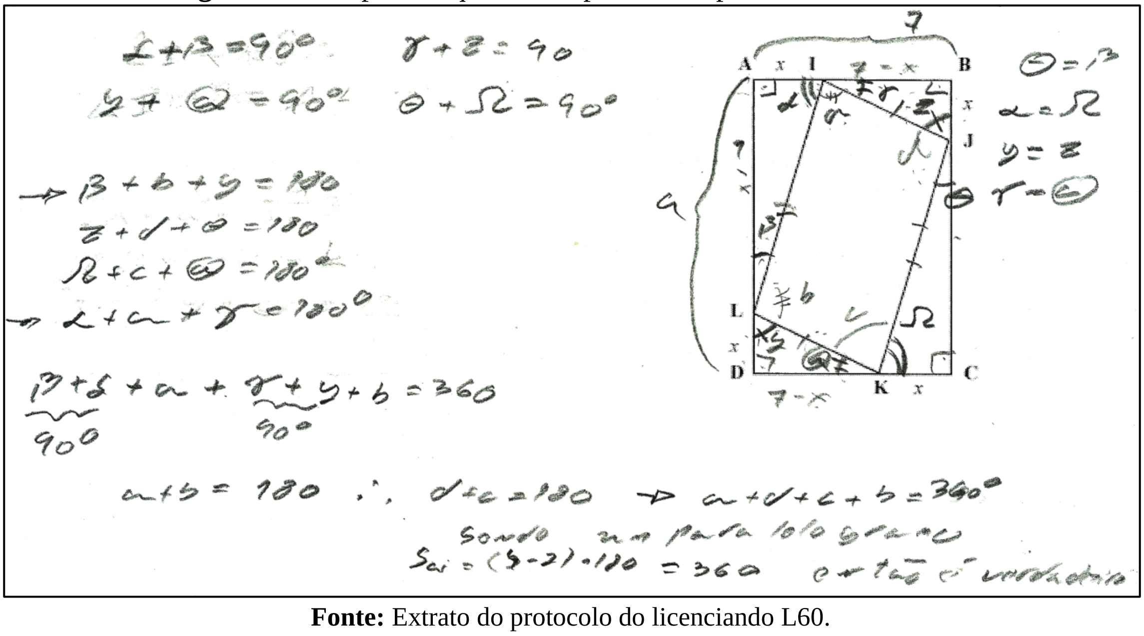
Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L63.

Ainda que o L63 pudesse ter justificado melhor a sua resposta e ter analisado o módulo entre os vetores, o raciocínio apresentado é coerente. De fato, como os pares de vetores $\overrightarrow{LA}$, $\overrightarrow{CJ}$ e $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{KC}$ estão na mesma direção (pois estão sobre lados paralelos, por hipótese) e têm o mesmo módulo e sentido, segue pela regra do paralelogramo que os vetores resultantes da soma $\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AI}$ e $\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{KC}$ têm direção, comprimento e sentido idênticos. Em particular, o par de vetores $\overrightarrow{LI}$ e $\overrightarrow{KJ}$ é paralelo. De forma análoga justifica que o outro par $\overrightarrow{IJ}$ e $\overrightarrow{LK}$ é paralelo.

Durante a análise dos questionários identificamos erros conceituais, predominantemente referentes à Geometria, nas respostas de 12 licenciandos, ainda que parte do desenvolvimento estivesse correto. Em nosso entendimento, tais equívocos podem ser considerados graves do ponto de vista matemático, diferentemente, por exemplo, do L67 (figura 36) que se referiu ao conceito de semelhança de triângulos em sua resolução. A seguir, descrevemos os principais erros cometidos pelos estudantes na questão 5.

Na figura 41, apresentamos a resposta do licenciando L60, o qual foi capaz de identificar corretamente os ângulos nos quadriláteros do exercício. Contudo, o mesmo não conseguiu mostrar que os ângulos opostos do quadrilátero $IJKL$ são congruentes. Em virtude disso, ao exibir que a soma dos ângulos internos dessa figura é 360º, ele conclui: *"sendo um paralelogramo, então* [a tese] *é verdadeira".* O erro cometido pelo discente foi utilizar uma condição necessária como suficiente, ou seja, todo paralelogramo, de fato, tem a soma dos ângulos internos igual a 360º. Contudo, saber a soma garante apenas que o polígono (se convexo) é um quadrilátero, uma vez que este poderia ser um trapézio (quadrilátero que possui somente um par de lados opostos paralelos).

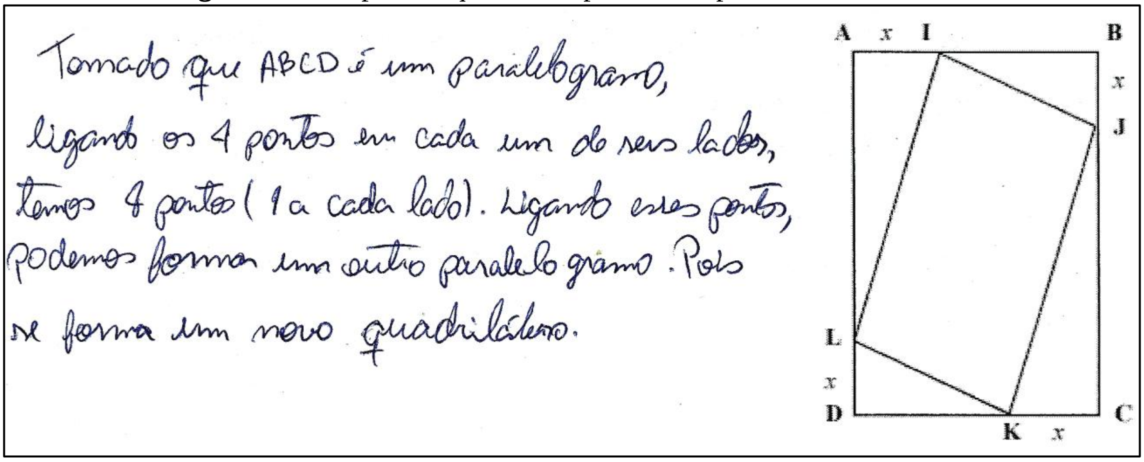
Figura 41 - Resposta à questão 5 apresentada pelo licenciando L60.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L60.

Na resposta do estudante L40 (figura 42) também é possível identificar que ele considerou erroneamente que todo quadrilátero é um paralelogramo. O seu discurso lembra, de certo modo, o teorema de Varignon apresentado na seção 1.4, porém, este resultado garante apenas que quando ligamos os pontos médios de um quadrilátero qualquer se obtém um paralelogramo.

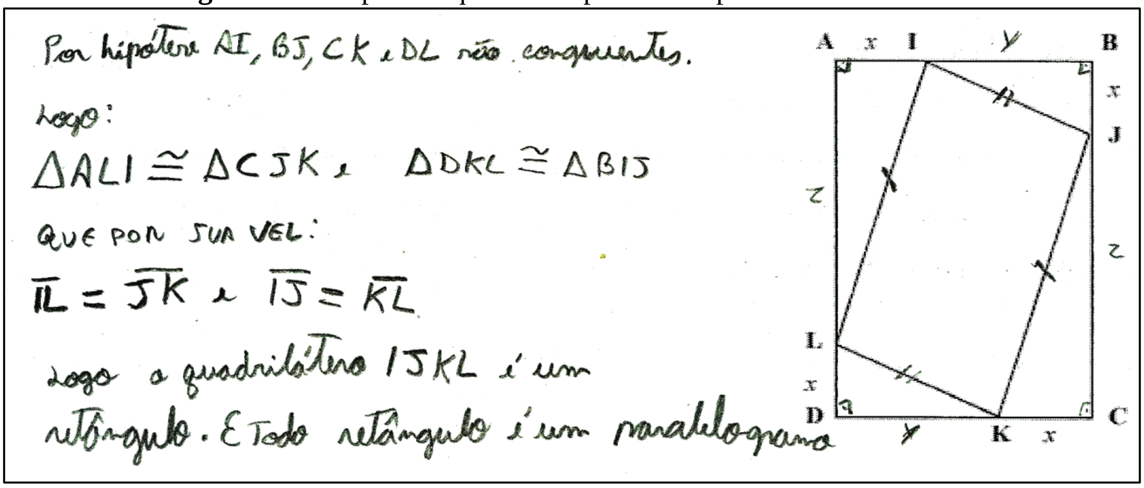
Figura 42 - Resposta à questão 5 apresentada pelo licenciando L40.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L40.

Já na resposta do licenciando L72, identificamos que ele considerou que um quadrilátero cujos pares de lados opostos são congruentes é retângulo, conforme vemos na figura 43. Observe que ele mostrou a congruência entre os triângulos, mas, concluiu a *priori* que o quadrilátero $IJKL$ era um retângulo, ainda que esse quadrilátero seja um paralelogramo. Além disso, ele pode também ter se baseado na aparência do desenho, considerando erroneamente que os ângulos internos do polígono $IJKL$ eram retos.

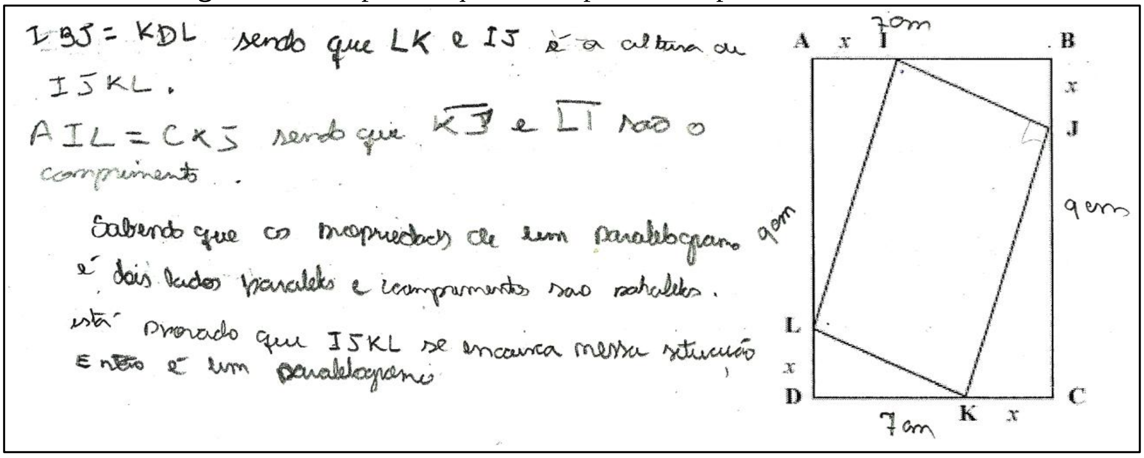
Figura 43 - Resposta à questão 5 apresentada pelo licenciando L72.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L72.

Por outro lado, na resposta do estudante L35 (figura 44), observamos que ele considerou a *priori* que os ângulos internos do quadrilátero $IJKL$ eram retos, conforme descreveu: *“$IBJ = KDL$, sendo que LK e IJ é a* ***altura*** *de $IJKL$”*. Todavia, apesar de ter definido que um paralelogramo possui *“dois lados paralelos e comprimentos paralelos”*, acreditamos que o discente tem consciência da diferença entre paralelogramos e trapézios.

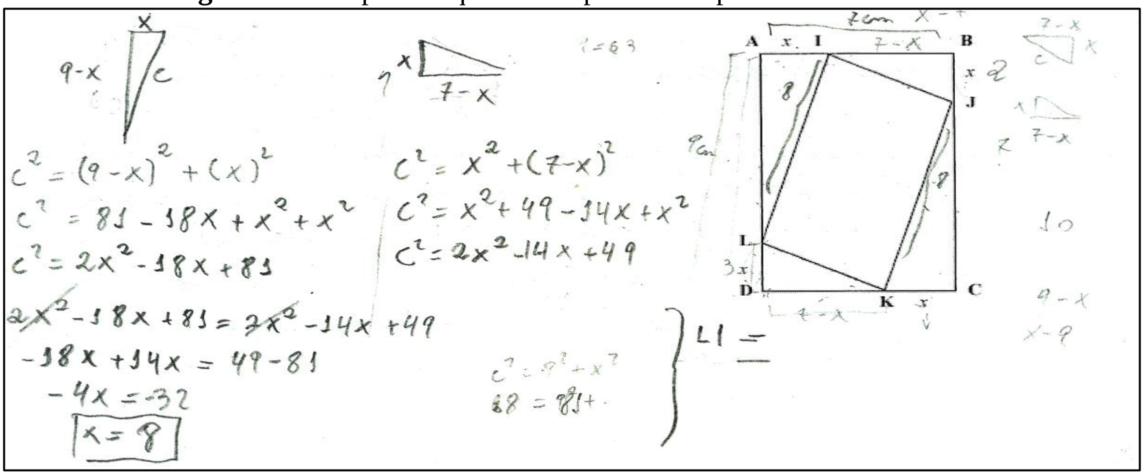
Figura 44 - Resposta à questão 5 apresentada pelo licenciando L35.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L35.

Outro erro conceitual foi cometido pelo discente L43, o qual identificou corretamente os lados do retângulo $ABCD$ em função de x, mas, ao aplicar o Teorema de Pitágoras para mostrar a congruência entre os triângulos, considerou que as medidas dos lados opostos do quadrilátero $IJKL$ eram iguais. É possível notar na figura 45 que ele adotou a medida c para ambas as hipotenusas IL e IJ. Observa-se também a incoerência do resultado encontrado pelo estudante, pois como é possível a igualdade $x = 8$, se as medidas dos lados AB e DC valem $7\ cm$?! Por isso, a importância dos professores da Educação Básica instigarem que seus alunos sejam críticos perante os seus cálculos e justificativas.

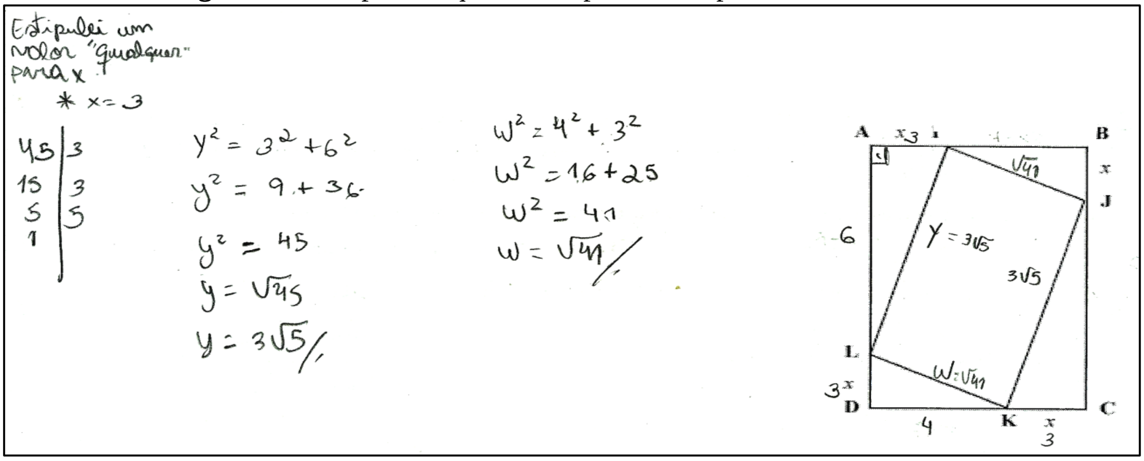
Figura 45 - Resposta à questão 5 apresentada pelo licenciando L43.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L43.

Uma resposta que nos chamou bastante a atenção foi dada pelo licenciando L42, pois foi o único que utilizou uma verificação numérica na questão 5. Conforme podemos observar na figura 46, ele afirma: *"Estipulei um valor 'qualquer' para x, $x = 3$"*. Ainda que o sujeito tenha concluído que os lados opostos do quadrilátero $IJKL$ possuem a mesma medida (desconsiderando o cálculo incorreto da hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 3 e 4), o erro conceitual cometido pelo discente foi por não compreender que o seu argumento poderia ser válido apenas para um caso (quando $x = 3$), dentre uma infinidade de medidas possíveis para x.

Figura 46 - Resposta à questão 5 apresentada pelo licenciando L42.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L42.

Além disso, é importante destacar que nos outros problemas puramente matemáticos (questões 6 e 7a), o L42 também utilizou argumentos empíricos, em consonância com sua própria definição para o termo demonstração apresentada na questão 1: *"Através de exemplos, prove que a resposta está correta"*. Deste modo, podemos inferir que esse futuro professor traz consigo uma errônea concepção de que uma mera constatação numérica é suficiente para garantir a validade de uma afirmação. Isso aumenta ainda mais a responsabilidade de sua instituição de promover, ao longo de sua formação, oportunidades de reflexão sobre os significados da prova matemática no âmbito acadêmico e escolar.

Os erros conceituais constatados nas respostas dos demais licenciandos foram similares aos que ilustramos anteriormente ou ainda relacionados à identificação incorreta dos lados do retângulo $ABCD$ em função de x ou ao uso equivocado das relações métricas num triângulo retângulo.

Neste instante faremos um comparativo dos principais erros que estiveram presentes no ENADE/2008, conforme descrito na análise a *priori*, em relação aos que emergiram nas respostas dos sujeitos que constituíram a nossa amostra. Ainda que o L67 (veja a figura 36) tenha se reportado à noção de semelhança, consideramos que nenhum estudante confundiu o conceito de semelhança com o de congruência de triângulo. Além disso, entre os licenciandos que responderam à questão 5, nenhum deles conceituou que um quadrilátero que possui apenas um par de lados opostos congruentes é um paralelogramo. O que efetivamente verificamos em três questionários foi a ideia errônea de que todo quadrilátero, cuja soma dos ângulos internos é 360º, é um paralelogramo. Por fim, apenas o discente L72 (veja a figura 43) considerou que um quadrilátero cujos pares de lados opostos são congruentes é retângulo. Esses índices podem ser um indicativo de que a maioria dos licenciandos que compôs a nossa amostra tem conhecimento sobre a classificação dos quadriláteros.

A próxima classe e a penúltima listada no quadro 15 se refere aos 5 estudantes que apenas escreveram os lados do retângulo $ABCD$ em função de x corretamente ou afirmaram que a tese era imediata, conforme se nota na resposta do discente L24: *"Quando diz que os segmentos AI, BJ, CK e DL são congruentes e está dentro de um retângulo, seria impossível você não obter um paralelogramo"*.

Além disso, a classe que apresentou a maior frequência diz respeito aos 29 estudantes que não apresentaram justificativas, dentre os quais 9 deixaram a questão em branco, 19 escreveram que não sabiam mostrar o resultado e um afirmou que não teve tempo suficiente.

Finalmente, após a descrição de todas as classes descritas no quadro 15, é possível apresentar duas considerações a respeito da questão 5.

Primeiramente, apesar de não termos conseguido acesso aos critérios de correção do ENADE/2008 e exigir no questionário apenas a resolução do item (a) da questão original, possivelmente a média e a mediana dos ingressantes que constituíram o nosso estudo seriam maiores do que os que foram apresentados na tabela 9. Podemos inferir isso, pois segundo os dados do relatório, 76,2% dos estudantes não pontuaram em 2008 e durante a análise constatamos que 32 estudantes (41% da nossa amostra) conseguiram atingir o padrão de resposta sugerido pelo próprio exame, ou seja, possivelmente receberiam notas altas ou máximas.

Por outro lado, a nossa hipótese foi verificada, visto que a maioria dos licenciandos (59% da amostra) deixou a questão em branco ou não conseguiu apresentar uma resposta que validasse a afirmação geométrica. Isto evidencia a urgência de se trabalhar atividades de

Geometria ao longo dos cursos de Licenciatura, para que os futuros professores se sintam aptos a abordar esse conteúdo na sua prática pedagógica em sala de aula.

4.6 ANÁLISE DA QUESTÃO 6

4.6.1 Análise a *priori* da questão 6

Esta questão foi o segundo exercício puramente matemático, o qual solicitava que os licenciandos respondessem a seguinte questão: "Mostre que o produto de três números inteiros consecutivos é múltiplo de 3". Optamos novamente por utilizar a expressão "mostre que", pelas mesmas razões que descrevemos na análise a *priori* da questão 5.

É importante destacar que a escolha deste resultado se deve, primeiramente, por estar inserido no contexto algébrico, ao contrário das questões 2, 5 e 7 que foram relacionadas à Geometria. Além disso, conforme veremos a seguir, para justificá-lo não era necessário possuir conhecimentos prévios sobre o Princípio da Indução Finita (PIF) e sobre Aritmética Modular, visto que parte dos licenciandos poderiam não ter estudado ou aprendido esses tópicos no primeiro período do curso. Bastaria, portanto, ter a real compreensão do que é ser múltiplo de 3 para mostrar que a afirmação é verdadeira.

Deste modo, nesta questão o objetivo era investigar como os estudantes validavam uma sentença, inserida no contexto da Álgebra e que poderia ser problematizada no âmbito da Educação Básica. Assim, poderíamos identificar, por exemplo, o nível de formalidade que os licenciandos empregam em suas resoluções e os argumentos que eles utilizam para concluir que a afirmação é verdadeira. O foco dessa identificação era criar as categorias para os dados coletados, as quais emergiram durante a análise dos questionários respondidos.

A nossa conjectura nesta questão é de que a maioria dos licenciandos devem utilizar argumentos empíricos em suas respostas, os quais Balacheff (1988) denomina por prova pragmática e Harel e Sowder (1998) de esquema de prova empírica.

A seguir descrevemos duas possíveis soluções para validar que o produto de três números inteiros consecutivos é sempre múltiplo de 3, as quais são classificadas como provas conceituais ou esquema de provas analíticas. Na primeira solução, utilizamos conceitos da aritmética modular e na segunda, que julgamos ser mais bonita por sinal, simplesmente argumentamos utilizando a noção do que é ser múltiplo de 3.

Solução I:

Sejam $n-1,\ n,\ n+1$, onde $n \in \mathbb{Z}$, três números inteiros consecutivos. Mostremos que o produto $(n-1).n.(n+1) = n^3 - n$ é múltiplo de 3, ou seja, $n^3 - n = 3m, m \in \mathbb{Z}$.
Como n é um número inteiro, ele pode ser um número par ou ímpar. Se n é par, podemos escrevê-lo da forma $n = 2k$. Logo o produto dos três números pode ser expresso como $8k^3 - 2k$. Utilizando a aritmética modular de 3, note que os múltiplos de 8 e de 2, deixam resto dois na divisão por três. Logo $(8k^3 - 2k)/3$ é uma divisão cujo resto é zero, ou seja, é uma divisão exata. Portanto, como $8k^3 - 2k$ pode ser escrito como múltiplo de 3, segue diretamente que $n^3 - n = 3m$. De forma análoga, mostra-se o caso em que n é ímpar.

Solução II:

Sejam $n,\ n+1,\ n+2$, onde $n \in \mathbb{Z}$, três números inteiros consecutivos. Como os três são consecutivos, necessariamente um deles é múltiplo de 3, por definição. Sem perda de generalidade, suponha que $n+1$ seja o múltiplo de 3, logo seria possível escrevê-lo da forma, $n+1 = 3m, m \in \mathbb{Z}$. Com efeito, seria possível escrever o produto $n.(n+1).(n+2) = n.(3m).(n+2) = 3m'$, onde $m' \in \mathbb{Z}$, como múltiplo de 3.

Uma terceira resolução possível para esse problema poderia ser dada por meio do PIF, desde que fosse validada para os inteiros positivos e não positivos. Porém, acreditamos que ambas as soluções apresentadas sejam mais compreensíveis, tanto para os licenciandos quanto para um aluno do Ensino Médio, visto que constituem provas explicativas (HANNA, 1990).

4.6.2 Análise *a posteriori* da questão 6

Nesta questão os estudantes deveriam mostrar que o produto de três números inteiros consecutivos é múltiplo de 3. Na tabela 10 descrevemos os tipos de respostas encontrados durante a análise dos questionários dos licenciandos:

Tabela 10 - Distribuição dos tipos de respostas presentes na questão 6.

Tipos de respostas	Frequência
Sem justificativa	26
Verificação empírica	16
Similar à solução II	16
Indução finita	9
Justificou para a soma	4
Incompleta ou inconsistente	5
Outras	2
TOTAL	**78**

Fonte: Autoria própria

Com base na tabela 10 foi possível constatar que a nossa conjectura de que a maioria dos licenciandos utilizaria argumentos empíricos não foi validada, visto que a maior frequência foi 26, referente aos participantes que não apresentaram justificativas. Este grupo reuniu exatamente um terço da nossa amostra, dentre os quais 8 deixaram a questão em branco e 18 escreveram que não sabiam mostrar o resultado. Poderíamos conjecturar que esses últimos estudantes têm a concepção de que “mostrar” está relacionado a uma escrita matemática formal e rigorosa e que uma simples constatação numérica não seria suficiente para garantir a veracidade da afirmação. Entretanto isso não seria verídico, pois com base no item (d) da questão 4, a maior parte deles (55,5%) concordou ou assinalou a opção (NS) quando foram questionados sobre a possibilidade de provar uma sentença por meio de exemplos.

Dentre os licenciandos que apresentaram alguma resposta, dois grupos se destacaram: aqueles que apresentaram provas pragmáticas ou empíricas (verificação empírica) e aqueles que descreveram tentativas de provas conceituais ou analíticas (similar à solução II e indução finita).

Com relação ao grupo que descreveu provas pragmáticas, 16 estudantes (20,5% da amostra) argumentaram por meio de um ou de poucos exemplos numéricos, que segundo Balacheff (1988) é denominado por empirismo ingênuo, o primeiro nível ao elaborar uma demonstração. Para ilustrar isso, na figura 47 exibimos a resposta apresentada pelo L37:

Figura 47 - Resposta à questão 6 apresentada pelo licenciando L37.

Por meio de demonstração lógica, temos:

$4.5.6 = 120 \rightarrow$ É múltiplo de 3

$2.3.4 = 24 \rightarrow$ É multiplo de 3

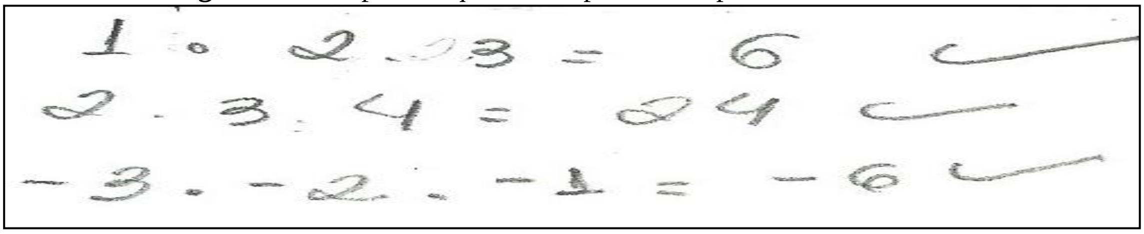
... E assim suessivamente...

Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L37.

Note que o L37 chamou a sua verificação numérica de *“demonstração lógica”*. Embora distante das definições adotadas nesta pesquisa, isso vai ao encontro do seu entendimento para essa terminologia, pois já havíamos ressaltado isso em sua resposta na questão 1 (veja a página 109), ao evidenciar a necessidade de métodos empíricos numa demonstração.

O estudante L12 se destacou neste grupo por ser o único que teve o cuidado de verificar numericamente a afirmação para os números inteiros positivos e negativos, como mostra a figura 48 já que o enunciado se referia ao conjunto $\mathbb{Z}$. Embora ele não tenha pensando na possibilidade de um dos números ser igual a zero, acreditamos que o seu nível de justificativa não é o mesmo dos demais estudantes desse grupo e, por essa razão, julgamos que a sua resposta se enquadra como experiência crucial, segundo Balacheff (1988).

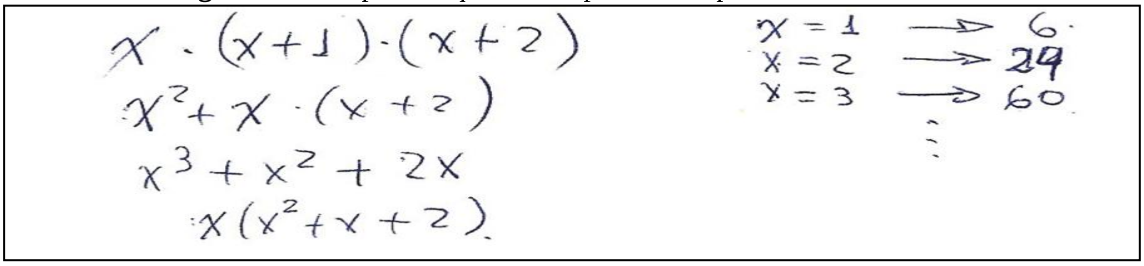
Figura 48 - Resposta à questão 6 apresentada pelo licenciando L12.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L12.

Ainda referente ao grupo que utilizou verificações numéricas, observou-se os estudantes L23, L32 e L77 iniciaram a questão utilizando uma linguagem algébrica, porém não foram capazes de concluir o raciocínio e apelaram para o uso de exemplos, como nos mostra a resposta do L77 ilustrada na figura 49.

Figura 49 - Resposta à questão 6 apresentada pelo licenciando L77.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L77.

Contudo, com base nas definições adotadas nesta pesquisa, as verificações empíricas não constituem uma prova matemática e, deste modo, nenhum desses 16 estudantes demonstrou efetivamente que o produto de três números inteiros consecutivos é múltiplo de 3.

Com relação ao outro grupo, 25 estudantes (32,1% da amostra) descreveram tentativas de provas conceituais. Chamamos de tentativas, visto que nem todas estavam corretas do ponto de vista matemático. Neste grupo se enquadram os 16 participantes que argumentaram de forma semelhante à solução II (veja a página 157), ou seja, utilizando apenas a noção do que é ser múltiplo de três e outros 9 que utilizaram o PIF. A seguir detalhamos ambas as estratégias de argumentação.

As justificativas dos licenciandos L76, L47, L66, que apresentaram diferentes níveis de formalidade, ilustram as respostas dos demais estudantes que se basearam apenas na noção do que é ser múltiplo de 3 para validar a afirmação.

Note na figura 50 que o participante L76 optou por apresentar o seu raciocínio sem utilizar notações algébricas e com simples uso da linguagem verbal demonstrou que o produto de três números inteiros consecutivos é sempre múltiplo de 3.

Figura 50 - Resposta à questão 6 apresentada pelo licenciando L76.

SABENDO-SE QUE AO PEGAR QUAISQUER TRÊS NÚMEROS INTEIROS CONSECUTIVOS, PELO MENOS UM, É MÚLTIPLO DE 3, CONSEQUENTE-MENTE O PRODUTO DESTES TRÊS NÚMEROS SELECIONADOS TAMBÉM SERÁ.

Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L76.

Já o estudante L47 fez uso da linguagem simbólica e da verbal para argumentar que dados três números inteiros sequenciais, um deles necessariamente é múltiplo de 3, como nos mostra a figura 51. E sem perda de generalidade, ele demonstrou que propriedade é válida no conjunto ℤ. Este discurso é a que mais se aproxima da que propomos na solução II.

Figura 51 - Resposta à questão 6 apresentada pelo licenciando L47.

$\forall a \in \mathbb{Z}$

$a, (a+1), (a+2)$ números consecutivos, entre eles obrigatoriamente 1 é múltiplo de 3, pois são 3 números inteiros sequenciais.

Tomando "a" como sendo esse múltiplo, temos que $a = 3K$.

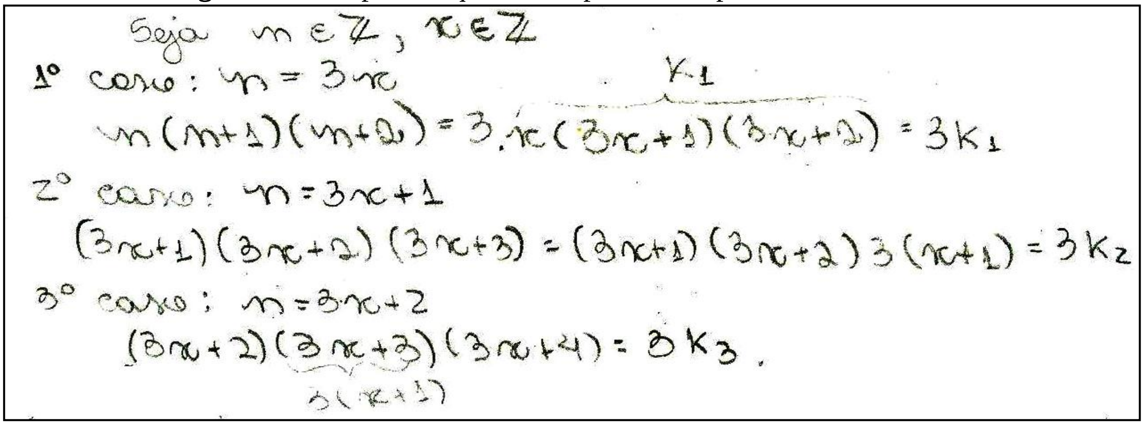
Logo, $a \cdot (a+1) \cdot (a+2) = X$, sendo X o produto

$$3K \cdot (a+1)(a+2) = X \Rightarrow 3\underbrace{(K(a+1)(a+2))}_{Z} = X \Rightarrow \boxed{3Z = X}$$

Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L47.

Por fim, é possível verificar na figura 52 que o discurso do participante L66 foi exclusivamente simbólico. Embora o argumento seja o mesmo da que propomos na solução II e das duas respostas anteriores (figuras 50 e 51), esse licenciando fez questão de destacar os três casos e demonstrar que a afirmação é verdadeira utilizando apenas a linguagem algébrica.

Figura 52 - Resposta à questão 6 apresentada pelo licenciando L66.



Seja $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}$

1º caso: $n = 3x$

$n(n+1)(n+2) = 3.\overbrace{x(3x+1)(3x+2)}^{k_1} = 3k_1$

2º caso: $n = 3x+1$

$(3x+1)(3x+2)(3x+3) = (3x+1)(3x+2)3(x+1) = 3k_2$

3º caso: $n = 3x+2$

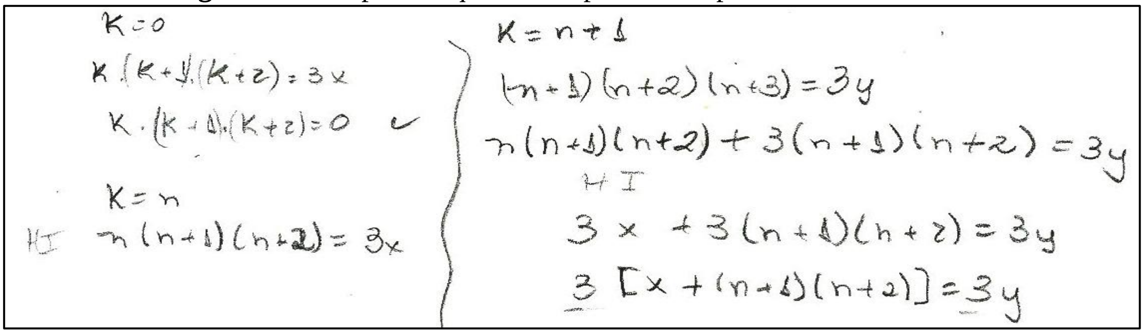
$(3x+2)(\underbrace{3x+3}_{3(x+1)})(3x+4) = 3k_3$.

Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L66.

É importante destacar que os 16 estudantes que utilizaram um desses três discursos, argumentaram com êxito e validaram a propriedade em questão em todo o conjunto $\mathbb{Z}$.

Dentre os 9 licenciandos que buscaram validar a propriedade utilizando o PIF, constatamos equívocos conceituais em 8 justificativas. Os participantes L48[67], L54 e L68, por exemplo, validaram a afirmação apenas para um subconjunto dos números inteiros, conforme é possível verificar na figura 53 que apresenta a resposta de um desses licenciandos.

Figura 53 - Resposta à questão 6 apresentada pelo licenciando L68.



$K = 0$

$k.(k+1).(k+2) = 3x$

$k.(k+1).(k+2) = 0$ ✓

$K = n$

HI $n(n+1)(n+2) = 3x$

$K = n+1$

$(n+1)(n+2)(n+3) = 3y$

$n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2) = 3y$

HI

$3x + 3(n+1)(n+2) = 3y$

$3[x + (n+1)(n+2)] = 3y$

Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L68.

Note que o L68 utilizou corretamente o PIF e validou a afirmação no conjunto dos inteiros não negativos. Entretanto, a sua argumentação não é suficiente para garantir a validade em todo o conjunto $\mathbb{Z}$, conforme dizia o enunciado da questão 6.

Já os estudantes L53 e L69, além de se restringirem a um subconjunto dos números inteiros, também utilizaram incorretamente o conceito de indução. No caso do L69, ele tomou três números consecutivos $x-1, x, x+1 \in \mathbb{Z}$, verificou para o caso $x = 0$ e assumiu a corretamente a hipótese de indução para x, entretanto, o estudante erroneamente quis mostrar

[67] O estudante L48 apresentou um simples erro de cálculo ao efetuar o produto de duas expressões algébricas na última linha do argumento. Por esta razão, julgamos que o raciocínio indutivo que ele descreveu era válido.

que a sentença também era válida para $x+3$, sem ter o cuidado de verificá-la anteriormente os casos $x+1$ e $x+2$, como nos mostra a figura 54:

Figura 54 - Resposta à questão 6 apresentada pelo licenciando L69.

Sendo $x-1, x, x+1 \in \mathbb{Z}$

Para $x=0$:

$(x-1).x.(x+1) = (-1).(0).(1) = 0$ múltiplo de 3

$x \Rightarrow x+3$ (Hipótese de indução: $(x-1).(x).(x+1) = 3K,\ K \in \mathbb{Z}$)

$(x+2).(x+3).(x+4) = (x^2+5x+6).(x+4) = x^3+4x^2+5x^2+20x+6x+24$

$= x^3 - x + 9x^2 + 27x + 24 \overset{(HI)}{=} 3K + 3.(3x^2+9x+8)$

$= 3.(K + 3x^2 + 9x + 8)$

Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L69.

Podemos pensar na prova por indução como uma brincadeira de arrumar dominós em fila e derrubá-los, pois, uma vez que derrubamos a primeira peça, todas as outras tombam por consequência. E diante desta analogia é como se o L69 tivesse derrubado a primeira peça, "pulado" as próximas duas e ainda afirmasse que derrubou todas elas. Em outras palavras, a sua resposta justifica a propriedade considerando apenas o caso em que o produto dos três números inteiros consecutivos é $(-1).(0).(+1)$.

Também se restringiram a um subconjunto dos números inteiros os participantes L58 e L70, mas em suas respostas eles não souberam como utilizar a hipótese de indução ao longo da argumentação, conforme a figura 55 que apresenta o extrato do protocolo de um desses licenciandos.

Figura 55 - Resposta à questão 6 apresentada pelo licenciando L58.

não consigo continuar

$n-1, n, n+1 \rightarrow (n-1).n(n+1) = n(n^2-1)$

$= n^3 - n = 3K$

para $n=0$ ou n^3-n; $0^3-0=0$

para $n=1$ ou n^3-n; $1^3-1=0$

para $n+1$

$(n+1)^3-(n+1) =$

$(n+1)(n+1)^2-(n+1) =$

$(n+1)(n^2+2n+1)-(n+1) =$

$n^3+2n^2+n+n^2+2n+1-(n+1) =$

$n^3+3n^2+2n =$

Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L58.

Note que o L58 verificou que a afirmação era válida para $n=0$ e para $n=1$, supôs corretamente a validade para n e iniciou a prova para o caso $n+1$. Entretanto, ele não foi capaz de dar continuidade à argumentação por meio de manipulações algébricas, pois bastava reescrever a última linha como $n^3 + 3n^2 + (3n - n)$ e utilizar a hipótese de indução.

Outro participante que também se limitou a um subconjunto dos inteiros foi o L71. Contudo, ele apresentou uma resposta muito confusa, já que não faz uso de nenhum sinal operatório entre os termos, como mostra a figura 56. A princípio até parece que o participante tentou justificar a propriedade para a soma de três inteiros consecutivos, mas ao investigar o caso $n = 1$ é possível observar que ele efetuou o produto dos números. E apesar da organização do seu argumento ser baseado no PIF, a linguagem e a conclusão do licenciando não são muito claras.

Figura 56 - Resposta à questão 6 apresentada pelo licenciando L71.

$m, m+1, m+2 = K$, onde K é múltiplo de 3.

1) $m = 1$ → $1, 2, 3 = 6$ → múltiplo de 3 → ok.

2) $m, m+1, m+2 = K$ ser verdadeira.

3) $m+1$ é verdadeira?

$m+1, m+2, m+3 = K+3$ ← substituí no 1º o que é verdadeiro! eliminino o que sabro)

sei que $m, m+1, m+2 = K$ ok. $\quad 1, 1, 1 = K+3$

③ +3 → ok.

→ múltiplo de 3.

Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L71.

Dentre todos que utilizaram a indução finita, somente o estudante L45 teve o cuidado de indicar a necessidade de provar a afirmação no conjunto dos inteiros negativos, após ter demonstrado que era válida no conjunto ℕ, como é possível observar na figura 57:

Figura 57 - Resposta à questão 6 apresentada pelo licenciando L45.

Tome $n, (n+1), (n+2)$, $n \in \mathbb{N}$ três naturais consecutivos.

$n = 0 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = 0$ (múltiplo de 3)

HI: $\exists K \in \mathbb{Z}$ tq $n(n+1)(n+2) = 3K$

$(n+1)(n+1+1)(n+1+2) = (n+1)(n+2)(n+3) = n^3 + 6n^2 + 11n + 6 = (n^3 + 3n^2 + 2n) + 3n^2 + 9n + 6$

$= n(n+1)(n+2) + 3(n^2+3n+2) \overset{HI}{=} 3K + 3(n^2+3n+2) = 3(\underbrace{K+n^2+3n+2}_{\in \mathbb{Z} \text{ pelas operações fechadas}})$

Para os inteiros negativos, basta provar que $-n, -(n+1), -(n+2) = 3K$, $K \in \mathbb{Z}$ (análogo)

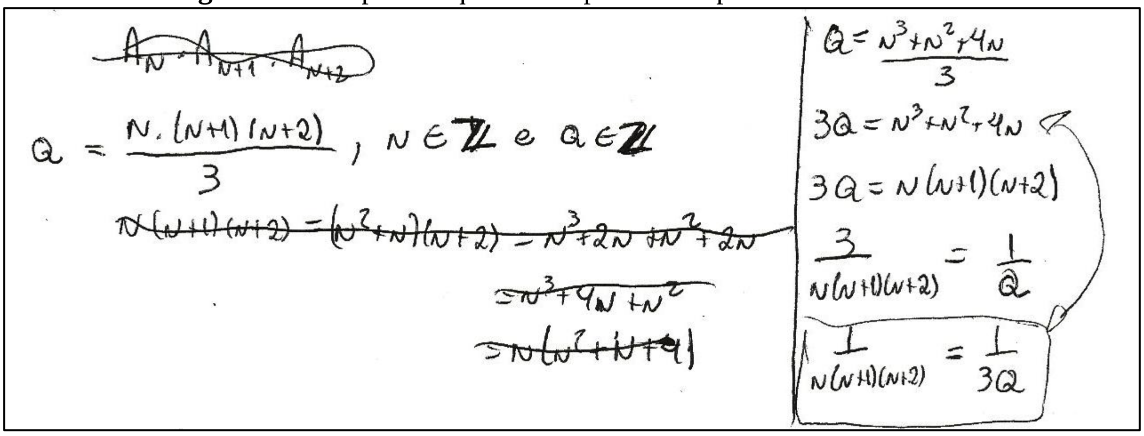
Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L45.

Julgamos que o L45 foi o único que conseguiu argumentar de forma satisfatória utilizando o PIF, entretanto, sendo rigorosos na correção, para ter garantido a validade da afirmação em todo o conjunto $\mathbb{Z}$, o estudante deveria ter verificado que o produto $(-1).(0).(+1)$ era múltiplo de 3, visto que sua argumentação não abrangeu esse caso.

Mesmo que poucos licenciandos tenham utilizado o PIF na questão 6 e isso possivelmente está atrelado ao fato de terem cursado apenas disciplinas do primeiro período, observamos um alto índice de erros conceituais. Isso sugere um ensino que pode ter sido mais focado em procedimentos do que na compreensão dos conceitos. Acreditamos que esses estudantes têm a concepção errônea de que todas as sentenças que envolvem o conjunto dos números inteiros precisam ser provadas por indução, quando na realidade o PIF equivale a dizer que todo subconjunto não vazio de inteiros positivos contém um elemento mínimo (Princípio da Boa Ordem). E justamente por esta razão não é possível demonstrar que o produto de três inteiros consecutivos é múltiplo de 3 com apenas um caso de indução, já que o conjunto $\mathbb{Z}$ não admite elemento mínimo.

Com relação aos demais tipos de respostas observados na tabela 10, tivemos 4 licenciandos que justificaram a afirmação para a soma de três inteiros consecutivos e não para o produto, sendo que três utilizaram corretamente a linguagem algébrica e um se baseou em exemplos. Isso sugere que esses estudantes não dominavam o significado da palavra produto ou eles simplesmente não se atentaram ao enunciado da questão. Observamos ainda que 3 estudantes descreveram justificativas incompletas, pois até começaram corretamente a argumentação, porém não foram capazes de concluí-la e 2 escreveram uma retórica inconsistente, especialmente por apresentar erros de cálculos, como é possível observar na figura 58 que reproduz o argumento circular do L50:

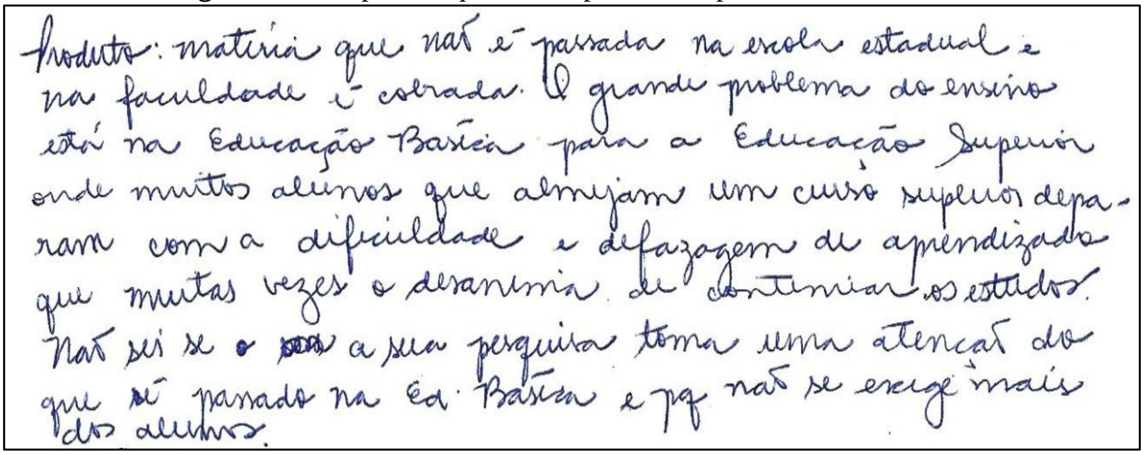
Figura 58 - Resposta à questão 6 apresentada pelo licenciando L50.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L50.

Ainda tivemos outras duas respostas que não foram possíveis de enquadrar em nenhum dos tipos descritos na tabela 10. O L2 simplesmente escreveu que *"o número deve* *ser diferente de 1 e não pode ser par”* e o L13 fez um desabafo sobre a problemática do Ensino Básico na rede pública não preparar o estudante para a universidade, levando-o em alguns casos à evasão do curso de graduação. Essa resposta foi reproduzida na figura 59:

Figura 59 - Resposta à questão 6 apresentada pelo licenciando L13.



Produto: matéria que não é passada na escola estadual e na faculdade é cobrada. O grande problema do ensino está na Educação Básica para a Educação Superior onde muitos alunos que almejam um curso superior depa-ram com a dificuldade e defazagem de aprendizado que muitas vezes o desanima de continuar os estudos. Não sei se o a sua pesquisa toma uma atenção do que é passado na Ed. Básica e pq não se exige mais dos alunos.

Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L13.

Portanto, apenas 21,8% dos licenciandos conseguiram validar efetivamente a propriedade em todo o conjunto $\mathbb{Z}$, sendo que 16 utilizaram justificativas similares à solução II e um fez uso do PIF. Em virtude disso, se torna inevitável o seguinte questionamento: Será que a formação do futuro professor promove o desenvolvimento das suas habilidades e competências relacionadas à demonstração, levando-o abdicar da mera constatação numérica e a consolidar a elaboração de provas conceituais? Infelizmente não será possível respondê-lo nesta pesquisa. Porém, conforme propomos nas considerações finais, esperamos retornar a campo e investigar esta questão com os mesmos sujeitos que constituíram a nossa amostra, quando eles estiverem próximos a concluir o curso de Licenciatura em Matemática.

Além disso, observamos que nenhum dos participantes escreveu que a afirmação era falsa ou utilizou conceitos de congruência para validá-la, conforme proposto na solução I (veja a página 157). Uma explicação possível para isso seria o fato dos estudantes terem cursado apenas as disciplinas do primeiro período, as quais não previam o estudo da aritmética modular. Quanto ao nível de formalidade que os participantes empregaram em suas respostas, podemos dizer que não houve um consenso entre eles, conforme notamos nas justificativas semelhantes à solução II.

4.7 ANÁLISE DA QUESTÃO 7

4.7.1 Análise a *priori* da questão 7

Apesar da gama de teoremas que abrangem a Matemática, apenas alguns desses resultados são familiares aos alunos durante a Educação Básica. Dentre eles, o Teorema de Pitágoras, que por estar presente no currículo, é usualmente trabalhado pelos professores em sala de aula. Em função disso, nesta questão, as perguntas giram em torno desse teorema, pois é esperado que os futuros docentes saibam como ensiná-lo quando forem atuar na Educação Básica, especialmente no Ensino Fundamental.

No questionário descrevemos o enunciado do teorema da seguinte forma: “Num triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.” E após enunciá-lo, solicitamos que os estudantes respondessem às seguintes perguntas:

a) Quais argumentos você usaria para garantir que o Teorema de Pitágoras é verdadeiro?

b) Enuncie o Teorema de Pitágoras sob a forma de um teorema do tipo “Se... então...”.

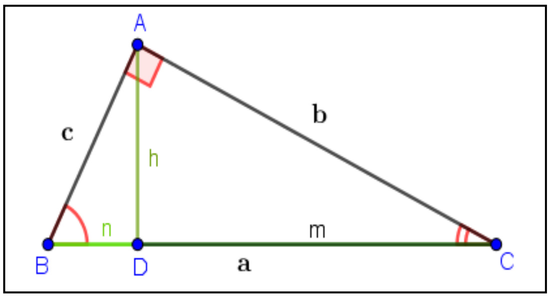
c) Enuncie a recíproca do teorema enunciado no *item b* e argumente se ela é ou não verdadeira.

Com relação ao item (a), o nosso objetivo era analisar quais foram os argumentos que os ingressantes utilizaram para validar o Teorema de Pitágoras. A nossa motivação em solicitar que eles justificassem este resultado se deve à leitura dos documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a qual prescreve que no 9º ano do Ensino Fundamental o aluno já deve ser capaz de demonstrá-lo por meio da semelhança de triângulos (BRASIL, 2017, p. 270-271). No caso desta pesquisa, os sujeitos que constituem a nossa amostra já concluíram a Educação Básica, mas será que eles foram capazes de justificar este famoso teorema, seja por meio da noção de semelhança ou de outras estratégias? Retomaremos este questionamento na análise a *posteriori*.

Apresentamos a seguir uma possível justificativa para o Teorema de Pitágoras, utilizando justamente a noção de semelhança.

Para isso, considere o triângulo ABC, retângulo em A, ilustrado na figura 60. Ao traçar a altura $AD \doteq h$ relativa à hipotenusa $CB \doteq a$, e sabendo que tais segmentos são perpendiculares, obtêm-se dois triângulos semelhantes ao inicial (caso AA), pois, por meio dos ângulos complementares, temos as seguintes congruências: $A\hat{B}C \equiv C\hat{A}D$ e $B\hat{C}A \equiv D\hat{A}B$.

Figura 60 - Demonstração do Teorema de Pitágoras por semelhança de triângulos.



Fonte: Autoria própria.

Por meio da semelhança entre os triângulos $ABC \sim DBA$ e $ABC \sim DAC$, segue diretamente a proporção entre lados homólogos e isso resulta nas seguintes relações:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \quad e \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{m}$$

As igualdades anteriores fornecem que $c^2 = an$ e $b^2 = am$, duas relações métricas no triângulo retângulo. Adicionando ambas, temos que:

$$c^2 + b^2 = an + am = a(n + m) = a.a = a^2$$

Portanto, reorganizando os temos, segue que $a^2 = b^2 + c^2$, em outras palavras, num triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Ressaltamos novamente que o nosso argumento, o qual também poderia ser considerado como uma demonstração, consiste em apenas uma possível resposta para o item (a) da questão 7. Contudo, apesar do arsenal de provas existentes para o Teorema de Pitágoras, a nossa conjectura era de que a maioria dos licenciandos não conseguiria justificá-lo por meio de argumentos válidos, em consonância com a pesquisa de Mateus (2015), onde a autora constatou que a maior parte dos futuros professores não domina estratégias para apresentar demonstrações de teoremas que estão presentes no currículo do Ensino Fundamental (p. 93). Por “argumentos válidos” consideramos aqueles que são convincentes e fundamentados em pré-requisitos que permitiriam elaborar uma prova. Deste modo, durante a análise dos questionários respondidos pelos participantes, o nosso foco era distinguir entre os que conseguiram descrever argumentos válidos e os que não atingiram esse propósito, a fim de possibilitar a categorização dos dados.

Com relação aos itens (b) e (c), os teoremas no âmbito da Matemática podem ser enunciados na forma condicional, em que a hipótese (aquilo que se assume como conhecido) e a tese (aquilo que é objeto da prova) são explicitamente destacadas. Nessa formulação, a hipótese aparece imediatamente após a conjunção condicional *se* e a tese segue imediatamente ao advérbio *então*. Desta forma, a implicação $A \Rightarrow B$ (lê-se: se A então B), indica que a condição A deve ser satisfeita necessariamente para que B seja verdadeira.

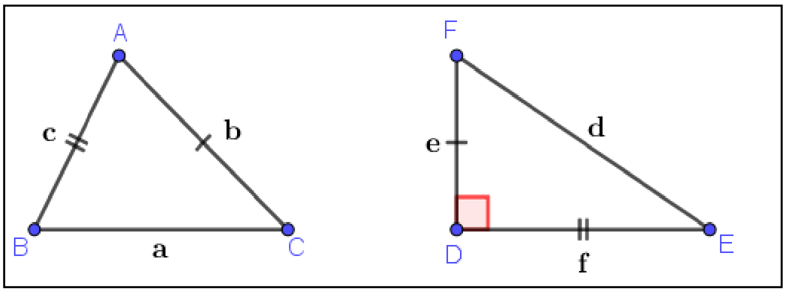
Por outro lado, podemos pensar na recíproca de uma implicação, ou seja, $B \Rightarrow A$ (lê-se: se B então A), em que a tese passa a ser hipótese e vice-versa. Quando a implicação e sua recíproca são verdadeiras, dizemos que a ocorrência de A é uma condição necessária e suficiente para garantir que B também ocorre, e denotamos por $A \Leftrightarrow B$ (lê-se: A se, e somente se, B). É importante observar que a recíproca de uma afirmativa verdadeira pode ser falsa.

Para ilustrar isso, vamos tomar como exemplo o conteúdo de matrizes, usualmente abordado no 2º ano do Ensino Médio. Considere as matrizes M e N de ordem n e O a matriz nula também de ordem n. A implicação "se $M = O$ ou $N = O$ então o produto $MN = O$" é válida e pode ser facilmente demonstrada com aritmética básica. Entretanto, a recíproca não é válida para o conjunto das matrizes, pois, é possível encontrar duas matrizes não nulas cujo produto é igual à matriz nula.

Com base na discussão anterior, no item (b) da questão 7, os objetivos eram identificar se os estudantes possuíam discernimento do que é hipótese e tese numa sentença matemática e se os mesmos eram capazes de reescrever um enunciado direto sob a forma condicional. No caso do Teorema de Pitágoras, a hipótese é que o triângulo é retângulo e a tese é o fato da soma dos quadrados dos catetos ser igual ao quadrado da hipotenusa. Logo, sugerimos como uma possível solução, o seguinte enunciado: *Se* um triângulo é retângulo *então* a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Já no item (c), os objetivos eram verificar se os licenciandos dominavam o significado da palavra recíproca no contexto matemático e se eram capazes de enunciar a recíproca do Teorema de Pitágoras, além de caracterizar quais as estratégias utilizadas pelos estudantes para decidir se a volta do teorema era verdadeira ou falsa. Com base no item anterior, sugerimos como uma possível solução, o seguinte enunciado: *Se* num triângulo a medida de um lado ao quadrado for igual à soma dos quadrados dos outros dois lados *então* o triângulo é retângulo. Note que enunciar a recíproca do teorema possui um grau maior de dificuldade, pois não podemos utilizar na hipótese os termos catetos e hipotenusa, visto que não sabemos a *priori* se o triângulo é de fato retângulo. E para provar que a recíproca do teorema é verdadeira, vamos assumir por hipótese que no triângulo ABC vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$ e mostrar que isso implica num triângulo retângulo. Para isso, uma possibilidade é considerar dois triângulos ABC e DEF, sendo o segundo retângulo em D, cujos catetos DE e DF sejam congruentes a AB e AC, respectivamente, como mostra a figura 61.

Figura 61 - Demonstração da recíproca do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Autoria própria.

O nosso argumento consiste em comparar ambos os triângulos e utilizando a implicação do Teorema de Pitágoras, concluir que necessariamente o triângulo ABC é retângulo. Sabendo que o triângulo DEF é retângulo em D, segue que $d^2 = e^2 + f^2$. Como $e = b$ e $f = c$, ao substituir na última equação, temos que $d^2 = b^2 + c^2$. Por hipótese, $d^2 = a^2$, o que resulta na igualdade entre os lados d e a. Logo, por congruência de triângulos (caso LLL), ambos os triângulos são congruentes e, como DEF é retângulo em D, segue diretamente que o triângulo ABC é retângulo em A, mostrando que a recíproca do teorema é também verdadeira.

Portanto, mesmo não solicitando isto na questão 7, como a implicação e a recíproca são verdadeiras, podemos concluir que o enunciado do Teorema de Pitágoras pode ser reescrito utilizando a bi-implicação ($\Leftrightarrow$), ou seja, a expressão “se, e somente se”, da seguinte maneira: Um triângulo é retângulo se, e somente se, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

É importante mencionar que as pesquisas de Mateus (2015) e Ferreira (2016) influenciaram na formulação dos itens (b) e (c), visto que em suas respectivas investigações, os autores utilizaram questões semelhantes visando atingir os objetivos que descrevemos anteriormente. Além disso, o foco da análise das respostas descritas pelos licenciandos nesses itens era distinguir entre os que conseguiram enunciar corretamente a implicação na forma condicional e a recíproca do Teorema de Pitágoras dos que enunciaram incorretamente, a fim de categorizar os dados coletados.

4.7.2 Análise *a posteriori* da questão 7

Em linhas gerais, os objetivos desta questão eram analisar no item (a) os argumentos utilizados pelos licenciandos para garantir a veracidade do Teorema de Pitágoras no contexto da Educação Básica e identificar nos itens (b) e (c) se os estudantes conseguiam discernir entre hipótese e tese e enunciar a implicação e a recíproca do teorema.

4.7.2.1 Argumentos utilizados pelos licenciandos para validar o Teorema de Pitágoras

Ao iniciar a análise a *posteriori* da questão 7(a), estávamos interessados em identificar os licenciandos que conseguiram ou não utilizar argumentos válidos para justificar o Teorema de Pitágoras. Neste estudo consideramos "argumentos válidos" os que além de serem convincentes, são fundamentos em pré-requisitos necessários que permitiriam demonstrar o teorema. Contudo, constatamos que separar a análise dos dados em apenas dois grupos seria insuficiente para classificar todos os casos, dada a diversidade de respostas dos licenciandos que não conseguiram apresentar argumentos válidos. Por essa razão, subdividimos essa classe em outras seis (argumentos empíricos, contraditórios, incompletos, restritos a casos particulares, autoritários e sem justificativa), conforme descrito na tabela 11 que ilustra os tipos de argumentos observados no item (a).

Tabela 11 - Distribuição dos tipos de argumentos presentes na questão 7(a).

Tipos de argumentos	Frequência
Sem justificativa	33
Empíricos	20
Válidos	11
Contraditórios	8
Incompletos	4
Restrito a casos particulares	1
Autoritário	1
TOTAL	**78**

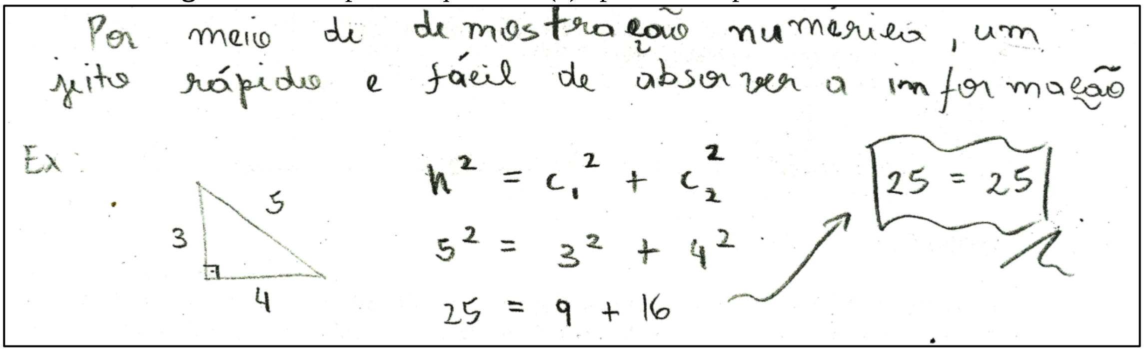
Fonte: Autoria própria

É importante destacar também que ao propor o item (a) estávamos interessados em analisar os tipos de argumentos que os futuros professores indicariam para garantir que o teorema de Pitágoras é verdadeiro e não necessariamente a elaboração de uma prova matemática.

Na tabela 11 verificamos que a maior frequência com 33 licenciandos diz respeito aos que não apresentaram justificativas no item (a), sendo que 11 deixaram a questão em branco e 22 afirmaram que não sabiam argumentar sobre a validade do teorema geométrico. Recordemos que nas questões 5 e 6 (veja o quadro 15 e a tabela 10, respectivamente) também observamos que o maior percentual da amostra não conseguiu apresentar fundamentos para demonstrar a afirmação geométrica e algébrica, respectivamente.

Outro índice semelhante ao observado na questão 6 foi que, dentre os licenciandos que se propuseram a argumentar sobre o Teorema de Pitágoras, o maior percentual deles (25,6% da amostra) utilizou fundamentos empíricos (verificação numérica, simples desenhos ou experimentação), sendo que o mais recorrente foi a constatação numérica. Observamos isso na figura 62, em que o estudante L37 recorreu à aplicação do teorema no clássico triângulo de medidas 3, 4 e 5 para “garantir” a veracidade do resultado.

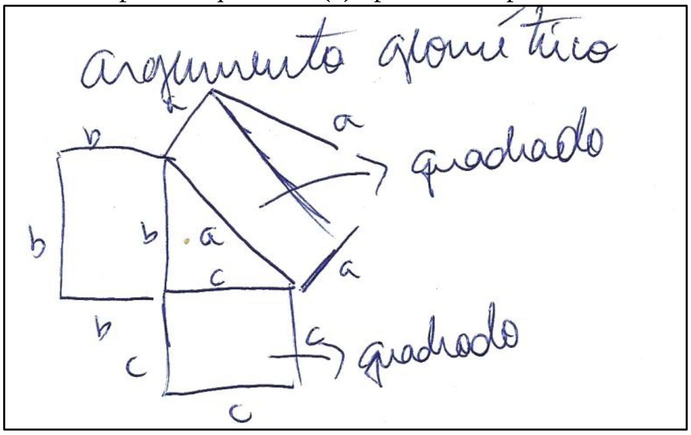
Figura 62 - Resposta à questão 7(a) apresentada pelo licenciando L37.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L37.

Já outros fizeram simplesmente um desenho, como foi o caso do discente L61, que apresentamos na figura 63:

Figura 63 - Resposta à questão 7(a) apresentada pelo licenciando L61.



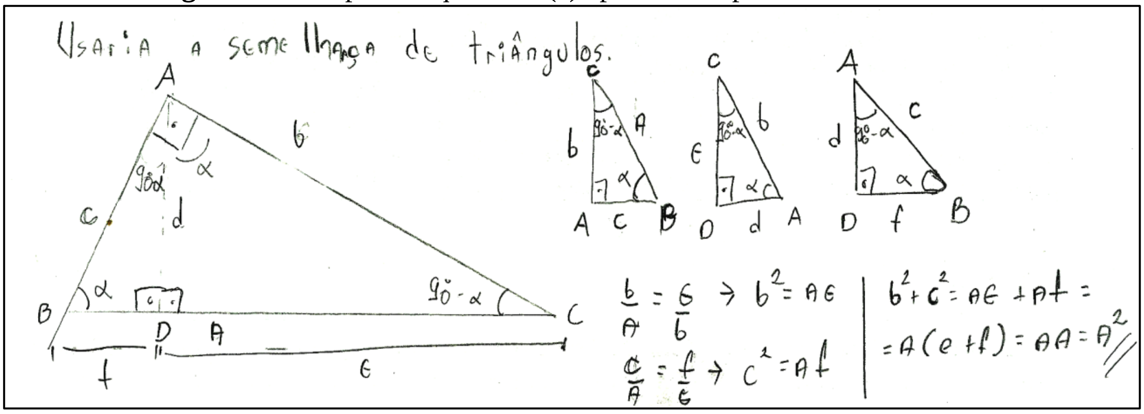
Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L61.

Note que os estudantes L37 e L61 assumiram (ainda que inconscientemente) a validade do teorema para elaborar o seu argumento, uma vez que não se pode garantir, a *priori*, que em qualquer triângulo retângulo sempre será possível construir três quadrados sobre os seus lados, de modo a área do maior seja igual a soma das áreas dos outros dois, conforme sugere o desenho ilustrado na figura 63. Desta maneira, o uso das expressões *"demonstração numérica"* e *"argumento geométrico"* é equivocado, pois não consistem em argumentos matemáticos para convencer outrem sobre a legitimidade do teorema. Contudo, acreditamos que a partir do momento em que o Teorema de Pitágoras é demonstrado em sala de aula, a interpretação geométrica ilustrada na figura 63 deveria ser enfatizada, evitando reduzir esse teorema a uma igualdade algébrica sem significado para os alunos.

Outros participantes recorreram a experimentos matemáticos, seja por meio de recortes para comparar a relação entre as áreas dos quadrados sobre os lados do triângulo retângulo, por meio do material dourado para "completar" os quadrados ou ainda *"[...] experimentos como colocar a água nos quadrados dos catetos e deixar cair no quadrado da hipotenusa (pode ser por meio de vídeo)"* (Resposta do L68), ainda que esse último se aproxime mais da noção de volume do que da comparação entre as áreas.

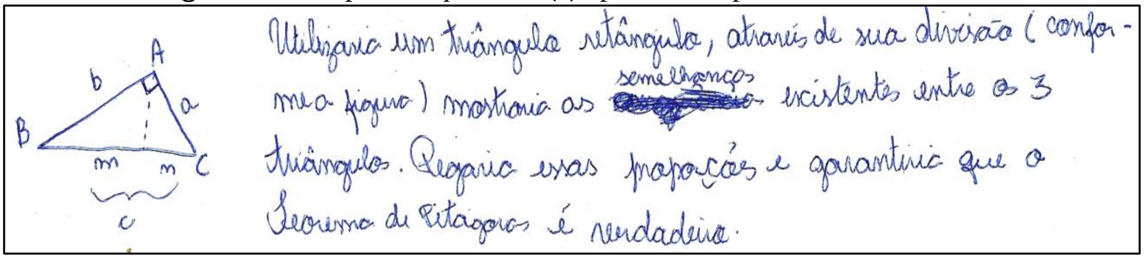
Retomando os índices descritos na tabela 11, observamos que apenas 11 licenciandos (14,1% da amostra) conseguiram apresentar argumentos válidos para justificar o Teorema de Pitágoras. Dentre esses licenciandos, a argumentação mais usual foi por meio das noções de semelhança de triângulos e esteve presente nas respostas de 6 estudantes. Duas delas estão ilustradas nas figuras 64 e 65 descritas pelos discentes L59 e L71, respectivamente:

Figura 64 - Resposta à questão 7(a) apresentada pelo licenciando L59.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L59.

Figura 65 - Resposta à questão 7(a) apresentada pelo licenciando L71.

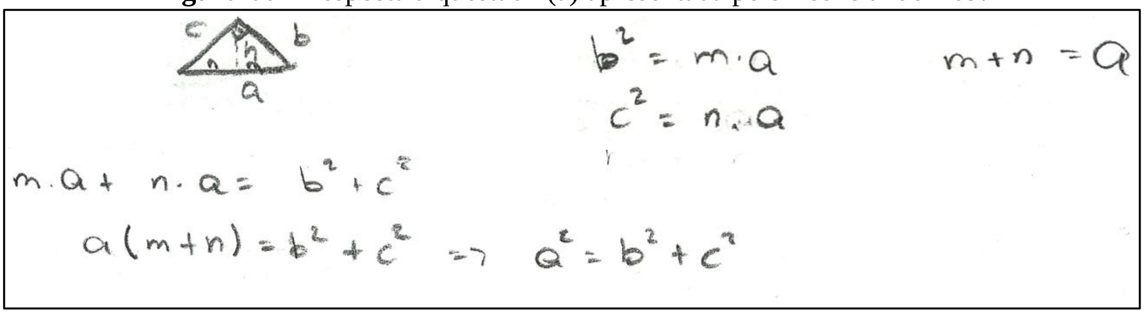


Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L71.

Note que a resposta do L59 é idêntica à solução que propomos na análise a *priori* (veja a página 167) a qual não consiste somente num argumento válido, como poderia ser também uma possível demonstração para o teorema. Entretanto, note que no enunciado do item (a) solicitamos apenas que os sujeitos pesquisados argumentassem sobre a afirmação e é justamente por esta razão que classificamos a resposta do L71 (e de outros 4 estudantes) na mesma classe, pois embora ele não tenha desenvolvido o seu raciocínio, observa-se em sua resolução um conhecimento geométrico e as premissas necessárias para garantir a validade do teorema.

O participante L69 justificou por meio das relações métricas num triângulo retângulo, conforme vemos na figura 66. Novamente, se exigíssemos uma prova formal esse estudante deveria ter utilizado os critérios de semelhanças para concluir que ambas as relações são verdadeiras. Porém, em seu discurso se verifica que o mesmo soube recorrer a ambas as igualdades e aplicá-las corretamente ao seu raciocínio. Deste modo, consideramos que o seu argumento é válido.

Figura 66 - Resposta à questão 7(a) apresentada pelo licenciando L69.

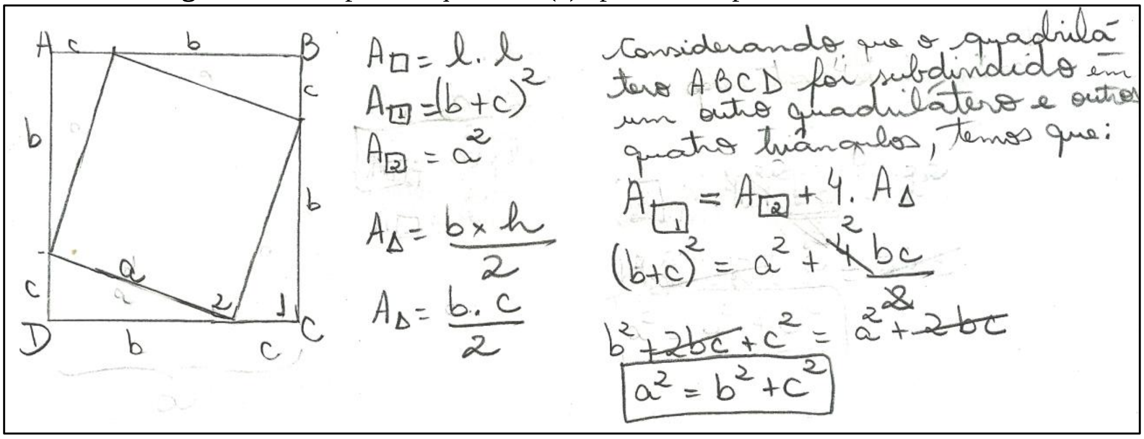


Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L69.

Além das justificativas anteriores, verificamos que 4 estudantes utilizaram argumentos geométricos para validar o teorema, por meio de dois raciocínios diferentes. Três participantes, dentre eles o L17, utilizou quatro triângulos retângulos de hipotenusa a e catetos b e c, a fim de formar dois quadriláteros de áreas distintas, conforme sugere a figura

67. Ao considerar que a área do quadrilátero maior $ABCD$ é dada pela soma das áreas dos quatro triângulos e do quadrilátero menor, obteve a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 67 - Resposta à questão 7(a) apresentada pelo licenciando L17.

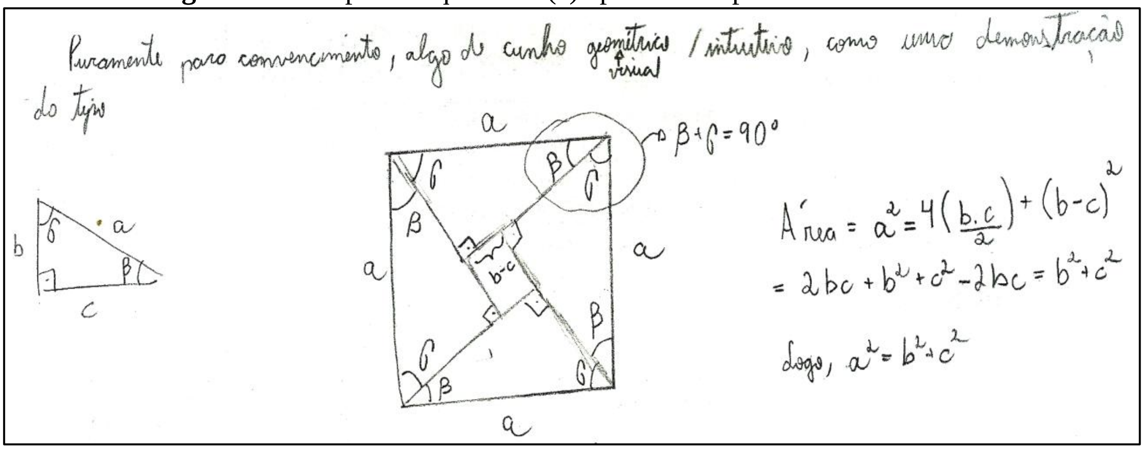


Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L17.

Entretanto, apesar da iniciativa do L17 em propor um argumento visual, sobretudo no âmbito da Educação Básica, é importante mencionar que duas verificações foram omitidas. Como assegurar que ambos os quadriláteros são quadrados? Observe que o discente se baseou simplesmente no esboço e não descreveu os fundamentos que garantem a congruência dos lados e dos ângulos internos desses quadriláteros. Se a resolução não tivesse essas lacunas, poderíamos até afirmar que consiste numa prova visual, conforme problematizamos na subseção 1.1.5, porém ainda é plausível classificá-la como argumento válido.

Já o estudante L45 também utilizou uma argumentação geométrica, contudo ligeiramente distinta da que apresentamos anteriormente, como vemos na figura 68:

Figura 68 - Resposta à questão 7(a) apresentada pelo licenciando L45.



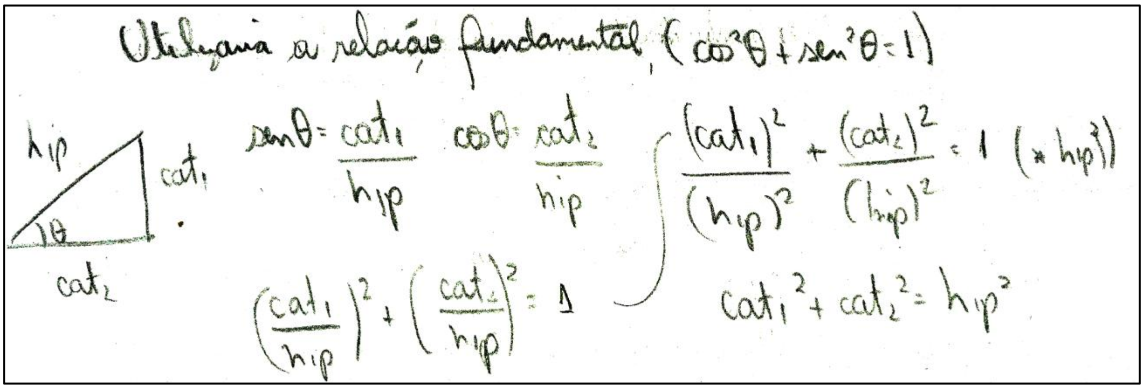
Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L45.

Note que a configuração dos quatro triângulos retângulos é diferente, sendo a hipotenusa a forma os lados do maior quadrilátero. Contudo, aparentemente o L45 teve a preocupação de indicar que ele é um quadrado, visto que a soma dos ângulos circulados é igual a 90º. Por outro lado, esse mesmo cuidado faltou para redigir que o quadrilátero menor também é um quadrado. Apesar disso, consideramos que os argumentos apresentados são válidos para garantir a veracidade do teorema.

Portanto, a nossa conjectura de que a maioria dos licenciandos não conseguiria justificar o Teorema de Pitágoras por meio de argumentos válidos foi confirmada, visto que apenas 14,1% da amostra obteve êxito em suas respostas. Esse dado não foi diferente do que Mateus (2015, p. 98) descreveu em sua pesquisa. Durante a sua avaliação diagnóstica, a pesquisadora solicitou aos 10 futuros professores que apresentassem uma demonstração para esse teorema e apenas 2 (ou 20% da amostra) conseguiram responder adequadamente[68].

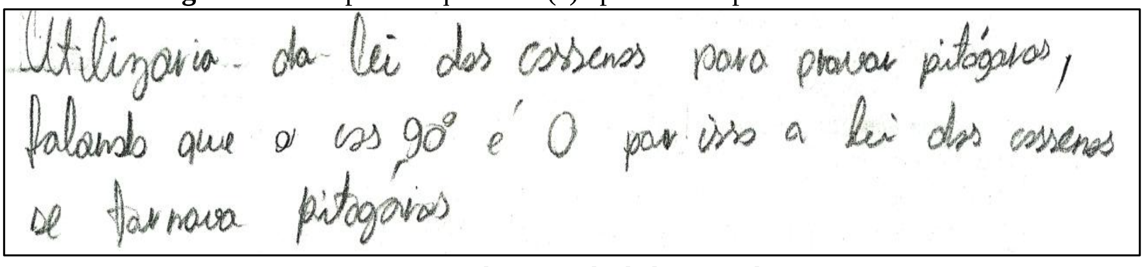
Ainda com relação à pesquisa de Mateus (2015, p. 95), a autora afirma que "a prática mais comum foi erroneamente o uso da tese como argumento na tentativa de demonstrar o teorema de Pitágoras". Apesar dessa estratégia não ter sido a mais recorrente em nossa amostra, verificamos que 8 licenciandos cometeram esse equívoco, os quais classificamos como argumentos contraditórios. Nas figuras 69 e 70 apresentamos as respostas dos licenciandos L48 e L51, respectivamente.

Figura 69 - Resposta à questão 7(a) apresentada pelo licenciando L48.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L48.

Figura 70 - Resposta à questão 7(a) apresentada pelo licenciando L51.


Utilizaria da lei dos cossenos para provar pitágoras, falando que o cos 90° é 0 por isso a lei dos cossenos se tornava pitágoras

Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L51.

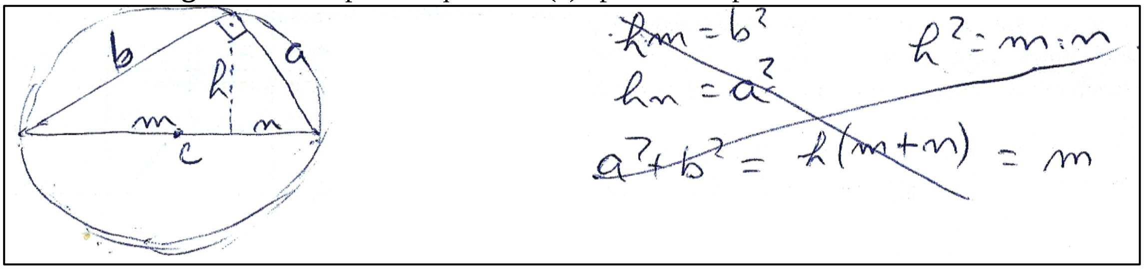
68 Ainda que Mateus (2015) ressalte que ambos não provaram algumas afirmações utilizadas ao longo da demonstração.

Note que os estudantes L48 e L51 recorreram à relação fundamental da trigonometria e a lei dos cossenos, respectivamente, para garantir a validade do teorema. Observe ainda que ambos utilizaram resultados que são justificadas pelo Teorema de Pitágoras, ou seja, fizeram o uso da tese para "argumentar" o teorema. No entanto, conforme sugere Mateus (2015, p. 96), acreditamos que essas argumentações controversas ocorreram por causa da falta de conhecimento dos próprios licenciandos, por não saberem que essas identidades trigonométricas são decorrentes de Pitágoras, e não por uma questão de insipiência sobre a impossibilidade de utilizar a própria tese numa justificativa.

Ainda com relação à classificação anterior, inserimos também o argumento do respondente L15, no qual presumimos uma possível referência à relação fundamental da trigonometria: *"Usaria a demonstração dos cossenos, senos no triângulo retângulo, sua altura"*.

Durante a análise dos questionários, observamos que alguns estudantes iniciaram uma argumentação, porém não foram capazes de concluí-la, por motivos diversos. Por exemplo, o discente L77 representou o triângulo retângulo com suas respectivas projeções, porém não conseguiu escrever as relações métricas corretamente, conforme vemos na figura 71:

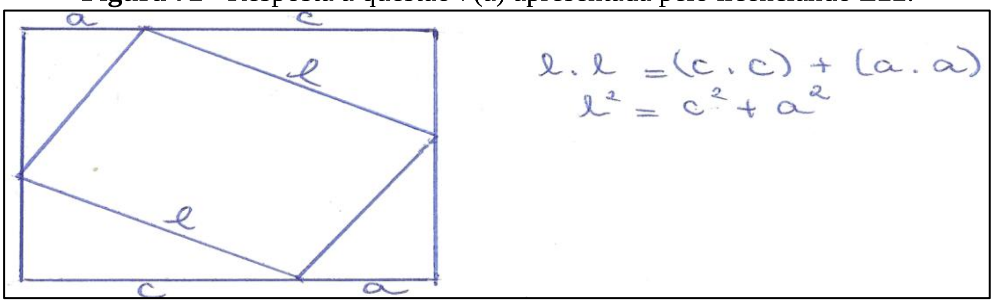
Figura 71 - Resposta à questão 7(a) apresentada pelo licenciando L77.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L77.

Já a resposta do participante L22 ilustrada na figura 72 sugere que ele se lembrou do argumento geométrico que descremos anteriormente na figura 67, mas não conseguiu desenvolver a parte algébrica da justificativa.

Figura 72 - Resposta à questão 7(a) apresentada pelo licenciando L22.

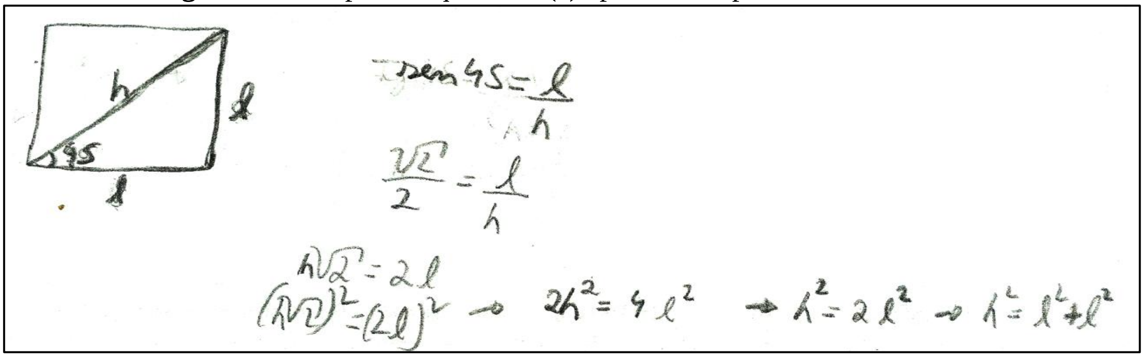


Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L22.

Deste modo, as respostas dos estudantes L77 e L22 (e de outros dois) foram classificadas na classe intitulada “Argumentos incompletos”, a qual reuniu alguns raciocínios que foram iniciados corretamente, mas que não foram devidamente concluídos.

Uma situação isolada foi a resposta dada pelo licenciando L72, o qual restringiu o seu argumento a um caso particular de triângulo retângulo, como vemos na figura 73. Partindo de um quadrado dividido em dois triângulos, em que um dos ângulos é reto e sabendo o valor do $sen(45°)$, o estudante concluiu corretamente que $h^2 = l^2 + l^2$. Porém, por ter utilizado inicialmente um quadrado, esse raciocínio é válido apenas para triângulos retângulos isósceles. Por essa razão não classificamos o seu argumento como válido.

Figura 73 - Resposta à questão 7(a) apresentada pelo licenciando L72.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L72.

Por fim, houve também a situação do estudante L13, o qual apresentou o seguinte argumento para garantir que o teorema é verdadeiro: *“O professor passou na aula passada. Descreveu até chegar à fórmula que conhecemos”*. Inspirados nos esquemas de prova baseados em elementos externos de Harel e Sowder (1998), classificamos o discurso desse sujeito como argumento autoritário, visto que ele se reporta ao professor para validar o teorema.

4.7.2.2 Hipótese, tese e recíproca: as concepções dos licenciandos

Para identificar se os licenciandos eram capazes de discernir entre hipótese e tese e enunciar a implicação na forma condicional e a recíproca do Teorema de Pitágoras, propusemos dois itens (b) e (c) baseados no seguinte enunciado: “Num triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotensa”.

Com relação ao item (b), constatamos que mais da metade da amostra (41 respondentes) foi capaz de identificar corretamente o que é hipótese e tese num enunciado e reescrevê-lo na forma condicional (Se... então...). Para comprovar esse resultado, apresentamos a seguir a resposta de quatro licenciandos:

"Se um triângulo possui um ângulo reto, então o quadrado do lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados dos lados que formam o ângulo reto." (Resposta do L57)

"Seja um triângulo ABC, se o triângulo for reto em A, então $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$". (Resposta do L59)

"Seja ΔABC um triângulo retângulo com os lados $a > b \geq c$, então $a^2 = b^2 + c^2$." (Resposta do L70)

"Se for um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa." (Resposta do L27)

É interessante notar a diversidade de formulações corretas que apareceram no item (b) como, por exemplo, a do L70 que considerou a possibilidade do triângulo retângulo ser isósceles (quando $b = c$). Além disso, note que embora o L27 não tenha escrito a palavra "então", consideramos que o mesmo possui compreensão dos significados de hipótese e tese numa sentença matemática e por isso adotamos seu enunciado como certo.

Entretanto, nem todos os licenciandos que se propuseram a discorrer o item (b), obtiveram êxito em suas respostas. Dos 52 estudantes que responderam o item (b), 11 deles não conseguiram escrever corretamente o enunciado na forma condicional. O erro mais usual (observado 3 questionários) foi redigi-lo da seguinte forma: *"Se a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa então esse triângulo é retângulo."* conforme verificamos no questionário do L37, por exemplo. Note que essa frase, evitando o uso de nomenclaturas específicas do triângulo retângulo, consiste na recíproca do teorema e não na implicação, conforme o enunciado da questão.

A resposta de outros estudantes sugere que eles não têm a percepção da diferença entre "a soma dos quadrados dos catetos" e "a soma dos catetos ao quadrado", conforme se verifica na resolução do L42:

"Se a soma de dois lados do Δ retângulo são maiores que o outro lado, então o seu maior lado (a hipot.) ao quadrado, é igual ***à soma dos outros dois lados ao quadrado****."*

Todas as respostas semelhantes à anterior foram consideradas incorretas. Além disso, note que a redação do discente L42 sugere que ele não possui conhecimento sobre o critério de existência, visto que em qualquer triângulo a soma das medidas de dois dos seus lados é estritamente maior do que a medida do terceiro.

Outro discente que não soube discernir entre hipótese e tese numa sentença matemática foi o L19, ao escrever: *"Se encontrarmos o valor de dois lados então é possível aplicar Pitágoras para encontrar o valor do terceiro lado"*. Na realidade a sua escrita remete à aplicação e à utilidade do teorema, já que se conhecemos dois lados num triângulo retângulo, por meio de Pitágoras é possível descobrir o terceiro.

Por fim, outra resposta incorreta que consideramos importante destacar foi dada pelo sujeito L18, o qual dissertou: *"Se temos um triângulo retângulo de lados ABC, como por Pitágoras sabemos que a* ***soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa****, então $a^2 = b^2 + c^2$"*. Verifica-se que o seu enunciado é cíclico, pois ele adota a expressão em negrito como hipótese e tese, simultaneamente. Sem mencionar ainda que ele não denominou quem são os lados a, b e c, pois baseado na nossa experiência profissional, alguns alunos não costumam conceber, por exemplo, a igualdade $b^2 = a^2 + c^2$, com b sendo a medida da hipotenusa, como uma possível formulação do Teorema de Pitágoras, visto que a hipotenusa geralmente está associada a letra a.

É importante ressaltar que 12 discentes deixaram o item (b) em branco e outros 14 simplesmente afirmaram que não sabiam. A tabela 12 apresenta uma síntese das respostas observas na questão 7(b).

Tabela 12 - Síntese das respostas a questão 7(b).

Tipos de respostas	**Frequência**
Corretas	41
Incorretas	11
Em branco / Não sei	26
TOTAL	**78**

Fonte: Autoria própria.

Ainda que 52,6% da amostra tenha conseguido responder corretamente o item (b), note que somando as respostas incorretas e as em branco, os índices da tabela 12 indicam também que praticamente a outra metade dos estudantes (47,4% da amostra) não foi capaz de enunciar o teorema na forma condicional. Como a amostra era composta de licenciandos, isso indica que estes não vivenciaram esse tipo de argumentação na Educação Básica, embora, com certeza, todos tenham tido contato com o Teorema de Pitágoras.

Com relação ao item (c), verificamos que apenas 11 licenciandos dominavam o significado da palavra "recíproca" no âmbito matemático e souberam enunciar a recíproca do Teorema de Pitágoras. É importante ressaltar que estes também acertaram o item (b), conforme era de se esperar, uma vez que se o discente não foi capaz de discernir o que é hipótese e tese num enunciado, dificilmente conseguiria escrever a recíproca desse resultado. A seguir descrevemos as respostas de alguns deles:

"Se a soma dos quadrados de dois lados de um triângulo é igual ao quadrado do terceiro, então ele é um Δ retângulo." (Resposta do L66)

"Se a soma dos quadrados dos dois lados menores de um triângulo é igual ao quadrado do maior lado, então este é um triângulo retângulo." (Resposta do L64)

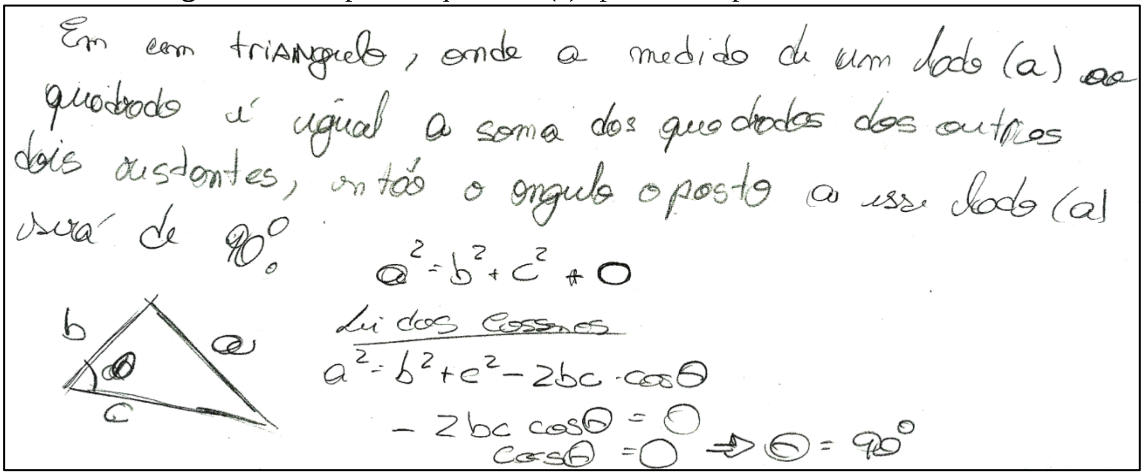
"Se a soma dos quadrados dos lados adjacentes a um ângulo θ é igual ao quadrado do lado oposto a θ, então esse ângulo é reto." (Resposta do L65)

"Se em um triângulo de lados a, b, c verifica-se que $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo." (Resposta do L45)

Com relação aos extratos anteriores, note que na escrita do L65 faltou mencionar que os lados são de um triângulo qualquer e na resposta do L45, assim como comentamos anteriormente, faltou explicitar a adoção do lado a como sendo o maior do triângulo em questão (outros três licenciandos apresentaram respostas semelhantes a essa). Contudo, apesar desses pequenos equívocos descritos no item (c), neste caso julgamos que ambos os estudantes compreendem o significado da recíproca de um teorema, visto que souberam identificar corretamente a hipótese e a tese a serem consideradas e tiveram o cuidado de não utilizar na formulação da hipótese nomenclaturas próprias do triângulo retângulo.

Entretanto, dentre os licenciandos que responderam corretamente a recíproca do teorema de Pitágoras, identificamos que 5 não argumentaram se ela era verdadeira ou falsa e 6 afirmaram que era verdadeira, sendo que apenas 4 deles apresentaram algum tipo argumentação. O argumento mais usual foi aplicar a lei dos cossenos no triângulo para garantir que o ângulo oposto ao maior lado era reto, uma vez que o maior lado ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, por hipótese. Na figura 74 apresentamos a resposta do L53, um dos 3 licenciandos que utilizaram essa estratégia.

Figura 74 - Resposta à questão 7(c) apresentada pelo licenciando L53.

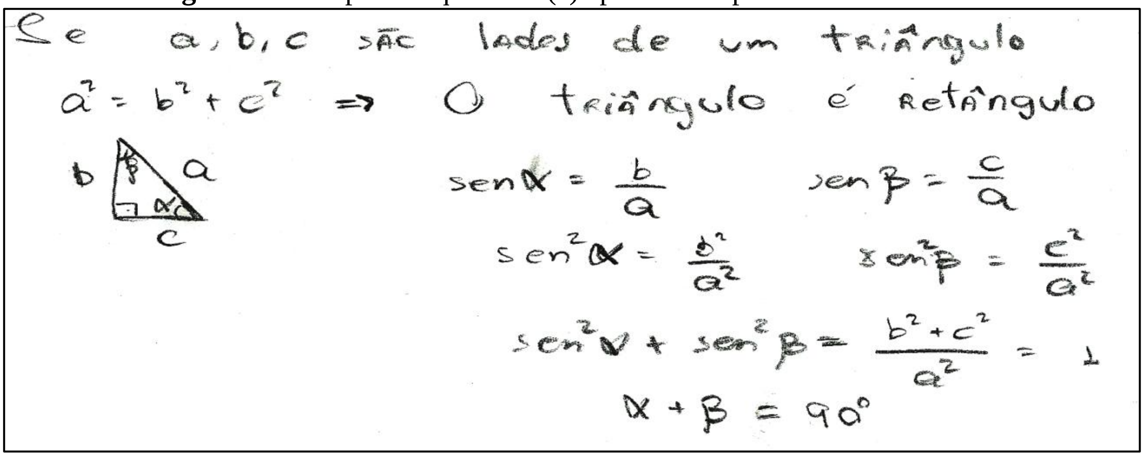


Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L53.

A rigor poderíamos contestar a justificativa desses três estudantes, pois conforme já observado, a demonstração usual da lei dos cossenos faz uso do Teorema de Pitágoras e nenhum deles conseguiu apresentar fundamentos para validá-lo no item (a). Contudo, assumindo a veracidade de ambos os resultados, consideramos que a argumentação apresentada é convincente e criativa.

Além da estratégia anterior, o quarto licenciando que descreveu argumentos para validar o enunciado do item (c) foi o L69, conforme vemos na figura 75. No entanto, ele não se atentou que a razão trigonométrica $sen(x) = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$ é válida apenas em triângulos retângulos, que constitui justamente a tese da recíproca de Pitágoras. Logo, por utilizar a tese como hipótese, a argumentação do estudante é inconsistente.

Figura 75 - Resposta à questão 7(c) apresentada pelo licenciando L69.



Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L69.

Portanto, apenas 3 licenciandos que escreveram corretamente a recíproca do Teorema de Pitágoras foram capazes de apresentar argumentos consistentes para validá-la.

Por outro lado, dentre os 37 estudantes que responderam o item (c), 26 deles não formularam corretamente a recíproca do Teorema de Pitágoras. O erro mais comum (observado em 17 questionários) foi redigi-la de forma semelhante à resposta do sujeito L17: *"Se a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, então temos um triângulo retângulo"*. Conforme já alertávamos na análise a *priori*, o item (c) possuía um grau maior de dificuldade, justamente por não poder utilizar na hipótese certas expressões, como catetos e hipotenusa, visto que são características inerentes do triângulo retângulo (tese da recíproca).

É importante salientar que não detalharemos nesta pesquisa os argumentos dos licenciandos que não conseguiram enunciaram corretamente a volta do teorema. Contudo, dentre eles, chamou a nossa atenção a resposta equivocada do estudante L47, ilustrada na figura 76:

Figura 76 - Resposta à questão 7(c) apresentada pelo licenciando L47.

Se a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, então é um triângulo retângulo.

Não é verdadera pois pode haver um triângulo não retângulo que por coincidência tenha o quadrado da hipotenusa (lado oposto ao maior ângulo) igual a soma do quadrado dos catetos

Fonte: Extrato do protocolo do licenciando L47.

Como o sujeito L47 formulou corretamente a implicação no item (b), ele considera que se o triângulo é retângulo então a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, mas em consonância com a figura 76, ele considera também que a recíproca é falsa. Ou seja, esse estudante pressupõe erroneamente que o teorema de Pitágoras não pode ser escrito sob a forma de bi-implicação (⇔), utilizando a expressão "se, e somente se", conforme descrevemos na análise a *priori*.

Além do erro mais comum descrito anteriormente, de utilizar como hipótese terminologias específicas do triângulo retângulo, destacamos ainda que alguns estudantes escreveram sentenças praticamente idênticas para a implicação e para a recíproca; enquanto outros voltaram a utilizar a expressão "soma dos catetos ao quadrado" ou adotaram como hipótese que um dos ângulos do triângulo já era reto.

É importante mencionar que 15 estudantes deixaram o item (c) em branco e outros 26 afirmaram que não sabiam. A tabela 13 apresenta uma síntese das respostas a questão 7(c).

Tabela 13 - Síntese das respostas a questão 7(c)[69].

Tipos de respostas	**Frequência**
Corretas	11
Incorretas	26
Em branco / Não sei	41
TOTAL	**78**

Fonte: Autoria própria

Deste modo, podemos afirmar que os resultados apresentados pelos licenciandos nos itens (b) e (c) não foram satisfatórios, assim como observado também na pesquisa de Mateus (2015). Em sua investigação, apenas 2 futuros professores (20% da amostra) enunciaram corretamente a implicação do Teorema de Pitágoras na forma condicional e somente um escreveu a recíproca de forma adequada, apesar de não ter justificado se era verdadeira.

Com relação à nossa investigação, a questão 7 mostrou que, embora os licenciandos ingressantes conheçam o Teorema de Pitágoras, apenas 14,1% deles foi capaz de apresentar argumentos válidos. Em relação à identificação da hipótese e da tese, pouco mais da metade dos estudantes (52,6% da amostra) foi capaz de enunciar a afirmativa na forma condicional (Se... então...). Apesar disso, apenas 11 licenciandos (14,1% da amostra) conseguiram redigir a recíproca do teorema e desses, somente 6 afirmaram sua validade, embora apenas 3 deles tenham conseguido justificar essa veracidade.

Em vista disso, os dados obtidos evidenciam que o objetivo de demonstrar o Teorema de Pitágoras por meio das noções de semelhança parece que não está sendo alcançado, uma vez que os participantes dessa pesquisa são egressos da Educação Básica e a maioria deles (85,9%) não conseguiu apresentar argumentos válidos para justificar esse teorema, apesar do arsenal de demonstrações existentes. Logo, os resultados desta questão reforçam que durante o Ensino Básico não são abordadas satisfatoriamente atividades de argumentação e provas nas aulas de Matemática, priorizando o uso de resultados "prontos" na resolução de problemas.

Além disso, ainda que não seja o foco deste estudo comparar os dados coletados nas três IES, um índice que nos chamou a atenção foi com relação a IES3, onde os licenciandos já

[69] Para o cálculo das frequências, consideramos apenas parte da questão 7(c), nos restringindo a escrita da recíproca do Teorema de Pitágoras.

haviam cursado Geometria Euclidiana (e a Analítica) no primeiro período. Dos 19 estudantes dessa instituição de ensino, somente 3 conseguiram justificar o Teorema de Pitágoras por meio de argumentos válidos, e na estrutura curricular deste curso é previsto apenas mais uma disciplina obrigatória relacionada à Geometria. Em virtude disso, propomos o seguinte questionamento: Em que medida as disciplinas de Geometria dos cursos de Licenciatura em Matemática têm contribuído para a formação dos futuros professores, uma vez que muitos deles apresentam uma defasagem em relação aos conhecimentos geométricos provinda da Educação Básica? Apesar de não termos a pretensão de respondê-lo neste estudo, podendo vir a ser uma questão para futuras investigações, conforme sugerido nas considerações finais, o índice que apresentamos é alarmante, especialmente porque o ensino de Geometria tem se tornado um círculo vicioso, pois, segundo Pavanello e Andrade (2002, p. 80), "a geometria é pouco ensinada em nossas escolas, principalmente porque os professores consideram sua própria formação em relação a esse conteúdo bastante precária".

4.8 PRINCIPAIS TIPOS DE ARGUMENTAÇÕES IDENTIFICADOS NAS ANÁLISES DAS QUESTÕES 5, 6 E 7(a)

O objetivo desta seção é fazer uma síntese dos principais tipos de argumentações identificados nas análises a *posteriori* das três questões puramente matemáticas, as quais solicitavam aos participantes que mostrassem a validade de alguns resultados.

Com base no quadro 15 e nas tabelas 10 e 11, os quais se referem às distribuições das respostas fornecidas pelos licenciandos nas questões 5, 6 e 7(a), respectivamente, verificamos que a categoria predominante diz respeito aos estudantes que não apresentaram justificativas, a qual reuniu os sujeitos que afirmaram que não sabiam mostrar o resultado ou que simplesmente deixaram a questão em branco. Além disso, constatamos que:

- 59% da amostra não conseguiu mostrar que o quadrilátero IJKL é um paralelogramo (questão 5);
- 78,2% da amostra não soube mostrar que o produto de três números inteiros consecutivos é múltiplo de 3 (questão 6);
- 85,9% da amostra não foi capaz de apresentar argumentos válidos para justificar o Teorema de Pitágoras (questão 7a).

Excluindo a classe dos que não apresentaram justificativas, é possível observar no quadro 15 e nas tabelas 10 e 11 que as categorias referentes à argumentação válida (com referência aos que conseguiram atingir o objetivo da questão) e à argumentação empírica (com referência aos que sugeriram ou fizeram uso de exemplos numéricos, meros desenhos, recorte/dobradura, *softwares*, materiais manipulativos) predominaram dentre os licenciandos que se propuseram a respondê-las. Isso nos motivou a olhar os questionários dos 78 participantes sob uma nova perspectiva. Com base no quadro 16, constatamos que em 41 questionários (52,6% da amostra), pelo menos em uma dessas questões foram empreendidos argumentos válidos e que em 32 questionários (41% da amostra) pelo menos em uma dessas questões foram utilizados argumentos empíricos. Curiosamente a interseção não foi vazia, pois, 12 estudantes (15,4% da amostra) apresentaram ora uma argumentação válida, ora uma argumentação empírica para responder essas questões.

Com relação aos 41 questionários descritos anteriormente, apesar desse número ser superior à metade da amostra, apenas 3 licenciandos conseguiram apresentar argumentos válidos para as três questões matemáticas. Observamos ainda que 25 estudantes obtiveram êxito em apenas uma questão (especialmente na quinta) e 13 empreenderam uma argumentação válida em exatamente duas questões.

Já com relação aos 32 questionários, os quais evidenciaram o uso de argumentos empíricos, não constatamos que esse tipo de justificativa predominou mais no contexto algébrico (questão 6) quando comparado com o geométrico (questões 5 e 7a), ao contrário do que acreditávamos. Na realidade, os índices foram bem semelhantes e até ligeiramente superior no contexto geométrico, conforme se observa no quadro 16, visto que 16 licenciandos (20,5% da amostra) utilizaram verificações numéricas para mostrar que o produto de três números inteiros consecutivos é múltiplo de três e 21 estudantes (26,9% da amostra) empreenderam uma argumentação empírica para justificar o Teorema de Pitágoras ou mostrar que o quadrilátero $IJKL$ era um paralelogramo.

Quadro 16 - Distribuição dos principais tipos de argumentações (válido ou empírico) dos licenciandos observados nas questões 5, 6 e 7(a).

(continua)

L	QUESTÃO 5	QUESTÃO 6	QUESTÃO 7(a)
1			
2			
3		Argumento válido	Argumento empírico
4			
5			Argumento empírico

Quadro 16 – Distribuição dos principais tipos de argumentações (válido ou empírico) dos licenciandos observados nas questões 5, 6 e 7(a).

(continuação)

6		Argumento empírico	Argumento empírico
7			Argumento empírico
8			
9			Argumento empírico
10			
11		Argumento empírico	Argumento empírico
12	Argumento válido	Argumento empírico	
13			
14	Argumento válido	Argumento empírico	
15			
16			
17		Argumento empírico	Argumento válido
18		Argumento empírico	Argumento válido
19			Argumento empírico
20			Argumento empírico
21			
22	Argumento válido	Argumento válido	
23		Argumento empírico	
24			Argumento empírico
25			Argumento empírico
26		Argumento empírico	
27		Argumento empírico	
28			
29		Argumento empírico	
30			
31			
32		Argumento empírico	Argumento válido
33			
34			
35		Argumento empírico	
36			Argumento empírico
37	Argumento válido	Argumento empírico	Argumento empírico
38			Argumento válido
39	Argumento válido		
40		Argumento empírico	
41			
42	Argumento empírico	Argumento empírico	Argumento empírico
43			Argumento empírico
44			
45	Argumento válido	Argumento válido	Argumento válido
46	Argumento válido	Argumento válido	
47	Argumento válido	Argumento válido	
48	Argumento válido		
49		Argumento válido	

Quadro 16 – Distribuição dos principais tipos de argumentações (válido ou empírico) dos licenciandos observados nas questões 5, 6 e 7(a).

(continuação)

50			
51	Argumento válido	Argumento válido	
52	Argumento válido	Argumento válido	
53	Argumento válido		Argumento válido
54	Argumento válido		
55			Argumento empírico
56	Argumento válido	Argumento válido	
57	Argumento válido		Argumento empírico
58	Argumento válido		
59	Argumento válido	Argumento válido	Argumento válido
60			Argumento válido
61	Argumento válido	Argumento válido	Argumento empírico
62	Argumento válido		
63	Argumento válido	Argumento válido	
64	Argumento válido	Argumento válido	Argumento válido
65	Argumento válido		
66	Argumento válido	Argumento válido	Argumento empírico
67	Argumento válido	Argumento válido	
68			Argumento empírico
69	Argumento válido		Argumento válido
70	Argumento válido		
71	Argumento válido		Argumento válido
72		Argumento válido	
73	Argumento válido		
74	Argumento válido		
75	Argumento válido		
76		Argumento válido	
77	Argumento válido	Argumento empírico	
78	Argumento válido		Argumento empírico
TAV[70]	**32**	**17**	**11**
TAE[71]	**1**	**16**	**20**
TOTAL	**33**	**33**	**31**

Fonte: Autoria própria.

Para finalizar esta seção, é importante detalharmos as referências utilizadas para construir o quadro 16. Essencialmente, utilizamos os dados categorizados no quadro 15 e nas tabelas 10 e 11 referentes às questões 5, 6 e 7(a), respectivamente, os quais emergiram durante as respectivas análises a *posteriori*.

[70] Total de Argumentos Válidos (TAV).
[71] Total de Argumentos Empíricos (TAE).

Na coluna da questão 5, identificamos como “argumento válido”, as respostas dos 32 licenciandos que se enquadraram nas classes “Mostrou a congruência entre os triângulos e utilizou uma das propriedades” e “Demonstrou a tese utilizando outros argumentos” e como “argumento empírico” apenas a justificativa de um licenciando (veja a figura 46) que foi categorizada na classe “Apresentou algum erro conceitual”.

Na coluna da questão 6, identificamos como “argumento válido”, os 16 estudantes que apresentaram respostas “Similar(es) à solução II” (veja a página 157) e um discente que utilizou corretamente o PIF (veja a figura 57). E caracterizamos como “argumento empírico” as resoluções dos 16 licenciandos classificadas como “Verificação Empírica”.

Por fim, na coluna da questão 7(a), identificamos como “argumento válido”, os 11 participantes cujas respostas se enquadraram na classe “Válidos” e como “argumento empírico” as 20 justificativas que foram categorizadas na classe “Empíricos”.

Em resumo, embora o quadro 16 mostre um número considerável de argumentos exibidos pelos licenciandos, vale observar os altos índices de respostas incorretas, que não atingiram o objetivo das questões que exigiam argumentação, ou seja, não apresentaram argumento válido, nem empírico.

CAPÍTULO 5
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do estudo desenvolvido ao longo desta dissertação, para apresentar as nossas considerações finais, retomamos a questão de pesquisa e alguns aspectos introdutórios:

Quais as concepções de ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática sobre argumentação, prova e demonstração?

Para responder a essa questão, buscamos atingir o objetivo geral que consiste em investigar as concepções de licenciandos ingressantes sobre argumentação, prova e demonstração e os seguintes objetivos específicos: compreender como esses estudantes interpretam e avaliam as argumentações de alunos e identificar como eles validam alguns resultados matemáticos da Educação Básica.

Neste capítulo, antes de apresentar os principais resultados da nossa investigação com os ingressantes, iniciamos descrevendo sobre o papel da revisão da literatura nesta pesquisa, retomando algumas considerações presentes nesses estudos e dissertamos também sobre a importância do referencial teórico e dos procedimentos metodológicos adotados. E concluímos este capítulo refletindo sobre algumas implicações, especialmente, sobre a necessidade de conceber a temática da argumentação e provas como um recurso metodológico a ser utilizado em sala de aula e apontando as limitações desta pesquisa e as perspectivas para estudos posteriores.

5.1 O PAPEL DA REVISÃO DA LITERATURA

Ao se propor uma problemática de pesquisa é fundamental um olhar cuidadoso sobre os estudos anteriores, a fim de seja possível contribuir efetivamente para o desenvolvimento da temática investigada. Até porque nenhuma pesquisa se inicia do marco zero, isto é, sem inquietações e leituras antecedentes. Tanto é que, inicialmente, a nossa preocupação era investigar as concepções de professores de Matemática em exercício ou até mesmo de licenciandos concluintes. Porém, o levantamento bibliográfico nos mostrou a existência de estudos semelhantes, e em virtude disso, direcionamo-nos aos ingressantes nos cursos de formação inicial. Deste modo, o papel da revisão da literatura foi de possibilitar a familiarização com a temática proposta e de viabilizar as escolhas teóricas e metodológicas.

Particularmente, esta revisão permitiu uma discussão teórica sobre os possíveis significados das noções de argumentação, prova e demonstração no cotidiano, na Matemática e na Educação Matemática, uma reflexão sobre as funções da prova e como elas se articulam em ambientes dinâmicos de Geometria e também algumas considerações sobre demonstração na formação de professores.

Deste modo, a revisão da literatura sobre argumentação, prova e demonstração nos apresentou diversos pontos de vista e resultados a respeito dessas noções, dentre os quais, destacamos:

a) Sobre o papel da prova na Educação Básica:

- Uma demonstração pode assumir diferentes papéis, conforme vimos na seção 1.2, especialmente à luz de De Villiers (1990, 1999). Contudo, os professores da Educação Básica devem optar sempre que possível pelas provas explicativas e considerar a Geometria como um campo fértil para apresentar esse tipo de prova aos seus alunos (HANNA, 1990, 1995, 2000);
- Para muitos professores em exercício ou em formação inicial, o papel da prova matemática se restringe a validar uma afirmação (KNUTH, 2002a; AGUILAR JUNIOR, 2012; FERREIRA, 2016).

b) Sobre a prática argumentativa e demonstrativa em sala de aula:

- Não se observa uma preocupação por parte da maioria dos professores do Ensino Fundamental em desenvolver a habilidade argumentativa e demonstrativa em sua prática docente (AGUILAR JUNIOR, 2012);
- Os *softwares* de GD podem ser potenciais ferramentas no processo de exploração e investigação dentro da sala de aula, permitindo que os alunos estabeleçam *links* entre o raciocínio empírico e dedutivo e fornecendo ideias para a elaboração de justificativas (HOYLES; JONES, 1998; DE VILLIERS, 1999; HANNA 2000; ARCAVI; HADAS, 2000).

c) Sobre a prova rigorosa na formação dos professores de Matemática:

- Durante a formação inicial é importante que os licenciandos dominem a leitura técnica sobre a prova rigorosa, ou seja, que sejam capazes de elaborar e compreender uma demonstração do ponto de vista formal, mas é essencial também que os cursos de Licenciatura favoreçam um olhar crítico aos futuros professores sobre tais provas, a fim de que eles valorizem o processo argumentativo (provas informais, provas pragmáticas, etnoargmentações) dos seus futuros alunos (GARNICA, 1996, 2002);

- A maior parte dos licenciandos não apresenta domínio com relação à produção de demonstrações (ORDEM, 2015);
- Em geral, os professores valorizam e melhor avaliam os tipos de argumentação dos seus alunos que estão mais próximos da prova conceitual, segundo o constructo teórico de Balacheff (AGUILAR JUNIOR, 2012);
- Os professores e licenciandos tendem a privilegiar as demonstrações mais “formais” ou assumir o significado de prova apenas como algo rigoroso, fatos esses que podem estar relacionados à influência da formação acadêmica (AGUILAR JUNIOR, 2012; MATEUS, 2015).

d) Sobre as concepções de professores em exercício ou em formação inicial referentes às noções de argumentação, prova e demonstração:

- Em geral, os licenciandos concluintes não sabem julgar a validade de uma justificativa, pois apresentam uma concepção diferente entre validar e demonstrar uma propriedade. Em virtude disso, eles não utilizam critérios consistentes para avaliar provas e demonstrações (ORDEM, 2015);
- As características dos argumentos que os professores tendem a considerar como mais convincentes, em geral, se relacionam mais à forma (esquema de prova baseado em elementos externos, segundo Harel e Sowder) do que ao raciocínio apresentado (KNUTH, 2002a);
- Os professores em formação inicial tendem a considerar os termos prova e demonstração como sinônimos no contexto matemático (FERREIRA, 2016);
- Em geral, os futuros professores confundem a possibilidade de prova por contraexemplos com a impossibilidade de demonstrar por exemplos (ORDEM, 2015; HAREL; SOWDER, 1998);
- Os licenciandos concluintes e professores tendem a conceber prova e demonstração mais como um tópico de aprendizagem (objeto matemático) do que como um meio de comunicação e compreensão da Matemática (objeto paramatemático) (ORDEM, 2015; KNUTH, 2002b);

- Em geral, os futuros professores têm a concepção de que nem todos os alunos seriam capazes de desenvolver habilidades relativas às provas, utilizando linguagens formais. Porém, acreditam que as provas mais empíricas e menos formais são importantes para a compreensão dos resultados (MATEUS, 2015; KNUTH, 2002b);
- Os licenciandos concluintes consideram importante demonstrar o Teorema de Pitágoras na Educação Básica, ainda que muitos deles não tenham conseguido esboçar uma prova sequer para esse teorema (MATEUS, 2015).

5.2 A IMPORTÂNCIA DO REFERENCIAL TEÓRICO E DOS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS ADOTADOS

A partir do momento em que decidimos qual temática seria investigada e nos debruçamos sobre o levantamento bibliográfico, era necessária a escolha de um referencial teórico que norteasse esta pesquisa, desde a elaboração dos questionários até a interpretação dos dados coletados com os licenciandos ingressantes. A partir desse levantamento, constatamos que os modelos teóricos de Balacheff (1988) sobre a Tipologia de Provas e de Harel e Sowder (1998) sobre os Esquemas de Provas predominavam nas pesquisas recentes sobre argumentação e provas e, por esta razão, adotamos ambos para constituir nosso marco teórico (REID, D. A.; KNIPPING, 2010).

Conforme apresentamos na seção 2.4, foi possível identificar algumas articulações e divergências entre estes modelos teóricos. Contudo, em linhas gerais, ambos apresentam uma categorização sobre os modelos utilizados por estudantes para justificar a validade de uma afirmativa matemática. Em virtude disso, os estudos de Balacheff (1988) e de Harel e Sowder (1998) foram importantes, principalmente, para as análises a *posteriori* das questões 2, 5, 6 e 7, nas quais os participantes deveriam avaliar ou apresentar justificativas para alguns resultados matemáticos. Particularmente, esses estudos nortearam também a construção e a análise a *priori* da questão 2, em que os licenciandos deveriam interpretar e avaliar as argumentações de nove alunos fictícios, as quais foram elaboradas e classificadas (veja o quadro 6) a partir dos tipos e dos esquemas de provas propostos por estes pesquisadores.

Com relação aos procedimentos metodológicos adotados, a partir dos modelos teóricos e da revisão de literatura, foi possível elaborar um questionário composto por 7 questões, que consistiu no instrumento utilizado para a coleta dos dados nesta pesquisa exploratória. Por se tratar de um instrumento que permite uma abrangência geográfica mais ampla, foi possível realizar a aplicação do questionário em três instituições públicas, situadas em três cidades de dois estados brasileiros da região Sudeste, abrangendo uma amostra por conveniência de 78 estudantes ingressantes. Deste modo, acreditamos que foi possível atingir uma amostra mais representativa de licenciandos.

Os dados coletados com os ingressantes foram submetidos a uma abordagem quanti-qualitativa, em que para cada uma das questões apresentamos sua respectiva análise a *priori* e a *posteriori*. Esse procedimento metodológico foi inspirado na tese de Ordem (2015), ao qual o autor se reporta como Análise Didática, o que reforça o papel da revisão de literatura, de não apenas viabilizar as escolhas teóricas, como também as metodológicas. Tais análises foram essenciais para delimitar os objetivos e focos de cada uma das questões, formular eventuais hipóteses e possibilitar a categorização/interpretação dos dados à luz do referencial teórico. Além disso, utilizamos também o *software* estatístico IRAMUTEQ, que foi importante durante a análise das respostas fornecidas pelos estudantes na questão 1.

Deste modo, por consequência das nossas escolhas teóricas e metodológicas, podemos afirmar que elas permitiram cumprir todos os objetivos propostos neste estudo e, como resultado, possibilitou respondermos à questão de pesquisa, conforme descrevemos na próxima seção.

5.3 PRINCIPAIS RESULTADOS

Nesta seção apresentamos os principais resultados da nossa investigação em relação aos objetivos específicos e ao objetivo geral, a fim de respondermos à questão de pesquisa.

5.3.1 Concepções dos licenciandos sobre as argumentações de alunos em relação à invariância da soma dos ângulos internos de um triângulo

Com relação ao primeiro objetivo específico, ou seja, ao modo como os licenciandos ingressantes interpretam e avaliam as produções de alunos (questão 2), observamos uma preferência pelos argumentos dedutivos, visto que as respostas de Carlos e de Helena receberam as melhores notas (situação I) e foram as eleitas pelos estudantes para serem utilizadas tanto no âmbito da Educação Básica quanto no Ensino Superior (situações II e III). Esse resultado confirma parcialmente a nossa hipótese, de que os participantes escolheriam principalmente as argumentações dedutivas e ratifica as considerações feitas por Aguilar Junior (2012) sobre a preferência pelas justificativas que estão mais próximas da prova conceitual, segundo a tipologia de Balacheff (1988). Além disso, a análise dos dados sugere que as motivações das escolhas feitas pelos estudantes eram mais baseadas na compreensão do argumento do que no nível de escolaridade em que supostamente seria abordado.

Conforme mencionamos, nossa hipótese foi confirmada parcialmente, pois a resposta do Fábio, que também era baseada na lógica dedutiva, teve pouquíssima adesão, sendo a menos preferida para ser ensinada na Educação Básica (veja o quadro 9). Neste momento, poderíamos até inferir que os licenciandos ingressantes não aceitam argumentos visuais e privilegiam os raciocínios simbólicos e algébricos. No entanto, não foi isso que constatamos na situação I, visto que quase metade da amostra (38 respondentes) valorizou a resposta do Fábio, o quarto argumento na preferência dos estudantes. Tais índices só não foram melhores porque 18 dos participantes não apresentaram justificativas para essa resposta.

Logo, com base nas notas atribuídas pelos ingressantes, podemos afirmar que após os esquemas de provas analíticas (respostas do Carlos e da Helena), eles privilegiam os esquemas de provas transformacionais (resposta do Fábio) em vez dos esquemas de provas perceptivas (respostas do Bruno e do Edu), ou respectivamente, que preferem o exemplo genérico ao invés da experiência crucial, segundo a tipologia de provas de Balacheff (1988).

Todavia, o resultado que mais nos chamou a atenção foi em relação aos argumentos da Dani, da Gabi e principalmente do Igor, os quais eram inconsistentes do ponto de vista matemático. A resposta do Igor teve o terceiro maior índice de estudantes (57,7% da amostra) que valorizam a sua argumentação e isso explica porque obteve também a terceira melhor média aritmética, segundo a avaliação dos participantes (veja o quadro 8). Uma possível justificativa desses indicadores é que o Igor recorreu a um discurso excessivamente algébrico e isso repercutiu na convicção dos sujeitos pesquisados, que se deixaram influenciar por esquemas de provas baseados em elementos externos (ritual e simbólico). Deste modo, além de corroborar a nossa conjectura, de que a maior parte da amostra validaria a resposta do Igor atribuindo notas elevadas, esse resultado reforça parcialmente as considerações feitas por Ordem (2015) e por Knuth (2002a). Para esses autores, respectivamente, os licenciandos não utilizam critérios adequados para avaliar demonstrações e os professores tendem a se convencer mais pela forma do argumento do que pelo raciocínio apresentado. E apesar de termos constatado que a maioria dos nossos sujeitos privilegiou as argumentações logicamente consistentes (respostas do Carlos e da Helena), não podemos negligenciar que a aparência de uma justificativa parece influenciar fortemente a convicção e a avaliação dos futuros professores.

Por outro lado, apenas 19,2% dos estudantes constataram que os argumentos utilizados por Igor eram contraditórios e somente 16,7% e 3,8% observaram isso nas respostas da Dani e da Gabi, respectivamente (veja o quadro 7). Mesmo com esses índices baixíssimos, apenas o licenciando L78 foi capaz de verificar que todas essas argumentações eram inconsistentes. Isso reforça o fato de que a simples aparência do argumento associada à linguagem matemática parece ser suficiente para convencer o licenciando ingressante.

5.3.2 Concepções dos licenciandos em relação à verificação de alguns resultados matemáticos da Educação Básica

Com relação ao segundo objetivo específico, ou seja, ao modo como os licenciandos ingressantes validam resultados matemáticos da Educação Básica (questões 5, 6 e 7a), verificamos que, independentemente da afirmação estar inserida no contexto geométrico ou algébrico, a categoria que predominou, ou seja, a que teve a maior frequência em todas as questões puramente matemáticas, diz respeito aos estudantes que não apresentaram justificativas, a qual reuniu os sujeitos que afirmaram que não sabiam mostrar o resultado ou que simplesmente deixaram a questão em branco (veja o quadro 15 e as tabelas 10 e 11).

Este fato comprovou a nossa hipótese para as questões 5 e 7(a), nas quais afirmamos, respectivamente, que a maioria dos discentes não saberia apresentar uma resposta coerente ao problema do ENADE e não conseguiria justificar o Teorema de Pitágoras por meio de argumentos válidos, em consonância com Mateus (2015). Por outro lado, não foi possível ratificar a nossa conjectura na questão 6, já que a maior parte das respostas não foi pautada na utilização de argumentos empíricos. Pior do que isso, a terça parte dos ingressantes não foi capaz de fornecer justificativa alguma, enquanto 20,5% deles tentaram validar a afirmativa por meio de exemplos. Logo, verifica-se que alguns participantes ainda têm a concepção de que uma simples constatação numérica é suficiente para garantir a veracidade de uma afirmação.

Deste modo, podemos inferir que a maioria dos licenciandos ingressantes não sabe como desencadear uma argumentação dedutiva e não domina as técnicas de prova, como foi o caso do Princípio da Indução Finita na questão 6. Isso reitera uma das considerações feitas por Ordem (2015), na qual o autor afirma que os sujeitos pesquisados, no caso, os concluintes, não mostravam estratégias consistentes de produção de demonstrações, nem justificativas com embasamento matemático plausível. Isto pode ser um indicativo de que o ensino de Matemática, no decorrer da Educação Básica e do Ensino Superior, privilegia mais os procedimentos em detrimento da compreensão dos conceitos. Por essa razão, propomos na seção 5.4, uma reflexão sobre a necessidade dos cursos de formação inicial conceber a temática da argumentação e provas como um possível recurso metodológico a ser utilizado em sala de aula.

Além disso, com base na seção 4.8, constatamos que não houve um tipo de argumentação consensual entre os licenciandos que compuseram a nossa amostra e que se propuseram a responder as questões 5, 6 e 7(a). Em 32 questionários, identificamos que pelo menos em uma dessas questões foram utilizados argumentos empíricos (com referência aos que sugeriram ou fizeram uso de exemplos numéricos, meros desenhos, recorte/dobradura, *softwares*, materiais manipulativos) e que em 41 questionários pelo menos em uma dessas questões foram empreendidos argumentos válidos (com referência aos que conseguiram atingir o objetivo da questão). E apesar desse último grupo representar 52,6% da amostra, esses índices reforçam o fato de que a maioria dos ingressantes não tem clareza sobre como elaborar uma prova matemática. Primeiramente porque dentre esses 41 estudantes, 12 deles empreenderam tanto argumentos empíricos quanto dedutivos em suas respostas. Em seguida, porque a categoria que predominou nas três questões se refere aos sujeitos que não apresentaram justificativas, conforme descrito anteriormente.

5.3.3 Concepções dos licenciandos sobre argumentação, prova e demonstração

Para dissertar sobre as concepções dos licenciandos ingressantes referentes às noções de argumentação, prova e demonstração e responder à nossa questão de pesquisa, abordaremos o objetivo geral do nosso estudo em três momentos, relacionados, respectivamente, às conceituações propostas pelos ingressantes para essas terminologias (questão 1), às principais funções da prova que emergiram nos questionários (questões 1 e 3), e ao grau de concordância dos estudantes sobre algumas afirmações concernentes à prova matemática (questão 4).

Apesar de o maior percentual da amostra ter associado tanto “demonstração” quanto “prova” ao significado de validar um resultado, observou-se a existência de contrastes relacionados ao rigor e à formalidade nas conceituações propostas pelos licenciandos para esses termos no âmbito matemático. A partir da análise quanti-qualitativa foi possível inferir que na concepção dos ingressantes, a noção de prova estaria relacionada a algo mais formal ou a uma possível generalização, enquanto que a demonstração estaria relacionada a algo mais informal ou a uma etapa que antecede a prova. Contudo, é importante destacar que Ferreira (2016, p. 83) obteve resultados antagônicos ao investigar a conceituação de 45 licenciandos não ingressantes (a amostra era constituída por discentes do 3º ao 14º semestre) para estes termos. Isso sugere que, independentemente de serem ingressantes ou não, o significado de prova e de demonstração não é claro entre os próprios estudantes. Além disso, as interpretações que emergiram em nossa investigação divergem das definições propostas por Balacheff (1987), as quais foram adotadas neste estudo. De acordo com esse pesquisador, uma prova pode assumir diferentes níveis de formalidade, dependendo da comunidade na qual está inserida e, quando restrita à comunidade matemática, a prova é tida como sinônimo de demonstração, que consiste num processo de validação formal segundo um conjunto bem definido de regras.

Com relação às funções da prova, infelizmente não conseguimos apontar na questão 3, qual seria o principal propósito em utilizá-la no âmbito da ciência e do ensino, segundo as concepções dos licenciandos. Por se tratar de uma questão parcialmente fechada, direcionamos as respostas dos participantes ao apresentar uma lista dos possíveis papéis da demonstração. Contudo, podemos inferir algumas considerações com base na questão 1. Durante a análise a *posteriori* dessa questão, identificamos que apenas as funções de verificação, explicação e sistematização emergiram nas definições apresentadas pelos estudantes para os termos demonstração e prova no âmbito da Matemática, ainda que o maior percentual deles remetesse ambos ao significado de validar algo, como citamos anteriormente. Porém, esse resultado não foi inédito, visto que outros estudos já haviam relatado esse fato. Ferreira (2016, p. 82), por exemplo, também obteve resultados similares quanto aos papéis da prova/demonstração na visão dos licenciandos. Já Aguilar Junior (2012, p. 75) constatou que a maior parte dos professores (73% dos participantes) também associa a prova matemática ao ato de comprovar um resultado através de premissas e de resultados demonstrados ou por meio de argumentos lógicos.

Logo, em virtude desses indicadores, é importante destacar que, apesar de ser fundamental na Matemática, conceber a prova/demonstração com a função essencialmente de validação pode ser prejudicial para o desenvolvimento das habilidades argumentativas dos futuros alunos desses licenciandos. Afinal, quando os estudantes já têm certeza da validade de um resultado, eles não se sentem motivados e não veem necessidade alguma de verificar sua veracidade (NASSER; TINOCO, 2003, p. 3).

Além das funções de verificação, explicação e sistematização, identificamos na análise a *posteriori* da questão 3, que mais de 60% da amostra associou outros cinco papéis à prova (comunicação, satisfação pessoal, ilustrar o significado de uma definição, ajudar a lembrar de resultados importantes e desenvolver o pensamento lógico), tanto no contexto acadêmico quanto no escolar (veja o quadro 11). Deste modo, as análises das questões 1 e 3 sugerem um conhecimento limitado por parte dos licenciandos ingressantes a respeito das potencialidades da demonstração, sobretudo, com vista ao ensino de Matemática. Tanto é que em nenhuma das conceituações descritas pelos participantes na questão 1, emergiu o significado desses outros cinco papéis, com destaque para a ausência da função de desenvolver o raciocínio lógico, a qual predominou nas concepções dos professores investigados por Knuth (2002b). Esse fato pode ser associado à pouca vivência dos participantes que constituíram a nossa amostra com argumentações e provas enquanto alunos da Educação Básica.

A nossa maior preocupação é que um conhecimento limitado por parte dos futuros docentes sobre os papéis da demonstração possa ter efeitos negativos na aprendizagem dos seus futuros alunos. Por isso, defendemos que os cursos de formação inicial não se limitem apenas à função de validação, mas que ofereçam oportunidades de reflexão a respeito do lugar e da utilidade das provas no ensino da Matemática, pois se os professores soubessem das potencialidades delas, eles poderiam ofertar "[...] experiências em sala de aula com demonstrações que permitiriam aos alunos ir além das concepções limitadas que os estudantes tradicionalmente desenvolvem." (KNUTH, 2002a, p. 399, tradução nossa).

Com relação ao grau de concordância dos ingressantes sobre algumas afirmações concernentes à prova matemática, verificamos que a maioria deles soube distinguir, ao menos na teoria, a possibilidade de provas por contraexemplos da impossibilidade de provas baseadas em exemplos, ao contrário do que Harel e Sowder (1998) e Ordem (2015) constataram em seus estudos. Além disso, grande parte da amostra assume que o uso de meros desenhos e exemplos não caracteriza uma demonstração, mas concorda que o seu uso fornece *insights* e auxilia na construção de uma prova matemática. Parte significativa também concorda com Hanna (1990), de que os professores da Educação Básica devem priorizar as provas explicativas em relação às provas que apenas confirmam o resultado.

Todavia, chamou a nossa atenção o fato de mais da metade da amostra assinalar a necessidade de verificar uma conjectura por meio de exemplos, mesmo depois de demonstrá-la. E mesmo que esse resultado tenha nos surpreendido, ele apenas corrobora uma das considerações presentes no estudo de Fischbein (1982[72] apud HANNA; JAHNKE, 1996, p. 897). Isto sugere que o licenciando nem sempre assume a prova matemática como um meio de validação, recorrendo a uma constatação empírica para se autoconvencer.

Portanto, a partir dos principais resultados apresentados em relação aos objetivos propostos neste estudo, se torna possível responder à seguinte questão: **Quais as concepções de ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática sobre argumentação, prova e demonstração?**

Com base em nossa investigação, é possível afirmar que existe uma preferência entre os licenciandos ingressantes pelos argumentos que se enquadram no tipo de prova conceitual (BALACHEFF, 1988) e no esquema de prova analítica (HAREL; SOWDER, 1998). Principalmente, quando se trata de avaliar as justificativas de alunos (situação I), de ensinar supostamente um determinado conteúdo na Educação Básica (situação II) ou de elaborar hipoteticamente uma resposta no teste de Geometria Euclidiana (situação III). Além disso, constatou-se que, muitos deles, interpretam a prova/demonstração com o significado de validar algo e que a maioria acredita que uma prova matemática deve necessariamente se apoiar no processo dedutivo baseado em um sistema axiomático, o que na visão de Garnica (1996) consistiria no fascínio pela técnica.

Em vista disso, podemos refletir sobre uma das considerações descritas em Aguilar Junior (2012) e em Mateus (2015). Esses pesquisadores também constatam que os [futuros] professores tendem a privilegiar as demonstrações mais "formais", mas indicam que esse fato poderia estar relacionado às experiências vivenciadas pelos sujeitos no Ensino Superior. No entanto, por investigarmos licenciandos que cursam apenas o primeiro período, nossas análises sugerem que tal preferência não se deve necessariamente a uma influência acadêmica. Possivelmente, esses estudantes já carregavam consigo uma visão "rigorosa" da Matemática desde a Educação Básica, visto que, na maioria das vezes, as concepções de [futuros] professores sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática são formadas durante os anos de escolaridade, moldadas por suas próprias experiências enquanto alunos e são difíceis de serem modificadas (THOMPSON, 1992, p. 135).

[72] Ibid, 1982.

Por outro lado, apesar da inclinação pelas justificativas mais “formais” e “rigorosas” observadas nos sujeitos que compuseram a nossa amostra, na prática, constatamos que a maioria deles não sabe como desencadear uma argumentação lógica e não domina as técnicas de prova, como vimos nas questões 5, 6 e 7(a). Além disso, muitos deles utilizam evidências empíricas para validar os resultados matemáticos, sem mencionar também, que mais da metade da amostra assinalou a necessidade de verificar uma afirmação por meio de exemplos, mesmo depois de prová-la.

Em vista disso, emerge das concepções dos ingressantes uma contradição entre a preferência e a noção de prova matemática admitida pela maioria deles com o modo utilizado para validar conjecturas matemáticas, isto quando os mesmos foram capazes de apresentar alguma argumentação coerente.

Deste modo, podemos afirmar que a nossa hipótese de pesquisa foi ratificada, pois, as concepções sobre argumentação, prova e demonstração dos licenciandos que compuserem o nosso estudo se mostraram limitadas, tendo em vista que foram contraditórias em determinados aspectos. Além disso, mesmo que alguns estudantes tenham obtido êxito em suas argumentações, podemos asseverar que a maior parte da amostra não sabe como validar matematicamente uma conjectura e que muitos deles são persuadidos por experimentos empíricos.

5.4 IMPLICAÇÕES DA PESQUISA

Os resultados apresentados anteriormente indicam que mesmo com as orientações prescritas nos documentos oficiais, os professores da Educação Básica não têm desenvolvido, juntamente com os seus alunos, atividades argumentativas e demonstrativas no ensino da Matemática. Por isso, nesta seção, refletimos sobre algumas implicações desta pesquisa na formação dos futuros docentes, a fim de que a prática voltada ao uso de argumentação e provas seja efetivamente empregada nas aulas de Matemática.

A prática da Matemática exige diversas características por parte de um estudante, tais como criatividade, imaginação, intuição, experimentação, visualização, saber acertar e saber errar. Tentativas, acertos e erros são naturais no exercício dessa ciência. Até porque, mesmo quando um matemático está convencido de que um resultado é verdadeiro, há muito para ser criado ou corrigido até que se encontre uma demonstração. Já diria Friedrich Gauss: “Tenho meu resultado, mas ainda não sei como obtê-lo”. Por sua vez, a história da Matemática confirma que o processo de construção dessa ciência não se deu a partir de axiomas e teoremas, mas sim por meio de inquietações, na tentativa de resolver determinados problemas (KLINE, 1970[73] apud GARNICA, 2002, p. 97).

Em vista disso, a construção da Matemática em sala de aula não deve ser diferente. Durante o processo de ensino-aprendizagem, enquanto professores, devemos desmistificar a Matemática como uma ciência pronta e acabada, em que poucos têm acesso a ela. Ademais, devemos favorecer a autonomia e o protagonismo do estudante, evidenciando o seu papel de produtor e não de um mero reprodutor do conhecimento matemático, pois acreditamos que

> [...] se os alunos crescessem em uma cultura matemática onde o discurso, o pensamento e o convencimento fossem partes importantes do seu envolvimento com a matemática, então as provas seriam vistas como uma parte natural de sua matemática e não como uma imposição artificial. (SCHOENFELD, 1994, p. 76, tradução nossa).

Por esta razão, a habilidade argumentativa deve ser sempre incentivada pelo professor, solicitando que o aluno justifique as suas estratégias de resolução para os problemas propostos, afinal o domínio do processo dedutivo deve ser construído ao longo de toda a sua trajetória escolar. Entretanto, para que isso ocorra na Educação Básica, os professores formadores devem estimular os licenciandos a considerarem as justificativas informais e as tentativas de argumentação dos alunos, uma vez que a literatura mostra que grande parte dos professores de Matemática não valoriza as provas pragmáticas de seus aprendizes (HOYLES, 1997).

Diante deste contexto, defendemos que os cursos de Licenciatura em Matemática, devem proporcionar aos futuros professores, a oportunidade de conceber a temática da argumentação e provas como um recurso metodológico a ser utilizado em sala de aula, a fim de criar um ambiente favorável ao uso de atividades exploratório-investigativas[74]. No entanto, para que isso seja possível, não é suficiente que o licenciando conheça do ponto de vista teórico no que consiste e para que serve uma demonstração. É preciso que ele seja capaz de elaborá-la ou, ainda, de fazer uma transposição para explorá-la juntamente com os seus alunos no futuro, instigando-os a produzir as suas próprias argumentações. É preciso ainda que “[...] ele possa experienciar o processo de exploração e investigação nas disciplinas matemáticas da

[73] KLINE, M. Logic versus Pedagogy. **American Mathematical Monthly**, v. 77, n. 3, p. 264-282, 1970.
[74] Para maioires informações, consulte Correia (2017).

licenciatura, tais como: teoria dos números, cálculo diferencial e integral, álgebra, análise, geometria, fractais, teoria dos grafos etc.” (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 925).

5.5 LIMITAÇÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesta seção apontamos algumas limitações do nosso estudo e apresentamos também uma proposta para futuras investigações.

Acreditamos que a principal limitação desta pesquisa foi em utilizar apenas um instrumento de coleta, em virtude da curta duração do mestrado. O uso de questionários tem suas vantagens, pois se trata de uma ferramenta de ampla abrangência e de simples aplicação, porém, não permite um encontro direto com os participantes, a fim de que eles esclareçam detalhadamente as suas respostas e possíveis casos de ambiguidade. Consequentemente, a interpretação dessas respostas está sujeita, em muitos casos, ao crivo do pesquisador. Além disso, é importante destacar que, embora tivéssemos a preocupação de constituir uma amostra representativa de licenciandos, os resultados apresentados não são necessariamente generalizáveis, sendo limitados e válidos prudentemente aos participantes desta pesquisa.

Por outro lado, os resultados que emergiram das concepções dos ingressantes suscitaram novas inquietações, dentre as quais, a possibilidade de darmos continuidade a esta pesquisa, investigando os mesmos sujeitos quando estiverem próximos a concluir o curso de Licenciatura. Por conseguinte, para finalizarmos este capítulo, apresentamos a seguir essa despretensiosa proposta com maiores detalhes.

Ao sintetizar o resultado de diversos estudos, Thompson (1992, p. 135) afirma que alterar as concepções dos licenciandos durante a graduação não é uma tarefa simples e continua sendo um grande problema na formação dos professores de Matemática. Até porque, conforme já destacamos, as concepções dos futuros docentes sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática são formadas, na maioria das vezes, durante os anos em que estiveram na Educação Básica e moldadas por suas próprias experiências como alunos.

No decorrer desta dissertação, defendemos que investigar as concepções de licenciandos era importante porque elas influenciam diretamente as escolhas e as práticas pedagógicas destes futuros educadores em sala de aula (KNUTH, 2002b; THOMPSON, 1992; PONTE, 1992). Por outro lado, Thompson (1992, p. 138-139) alerta que a relação entre a concepção de um professor e sua prática não é simples e tão pouco de causalidade linear, em que primeiro seriam mobilizadas as suas concepções e posteriormente emergiriam sua *práxis* de ensino. À vista disso, a pesquisadora também afirma que muitos pontos de vista de um docente são originados ou moldados por suas experiências em sala de aula, a partir de sua interação com o meio e de atos reflexivos sobre sua própria prática. Logo, podemos inferir que as concepções de um sujeito são estruturas mentais e dinâmicas, suscetíveis a mudanças à luz da experiência (THOMPSON, 1992, p. 140). Observe esta percepção vai ao encontro da conceituação proposta por Artigue (1990) adotada neste estudo, em que a autora afirma que concepção é um ponto de vista "local" sobre um dado objeto, destacando, portanto, uma dimensão temporal.

Com base na discussão anterior, podemos afirmar que as experiências que os licenciandos ingressantes vivenciarão ao longo de sua formação inicial, seja nas disciplinas de conteúdo específico e/ou pedagógico, seja nas práticas de estágio, seja nos projetos de iniciação e extensão ou ainda na convivência com outros futuros professores, tendem a influenciar e modificar as suas concepções, ainda que Thompson (1992) evidencie que isso não se trata de uma tarefa simples. Particularmente, no que diz respeito às noções de argumentação, prova e demonstração, quais seriam as concepções dos licenciandos que constituíram a nossa amostra quando estiverem em fase de conclusão da Licenciatura? Seria possível observar influências e alterações representativas ao comparar com os resultados dos ingressantes? E com base nestas indagações poderíamos formular uma questão ainda mais abrangente a ser respondida: Em que medida os cursos de formação inicial incentiva/prepara os futuros professores à prática de argumentação e provas para o ensino de Matemática?

Sendo assim, o ineditismo deste possível estudo, que poderia vir a ser uma tese de Doutorado, estaria em investigar as concepções dos mesmos licenciandos em dois momentos extremos de sua formação inicial: ao ingressarem no curso de Licenciatura e quando estiverem próximos a concluí-lo. Acreditamos que se de fato for desenvolvido, este estudo traria significativas contribuições para a pesquisa em Educação Matemática, não somente no que diz respeito à temática de argumentação e provas, mas também com relação a outros fatores que permeiam a formação inicial de professores, tais como currículo, avaliação, evasão. Além disso, com um período maior para a investigação, seria possível não se restringir à aplicação de um questionário, mas tornaria viável a utilização de outros instrumentos de coleta, como, por exemplo, a realização de entrevistas com os estudantes. E dependendo dos resultados encontrados, poderíamos envolver outros agentes responsáveis pela formação inicial dos licenciandos, especialmente, coordenadores de curso e professores das disciplinas específicas e/ou pedagógicas.

REFERÊNCIAS

AGUILAR JUNIOR, C. A. **Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e prova matemática apresentados por alunos do ensino fundamental.** 2012. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2012.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007a. 218 p.

ALMOULOUD, S. A. Prova e demonstração em Matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: **30º Reunião Anual da ANPEd**, GT 19. Caxumbu/MG, 2007b. p. 1-18.

ARCAVI, A.; HADAS, N. Computer mediated learning: an example of an approach. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 5, n. 1, p. 25-45, 2000.

ARTIGUE, M. Épistémologie et didactique. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions**,** v. 10-2.3, p. 241-286, 1990.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, n. 18, p. 147-176, 1987.

______. Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. PIMM (Ed.), **Mathematics teachers and children**. London: Hodder and Stoughton, 1988, p. 216-235.

BORWEIN, P.; JORGENSON, L. Visible Structures in Number Theory. **The Mathematical Association of America**, v. 108, p. 897-910, dez. 2001.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998a. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2018.

______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais:** Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 1998b. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2018.

______. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes**. Brasília: MEC/INEP, 2008a. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/download/Enade2008_RNP/MATEMATICA.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2018.

______. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Relatório Síntese**: Matemática. Brasília: MEC/INEP, 2008b. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/relatorio_sintese/2008/2008_rel_sint_matematica.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2018.

______. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Padrão de Resposta**: Matemática. Brasília: MEC/INEP, 2008c. Disponível em:<http://download.inep.gov.br/download/Enade2008_RNP/PADRAO_DE_RESPOSTA_DE_MATEMATICA.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2018.

______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. 3ª versão. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc>. Acesso em: 21 ago. 2018.

______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Ensino Médio. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc>. Acesso em: 21 ago. 2018.

CAMARGO, B. V.; JUSTO, A. M. IRAMUTEQ: Um software gratuito para análise de dados textuais. **Temas em Psicologia**, Ribeirão Preto/SP, v. 21, n. 2, p. 513–518, dez. 2013.

CALDATO, J; UTSUMI, M. C.; NASSER, L. Argumentação e Demonstração em Matemática: a visão de alunos e professores. **Triângulo**, Uberaba/MG, v. 10, n. 2, p. 74-93, jul./dez. 2017.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1991.

CORREIA, J. C. C.. Atividades exploratório-investigativas para o ensino de geometria no 9° ano do Ensino Fundamental. In: **Anais do VI Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática**, Campinas/SP: UNICAMP, 2017. p. 1-11.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **The Mathematical Experience**. Great Britain: Pelican Books, 1983.

DE VILLIERS, M. The role and function of proof in mathematics. **Pythagoras**, n. 24, p. 17–24, 1990.

______. **Rethinking proof with Geometer's Sketchpad**. Emeryville/CA: Key Curriculum Press, 1999.

DIAS, M. S. S. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em Matemática**: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico. 2009. 214 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

DOUEK, N. Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. In: Schwank, I. (Ed.), **Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education**, v. 1, Osnabrueck: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, 1999. p. 125-139.

FERREIRA, M. B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. 2016. 342 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2016.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A.T. O lugar das matemáticas na licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema**, Rio Claro/SP, v. 27, n. 47, p. 917-938, dez. 2013.

FISCHBEIN, E. Intuition and Proof. **For the Learning of Mathematics**, v. 3, n. 2, p. 9-18, 1982.

GARNICA, A. V. M. Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. **Zetetiké**, Campinas/SP, v. 4, n. 5, p. 7-28, jan./jun. 1996.

______. As demonstrações em educação matemática: Um ensaio. **Bolema**, Rio Claro/SP, v. 15, n. 8, p. 91-99, set. 2002.

GODINO, J.; RECIO, A. Meaning of Proofs in Mathematics Education. In: PEKHONEN, E. (Ed.), **Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 2, Lahti/Finland, 1997. p. 313-320.

GONSALVES, E. P. **Conversas sobre iniciação à pesquisa científica**. 2 ed. Campinas: Alínea, 2001. 80 p.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4 ed. São Paulo: Atlas, 2002. 175 p.

HANNA, G. Some Pedagogical Aspects of Proof. **Interchange**, v. 21, n. 1, p. 6-13, 1990.

______. Challenges to the importance of proof. **For the Learning Mathematics**, v. 15, n. 3, p. 42-49, nov. 1995.

______. Proof, explanation and explorations: an overview. **Educational Studies in Mathematics**, v. 44, p. 5-23, 2000.

HANNA, G.; JAHNKE, H. N. Proof and proving. In: BISHOP, A. et al. (Ed.), **International Handbook of Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 877-908.

HAREL, G.; SOWDER, L. Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In: SCHOENFELD, A.; KAPUT, J.; DUBINSKY, E. (Ed.), **Research in Collegiate**

Mathematics Education III. Providence/RI: American Mathematical Society, 1998. p. 234-283.

______. Toward Comprehensive on the Learning and Teaching of Proof. In: LESTER, F. (Ed.), **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Reston/VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2007. Disponível em: <http://www.math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/TowardComprehensivePerspective.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2018.

HEALY, L.; HOYLES, C. **Justifying and Proving in School Mathematics**: Technical report on the nationwide survey. London: Institute of Education, University of London, 1998. 120 p.

______. A Study of Proof Conceptions in Algebra. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 31, n. 4, p. 396-428, jul. 2000.

HERSH, R. Some proposals for revising the philosophy of mathematics. In: TYMOCZKO, T. (Ed.), **New directions in the philosophy of mathematics**. Boston/MA: Birkhauser, 1986. p. 9-28.

HOYLES, C. The curricular shaping of students' approaches to proof. **For the Learning Mathematics**, v. 17, n. 1, p. 7-16, 1997.

HOYLES, C.; JONES, K. Proof in Dynamic Geometry Contexts. In: MAMMANA, C.; VILLANI, V. (Ed.), **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century**. Dordrecht: Kluwer, 1998. p. 121-128.

HOYLES, C; KÜCHEMANN, D. Students' understandings of logical implication. **Educational Studies in Mathematics**, v. 51, n. 3, p. 193-223, 2002.

KLINE, M. Logic versus Pedagogy. **American Mathematical Monthly**, v. 77, n. 3, p. 264-282, 1970.

KNUTH, E. J. Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 33, n. 5, p. 379-405, 2002a.

______. Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 5, p. 61-88, 2002b.

MARTIN, W. G.; HAREL, G. Proof frames of preservice elementary teachers. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 1, p. 41-51, 1989.

MATEUS, M. E. A. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes às demonstrações e provas na Educação Básica.** 2015. 269 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, 2015.

MENEZES, L. **Concepções e práticas de professores de Matemática:** contributos para o estudo da pergunta. 1995. 218 f. Dissertação (Mestrado em Educação e na especialidade de Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa. Lisboa/Portugal, 1995.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. A. **Argumentação e provas no ensino de Matemática**. 2 ed. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2003. 109 p.

NELSEN, R. B. **Proofs Without Words**: Exercises in Visual Thinking. 1 ed. USA: The Mathematical Association of America, 1993. 152 p.

NUNES, J. M. V.; ALMOULOUD, S. A. Argumentação no ensino de Matemática: perspectivas metodológicas. **REMATEC**, Natal/RN, n. 13, p. 145-169, mai./ago. 2013.

OLIVEIRA, W. D. **Zeros da função zeta de Riemann e o teorema dos números primos**. 2013. 77 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho. São José do Rio Preto/SP, 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/110605>. Acesso em: 21 ago. 2018.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria plana**: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de Matemática em Moçambique. 2015. 341 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2015.

PAIS, L. C. Transposição Didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.), **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2008. p. 11-48.

PAVANELLO, R. M; ANDRADE, R. N. G. Formar professores para ensinar geometria: um desafio para as licenciaturas em Matemática. **Educação Matemática em Revista**, SBEM, v. 9, n. 11A, p. 78-87, 2002.

PIETROPAOLO, R. C. (**Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática**. 2005. 388 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2005.

PONTE, J. P. Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In: **Educação matemática**: temas de investigação. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, p. 185-239, 1992. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/92-Ponte(Ericeira).pdf>. Acesso em: 21 ago. 2018.

PORTUGAL. Ministério da Educação e Ciência. **Exame Final Nacional do Ensino Secundário**: Prova Escrita de Matemática A - 1ª Fase. Instituto de Avaliação Educativa, 2015a. Disponível em: <http://www.examesnacionais.com.pt/exames-nacionais/12ano/2015-1fase/Matematica-A.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2018.

______. Ministério da Educação e Ciência. **Exame Final Nacional do Ensino Secundário**: Prova Escrita de Matemática A - 2ª Fase. Instituto de Avaliação Educativa, 2015a. Disponível em: <http://www.examesnacionais.com.pt/exames-nacionais/12ano/2015-2fase/Matematica-A.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2018.

RENZ, P. Mathematical Proof: What it is and what it ought to be. **The Twoyear College Mathematics Journal**, v. 12, n. 2, p. 83-103, 1981.

REID, D. A.; KNIPPING, C. **Proof in Mathematics Education**: Research, Learning and Teaching. Rotterdam: Sense Publishers, 2010. 251 p.

SCHOENFELD, A. What do we know about mathematics curricula? **Journal of Mathematical Behavior**, v. 13, p. 55-80, 1994.

SOUZA, L. O Teorema das Quatro Cores. **Millenium**, Viseu/Portugal, n. 24, p. 125-151, out. 2001. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2018.

TALL, D. Cognitive development, representations and proof. In: **Proceedings of justifying and proving in school** mathematics. London: Institute of Education, 1995. p. 27-38.

THOMPSON, A. G. Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In: GROUWS, D. A. (Ed.), **Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learnin:** a project of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston/VA: NCTM, 1992.

VAN ASCH, A. G. To prove, why and how? I**nternational Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 24, n. 2, p. 301-313, 1993.

VARGHESE, T. Concept maps to assess student teachers' understanding of mathematical proof. **The Mathematics Educator**, v. 12, n. 1, p. 49-68, 2009.

VERGNAUD, G. Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. **Actes du Vieme Colloque de PME**, v. 2. Grenoble: IMAG, 1981. p. 7-17.

WEBER, K. Students' difficulties with proof. **The Mathematical Association of America**, n. 8, jun. 2003 (não paginado).

APÊNDICES

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO DOS LICENCIANDOS INGRESSANTES

Caro(a) aluno(a) do curso de Licenciatura em Matemática,

Meu nome é João Carlos Caldato Correia, sou professor da Educação Básica e mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ). Solicito a sua colaboração, respondendo as questões e escrevendo todas as suas ideias e pensamentos, nesta atividade que servirá para redigir a minha dissertação de mestrado, cujo objetivo é investigar as concepções de licenciandos a respeito de argumentação, provas e demonstração no ensino de Matemática. Desde já, agradeço imensamente a sua contribuição.

<table>
<tr><td colspan="3">Nome*:</td></tr>
<tr><td colspan="2">E-mail*:</td><td>Telefone*: (   )   -</td></tr>
<tr><td>Instituição:</td><td>Ano de ingresso:</td><td>Semestre atual:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Durante a Educação Básica foi aluno predominantemente de:
( ) Escolas Estaduais ( ) Escolas Federais ( ) Escolas Particulares ( ) Escolas Filantrópicas</td></tr>
<tr><td colspan="3">Durante a sua Educação Básica, houve estimulo à prática voltada ao ensino-aprendizagem de prova/demonstração matemática?
(   ) Sim (   ) Parcialmente (   ) Não
Caso julgue necessário, explique a sua resposta:</td></tr>
</table>

** Preenchimento opcional.*

QUESTÃO 1

Dê a sua interpretação para os seguintes termos no âmbito da Matemática:

- Argumentação:____
  ____
  ____
- Demonstração:____
  ____
  ____
- Prova:____
  ____
  ____

QUESTÃO 2

Nesta questão são propostas três situações baseadas na seguinte afirmação:

“A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a 180º”.

Situação I - Suponha que você é o professor de uma turma na Educação Básica e pediu para que os seus alunos argumentassem sobre a afirmação acima. Atribua uma nota numa escala de 0 a 10 para cada um dos diferentes argumentos utilizados, justificando brevemente a nota atribuída a cada aluno nos respectivos espaços abaixo:

Resposta da Ana: Eu desenhei vários triângulos e medi todos os ângulos cuidadosamente com o auxílio do transferidor e fiz a seguinte lista e como em todos eles a soma foi de 180°, a afirmação é verdadeira.

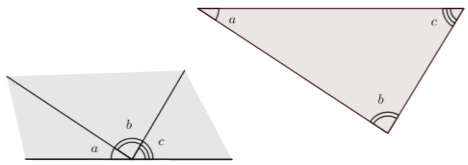
$$60° + 60° + 60° = 180°$$
$$37° + 52° + 91° = 180°$$
$$112° + 26° + 42° = 180°$$
$$30° + 120° + 30° = 180°$$
$$3° + 87° + 90° = 180°$$

*Nota da Ana:*_______ *Justificativa:*____

____

____

Resposta do Bruno: Eu desenhei um triângulo escaleno, recortei os ângulos e coloquei-os juntos.
Observei que os ângulos do triângulo formaram um ângulo de meia volta. Logo a afirmação é verdadeira. Eu também repeti esse procedimento num triângulo isósceles e num triângulo equilátero, e cheguei ao mesmo resultado.

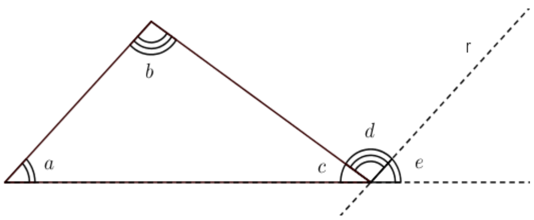


*Nota do Bruno:*_______ *Justificativa:*____

____

____

Resposta do Carlos: Eu prolonguei a base do triângulo e desenhei uma reta r paralela a um dos lados do triângulo. Notei que $d = b$, pois são ângulos alternos internos entre duas retas paralelas. Além disso, observei que $e = a$, pois são ângulos correspondentes entre duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Logo, $c + d + e = 180$ e, portanto, $a + b + c = 180°$. Deste modo, a afirmação é verdadeira.

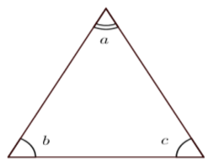


*Nota do Carlos:*_______ *Justificativa:*____

____

____

Resposta da Dani: Eu desenhei um triângulo isósceles com o ângulo $b = 65°$.Como o triângulo é isósceles, os ângulos da base são iguais $(b = c)$. Logo, $a + 2b = 180°$. Como $b - 65°$, temos que $a = 180° - 2.65°$, ou seja, $a = 50°$. Assim, $a = 50°$, $b = 65°$, e $c = 65°$ e, portanto, $a + b + c = 180°$. Desta forma, a afirmação é verdadeira.

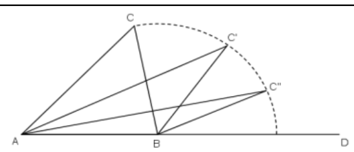


*Nota da Dani:*_______ *Justificativa:*____

____

____

Resposta do Edu: Eu observei que quando o vértice C se aproxima da reta AB, as medidas dos ângulos A e C se aproximam de 0° e a medida do ângulo B se aproxima de 180°. Logo a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

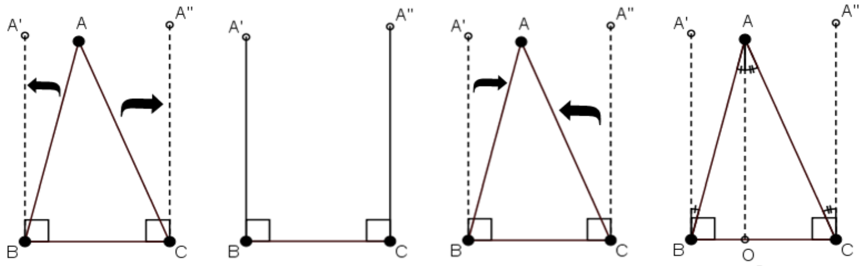


*Nota do Edu:*_______ *Justificativa:*____

____

____

Resposta do Fábio: Eu pensei da seguinte forma. Imagina que os lados AB e AC do triângulo ABC são girados em direções opostas com relação aos vértices B e C (*figura a*), respectivamente, até que seus ângulos com o segmento BC serem 90° (*figura b*). Esta ação transforma o triângulo ABC na figura $A'BCA''$, onde os segmentos $A'B$ e $A''C$ são perpendiculares ao segmento BC. Logo, a soma dos ângulos $A'\hat{B}C + B\hat{C}A'' = 180°$. Para recriar o triângulo ABC, basta girar novamente os segmentos $A'B$ e $A''C$ em direções opostas até que os pontos A' e A'' gerem o ponto A (*figura c*). Note que nessa ação eu devo descontar os ângulos $A'\hat{B}A$ e $A''\hat{C}A$, mas, ao mesmo tempo, eu devo acrescentar o novo ângulo $B\hat{A}C$. Porém, ao traçar o segmento AO perpendicular a BC, observei que os ângulos $A'\hat{B}A$ e $A''\hat{C}A$ são congruentes aos ângulos $B\hat{A}O$ e $O\hat{A}C$ (cuja soma é igual ao ângulo $B\hat{A}C$), respectivamente, pois são ângulos alternos internos (*figura d*). Logo, a soma dos ângulos internos ao triângulo permanece igual a 180° e, portanto, a afirmação é verdadeira.



a **b** **c** **d**

*Nota do Fábio:*_______ *Justificativa:*____

____

____

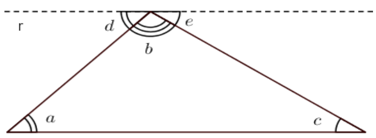
Resposta da Gabi: Como estudei no livro que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada pela fórmula $S_n = (n-2) \times 180°$, onde n é o número de lados do polígono, basta substituir por $n = 3$. Logo, obtive que $S_3 = 180°$, mostrando que a afirmação é verdadeira.

*Nota da Gabi:*_______ *Justificativa:*____

____

____

Resposta da Helena: Eu desenhei uma reta *r* paralela à base do triângulo. Observei que $d = a$ e $e = c$, pois são ângulos alternos internos entre duas retas paralelas. Assim, $d + b + e = 180°$, pois estão sob uma linha reta. Logo, $a + b + c = 180°$. Portanto, a afirmação é verdadeira.

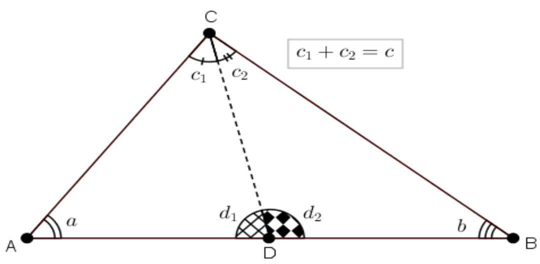


*Nota da Helena:*_______ *Justificativa:*____

____

____

Resposta do Igor: Eu dividi o triângulo ABC em dois triângulos menores ADC e BCD, e chamei de x a soma dos ângulos de um triângulo. Desta forma, no triângulo ACD se tem $a + c_1 + d_1 = x$ e no triângulo BCD se tem $b + c_2 + d_2 = x$. Portanto, $a + b + c_1 + c_2 + d_1 + d_2 = 2x$, o que resulta em $a + b + c + 180° = 2x$. Como a soma dos ângulos internos no triângulo ABC é dada por $a + b + c = x$, substituindo na equação anterior se tem $x + 180° = 2x$, e portanto $x = 180°$. Logo, a afirmação é verdadeira.



*Nota do Igor:*_______ *Justificativa:*____

____

____

Situação II - Suponha que você irá ensinar esse tópico na Educação Básica. Você utilizaria algum dos argumentos descritos anteriormente? Em caso afirmativo, qual ou quais deles? **Justifique a sua resposta.**

____
____
____
____
____
____

Situação III - Suponha que no teste da disciplina de Geometria Euclidiana foi solicitado que você mostrasse que essa afirmação é verdadeira. Você utilizaria algum dos argumentos descritos anteriormente? Em caso afirmativo, qual deles? **Justifique a sua resposta.**

____
____
____
____
____
____

QUESTÃO 3

Segundo alguns pesquisadores, há diversas funções para uma prova ou demonstração. Assinale com um “X” no quadro a seguir qual o contexto (*Apenas na matemática acadêmica, Apenas na matemática escola, Em ambas* ou *Em nenhuma*), em sua opinião, em que cada uma dessas funções pode ser utilizada. Caso não saiba o que responder em alguma afirmação, assinale a opção “Não sei” (NS).

Funções da prova	**Apenas na matemática acadêmica**	**Apenas na matemática escolar**	**Em ambas**	**Em nenhuma**	**NS**
Validar uma afirmação					
Explicar as razões de uma afirmação ser verdadeira					
Sistematizar os vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, definições, proposições e teoremas					
Descobrir/inventar novos resultados					
Transmitir o conhecimento matemático					
Satisfação pessoal					
Produzir um algoritmo					
Pôr fim a um processo de busca					
Ilustrar o significado de uma definição					
Ajudar a lembrar de resultados importantes					
Desenvolver o pensamento lógico					
Outra(s):					

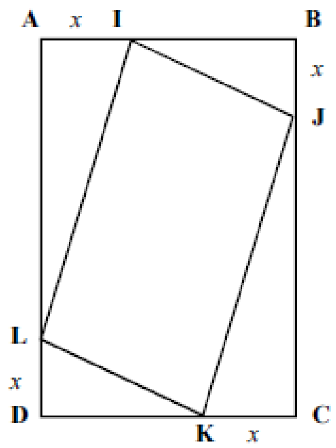
QUESTÃO 4

Avalie numa escala de 1 (**Discordo Totalmente - DT**) a 5 (**Concordo Totalmente - CT**), qual o seu grau de concordância com cada uma das afirmações a seguir. Caso não saiba o que responder em alguma afirmação, assinale a opção "Não sei" (NS).

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**NS**
Para provar que uma afirmação é falsa, basta exibir um contraexemplo.						
É possível provar uma propriedade matemática por meio de ambientes de geometria dinâmica como o *GeoGebra*.						
Para demonstrar que um resultado é verdadeiro, podemos utilizar como argumentos a explicação do professor ou a exibição num livro.						
A verificação empírica de uma conjectura por meio de muitos exemplos constitui uma prova matemática.						
Ao provar que um enunciado geral é verdadeiro, segue que todos os casos específicos também são válidos.						
Só constitui uma prova matemática quando se utiliza o processo lógico dedutivo baseado em um sistema axiomático (axiomas, definições, proposições e teoremas).						
É possível utilizar apenas um desenho para provar um resultado matemático.						
Após mostrar que uma hipótese é verdadeira, é preciso verificar com alguns exemplos para ter certeza.						
Apesar de não serem considerados argumentos válidos em uma demonstração, utilizar figuras e buscar exemplos auxilia na investigação e fornece ideias para executá-la.						
Ao provar uma sentença matemática não é necessário verificar exemplos particulares.						
Na Educação Básica, os professores devem priorizar as provas que explicam em relação às provas que apenas confirmam o resultado.						

QUESTÃO 5

No retângulo $ABCD$ ao lado, o lado AB mede 7 cm e o lado AD mede 9 cm. Os pontos I, J, K e L foram marcados sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, de modo que os segmentos AI, BJ, CK e DL são congruentes. Com base nessas informações, mostre que o quadrilátero $IJKL$ é um paralelogramo.



QUESTÃO 6

Mostre que o produto de três números inteiros consecutivos é múltiplo de 3.

QUESTÃO 7

Na Educação Básica os alunos têm contato com poucos teoremas fundamentais da matemática. Dentre eles, o Teorema de Pitágoras que consiste na seguinte afirmação: "*Num triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*".

a) Quais argumentos você usaria para garantir que o Teorema de Pitágoras é verdadeiro?

b) Enuncie o Teorema de Pitágoras sob a forma de um teorema do tipo "Se... então...".

c) Enuncie a recíproca do teorema enunciado no *item b* e **argumente** se ela é ou não verdadeira.

APÊNDICE B – NOTAS ATRIBUÍDAS PELOS LICENCIANDOS INGRESSANTES NA SITUAÇÃO I (QUESTÃO 2)

L[75]	ARGUMENTO DOS ALUNOS								
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
1	7	9	SN[76]	10	SN	SN	SN	SN	SN
2	7	7	7	6	SN	9	6	7	9
3	4	5	6	2	3	4	6	8	5
4	5	6	10	0	0	0	0	10	0
5	8	9	10	7	5	10	9	9	10
6	10	7	10	10	5	10	10	10	10
7	7	7	8	8	8	SN	9	9	10
8	8	10	9	6	7	8	10	5	8
9	7	9	9	8	9	8	9	8	7
10	9	10	8	SN	10	8	8	8	SN
11	10	10	10	10	10	10	10	10	10
12	9	10	10	8	10	3	10	10	10
13	5	6	6	9	6	SN	SN	SN	7
14	10	10	10	10	5	10	10	10	10
15	1	2	1	10	0	4	SN	SN	SN
16	10	10	10	10	10	10	10	10	10
17	10	10	10	10	10	SN	SN	10	10
18	6	8	8	8	8	SN	SN	8	9
19	6	8	8	8	8	10	6	6	8
20	SN	10	10	SN	SN	SN	5	10	10
21	6	8	8	8	SN	SN	SN	7	9
22	3	8	9	5	6	9	5	10	10
23	10	10	SN	SN	SN	SN	SN	SN	SN
24	10	10	10	8,5	9	10	10	10	10
25	7	8	10	6	10	9	6	8	10
26	8	10	10	10	10	10	8	10	10
27	10	10	10	10	SN	SN	10	10	10
28	5	5	10	8	0	SN	SN	10	10
29	10	8	8	6	1	5	9	10	7
30	7	8	8	8,5	9	9,5	8	8,5	9
31	8	10	10	7	7	10	9	10	10
32	2	2	10	3	2	2	9	SN	SN
33	9	9	10	9	9	10	SN	10	10
34	3	3	10	2	2	7	0	10	8
35	7	10	9	8	7	7	7	9,5	8,5
36	5	2	10	8	5	7	7	5	10
37	6	7	10	9	8	10	9	10	10
38	5	6	10	6	5	8	6,5	10	8

[75] Licenciando (L).
[76] Sem Nota (SN).

39	4	6	10	5	4	10	4	10	10
40	6	8	10	5	5	4	7	10	2
41	5	6	9	6	8	10	10	10	7
42	0	3,5	10	5	10	10	10	10	10
43	8	10	10	8	10	10	9	10	10
44	6	SN	SN	6,5	SN	SN	6	SN	SN
45	3,5	3,25	10	3,75	8	10	3,5	10	10
46	10	10	10	10	10	10	10	10	4
47	3	9	10	5	2	9	4	10	10
48	3	8	10	0	4	8	6	10	8
49	2	9	10	0	SN	SN	0	10	10
50	10	10	10	5	0	SN	10	10	10
51	4	8	10	6	3	9	1	10	7
52	0	2	10	0	6	8	7	10	8
53	4	7	10	2	4	9	10	10	3
54	0	5	10	3	0	10	5	10	10
55	3	5	5	3	8	8	6	5	9
56	0	5	10	4	0	0	0	10	6
57	1	8	10	1	5	0	5	10	10
58	4	9,5	8	4	3	4,5	6	8,5	8
59	6	8	10	5	6	10	4	10	4
60	5	6	7	5.5	7,5	8	4	7	6
61	4	5	10	3	2	9	7	10	0
62	0	8	10	2	5	10	4	10	10
63	3	7	10	3	3	SN	10	10	10
64	6	6	10	7	8	10	7	10	7
65	6	9	10	8	10	10	10	10	5
66	1	5	9	1	1	9	1	9	10
67	6,5	6,5	10	3	8,5	9,5	3	10	8
68	8,5	9	10	2	5	SN	5,5	9,5	10
69	1	1	10	1	0	7	2	10	0
70	6	6	7	0	6	6	5	7	6
71	5	8	10	6	4	10	SN	10	10
72	6	7	10	5	6	7	5	10	6
73	10	10	10	10	10	10	10	10	10
74	4	5	10	0	6	10		10	10
75	8	8	10	10	0	10	10	10	0
76	3	2	10	3	2	2	3	10	3
77	5	5	10	4	5	2	7	10	7
78	5	5	10	6	8	9	4	10	7