UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

OS TRATADOS DE GEORGE SALMON (1819 – 1904) NO CONTEXTO DA MATEMÁTICA BRITÂNICA NO SÉCULO XIX:

De uma abordagem sintética para uma abordagem analítica

Rodolpho Sousa Lima

RIO DE JANEIRO – RJ

Agosto de 2018

OS TRATADOS DE GEORGE SALMON (1819 – 1904) NO CONTEXTO DA MATEMÁTICA BRITÂNICA NO SÉCULO XIX:
De uma abordagem sintética para uma abordagem analítica

Rodolpho Sousa Lima

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gérard Emile Grimberg

RIO DE JANEIRO – RJ
Agosto de 2018

CIP - Catalogação na Publicação

L732t

Lima, Rodolpho Sousa
Os tratados de George Salmon (1819 - 1904) no contexto da matemática britânica no século XIX: de uma abordagem sintética para uma abordagem analítica / Rodolpho Sousa Lima. -- Rio de Janeiro, 2018.
94 f.

Orientador: Gérard Emile Grimberg.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2018.

1. Geometria Projetiva. 2. Métodos Sintéticos e Analíticos . 3. George Salmon. 4. Matemática Britânica. I. Grimberg, Gérard Emile, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

OS TRATADOS DE GEORGE SALMON (1819 – 1904) NO CONTEXTO DA MATEMÁTICA BRITÂNICA NO SÉCULO XIX:

De uma abordagem sintética para uma abordagem analítica

Rodolpho Sousa Lima

Orientador: Prof. Dr. Gérard Emile Grimberg

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Gérard Emile Grimberg
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Prof. Dr. Gert Schubring
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Prof. Dr. Wanderley de Moura Resende
Universidade Federal Fluminense – UFF

RIO DE JANEIRO – RJ
Agosto de 2018

Dedico aos meus pais, Francisco de Lima e Adelzira de Lima, aos meus irmãos, Roberta Lima e Bruno Lima, à minha avó, Edite Lima e à minha sobrinha Raquel Lima, que são os pilares da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus que, a partir de uma frustração pessoal, fez renascer a vontade de fazer o mestrado e também por me capacitar nesta missão em todos os momentos deste curso, principalmente nos momentos mais difíceis. Ele sempre me sustentou como está escrito na Bíblia no Livro de Isaías 41-13: *"Porque Eu, o SENHOR teu Deus, te seguro pela mão direita e te declaro: Não temas, Eu te ajudarei."*

Aos meus pais, Francisco Assis Pinheiro de Lima e Adelzira Sousa de Lima, pelo amor de vocês, por estarem sempre me apoiando, procurando sempre proporcionar as melhores condições para eu estudar e torcendo verdadeiramente pela minha vitória.

Aos meus irmãos, Roberta Sousa Lima e Bruno Rodrigo Sousa Lima, que além de entenderem a minha ausência, sempre estiveram comigo, acompanhando os meus estudos e, com certeza, o apoio e o incentivo de vocês foram fundamentais para mim.

Ao meu orientador, o Professor Gérard Emile Grimberg, a quem devo muito por me proporcionar uma nova forma de olhar e de trabalhar a matemática, principalmente por me ensinar a como fazer uma pesquisa e, sobretudo, por sua forma atenciosa e cortês como sempre me atendeu nos nossos inúmeros encontros para me orientar e corrigir a minha dissertação.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PEMAT) que me proporcionaram enriquecer em conhecimento, tanto pelas disciplinas cursadas quanto pelos seminários assistidos. Faço um agradecimento, em especial, ao Professor e Coordenador do Programa, o Professor Victor Giraldo, que nas minhas necessidades ao longo do curso sempre me atendeu com muita gentileza e ao Professor Gert Schubring por suas valiosas indicações de textos que contribuíram no meu trabalho.

À banca examinadora da minha qualificação, novamente ao Professor Gert Schubring e ao Professor Vinicius Mendes Pereira, pelas críticas, correções e sugestões que enriqueceram a escrita, *a posteriori*, desta dissertação.

Aos meus colegas da minha turma do PEMAT, com quem pude compartilhar não só momentos agradáveis, mas também muitas dificuldades. Em especial, agradeço ao companheiro João Caltado, pelo seu caráter ímpar e seu profissionalismo que eu pude conhecer e conviver e por estar sempre pronto para me ajudar quando eu precisei e ao companheiro Luciano Silva, com quem iniciei uma amizade de forma inusitada quando olhou um dos meus trabalhos de uma forma negativa, mas que o tempo e a convivência puderam reverter essa visão crítica, possibilitando que nos tornássemos grandes amigos e a quem eu admiro muito pela sua irreverência e a sua forma de integrar um grupo.

A todos os meus companheiros, chefes, pares e subordinados, da Força Aérea Brasileira (FAB), que também sem dúvida contribuíram muito para eu chegar até aqui. Destaco um agradecimento em especial ao SO Marcelo Jorge da Silva Campos, a quem eu tenho maior admiração e gratidão por ter sempre acreditado no meu trabalho e por ele ser um exemplo para mim. E ao SO Walter Britto de Jesus Filho, a quem foi testemunha ocular das minhas dificuldades neste meu mestrado, assistindo a minha luta diária ao conciliar os estudos com o quartel, e que, com um espírito paternal, sempre me tranquilizou quando eu precisei.

Aos meus primeiros mestres na matemática, Francisco Lancelloti e Gessé Ferreira, que além de serem meus mestres, também tenho o privilégio de ser amigo pessoal de cada um deles, com quem troco excelentes experiências tanto pessoais quanto profissionais.

Ao Pastor e amigo Moisés de Carvalho que me ajudou a reencontrar e a fortaceler o meu caminho com Cristo.

Aos meus amigos de longa data, Emidio Lima e Thiago Fonseca, irmãos que a vida me deu e que sei que estão e estarão sempre comigo, apoiando e torcendo por mim.

E, encerro os meus agradecimentos, sem dúvida, para aqueles que sem a existência deles, este trabalho não faria sentido, tão pouco eu me tornar professor. Agradeço a todos os meus alunos que passaram, que estão passando e que ainda passarão por mim, pois, com certeza, é por vocês que eu busco um aperfeiçoamento pessoal e profissional e, também busco estar contribuindo para que a educação do meu país se torne melhor.

“Estudar a história da matemática não o transforma num matemático mais capaz, mas num mais gentil; testemunhar a humanidade da matemática vai enriquecer sua mente, amolecer seu coração, e trazer à tona suas melhores qualidades.”

(George Sarton)

“No que diz respeito ao empenho, ao compromisso, ao esforço, à dedicação, não existe meio termo. Ou você faz uma coisa bem feita ou não faz.”

(Ayrton Senna)

“Até aqui nos ajudou o Senhor.”

(1 Samuel 7-12)

RESUMO

O século XIX é um período divisor de águas na história da humanidade por apresentar os efeitos que a Revolução Industrial provocou na sociedade em geral. Imersa nesse cenário de transformações, onde a Inglaterra foi a mola propulsora desse movimento, a matemática britânica deste período não ficou atrás em passar também por um processo de mudança de como até então estava sendo trabalhada. Neste sentido, destaca-se que a abordagem que se via era aquela herdada das tradições de MacLaurin, Newton e Taylor, a qual era fundamentada pela Geometria Pura ou Sintética. Consciente de que a matemática britânica estava sendo vista como atrasada em relação à matemática do continente por esta já apresentar trabalhos cujos resultados apresentavam encaminhamentos analíticos, um grupo de matemáticos formaram a Sociedade Analítica para introduzirem esta nova abordagem, isto é, resultados fundamentados na Geometria Analítica proporcionando um avanço na matemática britânica. Essa transição de tratamento foi percebida nas publicações dos resultados ao longo do século, de início percebia os trabalhos com um viés fortemente sintético e, posteriormente, os trabalhos já apresentavam resultados analíticos. Destaca-se também aspecto os novos resultados que estavam sendo publicados naquela época, fazendo ressurgir uma geometria esquecida por mais de dois séculos, a Geometria Projetiva. Esta geometria trouxe à luz resultados como o Princípio da Dualidade e os Métodos Projetivos que podem ser vistos tanto de forma sintética, através das relações geométricas, quanto de forma analítica, através do uso dos sistemas de coordenadas. Uma das referências das publicações desse momento foi George Salmon, matemático irlandês, que proporcionou através dos seus quatro tratados um retrato dessas transformações, isto é, além de publicar esses novos resultados da geometria “moderna”, trabalhou também nas duas abordagens, tanto na sintética, como se pode encontrar no seu primeiro tratado, *Seções Cônicas*, assim como no tratamento analítico visto no seu segundo tratado, *Curvas Planas Superiores*.

Palavras-Chave: Matemática Britânica. George Salmon. Geometria Projetiva. Métodos Projetivos. Coordenadas Homogêneas.

ABSTRACT

The nineteenth century is a watershed period in the history of humanity for presenting the effects that the Industrial Revolution provoked in society in general. Immersed in this scenario of transformations, where England was the driving force behind this movement, the British mathematics of this period did not fail to undergo a process of change of how until then was being worked. In this sense, it is emphasized that the approach was that inherited from the traditions of MacLaurin, Newton and Taylor, which was based on Pure or Synthetic Geometry. Aware of the fact that British mathematics was considered to be late in relation to the mathematics of the continent because it already presented works whose results had analytical references, a group of mathematicians formed the Analytical Society to introduce this new approach, that is, results based on Analytical Geometry providing a breakthrough in British mathematics. This transition of treatment was perceived in the publications of the results throughout the century, at first it perceived the works with a strongly synthetic bias and, later, the works already presented analytical results. It also highlights the new results that were being published at that time, making resurgent a geometry forgotten for more than two centuries, the Projective Geometry. This geometry has brought to light results such as the Principle of Duality and Projective Methods that can be seen both synthetically through geometric relations and analytically through the use of coordinate systems. One of the references of the publications of that moment was George Salmon, Irish mathematician, who provided through his four treatises a picture of these transformations, that is, in addition to publishing these new results of "modern" geometry, he also worked on both approaches, , as can be found in his first treatise, Conic Sections, as well as in the analytic treatment seen in his second treatise, Higher Plane Curves.

Keywords: British mathematics. George Salmon. Projective Geometry. Projective Methods. Homogeneous coordinates.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

Para entender as transformações que acontecem em um período é necessário conhecer, de um modo geral, qual é o panorama da situação da época em questão para que se possa identificar os fatores que influenciaram a ocorrência destas mudanças. Assim o período de estudo desta dissertação de mestrado residirá, sobretudo, na matemática britânica do século XIX (1801 – 1900).

Por ser um período que abrigou a segunda grande revolução[1] da nossa civilização, a Revolução Industrial, o século XIX foi um divisor de águas na história da humanidade. Tal revolução mudou e reorganizou completamente a ordem da sociedade em geral, promovendo a indústria como a nova mola mestra da economia.

Não diferente dos avanços que a Revolução Industrial proporcionava no cenário cultural e econômico da época, concominantemente mudanças significativas ocorrem no cenário matemático daquele momento oriundas do estabelecimento de um sistema de ensino público que estavam ocorrendo nos demais países do continente, consequência da política da Revolução Francesa, e que, entretanto, não se percebia essa estruturação tanto no sistema de ensino público quanto na matemática da Grã-Betanha, ao menos na primeira metade do século XIX.

Outro ponto que também se destaca é que à medida que se entra no século XIX, constata-se o aumento expressivo de matemáticos competentes e produtivos de modo que se torna uma tarefa difícil de selecionar quais foram os trabalhos de maior destaque neste período da matemática, evidenciando, dessa forma, a profissionalização da matemática, sobretudo, a partir da segunda metade do século XIX, isto é, os trabalhos realizados na matemática passaram a ser reconhecidos como uma profissão e, além disso, passaram a receber incentivos tanto institucional quanto educacional para promover esse desenvolvimento profissional (RICHARDS, 1986).

Como consequência dessa grande produção, o século XIX é também um divisor de águas para a matemática, isto é, percebe-se o rompimento com os pensamentos tradicionais tanto na Álgebra quanto na Geometria, “libertando-as” dos seus tratamentos usuais até então utilizados naquele momento.

[1] A primeira grande revolução na história da humidade data por volta do ano 8000 a.C. conhecida como Revolução Agrícola que ocorreu no Egito, na China e, também, no Oriente Médio.

Considerados os dois grandes desenvolvimentos notáveis da época, o primeiro ocorrendo por volta do ano de 1829 com a descoberta, de uma geometria autoconsistente, diferente da geometria de Euclides, e que, por serem mais de uma, passaram a ser conhecidas como Geometrias não euclidianas (ROSENFELD, 1988).

O segundo desenvolvimento foi a descoberta, em 1843, de uma álgebra diferente familiar dos números reais, a qual ficou conhecida como a Álgebra Abstrada.

Assim como a Revolução Industrial se inicia na Inglaterra no século anterior por volta de 1750, causando impactos na sociedade global, esses dois grandes desenvolvimentos nos campos da geometria e da álgebra promoveram também uma transformação na matemática britânica nessa época.

A partir da compreensão do cenário britânico do século XIX, esta pesquisa procurou encadear os fatos que transformaram a matemática britânica daquela época, a qual inicialmente era fundamentada numa abordagem sintética e, *a posteriori*, passa a ser influenciada pelos resultados analíticos que já se encontravam na matemática dos demais países da Europa.

A abordagem sintética era uma tendência herdada da tradição de MacLaurin, Newton e Taylor[2], enquanto que a visão analítica já era uma abordagem bastante predominante nos países do continente, considerando, dessa forma, que a matemática britânica se encontrava atrasada em relação à matemática do continente (GUICCIARDINI, 1889).

Outro ponto que reforça essas transformações no cenário matemático britânico que, de fato, ocorreram no século XIX, são as evidências que influenciaram, sobretudo, na forma de abordagem, isto é, passando de um encaminhamento sintético para um tratamento com tendências claramente analíticas (FISH, 1994).

No que diz respeito a esse cenário, a partir do século XIX, os pesquisadores começaram adotar também o ponto de vista analítico e, no caso de George Salmon, como será percebido, ele se utiliza dessa metodologia para transmitir os resultados, sobretudo os desenvolvidos no período de 1848 a 1862, na publicação de seus tratados, promovendo também uma nova abordagem no ensino.

Um dos produtos dessas inúmeras transformações na matemática do século XIX, foram os resultados considerados do âmbito da Geometria Projetiva[3] que ressurgiram após

[2] Brook Taylor (1685 – 1731), Colin MacLaurin (1698 – 1746) e Isaac Newton (1643 – 1727) matemáticos britânicos da transição entre os séculos XV e XVI.

[3] Existe uma dualidade na consideração entre Geometria Projetiva e Descritiva, Ao invés de usar o termo “Geometria Projetiva”, como atualmente é considerado, o termo “Geometria Descritiva” era mais comumente usado, como visto no trabalho *The collected mathematica papers*, de 1889, de Cayley.

quase dois séculos esquecidos (SAKAROVITCH, 1998). A partir de publicações como o Princípio da Dualidade, Métodos Projetivos e Notações Abreviadas, percebe-se uma grande atuação da matemática britânica no desenvolvimento deste assunto, principalmente, devida à influência dos matemáticos britânicos, como Cayley e Sylvester, na publicação desses resultados.

Além disso, há também outro local de produção de trabalhos dessa geometria: a Irlanda[4]. Como já destacado anteriormente, George Salmon se tornou uma das referências da matemática irlandesa daquela época ao atuar efetivamente na publicação desses novos conceitos ao escrever seus quatro tratados[5] entre 1848 a 1862 (GOW, 1997).

A importância de Salmon não se dá apenas pelos tratados que ele escreveu, mas também por se tornar uma referência de matemático que atuou nos dois tipos de abordagens, isto é, primeiramente publicou resultados se utilizando de um tratamento sintético e, depois, publicou resultados com abordagens analíticas (MCCONNELL[6], 1981). Suas duas primeiras obras refletem exatemente essa mudança de abordagem.

O encadeamento desta série de fatos[7] se torna necessário a fim de compreender o cenário tanto geral quanto matemático do século XIX, reconhecendo os dois desenvolvimentos notáveis da época nos campos da geometria e da álgebra, assim como o renascimento da Geometria Projetiva esquecida. Além disso, perceber a virada de perspectiva nas publicações dos resultados, chegando à Irlanda como um dos locais de produção de publicações matemáticas e encontrando em George Salmon uma das referência daquela época apontam tanto as motivações quanto os objetivos que nortearam esta pesquisa.

Os seguintes questionamentos motivaram o desenvolvimento desta pesquise de dissertação: Por que os novos resultados que fizeram ressurgir a Geometria Projetiva foram importantes? Por que os tratados escritos pelo matemático irlandês George Salmon se tornaram referência no século XIX? Quais foram os fatores que favoreceram essa influência naquela época? Quais foram as interações de Salmon ao desenvolver seus tratados? Quais foram os motivos que influenciaram Salmon mudar sua abordagem?

[4] A história da Grã-Bretanha começa com a formação de um Estado com os Atos de União de 1707, que agregaram o parlamento dos reinos da Inglaterra e da Escócia de modo a criar a Grã-Bretanha. Posteriormente, o Ato de União de 1800 reuniu a Grã-Bretanha e o Reino da Irlanda para estabelecer o Reino Unido da Grã-Bretanha e Irlanda.

[5] Os títulos originais dos quatro tratados de George Salmon são: *A treatise on conic sections* (1848), *A treatise on the higher plane curves* (1852), *Lessons introductory to the modern higher algebra* (1859) e *A treatise on the analytic geometry of three dimensions* (1862).

[6] Esta referência se trata do *Dictionary of Scientific Biography*.

[7] É evidente que esta série de fatos não ocorre de maneira linear nem tampouco exclusiva na matemática britânica.

A partir dessas questões, foram traçados os objetivos desta pesquisa: realizar uma descrição do cenário matemático britânico no século XIX; entender as duas perspectivas (a sintética e a analítica), o conflito entre elas e a virada de uma para outra; apresentar uma análise da biografia de George Salmon e, sobretudo, entender a importância que os tratados de Salmon desempenhou não só pelo o fato deles exercerem um papel divulgador dos novos resultados mas também pelo o fato de exercerem um papel influenciador no ensino de matemática. Por fim, realizar uma comparação entre os dois primeiros tratados de Salmon para evidenciar a sua mudança de abordagem.

1.1 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação consiste de sete capítulos: o primeiro deles é esta introdução onde na primeira parte apresentou um panorama do contexto tanto histórico quanto da matemática britânica do século XIX, o ressurgimento da Geometria Projetiva, a presença de dois tipos de tratamentos (sintético e analítico) e o nome de George Salmon apontando a sua importância nesse cenário. Além disso,apresentou também as motivações e os objetivos que nortearam o desenvolvimento desta pesquisa.

Ainda em relação ao capítulo de Introdução, apresenta-se mais dois subcapítulos: o primeiro mostra como a dissertação foi estruturada, indicando brevemente o que será encontrado nos demais capítulos. Já o segundo apresenta a metodologia de pesquisa adotada para realizar este trabalho.

Os próximos cinco capítulos, de fato, serão aqueles que vão expor os conteúdos encontrados e analisados ao longo da execução desta pesquisa. Dito isto, o segundo capítulo abordará os aspectos do cenário da matemática britânica do século XIX, das transformações que ocorreram e que influenciaram na matemática, em particular, na geometria, principalmente no que diz respeito a mudança de ponto de vista de tradição sintética para analítica. O capítulo foi dividido em duas partes, a primeira tratando mais especificamente da primeira metade do século XIX, enquanto a segunda tratará da segunda metade.

O terceiro capítulo abordará a recepção da Geometria Projetiva, o qual foi divido em quatro subcapítulos: o primeiro trará um levantamento histórico bem como a retomada do desenvolvimento dessa geometria esquecida. Na segunda parte apontará a presença do ponto de vista sintética na publicações dos novos resultados por matemáticos como Poncelet e Chasles, enquanto na terceira parte, esses mesmos novos resultados foram publicados sob um ponto de vista analítico por matemáticos como Plücker e Möbius. No último, serão apresentados fatos que evidenciam a rivalidade que ocorreu entre a abordagem sintética e a analítica naquela época.

Para dar conta de fazer uma apresentação da biografia de George Salmon, o quarto capítulo foi dividido em sete subcapítulos, cuja finalidade consiste em fazer um levantamento histórico da vida de Salmon, apontando fatos como a origem e o contexto familiar, fatos sobre a formação escolar e acadêmica. Outro ponto será dar conta de aspectos como, por exemplo, a entrada de Salmon no cenário matemático, bem como suas relações com os outros matemáticos daquela época. Apenas para fins de registro, o capítulo indicará o momento em que Salmon deixa a carreira de matemático para se dedicar à teologia e, em seguida, assume o cargo de Reitor da *Trinity College* de Dublin. Por fim serão relacionadas as associações as quais Salmon se tornou membro e as condecorações recebidas ao longo da sua carreira.

No quinto capítulo serão apresentadas as produções matemáticas de George Salmon, principalmente com relação aos seus quatros tratados escritos entre 1848 e 1862. O capítulo foi dividido em dois subcapítulos: o primeiro tratará das produções dos quatro tratados de Salmon, enquanto o segundo dará conta das publicações dos seus artigos em matemática.

Dentre todos os capítulos desta pesquisa, o sexto capítulo, o qual foi dividindo em três subcapítulos, é o mais importante, pois é onde se encontra a essência das publicações de Salmon no sentido de compreender a mudança de abordagem percebida entre os seus dois primeiros tratados. A primeira parte fará uma análise do primeiro tratado, *Seções Cônicas*, dando conta dos novos resultados publicados nos dois últimos capítulos do livro, enquanto a segunda fará uma análise do segundo tratado, *Curvas Planas Superiores*, evidenciando as novas influências, bem como a publicação de resultados sob o ponto de vista analítico. A última parte fará uma comparação entre esses dois tratados de Salmon, apontando exemplos de um mesmo conceito que no primeiro foi abordado de forma sintética e no segundo abordado de forma analítica.

O sétimo e último capítulo trará com as considerações finais onde se comenta que a situação da matemática britânica no século XIX provocou transformações significativas, sobretudo, na mudança de perspectiva de métodos, do sintético para o analítico, identificadas através dos novos resultados publicados naquele momento e, principalmente, pelo percebido nas contribuições de George Salmon para matemática, o qual demonstrou uma efetiva participação ao publicar e ao divulgar os recentes resultados da álgebra aplicada à geometria considerados “modernos” através da edição dos seus quatro tratados, tornando-se referência tanto para pesquisa quanto para o ensino naquele período.

Para completar a dissertação, além das referências bibliográficas que embasaram a dissertação, esta pesquisa ainda trará dois apêndices e dois anexos. O apêndice A trará uma abordagem do Princípio da Dualidade, característico do momento de estudo da pesquisa, mostrando os Teoremas de Pascal e de Brianchon demonstrados de forma sintética e analítica. Já o apêndice B trará uma abordagem mais detalhada sobre as coordenadas homogêneas.

Com relação aos anexos, o anexo A fará uma representação de uma chamada “linha do tempo” de George Salmon que apontam seus principais feitos ao longo da sua carreira. O anexo B trará uma relação de todos os artigos em matemática publicados por Salmon.

1.2 Metodologia de Pesquisa

Partindo do pressuposto que rodeia uma grande parte dos estudantes que pensam que antes de realizar uma pesquisa, seja em qualquer área, é necessário dominar tudo que já foi realizado, esta pesquisa vai de contra a este pensamento, isto é: embora a monografia[8] que este autor apresentou na graduação tratasse da interpretação geométrica dos determinantes nas transformações geométricas, de fato, pouco se conhecia da extensa relação da álgebra aplicada à geometria, assunto que permeia exatamente a matemática do século XIX e que motivou este autor se debruçar para realizar esta pesquisa.

Na metodologia de pesquisa são detalhadas quais foram os procedimentos utilizados para fundamentar a base teórica desta dissertação. Como referencial para a elaboração deste trabalho, foi utilizada a pesquisa bibliográfica, conforme a definição apresentada por Fonseca (2002):

> A pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de *websites*. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem porém pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (FONSECA, 2002, pp. 31-32).

Partindo da definição acima, iniciou-se a busca por referências para formar a base teórica desta pesquisa. Tal busca consistiu em realizar leituras de artigos, de dissertações, de livros, de periódicos e de teses relacionadas aos assuntos da matemática britânica do século XIX, dos métodos projetivos da geometria “moderna” daquele momento, da biografia de

[8] O título da monografia apresentada por Rodolpho Sousa Lima, enquanto aluno da graduação em licenciatura em matemática na Universidade Federal Fluminense (UFF), em 2013, é: Transformações Geométricas Lineares no Plano e o Significado do Determinante.

George Salmon e dos novos resultados publicados nos seus tratados. Pesquisas em *websites* também enriqueceram a dissertação, como, por exemplo, na aquisição de imagens relacionadas ao trabalho.

Para fundamentar o segundo capítulo, a análise da pesquisa está apoiada nos seguintes artigos: *Projective Geometry and Mathematical Progress in Mid-Victorian Britain*, de 1986, de Joan L. Richards, que faz uma abordagem sobre um período de intenso desenvolvimento científico britânico, em particular, trata também dos desenvolvimentos da Geometria Projetiva, assunto que estava bastante em evidência na matemática na época. Ainda da mesma autora, o artigo *God, Truth, and Mathematics in Nineteeth Century England*, de 1992, traz também referências sobre esse período.

Reforçando o cenário britânico nesse contexto o texto *'The Emergency Which Has Arrived': the problematic history of nineteenth-century British*, de 1994, de Menachem Fisch, também trata do período de estagnação da matemática britânica decorrente ainda da forte tradição aos tratamentos sintéticos e do movimento analítico liderado por Robert Woodhouse em busca de promover um avanço na matemática britânica ao comparar com a matemática do continente que já estava bem desenvolvida em termos de tratamento analítico.

No terceiro capítulo, para embasar os novos métodos desenvolvidos nos meados do século XIX da então considerada geometria "moderna", fazendo renascer a Geometria Projetiva, foi utilizada a dissertação de mestrado de Leandro Silva Dias, cujo título é "Geometria e Álgebra nas Seis Primeiras Memórias de Cayley sobre *Quantics*", de 2013 para relacionar a teoria das equações algébricas através das propriedades projetivas das curvas pelos matemáticos britânicos.

Para conceituar um resgate histórico do desenvolvimento da geometria e dos métodos projetivos, trazendo as colaborações de matemáticos de séculos anteriores ao século XIX, dando os primeiros conceitos dos métodos projetivos, bem como conceituando os principais resultados da Geometria Projetiva, utilizou-se o *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, de Michel Chasles, de 1837.

A relação entre as geometrias descritiva e projetiva está apoiada nos artigos *Luigi Cremona and Wilhelm Fiedler: the Link between Descriptive and Projective Geometry in Technical Instruction*, de Marta Menghini, no prelo, e o *Otto Wilhelm Fiedler and the Synthesis of Projective and Descriptive Geometry*, de Klaus Volkert, também no prelo.[9]

[9] Destaco aqui um agradecimento em especial ao Professor Gert Schubring ao fornecer a fontes destes dois textos, os quais ainda estão em processo de publicação, que certamente enriqueceram esta pesquisa.

Para a parte que tratará da visão sintética, da visão analítica e da virada de uma para a outra, foram utilizados os artigos: *Figures real, imagined, and missing in Poncelet, Plücker, and Gergonne,* de 2015, de Jemma Lorenat[10] e *The synthetic treatment of conics at the present time*, de 1902, de E. B. Wilson.

Para compreender a importância que George Salmon desempenhou para a matemática no século XIX, foram utilizadas as seguintes referências: *George Salmon 1819 – 1904 His Mathematical Work and Influence*, de 1997, de Rod Gow[11], que trata exatamente sobre a vida de Salmon, trazendo vários detalhes sobre sua biografia, abordando desde a sua origem à sua carreira profissional.

Reportando ainda mais sobre a formação acadêmica de Salmon e o momento que ele deixa de atuar na matemática para se dedicar à teologia, os artigos que sustentam esse momento foram: *George Salmon: from mathematics to theology*, de 2005, de Sarah Nesbitt e "George Salmon", de 2007, de Charles Mollan[12].

Outras referências biográficas sobre Salmon também se encontram em *Dictionary of Scientific Biography*, de 1981.

No desenvolvimento do quinto e do sexto capítulo, para fazer a análise dos conteúdos dos novos resultados publicados nos tratados escritos por George Salmon e realizar a comparação entre o tratamento dado nas duas primeiras obras, foram utilizadas as edições[13] de 1850 e de 1855 de *A treatise on conic sections*. E para o segundo tratado, foram utilizadas as edições de 1852 e de 1879 de *A treatise on the higher plane curves*.[14]

Para compreender esses fatores que favoreceram essas influências, isto é, a presença do ponto de vista mais sintético no primeiro tratado e o ponto de vista mais analítico no segundo, foram realizadas análises nas duas obras a fim de encontrar elementos e resultados que corroborassem essas constatações, bem como descobrir a intencionalidade que Salmon teve ao escrever seus trabalhos.

Além disso, é realizada uma comparação nas duas primeiras obras de Salmon, para avaliar esses novos conceitos implementados, bem como destacar resultados que apontam essa mudança de ponto de vista que ocorre entre a publicação desses dois tratados.

---

[10] Essa indicação também tem todo mérito ao Professor Gert Schubring, a qual me forneceu quando eu realizei o curso de História da matemática sob sua responsabilidade no segundo semestre de 2016.

[11] Na verdade o nome do autor é Roderick Gow, atualmente professor de matemática da *University College*, Dublin.

[12] Destaco novamente um agradecimento ao Professor Gert Schubring pela indicação dessa referência.

[13] Essas edições correspondem à segunda edição (1850) e a terceira edição (1855) de *Seções Cônicas.*

[14] Essas edições correspondem à primeira edição (1852) e a terceira edição (1879) de *Curvas Planas Superiores*.

Ainda no quinto capítulo, foram realizadas pesquisas nos periódicos internacionais a fim de conseguir dimensionar, de certa forma, como foi a atuação de Salmon através da divulgação dos seus artigos, assim como identificar quais foram os jornais onde ele publicou seus principais trabalhos.

Nos seguintes periódicos, podem-se encontrar publicações de artigos de Salmon: o *Philosophical Magazine*[15], o *The Cambridge Mathematical Journal*[16], *The Cambridge and Dublin mathematical Journal*, o *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*[17].

Observa-se que a exposição da metodologia não fixa que os textos que fundamentaram a pesquisa apoiaram exclusivamente os respectivos capítulos. Deixa-se claro que cada texto corroborou para o desenvolvimento do trabalho como um todo procurando realizar uma comunicação entre as ideias para estruturar a dissertação.

[15] *The Philosophical Magazine* é uma das mais antigas revistas científicas publicadas em inglês, criada em 1798.

[16] *The Cambrigde Mathematics Journal* surgiu em 1837 e, posteriormente foi expandido para o *The Cambridge and Dublin Mathematics Journal* a partir de 1846.

[17] *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* foi um periódico de matemática que apareceu em 1855, como a continuação do *The Cambridge Mathematical Journal*.

CAPÍTULO 2: O CENÁRIO DA MATEMÁTICA BRITÂNICA NO SÉCULO XIX

Para compreender o cenário matemático britânico no século XIX é necessário fazer uma visualização do panorama das transformações que ocorreram efetivamente nesse período. Tais transformações certamente influenciaram não só a matemática, mas também a forma como os matemáticos passaram a desenvolver a produção de novos resultados que surgiram naquele momento. Afinal de contas, que transformações foram essas?

Percebendo significativas mudanças no que diz respeito ao progresso tecnológico, o qual desencadeou rapidamente uma era de investigações científicas sem precedentes, tal progresso promoveu a profissionalização da ciência, em particular, da matemática que passou a ser reconhecida como uma profissão na Grã-Bretanha (RICHARDS, 1986, p. 297).

Presenciando todas as novidades que emergiam nos resultados da matemática de uma maneira geral, resultados aparentemente inconcebíveis começaram a ser desenvolvidos no século XIX, isto é, na álgebra, por exemplo, desenvolveram-se álgebras[18] diferentes daquela que havia até então, enquanto na geometria, a partir da negação do quinto postulado[19] de Euclides, descobriu-se também a existência de geometrias autoconsistentes, diferente da geometria usual, as chamadas geometrias não euclidianas (ROSENFELD, 1988).

A matemática britânica não ficou atrás em também passar por um processo de mudanças. Imersa nesse cenário de novidades, a matemática britânica naquele momento era considerada atrasada em relação à matemática do continente, devido ao fato daquela se sustentar nas relações geométricas herdadas sob o ponto de vista sintético (DIAS, 2013, p. 9). Percebe-se, então, que se inicia um período de transformações, principalmente, no sentido de tratamento dado aos resultados, isto é, de uma abordagem fortemente sintética, percebia também a presença do ponto de vista analítico.

Para melhor compreender essa época, dividiu-se esse estudo em duas partes: uma que tratará a primeira metade do século XIX e outra para segunda metade. A partir daí é feita uma análise do contexto a qual a matemática britânica se encontrava, para determinar quais foram os fatores que influenciaram a ocorrência desta virada, saindo de uma tradição sintética, abrindo espaço para desenvolvimentos analíticos.

---

[18] Tais álgebras satisfazem leis estruturais diferentes daquelas obedecidas pela álgebra usual, onde, por exemplo, a propriedade comutativa da multiplicação não ocorre. Hamilton, Grassmann e Cayley abriram os caminhos para a chamada álgebra abstrata.

[19] Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Esclarecendo o que se tratam esses pontos de vistas, o primeiro se firma no uso das relações geométricas da Geometria Pura[20], enquanto o segundo se firma no uso das equações, sobretudo no uso dos sistemas de coordenadas.

2.1 A primeira metade do século XIX

O início do século XIX da matemática britânica foi marcado por importantes fatos que influenciaram na forma dos matemáticos desenvolverem suas pesquisas. Advinda de uma tradição herdada dos trabalhos de MacLaurin, Newton e Taylor, tal matemática estava fortemente influenciada no uso exclusivo da geometria sintética que se apoiava na na geometria de Euclides[21], usada para demonstrar todas as propriedades das curvas, isto é, a geometria euclidiana era a base de toda pesquisa matemática naquele momento, fazendo com que a matemática britânica criasse uma resistência a todo desenvolvimento da análise e do cálculo diferencial que ocorria nos demais países do continente europeu, colocando-se numa situação de isolamento (DIAS, 2013, p. 9).

Tal estado de afastamento em relação à matemática dos países do continente perdurou até o final do século XVIII, pois o principal obstáculo para as inovações dos métodos analíticos e do cálculo diferencial vinha dos principais docentes e membros do Senado[22], que consideravam qualquer tentativa de inovação como um pecado contra a memória de Newton (BALL, 1889, p. 117).

Essa constatação da matemática britânica se encontrar numa condição de isolamento e atrasada pode-se confirmar em Ball (1889):

> Uma linguagem comum e facilitada de intercomunicação de idéias são de maior importância na ciência, e mesmo se a escola de Cambridge tivesse desfrutado do uso de uma notação melhor do que seus contemporâneos continentais, eles teriam perdido muito por seu isolamento. Tão pouco, porém, perceberam essa verdade que não fizeram esforços sérios para se familiarizarem com o desenvolvimento da análise de seus vizinhos. (*ibid*., pp. 97-98. Tradução nossa).[23]

Sobre esse fato se percebe que a escola newtoniana insistia em usar demonstrações geométricas, mesmo após os princípios do cálculo diferencial já terem se tornados universais.

---

[20] A geometria pura, também chamada de geometria sintética, é um ramo da matemática que se encarrega de estudar e construir através de um tratamento lógico-dedutivo as formas e os lugares geométricos através das relações e propriedades geométricas sem fazer o uso de sistema de coordenadas.

[21]Euclides de Alexandria (século III – a.C.) matemático da Antiguidade Clássica.

[22] O Senado foi um órgão da Universidade de Cambridge.

[23] *A common language and facility of intercommunication of ideas are of the most importance in science, and even if the Cambridge school had enjoyed the use of a better notation than their continental contemporaries they would have lost a great dealby their isolation. So little however did they realize this truth that they made no serious efforts toke ep themselves acquainted with the development of analysis by their neighbors*.

Dessa forma fica mais envidente perceber a resistência britânica à análise e o fato do critério de rigor estar firmado na geometria sintética (DIAS, 2013, p. 9).

Richards (1986, p. 306) também evidencia outro motivo pelo qual a geometria apresentava sua abordagem sob a perspectiva sintética era devido à sua matriz cultural que estava apoiada claramente ao contexto educacional, ou seja, tal questão, sobretudo na Inglaterra, também valorizava bastante o ponto de vista herdado das suas tradições, principalmente, no que diz respeito a predominância da abordagem sintética nos exames, uma clássica exigência herdada de Euclides.

Porém, a partir do movimento iniciado por Robert Woodhouse[24], o qual foi o primeiro a publicar um trabalho[25] que introduzia os conceitos do cálculo diferencial, ele foi um dos responsáveis por explicar aos matemáticos ingleses que eles deveriam converter-se às novas notações do cálculo diferencial de Leibniz[26], iniciando um grupo de matemáticos interessados em introduzir as inovações analíticas e do cálculo diferencial que permeavam a pesquisa matemática europeia (DIAS, 2013, p. 7).

Dias comenta que esse grupo formado por matemáticos seguidores das ideias de Woodhouse constituiu assim a chamada Escola Analítica, a qual além de procurar romper a resistência aos novos tratamentos analíticos, procurou também retirar a matemática britânica do seu estado de isolamento e de atraso em relação à matemática do continente europeu.

A questão da escolha da notação de Newton usada na matemática britânica, em oposição à notação de Leibniz usada pelos demais países da Europa, não é suficiente para explicar o atraso britânico, pois, mesmo que a notação de Newton fosse considerada superior à notação de Leibniz, os matemáticos britânicos ainda assim estariam em desvantagem em relação ao restante da comunidade matemática dos países do continente por ainda utilizar os resultados de Maclaurin, Newton e Taylor (*ibid*, p. 9).

Além do ganho obtido com as novas notações do cálculo diferencial, houve também uma abertura para pesquisas sob o ponto de vista analítico, com destaque para a álgebra com aplicações geométricas. Destaca-se ainda a criação de um periódico inglês específico, *The Cambridge Mathematical Journal*, para publicações de artigos matemáticos, onde se pôde encontrar a presença de diversos trabalhos relacionados à geometria analítica e a álgebra

[24] Robert Woodhouse (1773 – 1827) professor de matemática em Cambridge, em 1820 foi eleito *Lucasion Professor*, cadeira de matemática de grande prestígio que foi ocupada por Isaac Newton.

[25] O título deste trabalho é *Principles of analytical calculation* que foi publicado em 1803 em Cambridge.

[26]Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716) matemático alemão que desenvolveu a notação $\frac{dy}{dx}$.

aplicada à geometria, dando a clara noção das mudanças que estavam ocorrendo nos anos iniciais da primeira metade do século XIX na matemática britânica.

Em Fisch (1994) pode-se encontrar uma contextualização desse período, indicando, de fato, as mudanças que estavam ocorrendo na matemática britânica naquele momento:

> [...] A notável revitalização da matemática britânica e da física matemática durante a primeira metade do século XIX é talvez a mais merecedora desse destaque (FISH, p. 247. Tradução nossa).[27]

Fish comenta que, mesmo por pouco tempo, o processo de reforma foi sendo efetivamente implementado pela *Cambridge Analytical Society*[28] no início dos anos de 1810. Embora não tenha sido a primeira a fazer críticas ao estado que se encontrava a matemática britânica na época, de certa forma, esta sociedade foi a primeira a promover uma reforma que proporcionou os primeiros efeitos de uma mudança na matemática britânica.

As duas primeiras conquistas marcantes dessa Sociedade foram, em 1816, com a publicação da tradução do livro-texto *Elementary differential calculus*, de Lacroix[29], e, em 1817, com a introdução por Peacock dos símbolos do cálculo diferencial no conjunto dos documentos do exame[30] do *senate-house*[31] (BALL, 1889, p. 120).

É indiscutível que a reforma proposta pela Sociedade Analítica foi de suma importância para colocar a matemática britânica em novos rumos e deve-se efetivamente ao mais influente dos membros dessa sociedade, George Peacock, a responsabilidade por retirar os matemáticos britânicos do isolamento em relação ao restante da Europa, evidenciando mais uma vez que esse cenário já perdurava desde a última metade do século XVIII (DIAS, 2013, p. 9).

Porém, não se pode deixar de considerar os trabalhos anteriores, como o de Robert Woodhouse, em Cambridge, bem como destacar a existências de muitos outros centros de reforma tão importantes quanto da Escola Analítica, que vão desde as academias militares[32], até universidades, como Oxford, Edimburgo, Glasgow e Dublin, demonstrando que a matemática britânica como um todo, realmente, estava fundamentada nos princípios sintéticos

---

[27] *[...] The remarkable revitalization of British mathematics and mathematical physics during the first half of the nineteenth century is perhaps them most deserving of the name.*

[28] *Cambridge Analytical Society* criada em 1812 pelos matemáticos George Peacock (1791 – 1858), John Herschel (1792 – 1871) e Charles Babbage (1791 – 1871). Seguindo as influências das observações de Woodhouse, os três matemáticos concordaram em formar esta Sociedade com o objetivo de defender o uso dos métodos analíticos e da nova notação do cálculo diferencial no lugar da antiga notação de Newton.

[29] Sylvestre F. Lacroix (1765 – 1843) matemático francês.

[30] Peacock foi eleito professor moderador, cuja função era preparar os exames das disciplinas de matemática.

[31] *Senate-house* é o centro administrativo da Universidade de Cambrigde.

[32] Pode ser citada, por exemplo, a academia *Royal Military Academy at Woolwich*.

e, que a partir desses movimentos, começou a receber essa influência analítica (GUICCIARDINI 1989, p. 136).

Logo, conforme a escola analítica ia vencendo as barreiras impostas pela tradição de Newton, não houve somente um ganho nos métodos analíticos e do cálculo diferencial, mas também ocorreu uma abertura para todo trabalho continental, inclusive para esses métodos de aplicações da álgebra para geometria (DIAS, 2013, p. 13).

Ainda na primeira metade do século XIX, a partir dos desenvolvimentos de Gauss e Lagrange em substituições lineares, destaca-se o surgimento de pesquisadores ingleses, como, por exemplo, o matemático Augustus de Morgan[33], interessados em desenvolver as propriedades dessas substituições e de suas aplicações à geometria e, consequentemente, às demais áreas das ciências físicas, como a mecânica, corroborando o que Fish (1994, p. 247) comentou com relação às transformações que estavam ocorrendo tanto na matemática quanto na física matemática.

Richards (1986, p. 308) reforça essa constatação ao comentar que podiam ser encontradas publicações em artigos nos jornais matemáticos, onde as tentativas de fornecer interpretações geométricas para resultados analíticos aumentaram substancialmente nessa década e, cada vez mais, a importância em fundamentar os resultados analíticos foi ganhando espaço. Com isso, percebe-se que os métodos analíticos e sintéticos se permeavam e intensificaram-se a partir da década de 1840, gerando assim, uma rivalidade entre as duas abordagens.

2.2 A segunda metade do século XIX

A passagem entre as metades do século não será feita de forma estritamente linear, isto é, fazer uma abordagem exatamente se iniciando a partir de 1850. O que se pretende nesta seção é fazer uma transição de uma metade para outra, de forma gradativa, sendo necessário ainda trazer alguns registros da década anterior.

Conforme já apontado no início desse capítulo, ao entrar na segunda metade do século XIX, de um modo geral, a busca pelo desenvolvimento da matemática se tornou uma profissão reconhecida na Grã-Bretanha, de modo que esse reconhecimento fovoreceu que esses profissionais passassem a receber incentivos educacionais e institucionais. Assim muitos matemáticos britânicos matemáticos se engajaram ativamente para promover esse

[33] Augustus de Morgan (1806 – 1871) matemático britânico que teve papel importante em propagar o uso da álgebra aplicada à geometria.

desenvolvimento, como, por exemplo, os novos resultados a respeito dos métodos projetivos que ocorreram nesse momento (RICHARDS, 1986, p. 297).

Esse engajamento já se nota desde o ínicio da década anterior, ao identificar o quanto as produções na matemática britânica, em especial, as pesquisas em geometria analítica se tornaram expressivas. Tal fato se percebe ao fazer uma breve leitura no indíce do segundo volume do *The Cambridge Mathematical Journal*, de 1841 que além de confirmar a alta produção de publicações da matemática britânica, também aponta como os desenvolvimentos analíticos evoluíram de modo que uma seção[34] específica nesse periódico foi criada para divulgar esses resultados.

Com relação à parte destinada à álgebra do referido jornal, não é difícil encontrar trabalhos que relacionem a álgebra à geometria, como, por exemplo, há um artigo de George Boole[35], *Researches in the theory of analytical transformations, with a special application to the reduction of the general equation of the second order* publicado em 1841 (PARSHALL, 1989, p. 160).

A importância dessas publicações a partir da década de 40 foi a forte influência que Boole exerceu sobre os trabalhos de Cayley, principalmente ao introduzir e definir os conceitos da Teoria dos Invariantes[36], a qual foi assim chamada na segunda metade do século XIX (*ibid*., p. 162).

A Teoria dos invariantes, iniciada a partir dos trabalhos de Boole, tornou-se um assunto de muito interesse por parte de Arthur Cayley[37] e que, posterioremente, contou com as parcerias de Sylvester[38] e de George Salmon. É a partir desta estruturação, que se começa projetar a importância do papel de Salmon com o desenvolvimendo dos seus trabalhos, os quais mostram o seu interesse pela Teoria que estava em foco e que, no quinto capítulo dessa pesquisa, será visto com mais detalhes a sua influência na publicação de seus tratados, evidenciando todas essas transformações.

[34] O título da seção específica é *Analytical geometry of three dimensions.*

[35] George Boole (1815– 1864) foi um matemático, filósofo britânico, criador da álgebra booleana, fundamental para o desenvolvimento da computação moderna.

[36] Teoria dos Invariantes é, essencialmente, funções cujos coeficientes são expressos por certas propriedades fixas da curva ou da superfície, as quais são independentes da escolha dos eixos.

[37] Arthur Cayley (1821 – 1895) foi um dos mais produtivos matemáticos britânicos da sua época, sendo um dos atuantes nos desenvolvimentos das teorias dos invariantes, das matrizes e dos determinantes. Foi um dos primeiros a conceituar conjunto da forma moderna. Cayley também atuou como advogado.

[38] James Joseph Sylvester (1814 – 1897) foi um matemático inglês. Contribuiu fundamentalmente no desenvolvimento da teoria matricial, teoria dos invariantes, teoria dos números e análise combinatória. Desempenhou papel fundamental no desenvolvimento da matemática nos Estados Unidos na segunda metade do século XIX, quando professor da Universidade Johns Hopkins e fundador do *American Journal of Mathematics*.

Pode-se confirmar essa rota, *a priori*, estabelecida através de Dias (2013, p.30). Dias comenta que Cayley criou uma relação de amizade com Sylvester, com quem fez grande parceria no desenvolvimento da Teoria dos Invariantes, por volta de 1850 e também com Salmon que se torna grande colaborador nessa teoria, a qual passa a atrair grande atenção dos matemáticos daquele período.

Essas constatações também podem ser confirmadas em Richards (1986, p. 308) onde ela comenta que essa "nova" geometria – Geometria Projetiva[39] – estava servindo de interpretação para os novos resultados analíticos e que a paixão britânica pela álgebra dos invariantes foi ganhando força no meado do século. Richards faz o seguinte apontamento:

> A partir de um artigo[40] de George Boole e de matemáticos como Arthur Cayley, J. J. Sylvester e o irlandês George Salmon, eles estabeleceram a tarefa de descobrir as propriedades das expressões homogêneas, dos invariantes de uma transformação linear (RICHARDS, 1986, p. 308. Tradução nossa)[41].

Richards comenta que o estudo dos polinômios homogêneos, em particular das formas quadráticas, tornou-se um domínio de estudo importante que motivou a publicação desses novos conceitos em livros, como os escritos por George Salmon, defendendo os métodos analíticos que eram percebidos como sendo parte integrante dos avanços realizados por Möbius e Plücker.

Com o desenvolvimento das propriedades das expressões algébricas, dos invariantes de uma transformação linear, outro exemplo significativo desse movimento na matemática foi a utilização das coordenadas homogêneas para o estudo das curvas algébricas que, *a posteriori*, foi criado uma disciplina que passou a ser denominada Geometria Algébrica[42].

O desenvolvimento matemático por Cayley ajuda a romper as barreiras do isolamento matemático de modo que, em 1844, com a publicação do artigo *Mémoire sur les Courbes Du Troisième Ordre*, no jornal de *Liouville*[43], tal feito foi considerado memorável, pois se tratava

---

[39] A autora considera os termos como sendo de Geometria Descritiva, entretanto os da geometria que se deve ser considerada são da Geometria Projetiva.

[40] O artigo do qual Richards se refere é '*Exposition of a General Theory of Linear Transformations, Parts I and II*', *Cambridge Mathematics Journal 3* (1841), l-20, 106-119.

[41] *"Taking off from an initial paper by George Boole, men like Arthur Cayley, J. J. Sylvester and the Irishman George Salmon, set themselves the task of discovering those properties of homogeneous expressions which are invariant under linear transformations."*

[42] A Geometria Algébrica é uma área da matemática que combina técnicas de álgebra abstrata, especialmente de álgebra comutativa, com a linguagem e os problemas da geometria. Ela ocupa um papel central na matemática moderna e possui várias conexões conceituais com áreas tão diversas quanto análise complexa, topologia e teoria de números.

[43] O *Journal de mathématiques pures et appliquées* (JMPA) é uma publicação científica francesa, fundado em 1836 pelo matemático Joseph Liouville, sendo por isto também conhecido como *Journal de Liouville*.

de um dos mais importantes periódicos internacionais, juntamente com o jornal do *Crelle*[44] (DIAS 2013, p. 29).

Como foi destacado na nota de rodapé 16, o jornal *The Cambridge Mathematical Journal* foi expandido para o *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, a partir de 1846. Essa expansão do periódico não tinha só a pretensão de ter um caráter de continuidade, mas também sinalizava promover uma maior abertura a trabalhos internacionais, seguindo os planos da Sociedade Analítica de atualizar e integrar a matemática britânica.

Para exemplificar essas publicações promovidas por essa abertura, pode-se encontrar já no primeiro volume um artigo de Liouville, no terceiro volume e um artigo de Charles Hermite, ambos matemáticos franceses. No oitavo volume, e no nono aparecem artigos de Hermite, Steiner e Brioschi.

Dias mostra ainda que se percebia naquela época o avanço do uso da álgebra aplicada à geometria não só por Cayley, Sylvester e Salmon, mas também por outros contemporâneos britânicos e que a partir de 1850 essas parcerias deram novos rumos à Teoria dos Invariantes.

Nesse período a álgebra que é então trabalhada foi, primordialmente, aquela introduzida por Boole que considerava as substituições lineares e que também ficou conhecida como a teoria das curvas algébricas, uma vez que possuía a clara intenção de estudar as curvas e as superfícies de um determinado grau.

O índice do quarto volume do *The Cambridge Mathematical Journal*, de 1845, aponta exatamente esse fato mostrando o quanto os métodos analíticos aplicados à geometria avançaram, uma vez que a seção destinada à geometria plana, já apresentava vários artigos que seguiam esta tendência (DIAS, 2013, p. 31).

Por sua vez, a geometria considerada foi a geometria das propriedades projetivas e de suas transformações, a qual chega a Cambridge por intermédio da influência francesa, de Chasles, e da alemã, a partir dos textos de Plücker e Hesse.

Outro fato a ser destacado consiste de, neste período, Cayley ter publicado mais artigos nos jornais internacionais, como o *Crelle* e o*Liouville,* do que no *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. Artigos que tratavam sobre a "teoria das curvas", na perspectiva de Plücker, no uso dos polinômios homogêneos e das teorias de Eisenstein, Hesse e na demonstração de um teorema devido a Chasles.

Esses destaques às teorias de Hesse, Eisenstein e Chasles apontam como a abertura pela matemática britânica aos conceitos desenvolvidos pela matemática do continente, em

[44] O *Journal de Crelle* é o nome comum dado ao periódico matemático alemão *Journal für die reine undangewandte Mathematik*, fundado em 1826 em Berlin, pelo matemático August Leopold Crelle.

particular, da matemática alemã e francesa, encurtou o isolamento que se via no início do século XIX, sobretudo através das publicações promovidas pelos periódicos *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, *Crelle* e *Liouville*.

Esses artigos mostram que além do uso das coordenadas homogêneas já serem uma prática bem estabelecida, a retomada ao uso das coordenadas cartesianas também era uma prática que se demonstrava total domínio. Tais práticas podem ser observadas nos resultados publicados no segundo tratado de Salmon.

Tais influências são registradas nas publicações de George Salmon, sobretudo na sua segunda obra e deve-se principalmente ao trabalho em conjunto com Cayley, o qual em seus artigos publicados no periódico de *Liouville* traz referências à "Teoria das curvas algébricas de M. Plücker", onde se propõe aplicar os princípios desta teoria de Plücker às curvas no espaço de três dimensões, esclarecendo as possíveis relações entre pontos, curvas e planos. (CAYLEY, 1845d, p. 245).

Em outro artigo, cujo título é *Démonstration d'un Théorème de M. Chasles*, publicado no jornal *Liouville*, pode-se perceber que além de confirmar a influência francesa através da teoria geométrica de Chasles, destaca-se também a presença do uso das coordenadas homogêneas, dando algumas características do uso da álgebra das substituições lineares aplicada à geometria projetiva.

No artigo *On geometrical reciprocity*, de 1848, mais uma vez observa-se o registro que Cayley faz ao explicitar a fonte, isto é, ao destacar Plücker como a fonte dos teoremas apresentados que o inspira em seus trabalhos com as cônicas e as coordenadas homogêneas, iniciando-o ao tratar do "teorema fundamental da reciprocidade", que se refere à dualidade no plano, trabalhando as relações importantes nas cônicas, cada uma delas com um respectivo teorema dual (DIAS, 2013, p.48).

Nessa segunda metade no que diz respeito ao desenvolvimento da na matemática britânica, depois de analisar as grandes contribuições nesse período por Arthur Cayley, destaca-se também os trabalhos realizados por Sylvester, que valorizaram ainda mais esse crescimento britânico no século XIX.

Sylvester contribuiu com diversos artigos no início da segunda metade do século XIX relacionados também às teorias dos polinômios homogêneos e, principalmente, às propriedades projetivas das cônicas, como, por exemplo, no seu artigo *On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates*, ele aborda as relações entre duas cônicas, usando polinômios homogêneos do segundo grau e também utilizando as coordenadas projetivas para analisar as relações entre duas cônicas, (*ibid*, p. 50).

Dias comenta que essa prática comum que estava não só se estabelencendo como também envolvendo os matemáticos britânicos desse momento em que mostra claramente a influência exercida pela Sociedade Analítica no início do século XIX no que diz respeito a forma de representar seus resultados e não mais se utilizando da metodologia sintética, deixando esta de ser o padrão nas demonstrações, fato que se pode constatar, por exemplo, ao analisar os trabalhos de Sylvester.

Em seu artigo de 1851, cujo título é *On the general theory of associated algebraical forms*, Sylvester apresentou a nova nomenclatura dos principais componentes da Teoria dos Invariantes e é inclusive neste trabalho que a referida teoria recebe este nome, conforme ele apresentou e utilizou em seu artigo (SYLVESTER, 1851, p. 171).

Ao mostrar a intensa produção com o teor analítico após a segunda metade do século XIX, tais produções estavam bem evidenciadas e guiadas pelos trabalhos de Cayley e de Sylvester que certamente influenciaram Salmon ao escrever o seu segundo tratado.

Então no que diz respeito à participação de George Salmon no desenvolvimento da matemática britânica, pode-se perceber a existência de uma prática comum entre esses matemáticos que contribuiu no desenvolvimento da Teoria dos Invariantes e também na transição da forma de abordagem, culminando nos tratados de Salmon, isto é, seus trabalhos são exemplos de publicações que inicialmente adotou a metodologia sintética e passou a adotar a metodologia analítica em seus resultados.

Assim Salmon também se concentrou em trabalhos cujos conteúdos se apropriaram das propriedades projetivas à álgebra no uso dos de polinômios homogêneos, das superfícies e das propriedades projetivas, como pode ser visto no seu artigo, de 1856, *On the degree of a surfasse reciprocal to a given one*, o qual será mais detalhado no quinto capítulo, como no artigo *Théorèmes sur les courbes de troisième degré*, de 1851, e *Sur La formation de l'équation de La courbe reciproque à une courbe donnée*, também de 1851. Esses dois artigos estarão relacionados no anexo B desta dissertação.

Além disso, destaca-se a importância que os tratados de George Salmon ganharam ao se tornarem livros textos de referência na Inglaterra e na Irlanda e, *a posteriori*, nos demais países do continente europeu bem como na América na segunda metade do século XIX.

É claro que essa prática comum entre os matemáticos mostra o relacionamento que eles tinham ao se comunicarem com seus artigos. Como se pode perceber Boole influenciou fortemente os trabalhos de Cayley e este, consequentemente, os trabalhos de Sylvester e de Salmon (CRILLY, 1986, p. 241).

O artigo *On The Degree of a superface reciprocal to a given one* de Salmon que também trabalhou sobre o assunto das cônicas e sua relação algébrica (SALMON, 1846. p. 65) é citado por Cayley em *On the triple tangent planes of surfaces of the third order* (CAYLEY, 1849, p. 446) o que mostra que tanto Cayley quanto Salmon, ambos pesquisaram o método da polar recíproca, o assunto o qual se encontra no primeiro tratado de Salmon e também destaca o caso no qual as superfícies são de segunda ordem. Salmon também considerou teoremas nas curvas de terceira ordem assim como Cayley, e relacionou a geometria projetiva entre retas e cônicas.

Como tem sido apresentada até agora, a proposta comum entre os diversos textos é a metodologia dada ao tratamento da álgebra dos polinômios homogêneos com aplicações geométricas associadas às propriedades projetivas dessas curvas que estes polinômios representam. Daí o campo de pesquisa na matemática britância se caracteriza por esta prática comum, característica na segunda metade do século XIX.

Aliás, em relação aos demais matemáticos britânicos, somente os textos de Cayley demonstram que ele tomou como referência para seus trabalhos em geometria apenas matemáticos do continente, como os trabalhos do francês Michel Chasles[45] e dos alemães Plücker e Hesse. Já com relação à teoria algébrica, esta é mais interna à comunidade britânica, destacando-se a comunicação que se estabeleceu entre os textos de Boole, Cayley, Sylvester e Salmon (DIAS, 2013, p. 54).

Apesar da clara utilização de aspectos geométricos, os diversos textos não apresentam figuras, nem mesmo para exemplificar. Isso pode ser compreendido como uma mudança de postura a partir da Sociedade Analítica, retirando a geometria sintética da posição de único padrão de rigor, mantendo-se, porém, uma visão geométrica que ajuda no raciocínio matemático das diversas teorias algébricas.

A visão geométrica, aliás, é mais do que um ferramenta, pois, se de um lado influencia diretamente a interpretação dos resultados da Teoria dos Invariantes, de outro lado, irá revolucionar a relação da geometria projetiva com as geometrias euclidiana e não euclidianas, a partir da leitura de Félix Klein dos artigos de Cayley sobre os *Quantics* (DIAS, 2013, p. 55).

[45] Michel Chasles (1793 – 1880) foi um matemático francês, um dos grandes atuantes no desenvolvimento da moderna Geometria Projetiva e um dos grandes influenciadores, com seus métodos sintéticos, de George Salmon.

CAPÍTULO 3: A GEOMETRIA PROJETIVA, DA VISÃO SINTÉTICA À VISÃO ANALÍTICA

Esquecida por quase dois séculos, o século XIX movido pelo despertar das máquinas, também desperta uma geometria que estava adormecida: denominada a Geometria Projetiva. Paralelamente ao desenvolvimento das novas geometrias, chamadas de não euclidianas, e da álgebra abstrata naquele momento, a então Geometria Projetiva também ganha espaço e desenvolve-se dentro desse cenário.

O objetivo deste capítulo será, então, apresentar o motivo pelo qual o desenvolvimento da Geometria Projetiva no século XIX despertou um grande interesse na comunidade matemática daquela época com os novos resultados que estavam sendo publicados, promovendo assim a criação de uma “nova e autônoma geometria”.

A importância do desenvolvimento desses novos resultados da Geometria Projetiva poderá ser conferida no do primeiro tratado de Salmon, onde ele além de publicar esses novos conceitos, aponta também a influência francesa, através de Poncelet e Chasles, sobretudo no que diz respeito à perspectiva sintética nessa obra.

A visão preponderante que se tinha e que permaneceu, praticamente, até o final do século XVIII, era de que a geometria euclidiana fosse uma descrição fiel do mundo sensível, a qual era tratada como um dogma. Entretanto tal visão foi questionada e, dessa forma, reconheceu nas geometrias não euclidianas também o direito de representar o espaço físico (ROSENFELD, 1988).

A criação das geometrias não euclidianas marcou a própria essência da matemática, proporcionando a ela uma libertação do mundo físico a partir da aceitação de objetos coerentemente concebidos pela mente humana.

A partir dessa aceitação, no que diz respeito à Geometria Projetiva, constata-se, por exemplo, o fato de que duas retas paralelas que na geometria de Euclides não possuía ponto em comum, agora, são concorrentes num ponto imaginário, que é um ponto no infinito.

Devido a todas essas transformações que estavam ocorrendo na época, também se pode perceber que as mudanças que aconteceram na forma como os resultados eram publicados, isto quer dizer, nota-se que a metodologia sintética se fazia bem presente no início do século XIX nos resultados também da Geometria Projetiva, e, com o passar do tempo, começa dividir o espaço com corrente analítica, que já se evidenciava nos anos finais do século XVIII.

Com a coexistência dessas duas perspectivas nas publicações dos trabalhos presente na comunidade matemática da época, pode-se até conjecturar uma possibilidade de haver uma boa relação entre elas, porém parece ser mais natural que uma rivalidade se instale entre essas duas visões para ver qual delas se torne predominante.

Embora inicialmente essas correntes conviveram bem no início do século XIX em decorrência da atuação de Monge no desenvolvimento dos resultados dessa "nova" geometria, após sua morte, tornou-se evidente o embate entre elas. E a partir dessa rivalidade, surge um dos objetivos desse capítulo que é fazer a passagem da visão sintética para visão analítica, a qual também se verifica nos trabalhos de George Salmon, que será mostrado também no sexto capítulo desta pesquisa.

Para o desenvolvimento desta seção, primeiramente será feita uma abordagem histórica para compreender o ressurgimento dessa "nova" geometria, isto é, desde os primeiros resultados precursores considerados da Geometria Projetiva até o seu desenvolvimento como teoria estruturada e organizada. Depois serão apresentadas, em dois momentos, as evidências das duas correntes, a sintética e a analítica, finalizando com a rivalidade que existiu entre elas.

3.1 O contexto histórico

Datam da Antiguidade Clássica[46] os primeiros resultados que são hoje considerados do âmbito da Geometria Projetiva.Trabalho como o de Apolônio de Perga[47], como o seu famoso tratado sobre seções cônicas, exemplifica essas primeiras evidências. Entretando o seu desenvolvimento começou realmente no século XVI, em consequência dos trabalhos sobre perspectiva no período do Renascimento[48] (SAKAROVITCH, 1998).

É no Renascimento que se registram o primeiro grande tratado publicado sobre cônicas desde a Antiguidade, o qual se deve a Johannes Werner[49], bem como a introdução por Johannes Kepler[50] dos conceitos de pontos e retas no infinito para o estudo das cônicas.

---

[46]O termo Antiguidade Clássica se refere a um longo período da história da Europa que se estende aproximadamente do século VIII a.C. ao século V d.C., mais precisamente no ano 476. No eixo condutor desta época, estão os fatores culturais das suas civilizações mais marcantes, da Grécia e da Roma.

[47] Apolônio de Perga (262 a.C. – 194 a.C.) matemático grego, chamado "O Grande Geômetra".

[48] Renascimento, Renascença ou Renascentismo são os termos usados para identificar o período da história da Europa marcado, aproximadamente, entre meados do século XIV até o fim do século XVI. Chamou-se Renascimento em virtude da intensa revalorização das referências da Antiguidade Clássica.

[49] Johannes Werner (1468 – 1522) matemático alemão.

[50] Johannes Kepler (1571 – 1630) foi um astrônomo, astrólogo e matemático alemão, o primeiro a propor a introdução dos pontos ideias.

Considera-se que um dos grande passo dado para o desenvolvimento da Geomentria Projetiva foi dado por Girard Desargues[51], o qual foi o primeiro a obter sucesso com o estudo das cônicas sob o ponto de vista projetivo, introduzindo diversos conceitos fundamentais, como o de involução, polares e quadriláteros completos.

Entretanto o trabalho de Desargues não obteve muito impacto na época, devido ao seu estilo de exposição difícil e pouco convencional, sobretudo pelo fato de seus métodos constituírem uma ruptura tanto com a tradição clássica quanto com a geometria analítica que começava a despontar naquele momento. Dessa forma, os trabalhos de Desargues acabaram não tendo uma continuidade.

Infelizmente pela a falta de uma continuidade, o pouco que se soube com relação aos trabalhos de Desargues, deve-se ao seu seguidor Blaise Pascal[52], que desenvolveu os métodos de Desargues, culminando na edição do conhecido *Essay pour les coniques*, de 1640, onde se encontra a publicação do Teorema do Hexagrama Místico[53] e seus respectivos corolários. Tal teorema forma um dos considerados mais evidentes resultados do Princípio da Dualidade, o qual será visto com mais detalhes no apêndice A desta pesquisa.

Após Pascal, o desenvolvimento das pesquisas sobre propriedades da Geometria Projetiva novamente foi abandonado e, praticamente, substituído pela geometria analítica cartesiana que estava em alta naquele momento. Os poucos resultados que se encontram devem-se a Phillipe de La Hire[54] com o seu trabalho sobre cônicas tratadas projetivamente e, também, a alguns resultados obtidos por Braikenridge[55], Maclaurin e Newton no início do século XVIII. Tais resultados ressurgem apenas no início do século XIX, período referente à pesquisa.

O ressurgimento da Geometria Projetiva efetivamente se deve a um grupo de alunos da *École Polytechnique*[56]. Esse grupo foi essencialmente formado por Charles Brianchon[57], o qual é descobridor do teorema que leva o seu nome e o dual do Teorema de Pascal, que

[51] Girard Desargues (1591 – 1661) foi um matemático, arquiteto e engenheiro militar francês precursor da Geometria Projetiva.

[52] Blaise Pascal (1623 – 1662) foi um matemático, físico, filósofo e teólogo francês.

[53] O teorema fundamental sobre um hexagrama inscrito numa cônica diz o seguinte: Os pontos de interseção dos pares de lados opostos de um hexagrama inscrito numa cônica são colineares.

[54] Phillipe de La Hire (1640 – 1718) foi um matemático, astrônomo, arquiteto e pintor francês.

[55] William Braikenridge (1700 – 1762) foi um matemático e clérigo escocês.

[56] *École Polytechnique* é uma das mais antigas e prestigiosas escolas de engenharia francesa, fundada em 1794, reconhecida pela proeminência da matemática na formação de seus alunos.

[57] Charles Julien Brianchon (1783 – 1880) foi um matemático e químico francês cujo teorema que leva o seu nome é o dual do teorema do hexagrama místico de Pascal; estes dois teoremas constituem o primeiro exemplo relevante de um par de teoremas duais.

também estará no apêndice A, Michel Chasles, Joseph Gergonne[58] e, sobretudo, Jean Victor Poncelet, grande defensor dos métodos sintéticos em Geometria. O lado analítico da Geometria Projetiva também teve seus progressos extraordinários nos trabalho de Möbius, de Chasles e, sobretudo, Julius Plücker.

No fim do século XIX e no começo do XX a geometria projetiva recebeu muitos tratamentos postulacionais e descobriram-se geometrias projetivas finitas. Com isso mostrou-se que, com graduais acréscimos e alterações de postulados, pode-se passar da geometria projetiva para a geometria euclidiana, encontrando-se muitas outras geometrias no caminho.

Com relação ao desenvolvimento da estrutura dessa nova geometria, destacam-se os seguintes pontos: na Geometria Projetiva não existe o conceito de retas paralelas, pois são adicionados no plano afim usual os pontos “no infinito”, os quais foram introduzidos por Kepler, de modo que duas retas quaisquer se intersectam sempre num ponto. Nessa geometria também não fazem sentido conceitos métricos, isto é, não há tratamento com ângulos, e com distâncias, por exemplo. Entretanto, há outros conceitos e propriedades que podem ser analisados, como as relações de incidência e de colinearidade entre objetos diferentes.

Com a introdução dos pontos no infinito, que também são chamados de pontos de fuga, a Geometria Projetiva permitiu uniformizar as cônicas, em outras palavras, nessa geometria não se faz a distinção entre as cônicas, elipses, parábolas ou hipérboles, pois com a inclusão de uma determinada quantidade de pontos no infinito, as cônicas se transformam no mesmo tipo de cônica projetiva, chamada também de não degenerada (CHASLES, 1837).

Assim, qualquer propriedade projetiva que se verifique para uma cônica projetiva não degenerada em particular, verifica-se também para qualquer outra. Logo, isso implica que as demonstrações das propriedades relativas às cônicas projetivas se tornam muito mais simples porque é possível particularizar essas demonstrações para uma cônica projetiva não degenerada de equação mais simples ou que passe em determinado conjunto de pontos até chegar à conclusão de que a propriedade é válida para qualquer outra cônica projetiva não degenerada.

Outro aspecto muito interessante na Geometria Projetiva é o chamado Princípio da Dualidade, princípio este que permite que se permutem alguns termos nos enunciados das propriedades, como, por exemplo, reta por ponto ou concorrentes por colineares. Dessa forma, obtêm-se novas propriedades a partir de outras já demonstradas sem a necessidade de prová-las novamente.

[58] Joseph Gergonne (1771-1853) foi um matemático francês.

Outra grande vantagem dessa geometria é o fato dela permitir concluir que uma propriedade demonstrada é válida também na geometria euclidiana, uma vez que, em termos pouco formais, considera-se que a Geometria Projetiva abrange a outra.

3.2 Da visão sintética

Neste momento o objetivo aqui será de procurar esclarecer o que se trata desta visão sintética da geometria, em particular, da Projetiva, a qual era predominante nos resultados no início do século XIX e que depois passou a concorrer com os métodos analíticos.

Poncelet, considerado o grande defensor dos métodos sintéticos, procurou tornar seus enunciados de geometria sintética os mais gerais possíveis, contrapondo o que ele percebia em relação às vantagens que os metódos analíticos pareciam ter, que residia exatamente em suas generalidades. Um dos seus enunciados que fortalece esse posicionamento é o enunciado que ele chamou de Princípio de Continuidade[59] (LORENAT, 2015, pp. 157-158).

Destaca-se um fato curioso sobre Poncelet: embora ele inicialmente tivesse escrito um tratado sobre geometria analítica entre 1813 e 1814, cujo título é *Applications d'analyse et de géométrie*, esse trabalho, porém, só foi publicado[60] no meio do século XIX, bem depois da publicação do seu famoso tratado publicado em 1822, *Traité des propriétés projectives des figures*, a qual se distingue das outras exatamente pela seu caráter sintético.

Ele foi o primeiro a considerar a Geometria Projetiva como um novo ramo da matemática com objetivos e métodos próprios, distinguindo entre propriedades que são projetivas e aquelas que não são (*ibid*., p. 156).

Em relação a Michel Chasles, embora na seção anterior, mencionou-se sua participação no lado analítico da Geometria Projetiva, o destaque feito a ele é devido ao mesmo ter sido também um grande especialista em geometria sintética. Tal fato pode ser visto no seu trabalho *Aperçu Historique sur l'Origine et le Développement dês Méthodes em Géométrie* de 1837.

A continuação do desenvolvimento dada à geometria "moderna" por Poncelet e Chasles representou, assim, a primeira grande extensão dos métodos sintéticos em oposição aos métodos analíticos.

---

[59] Princípio de Continuidade também chamado de Princípio da permanência das relações matemáticas.

[60] O referido trabalho de Poncelet foi publicado em dois volumes: o primeiro em 1862 e o segundo em 1864.

Essa perspectiva também foi seguida na Alemanha, especialmente por Jakob Steiner, um especialista em métodos sintéticos, os quais podem ser encontrados através dos seus trabalhos. Em tais trabalhos praticamente não se percebe quase nenhum desenvolvimento algébrico, além disso, eles se tornaram poderosos instrumentos de descoberta e proporcionaram realizar uma visão melhor sobre a natureza e as propriedades de curvas (GOW, 1997, p.51).

Destaca-se, sobretudo, que os métodos sintéticos desenvolvidos por Chasles e Poncelet foram influenciadores de George Salmon, quando este escreveu seu primeiro tratado sobre cônicas, em 1848, onde se encontram os primeiros resultados publicados dessa nova geometria.

Mas afinal o que venha ser essa metodologia sintética? Uma possível resposta para este método se encontra em Wilson (1903, p. 248) em que diz que o tratamento sintético depende essencialmente da concepção e da medida numérica da relação cruzada e que começa a partir do conhecimento que já se possui dos Elementos de Euclides. Esta abordagem foi adotado por Cremona, por Steiner e por Chasles.

Wilson (1903) comenta ainda que o pilar da Geometria Projetiva Sintética se estabeleceu no estilo claro de Steiner e de Poncelet, os quais já eram mais antigos, mais conhecidos e, também, mais consolidados, deslocando lentamente tanto os métodos adotados por Cremona quanto por Von Staudt.

De um ponto de vista puramente geométrico, os métodos sintéticos são considerados mais naturais, isto é, mais intuitivo e também, ao mesmo tempo, são considerados mais compactos sendo abrangentes (LORENAT, 2015, p. 157).

Assim as vantagens da metodologia sintética consistem em que seus processos são mais diretos e que a construção de uma cônica, propriamente dita, era um belo problema e exercício no que diz respeito ao ponto de vista do ensino. Além disso, as ideias introduzidas pelos conceitos das propriedades harmônicas, como a de uma polar, por exemplo, são compreendidas mais facilmente (WILSON, 1903, p. 252).

Tanto essas vantagens quanto a relação ao ponto de vista de ensino foram aplicados na matemática britânica como também se pode confirmar no comentário que Richards (1986) faz a respeito:

> "Os defensores da geometria primária argumentam que a manipulação dos símbolos algébricos era vazia e não era útil no treinamento de raciocinar dos jovens" (RICHARDS, 1986, p. 306, tradução nossa) [61].

---

[61] *"The advocates of the primacy of geometry in education argued that manipulating empty algebraic symbols was not helpful in training young men to think."*

No que diz respeito aos conceitos abordados através da perspectiva sintética, citam, por exemplo, os seguintes teoremas e ideias elementares da Geometria Projetiva: O Princípio da Dualidade, o Teorema de Desargues, a construção dos elementos harmônicos, a teoria das relações projetivas entre os pontos, os elementos da teoria de colineação e correlação entre os pontos e retas (WILSON, 1903, p. 250).

Em termos projetivos, há a definição das cônicas e dos teoremas usuais com relação aos quadriláteros inscritos e circunscritos, os Teoremas de Pascal e de Brianchon e a teoria de pólos e polar, conceitos estes que completam os elementos usuais de seções cônicas sob o ponto de vista sintético.

É fato que os métodos sintéticos também apresentavam suas desvantagens e quando esses inconvenientes surgiam, por sorte, poderiam ser resolvidos utilizando-se de alguma aplicação analítica. Uma delas, por exemplo, é quando o pólo se localiza fora da cônica, o que implica que a construção da sua polar será limitada por um segmento de reta, podendo ser resolvido usando o método analítico do Princípio da Continuidade.

Wilson (1903, p. 249) relata ainda que a "morte" do desenvolvimento sintético ocorre efetivamente com a publicação dos últimos métodos, que se encontram no trabalho de von Staudt de 1847 e que até mesmo os apreciadores desses métodos reconhecem que já estavam ultrapassado.

Esses últimos resultados de Von Staudt são os mais importantes e mais bonitos porque eles lidam diretamente com as ideias essencialmente envolvidas na Geometria Projetiva sintética.

3.3 Da visão analítica

De modo análogo à seção anterior, o objetivo aqui será de procurar esclarecer o venha ser o tratamento analítico na geometria, sobretudo, na Projetiva.

A influência analítica na Geometria Projetiva pôde ser identificada na França através do *Aperçu Historique*, de 1837, de Michel Chasles e na Alemanha com os trabalhos de Möbius e de Plücker. Este último se destaca, sobretudo, com o seu trabalho *System der Analytischen Geometrie*, de 1835 (DIAS, 2013, p. 26).

Assim como na seção anterior foi feito um destaque para o trabalho de Chasles, nesta seção também destaca o fato de que embora ele tenha contribuído significativamente para o desenvolvimento sintético da Geometria Projetiva e considerado um dos grandes integrantes dessa corrente, pode-se encontrar também em seu trabalho contribuições com um tratamento analítico para a geometria.

A importância dos trabalhos de Plücker é devida, principalmente, às coordenadas homogêneas[62] e o tratamento analítico das propriedades projetivas. Destacam duas vantagens deste novo método: a primeira é a idéia de que as curvas e as superfícies são mais gerais e, a segunda, de que os pontos imaginários, agora, aparecem nas equações algébricas. Uma das belas aplicações desse método de Plücker foi utilizado para estudar as curvas de terceira ordem. Quanto a Möbius, seu destaque é dado por causa do seu trabalho sobre o cálculo baricêntrico[63] (MANSION, 1873, p. 314).

Dessa forma, considera-se que a introdução de uma visão analítica das propriedades projetivas, dadas pelas coordenadas homogêneas, ocorre a partir dos trabalhos de Möbius e de Plücker.

Com relação a essa nova visão analítica das propriedades projetivas dadas pelas coordenadas homogêneas, tem-se um desenvolvimento interessante quando o sistema de coordenadas inaugurado por Plücker em 1829 permite que o elemento fundamental a ser considerado não precisa ser um ponto, podendo ser qualquer ente geométrico.

A partir daí se promove uma série de novas interpretações, como, por exemplo, um par de coordenadas pode ser tratado como coordenadas pontuais ou como coordenadas lineares. Ao mesmo tempo, uma equação linear pode ser a equação de uma reta ou a equação de um ponto, assim como uma curva pode ser considerada ou como o lugar de seus pontos ou como a envoltória de suas tangentes, fornecendo, dessa forma, a base da demonstração analítica de Plücker do Princípio da Dualidade dos métodos projetivos (LORENAT, 2015, pp. 167-168).

A sua obra *Analytisch-geometrische Entwicklungen* foi publicada em dois volumes, primeiro em 1828 e depois em 1831. No primeiro volume aparece o primeiro tratamento extenso do método da notação abreviada[64], embora este já tivesse sido empregado antes por Gabriel Lamé e Étienne Bobillier, assim teoremas aparentemente complexos, do ponto de vista algébrico, como o teorema dos dois triângulos de Desargues e o teorema do hexagrama

---

[62] Coordenadas Homogêneas são as coordenadas utilizadas para indicar um elemento do plano projetivo e a sua notação clássica é dada da forma: $\bar{v} = (v_1 : v_2 : v_3)$, (ANDRADE; BARROS, 2010).

[63] Cálculo Baricêntrico é, na verdade, a obra *Barycentrische Calcul* de A. F. Möbius publicada em 1827, a qual já trazia o sistema de coordenadas homogêneas.

[64] A ideia da notação abreviada reside na representação de expressões longas por letras únicas e o princípio fundamental: Se $(x, y) = 0$ e $(x, y) = 0$ são duas curvas, então $u + v = 0$, onde u e v são constantes ou funções quaisquer de x e y, é uma curva pelos pontos de intersecção das curvas $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Mais sobre notações abreviadas, ver a Tese *Étienne Bobillier* (1798 – 1840): *parcours mathématique, enseignant et professionnel*, de Cleber Haubrichs, de 2015.

místico de Pascal, podem ser demonstrados de maneira muito mais breve e clara com o auxílio da notação abreviada.

No segundo volume dessa obra, encontra-se uma apresentação das coordenadas homogêneas dos pontos de um plano. As coordenadas homogêneas de um ponto P de coordenadas cartesianas (X, Y) são definidas como qualquer terno ordenado (x, y, t) tal que:

$$\begin{cases} X = \dfrac{x}{t} \\ Y = \dfrac{y}{t} \end{cases}$$

Segue-se que os ternos (*x*, *y*, *t*) e (*kx*, *ky*, *kt*) representam o mesmo ponto. A expressão "homogênea" provém do fato de que, quando se converte a equação f(X, Y) = 0 de uma curva algébrica em coordenadas cartesianas à forma $f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) = 0$, todos os termos da nova equação têm o mesmo grau em relação às novas variáveis. A importância que o sistema de coordenadas homogêneas proporcionou foi a questão do terno (*x*, *y*, 0), que não tem um correspondente em coordenadas cartesianas, poder representar um "ponto no infinito", de maneira que os pontos ideais no infinito[65] de Kepler, Desargues e Poncelet passaram a ter uma representação num sistema de coordenadas.

As coordenadas homogêneas fornecem um instrumento perfeito para a exploração da Geometria Projetiva, a qual requer tanto os pontos finitos quanto os pontos infinito do plano para centrar, por exemplo, os problemas de projeção (VOLKERT, no prelo).

Foi um desenvolvimento extremamente importante, pois, ao apresentar as geometrias não euclidianas a partir da chamada Geometria Projetiva, pode-se introduzir uma nova hierarquia entre as novas geometrias (MENGHINI, no prelo).

Estes novos métodos foram rapidamente adotados pelos matemáticos britânicos, em particular, por Arthur Cayley que em 1859 mostrou como aplicar esses métodos para definir as métricas não euclidianas a partir das coordenadas homogêneas.

Para exemplificar tal adoção, Dias (2013, p. 32) aponta o artigo de Cayley de 1843, *Demonstration of Pascal's Theorem*, publicado no quarto volume do *The Cambridge Mathematical Journal*, na seção intitulada *Plane Geometry*, onde ele realiza uma demonstração analítica do teorema de Pascal, utilizando as equações homogêneas e trabalhando no espaço projetivo.

Fazendo analogia à seção anterior, também levanta a questão do que exatamente se trata a metodologia analítica? Essencialmente, os métodos analíticos consistem no

[65] Por exemplo, a equação t = 0 é então a equação de uma reta ideal no infinito.

desenvolvimento adequado de um sistema de coordenadas adotado a partir da escolha de um referencial apropriado para, enfim, conseguir estabelecer as equações.

As vantagens que os métodos analíticos apresentam estão, exatamente, no poder pela generalidade, uma vez que todos os problemas são resolvidos por procedimentos uniformes, ao passo que nos métodos sintéticos cada problema depende da figura particular considerada. Através do uso do sistema de coordenadas homogêneas, possibilita-se trabalhar as propriedades projetivas de forma algébrica, conforme a teoria de Plücker das curvas algébricas.

Destaca-se também o interesse por problemas geométricos na perspectiva analítica de Chasles, na utilização das propriedades projetivas como homografia e, por último, o uso do determinante para realizar a interpretação geométrica de pontos alinhados e de pontos pertencentes ao mesmo plano (LORENAT, 2015, p. 158).

A geometria analítica, quando usada adequadamente, não perde para a geometria sintética em elegância e simplicidade. Quanto à desvantagem, os métodos analíticos perdem a facilidade do processo quando o sistema de coordenadas não é escolhido adequadamente, podendo ocasionar em excessivos cálculos algébricos. Outra desvantagem ocorre quando do não uso das notações abreviadas, as expressões se tornam longas demais.

3.4 A rivalidade

A rivalidade que se estabeleceu entre a abordagem analítica e sintética pode ser conferida com o apontamento que Richards (1986, p. 301) faz, mostra que desde o início do século XIX e já vindo do século anterior, o desenvolvimento analítico já se mostrava promissor, porém ainda não havia uma percepção clara dos motivos pelos quais os métodos analíticos levariam a resultados verdadeiros se pareciam ser meramente simbólicos e remotos.

Em contrapartida, Richards também aponta que o método sintético era considerado fundamentalmente seguro, visto que os processos eram claros e os objetos facilmente identificados, porém o seu ponto desfavorável era a falta da generalidade da análise.

Lorenat (2015, p. 157) também comenta a respeito desta rivalidade entre a geometria sintética e analítica delineada no início do século XIX era tema popular e que se estendeu até o início do século XX.

Num primeiro momento, percebeu-se uma tentativa de se harmonizar a relação entre as duas perspectivas, mas a rivalidade recomeçou e tornou-se cada vez mais amarga. O curioso dessa rivalidade se destaca pelas figuras de Poncelet e Gergonne, pois ambos foram estudantes de Monge, o qual era igualmente adepto da geometria analítica e da sintética. Com o falecimento de Monge em 1818, Poncelet e Gergonne publicaram artigos nos *Annales* de Gergonne, em que este defendia os métodos analíticos e enquanto aquele, a superioridade da geometria sintética.

Uma das evidências do confronto entre esses dois campos se percebe em 1826, no recém-descoberto Princípio da Dualidade. Enquanto Gergonne estava convencido de que os métodos analíticos mostravam que a permuta entre os termos, como ponto por reta, era universalmente válida, Poncelet, em contrapartida, afirmava que ele foi o primeiro a descobrir a dualidade e que o princípio era uma consequência das relações na geometria pura entre um pólo e sua polar com relação a uma cônica.

Outra evidência desse confronto se percebe quando Steiner ameaçou os editores da prestigiosa revista de matemática pura e aplicada, *Crelle*, não publicando mais seus trabalhos caso continuasse aceitando os trabalhos de Plücker (LORENAT, 2016).

Na primeira metade do século XIX, estabeleceu-se uma grande controvérsia entre os geômetras sintéticos e os geômetras analíticos. As objeções que foram colocadas à geometria analítica eram do seguinte tipo: É realmente geometria? Os métodos são puramente algébricos e os resultados também, com os quais o significado geométrico não é considerado. A relação entre o ponto de partida e o ponto de chegada é perdida no processo de pequenos passos algébricos cujo significado geométrico não é claro. O método geométrico puro é mais simples e mais intuitivo em suas demonstrações. A geometria é a verdade sobre o mundo real; no entanto, análise e álgebra não são verdades em si. (*ibid*., 2016)

Em resposta a essa crítica, percebe-se que os defensores dos métodos analíticos argumentavam que a vantagem da análise consistia na sua potencial generalização do método, uma vez que todos os problemas podem ser resolvidos por meio de processos convencionais, ao passo que nos métodos sintético, cada problema depende da figura em particular considerada.

Após essa fase de conflitos mais latentes, como já destacados no segundo capítulo, surgiram as figuras notáveis como Arthur Cayley, James Joseph Sylvester e George Salmon, geômetras britânicos analíticos, que contribuíram substancialmente para os desenvolvimentos analíticos e que adotaram a visão analítica de Möbius e Plücker por volta de 1840 a 1850.

Lorenat (2016) finaliza que a Geometria Projetiva entrou numa estágio de maturidade, que mostrava como os métodos projetivos englobavam os métodos da geometria euclidiana.

Mais tarde, já no final do século XIX, Felix Klein completou o trabalho de Staudt, um dos representantes da Geometria Projetiva, através da teoria dos grupos de transformação em seu famoso *Erlangen Programm*.

Para complementar a importância que o Programa de Klein proporcionou para a relação entre as duas metodologias, segue o que Wilson comentou a respeito dessa publicação:

> "[...] Desde a publicação do Programa Erlangen, de Klein, em 1872, não há razão para que os geômetras não reconheçam distintamente – embora muitas vezes demorem a fazê-lo – que o fundamental, ao lado do axioma, é a transformação ou grupos de transformações. Na geometria do plano projetivo, seja o tratamento analítico ou sintético, o importante é a aplicação do grupo de colineações associada às correlações.[66] (WILSON, 1903, p. 252. Tradução nossa)

Dessa forma, embora de forma gradativa, percebe-se uma relativa trégua entre as duas perspectivas, e, além disso, a possibilidade de estabelecer-se um trabalho conjunto com a presença dos dois tratamentos.

E o resultado que merece ser destacado se trata das aplicações geométricas ao tratamento analítico como se encontra nas conclusões da Sexta Memória de Cayley, a qual Félix Klein ressalta que a geometria euclidiana seria um caso particular da Geometria Projetiva, nos termos de Cayley, e esta sendo então a mais geral (KLEIN, 1928, p. 136).

Esse resultado foi grandemente inovador para meados do século XIX, visto que a Geometria Projetiva, que surgia neste período, era considerada derivada da geometria euclidiana.

---

[66] "[...] *since the publication of Klein's Erlangen Programm in 1872, there has been no reason why geometers should not recognize distinctly – although they have often been slow to do so – that the fundamental thing, next to the axiom, is the transformation or groups of transformations."*

CAPÍTULO 4: UMA APRESENTAÇÃO DA BIOGRAFIA DE GEORGE SALMON

Seguindo uma nova tendência no desenvolvimento da historiografia da ciência e da matemática em geral, neste capítulo será feita uma apresentação da biografia de George Salmon, personagem principal dessa pesquisa, a qual além de fazer uma exposição de sua vida, trazendo detalhes de sua história, como origem, formação e carreira, permitirá entender, de certa forma, como esses dados biográficos influenciaram na sua trajetória.

Para seguir essa concepção, conflui-se com o que Roque (2012) aponta, isto é, ela mostra que a importância dos detalhes biográficos são influenciadores dos desenvolvimentos dos conceitos matemáticos que eram desconsiderados, *a priori*, pelos historiadores mais antigos que para estes bastavam focar na produção matemática, como se pode observar no apontamento abaixo:

> Conforme a corrente dominante da época, o foco do autor está mais na matemática do que nos matemáticos, pois, para ele, os detalhes biográficos têm pouca influência no desenvolvimento dos conceitos (ROQUE, 2012, p. 477).

Além das considerações biográficas sobre George Salmon, também serão relacionadas as associações as quais ele se tornou membro bem como as condecorações que ele recebeu ao longo da sua carreira.

4.1 A sua origem

George Salmon Weekes nasceu no dia 25 de setembro de 1819, no condado de Cork[67], localizado no sul da Irlanda, foi o único filho homem dos quatro filhos do casal, Michael Salmon, o qual era um comerciante de linho, e Helen Weekes, cuja referência que se tem dela era de ter sido filha do Reverendo[68] Edward Weekes (MCCONNELL, 1981). Tal fato de George Salmon ter sido neto do Reverendo Weekes pode ser considerado um possível indício que mostra que ele cresceu num ambiente com influências religiosas.

Em 1844, Salmon se casou com Frances Anne Salvador, filha do também Reverendo J. L. Salvador. Eles tiveram seis filhos sendo quatro meninos e duas meninas, mas apenas dois desses seis filhos sobreviveram, o filho mais velho, Edward Salmon, e a filha mais nova,

---

[67] A verdade é que na grande maioria das referências, como encontradas em Gow e Mollan, não se tem total certeza sobre o local exato onde Salmon nasceu. Algumas referências indicam Cork e outras, Dublin.

[68] Reverendo é o tratamento dado direto de cortesia aos padres ou às madres superiores e, em geral, dos prelados e sacerdotes.

Fanny Salmon. Mollan (2007, p. 774) comenta que a vida pessoal de Salmon foi marcada por tragédias pessoais, visto a perda tanto dos seus quatro filhos bem como a morte precoce de sua esposa em 1878.

Durante quarenta anos, ele residiu no endereço 4 *Heytesbury Terrace*, atualmente é a 81 *Wellington Road*, localizada em Dublin, e, a partir de 1888, quando assumiu a reitoria, passou o restante de sua vida, no Nº. 1 *Grafton Street*, na famosa Casa do Reitor da *Trinity College* (*ibid*., p. 775).

Com relação ainda à família de Salmon, destaca-se o fato dele ser primo de primeiro grau de Edward Dowden, o qual também foi um tutor[69] bastante conhecido da *Trinity College*, que ensinou Literatura Inglesa no período de 1867 até a data de sua morte (GOW, 1997, p. 28).

Com relação, um pouco, sobre os aspectos da personalidade de George Salmon, destacam-se os comentários que se encontram tanto em Mollan (2007) quanto em Gow (1997). O primeiro aponta que a figura de Salmon era bem conhecida em Dublin, quase todas as tardes ele poderia ser visto vagando pelas ruas. Ele era um grande amante da música, um grande jogador de xadrez, e leitor onívoro de romances. Seu fundo de histórias divertidas era inesgotável. Suas piadas circulavam pelos clubes. Homens de todos os credos liam as suas obras teológicas e falavam sobre elas. Mollan também aponta os contragostos de Salmon, entre eles estavam o seu não apreço pela metafísica, pouco se importava com a pintura ou com as questões de arquitetura, e por poesia ele não ligava para nada (MOLLAN, 2007, p. 787).

Mollan ainda destaca um comentário de 1862 de Thomas Archer Hirst (1830 – 1892) a respeito de Salmon:

> [...] Por natureza ele é simples de espírito, homem modesto, mas é dotado de um poder intelectual e de uma capacidade de trabalho como raramente nos encontramos... Ele é uma ótima calculadora que gosta de calcular para o seu próprio bem.[70] (MOLLAN, 2007, p. 775. Tradução nossa)

Com relação ao que Gow (1997, pp. 27-28) comenta sobre a personalidade de George Salmon é que na historiografia da *Trinity College* de Dublin, há várias referências sobre ele, entre as quais se destaca o fato dele ser uma pessoa de uma sagacidade e sarcasmo consideráveis.

---

[69] Na época o conceito de “Professor” não era estabelecido, o termo “Tutor” se aplicava à pessoa que ministrava as aulas.

[70] *[...] By nature he is a simple minded, modest man but he is endowed with an intellectual power and a capability of work such as we rarely meet... He is a great calculator, fond of calculating for its own sake*.

4.2 A sua formação acadêmica

No que tange a sua formação acadêmica, George Salmon iniciou seus estudos em uma escola particular em Cork, onde deu seus primeiro passos na matemática. Em 1833, com apenas quatorze anos de idade, Salmon ingressou na *Trinity College*, em Dublin. Estudou matemática e clássicos e ganhou uma bolsa de estudos em 1837. Em 1838, aos dezenove anos, ele obteve a graduação de Bacharelado em Artes[71] e também se tornou o primeiro moderador sênior em matemática e em física (GOW, 1997, pp.28-29).

Em 1844, Salmon atinge o grau de Mestre em Artes[72], sendo indicado para ser um palestrante de matemática em *Donegall* em 1858 (MOLLAN, 2007, p. 774). No entanto, o grau de Mestre em Artes na época era apenas um título honorário, não havendo a publicação de novos estudos.

Mollan comenta que ainda em 1858, neste mesmo ano, Salmon também recebeu o grau de Bacharelado em Divindade[73] e já no ano seguinte recebeu o título de Doutor em Divindade[74], os dois títulos foram concedidos pela *Donegall*.

4.3 A sua carreira

O início da carreira de George Salmon acontece quando ele se submeteu ao Exame da Associação, em 1840, sendo elegível membro da *Trinity College* em 1841 (GOW, 1997, p. 29).

Ao chegar à equipe[75] que palestrava matemática na *Trinity College* de Dublin, Salmon se juntou ao colegiado onde já figuravam alguns matemáticos renomados, entre eles, destacam-se: William Roman Hamilton, James MacCullagh, Charles Graves e Humphrey Lloyd (GILLESPIE, 2008, p.86).

Embora o principal tema de interesse na *Trinity College* naquele momento fosse relacionado à Geometria Sintética, uma vez que James MacCullag, o qual foi também tutor de Salmon, foi uma das suas influências para trabalhar nesta área. Entretanto, Salmon atuou neste campo por um curto período de tempo antes de passar para a área da geometria

[71] *Bachelor of Arts (BA).*
[72] *Master of Arts (MA).*
[73] *Bachelor of Divinity (BD).*
[74] *Doctor of Divinity (DD).*
[75] Naquela época não havia a configuração de um "Departamento de Matemática" estabelecido propriamente dito na *Trinity College Dublin*.

algébrica, cujas publicações foram amplamente lidas na segunda metade do século XIX (SPEARMAN, 2014, p. 89).

Gow (1997, p. 30) comenta que além da tendência aos conceitos da Geometria Sintética, as áreas de pesquisas como os quatérnios[76] e o cálculo também eram tópicos bem populares na *Trinity College* naquele momento.

Enquanto esteve como tutor na *Trinity College*, Salmon teve a oportunidade de palestrar para alunos[77] e apresentar para eles as novas teorias e conceitos matemáticos que estavam sendo desenvolvidas naquele momento (GOW, 1997, p. 30). Provavelmente um dos grandes motivos que estimulou Salmon a escrever seus dois primeiros livros possivelmente deve ter vindo das suas palestras e das suas aulas que Salmon ministrou durante a década de 1840.

Mollan (2007, p. 774) comenta também que Salmon além de ensinar matemática, contribuiu com seus artigos matemáticos, principalmente sobre superfícies, publicando-os em vários periódicos, como o *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, *The Philosophical Magazine*, *The Proceedings of the Royal Irish Academy*, *The Transactions of the Royal Irish Academy* e *The Philosophical Transactions of the Royal Society*.

Já Gow (1997, p. 37) destaca que a realização considerada mais importante na pesquisa em matemática por Salmon foi a descoberta das vinte e sete retas em uma superfície cúbica, publicada no artigo *On the triple tangente planes of surfaces of the third order*, por Arthur Cayley, em 1849.

Durante vinte e cinco anos Salmon atuou como tutor na *Divinity* e, por muito mais tempo, como tutor na equipe de matemática na *Trinity College Dublin*. Ao longo desse período, ele publicou cerca de quarenta artigos em várias revistas matemáticas e escreveu os seus quatro tratados. Com o passar dos anos, Salmon, de certa forma, teve uma desilusão com a grande carga das tutorias e das aulas, pois com uma diminuição dessa carga, permitiria a ele mais tempo para se dedicar às suas pesquisas. Isso deve ter sido um dos motivos que o

[76] Quarténios são quádruplos ordenados de números reais, pondo por definição que dois quádruplos (a, b, c, d) e (e, f, g, h) são iguais se, e somente se, $a = e$, $b = f$, $c = g$ e $d = h$, Hamilton notou que era necessário definir uma adição e uma multiplicação de quádruplos ordenados de números reais de maneira que, entre outras restrições, se verificassem:

$$(a, 0, 0, 0) + (b, 0, 0, 0) = (a + b, 0, 0, 0),$$
$$(a, 0, 0, 0)\,(b, 0, 0, 0) = (ab, 0, 0, 0),$$
$$(a, b, 0, 0) + (c, d, 0, 0) = (a + c, b + d, 0, 0),$$
$$(a, b, 0, 0)\,(\mathrm{c}, d, 0, 0) = (ac\ bd, ad + bc, 0, 0).$$

A grande importância dos quatérnios na historia da matemática reside no fato de que sua criação por Hamilton em 1843 libertou a álgebra de suas amarras com a aritmética dos números reais, abrindo assim as comportas da álgebra abstrata.

[77] Salmon foi tutor de ambos os filhos de W. R. Hamilton durante os anos de 1850, mas eles não se destacaram academicamente como seu pai.

influenciou, em 1860, a se afastar da matemática e voltar-se para os trabalhos em teologia (MOLLAN, 2007, p. 775).

Durante o século XIX, muitos matemáticos se conectaram com livros didáticos publicados pela *Trinity College* ou documentos de pesquisa sobre geometria, muitas das vezes ainda na abordagem mais sintética, ao invés da analítica (GOW, 1997, p. 34). Tal fato demonstra, nesse período, Dublin como um outro local na matemática britânica que estava desenvolvendo resultados matemáticos, sobretudo, nas extensões geométricas (*ibid*., p. 14).

Nessa concepção, em meio à década de 1840, havia na *Trinity College* um forte viés ligado à Geometria Sintética, e foi, nesse contexto, que Salmon foi claramente influenciado pelo clima de pesquisa sobre geometria que existia na *Trinity College*, começando assim seus trabalhos de pesquisas adotando uma perspectiva sintética (*ibid*., p. 35).

No entanto, como destacado anteriormente, Salmon atuou nessa área por pouco tempo antes de mudar para área de geometria algébrica, área pela qual logo mostrou seu interesse dada a abordagem algébrica da geometria que estavam sendo desenvolvidas por Arthur Cayley e James Sylvester na Inglaterra e por Charles Hermite e mais tarde Alfred Clebsch no continente (MCCONNELL, 1981).

Salmon logo se juntou a esse grupo e desempenhou um papel importante nas aplicações da teoria dos invariantes e covariantes das formas algébricas à geometria das curvas e das superfícies, testemunhando uma virada na direção da pesquisa inglesa que vai motivar Salmon a mudar de perspectiva (PARSHALL, 1989, p. 160). Ele estreitou as relações de amizade[78] com Cayley e de Sylvester e, por muitos anos, trocaram uma quantidade numerosa de correspondência sobre matemática.

4.4 A sua mudança para vida religiosa

Como já destacado anteriormente sobre as questões da origem de George Salmon, mostra que ele cresceu num ambiente familiar onde havia influências religiosas. Tais influências e formação aliadas à desilusão por passar muitos anos da sua vida acadêmica como tutor foram motivações que o favoreceram a deixar a carreira na matemática para se dedicar a vida religiosa (NESBITT, 2005).

Além das questões mencionadas, como a forte influência religiosa por parte da sua formação familiar e o seu desapontamento com o cargo de tutor de matemática na *Trinity*

[78] Possivelmente essa relação de amizade se estabele quando Cayley em passagem por Dublin foi estudar Direito e acabou aproveitando para ver as palestras de Hamilton sobre quatérnios.

College, Nesbitt também se refere ao fato importante de naquele momento, estavam ocorrendo mudanças e disputas na Igreja da Irlanda[79]. Isto é, isso sem dúvida capturou a atenção de Salmon, ainda mais quando as discussões atingiram um clímax no *The Irish Church Act* em 1869 que dissolveu a união estatutária entre as Igrejas da Inglaterra e da Irlanda e declarou que a Igreja da Irlanda deixou de ser estabelecida por lei, levando a uma reforma eclesiástica dentro da Igreja da Irlanda.

Possivelmente todas essas questões incentivaram Salmon, que além de se dedicar, estimulou-o a buscar uma formação em teologia. Primeiramente, ele foi ordenado diácono em 1844 e, no ano seguinte, sacerdote da igreja irlandesa, quando então recebeu a tutoria na faculdade e Salmon se tornou Professor Regius[80] em 1866 na *Divinity*. Depois disso não se envolveu mais em pesquisa relacionada à matemática, dedicando-se exclusivamente a vida religiosa (GOW, 1997, p. 27).

Salmon deixou a matemática para se dedicar a vida de reverendo e nos últimos quarenta anos de sua vida, devotou-se quase exclusivamente aos trabalhos em teologia, cujas publicações também foram bastante lidas, porém esta pesquisa encerra o assunto aqui, sinalizando apenas que houve vários trabalhos de Salmon também de cunho religioso.

4.5 Seu trabalho como Reitor

Para que George Salmon chegasse à reitoria, primeiramente os considerados conservadores retomaram a frente da *Trinity College* no mês em que o Reitor John Hewitt Jellett faleceu, eles, então, não exitaram em nomear Salmon para o cargo de Reitor. Como sucessor de Jellett, Salmon assumiu em 1888 o cargo, permanecendo nele até a sua morte em 1904 (LUCE, 1992, p. 102).

Luce comenta também que como Salmon vinha de uma linhagem forte de conservadores, fato que se evidenciava mais ainda devido à sua idade avançada e que a sua gestão foi considerada um período de consolidação na faculdade ao invés de um período de reforma.

Entretanto um desenvolvimento que ele se opunhava por muitos anos, que era a entrada das mulheres na *Trinity College*, acabou sendo um de seus últimos atos como Reitor

---

[79] A Igreja da Irlanda foi um ramo da Igreja Anglicana da Inglaterra. Como a maioria dos Irlandeses foi e é católica, foi a elite protestante que estudou na *Trinity College* no período do governo britânico, desenvolvendo-se trabalhos para fins religiosos, assim como carreiras que foram direcionadas para a teologia.

[80] Professor Regius é a designação de uma cátedra em diversas universidades do Reino Unido e da Irlanda.

ao presidir a reunião da Diretoria que recebeu a *Royal letters patent* que permitiu que as mulheres pudessem receber suas graduações na *Trinity College* de Dublin. Salmon acabou aprovando, em 1901, quando a maioria do Conselho concordou com o princípio.

Em Mollan (2007, p. 784) também se encontra relatos sobre Salmon enquanto reitor da *Trinity*. De fato se confirma que Salmon era conservador e a questão do processo de admissão de mulheres na universidade, foi finalmente permitido no último ano de sua reitoria (MOLLAN, 2007, p. 784).

Mollan (*ibid*., p. 771) ainda destaca também a figura de Salmon como sendo o Reitor que presidiu as celebrações do Tricentenário *Trinity College* em 1892, bem como os elogios que Salmon recebeu fora da Irlanda, como, por exemplo, do Bispo de Oxford, Dr. William Stubbs:

> O reitor é um homem extraordinário. O primeiro dia em que o conheci fui mais atingido por sua graciosa cortesia, o segundo dia pelo seu aprendizado, o terceiro dia pelo seu humor, e todos os dias por sua humildade[81] (MOLLAN, 2007, p. 786. Tradução nossa).

Figura 1 Estátua em mármore de George Salmon feita por John Hughes, 1911, em tamanho real, em frente à praça da Trinity College em Dublin.

[81] *The Provost is an extraordinary man. The first day I met him was most struck by his gracious courtesy, the second day by his learning, the third day by his humour, and every day by his humility.*

4.6 Suas associações e condecorações

Ao longo da sua carreira, George Salmon recebeu muitas honrarias pelo reconhecimento dos seus trabalhos em matemática. Primeiramente, nesta seção, será destacada a eleição dele para algumas academias, sociedades e instituto, as quais ele se tornou membro.

Salmon foi eleito para Academia Real Irlandesa[82], em 1843, foi eleito também para a Sociedade Real de Londres[83], em 1863 e para Sociedade Real de Edimburgo[84], em 1881. Ainda foi eleito para o Instituto de França e para as Academias de Berlim, de Göttingen, de Copenhague e de Lincei em Roma (MCCONNELL, 1981).

Gow (1997, p. 40) já comenta que em 1866, Salmon foi um dos primeiros membros da Sociedade Matemática de Londres.

Em relação às honrarias que Salmon recebeu, Luce (1992, p. 102) destaca aquelas recebidas por ele em Cambrigde (1868) e em Oxford em (1874). Já O'Connor e Robertson (2003) destacam, além das duas anteriores, as honrarias recebidas também em Edimburgo (1884) e pela *University of Christiana* em Oslo (1902).

Quanto às medalhas que George Salmon recebeu ao longo da sua carreira como matemático, conforme Mollan (2007, p. 774), destacam-se: em 1858 recebeu a medalha de Cunningham[85] pela Academia Real Irlandesa por suas pesquisas sobre a geometria de curvas planas. Em 1868 recebeu a medalha da *Royal Society*[86] pela Sociedade Real de Londres por suas pesquisas em geometria analítica e teoria das superfícies, publicadas nos periódicos *The Philosophical Transactions*, *The Transactions of the Royal Irish Academy* e *The Quarterly*

---

[82] A Academia Real Irlandesa foi criada em 1785 e é um organismo acadêmico independente da Irlanda que promove o estudo e a excelência nas ciências, nas humanidades e nas ciências sociais.

[83] O início da Sociedade Real de Londres surgiu por volta de 1645, quando um grupo de cientistas começou a realizar reuniões regulares. O tema comum entre os cientistas que iniciaram a Sociedade foi adquirir conhecimento por meio de investigação experimental. O primeiro grupo de tais homens incluiu Robert Moray, Robert Boyle, John Wilkins, John Wallis, John Evelyn, Christopher Wrene William Petty.

[84] A Sociedade Real de Edimburgo foi fundada em 1783. Ela desempenhou um papel importante na vida científica e literária da Escócia nos anos seguintes à sua fundação.

[85] A medalha Cunningham foi criada em 1796 no legado do advogado Timothy Cunningham. Após um período de incerteza e experimentação sobre os termos e condições do prêmio, foram acordados em 1848 que as medalhas estariam abertas aos autores de trabalhos ou ensaios nas áreas de Ciência, Literatura Política e Antiguidades, publicados na Irlanda ou sobre assuntos irlandeses.

[86] As medalhas da *Royal Society* foram estabelecidas pelo Rei George IV e depois continuaram, com certas mudanças em suas condições, pelo Rei Guilherme IV e pela Rainha Vitória. Originalmente elas eram dadas pelas descobertas mais importantes do ano anterior. O período de tempo foi alterado para cinco anos, diminuído para três anos. Quando Victoria assumiu o trono em 1837, as condições para as medalhas da *Royal Society* mudaram para operar em um ciclo de três anos, com a Matemática sendo um dos assuntos para os quais uma medalha poderia ser concedida a cada três anos.

Journal of Mathematics. Em 1889 recebeu a medalha Copley[87] também pela Sociedade Real de Londres pelos seus vários artigos sobre assuntos de matemática pura, e pelos valiosos tratados matemáticos dos quais ele é o autor.

4.7 O seu Legado

Embora haja alguns historiadores da matemática que considerem que as descobertas matemáticas de George Salmon não sejam tão notáveis quanto de alguns de seus contemporâneos, ele exerceu uma grande influência tanto na pesquisa quanto no ensino de matemática na Europa e América, sobretudo na segunda metade do século XIX, consequência exercida pelos seus quatro tratados que Salmon publicou em Dublin entre 1848 e 1862 (GOW, 1997, p. 26).

Gow comenta ainda que cada uma dessas publicações apareceu, pelo menos, em três edições. Além disso, a importância de Salmon se deve ao fato dele ter desempenhado um papel como disseminador e divulgador de pesquisa tanto no campo da álgebra quanto na geometria, a qual tem sido reconhecida pela maioria dos historiadores da matemática.

Certamente Salmon foi um notável escritor de livros didáticos do século XIX, visto o número de edições que seus tratados tiveram bem como as traduções para diversos idiomas. Seu dom, como muitos destacam, era de copilar, pesquisar assuntos dados como atuais e exibi-los para o leitor (GOW, 1997, p. 66).

Gow ainda faz um alerta quanto ao estilo de escrita de Salmon. Em outras palavras, inevitavelmente, um matemático ou um leitor de um século posterior que leia os tratados de Salmon, acharão-os carentes de precisão e de rigor, porém tal fato é compreensível pelo o estilo de explanação que era típico da época, quando a definição, lema, teorema e as provas encontradas nos correntes livros didáticos matemáticos não existiam naquele momento.

Não há dúvida de que, ao longo da sua vida, Salmon contribuiu de forma útil particularmente nas áreas da educação e da religião, mesmo que em algumas vezes foram de forma controversa. De toda forma, Salmon merece a nossa lembrança, respeito e gratidão (MOLLAN, 2007, p. 788).

[87] A medalha Copley é o maior prêmio da Sociedade Real de Londres. A medalha recebe esse nome em homenagem ao Senhor Geoffrey Copley que doou £ 100 à Sociedade em 1709 para ser usado na realização de experimentos e os juros sobre o dinheiro foram usados para esse propósito por vários anos. Em 1736, concordou-se em conceder uma medalha no valor de £ 5, seja pela descoberta científica mais importante ou pela maior contribuição feita pelo experimento. Em 1831, as condições foram alteradas novamente, de modo que foi concedido ao autor da pesquisa que o Conselho da Sociedade decidiu ser o mais merecedor da honra. A medalha Copley é concedida para trabalhos científicos em qualquer campo.

George Salmon faleceu no dia 22 de janeiro de 1904 em Dublin na Irlanda na sua casa, na residência oficial do Reitor da *Trinity College Dublin*, aos 84 anos de idade, e foi sepultado no cemitério *Mount Jerome*. Ele serviu bem a *Trinity*, e parece ter havido uma tristeza muito grande em sua partida (MOLLAN, 2007, p. 785).

CAPÍTULO 5: AS PRINCIPAIS PRODUÇÕES DE GEORGE SALMON

O objetivo deste capítulo é fazer uma apresentação dos principais trabalhos no contexto da matemática feitos por George Salmon que o fizeram destacar-se no cenário matemático do século XIX.

Seu reconhecimento se deve, sobretudo, pelos quatro tratados que ele escreveu entre 1848 a 1862: o primeiro tratado foi o *Seções Cônicas* (1848), seguido pelos tratados *Curvas Planas Superiores* (1852) e *Lições Introdutórias da Álgebra Superior Moderna* (1859), sendo o último *Geometria Analítica de Três Dimensões* (1862).

Nesses tratados foram publicados os recentes resultados tanto da álgebra quanto da geometria "moderna" daquele momento. O que se pode perceber nas suas obras é que Salmon apresenta no seu primeiro tratado um tratamento bastante influenciado sob a perspectiva sintética, enquanto nos demais, ele já se utiliza dos tratamentos influenciados sob a perspectiva algébrica.

As principais produções de Salmon serão apresentadas em duas partes: a primeira faz uma abordagem sobre a produção dos seus quatro tratados, apontando os novos resultados que estavam sendo publicados na época, enquanto a segunda faz menção aos artigos em matemática produzidos por Salmon.

5.1 Seus quatro tratados

A importância de George Salmon se deve ao fato dele ter exercido uma grande influência tanto sobre a pesquisa quanto sobre o ensino de matemática na Europa e na América principalmente a partir da segunda metade do século XIX. Essa influência é, particularmente, consequência das publicações dos quatro tratados que ele escreveu no período compreendido entre 1848 a 1862 enquanto esteve atuante na equipe de matemática da *Trinity College* em Dublin (GOW, 1997, p. 26).

Gow comenta ainda que além desse efeito de divulgação dos novos resultado, suas obras também se tornam referências no sentido de disseminar e de popularizar a pesquisa contemporânea em álgebra e em geometria naquele momento.

Como visto no segundo capítulo desta dissertação, a matemática britânica passava por mudanças, as quais naturalmente faziam os matemáticos daquele momente a passarem por transformações, sobretudo, quanto aos aspectos das perspectivas sintéticas e analíticas. Em particular, não foi diferente com Salmon, pois se percebe na publicação de *Seções Cônicas* em 1848 que nos últimos capítulos se encontram os recentes resultados da geometria daquele momento, como, por exemplo, os métodos das notações abreviadas e os métodos geométricos, o Princípio da Dualidade, as propriedades harmônicas e anarmônicas das cônicas e os métodos das projeções, abordados sob uma perspectiva sintética causada, principalmente, pela influência de Poncelet e de Chasles (*ibid*., p.45).

O segundo tratado, *Curvas Planas Superiores*, na verdade, trata-se do segundo volume da intenção inicial de Salmon em escrever um tratado sobre a geometria analítica. Este tratado tinha como proposta abordar os conceitos analíticos do espaço de duas dimensão, como, por exemplo, coordenadas, propriedades gerais das curvas algébricas, curvas do terceiro e do quarto graus, curvas transcendentais e que se destinava a um público mais avançado do que o seu primeiro tratado (*ibid*., p. 54).

Nesse tratado ainda se percebia a influência de alguns resultados de Poncelet e Chasles, mas a novidade se percebia com a inclusão dos resultados de Plücker como o próprio Salmon destaca em seu prefácio:

> "Os trabalhos de Plücker sobre geometria analítica eu não os conhecia quando a primeira edição de *Seções Cônicas* foi publicada, mas tenho repetidamente tido a oportunidade de reconhecer minhas obrigações para com eles nas páginas seguintes" (SALMON, 1852, p. v. Tradução nossa).[88]

O tratado ainda faz uma indicação com relação ao interesse de Salmon pela a teoria dos invariantes, a qual será o conteúdo do seu próximo trabalho.

Quanto ao terceiro tratado, *Lições Introdutórias da Álgebra Moderna Superior*, de 1859, o conteúdo, como indicado no parágrafo anterior, tratava amplamente da teoria dos invariantes, ou como Salmon a chamou: a álgebra das transformações lineares. O objetivo de Salmon ao escrever esse trabalho foi de introduzir aos leitores os estudos sobre a teoria dos invariantes, a qual foi desenvolvida entre a década de 1840 a 1850 como foi visto no segundo capítulo da dissertação (GOW, 1997, p. 57). A essência dessa teoria se dá com a combinação dos resultados da álgebra linear associados aos da geometria algébrica.

Nesse trabalho há dezessete lições os quais abordam, por exemplo, conteúdos como determinantes, teoria da eliminação, discriminantes, *quantics*, invariantes e covariantes, formas canônicas e transformações ortogonais.

---

[88] *"Plücker's works on Analytic Geometry I was not acquainted with when the first edition of the conics was published, but I have repeatedly had occasion to acknowledge my obligations to them in the following pages."*

O quarto e último tratado de Salmon foi *Geometria Analítica de Três Dimensões* publicado em 1862. Esse trabalho foi o maior em relação aos três anteriores, de modo que na sua primeira edição foi publicada com 465 páginas e as edições seguintes ainda foram bem maiores. (*ibid*., p. 62).

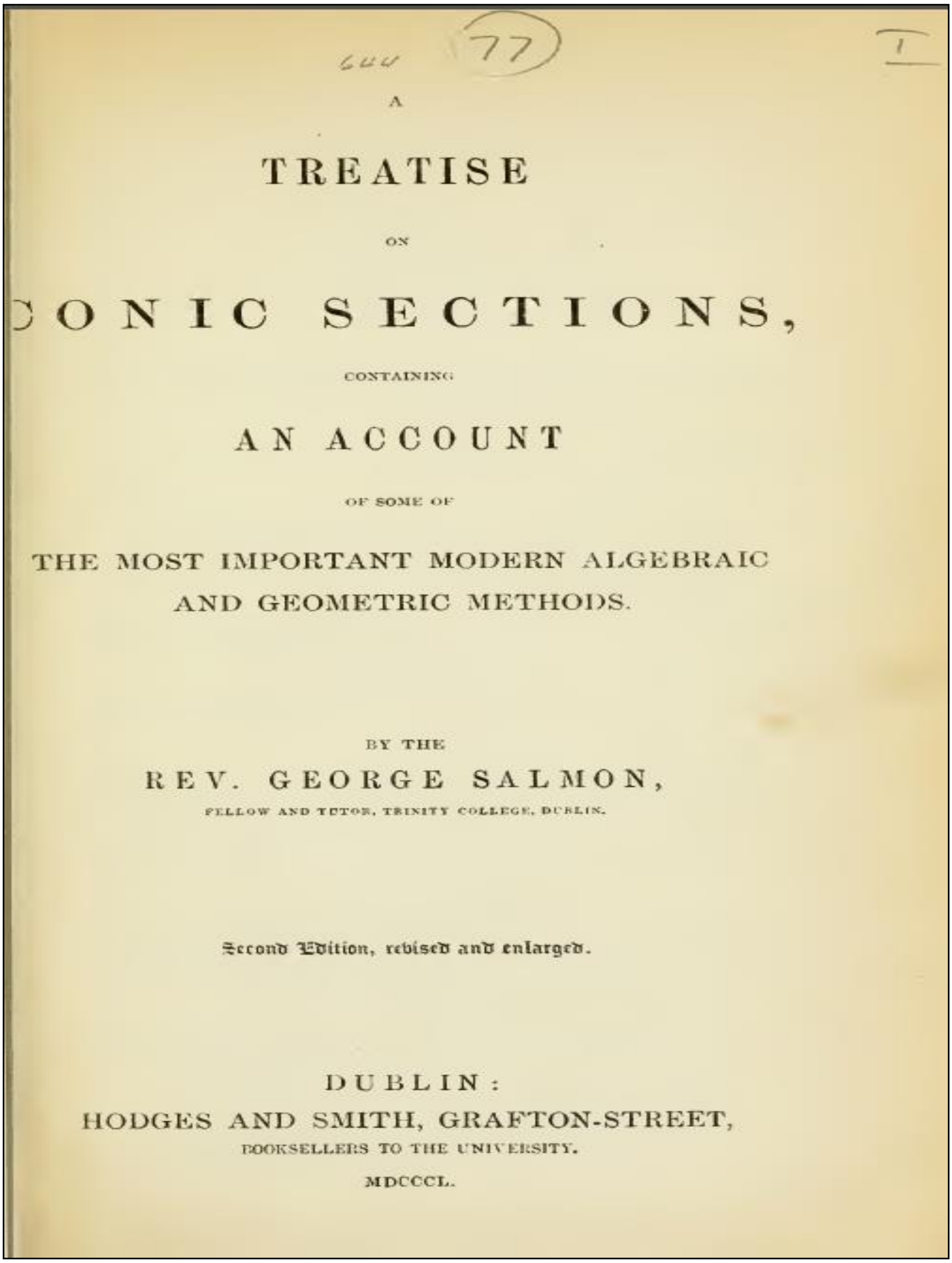
O tratato foi composto por quinze capítulos, os quais traziam como conteúdo os assuntos como o ponto, a interpretação das equações, o plano, propriedades gerais das quádricas, métodos de notação abreviada, teoria geral das superfícies. Nesse trabalho pode-se encontrar a teoria das vinte e sete retas sobre uma superfície cúbica, resultado mais expressivo de Salmon, conforme destacado no capítulo anterior. (*ibid*., p. 62-63).

Esses quatro tratados, *Seções Cônicas, Curvas Planas Superiores, Álgebra Superior Moderna* e a *Geometria Analítica de Três Dimensões*, não só deram um tratamento abrangente dentro das suas respectivas áreas, mas também serviram de modelo pela clareza da escrita bem como pela elegância de estilo, as quais foram características de organização de como um livro-texto deveria ser e como um livro texto deveria ser escrito (MCCONNELL, 1981, p. 86). Ainda em relação aos tratados de Salmon, os mesmos foram traduzidos para todos os idiomas da Europa Ocidental e que eles passaram por muitas edições, cada uma incorporando os novos desenvolvimentos, e também permanecendo por muitos anos servindo de livros-textos em suas respectivas áreas.

Dentre as traduções realizadas nas obras de Salmon, destacamos as traduções feitas para o alemão realizadas pelo matemático Wilhelm Fiedler cujas contribuições foram altamente consideradas para o ensino de geometria na Alemanha na segunda metade do século XIX (VOLKERT, no prelo).

Para título de conhecimento, serão apresentadas a seguir as respectivas capas dos quatro tratados de George Salmon, na sequência que seus tratados foram publicados, isto é, primeiro vem *Seções Cônicas*, de 1848, segundo, *Curvas Planas Superiores*, de 1852, seguido por *Lições Introdutórias d da Álgebra Moderna Superior*, de 1859 e, por último, *Geometria Analítica de Três Dimensões*, de 1862.

Nota-se que nem todas as referidas capas correspondem à primeira edição do respectivo tratado, somente a capa do segundo tratado está de acordo com a primeira edição de *Curvas Planas Superiores* de 1852.



644 77

I

A

TREATISE

ON

CONIC SECTIONS,

CONTAINING

AN ACCOUNT

OF SOME OF

THE MOST IMPORTANT MODERN ALGEBRAIC
AND GEOMETRIC METHODS.

BY THE

REV. GEORGE SALMON,

FELLOW AND TUTOR, TRINITY COLLEGE, DUBLIN.

Second Edition, revised and enlarged.

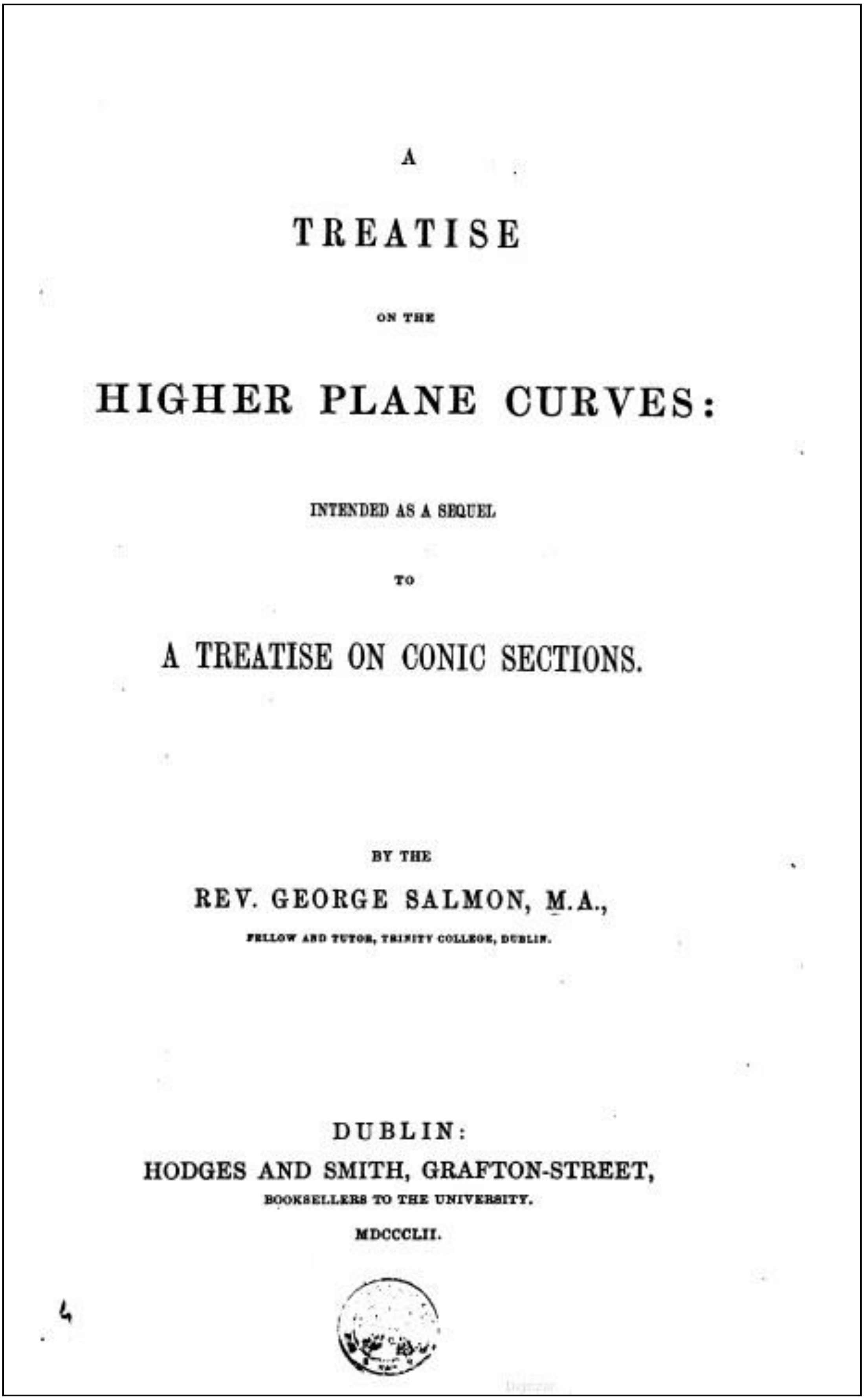
DUBLIN:

HODGES AND SMITH, GRAFTON-STREET,

BOOKSELLERS TO THE UNIVERSITY.

MDCCCL.

Figura 2 Capa do primeiro tratado de Salmon *Seções Cônicas*.



A

TREATISE

ON THE

HIGHER PLANE CURVES:

INTENDED AS A SEQUEL

TO

A TREATISE ON CONIC SECTIONS.

BY THE

REV. GEORGE SALMON, M.A.,

FELLOW AND TUTOR, TRINITY COLLEGE, DUBLIN.

DUBLIN:

HODGES AND SMITH, GRAFTON-STREET,

BOOKSELLERS TO THE UNIVERSITY.

MDCCCLII.

Figura 3 Capa do segundo tratado de Salmon *Curvas Planas Superiores*.

LESSONS

INTRODUCTORY TO THE

MODERN HIGHER ALGEBRA.

BY

GEORGE SALMON, D.D.,

REGIUS PROFESSOR OF DIVINITY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN.

THIRD EDITION.

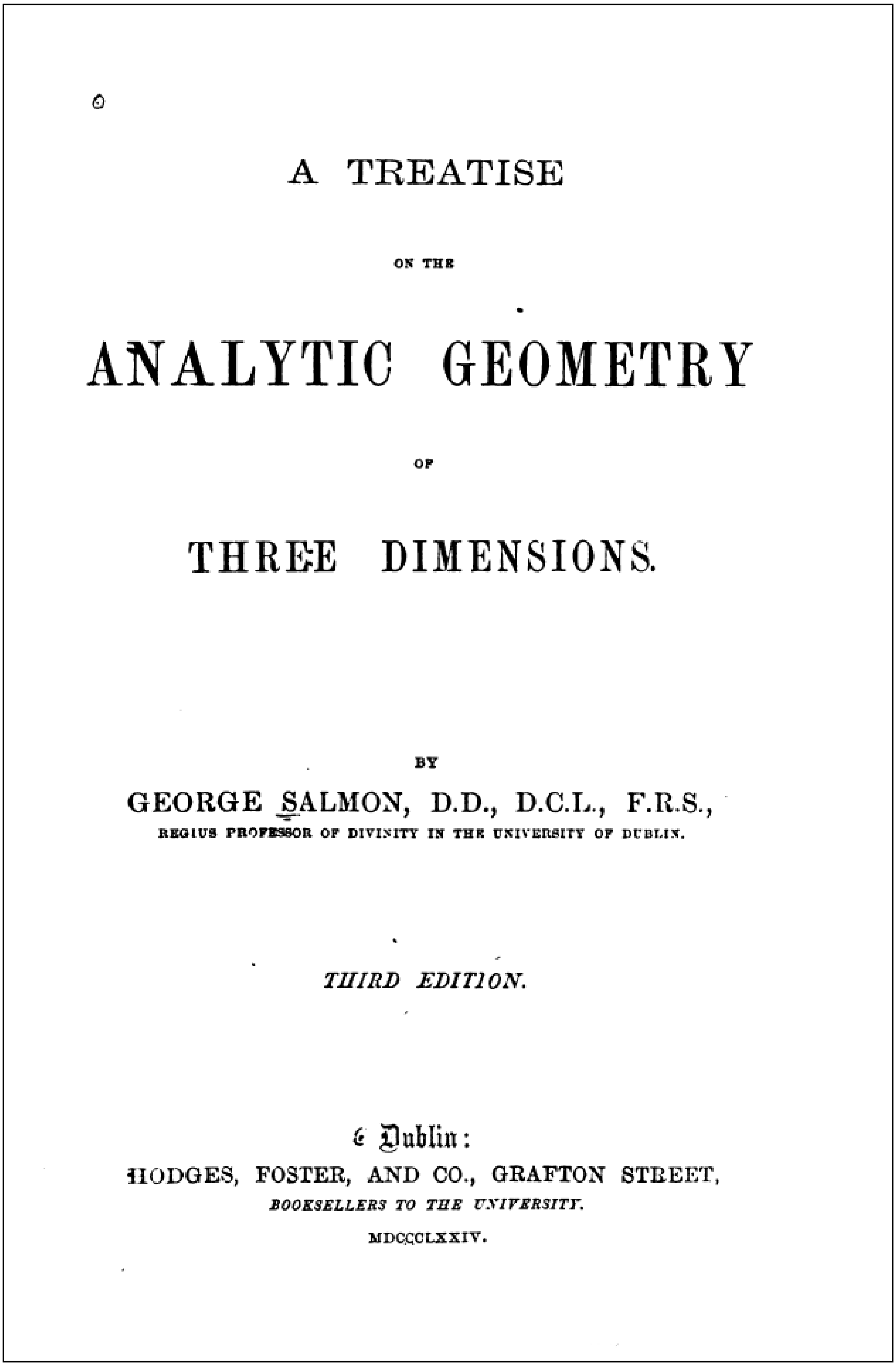
Dublin:

HODGES, FOSTER, AND CO., GRAFTON STREET,

BOOKSELLERS TO THE UNIVERSITY.

1876.

Figura 4 Capa do terceiro tratado de Salmon *Lições Introdutórias da Álgebra Moderna Superior*.



A TREATISE

ON THE

ANALYTIC GEOMETRY

OF

THREE DIMENSIONS.

BY

GEORGE SALMON, D.D., D.C.L., F.R.S.,

REGIUS PROFESSOR OF DIVINITY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN.

THIRD EDITION.

Dublin:

HODGES, FOSTER, AND CO., GRAFTON STREET,

BOOKSELLERS TO THE UNIVERSITY.

MDCCCLXXIV.

Figura 5 Capa do último tratado de Salmon *Geometria Analítica de Três Dimensões*.

5.2 Seus artigos em matemática

Nesta seção serão abordadas as contribuições de Salmon quanto às publicações dos seus artigos em matemática nos mais diversos periódicos, que não se restrigiram nos britânicos, mas também em jornais renomados do continente Europeu, como o jornal do *Crelle*.

Como visto no capítulo anterior, Salmon além de ensinar matemática e de escrever seus quatro tratados, contribuiu com seus artigos matemáticos, principalmente sobre superfícies. A publicação deles ocorreu em vários periódicos, como o *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, *The Philosophical Magazine* e *The Proceedings of the Royal Irish Academy*. E nos de mais prestígio como os periódicos *Transactions of the Royal Irish Academy,* e *The Philosophical Transactions of the Royal Society* (MOLLAN, 2007, p. 774).

A relação efetiva dos artigos de pesquisa em matemática de Salmon foi tomada da *Royal Society's Catalogue of Scientific Paper* (GOW, 1997, p. 34). Tal relação estará listada no anexo B desta pesquisa, apresentando além do título de cada um deles, indicando também onde os artigos foram publicados, totalizando nesta listagem quarenta e um artigos.

Nota-se pelos títulos dos artigos que quase todos os seus trabalhos foram dedicados a assuntos da geometria. Seus artigos, na maioria, não são muito extensos, geralmente não sendo mais do que notas de pesquisas ou anúncios. Seu último trabalho em artigo de pesquisa foi publicado em 1873, iniciando ainda a Teoria Elementar dos Números e a sua dedicação sobre o assunto foi bastante pequena, uma vez que esses estudos eram bem originais e bastante difíceis no momento em que Salmon os escreveu, sendo estes últimos resultados essencialmente triviais (*ibid*., p.38).

A respeito da pesquisa de Salmon, Joly comenta:

> Seria muito injusto com Salmon julgar suas contribuições para a matemática apenas pelos seus artigos. Ele tinha uma grande aversão ao problema físico de escrever; Ele modestamente comunicava suas descobertas a amigos, ou reservava-as para incorporar em seus livros, de modo que é uma questão de extrema dificuldade dizer o que de fato é referente a Salmon. [...] (JOLY, 1905, p. 354. Tradução nossa).[89]

Com relação alguns dos resultados encontrados nos artigos de Salmon, mostram, por exemplo, o seu artigo de 1856, *On the degree of a surface reciprocal to a given one*, onde

---

[89] *"It would be most unfair to Salmon to judge his contributions to mathematics by his papers alone. He had a great dislike to the physical trouble of writing; he modestly communicated his discoveries to friends, or reserved them for incorporation in his books, so that it is a matter of extreme difficulty to say how much is his. [...]"*

Salmon se utiliza de polinômios homogêneos e trata de superfícies e propriedades projetivas (SALMON, 1856, p. 468).

Salmon publica também dois artigos no *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, de 1848, *On The Condition that a Plane should Touch a Surface along a Curve Line* e *On the Number of Normals which Can Be Drawn from a Given Point to a Given Surface*. Esses dois artigos fazem referências quanto ao uso das equações diferenciais, sob uma perspectiva geométrica, relacionando-se através dos desenvolvimentos algébricos (SALMON, 1848, pp. 44-47).

Em seu artigo *Théorèmes sur les courbes de troisième degré* publicado no jornal de *Crelle* em 1852, Salmon apresenta três teoremas, sendo que, no último, utiliza uma definição de Plücker. Nesse artigo, Salmon se utiliza, mais uma vez, dos polinômios homogêneos e relaciona com as interseções de cônicas, dentre outras propriedades ligadas aos métodos projetivos (SALMON, 1852, pp. 321-322).

Assim a relação entre os conteúdos publicados nos tratados de Salmon e também em grande parte de seus artigos mostrou a importância que eles tiveram nas aplicações geométricas associadas à álgebra, trazendo os principais resultados da teoria projetiva envolvendo a geometria “moderna” daquele momento.

CAPÍTULO 6: OS DOIS PRIMEIROS TRATADOS

Um dos grandes fatores que motivou George Salmon a escrever os seus dois primeiros tratados se deu, sobretudo, quando ele lecionava matemática na *Trinity College Dublin* durante a década de 1840 (GOW, 1997, p. 30). Salmon, inicialmente, foi influenciado pelo o ambiente que se encontrava visto que os desenvolvimentos dos resultados matemáticos sob a perspectiva sintética era predominante naquele momento.

Entretanto, com os avanços dos resultados analíticos que estavam ocorrendo naquele período juntamente com as influências de matemáticos, como Cayley e Sylvester, os quais trabalharam diversos resultados sob a perspectiva analítica, promoveram em Salmon uma mudança nos tratamentos em seus trabalhos na matemática, favorecendo que Salmon começasse a publicar resultados com o viés analítico.

São exatamente os dois primeiros tratados, *Seções Cônicas* e *Curvas Planas Superiores*, onde se percebe essa mudança em Salmon quanto ao tratamento adotado na publicação de suas obras, ou seja, o primeiro apresenta claramente a influência sintética oriunda de trabalhos como de Poncelet, Chasles e Steiner, enquanto o segundo apresenta a influência analítica de Cayley, Sylvester, Plücker e Möbius.

A partir desta compreensão, será feita uma análise nos dois primeiros tratados de Salmon, destacando, sobretudo, as evidências que apontam a perspectiva adotada nos resultados, sintética no primeiro e analítica no segundo, e, por fim, fazer uma comparação entre as duas obras.

6.1 Uma análise sobre *Seções Cônicas*

A análise sobre o primeiro tratado de Salmon, o qual foi considerado sua obra mais famosa, busca encontrar as motivações que o levaram a escrevê-lo bem como mostrar os novos resultados que foram publicados naquele momento.

Antes da publicação de *Cônicas Seções* em 1848 de Salmon, os trabalhos que havia sobre cônicas eram o publicado por Henry P. Hamilton, cujo título era *Um Sistema Analítico* *das Seções Cônicas*[90], em 1828 e substituído mais tarde pela publicação de John Hymers, cujo título também era *Seções Cônicas*[91], em 1837 e o publicado em 1839 (BALL, 1889, p. 130).

A história da publicação deste tratado é um pouco complicada, isso se deve ao fato de que, na década de 1840, Salmon havia planejado inicialmente escrever um tratado em dois volumes sobre geometria analítica, o qual pretendia usá-lo em suas aulas na *Trinity College Dublin*.

O primeiro volume deste trabalho foi dividido em duas partes na qual a primeira parte consistia na abordagem da geometria analítica elementar e a segunda parte consistia na abordagem da geometria das seções cônicas, com ênfase especial no desenvolvimento dos resultados da geometria "moderna" daquela época. Com relação ao segundo volume, este formou a terceira parte do tratado inicial, o qual fazia abordagem às curvas planas superiores.

O resultado final deste planejamento foi, essencialmente, a publicação de *Seções Cônicas* em 1848 e, posteriormente, a publicação de *Curvas Planas Superiores* em 1852 (GOW, 1997, p. 42).

Tanto a primeira de 1848 quanto a segunda edição de 1850 de *Seções Cônicas* não continha prefácio, aparecendo somente a partir da terceira edição em 1855. No seu primeiro prefácio, Salmon deixa claro que seu trabalho visa atrair a atenção dos estudantes para o estudo das cônicas que considera extremamente útil para a matemática superior, sobretudo, por apresentar os novos métodos algébricos e geométricos desenvolvidos naquele período.

Com relação ainda ao primeiro prefácio de *Seções Cônicas* da edição de 1855, destacam-se alguns trechos que chama atenção para alguns pontos em relação à preocupação que Salmon apresentou ao publicar o seu trabalho: o primeiro é com relação ao ensino.

> Tendo-me utilizado nos últimos cinco anos no ensino de Geometria Analítica para calouros, ganhei alguma experiência quanto aos pontos em que os alunos provavelmente sentem dificuldades[92] (SALMON, 1855, p. v. Tradução nossa).

O segundo é com relação à publicação sistemática dos novos resultados naquele momento.

> Os capítulos finais tratam dos métodos algébricos e geométricos que foram introduzidos nos últimos anos, mas dos quais nenhuma contribuição sistemática foi dada em qualquer trabalho elementar no momento em que a primeira edição deste Tratado foi publicada[93] (SALMON, 1855, p. v. Tradução nossa).

---

[90] O título original deste trabalho de H. P. Hamilton é *An analytical system of conic sections*, cuja primeira edição ocorreu em 1828.

[91] O título original do trabalho John Hymers também é *Conic Sections*, cuja primeira edição ocorreu em 1837.

[92] *"Having myself used it for the last five years in teaching Analytic Geometry to beginners, I have gained some experience as to the points where learners are likely to feel difficulties."*

[93] *"The remaining chapters treat of the algebric and geometric methods which have been introduced into use of late years, but of which no systematic account had been given in any elementar work at the time that the first edition of this treatise was published."*

Pelo o que se pode perceber, de fato, em Salmon quando publicou a terceira edição de *Seções Cônicas*, que ele se mostrava não só atento aos novos resultado, mas também se preocupava com a questão do ensino em geral, principalmente, nas questões onde os alunos apresentavam suas dificuldades, buscando saná-las com a ilustração de diversos exemplos e também orientando o estudo partindo dos conceitos elementares da geometria para os iniciantes e para os mais avançados, indicando os capítulos com os novos resultados.

Outro fato que se percebe também é o fato de Salmon comentar de não encontrar outras referências de publicações dos novos resultados durante o período de 1848 a 1855, que compreendeu justamente o período entre a primeira e terceira edição de *Seções Cônicas*, o que promoveu, desta forma, o papel fundamental de Salmon em ser um responsável de dar conta de divulgar os novos resultados, publicando-os em cada nova edição.

Na edição de 1855, diferente também das duas edições anteriores, não há quatorze capítulos, mas sim quinze. Os capítulos de I a XIII tratam dos conceitos e das propriedades elementares da geometria plana. O capítulo XIV trata das notações abreviadas que na época era uma tentativa de dar conta das relações entre objetos geométricos através de uma simbologia, no espírito de Sylvester e de Cayley. Convém dizer que esta simbologia se tornou rapidamente obsoleta e abandonada pelos críticos dos trabalhos de Salmon. E o Capítulo XV representa a grande inovação da terceira edição, ao dar conta da divulgação dos resultados recentes no domínio dos estudos da teoria das cônicas

6.1.1 *Os novos resultados*

A proposta do capítulo sobre as notações abreviadas[94], cuja finalidade reside em representar longas expressões se utilizando de letras únicas, é apresentar o uso dessas notações em resultados como a prova das propriedades da razão anarmônicas das cônicas, o Teorema de Brianchon, o Teorema de Pascal e de Steiner, e o método de MacLaurin para a generalização das cônicas.

O último capítulo sobre os métodos geométricos é o de maior importância de *Seções Cônicas*, pois Salmon faz uma apresentação sistemática dos recentes resultados da geometria, iniciando a conceituação dos métodos das polares recíprocas juntamente com o Princípio da

[94] Para entender o uso da notação abreviada, considere, por exemplo, Se $\alpha(x, y) = 0$ e $\beta(x, y) = 0$ são duas curvas, então $u\alpha + v\beta = 0$, onde u e v são constantes ou funções quaisquer de x e y, e uma curva pelos pontos de intersecção das curvas $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

Dualidade, cujo crédito é dado a Poncelet evidenciando, dessa forma, a influência deste sobre Salmon.

Sobre o método das polares recíprocas, Salmon escreveu em uma nota de rodapé:

> Este bonito método foi introduzido por Sr. Poncelet, cuja descrição será encontrada no início do quarto volume do jornal de *Crelle*. (SALMON, 1850, p. 251. Tradução nossa).[95]

No último capítulo ainda encontra uma seção sobre as propriedades harmônicas e anarmônicas das cônicas, a qual foi influenciada pelos trabalhos de Michel Chasles, seguida dos conceitos de involuções e dos métodos dos infinitesimais. A seção final trata dos métodos das projeções, o qual novamente Salmon descreve em uma nota de rodapé fazendo referência a Poncelet:

> O método é a invenção de Sr. Poncelet. Veja seu *Traité des Propriétes Projectives*, publicado no ano de 1822. Fico feliz se o pequeno esboço aqui dado induz qualquer leitor a estudar uma obra, da qual talvez tenha derivado mais informações do que qualquer outra sobre a teoria das curvas (SALMON, 1850, p. 297. Tradução nossa).[96]

Apesar da maior parte de *Seções Cônicas* apresentar vários resultados sob um tratamento sintético derivados das obras de Poncelet e de Chasles, observa-se na edição de 1855 que Salmon já valoriza as vantantagens de usar as coordenadas homogêneas, como se pode observar no Artigo 61.

> A vantagem das coordenadas trilineares é que, enquanto nas coordenadas cartesianas (ou x e y), a máxima simplificação que podemos introduzir é a escolha de duas das retas mais notáveis na figura para eixos de coordenadas, enquanto que podemos obter em coordenadas trilineares expressões ainda mais simples ao escolher três das retas mais notáveis para as retas de referência α, β e γ (SALMON, 1855, p. 59).[97]

Aliás no Artigo 63[98], Salmon propõe expressar em coordenadas trilineares a equação da reta paralela à reta dada cuja equação é $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$. Em seguida, relaciona alguns exercícios que ressaltam as relações entre equações homogêneas e equações cartesianas, conteúdos característicos de *Curvas Planas Superiores*.

---

[95] "*The beautiful method was introduced by M. Poncelet, whose account of it will be found at the commencement of the fourth volume of Crelle's Journal.*"

[96] "*This method is the invention of M. Poncelet. See his Traité des Propriétes Projectives, published in year 1822. I shall be glad if the slight sketch here given induces any reader to study a work, from which I have perhaps derived more information than from any other on the theory of curves.*"

[97] "*The advantage of trilinear co-ordinates is, that whereas in Cartesian (or x and y) co-ordinates the utmost simplification we can introduce is by choosing two of the most remarkable lines in the figure for axes of co-ordinates, we can in trilinear co-ordinates obtain still more simple expressions by choosing three of the most remarkable lines for lines of reference α, β, γ.*"

[98] *"To express in trilinear co-ordinates the equation of the parallel to a given line $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$.*

6.1.2 *Razão Anarmônica e as Involuções*

Salmon, em uma nota de rodapé, credita a descoberta das propriedades anarmônica das cônicas a Michel Chasles, encontradas em *History of Geometry* (SALMON, 1855, p. 271).

Salmon destaca ainda que as propriedades harmônicas e anarmônicas das cônicas admitem inúmeras aplicações na teoria de curvas, isto é, pode-se encontrar o uso das relações cruzadas[99], por exemplo, associadas à teoria de pólos e de polares, assim como a teoria de involução e aos casos que frequentemente são considerados como os mais importantes, que ocorrem quando um dos quatro pontos da reta está a uma distância no infinito.

No Artigo 324, Salmon destaca o caso da relação anarmônica dos quatros pontos, sendo um localizado no infinito. O artigo diz que a razão anarmônica de quatros pontos A, B, C, D é, em geral, igual a $\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC}$, se o ponto D estiver a uma distância no infinito, a razão $\frac{CD}{AD} = 1$, de modo que a razão anarmônica se torne simplesmente $\frac{AB}{CB}$ (SALMON, 1855, p. 271).

Salmon descreve a partir do Artigo 329 uma estrutura conceitual do que venha a ser um sistema de involução, usando uma abordagem totalmente sintética ao mostrar a relação cruzada entre os pontos dos dois sistemas dados (SALMON, 1855, pp. 275-276).

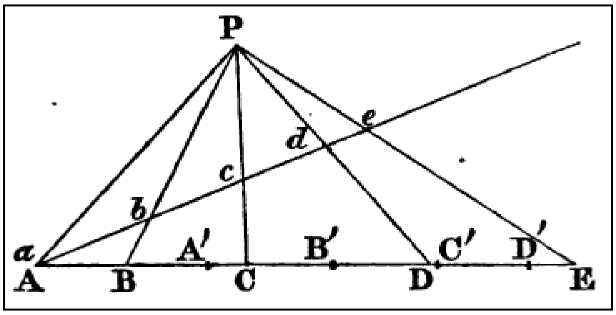


Figura 6: Sistemas de Pontos em Involução.

O sistema acima é dito estar em involução se a relação entre os ponto for projetiva de maneira que *A* corresponde a *A'*, então *A'* corresponde mutualmente a *A*. Daí se no exemplo dado os sistemas considerados são os pontos *ABB'A'* e *A'B'bA*, então os pontos *B* e *b* devem coincidir nas seguintes condições:

$$ABB'A' = A'B'bA$$

$$\frac{AB \cdot B'A}{AA' \cdot BB'} = \frac{A'B \cdot bA}{A'A \cdot B'b}$$

$$\frac{AB}{BB'} = \frac{Ab}{bB'} \blacksquare$$

99 As expressões Relações Cruzadas ou Razões Cruzadas podem ser aceitas como possíveis traduções para o termo *Cross Ratio*.

Esses exemplos são resultados típicos de uma abordagem sintética, desenvolvidos e implementados por Michel Chasles (CHASLES, 1827).

O conceito de razão anarmônica já se percebia nos trabalhos de Pappus, enquanto que os conceitos de involução estão presentes nos trabalhos de Desargues. E o desenvolvimento por Chasles se deu a partir dessas influências.

6.1.3 *Polares Recíprocas*

Os conceitos das Polares Recíprocas, os quais integravam a relação dos novos resultados publicados em *Seções Cônicas*, foram introduzidos por Salmon, abordados sob uma perspectiva sintética, cuja prentensão era de mostrar que o uso destes métodos geométricos consistia em ser parte essencial em qualquer trabalho dedicado à teoria das curvas (SALMON, 1855, p. 253).

No Artigo 305, Salmon retrata exatamente o Princípio da Dualidade entre o Teorema de Briachon e o Teorema de Pascal, o principal exemplo deste princípio, comentando que os respectivos resultados são recíprocos um do outro (*ibid*., p. 255).

O referido artigo diz: sejam *S* e *s* duas seções cônicas, o modo de obter um teorema do outro é usando este método. “Se um hexágono inscrito em *S*, cujos vértices são A, B, C, D, E, F, então os pontos de interseção das retas que passam AD, BE, CF estão na mesma reta” (Teorema de Pascal) e “Se um hexágono circunscrito em *s*, cujos vértices são *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, ,*f*, então as retas *ad*, *be*, *cf* se encontrarão no mesmo ponto” (Teorema de Brianchon), então ao fazer a troca dos termos *pontos* por *retas*, de fato, obtém-se o segundo teorema a partir do primeiro.

6.1.4 *Método dos Infinitesimais*

Ao iniciar a seção de Metódos dos Infinitesimais, Salmon procura mostrar a importância do cálculo diferencial que permite traçar tangentes às curvas e determinar o valor de áreas e arcos. Destaca-se ainda como esses problemas eram abordados antes do desenvolvimento desse método e chama atenção que os métodos geométricos não são importantes apenas por uma questão de ponto de vista histórico, mas que eles fornecem soluções para algumas questões mais concisa e simples do que aquelas fornecidas pela ánalise (*ibid*., p. 289).

Mais uma evidência para reforçar o seu tratamento sintético encontra-se no desenvolvimento do terceiro exemplo do Artigo 348[100] para se determinar a área do círculo usando os métodos infinitesimais, seguindo a justificativa abaixo:

"*Para qualquer triângulo OAB a área é igual à metade da sua base multiplicada pela perpendicular do centro; daí a área de qualquer polígono regular inscrito é igual à metade da soma de seus lados multiplicada pela perpendicular de qualquer lado do centro; mas quanto mais o número de lados for aumentado, mais próximo o perímetro do polígono se aproximará da igualdade com o círculo e mais próximo será a perpendicular de qualquer lado a igualdade com o raio, e, portanto, a diferença entre eles pode ser feito menos que qualquer quantidade atribuível; daí, finalmente, a área do círculo é igual ao raio multiplicado pela semicircunferência; ou simplesmente igual a* πr^2 "[101]

Pelo o que se pode perceber Salmon utiliza um método de exaustão comparável ao de Arquimedes, para se determinar que a área é igual ao produto do raio pelo semiperímetro da círculo, não trazendo, (*ibid*., pp. 290-291).

De certa forma, o método dos infinitesimais não é um resultado especificamente dito como novo no momento da publicação em *Seções Cônicas*, assim como também Salmon não faz referência desse método com uma correspondência em uma abordagem analítica.

6.1.5 *Método das Projeções*

Ao introduzir este novo conceito, Salmon comenta que o método das projeções exigirá um conhecimento da geometria de três dimensões, ainda que o método seja aplicado para geometria plana (SALMON, 1855, p.299).

Salmon comenta também que a particularidade de tal método percorre um caminho exatamente oposto, istoé, a partir de um determinado teorema, pode-se inferir um resultado geral, diferentemente de obter teoremas particulares a partir de um enunciado geral.

[100] Ex. 3. *"The area of a circle is equal to the radius multiplied by the semicircunference."*

[101] *"For the area of any triangle OAB is equal to half its base multiplied by the perpendicular on it from the centre; hence the area of any inscribed regular polygon is equal to half the sum of its sides multiplied by the perpendicular on any side from the centre; but the more the number of sides is increased, the more nearly will the perimeter of the polygon approach to equality with that of the circle, and the more nearly will the perpendicular on any side approach to equality with the radius, and the difference between them can be made less than any assignable quantity; hence ultimately the area of the circle is equal to the radius multiplied by the semicircumference; or =* πr^2*"*

No Artigo 360[102], Salmon apresenta uma definição para o plano de projeção, mostrando que qualquer ponto de uma dada figura, corresponderá a um ponto de outra figura projetado no plano e ainda que uma reta sempre será projetada em outra reta.

No Artigo 361[103], comenta que qualquer curva sempre será projetada em outra curva de mesmo grau. Já no Artigo 363[104], comenta que as propriedades não envolvem a métrica, isto é, não se relaciona com medidas ou ângulos. E no Artigo 364[105] Salmon introduz o termo Propriedades Projetivas propriamente dito, cujo resultado mostra que se uma propriedade for verdadeira para uma figura, também será verdadeira para sua projeção (*ibid*., pp. 299-301).

Além disso, observa-se o tratamento sintético dado nos resultados desta seção, como se pode encontrar no Artigo 365[106]: para demonstrar qualquer propriedade projetiva de qualquer figura, é suficiente demonstrá-la para uma figura mais simples na qual a figura dada pode ser projetada; por exemplo, para um caso em que qualquer reta da figura dada está no infinito. Assim, se fosse necessário investigar as propriedades harmônicas de um quadrilátero ABCD completo, cujos lados opostos se cruzam em E, F, e a interseção de cujas diagonais é G, pode-se reduzir todos os pontos dessa figura em qualquer ponto no espaço O e cortar as retas de junção em qualquer plano paralelo a OEF, então EF será projetado no infinito, obtendo um novo quadrilátero, cujos lados *A'B'*, *C'D'* se cruzam em no ponto *E'* no infinito, isto é, são paralelos; enquanto *A'D'*, *B'C'* se cruzam em um ponto *F'* no infinito, que também são paralelos (*ibid*., p. 302).

Todos esses resultados podem ser vistos por exemplo na introdução da Quinta Memória sobre *quantics*, onde Cayley pretendia compor sistemas de duas ou mais quádricas e os resultados das teorias da relação harmônica e da involução. Considera também quádricas binárias bipartidas e sua relação com a chamada teoria da homografia, ou relação anarmônica (CAYLEY, 1858b, p. 527).

---

[102] *"If all the points of any figure be joined to any fixed point in space (O), the joining lines will form a cone, of which the point O is called the vertex, and the section of this cone, by any plane, will form a figure which is called the projection of the given figure. The plane by which the cone is cu tis called the plane of projection.*

To any ponit o fone figure will correspond a point in the order.

A right line will Always be projected into a right line"

[103] *"Any plane curve will Always be projected into another curve of the same degree"*

[104] *"Any property of a given curve does not envolve the magnitude of lines or angles"*

[105] *"Properties which, if true for any figure, are true for its projection, are called projective properties"*

[106] *"If we wish to demonstrate any projective property of any figure, it is sufficient to demonstrate it for the simplest figure into which the given figure can be projected; e. g. for one in which any line of the given figure is at an infinite distance. Thus, if were required to investigate the harmonic properties of a complete quadrilateral ABCD, whose opposite sides intersect in E, F, and the intersection of whose diagonals is G, we may hoin all the points of this figure to any point in space O, and cut the joining lines by any plane parallel to OEF, then EF is projected to infinity, and we have a new quadrilateral, whose sides ab, cd intersect at e at infinity, that is, are parallel; while ad, bc intersect in a point f at infinity, or are also parallel."*

6.2 Uma análise sobre as *Curvas Planas Superiores*

A partir do segundo tratado de Salmon, *Curvas Planas Superiores*, de 1852, nota-se nitidamente uma mudança na escolha do tratamento adotado, isto é, o tratamento inicialmente sintético em *Seções Cônicas*, neste segundo trabalho, passou a ser mais analítico.

Com relação à essa influência, o próprio Salmon destaca no prefácio dessa obra, que além deste trabalho ter recebido diversas contribuições de Cayley, também se percebe a influência dos resultados de Plücker, que até anterior aos seu primeiro tratado era desconhecido (SALMON, 1852, p. v).

Ainda em seu prefácio, Salmon destaca que além das influências dos trabalhos de Plücker, até então desconhecidos, mostra que *Curvas Planas Superiores* recebeu influências ainda dos trabalhos de Poncelet e de Chasles, porém a nova abordagem adotada por Salmon, a abordagem analítica, era claramente notada na obra, sobretudo, devida às influências dos novos resultados sobre geometria que estavam sendo publicados nos artigos dos jornais de *Crelle* e *Liouville* e no *Cambrigde and Dublin Mathematics*.

Em relação às contribuições de Cayley, Salmon também registra no prefácio que tais contribuições se deu essencialmente no primeiro capítulo, sobre coordenadas, bem como com a adição de vários artigos para as edições seguintes. Salmon também incorporou no seu trabalho vários manuscritos não publicados por Cayley, como a teoria de envelope (*ibid*., p. ix).

Para entender esta nova abordagem, isto é, a adoção do tratamento analítico, deduz-se que esta influência pode ser constatada através dos primeiros artigos Cayley, o qual demonstra o quanto conhecia a respeito dos trabalhos dos matemáticos continentais, como Lagrange, Jacobi, M. Chasles, Plücker, dentre outros. Tal fato ajuda a entender a expressiva ajuda de Cayley nesse tratado e que permite Salmon a se inclinar para estes resultados de caráter analítico, como no uso das coordenadas homogêneas (Dias 2013, p. 26).

Curvas Planas Superiores apresenta em seus sete capítulos conteúdos como coordenadas, propriedades gerais das curvas algébricas, curvas do terceiro grau, curvas do quarto grau, curvas transcendentais, métodos gerais e aplicações do cálculo de integral, uma vez que Salmon sinaliza no prefácio que sua intenção era de escrever um livro de referência para uma matemática mais avançada relacionado às curvas de dimensões superiores.

Uma mudança mais nítida sobre o estilo de abordagem, isto é, uma visão mais analítica em *Curvas Planas Superiores*, aparece nas edições posteriores desse tratado como podemos identificar na terceira edição e como o próprio Salmon descreve no prefácio da terceira edição[107] de 1879 (SALMON, 1879, p. v).

Salmon relata que um dos motivos para esse tempo entre as edições é devido à impossibilidade do cargo que ele estava ocupando na ocasião e que quando a primeira edição de *Curvas Planas Superiores* foi editada, o desenvolvimento da álgebra superior moderna ainda era muito recente e que agora anos depois de tomar conhecimento dos recentes resultados da matemática, tinha percebido a necessidade de fazer uma nova edição com as novas descobertas que representava o progresso da ciência, mantendo, porém, a memória do que já tinha sido escrito anteriormente.

Outro comentário que Salmon faz que chama a atenção é a respeito da fama de seu livro, que mesmo se passado alguns anos, *Curvas Planas Superiores* era o único trabalho em inglês que fazia uma abordagem sistemática da teoria moderna das curvas.

Salmon não realizou muitos esforços para escrever seu segundo tratado, de modo que não houve uma aderência ao tratado *Curvas Planas* Superiores, o qual ainda permaneceu apenas na língua inglesa por muitos anos, não causando o mesmo impacto no ensino e na pesquisa como se percebeu nas outras obras (GOW, 1997, p. 54).

6.2.1 A influência de Plücker

Salmon sinaliza que o conteúdo do primeiro capítulo foi desenvolvido principalmente sob a influência do sistema analítico[108] de Plücker (SALMON, 1852, p. 16). Nos três primeiros artigos do capítulo, Salmon, além de fazer uma apresentação sobre os sistemas de coordenadas, faz um comparativo entre o sistema de cordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas trilineares.

Tal comparação consiste em mostrar que tanto em um sistema quanto no outro, o grau da equação indica exatamente o grau da curva, enquanto a determinação da classe da curva não pode ser verificada diretamente.

Além disso, a diferença que esses sistemas apresentam está relacionada à representação dos conceitos, isto é, enquanto no sistema de coordenadas cartesianas, a posição

---

[107] *"The first edition of this treatise has been for several years out of print, and I had for sometime given up the idea of reprinting it. The work, having been written at a time when the Modern Higher Algebra was still in its infancy, required extensive alterations in order to bring it up to the present state of the science ; and, as I had failed to bring out a new edition before my appointment to the office which I now hold, I judged it impossible to do so, now that other engagements left me no leisure to make acquaintance with recent mathematical discoveries, or even to keep up my memory of what I had previously known."*

[108] Esse sistema se refere à sua publicação de 1828 cujo título original é *System der Analytischen Geometrie.*

de um ponto é determinada por coordenadas e a reta é representada por uma equação, no sistema de coordenadas trilineares, a posição de uma reta é representada por coordenadas, enquanto a posição de um ponto é indicada por uma equação (*ibid*., pp. 3-4).

No Artigo 2º, Salmon apresenta a equação da reta escrita no sistema de coordenadas cartesianas: $Ax + By + C = 0$, onde os coeficientes *A*, *B*, *C* são conhecidos. Já no Artigo 3º, a representação da reta, em termos de coordenadas trilineares, é dado pela suas distâncias α, β, γ a três pontos fixos, A, B, C dados.

Ainda no Artigo 3º, Salmon também faz a representação de um ponto no sistema de coordenadas trilineares, em termo das distâncias α, β, γ, conforme esquema abaixo:

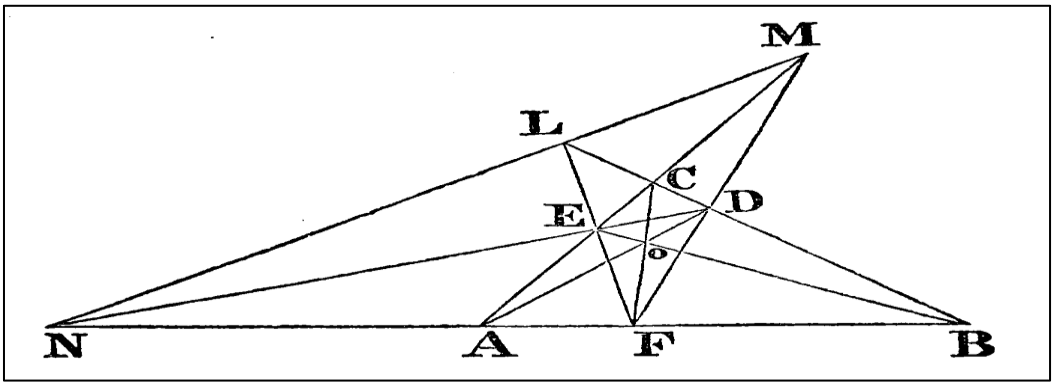


Figura 7 Ponto O é construído a partir da razão anarmônica BD:DC, CE:AE e AF:FB

$$\frac{senBOC}{OA}\alpha + \frac{senCOA}{OB}\beta + \frac{senAOB}{OC}\gamma = 0.$$

Outro importante resultado foi a representação analítica de um ponto no infinito dada pelo sistema de coordenadas trilineares. Por exemplo, a equação geral de um ponto no infinito é dada pela equação $l\alpha + m\beta = (l + m)\gamma$.

6.2.2 As coordenadas trilineares

Outra influência de Plücker que ainda se observa no capítulo, refere-se à abordagem analítica feita por Salmoon para classificar as cônicas.

Na introdução do Artigo 7º, de acordo com o ponto de vista das coordenadas trilineares, com a inclusão dos pontos no infinito, a Geometria Projetiva permitiu uma uniformização das cônicas, isto é, não se distinguem os diferentes tipos de cônicas – as elipses, as hipérboles e as parábolas – são indiscerníveis (SALMON, 1852, p. 8). Esta propriedade é devida à visão analítica do método das projeções.

Mas esta característica que permite a indistinção das cônicas difere da geometria sintética plana onde existe sempre uma transformação projetiva que leva uma cônica numa outra qualquer do mesmo tipo.

No presente sistema apresentado no artigo em questão, Salmon mostra que a cônica será uma parábola quando $\alpha = \beta = \gamma$, satisfazer a equação e, então, a soma dos coeficientes da equação homogênea será nula.

Outro exemplo que Salmon apresenta é examinar se a curva cuja equação é dada por $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha\gamma + 2E\beta\gamma + F\gamma^2 = 0$ é uma elipse ou uma hipérbole. Para isso deve examinar se a reta no infinito concorre com a curva em dois pontos reais ou não.

Salmon comenta que este tipo de sistema apresentado em termos das coordenadas trilineares, ainda que seja feita com um olhar não muito crítico, tal sistema é bem similar aos métodos dos cálculos baricêntricos apresentado por Möbius na sua publicação de 1827[109].

No apêndice B desta pesquisa, serão apresentados alguns detalhes do que venha ser as coordenadas homogêneas.

6.3 Uma comparação entre *Seções Cônicas* e *Curvas Planas Superiores*

A partir do que foi exposto nas seções anteriores deste capítulo, consegue-se realizar comparações entre os resultados publicados nos dois primeiros tratados de George Salmon, permitindo perceber que de uma edição para outra, de fato, foi possível identificar uma mudança na abordagem adotada, isto é, antes fortemente influenciada pelos métodos sintéticos de Poncelet e de Chasles e, no segundo momento, pelos métodos analíticos de Plücker e de Cayley.

Um exemplo dessa comparação pode ser encontrado no próprio comentário de nota de rodapé que Salmon fez ao introduzir o capítulo sobre os métodos das polares recíprocas na terceira edição, de 1855, de *Seções Cônicas*, ao dizer, por exemplo, que o Princípio da Dualidade, o qual envolve o referido método, em *Curvas Planas Superiores*, pode ser visto com um tratamento puramente analítico (SALMON, 1855, p. 253).

Será apresentando a seguir alguns dos resultados que Salmon publicou na edição do seu segundo tratado, os quais já haviam apresentados em *Seções Cônicas* em uma abordagem sintética, mas agora com uma perspectiva analítica.

[109] O trabalho o qual Salmon se refere é o *Barycentric Calculus* publicado por Möbius em 1827.

Os artigos 301 e 302 de *Seções Cônicas* e os Artigo 239 e 240 de *Curvas Planas Superiores* refletem exatamente esta dualidade de abordagem: enquanto os dois primeiros artigos fazem um tratamento sintético sobre os métodos projetivos basendo nas propriedades das razões anarmônicas, os dois últimos fazem a abordagem deste método adotando as equações homogêneas para as retas em questão, isto é:

"No método sintético, a razão anarmônica para o referido feixe de retas é dada por $\frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}$, enquanto que no método analítico, no sistema de coordenadas trilineares, as retas são dadas por $\lambda - \alpha\mu$, $\lambda - \beta\mu$, $\lambda - \gamma\mu$, $\lambda - \delta\mu$".

CAPÍTULO 7: CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento desta dissertação permitiu primeiramente visualizar as transformações que ocorreram em um determinado período da história e que impactaram efetivamente na ordem social. Tal momento residiu no século XIX, o qual observou significativas mudanças que aconteceram no âmbito da matemática.

O século XIX registrou o impulso que a Revolução Industrial promoveu na sociedade, de modo que a influência dessa revolução atingiu obviamente a ciência. Desse modo, o reconhecimento do cenário de um determinado período em uma análise para realizar uma pesquisa foi fundamental para poder compreender os fatos que se seguiram, principalmente, no que diz respeito à produção dos novos resultados matemáticos naquele momento: dentre eles, destacaram-se o desenvolvimento de álgebras (abstratas) e o de geometrias (não euclidianas) diferentes da álgebra e da geometria que havia até então, e, sobretudo, o ressurgimento dos resultados do âmbito da Geometria Projetiva.

Além disso, outro ponto necessário foi limitar o campo de pesquisa, o que permitiu focar em um local mais específico, que foi adotar a matemática britânica do século XIX como referência para a pesquisa.

Ao centrar o momento e o espaço de estudo, levantaram-se as questões quanto às abordagens adotadas, isto é, as perspectivas sintética e a analítica se confrontaram a nível de pesquisa. No primeiro momento, identificou-se que a matemática britânica estava muito fundamentada nas suas tradições sintéticas oriundas da herança deixada por Taylor, MacLaurin e Newton, preservando, dessa forma, seu tratamento sintético nos seus resultados, os quais impactavam tanto nas pesquisas quanto no ensino daquela época.

Essa preservação fez com que a matemática britânica se colocasse em um estado de isolamento, distanciando-se cada vez mais dos desenvolvimentos da matemática dos demais países da Europa que no caso já adotavam uma abordagem analítica em seus resultados.

Porém esse estado de isolamento começou a sofrer uma abertura através de movimentos liderados, inicialmente por Robert Woodhouse, o qual introduziu no início do século XIX na matemática britânica os primeiros resultados cujos tratamentos eram de cunho analítico. Após Woodhouse, matemáticos britânicos, como George Peacock, formaram a chamada Sociedade Analítica que, pode-se dizer, estabeleceu definitivamente a adoção também do tratamento analítico na matemática britânica.

Esses fatos transcorreram na primeira metade do século XIX, enquanto que na outra metade, com a adoção dos tratamentos analíticos, as figuras que ascendem são Cayley, Sylvester e George Salmon, que firmam uma prática comum que foi a produção de resultados da álgebra aplicados à geometria, culminando no desenvolvimento da Teoria dos Invariantes e, sobretudo, na publicação dos quatro tratados de Salmon, os quais em suas edições apresentavam os recentes resultados da Geometria Projetiva daquele momento, como o Princípio da Dualidade e os Métodos de Projeção.

A publicação desses resultados faz parte de uma série de trabalhos que não só ocorreram na matemática britânica, isto é, tal geometria esquecida por quase dois séculos renasce de modo que ganha uma posição de destaque na matemática do século XIX, tornando-se um campo muito ativo de pesquisa com vários matemáticos ilustres envolvidos nesse desenvolvimento.

A Geometria Projetiva serviu de palco para a rivalidade entre as abordagens sintética e analítica. Monge foi uma figura que atuou nessas duas frentes, de modo que buscava harmonizar a relação entre esses dois campos. Tão logo a sua morte, levantaram-se para rivalizar as figuras de Poncelet e Gergonne, ambos foram discípulos de Monge, em que o primeiro era um defensor dos métodos sintéticos, enquanto o segundo era defensor dos métodos analíticos.

Ao longo do desenvolvimento dessas correntes, destacam-se para as duas abordagens os matemáticos que promoveram os resultados nesses campos. No tratamento sintético, figuram Poncelet, Chasles, na França, e Steiner e Von Staudt na Alemanha. Quanto ao tratamento analítico, figuram Gergonne na França e Plücker na Alemanha. Esses matemáticos constituem as referências que influenciaram os trabalhos de George Salmon, o qual atuou tanto na abordagem sintética quanto à analítica.

Dessa forma, a publicação dos trabalhos de George Salmon só se pode entender pelo contexto em que ele vivia e trabalhava, ou seja, no contexto da matemática britânica, sobretudo na Irlanda. Nesse contexto identificou-se que por volta de 1850 há uma grande virada na matemática britânica que se traduz tanto no ensino quanto na transmissão dos métodos ensinados em Geometria, ou seja, não eram mais apenas sintéticos, mas agora apresentavam também ênfase aos métodos analíticos.

Tal fato se manifesta claramente nas duas primeiras obras de Salmon, isto é: no seu primeiro tratado, *Seções Cônicas*, além de publicar os recentes resultados da matemática daquele momento, pôde-se perceber um esboço dessa virada em direção aos métodos analíticos. Já no segundo tratado, *Curvas Planas Superiores*, firmou-se na importância de transmitir os métodos analíticos.

De toda forma, percebeu-se que os métodos sintéticos continuaram servindo de suporte aos desenvolvimentos analíticos e estes, por sua vez, cobriram as lacunas do outro método, como ocorreu no tratamento dos sistemas de coordenadas, ao poder localizar um ponto que se encontra no infinito.

Então o que se pôde perceber, sobretudo, foi que a partir do século XIX, com o crescimento de um grupo de pesquisadores que começaram a adotar o ponto de vista analítico, o estado de isolamento da matemática britânica foi diminuindo, proporcionando que a mesma se recolocasse no cenário matemático daquela época, principalmente, a partir da década de 1850, quando se instalou uma prática comum entre Cayley, Sylvester e Salmon, com as aplicações algébricas na geometria.

Nesse sentido os trabalhos de Salmon foram muitos representativos tanto no ensino quanto na pesquisa da matemática britânica, sendo uma das referências desse novo ponto de vista adotado, o que não apenas impactou na questão da resolução de problemas, mas, sobretudo, identificou-se uma nova postura no desenvolvimento dos resultados que surgiam naquele momento. Não é por acaso que esses dois tratados foram traduzidos para diversos idiomas, com destaque para as traduções feitas para o Francês e para o Alemão.

A relevância que esses resultados da Geometria Projetiva promoveram daquela época para a atualidade é exatamente poder perceber que as representações realistas planas de objetos tridimensionais estão atualmente fazendo o estudo dessa geometria um pré-requisito para o estudo da computação gráfica.

O valor desse pré-requisito está se aprimorando uma vez que a computação gráfica está usando a representação analítica de pontos e retas por coordenadas homogêneas e a representação de transformações de matrizes desenvolvidas nessa Geometria.

Assim esta pesquisa registra o reconhecimento dos resultados desenvolvidos desde o princípio àqueles que fizeram renascer a Geometria Projetiva no século XIX, sobretudo, por todos os matemáticos que se dedicaram para promover sempre novos resultados, permitindo todas as suas aplicações não só na computação gráfica, mas em todos os campos onde ela se pode ser aplicada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, P; BARROS, A. *Introdução à geometria projetiva*. Rio de Janeiro, SBM, 2010, 170 p.

BALL, W. W. R. *A history of the study of mathematics at Cambridge*. Cambridge: Cambridge University Press, 1889. 264 p.

CAYLEY, A. *A fifth memoir upon quantics*. Philosophical Transactions of Royal Society of London, 1858b. In: CAYLEY, A. *The collected mathematical papers of Arthur Cayley*. Cambridge: At The University Press, Vol. 2, 1889. pp. 527-557.

______. *A sixth memoir upon quantics*. Philosophical Transactions of Royal Society of London, 1859. In: CAYLEY, A. *The collected mathematical papers of Arthur Cayley*. Cambridge: At The University Press, Vol. 2, 1889. pp. 561-592.

CHASLES. M: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Bruxelles, M. Hayez, 1837.

______. *Traité de géometrie supérieure, par M. Chasles*. Paris, Bachelier, Imprimeur-libraire de l'école polytechine, 1852.

CRILLY, T. *The rise of Cayley's invariant theory (1841 – 1862)*. Historia Mathematica, Vol. 13, 1986, pp. 241-254.

DIAS, L. S. *Geometria e álgebra nas seis primeiras memórias de Cayley sobre quantics*. 86f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática, UFRJ, 2013.

DIAS, L. S.; GRIMBERG, G. E. *Álgebra e geometria projetiva analítica na Inglaterra dos anos 1841 – 1853*. Llull (Madrid), v. 38, p. 11-31, 2015.

FIGUEIREDO, J. O. *Usando coordenas baricêntricas para estudar a geometria do triângulo*. Niterói, UFF, 2008.

FISH, M. *'The emergency which has arrived': the problematic history of nineteenth-century british algebra*. The British Journal for the History of Science, Vol. 27, No. 3, 1994, pp. 247-276.

FONSECA, J. J. S. da. *Metodologia da pesquisa científica*. Ceará: Universidade Estadual do Ceará, 2002.

GOW, R. *George Salmon 1819 – 1904: his mathematical work and influence*. Irish Math. Soc. Bull. No. 39, 1997, pp. 26-76.

GUICCIARDINI, N. *The development of newtonian calculus in britain 1700 – 1800*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989, 228 p.

JOLY, C. J. *George Salmon 1819 – 1904*. Proc. Royal Society 75, 1905, pp. 347-355.

LORENAT, J. *Figures real, imagined, and missing in Poncelet, Plücker, and Gergonne*. Historia Mathematica, Elsevier, 2015, pp. 155-192.

______. *Synthetic and analytic geometries in the publications of Jakob Steiner and Julius Plücker (1827–1829)*. Archive for History of Exact Sciences, Vol. 70, 2016, pp 413-462.

LUCE, J. V. *Trinity College Dublin: the first 400 years*. Dublin, Trinity College Dublin Press, 1992.

MCCONNELL, A. J. *Biography in Dictionary of Scientific Biography*. New York, Charles Scribner's Sons, Vol.12, 1970-1990.

MANSION, P. *Notice sur les travaux de Jules Plücker*. Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, Vol. 5, 1873, pp. 313-319.

MENGHINI, M. *Luigi Cremonaand Wilhelm Fieldler: the link between descriptive and projective geometry in technical instruction*. pp. 65-74, no prelo.

MÖBIUS, A. F. *Der barycentrische Calcül: ein neues hilfsmittel zur analytischen behandlung der geometrie*. Leipzig, 1827.

MOLLAN, C. *It's Part of What We Are: some irish contributors to the development of the chemical and physical sciences (science and irish culture)*. Vol. 2, Hardcover – October 30, 2007.

NESBITT, S. *George Salmon: from mathematics to theology*. University of St Andrews, 2005.

PARSHALL, K. H. *Toward a history of nineteenth-century invariant theory*. In: ROWE, D. E.; MCCLEARY, J. *The history of modern mathematics*. California, San Diego: Academic Press, Vol. 1, pp. 157–206, 1989.

PLÜCKER, J. *Analytisch-geometrische entwicklungen*. Berlin, Mit Zwei kupfertafen, 1828.

______. *Syteme der analytische geometrie auf neue Betrachtungsweise gegründet*. Berlin, Mit Zwei kupfertafen, 1835.

RICHARDS. J. L. *God, truth, and mathematics in nineteen century england*. The Invention of Physical Science Kluwer Academic Publishers, 1992, pp. 51-78.

______.*Projective geometry and mathematica progress in mid-victorian britain*. Stud. Hist. Phil. Sci., Vol. 17, No. 3, 1986, pp. 297–325.

ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro, Zahar, 2012.

ROSENFELD, B. A. *A history of non-euclidean geometry evolution of the concept of a geometry space*. New York: Springer-Verlag, 1988.

SALMON, G. *On the degree of a superface reciprocal to a give one*. Cambridge and Dublin mathematical journal, Vol. 2, 1846, pp. 65-75.

______. *On the condition that a plane should touch a surface along a curve line*. Camb. and Dubl. Math. J, Vol. 3, 1848, pp. 44-46.

______. *On the numbers of normals which can be drawn from a given point to a given surface*. Camb. and Dubl. Math. J, Vol. 3, 1848, pp. 46-47.

______. *Théorèmes sur les couver de troisiéme degree*. J. für die reine und angewandte Math. 1852, pp. 274-276.

______. *A treatise on conic sections*. 2ª ed, London: Longman, Brown, Green, and Longmans, 1850.

______. *A treatise on conic sections*. 3ª ed. London: Longman, Brown, Green, and Longmans, 1855.

______. *A treatise on the higher plane curves*. 1ª ed. London: Longman, Brown, Green, and Longmans, 1852.

______. *A treatise on the higher plane curves*. 3ª ed. London: Longman, Brown, Green, and Longmans, 1879.

SPEARMAN, D: *Mathematics and the making of modern Ireland, Trinity College Dublinfrom Cromwell to the Celtic Tiger*. Docent Press, 2014, 488 p.

SYLVESTER, J. J. *On general properties of homogeneous functions*. Cambridge and Dublin mathematical journal, 1851. In: SYLVESTER, J. J. *The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester*. Cambridge: At The University Press, Vol. 1, 1904. pp. 165-180.

VOLKERT, K. *Otto Wilhelm Fiedler and the synthesis of projective and descriptive geometry*. pp. 168-181, no prelo.

WILSON, E. B. *The synthetic treatment of conics at the present time*. Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 9, No 5, 1903, pp. 248-254.

APÊNDICE A – Princípio da Dualidade

O chamado Princípio da Dualidade, fundamentado por Poncelet e Gergonne, na Geometria Projetiva é o princípio que permite realizar uma mudança nos enunciados das propriedades trocando palavras como: reta por ponto ou ponto por reta, concorrentes por colineares ou colineares por concorrentes, obtendo-se uma nova propriedade denominada dual da primeira.

Em um plano projetivo[110], os pontos e as retas possuem exatamente o mesmo comportamento em relação à incidência[111], isto é, quaisquer propriedades envolvendo pontos, retas e incidência permanecem válidas ao utilizarmos o Princípio da Dualidade.

Deste modo, podemos obter novas propriedades a partir de outras já demonstradas sem a necessidade de prová-las novamente, trazendo para a geometria uma riqueza muito maior de simetria e, também, sendo uma ferramenta para a obtenção de novos resultados, pois uma vez descoberto um teorema, o seu dual é imediato, cuja demonstração se resume em repetir a prova original dualizando-a etapa a etapa.

Como exemplo desse Princípio, apresentamos alguns resultados duais abaixo:

PROPRIEDADES	DUAIS
Dada uma **reta**, sempre existe um **ponto** não incidente a **ela**.	Dado um **ponto**, sempre existe uma **reta** não incidente a **ele**.
Cada **reta** é incidente a pelo menos três **pontos** distintos.	Cada **ponto** é incidente a pelo menos três **retas** distintas.
Dois **pontos** distintos determinam uma única **reta** a **eles** incidente.	Duas **retas** distintas determinam um único **ponto** a **elas** incidente.

O Teorema de Pascal e o Teorema de Brianchon são teoremas clássicos da Geometria Projetiva, considerados um dos mais belos resultados duais do Princípio da Dualidade. Destaca-se o fato de que Charles Julien Brianchon retomou o teorema de Pascal que há muito tempo estava esquecido e publicou pela primeira vez, no jornal da *École*, o teorema dual de Pascal.

[110] Apesar de poder definir o plano projetivo como uma extensão do plano euclidiano, isto não é necessário. O plano projetivo existe de forma independente, podendo ser caracterizado a partir de um conjunto de axiomas.

[111] Os axiomas de incidência na Geometria Projetiva são: (1) dois pontos distintos determinam uma, e somente uma, reta com a qual são incidentes. (2) Duas retas distintas determinam um, e somente um, ponto com o qual são incidentes.

Brianchon obteve o seu teorema dualizando o resultado de Pascal numa época em que o Princípio da Dualidade estava sendo desenvolvido, gerando uma série de corolários e alavancando o desenvolvimento da teoria de cônicas com mais efetividade.

Teorema de Pascal (Hexagrama Místico)

Sejam A, A', B, B', C e C' seis pontos distintos numa cônica.
Então $P = AB'\cap A'B$, $Q = AC'\cap A'C$ e $R = BC'\cap BC'$ são colineares[112].

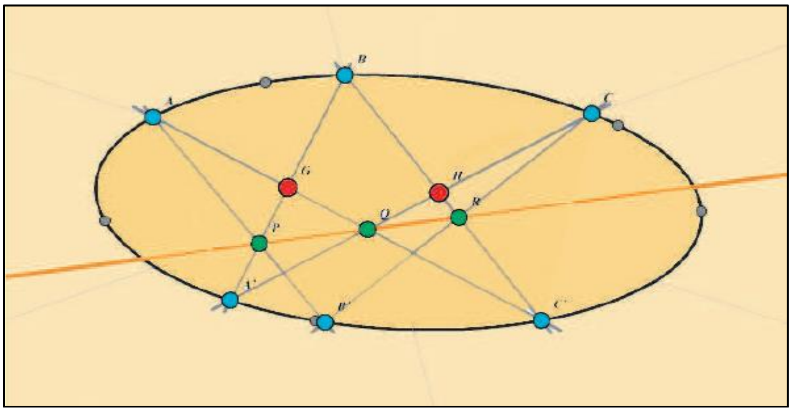


Figura 8 Os três pontos colineares P, Q, R do Teorema de Pascal.

<u>Demonstração</u>

(1º modo)

Seja $G = AC' \cap A'B$ e $R = BC' \cap CA'$, como na figura.

Temos então que $A[B'A'BC'] = C[B'A'BC']$

Logo $[PA'BG] = [RHBC']$

Seja $R' = PQ \cap BC'$.

Pela perspectiva de centro Q, temos que $[PA'BG] = [R'HBC']$.

Segue que $[RHBC'] = [R'HBC'] \Rightarrow R = R'$, uma vez que H, B e C' são distintos. ■

(2º modo) utilizando-se das coordenadas homogêneas

Suponhamos que $A = [1; 0; 0]$, $B' = [0; 1; 0]$, que o triângulo de referência é $\triangle(AB'P)$, onde $P = [0; 0; 1] = T_A \cap T_B$ e que o ponto unidade é $C = [1; 1; 1]$.

A cônica tem então por equação $Z^2 = XY$.

Os pontos A', B e C' possuem coordenadas que podemos supor da seguinte forma:

$A' = [1; \alpha^2; \alpha]$, $B = [1; \beta^2; \beta]$ e $C' = [1; \gamma^2; \gamma]$

[112] A reta é chamada de reta de Pascal.

Calculamos agora sucessivamente as coordenadas dos pontos e retas:

AB’ = [0; 0; 1]

A’B = [1; α^2; α] ∧ [1; β^2; β] = [αβ; 1; – α – β]

P = *AB’* ∩ *A’B* = [0; 0; 1] ⋀ [αβ; 1; – α – β] = [–1; αβ; 0]

B’C = [0; 1; 0] ⋀ [1; 1; 1] = [1; 0; –1]

BC’ = [1; β^2; β] ⋀ [1; γ^2; γ] = [βγ; 1; – β – γ]

Q = *B’C* ∩ *BC’* = [1; 0;–1] ⋀ [βγ; 1; – β – γ] = [1; β + γ – βγ, 1]

CA’ = [1; 1; 1] ⋀ [1; α^2; α] = [α; 1; –1 – α]

AC’ = [1; 0; 0] ⋀ [1; γ^2; γ] = [0; 1; – γ]

R = *CA’* ∩ *AC’* = [α; 1; –1 – α] ⋀ [0; 1; –γ] = [α + 1 – γ; αγ; α]

$$det = \begin{pmatrix} 1 & \alpha\beta & 0 \\ 1 & \beta+\gamma-\beta\gamma & 1 \\ \alpha+1-\gamma & \alpha\gamma & \alpha \end{pmatrix} \blacksquare$$

Teorema de Brianchon

Sejam seis tangentes distintas *a*, *a’*, *b*, *b’*, *c* e *c’* a uma cônica.

Então *p* = *ab’* ∪ *a’b*, *q* = *ac’* ∪ *a’c* e *r* = *bc’* ∪ *b’c* são concorrentes[113].

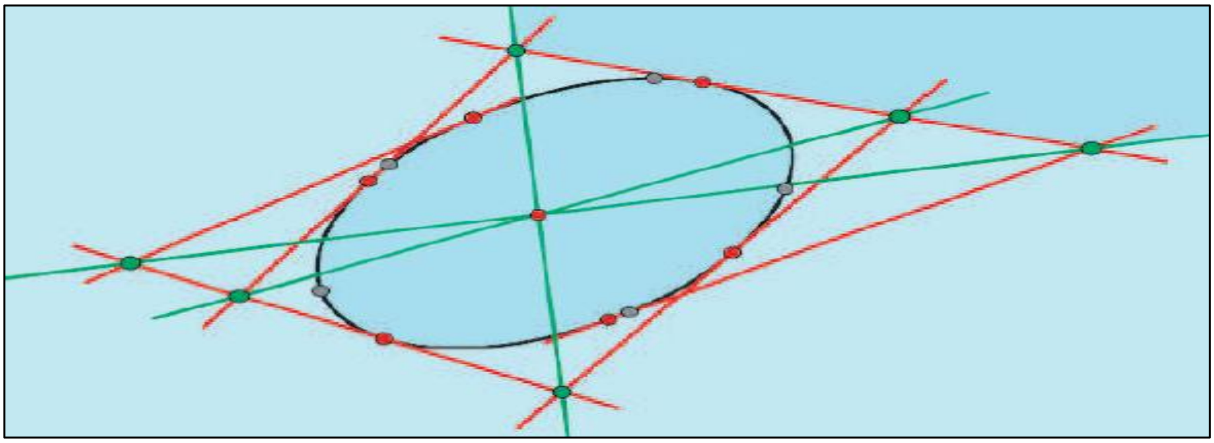


Figura 9 As três retas em verde representam as retas p, q, r que são concorrentes do Teorema de Brianchon.

<u>Demonstração</u>

Sejam $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{u}'$, $\bar{v}'$ e $\bar{w}'$ os pontos de tangência do hexágono circunscrito à cônica, onde $\bar{v}$ está no lado do hexágono adjacente aos lados que contêm $\bar{u}$ e $\bar{w}$ e os três últimos pontos de tangência listados estão nos lados opostos aos três primeiros, respeitando a ordem da listagem.

[113] O ponto de concorrência é chamado de ponto de Brianchon.

Como cada um dos pontos é ponto de tangência, os lados do hexágono estão sobre as retas $r_{A^*(\bar{u})}$, $r_{A^*(\bar{v})}$, $r_{A^*(\bar{w})}$, $r_{A^*(\overline{u'})}$, $r_{A^*(\overline{v'})}$ e $r_{A^*(\overline{w'})}$. Sendo assim, a cônica dual incide nos pontos $A^*(\bar{u})$, $A^*(\bar{v})$, $A^*(\bar{w})$, $A^*(\bar{u}')$, $A^*(\bar{v}')$ e $A^*(\bar{w}')$.

Considerando esses pontos como vértices de um hexágono inscrito na cônica dual, pelo Teorema de Pascal, determinamos três pontos colineares $\bar{a}$, $\bar{b}$ e $\bar{c}$. Esses pontos do projetivo dual representam as diagonais que incidem em vértices opostos da cônica original, isto é, as diagonais incidem em vértices opostos da cônica são $r_{\bar{a}}$, $r_{\bar{b}}$ e $r_{\bar{c}}$.

Como estes três pontos são colineares no plano projetivo dual, existe um ponto $\bar{p}$ do plano projetivo tal que a reta projetiva dual $r_{\bar{p}}^*$ incide nos três pontos, ou seja, valem as condições de incidência e, portanto, as retas $r_{\bar{a}}$, $r_{\bar{b}}$ e $r_{\bar{c}}$ concorrem em $\bar{p}$. ■

APÊNDICE B – Coordenadas Homogêneas

Este anexo está apoiado no trabalho de conclusão da pós-graduação de José Osorio pela Universidade Federal Fluminense de 2008.

Então, será apresentada a aplicação das coordenadas homogêneas na interpretação de um ponto localizado no infinito.

PONTO NO INFINITO

Seja P um ponto com coordenadas baricêntricas $P = (u :v : w)$. Dizemos que P é um *ponto no infinito* se $u + v + w = 0$.

É importante observar que pontos no infinito não são pontos do plano euclidiano mas, sim, abstrações que dão consistência às operações sobre pontos.

1 – Um modelo para os pontos no infinito usando as coordenadas homogêneas

Desenvolve-se aqui uma interpretação geométrica para pontos no infinito usando as coordenadas homogêneas de um ponto definidas a seguir e, por conveniência, considera-se o plano como sendo o plano xy em $\mathbb{R}^3$.

Dado então um ponto $P = (x_P; y_P; 0)$ do plano xy, define-se as coordenadas homogêneas deste ponto como sendo o terno:

$$P' = (x_P; y_P; 1)$$

Esse terno, por sua vez, pode ser identificada com o conjunto formado pela reta que passa por este ponto P' e pela origem $O = (0; 0; 0)$ excluindo-se a própria origem O.

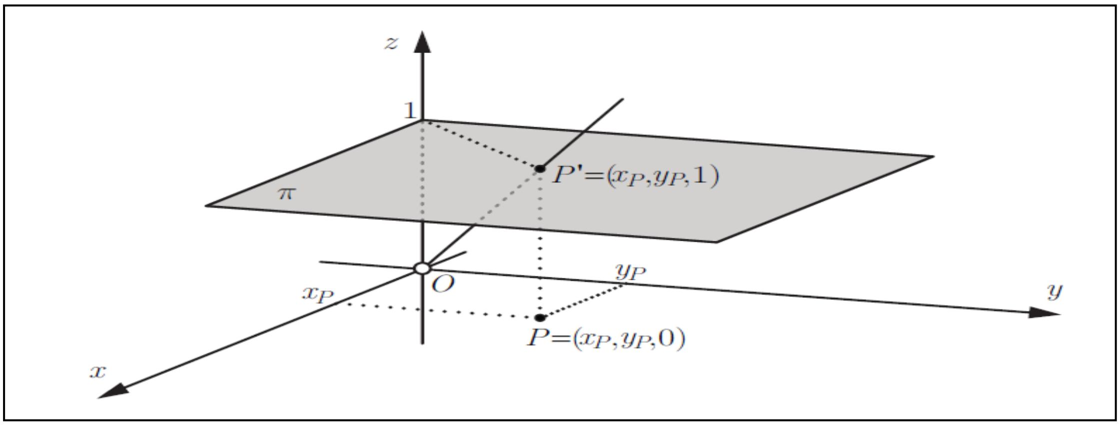


Figura 10 Representação do ponto P e do ponto P'.

Com efeito: dado qualquer ponto $(\widehat{x_P}, \widehat{y_P}, \widehat{z_P})$ desta reta, existe um número real $\lambda \neq 0$ tal que $(\widehat{x_P}, \widehat{y_P}, \widehat{z_P}) = \lambda\cdot(x_P;\ y_P;\ 1)$. Sendo assim, a partir do ponto $(\widehat{x_P}, \widehat{y_P}, \widehat{z_P})$ dessa reta, podem-se recuperar as coordenadas homogêneas associadas dividindo-se o ponto por $\widehat{z_P}$.

Observe então que cada ponto $(x_P;\ y_P;\ 0)$ do plano *xy* é representado por uma reta no espaço que passa pela origem (com exceção da origem). Por conseguinte, as retas no plano *xy* podem ser identificadas como planos passando pela origem menos a origem, como mostram as figuras 11 e 12.

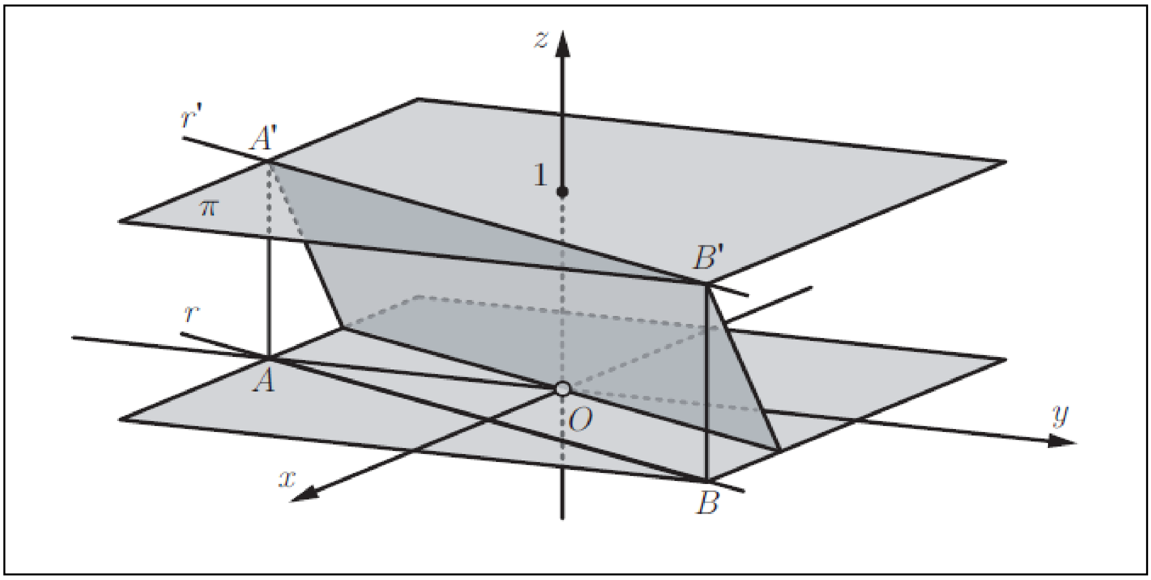


Figura 11 A reta *r* do plano *xy* é identificada pelo plano que contem *r'* e passa pela origem.

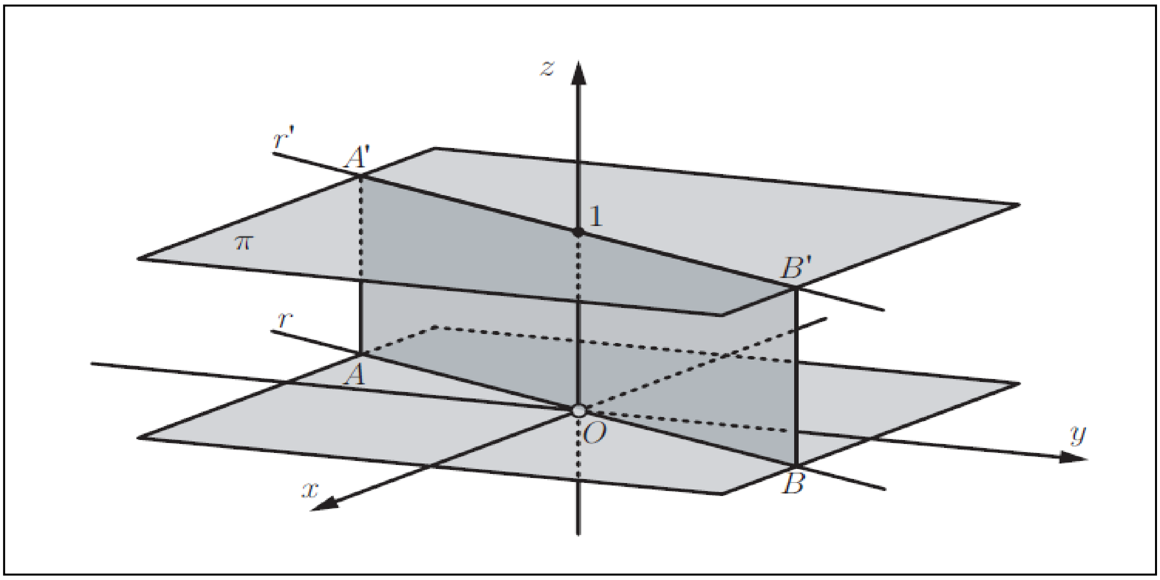


Figura 12 A reta *r* do plano *xy* é identificada pelo plano que contém *r'* e passa pela origem.

Destaca-se também que há retas no espaço que passam pela origem, excluindo a própria a origem, que não estão associadas com nenhum ponto do plano *xy*. Estas retas são justamente as retas contidas no plano *xy* e elas representarão os pontos no infinito. Tal representação pode ser motivada pelo argumento que se segue:

Seja $P_\lambda = \lambda \cdot (a; b; 0)$ um ponto sobre a reta r_∞ cuja equação é dada por $bx = ay$, $z = 0$. Considere também a reta $r_\lambda = \overrightarrow{OP'}_\lambda$ no espaço que representam os pontos P_λ.

Quando $\lambda \rightarrow \infty$, a distância do ponto P_λ à origem tende a ∞ ("o ponto P_λ está tendendo ao infinito"). Note que o ângulo entre a reta $r_\lambda = \overrightarrow{OP'}_\lambda$ e o eixo *z* tende a $\frac{\pi}{2}$. Desta maneira, a reta $r_\lambda = \overrightarrow{OP'}_\lambda$ está "tendendo" à reta r_∞, o que sugere considerar r_∞ como a representação do ponto no infinito P_∞ associado à direção $(a; b; 0)$ no plano *xy*.

Assim, pontos no infinito são pontos que, em coordenadas homogêneas, têm a terceira componente nula.

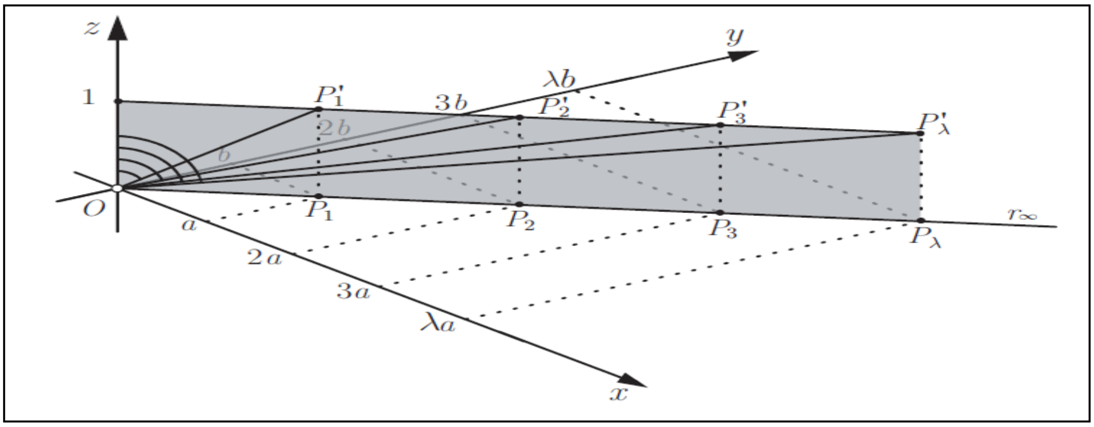


Figura 13 A terceira coordenada homogênea nula caracteriza o ponto no infinito.

Esta representação permite dar sentido à frase "retas paralelas se encontram no infinito". De fato, sejam r_1 e r_2 duas retas paralelas no plano xy, como na figura 14.

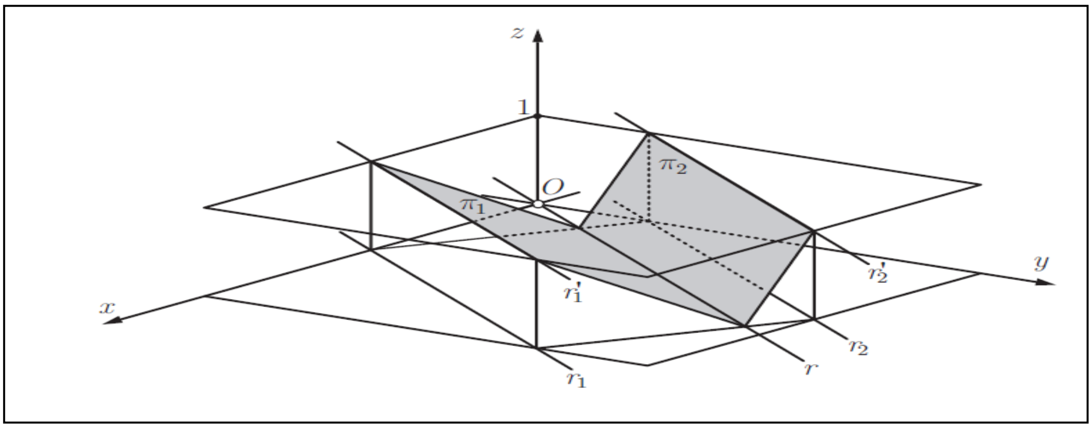
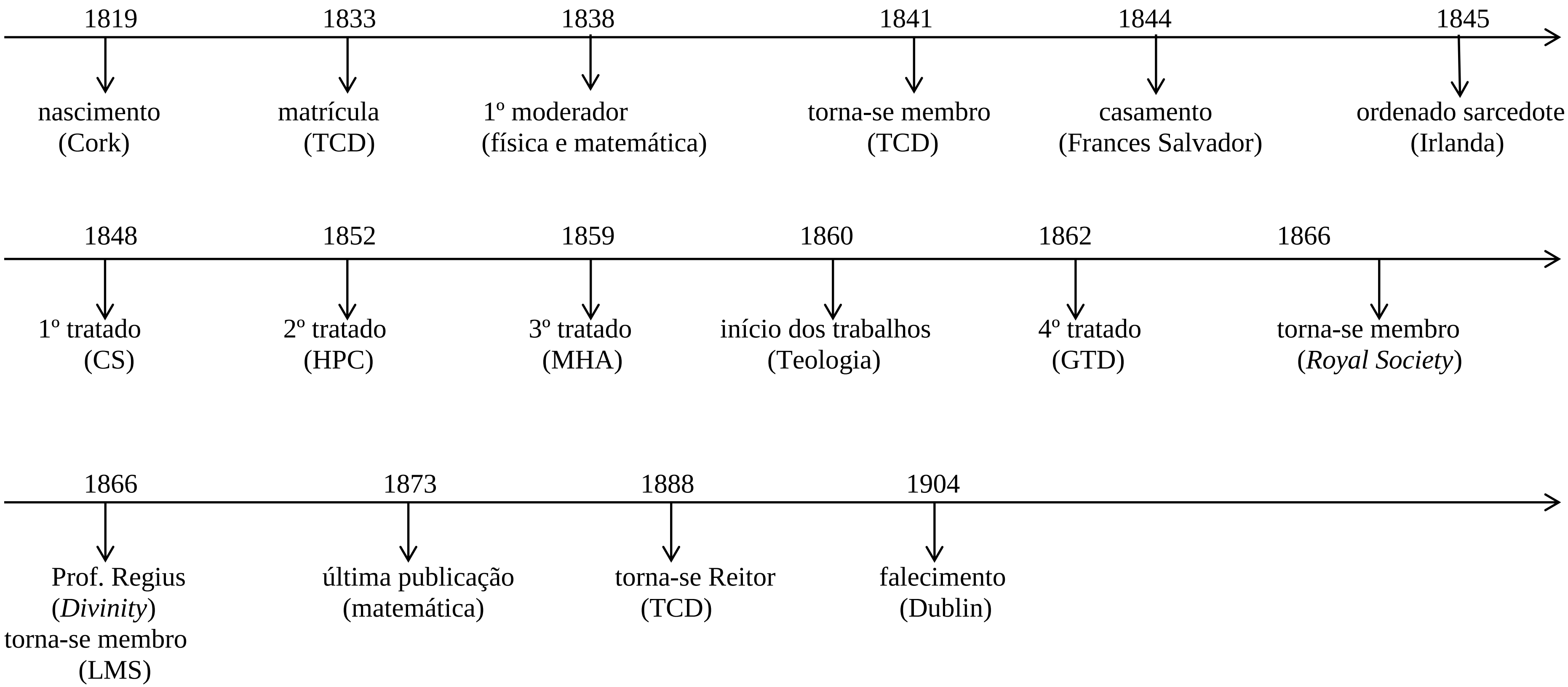


Figura 14 Não existem retas paralelas quando as coordenadas são homogêneas

Em coordenadas homogêneas, cada reta r_i *é* representada por um plano π_i que contém r'_i e passa pela origem, para $i = 1, 2$. Sendo assim, elas se intersectam em uma reta r no plano xy, isto é, no ponto no infinito na direção desta reta.

ANEXO A – Linha do Tempo de George Salmon



ANEXO B – Relação de artigos em matemática de George Salmon

A relação dos títulos dos artigos de pesquisa em matemática foi encontrada no Catálogo dos Artigos Científicos da Sociedade Real[114], nos volumes V e VIII, conforme apresentação feita por Gow (GOW, 1997, pp. 70-72):

[1] *On the properties of surface of the second degree which correspond to the theorems of Pascal and Brianchon on conic sections*, Phil. Mag. 24 (1844), 49-51; Nouv. Ann. Math. 12 (1853), 287-289.

[2] *On the degree of a surface reciprocal to a given one*, Camb. And Dubl. Math. J. 2 (1847), 65-73.

[3] *Note on the parabolic points of surfaces*, Camb. and Dubl. Math. J. 2 (1847), 74-75.

[4] *On the generation of surfaces of the second degree*, Proc. RIA 3 (1847), 536-537.

[5] *On the condition that a plane should touch a surface along a curve line*, Camb. and Dubl. Math. J. 3 (1848), 44-46.

[6] *On the number of normals which can be drawn from a give point to a given surface*, Camb. and Dubl. Math. J. 3 (1848), 46-47; Nouv. Ann. Math. 9 (1850), 274-276.

[7] *Note on a result of elimination*, Camb. and Dubl. Math. J.3 (1848), 169-173.

[8] *On the cone circumscribing a surface of the mthorder*, Camb. and Dubl. Math. J. 4 (1849), 188-191.

[9] *On the triple tangent planes to a surface of the third order*, Camb. and. Dubl. Math. J. 4. (1849), 252-260.

[10] *On the classification of curves of Double curvature*, Camb. and Dubl. Math. J. 5 (1850), 23-46.

[11] *On the condition that an equation should have equal roots*, Camb. and. Dubl. Math. J. 5 (1850), 159-165.

[12] *Lettre de Mr. G. Salmon de Dublin à l'éditeur de ce journal. [Sur les points d'inflexion dês courbes de troisième degré]*, J. für die reine und angewandte Math. 39 (1850), 365-366.

[13] *Théorème sur les courbes de troisième degré*, J. für die reine und angewandte Math. 42 (1852), 274-276; Nouv. Ann. Math. 11 (1852), 321-322.

[114] *Royal Society's Catalogue of Scientific Papers*.

[14] *Sur la formulation de La courbe réciproque à une courbe donnée*, J. für die reine und angewandte Math. 42 (1852), 274-276.

[15] *On a class of ruled surfaces*, Camb. and Dubl. Math. J. 8 (1853), 45-47.

[16] *On reciprocal surfaces*, Proc. RIA 6 (1853-54), 273-275.

[17] *Exercises in the hyperdeterminant calculus*, Camb. and Dubl. Mth. J. 9 (1854), 19-33.

[18] *On the problem of the in-and-circumscribed triangle*, Phil. Mag. 13 (1857), 190-191, 267-268.

[19] *On the problem of the in-and-circumscribed triangle*, Phil. Mag. 13 (1857), 337-338.

[20] *Geometrical notes*, Quart. J. Math. 1 (1857), 237-241.

[21] *On the order of certain systems of equations*, Quart. J. Math. 1 (1857), 246-257.

[22] *On the contact of right lines with surface*, Quart. J. Math. 1 (1857), 329-344.

[23] *Sur La théorie de deux coniques*, Nouv. Ann. Math. 17 (1858), 83-98.

[24] *On curves of the third order*, Phil. Trans. Royal Society 148 (1858), 535-542. Proc. Royal Society 9 (1857-59), 333-334.

[25] *On the equation of the surface of centres of na ellpsoid*, Quart. J. Math. 2 (1858), 217-222.

[26] *Rectification d'un théorème de Mm. Steiner ET Dewulf. [Le lieu dês sommets dês angles droits circonscrits à une courbe de La classenest une courbe de degré n²]*, Nouv. Ann. Math. 18 (1859), 314-319.

[27] *On the degree of the surface reciprocal to a given one*, Trans. RIA. 23 (1859), 461-488.

[28] *On quaternaty cubics*, Phil. Trans. Royal Society 160 (1860), 229-240. Proc. Royal Society 10 (1859-60), 513-514.

[29] *Sur le théorème Faure et courbes parallèles*, Nouv. Ann. Math. 19 (1860), 345-349.

[30] *On the relation which connects the mutual distances of Five points in space*, Quart. J. Math. 3 (1860), 282-288.

[31] *On the determination of the points of contact of Double tangents to na algebraic curve*, Quart. J. Math. 3 (1860), 317-322.

[32] *Geometrical theorems*, Quart. J. Math. 4 (1861), 152-154.

[33] *Notes on quadriplanar coordinates*, Quart. J. Math. 4 (1861), 231-232, 271.

[34] *On the determination of the foci of a conic*, Quart. J. Math. 5 (1862), 307-311.

[35] *Geometrical theorems*, Quart. J. Math. 5 (1862), 362-365.

[36] *On the circle which touches the four circles which touch the sides of a given spherical triangle*, Quart. J. Math. 6 (1863), 67-73.

[37] *On some points in the theory of elimination*, Quart. J. Math. 7 (1866) 327-337.

[38] *On the number of surfaces of the second degree which can be described to satisfy nine conditions*, Quart. J. Math. 8 (1867), 1-7.

[39] *On some special forms of conics*, Quart. J. Math. 8 (1867), 235-236.

[40] *On the limiting cases of certain conics*, Messenger of Mathematics 4 (1868), 129-132.

[41] *On periods in the reciprocal of primes*, Messenger of Mathematics (New Series) 2 (1873), 49-51.