

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO**

Marcelo Ribeiro de Souza

**LINHA DO TEMPO DA HISTÓRIA DA
MATEMÁTICA:**

**UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DE NOVAS TECNOLOGIAS PARA A
REPRESENTAÇÃO DE DOIS PROBLEMAS HISTORIOGRÁFICOS**

Rio de Janeiro - Brasil

2018

Marcelo Ribeiro de Souza

**LINHA DO TEMPO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA:
UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DE NOVAS TECNOLOGIAS PARA A
REPRESENTAÇÃO DE DOIS PROBLEMAS HISTORIOGRÁFICOS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino da Matemática.

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática

Orientador: Tatiana Marins Roque

Coorientador: Cleber Haubrichs dos Santos

Rio de Janeiro - Brasil

2018

Marcelo Ribeiro de Souza

LINHA DO TEMPO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA:
UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DE NOVAS TECNOLOGIAS PARA A REPRESENTAÇÃO DE DOIS PROBLEMAS HISTORIOGRÁFICOS/ Marcelo Ribeiro de Souza. – Rio de Janeiro - Brasil, 2018-

102 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Tatiana Marins Roque

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática, 2018.

1. História da Matemática. 2. Representação da História. 2. Mapping Knowledge domains. I. Tatiana Roque. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. III. PEMAT. IV. Linha do Tempo na História da Matemática. V. Marcelo Ribeiro de Souza.

Marcelo Ribeiro de Souza

**LINHA DO TEMPO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA:
UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DE NOVAS TECNOLOGIAS PARA A
REPRESENTAÇÃO DE DOIS PROBLEMAS HISTORIOGRÁFICOS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino da Matemática.

Trabalho aprovado. Rio de Janeiro - Brasil, 26 de Abril de 2018:

Tatiana Marins Roque
Orientador

Cleber Haubrichs dos Santos
Coorientador

Gert Schubring
Convidado 1

Aline Bernardes
Convidado 2

Felipe Acker
Convidado 3

Rio de Janeiro - Brasil
2018

*À minha família, por suportar o avesso.
À UFRJ, morada das minhas navegações.
Ao Edson Lamin, pelas primeiras galés.
Ao Felipe Acker, pela divisão de águas.
À Tatiana, pelas guinadas, pelo leme e pela embarcação.
Ao Cleber, pelo amor de quem toma os remos
e oferece um descanso na loucura...*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar, aos meus pais e, em especial, à figura de minha mãe, que sempre me apoiou independentemente de qualquer decisão que eu viesse a tomar. Há muitas pessoas a quem devo a minha paixão pela matemática. Vou tentar listá-las aqui. De certa forma, todas elas são um pedaço do trabalho que aqui desenvolvo. Uma delas foi meu professor particular, Edson Lamin, que soube desmistificar essa matéria tão fascinante e instigar por meio de muitos desafios o adolescente que fui. Em seguida, gostaria de agradecer ao professor Carlos Alberto da Silva Victor, que também foi fundamental para a minha formação. Na UFRJ, conheci professores fantásticos, mas nenhum modificou tanto a minha percepção do que era matemática quanto o Felipe Acker, a quem devo muitíssimo pelas ricas visões e pela minha forma geométrica de pensar e interpretar a matemática. Como disse acima, na pequena poesia, o Felipe foi um grande divisor de águas. Agradeço imensamente ao PEMAT, particularmente na figura do professor Victor Giraldo, por me acolher no programa e por ser uma pessoa amiga e maravilhosa, além de um professor incrível. Tenho a dizer que, depois de tantas investidas, o PEMAT foi um grande acerto em minha vida. Também gostaria de agradecer à Tatiana Roque pela orientação e pela amizade, pelos puxões de orelha e pelas conversas que ajudaram a me tranquilizar em momentos difíceis. Todo meu agradecimento também ao professor Gert Schubring pelos inúmeros e-mails respondidos com presteza e rapidez. Agradeço, também, ao Renato Borges, meu amigo e programador, que ajudou na programação do protótipo da linha do tempo que aqui apresento. Meus amigos pessoais também foram fundamentais na construção desse trabalho. Seria difícil listar todos, mas quero agradecer especialmente à Elisiene Barbosa, à Ana Carolina Mazotto, ao Pedro Neves, ao Mário Assef, à Laís Frey. *Last but not least*, gostaria de agradecer, com toda paixão possível, ao meu coorientador Cleber Haubrichs, sem o qual esse barco poderia ter afundado. Jamais poderei retribuir todo cuidado, todo carinho, toda amizade e companheirismo dedicados a mim e ao meu trabalho.

“Quant aux méthodes, j’ai cherché à leur donner toute la rigueur qu’on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l’algèbre.”
Augustin-Louis Cauchy

“Les diverses théories dont se compose le domaine de la science de l’étendue peuvent être rangées en deux classes très-distinctes. Il est, en effet, certaines de ces théories qui dépendent essentiellement des relations métriques qui se trouvent exister entre les diverses portions d’étendue que l’on compare, et qui conséquemment ne sauraient être établies qu’à l’aide des principes du calcul. D’autres, au contraire, sont tout-à-fait indépendantes de ces mêmes relations, et résultent uniquement de la situation que se trouvent avoir les uns par rapport aux autres [...]”. Joseph Diaz Gergonne

Resumo

Este trabalho tem como objetivo propor uma nova maneira de representar a história da matemática através de um objeto conhecido: a linha do tempo. Essa linha do tempo sendo concebida e discutida de uma maneira conceitualmente mais ampla, indo além da nossa pré concepção de seu formato de linha reta orientada. Tomando como princípio que a própria linha do tempo é uma construção, ou seja, suas funções, seus formatos variam de acordo com a sociedade e a época em que foram concebidas, conforme mostra o trabalho do historiador Anthony Grafton. Propomos uma nova linha do tempo que esteja de acordo com as concepções e ferramentas de nossa época, sobretudo dialogando com a nova forma de fazer história da ciência e, em particular, da matemática. Utilizaremos essa linha do tempo que será discutida e fundamentada teoricamente para instanciar dois problemas historiográficos da matemática: o problema do livro de análise de Cauchy – *Cours d'Analyse* – e o problema da Dualidade em Geometria do século XIX. Após discutirmos a relevância histórica desses problemas, apresentamos um protótipo de linha do tempo que os representam de acordo com a nossa concepção teórica previamente discutida. As informações contidas na linha do tempo, bem como a seleção dos elementos que nela aparecem, foram retiradas de trabalhos de historiadores da matemática e da ciência com enfoque na historiografia da matemática pós 1970.

Palavras-chave: Linha do tempo. Representação da história. *Mapping knowledge domains*. História da matemática.

Abstract

The main goal of this work is to conceive a new way of representing history of mathematics through a known object: the timeline. In a different manner we're used to, we intend to discuss the concept of timeline in a broader perspective, going further than our preconception concerning its linear format. We take for granted that the timeline is itself a historical construction, that is, its format, social functions, etc, vary through the eras they are conceived, as its shown through the work of the historian Anthony Grafton. We then propose a new concept of timeline embracing the aspects of the new science and mathematics historiography, which is considered dynamic, full of interchanges and connections. To do so, we are going to use the tools and technologies of our time: internet, databases, graphs and algorithms. Finally, we are going to pick two historiographical problems of mathematics – Cauchy's analysis book, published in 1821 and the duality problem on 19th century geometry – and represent them with a prototype of timeline, based on our previous discussion. All information used to build the timeline is taken from works where we find a recent approach on mathematical historiography (after 1970).

Keywords: Timeline. Representing history. *Mapping knowledge domains*. History of Mathematics.

Sumário

	Introdução	21
1	FUNDAMENTAÇÃO DE UM NOVO CONCEITO DE LINHA DO TEMPO	27
1.1	A linha ou as linhas do tempo?	27
1.2	Uma breve história da linha do tempo	28
1.3	A nova historiografia da matemática	31
1.4	A linha do tempo usada para a representação da história da matemática, a partir de uma nova perspectiva historiográfica	33
2	UMA NOVA IMAGEM DO TEMPO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	37
2.1	Visualização e representação na história das ciências	38
2.2	Organização da história da matemática através de problemas	41
2.3	O problema do livro <i>Cours d'Analyse</i> de Cauchy e o problema da Dualidade em Geometria	42
2.3.1	Mudanças na concepção de rigor	45
2.3.2	O papel das instituições no desenvolvimento da matemática	47
2.3.3	Jornais e periódicos - locais de disputa e visibilidade	47
2.4	O livro de análise de Cauchy	48
2.4.1	O rigor em análise no século XVIII e o encontro de uma nova concepção de rigor no século XIX	49
2.4.2	Matemáticos também são professores	52
2.4.3	A trajetória de Cauchy na <i>École Polytechnique</i>	53
2.5	O problema da Dualidade em Geometria	55
2.5.1	A disputa entre Gergonne e Poncelet	60
2.5.2	A amplitude da geometria de situação	64
3	APRESENTAÇÃO DE UM PROTÓTIPO DE LINHA DO TEMPO	69
3.1	A estrutura da linha do tempo	69
3.2	A modelagem do problema do livro <i>Cours d'Analyse</i> de Cauchy	72
3.3	A modelagem do problema da dualidade em geometria	78
3.4	Apresentação dos vértices utilizados no problema do livro <i>Cours d'Analyse</i> de Cauchy	84
3.5	Apresentação dos vértices utilizados no problema da Dualidade em Geometria	85

4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	87
4.1	O público alvo da nossa linha do tempo	87
4.2	Desdobramentos da nossa linha do tempo	87
	REFERÊNCIAS	91
	APÊNDICES	93
	APÊNDICE A – CÓDIGO DO PROTÓTIPO DA LINHA DO TEMPO	95
	ANEXOS	97
	ANEXO A – CARTOGRAFIAS DO TEMPO	99

Lista de ilustrações

Figura 1 – <i>Men of modern mathematics. Linha do tempo desenvolvida pela IBM e Eames Office.</i>	22
Figura 2 – <i>A Time-line for the History of Mathematics</i>	22
Figura 3 – <i>MacTutor History of Mathematics Archive</i>	23
Figura 4 – Imagem ilustrativa de <i>big data</i>	35
Figura 5 – Tipos de análise versus Níveis de análise	39
Figura 6 – reta polar do ponto P , em relação à cônica C	57
Figura 7 – reta polar do ponto P – no caso em que P é interior à cônica –, em relação à C	57
Figura 8 – Correspondência entre incidência e colinearidade.	58
Figura 9 – <i>fac-símile</i> do primeiro artigo publicado sob a rubrica <i>géométrie de situation</i>	59
Figura 10 – <i>fac-símile</i> da primeira página do artigo de 1827 de Gergonne	65
Figura 11 – Linha reta com as datas de entrada.	70
Figura 12 – Grafo do problema do livro de análise de Cauchy.	71
Figura 13 – Grafo do problema da dualidade em geometria.	72
Figura 14 – Clique sobre o vértice central do problema do livro de análise de Cauchy.	73
Figura 15 – Clique sobre o vértice Binet.	74
Figura 16 – Clique sobre a aresta que liga Binet à <i>École Polytechnique</i>	75
Figura 17 – Clique sobre o vértice <i>Cours d'Analyse</i>	75
Figura 18 – Clique sobre o vértice <i>Fundamentos do cálculo infinitesimal</i>	76
Figura 19 – Clique sobre o filtro <i>peçoas</i>	77
Figura 20 – Vértices que representam as pessoas no problema da dualidade em geometria.	78
Figura 21 – Clique sobre o vértice Poncelet.	79
Figura 22 – Clique sobre o vértice <i>École Polytechnique</i>	80
Figura 23 – Clique sobre o filtro de publicações.	81
Figura 24 – Clique sobre os <i>Annales de Gergonne</i>	82
Figura 25 – Clique sobre o filtro dos conceitos.	82
Figura 26 – Crônicas de Eusébio.	100
Figura 27 – <i>Carte figurative des pertes sucessives en hommes de l'armée française dan la campagne de Russie 1812-1813 comparées à celle d'Hannibal durant la 2éme Guerre Punique</i>	101
Figura 28 – <i>Universal History</i> , de Johannes Buno.	102
Figura 29 – <i>Chart of Universal History</i> , de Thomas Jefferys.	102

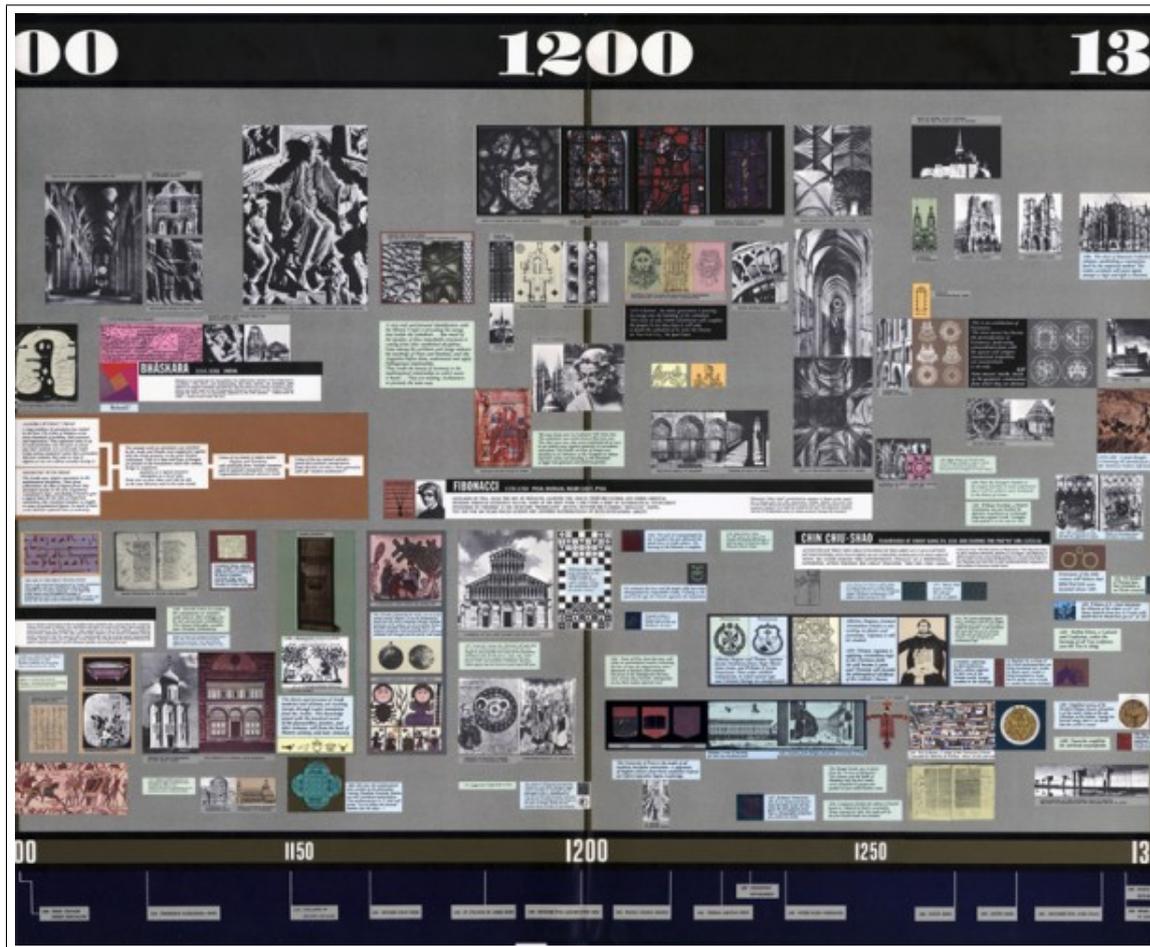
Lista de tabelas

Tabela 1 – Artigos publicados nos <i>Annales</i> sob a rubrica <i>géométrie de situation</i> . . .	67
Tabela 2 – Vértices do problema do livro de Cauchy.	84
Tabela 3 – Vértices do problema da dualidade em geometria.	85

Introdução

Em março de 1961, o *California Museum of Science and Industry* recebeu uma exposição que ficaria conhecida como uma das mais duradouras exposições patrocinadas por uma empresa privada: a *Mathematica: a world of numbers...and beyond*. Concebida pelos famosos *designers* do século XX Charles e Ray Eames, criadores do *Eames Office*, a exposição permaneceu no programa itinerário do museu até o ano de 1998, quando foi encerrada. Ela nasceu de uma proposta da IBM aos *designers* para atender a um pedido de contribuição feito pelo museu à época. O resultado foi uma mostra de inúmeras imagens e instrumentos que ilustravam, seja através de figuras estáticas, seja através de máquinas mecânicas, alguns fenômenos e conquistas de diversos ramos da matemática: probabilidades, topologia, álgebra Booleana, cálculo, geometria, e lógica. Dentre as atrações, vários tanques nos quais se mergulhavam estruturas de arame variadas que voltavam com películas de bolha de sabão para ilustrar as superfícies mínimas, máquinas mecânicas que mostravam a formação de um hiperboloide de revolução, filmes de dois minutos sobre os conceitos matemáticos, projetados em aparelhos individuais de visualização, etc. Um desses atrativos, em particular, nos chama atenção: uma parede de grandes dimensões, na qual se vê uma imensa linha do tempo, apresentando a história da matemática desde o ano 1100 AD até o ano de 1900 da nossa era, a chamada *history wall*, uma cronologia em imagens e biografias de matemáticos e maravilhas derivadas de descobertas matemáticas. Essa linha do tempo, batizada de *Men of Modern Mathematics*, é um exemplo recente de representação da história da matemática. Em 1966, a IBM criou uma versão impressa da *history wall*. A linha do tempo, então, passou a ser divulgada e amplamente distribuída como ferramenta de ensino ao longo de décadas para escolas, universidades e demais instituições de ensino nos Estados Unidos.

Figura 1 – *Men of modern mathematics*. Linha do tempo desenvolvida pela IBM e Eames Office.

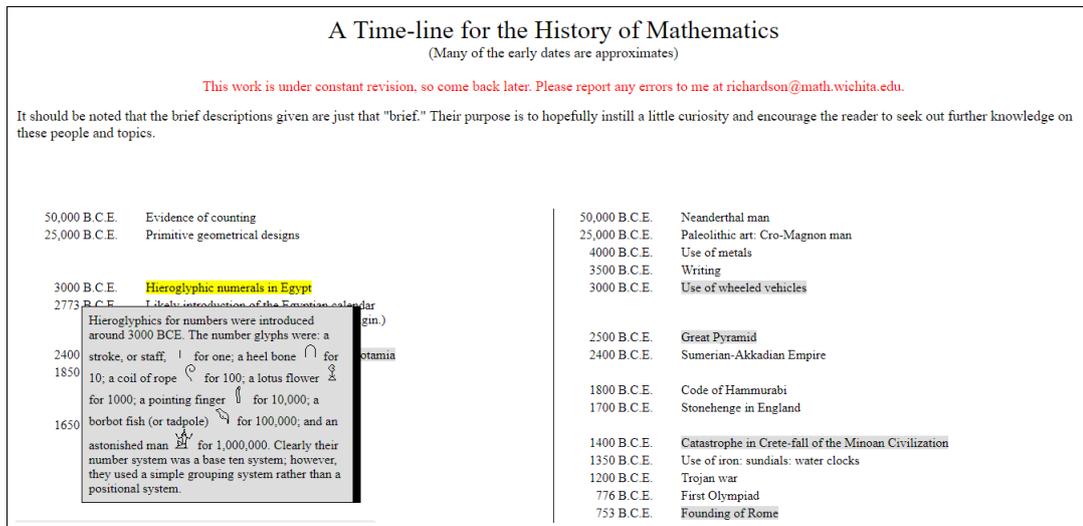


Fonte: <http://www.eamesoffice.com/the-work/men-of-modern-mathematics/>

Embora possivelmente uma das mais famosas, a *Men of Modern Mathematics* não é o único exemplo de representação da história da matemática existente. Uma busca rápida pela internet nos permite encontrar diversas linhas do tempo e representações cronográficas da história dessa área do conhecimento. Um exemplo é o de uma linha do tempo desenvolvida pelo professor de matemática William H. Richardson, emérito da *Wichita State University*, no Kansas, Estados Unidos. Em um sítio da internet em sua página na Universidade, o acadêmico disponibiliza um modelo simples, de duas colunas, no qual, à esquerda se vê uma data estimada e, à direita, um evento a ela associado. Ao se clicar sobre alguns dos eventos, pode-se ler mais informações sobre ele, o que confere a essa linha do tempo certa interatividade.

Esse formato de representação da história, que se baseia em uma tabela com datas e eventos, não é novo. Ele está presente em uma das cronologias mais antigas do Ocidente: as crônicas de Eusébio, escritas entre os séculos III e IV por Eusébio de Cesareia, teólogo cristão que provavelmente viveu entre os anos de 260 e 340 da nossa Era. Esse modelo de representação foi amplamente copiado e disseminado durante toda a Idade Média,

Figura 2 – A Time-line for the History of Mathematics



Fonte: <http://www.math.wichita.edu/richardson/timeline.html/>

sobretudo porque, de acordo com o historiador Grafton (2010), esse formato se adequava muito bem aos códices (ou codex) que começaram a substituir os pergaminhos nos registros escritos.

Outro sítio bastante conhecido sobre história da matemática é o *MacTutor History of Mathematics Archive*, criado e mantido pelos matemáticos John O'Connor e Edmund F. Robertson, ambos da *St Andrews University*, Escócia. Embora não seja propriamente uma linha do tempo, a página apresenta, em uma extensa base de dados, uma ampla coleção de biografias de cientistas e índices com informações sobre ciência e matemática.

Figura 3 – MacTutor History of Mathematics Archive



Fonte: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>

Todas essas ferramentas, sejam elas linhas do tempo impressas, linhas do tempo interativas na internet ou mesmo sítios contendo biografias, que servem de material de

apoio e consulta para estudantes, professores e interessados em história da matemática, têm algo em comum: foram concebidas por profissionais que não são da área de história. Sejam eles matemáticos de carreira, como é o caso de Richardson, O'Connor e Robertson ou *designers*, como é o caso do casal Eames.

O trabalho aqui apresentado tem como objetivo central discutir uma nova maneira de representar visualmente a história da matemática, à luz dos instrumentos e ferramentas da nossa época. Junto à discussão teórica, por meio da qual pretendemos embasar e defender um modelo de representação, apresentaremos um protótipo material, com o objetivo de ilustrar o que foi discutido. Esse protótipo será construído com base nas discussões esmiuçadas ao longo do texto e utilizará dois problemas da historiografia da matemática – a saber, o problema do livro de análise de Cauchy e o problema da dualidade em geometria do século XIX – para dar vida e exemplificar o nosso modelo de representação.

Para essa visualização da história que propomos, utilizaremos um objeto bastante conhecido: a linha do tempo. Embora estejamos acostumados a uma linha do tempo em formato de linha reta orientada, uma vez que ela nos chega assim historicamente, pretendemos discorrer sobre um conceito de linha mais amplo, tomando por referência uma obra importante que versa sobre as representações do tempo: *Cartographies of Time*, do historiador Anthony Grafton. Mas por que o formato da linha do tempo é tão importante? Não bastaria uma linha reta conforme conhecemos? Acreditamos que uma linha do tempo em formato de linha reta é insuficiente para contemplar a narrativa da história da matemática sob a égide da nova historiografia da ciência, uma vez que ela cheia de vaivéns, de conexões entre diversos atores históricos e de acontecimentos que se dão simultaneamente, ou seja, a história da matemática não apresenta a linearidade nem o caráter estático com os quais nos iludimos quando a narrativa nos é apresentada em formato sequencial. Um exemplo claro disso é a construção dos conjuntos numéricos. Nos tempos de escola, aprendemos uma construção logicamente organizada e encadeada desses objetos da matemática: primeiramente, os números de contar, ou seja, o conjunto dos números naturais. Em seguida, tomando as reflexões em torno do zero, obtemos os números negativos por extensão e temos, por fim, o conjunto dos números inteiros. Em seguida, o conjunto dos números racionais, para incluir aqueles números que expressam a razão entre dois números inteiros e, finalmente, o conjunto dos números reais, que contemplam, além de todos os conjuntos mencionados, aqueles números que não podem ser representados como razão entre dois números inteiros. Embora essa apresentação encadeada seja muito organizada do ponto de vista matemático, ela esconde a história por trás da aceitação desses números enquanto objetos da matemática e da ordem do aparecimento deles na história. Os números negativos, por exemplo, que, diante dessa construção, parecem ter vindo imediatamente após os números naturais, na verdade possuem uma longa trajetória até ganharem o status de número, o que ocorre nos meados do século XIX. Isso não significa que há algo de errado na construção numérica apresentada pela matemática,

apenas que, para efeitos de contar uma história, ela é insuficiente, além de ser anacrônica.

A nossa proposta de visualizar a história da matemática vem ao encontro de uma época promissora. O desenvolvimento de novas ferramentas tecnológicas capazes de organizar uma grande quantidade de dados abriu caminho para uma nova tendência na história da ciência, que é a de representação e visualização da história. Em um artigo de 2004, Katy Börner, pesquisadora de Ciência da Informação da Universidade de Indiana, menciona o termo *mapping knowledge domains* para se referir a essa nova área interdisciplinar, cujo objetivo é utilizar técnicas de *data mining*, *sorting*, *charting*, etc, para mapear e apresentar os domínios do conhecimento. Seu livro *Atlas of Knowledge*, publicado pelo *MIT Press* em 2015 é uma compilação de uma série de trabalhos em que diversos pesquisadores de áreas distintas apresentam seus mapas utilizando ferramentas tecnológicas de representação de informações. Para termos uma ideia, o livro cobre mapas que vão desde áreas como ciência política e literatura até biomedicina. No recente *25th International Congress of History of Science and Technology (ICHST/2017)*, ocorrido no Rio de Janeiro, a área ganhou um simpósio especial sob o nome de *Visualization as a historiographic tool for historians of Science & technology*, organizado pelos pesquisadores Klaus Hentschel, da Universidade de Stuttgart, na Alemanha e Yves Gingras, da Universidade de Québec, no Canadá. De acordo com o que foi apresentado no simpósio, reforçou-se o fenômeno da multiplicação das técnicas desenvolvidas para lidar com uma quantidade muito grande de dados sobre pessoas, publicações, conceitos e processos históricos. Novas palavras como “*digital humanities*” e “*digital history*” têm surgido na tentativa de construir um paradigma para estabelecer um lugar autônomo enquanto área de pesquisa. Essas técnicas já vêm sendo usadas amplamente na medicina e na economia. Diversos programadores são contratados por jornais importantes como o *The New York Times* para produzirem modelos de visualização para diversos fenômenos políticos ou econômicos.

Diante disso, pensamos em aproveitar o momento em que essa tendência se espalha para outras áreas do conhecimento para desenvolver uma linha do tempo diferente, voltada para a visualização e a representação da história da matemática. Sobretudo pelo fato de que a história da matemática passa por um período paradigmático na década de 1970, com muitas releituras de trabalhos publicados por historiadores da primeira metade do século XX. Essa nova forma de ver a história dessa ciência passa a dar vida às conexões entre os personagens históricos, às instituições, de forma que um problema historiográfico passa a ser visualizado de maneira dinâmica. A própria matemática deixa de ser entendida como estática, imutável no tempo, e passa a ser contextualizada com diversos fatores das diferentes épocas em que é praticada, ou seja, a matemática enquanto produto social, feita por seres humanos que se relacionam e vivem os contextos de seu tempo. É importantíssimo que desconstruamos a visão tão limitada e pobre que se tem da matemática enquanto ciência isolada e descontextualizada socialmente. Acreditamos que uma nova representação que se utilize do dinamismo e da interatividade das novas tecnologias pode contribuir para

uma nova imagem dessa ciência, que ilusoriamente, parece não dialogar com as outras áreas de conhecimento. Frente a essa mudança historiográfica, achamos que seria um momento propício para contribuir com esse domínio do conhecimento nesses chamados mappings.

Isso posto, o nosso trabalho será apresentado da seguinte maneira do ponto de vista estrutural:

O capítulo 1 será dedicado à fundamentação do novo conceito de linha do tempo. Nele, apresentaremos as questões historiográficas envolvidas tanto na historiografia da matemática quanto na história da linha do tempo. O objetivo central desse capítulo é ampliar o nosso conhecimento conceitual de linha do tempo. Com isso, acreditamos abrir caminho para um objeto que acreditamos ser uma melhor representação para a história da matemática segundo a nova perspectiva historiográfica, que começa a entrar em voga no último quarto do século XX.

O capítulo 2 versará sobre uma nova imagem do tempo na história da matemática. Nele, também apresentaremos o conceito de linha do tempo que pretendemos representar e falaremos sobre a tendência da visualização em história da ciência. Aqui também aparecerão os problemas historiográficos que nos servirão de exemplos para construirmos um protótipo da linha do tempo que pretendemos materializar após nossas discussões.

O capítulo 3 descreverá o protótipo de linha do tempo, apresentando um exemplo de linha possível baseado em dois problemas historiográficos do século XIX. Nele, também haverá informações sobre o conteúdo da linha e, também, os grafos obtidos a partir da visualização de nossa base de dados.

O capítulo 4 contém seções que abordarão o público alvo de nossa linha do tempo e os desdobramentos dela. Ou seja, discutiremos quem nossa linha do tempo pretende atingir e o que é possível fazer para aprimorá-la em um trabalho futuro.

1 Fundamentação de um novo conceito de linha do tempo

O objetivo central deste capítulo é apresentar fundamentos teóricos e razões pelas quais acreditamos que, para representar a história da matemática segundo os padrões historiográficos atuais através de uma linha do tempo, é preciso introduzir um novo conceito de linha.

Para isso, entrelaçaremos os elementos que consideramos servir como fios condutores para a nossa argumentação: a) a ideia de que a linha do tempo, enquanto objeto que serve para representar a história, tem uma história em si; e b) as mudanças na historiografia da matemática ocorridas a partir da década de 1970, que passam a orientar uma nova forma interpretar a história das ciências, trazendo a necessidade de uma representação que dê conta dessas novas características.

Para a) apresentaremos algumas seções. Na primeira delas, a seção 1.1, falaremos sobre a ideia central que é defendida pelo historiador Anthony Grafton, de que a linha do tempo é um objeto construído historicamente e que possui uma vasta pluralidade de representações. Todas essas linhas do tempo diferentes que vemos ao longo da história são, na realidade, uma tentativa de representação de um conceito que, hoje, entendemos como a linha do tempo. Na seção 1.2, contaremos, resumidamente, parte dessa história das representações do tempo que se encontram na obra *Cartographies of Time*.

Para b) apresentaremos, também, algumas seções. Na seção 1.3, exibiremos a nova historiografia da matemática de que tanto falamos. Acreditamos ser fundamental discorrer sobre ela, uma vez que queremos deixar claro a forma como se faz história da ciência hoje, em contraste com o que se fazia antes de 1970, e como esses novos paradigmas se encaixam no modelo conceitual de linha do tempo que queremos construir. Na seção 1.4, uniremos o que foi discutido nas seções anteriores. O objetivo desta seção, é mostrar que, diante das novas mudanças na historiografia da matemática, é necessária uma nova imagem do tempo, que conceitualmente nos leva a um formato diferente, não linear, mais próximo de um grafo, a partir do qual a história se ramifica, se conecta e se dinamiza.

1.1 A linha ou as linhas do tempo?

Se perguntarmos para uma pessoa da nossa época o que é uma linha do tempo, provavelmente a primeira resposta que lhe virá à cabeça será a de uma linha reta orientada. Permitindo acrescentar um pouco mais de informações, é provável que diga que, sobre ela,

são depositadas datas em ordem crescente, com o intuito de representar a continuidade do tempo e organizar os acontecimentos, expressando uma noção de ordenação dos fatos. Esse *objeto* – a linha do tempo – chega até nós aprisionado em uma forma – a linha reta – e naturalizado de tal maneira que parece um objeto dado, que sempre existiu conforme o colocamos. Sua finalidade também chega delimitada: a representação do tempo. Mas será que o tempo sempre foi representado por uma linha reta?

Em seu livro *Cartographies of Time*, Anthony Grafton mostra, através da análise de uma série de imagens de iconografias do tempo, como a noção de representação do tempo varia de acordo com cada época e cada sociedade. Essas diferentes representações seriam as linhas do tempo, que não necessariamente se parecem com a *linha reta* orientada que chegou até nós. Para termos uma noção da imensa quantidade de representações do tempo, apresentamos algumas delas como anexo 4 deste trabalho. Grafton também argumenta que a forma atribuída à linha do tempo depende de limitações de materiais e recursos em cada época e que, para além das representações, o conteúdo delas revela muito mais do que um simples registro de fatos, mas também a própria mentalidade e percepção de mundo de uma época, o que inclui, também, a sua própria maneira de entender e contar a história. De marcações no mármore e tabelas com diversas colunas aos complexos gráficos e diagramas do tempo, o que hoje entendemos como linha do tempo é uma construção humana, moldada, não só como forma, mas também como conceito.

1.2 Uma breve história da linha do tempo¹

The timeline seems among the most inescapable metaphors we have. And yet, in its modern form, with a single axis and a regular, measured distribution of dates, it is a relatively recent invention. Understood in this strict sense, the timeline is not even 250 years old. How this could be possible, what alternatives existed before, and what competing possibilities for representing historical chronology are still with us [...] (GRAFTON, 2010, p. 14)

Como já foi dito em seções anteriores, a linha do tempo tal qual se nos apresenta – uma linha reta e orientada – é um objeto que chegou a nós dessa maneira, carregando um formato específico e cuja utilização está pressupostamente intrínseca no contexto em que aplicamos: para representar o tempo e contar uma história. Esse formato de linha do tempo que conhecemos (reta e orientada) é relativamente recente e, como se pode ler na citação que abre esta seção, não tem nem 250 anos. Nem sempre foi assim. Há inúmeras tentativas de representação do tempo e de artifícios utilizados pelos antigos para contar a

¹Todas as informações contidas nesta seção foram retiradas do livro *Cartographies of Time*, do historiador Anthony Grafton, que consta da bibliografia desse trabalho.

história; em geral, todos dialogando com os ferramentais disponíveis à época. A linha do tempo, então, seriam as linhas do tempo.

Segundo o historiador Anthony Grafton, a história da representação do tempo pode ser endereçada, inicialmente, às cronologias, que, nas palavras do próprio autor, são vistas pelos historiadores ocidentais como formas rudimentares de historiografia; a passar, em seguida, pelas crônicas e, finalmente, às formas mais recentes e elaboradas de narrativa histórica. As cronologias eram listas de eventos, nas quais eles eram apresentados em alguma numeração. A partir do século IV da era comum, aparece um formato de representação cronológica que serviu de padrão para os historiadores da Europa da época por muitos séculos: a tabela. Eusébio de Cesareia, um estudioso romano, concebeu, através desse formato, as suas conhecidas Crônicas, formadas por colunas paralelas para organizar as cronologias desde então encontradas em diversos formatos ao longo da história. As Crônicas de Eusébio foram criadas com base em uma bíblia poliglota chamada Hexapla, concebida por outro estudioso cristão chamado Orígenes. Orígenes compilou a Hexapla no século III e seu objetivo, com ela, era comparar diferentes versões da escritura sagrada, de forma a situar o lugar do cristianismo na história do mundo. A Hexapla permitia que os leitores contrastassem a versão grega da bíblia, herdada dos judeus que falavam grego, provenientes de Alexandria, e a versão em hebraico, dos judeus da Palestina. Essa comparação de versões levou a discrepâncias de datas e informações que gerariam futuros problemas para aqueles homens que se dedicariam a construir imagens do tempo. A questão era: diante de versões diferentes de acontecimentos bíblicos, como construir uma linha do tempo com uma única narrativa?

O formato de colunas encontrado nas famosas Crônicas de Eusébio, então, dominou a Europa por muito tempo: foram largamente lidas, imitadas e copiadas, sobretudo porque datam do aparecimento do livro tal qual conhecemos hoje, que veio para substituir os pergaminhos, o que facilitava o acesso e a portabilidade.

Ao longo de toda a idade média, o modelo das crônicas sofreu poucas variações, como o acréscimo de um índice, por exemplo. O aparecimento da gráfica foi um marco que impulsionou os trabalhos de alguns estudiosos. Eles aproveitaram o novo ferramental disponível para produzir “imagens do tempo”. Nesse escopo, podemos mencionar dois trabalhos relevantes: as Crônicas de Nuremberg (1493), desenvolvida pelo médico e humanista do século XV, o alemão Hartmann Schedel, um dos primeiros cartógrafos a utilizar as técnicas de impressão, e o *Fasciculus Temporum* (1474), de Werner Rolevinck, um monge Cartusiano, contemporâneo de Schedel.

Schedel, autor das Crônicas de Nuremberg (1493), ofereceu uma solução genealógica para a visão do tempo, construindo uma árvore cujos frutos eram os atores da história do mundo. Já Werner Rolevinck, autor do *Fasciculus Temporum* (1474), usou um sistema de círculos coordenados para localizar governantes bíblicos, clássicos e modernos, além

de escritores, no fluxo da história do tempo. Tanto Rolevinck quanto Schedel estavam cientes do problema encontrado por Eusébio e Orígenes, desde a escrita da Hexapla: as diferentes narrativas da história do mundo e dos tempos, em particular, provenientes do relato bíblico. Cada qual desenvolveu uma solução para lidar com este problema.

Apesar da disponibilidade de os recursos novos e de a engenhosidade dos estudiosos antigos, o desenvolvimento de recursos gráficos para dispor informações foi um processo demorado, como aponta Grafton

It took longer than might have been expected for chronologers to progress from creating tables that contained information, such as those of Eusebius, Condomann or Mercator, to charts that expressed information graphically. (GRAFTON, 2010, p. 71)

O século XVII representou um momento paradigmático para as representações do tempo até então construídas por estudiosos dos séculos anteriores. A abundância de narrativas distintas da história do mundo dificultava a criação de um único dispositivo que fosse capaz de unificá-las. Mesmo assim, diversos estudiosos seguiam na tentativa de encontrar um modelo que pudesse dar conta dessa questão. No entanto, o avanço dos estudos astronômicos, suas observações e a descoberta de novos povos anteriores à criação do mundo descrita na Bíblia colocaram em xeque as versões da história do mundo e dos tempos que até então se embasavam no texto sagrado. Isso levou a uma mudança de perspectiva por parte da cronografia, que, como percebe Grafton, deixa a narrativa bíblica de lado e passa a ser um objeto de registro da cultura e de suas transformações.

Os séculos XVIII e XIX vieram a transformação desses gráficos não somente nos gráficos de linhas e barras aos quais estamos acostumados hoje, mas, também, em gráficos com influência das técnicas de cartografia, que estavam sendo desenvolvidas à época. As linhas do tempo também tinham objetivos pedagógicos e, com o advento da imprensa, elas também passaram a ser produzidas para a venda. Um dos nomes mais representativos do século XVIII para a cronografia foi Joseph Priestley, teólogo e historiador Inglês que desenvolveu duas grandes obras de representação da história: *A New Chart of History* e *A Chart of Biography* que seriam muito utilizadas como instrumento de ensino, além de serem consideradas linhas do tempo sofisticadas de sua época. As obras de Priestley influenciaram muitas outras que vieram em seguida, e, em particular, sua forma de utilizar escalas em seus trabalhos foi um fator determinante para a utilização de gráficos de linha para a representação de informações estatísticas.

Over the course of the next century, Playfair's line graph, which counterposed two quantitative axes (one for time, the other for economic measures such

as exports, imports, and debts) became one of the most recognizable chronological forms. Later statisticians would not be satisfied with only two graphic dimensions. [...] After Playfair, statistical representations of historical phenomena proliferated, first in fields such as economics second nature. (GRAFTON, 2010, p. 136)

Até hoje a linha do tempo serve como um objeto que pode ser utilizado para o ensino e, além disso, encontramos muitas representações do tempo que se utilizam de seu formato até mesmo em exposições de arte. O trabalho de Grafton também apresenta uma série de concepções artísticas para a organização de informações em uma linha do tempo. Talvez uma das mais curiosas seja a da artista holandesa Marjolijn Dijkman, que desenvolveu uma linha do tempo visual e filmografada para contar a história dos filmes futuristas, ou seja, uma linha do tempo que representa um futuro hipotético.

O recente universo de uma quantidade imensa de dados nos leva a pensar sobre os desafios da representação do tempo em nossa época. As tecnologias de armazenamento e a facilidade com que intercambiamos informações nos munem com poderosos materiais, que também podem ser grandes armadilhas. Quais seriam as nossas limitações? Que ferramentas seriam adequadas para uma linha do tempo da nossa época?

1.3 A nova historiografia da matemática

[...] although mathematics is most immediately the product of individuals, those individuals are shaped and constrained by the society in which they live, think and write. In order to understand mathematics of a particular people as richly as possible, historians need to contextualize it.” *Eleanor Robson*

A história da matemática tem um passado que remonta ao século XIX. Houve, àquela época, um grupo de reconhecidos “profissionais” da história da matemática, como é o caso de Montucla, Moritz Cantor, Tanery, etc. As pesquisas nesse campo, no entanto, diminuem em meados na Primeira Guerra Mundial e são, de certa forma, retomadas no final da primeira metade do século XX. Para se ter uma ideia, a primeira geração de historiadores pós século XIX desse campo foi composta de pesquisadores com atuação na primeira metade do século XX nos Estados Unidos, como é o caso de Carl Boyer, Howard Eves, Morris Kline, Eric Temple Bell e Sir Thomas Heath. Todos autores de livros que durante muito tempo foram tidos como referências em cursos de história da matemática, e todos professores de matemática interessados em história. Essa formação entre aqueles que pesquisavam essa área não era incomum. Durante muito tempo, a história da matemática foi escrita por matemáticos e para matemáticos, seguindo padrões específicos entre eles, conforme se lê em Grabiner:

The history of mathematics as written by mathematicians tends to be technical, to focus on the content of specific papers. It is written on a high mathematical level, and deals with significant mathematics. The title of E.T. Bell's *The Development of Mathematics* reflects the mathematician's view. The mathematician looks at the development of mathematics, as the result of chronologically and logically connected series of papers; he does not look at it as the work of people living in considerably different historical settings. (GRABINER, 1981, p. 439).

Em seu artigo *The History of Modern Mathematics – Writing and Rewriting* (2004), Leo Corry discute quem produz a escrita da história da matemática e para quem ela é voltada. Segundo o autor, “In the not-too-distant past, the history of mathematics was mostly written by mathematicians, and mostly in the purest tradition of Whig-History” (CORRY, 2004, p.5). O termo *whig-History* é um epíteto desqualificador. No contexto da história das ciências, se refere à forma de fazer história sob a ótica dos vencedores, como “a tentativa de apresentar o presente como uma progressão inevitável que culmina com as formas contemporâneas de se fazer ciência” (ROQUE, 2012, p. 28). Ele cita exemplos disso com o grupo Bourbaki e, particularmente Jean Dieudonné e Van der Waerden, ambos matemáticos que escreveram sobre história da matemática na primeira metade do século XX. A partir da segunda metade desse mesmo século, a profissionalização do historiador da matemática trouxe novos ganhos historiográficos para esse campo. A criação de revistas e periódicos específicos para a área, como a *Historia Mathematica* e a *Revue d'Histoire de Mathématiques*, também se inserem no bojo desses ganhos. Com novas metodologias trazidas da história, os trabalhos então escritos pelos historiadores da matemática da primeira geração começaram a ser contestados, em particular, em história da matemática antiga. Em 1975, Unguru Sabetai escreveu um artigo chamado *On the Need To Rewrite the History of Greek Mathematics*, no qual apontava a necessidade de se reescrever a história da matemática grega de acordo com novos padrões, conforme podemos ler em Corry:

[...] Unguru asserted that rewriting the history of Greek mathematics would necessitate, first of all, an adequate reading and understanding of the relevant ideas in the proper historical context in which they arose, developed, and were spread, rather than a retranslation of them into contemporary notions and conceptions. (CORRY, 2004, p.5)

O artigo de Sabetai representa um de uma série de releituras críticas dessas interpretações dos primeiros historiadores da matemática, todas surgidas por volta da década de 1970, período no qual o lançamento da revista *Historia Mathematica*, em 1974, impulsionou o trabalho de diversos historiadores da área. O livro de Wilbur Knorr, historiador da ciência que trabalhou nos Estados Unidos e que se dedicou à história da matemática, também pode ser citado nesse contexto: *The Evolution of the Euclidean*

Elements, sua tese de doutorado lançada em 1975, na qual, já na introdução, o autor declara que o conteúdo do trabalho “will either alter or set in a new light virtually every standard thesis about the fourth-century Greek geometry” (KNORR, 1985, p.1). Tatiana Roque, em seu livro *História da Matemática – uma visão crítica, desvendando mitos e lendas*, também menciona esse período da década de 1970 e fala particularmente das releituras críticas e da escrita da história da matemática, como se pode ver no seguinte fragmento

No caso da matemática antiga, principalmente, passou a ser determinante uma maior atenção ao exame textual das evidências, não só matemáticas, mas de outras manifestações que pudessem ajudar na compreensão da época estudada. Os trabalhos inovadores de Jöran Friberg, Jens Hoyrup e Eleanor Robson, nos anos 1980 e 1990, transformaram de modo irreversível a imagem da matemática mesopotâmica, antes estudada por meio de reconstruções anacrônicas. (ROQUE, 2012, p. 481).

Ou seja, o último quarto de século marcou um período de grandes mudanças na historiografia da matemática. Além de seu reconhecimento como uma área autônoma de pesquisa em história das ciências e a criação de novos periódicos e revistas, a noção do seu fazer histórico também se modificou. Particularmente, muitos trabalhos em história antiga já foram refeitos e, de acordo com Corry, os trabalhos sobre os séculos mais recentes precisam ser reescritos com essa nova perspectiva.

1.4 A linha do tempo usada para a representação da história da matemática, a partir de uma nova perspectiva historiográfica

Quase todo livro de história da matemática possui algum tipo de linha do tempo. Elas são frequentemente introduzidas para organizar, dentro de períodos de tempo estabelecidos por historiadores, *quando* e *onde* determinadas práticas matemáticas se deram ou se desenvolveram. Tais representações, ainda que possamos eleger críticas a elas, ajudam a situar panoramicamente o fluxo das informações. Mas a ideia de “linha” pressupõe continuidade, um evento que se segue logo após o outro. Dificilmente alguém olharia para ela de forma a questionar a continuidade dos eventos ali apresentados, embora, do ponto de vista historiográfico, essa continuidade das práticas matemáticas seja um problema difícil de se resolver. Mesmo com suas limitações, as “linhas” do tempo são objetos bastante úteis, com ampla utilização entre historiadores. Esse trabalho buscará aproveitar esse conceito, tentando dialogar com a nova historiografia da matemática.

Diante dessa nova maneira de enxergar a matemática através de padrões historiográficos mais rigorosos, propomos uma linha do tempo que terá como objetivo representar

a história da matemática segundo essa nova perspectiva. Quando falamos em “linha”, é preciso esclarecer que não estamos necessariamente falando da “linha reta orientada”, mas de uma noção mais ampla que se insere no contexto das representações colocadas por Grafton e que foram abordadas logo no começo desse capítulo. Isso não significa que esse formato - “linha reta orientada” - não será, em momento algum, aproveitado, mas, sim, que a representação do tempo não se encerrará apenas nele.

Nossa “linha” do tempo será um objeto dinâmico, no sentido de tentar dar conta de algumas das limitações encontradas pela linha do tempo em formato de linha reta orientada, como é o caso, por exemplo, da representação das simultaneidades. Outra delas é a possibilidade de se visualizar as relações entre pessoas e instituições; as relações entre as publicações e as instituições, enfim, tudo o que se insere na tentativa de representar um número muito grande de dados e a forma como eles guardam relações entre si, o que é particularmente interessante para períodos mais recentes da história, como é o caso do século XIX.

Segundo Grafton, as representações do tempo dialogam com a mentalidade de um povo, mas também com os recursos existentes em sua época. Assim, é possível ver um matiz bastante variado de materiais através dos quais linhas do tempo eram moldadas. A inserção de novas técnicas gráficas, por exemplo, embelezou as linhas do tempo, dando-lhes formas diferentes das conhecidas Crônicas de Eusébio da Idade Média. Em nosso caso não é diferente: utilizaremos o ferramental disponível em nossa época para atacar problemas da representação do tempo. As técnicas modernas de mineração de dados nos permitirão analisar uma quantidade muito grande deles e organizá-los de forma intuitiva; a internet permitirá a divulgação desse material, bem como a possibilidade de torná-lo interativo, mormente se a linha do tempo puder ser transformada em uma plataforma alimentada pela contribuição de historiadores da matemática. Algoritmos de inteligência artificial poderão ser implementados, instruindo as máquinas a conectar e encontrar caminhos invisíveis em um mar de imensidão aos olhos nus. Falando em linguagem mais matemática, a nossa “linha” do tempo será um grafo do tempo.

Figura 4 – Imagem ilustrativa de *big data*



Fonte: <https://tinyurl.com/jygvoek>

2 Uma nova imagem do tempo na história da matemática

O objetivo central deste capítulo é exibir o conceito de linha do tempo que defendemos para uma nova representação da história da matemática. Ao longo dele, introduziremos algumas seções, todas elas com o intuito de conduzir o leitor pelo caminho que pretendemos seguir para fundamentar as nossas escolhas. Com essas seções, pretendemos conectar alguns temas: a) A tendência de visualização de informações em história das ciências que, de uns tempos pra cá, vem desenvolvendo teorias e ferramentas novas, buscando sua autonomia enquanto área de pesquisa; b) De que maneira isso se encaixa com a nossa proposta de desenvolver um novo conceito de linha de tempo, que dialogue com a nova forma de se ver a história da matemática; c) Como a quantidade de dados de que dispomos em séculos mais recentes, por exemplo, o XIX, dialoga com essa tendência de representação da história da ciência.

As seções estão organizadas da seguinte maneira:

Na seção 2.1, falaremos sobre a nova tendência de visualização em história das ciências. Nela, exporemos que, com o advento de um número muito grande de dados e da nossa capacidade tecnológica de armazená-los, avaliar informações deixou de ser uma atividade simples e passou a ser uma atividade bastante complexa. Fazer a conexão entre um conjunto grande de dados, avaliá-los e, por fim, pensar em maneiras de apresentá-los de forma inteligível tornou-se objeto de estudo de uma área nova, que ainda tateia sua autonomia no campo científico e já possui alguns pesquisadores.

Na seção 2.2, apresentaremos a forma de organização da nossa linha do tempo, que será feita através de problemas historiográficos. Utilizaremos o artigo “Sobre a noção de problema” de Tatiana Roque, para discutir as diferentes concepções de problema e para apresentar aquela que norteará a organização da nossa linha.

Na seção 2.3, falaremos um pouco sobre a noção de problema que mencionamos no conceito de linha.

Da seção 2.4 em diante, apresentaremos dois problemas historiográficos do século XIX: o problema do livro de análise de Cauchy, publicado em 1821 e o problema da dualidade em geometria do século XIX. A partir de informações de trabalhos recentes de historiadores da matemática, justificaremos as escolhas dos elementos envolvidos na nossa representação. Os principais elementos são: as pessoas, as instituições, as publicações e os conceitos. Esta seção é introdutória para o capítulo 3, que buscará construir um protótipo de linha do tempo que represente a história desses dois problemas.

2.1 Visualização e representação¹ na história das ciências

Imagine uma tabela contendo uma quantidade muito grande de linhas e colunas. Em cada uma dessas linhas e colunas, datas, informações sobre a temperatura de um determinado dia do ano. Acrescente a isso listas de acontecimentos, descrições e comentários sobre cada um desses itens. pessoas envolvidas, datas de nascimento, uma biografia completa sobre uma personagem importante, nomes de livros e seus autores e até mesmo um glossário sobre todas as capas e edições desses livros. Diante desse número tão grande de informações, parece óbvia a dificuldade de visualizar as conexões entre os diferentes elementos.

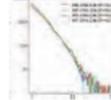
No entanto, de forma mais rudimentar ou mais sofisticada, as tabelas estiveram presentes na forma de organizarmos as informações. Até mesmo hoje, quando elas deixam de ser instrumentos materiais, impressos em livros em formato de códex, e passam a figurar como estruturas digitalizadas, sob a forma de bases de dados que podem ser consultadas por mecanismos tecnológicos, elas ainda se mantêm úteis. Mas da mesma forma que dispor as informações em uma tabela é um trabalho complexo, mesmo quando não precisamos mais pensar tanto no problema da capacidade de armazenamento nem na mão ou no tempo do escriba que irá preenchê-las, é um trabalho igualmente complexo encontrar um mecanismo para visualizar essas informações ali dispostas. Recentemente as tecnologias de nosso tempo têm sido usadas para representar e visualizar resultados de pesquisas científicas. Mas por que esse esforço de representação para a visualização seria importante? Não basta apenas o resultado científico? Não basta apenas ler? Para que visualizar? Tentaremos deixar isso claro através de uma analogia com o nosso cotidiano. Observemos a imensa quantidade de dados com os quais lidamos diariamente: centenas de notícias no jornal, informações sobre a bolsa de valores, índices econômicos, uma quantidade gigantesca de e-mails, *twitters*, postagens em redes sociais, etc. Um número tão expressivo de informações que seria humanamente impossível nos mantermos atualizados a cada segundo. O papel da representação para a visualização é deixar claro, intuitivo, é tornar compreensível, palpável essa quantidade enorme de informações que, olhadas de fora, poderiam ser confusas e, aparentemente desconexas.

A especialista Katy Börner, pesquisadora do MIT, em seu livro *Visual Insights: a Practical Guide to Make Sense of Data*, compara as técnicas de visualização de dados à forma como a ciência agrupa e classifica os elementos de conjuntos, desde à taxonomia até os elementos da tabela periódica. Ela destaca vários níveis e tipos de análise, dependendo da quantidade de dados com os quais se esteja lidando. Há os níveis micro, meso e macro,

¹Gostaríamos de deixar clara a distinção que fazemos entre os termos *representação* e *visualização*. Uma *representação*, aqui, será entendida como qualquer diagrama que tenha por objetivo apresentar graficamente um determinado conteúdo, em particular, aqui neste trabalho, a história. Assim, por exemplo, uma linha do tempo da história da matemática é uma representação. A palavra *visualização*, por sua vez, é utilizada para se referir ao ato de visualizar a representação. Em outras palavras, a “representação” tem a ver com o diagrama e a “visualização” com o ato de ver esse diagrama.

cada qual com sua faixa numérica. O nível micro consiste de um conjunto pequeno de dados, entre 1 e 100 entradas; o nível meso, entre 101 e 10000 entradas e, o nível macro, que são dados acima de 10000 entradas. Cada uma dessas categorias pode ser analisada de cinco maneiras distintas: temporal, geoespacial, tópica, *tree data* e *network data*². Os três primeiros objetivando responder às perguntas: Quando? Onde? O quê? E os dois últimos, à pergunta: Com quem? Ao longo do livro, a autora discute, apresentando exemplos de representações, uma série de conceitos e questões geradas na visualização de dados. Em geral, os trabalhos de representação para a visualização de dados servem para dar suporte à tomada de decisão, seja no âmbito político, econômico ou até mesmo nas análises urbanas, mas seu uso pode ser amplificado, chegando ao domínio das ciências biológicas. Abaixo, mostramos uma tabela que pode ser encontrada em BÖRNER (2014), que exemplifica e organiza os tipos de análise e os níveis de análise:

Figura 5 – Tipos de análise versus Níveis de análise

	● Micro/Individual (1=100 records)	● Meso/Local (101=10,000 records)	● Macro/Global (10,000+ records)
Statistical Analysis/Profiling	Individual person and the number of publications, patents, grants	Expertise profiles of larger labs, centers, universities, research domains, or states	All of NSF, all of USA, all of science statistics 
Temporal Analysis (When) 	Evolving funding portfolio of one individual	Mapping topic bursts in 20 years of PNAS 	113 years of physics research 
Geospatial Analysis (Where) 	Career trajectory of one individual	Mapping a state's intellectual landscape 	International collaboration and citation networks 
Topical Analysis (What) 	Base knowledge from which one publication draws	Mapping topic bursts in 20 years of PNAS 	113 years of physics research 
Network Analysis (With Whom) 	NSF Co-PI network of one individual 	Co-author networks 	World-wide collaborations by the Chinese Academy of Sciences 

Fonte: BÖRNER, 2014, p. 7

É possível encontrar, no livro *Atlas of Knowledge* da mesma autora, alguns trabalhos interessantes. Um deles é o *Tree of Life*, uma plataforma de contribuição na internet voltada

²Estas categorias podem ser encontradas ao longo do livro BÖRNER (2014). Nesse livro, há 5 capítulos sobre elas. Optamos por deixar os termos *tree data* e *network data* no original em Inglês.

para visualizar uma “árvore” de espécies cujas sequências genéticas já foram completamente mapeadas. Outro, *The Human Connectome*, mostra as intrincadas conexões entre diferentes áreas do cérebro que puderam ser mapeadas graças ao desenvolvimento de um método de dissecação que permite rastrear as sinapses dos neurônios. Outro trabalho constrói uma rede complexa das doenças humanas, o *Diseasome, The Human Disease Network*.

Ao folhear o livro, temos a impressão de que é possível pensar em representações para praticamente todas as áreas do conhecimento. A ciência e a tecnologia não deixam de fazer parte dessa tendência de representação. Esse novo campo, que ainda procura sua autonomia entre as áreas de pesquisa, tem ganhado muita visibilidade com a melhora nas ferramentas desenvolvidas para tratar muitos dados. Recentemente, em 2017, ocorreu o *International Congress of History of Science and Technology*, no Rio de Janeiro. O simpósio intitulado *Visualization as a Historiographic Tool for Historians of Science & Technology*, organizado pelos pesquisadores Klaus Hentschel, da Universidade de Stuttgart e Yves Gingras, da Universidade de Québec, reuniu diversos trabalhos com diagramas de representação e ocasionou uma série de debates sobre os objetivos da visualização em ciência e tecnologia. BÖRNER (2004) fala sobre o termo “*mapping knowledge domains*” para descrever essa área da ciência que se ocupa de criar representações para os dados, aplicando técnicas de *data mining*, algoritmos de ordenação, etc. Ainda segundo ela, as técnicas de mineração de dados com o objetivo de tratar a informação se tornam ainda mais úteis quando proporcionam o acesso e a clarificação de pesquisas a um público não especialista, pois, muitas vezes, os resultados de determinados estudos são apenas compreendidos por profissionais específicos da área, como podemos ler abaixo

The changes that are taking place profoundly affect the way we access and use information. Scientists, academics, and librarians have historically worked hard to codify, classify, and organize knowledge, thereby making it usefull and acessible. [...] the new analysis techniques that are being developed to process extremely large databases give promise of revealing implicit knowledge that is presently known only to domain experts, and then only partially. (SHIFFRIN and BÖRNER, 2004, p.5183)

Assim, a representação tem um papel que vai além do alegórico: ela tem o potencial de popularizar, levar ao público, disseminar e, por que não dizer, de ensinar. No que diz respeito à ciência, isso é bastante valioso, uma vez que os domínios científicos, mais especificamente as ciências ditas exatas, muitas vezes parecem não dialogar com outros segmentos da sociedade que não os próprios especialistas.

Aproveitando a tendência da visualização na história da ciência, o trabalho que propomos sugere a aplicação dessas técnicas para a história da matemática, com o objetivo central de dar a ela uma visualização condizente com o seu locus conquistado nas últimas

décadas. Uma linha do tempo organizada em grafos, desconstruindo a linearidade da história e conectando diversos elementos, passa a ser o nosso molde de representação, do qual trataremos melhor na próxima seção.

2.2 Organização da história da matemática através de problemas

Organizar a história não é um trabalho simples, mais ainda se nossa proposta tem como objetivo apresentá-la graficamente. A organização através de diagramas pressupõe uma série de escolhas: quais serão os critérios considerados relevantes para o nosso relato? Por que eles são importantes? Como eles serão representados? A partir de que perspectiva? O que nossa representação busca representar? Cada resposta a essas perguntas determina um rumo distinto, uma diferente configuração que, certamente, terá impacto na concepção final de nossa linha do tempo.

Optamos por organizar a linha do tempo por meio de problemas historiográficos. Mas por que organizar a linha do tempo dessa maneira? Segundo o enfoque recente dado pela nova historiografia da ciência, a matemática deve ser vista como uma construção dinâmica, um processo de troca cultural entre vários povos que se movimenta ao longo do tempo e se alimenta pela enunciação de problemas e pela solução ou tentativa de solução deles. Lembramos que quando falamos de problemas, neste caso, não estamos nos referindo a problemas de matemática, nem a problemas exercícios do tipo “encontrar a solução de $3x - 9 = 3$ ” ou “determinar o valor de x , em que x representa a hipotenusa de um triângulo cujos catetos medem 3 e 4 unidades”. Esses “problemas” circunscrevem uma categoria na qual a pergunta colocada só tem sentido se se sabe previamente a resposta e se quer avaliar o conhecimento de outra pessoa, atribuindo valores de “certo” ou “errado”, em função do que se declara como resposta, ou seja, o problema se encerra quando sua resposta é conhecida. Em “Sobre a Noção de Problema”, Tatiana Roque traça um panorama das diferentes noções de problema desde a Grécia antiga aos tempos atuais. Segundo a autora, não constitui um verdadeiro problema a pergunta para a qual já se tem uma resposta, pois um problema de fato não se encerra em sua solução: sua solução é apenas uma de suas várias possibilidades; um verdadeiro problema é capaz de colocar novas perguntas, ou seja, é capaz de mover. Pode até mesmo permanecer sem solução “porque prescinde dela e porque constitui a própria gênese do conhecimento e não a ausência dele” (ROQUE, 2002, p.142). “Um problema nunca se deixa esgotar pela sua solução” (ROQUE, 2002, p.142), é a força motriz, um impulso para novas perguntas, para o desenvolvimento de novos conceitos, de novas teorias, de novas especulações.

Escolhemos dois problemas, que entendemos como **problemas** no sentido discutido anteriormente, para servirem de exemplo em nossa discussão e representação na linha do tempo: o da dualidade em geometria do século XIX e o do livro de análise Cauchy,

publicado em 1821. A seguir, justificaremos por que entendemos que esses problemas são considerados como tal enquanto a definição posta no parágrafo anterior.

O livro *Cours d'Analyse*, de Cauchy, representa um marco na história da análise moderna. A estrutura do que viria ser estudado em análise no século XX até os dias de hoje já se encontra esboçada na organização proposta por Cauchy. O livro tanto apresenta conceitos matemáticos quanto faz gerar conceitos historiográficos, a partir dos estudos de historiadores da matemática³. Esses conceitos matemáticos, ainda que não da mesma forma concebida por Cauchy, prevalecem na matemática até os dias de hoje, sob uma nova roupagem e suas histórias são ainda objeto de debate de muitos historiadores da ciência. Nesse sentido, entendemos que o livro de Cauchy é um problema historiográfico que é capaz de *mover*, de *gerar* novas questões e novos problemas. A publicação do livro ainda envolve uma série de conexões e articulações entre pessoas e instituições no século XIX, o que justifica, também, a escolha, uma vez que nossa linha se propõe a representar essa dinâmica.

O *problema da dualidade em geometria* apresenta desdobramentos historiográficos e matemáticos até os dias de hoje. No campo da matemática, é possível ver, em trabalhos de geometria de nossa época, os conceitos geométricos presentes em Poncelet e que chegaram até nós, como é o caso dos termos *reta polar* e *polo*. Uma grande parte dos teoremas de dualidade e presentes no trabalho desses geômetras fazem parte do escopo de cursos introdutórios de geometria na graduação. Não podemos esquecer, também, das publicações que atuaram enquanto *locus* dos debates em torno dessa geometria dos teoremas duplos. Eles foram periódicos importantes, até hoje objeto de estudo de historiadores da matemática. Esse conjunto de elementos dá ao problema da dualidade um *status* de problema sob a perspectiva apresentada. Ele constitui uma grande questão, uma vez que faz gerar novos temas, novos problemas e fomenta novos debates.

Um problema historiográfico, então, será o ponto de partida para a nossa organização; circunscritos a ele, estarão as relações estabelecidas entre as pessoas, as instituições, os nascimentos de novos conceitos, novas questões, novos problemas, etc.

2.3 O problema do livro *Cours d'Analyse* de Cauchy e o problema da Dualidade em Geometria

De todos os períodos da história da matemática elencados pelos historiadores contemporâneos, nosso foco central para a linha do tempo que apresentaremos neste

³Aqui, falamos de conceitos matemáticos presentes no livro de Cauchy, como o conceito de limites e de continuidade, como também falamos de conceitos historiográficos, como a nova arquitetura da análise, o rigor na matemática, que não estão presentes no livro do Cauchy, mas que foram criados por historiadores da matemática para o entedimento de sua obra e da matemática do século XIX.

trabalho será o século XIX. E, quando falamos em século XIX e de uma tentativa de sua representação, não estamos pretendendo abarcar toda a imensa quantidade de problemas e questões decorrentes desse século na matemática, mas de dois problemas em particular, que entenderemos como problemas no sentido já discutido na seção 1.3: o problema do livro de análise de Cauchy, publicado em 1821; e o problema da dualidade em geometria, que também se insere no contexto da primeira metade do século XIX. Há algumas razões para escolhermos o século XIX e, em particular, esses dois problemas para serem representados em nossa linha do tempo.

No século XIX ocorre o início da profissionalização da carreira de pesquisador/professor de matemática. Isso permitiu, de certa forma, a dedicação completa dos matemáticos à pesquisa e ao ensino, um dos fatores decisivos para a disseminação da pesquisa em matemática e para a busca de maneiras de apresentar o conteúdo matemático especializado para um público leigo, ou seja, os alunos das instituições de ensino. É também do século XIX o florescimento das instituições que representariam um locus para os matemáticos profissionais da época, sendo a *École Polytechnique* sua principal representante para o período, tendo servido como um dos principais atores nas diretrizes científicas e educacionais do começo de século. Os periódicos especializados em matemática também começam a circular no século XIX. Neles, haverá um novo lugar para os debates e para a produção da matemática, além de disputas entre os protagonistas de escolas e concepções distintas do fazer matemático. Os problemas que buscaremos representar na nossa linha do tempo são produtos dessa conexão histórica entre pessoas, instituições e publicações do século XIX. Tanto o livro de análise de Cauchy quanto o problema da dualidade em geometria foram possíveis devido aos fatores conjunturais especificados acima.

O século XIX é comumente conhecido na historiografia da matemática como “a idade do rigor”. Nele, a noção de rigor passa a tomar uma forma distinta daquela existente no século XVIII e começa se aproximar do rigor que hoje praticamos. Schubring (2005) pontua que as mudanças nos padrões de rigor podem ser observadas a partir de uma série de conceitos que fundamentam o movimento de algebrização da análise, como é o caso, por exemplo, dos conceitos de limite, continuidade e convergência. Nesse contexto, o livro de Cauchy, *Cours d'Analyse*, poderia ser visto como um marco paradigmático na introdução dessa nova maneira de tratar o cálculo infinitesimal, daí sua importância para a história da análise. Além disso, o livro de Cauchy surge em um período de turbulência política na França do século XIX, com a participação de diversos atores distintos, incluindo instituições, como é o caso da *École Polytechnique*. Dentro do contexto que buscamos representar, a história da matemática não pode ser vista separadamente desses fenômenos que ocorrem subjacentes à sua época. Nesse sentido, consideramos o problema do livro de Cauchy como um bom representante da comunhão de diversos fatores: políticos, institucionais, sociais, etc.

Ao mesmo tempo, no cenário da geometria francesa do início do século XIX, os periódicos se tornavam espaços de troca, disputa e construção do conhecimento entre os geômetras dessa época. A partir de 1810, ao longo de 22 anos, circulou mensalmente o jornal intitulado *Annales de Mathématique Pures et Appliquées*, no qual diversos autores elaboraram métodos, teorias, princípios, etc., que buscavam explicar um estranho fenômeno: a “geometria dos teoremas duplos”. De maneira resumida, entenderemos por “dualidade em geometria” um fenômeno em que um enunciado, de um teorema, ou propriedade geométrica, podia ser associado a outro muito semelhante, trocando apenas algumas palavras. Por exemplo, “por dois pontos distintos passa uma única reta” e “duas retas distintas determinam um único ponto”.

Nesses periódicos, podemos encontrar termos que foram introduzidos à época e que desde então fazem parte do jargão dos geômetras, como reciprocidade polar e dualidade. Também nessas publicações floresceu uma geometria algebrizada, baseada em técnicas de abreviação e de combinações de polinômios, que davam lugar a elegantes demonstrações de teoremas complicados em geometria. O jornal também se tornou espaço de disputa entre duas formas de se resolver problemas geométricos, protagonizadas por duas correntes em disputa: sintéticos versus analíticos. A importância desses periódicos na construção da geometria do século XIX é tamanha que nos sugere a introdução deles como atores de nossa linha do tempo, uma vez que é difícil pensar a história da geometria sem eles.

Do ponto de vista técnico, o século XIX é particularmente interessante porque nele podemos encontrar um número muito grande de dados, o que contrasta com a escassez das fontes, quando falamos de matemática antiga. Para o historiador da matemática produzida na Babilônia, por exemplo, o grande desafio é construir a história a partir de pequenos fragmentos de informação, enquanto que, para o historiador dos séculos recentes, é preciso um crivo cuidadoso para refinar as informações utilizadas. Podemos encontrar em Corry (2004) uma referência a uma declaração de Reviel Netz que apresenta essa linha de pensamento:

“Reviel Netz speaks about the scarcity of sources characteristics of the history of ancient mathematics. The situation for modern mathematics is the opposite, at least in what concerns published material, and this becomes a sharper problem to more advances into the twentieth century: how should one choose from the almost unlimited amount of sources available to us?” (Corry, 2004, p.4)

Diante de um século em que as informações são abundantes, as técnicas modernas de mineração de dados se tornam ferramentas valiosas para a organização e para o crivo delas. A importância do século XIX não se encerra apenas em sua imensidão de dados e na dificuldade de tratá-los e selecioná-los; é também um século sobre o qual ainda se há

muito para escrever e descobrir. Muito já foi escrito sobre a matemática antiga. Como já foi dito em seções anteriores, a história da matemática passou por um período de cristalização enquanto área autônoma da história das ciências. Muitos trabalhos inovadores do período pós década de 1970 contestaram versões das gerações anteriores de historiadores da matemática, sobretudo em história da matemática antiga. e períodos mais recentes ainda precisam ser reescritos, praticamente do zero, como podemos ler em Corry:

“Historians actively engaged in research of topics connected to more recent mathematical fields, are, or have have been, faced – like their colleagues dealing with ancient mathematics – with the need to re-write parts of existing accounts. Unlike ancient mathematics, however, much of the very writing of the history of modern mathematics has yet to be undertaken from scratch, to begin with, and this is currently being done in many directions and from many different and illuminating perspectives.” (CORRY, 2004, p.6)

Nas próximas seções, apresentaremos, de maneira mais detalhada, os problemas que representaremos em nossa linha do tempo. Antes de prosseguirmos com a apresentação desse panorama de alguns assuntos da matemática do século XIX, é importante observar que o tema central desse trabalho é a **construção de uma nova linha do tempo da história da matemática**. Estamos interessados em oferecer uma nova roupagem à visualização da história através de concepções, métodos e ferramentas da nossa época. Sendo assim, esse panorama não serve para esmiuçar detalhadamente a discussão historiográfica a respeito do livro de Cauchy ou da dualidade em geometria. Há bastantes trabalhos, alguns dos quais são mencionados na bibliografia deste, que servirão melhor a esse propósito. Os referidos problemas foram escolhidos para servirem como uma ilustração do que se pretende fazer numa linha do tempo como a proposta por nós.

2.3.1 Mudanças na concepção de rigor

Muitas transformações ocorrem na matemática do século XIX. Todas elas tangenciam, de certa forma, uma questão determinante para o século, que é a mudança do rigor praticado, até então, no século XVIII. O século XVIII, sob forte influência dos métodos do cálculo infinitesimal desenvolvidos por Newton e Leibniz no século XVII, chegaram a vários novos resultados, havendo produzido muito sob a euforia desses métodos infinitesimais. Os matemáticos do século XIX começam a reconhecer que os padrões e métodos estabelecidos no século anterior já não eram suficientes para resolver as questões impostas então. A construção de um novo ideário de rigor, mais característico desse período, parece começar a nascer e, segundo alguns historiadores, teria como ponto máximo de sua realização o livro de análise de Cauchy, publicado em 1821, no qual reunia suas notas de aula para o

curso de análise na *École Polytechnique*, enquanto ocupava o cargo de professor de análise. Como podemos ler em ROQUE (2012):

“[...] no século XIX, a análise matemática adquiriu a forma que reconhecemos, ainda hoje, como válida. O movimento de rigorização pode ser dividido em duas fases: uma francesa, na qual se destaca a figura de Cauchy; e outra alemã”.
(ROQUE, 2012, p. 406)

O livro de Cauchy foi resultado de um entrelace de uma série de fatores. Dentre eles, podemos citar as transformações ocorridas na França e, em particular, na *École Polytechnique*, que passava por várias mudanças de diretrizes curriculares. Tatiana Roque cita a preocupação didática como um dos fatores que contribuíram para a construção do rigor do século XIX, como podemos ler no trecho que se segue:

“[...] a preocupação didática foi decisiva na maneira como Cauchy propôs reorganizar a análise. Segundo ele, ao apresentar seus conceitos básicos para os estudantes, não era possível apelar para o modo como eram entendidos em uso, uma vez que o iniciante não tem experiência para tanto. Sendo assim, não bastava reconhecer que infinitésimos, ou limites, eram fundamentos inadequados para a análise; uma doutrina positiva se fazia necessária. Cauchy dirá então que, para explicitar os fundamentos da análise, é preciso derivar seus resultados em uma ordem coerente. Isso significa isolar os princípios fundamentais da teoria e deduzir deles os teoremas. Em análise, tais princípios serão os conceitos de função, limite, continuidade, convergência, derivação e integração.” (ROQUE, 2012, p.406)

A historiadora da matemática também cita a profissionalização do matemático como fator para a nova arquitetura da análise:

“Outra razão para a crescente incorporação dessa nova arquitetura na análise decorreu da profissionalização da matemática, que levou ao aumento do número de pesquisadores e do montante de trabalhos publicados. Logo, era preciso organizar as contribuições desse mundo expandido de forma inteligível”
(ROQUE, 2012, p. 406)

Essa percepção da necessidade de um novo rigor não é circunscrita somente ao campo da análise matemática, diante das formalizações de noções como continuidade, convergência ou limite já citadas. Há outras transformações em curso, como a noção de número como um objeto matemático desvinculado da noção de quantidade e a reformulação das noções de número e de função em termos de conjuntos, que serão fundamentais e trespassarão todo o século XIX. Ainda de acordo com ROQUE (2012):

“um dos problemas internos a demandar uma nova noção de rigor surgiu da crítica à concepção de números como quantidades. Essa associação, a partir de certo momento, passou a bloquear o desenvolvimento da matemática. A discussão sobre quantidades negativas, durante o século XVIII, mostra que somente os números absolutos eram aceitos, pois se pretendia relacionar a existência em matemática a uma noção qualquer de ‘realidade’. Para avançar, era preciso migrar para um conceito abstrato de número não subordinado à ideia de quantidade”. (ROQUE, 2012, p. 407)

Marca-se, então, o nascimento da matemática pura, que tem a substituição do paradigma das quantidades como sua fundamental mudança. A partir desse século, a matemática passa a se desvincular cada vez mais da física para se tornar uma área autônoma, com problemas inerentes de seu próprio objeto que foi se estabelecendo mais claramente nesse período.

2.3.2 O papel das instituições no desenvolvimento da matemática

O desenvolvimento da matemática do século XIX está intimamente ligado ao papel das instituições. Dentro delas, os matemáticos passam a atuar profissionalmente, sendo remunerados para realizar pesquisas e dar aulas, ocupação que envolve um cuidado maior com a preparação do conteúdo a ser lecionado. O vínculo às instituições também atribui, à matemática e aos matemáticos, papel político e estratégico. O século XIX viu o nascimento e florescimento de inúmeras instituições que serviram de local de produção científica e de trabalho para os matemáticos desse século. Um exemplo disso é a *École Polytechnique*, fundada em 1794 e que acolheria, em seu corpo discente e docente, boa parte de matemáticos destacados da primeira metade do século XIX, como é o caso de Cauchy, Liouville e Poncelet. Bruno Belhoste, historiador contemporâneo da matemática, aponta nessa direção ao falar da *École Polytechnique* na formação dos matemáticos franceses do século XIX: “[...] most French mathematicians in the nineteenth century were trained, and many taught, at the *École Polytechnique*” (BELHOSTE, 2001, p. 16). Nesse período sobre o qual nos propusemos debruçar, a *École Polytechnique* desempenhou papel fundamental, perdendo o seu protagonismo apenas na segunda metade do século XIX, em que o eixo da produção matemática se desloca para Berlim e a escola de Göttingen.

2.3.3 Jornais e periódicos - locais de disputa e visibilidade

No início do século XIX entram em cena novos agentes: os jornais, revistas e periódicos especializados em matemática. Com a profissionalização do matemático, eles ganham impulso, o que pode ser visto no aumento das contribuições e das publicações. O papel dos jornais, revistas e periódicos vai além de efetivamente publicar trabalhos

de matemáticos da época, conferindo-lhes visibilidade: eles passam a servir de “locais” nos quais vigoram discursos científicos e figuram, dentro desse contexto, disputas entre formas de ver a ciência. Muitos matemáticos profissionais, pesquisadores e professores de matemática com interesse em temas de pesquisa participaram ativamente de discussões calorosas que contribuíram para o aparecimento de muitas novas áreas e questões. Nesse “espaço”, havia lugar para quem tivesse interesse em contribuir para questões debatidas à época e, diante desses debates, as pessoas ganhavam visibilidade e passavam a ser conhecidas no meio científico.

Em particular, o mais antigo desses jornais, os *Annales* de Gergonne, torna-se, nas décadas de 1810 e 1820, o principal espaço de debate entre duas visões da geometria. Essas visões surgem na tentativa de resolver problemas colocados à época cujas tentativas de solução antagonizaram correntes de matemáticos que, por um lado, optaram por uma abordagem euclidiana clássica e, por outro, optaram por utilizar sistemas de coordenadas. Esse debate introduziu técnicas e termos que foram absorvidos pela geometria do século XIX e passaram a ser tornar linguagem corrente para os especialistas da geometria.

2.4 O livro de análise de Cauchy

“Cauchy’s work on analysis is generally viewed as the decisive new stage that led the qualitative leap to modern standards of rigor. He is attributed with having worked out the basic concepts of analysis in a way that forms the foundation for modern mathematics.” (SCHUBRING, 2005, p. 427)

O livro *Cours d’Analyse*, escrito por Cauchy no século XIX, pode ser visto como uma confluência de muitos aspectos, que tentamos subdividir nas seções que se seguem. O primeiro deles tem a ver com o fato de o livro de Cauchy estar situado num contexto de mudança nos padrões de rigor da matemática, segundo os quais os métodos desenvolvidos no século XVIII seriam percebidos como insuficientes para resolver as questões colocadas pelo século XIX, sobretudo no que diz respeito à fundamentação da matemática. O livro teria um papel fundamental no desenvolvimento do rigor que temos hoje. Como apontam Schubring e Roque (2016):

“Na historiografia da matemática, o século XIX é apresentado, em geral, como a ‘idade do rigor’. Nessa descrição, o *Cours d’analyse* de Cauchy seria o paradigma do rigor moderno. Por exemplo, dada a importância do conceito de continuidade na obra de Cauchy, Freudenthal afirma: ‘Cauchy invented our notion of continuity’”. (SCHUBRING e ROQUE, 2016, p. xi)

Embora estejamos associando o livro de Cauchy a esse momento específico da história da matemática, é importante não o encerrarmos nele, mas, sim, o vemos como uma das materializações desse movimento. A construção do rigor em matemática é um processo e sua noção pode variar, como veremos mais detalhadamente na próxima seção. Na introdução à tradução do livro de Análise de Cauchy para a língua portuguesa, os mesmos autores alertam para a temporalidade da noção de rigor e a influência do livro *Cours d'Analyse*

“[...] se refletirmos mais detalhadamente sobre o papel da obra de Cauchy no desenvolvimento do rigor em análise, torna-se difícil acreditar que o rigor tenha entrado na matemática de maneira repentina, tendo se estabelecido de uma hora para outra como o padrão definitivo. Judith Grabiner chamou a atenção de matemáticos e de historiadores para a mutabilidade da noção de rigor, propondo o termo ‘time-dependent’ para caracterizar a historicidade dessa noção. Ainda assim, o livro da mesma autora sobre Cauchy enfatiza o *Cours d'analyse* como plena realização do rigor em matemática. Seu objetivo era tão somente evidenciar que o rigor de Cauchy encontra precursores na matemática desenvolvida antes dele”. (SCHUBRING e ROQUE, 2016, p. xi)

Não apenas o aspecto do rigor é importante de ser mencionado. Outro aspecto fundamental é a profissionalização da carreira de matemático, ou seja: a profissão de matemático, no início do século XIX, passa a ser reconhecida e formalizada, e, com isso, os matemáticos passam a ser remunerados para fazer pesquisa e lecionar. Diante disso, foi possível, para Cauchy, dedicar parte do seu tempo à organização de notas de aula que fossem adequadas para um público leigo.

Finalmente, terminamos a seção discorrendo um pouco sobre a presença de Cauchy como professor e como aluno da *École Polytechnique*, entendendo que o livro de Cauchy também é produto da mentalidade institucional desenvolvida no ambiente da *École* nos primeiros anos do século XIX, sobretudo das influências de seus professores à época.

2.4.1 O rigor em análise no século XVIII e o encontro de uma nova concepção de rigor no século XIX

Um dos pontos fundamentais no problema do livro de análise de Cauchy envolve a discussão sobre o rigor no século XIX. Para compreender bem a questão, é preciso olhar para a forma como a matemática se desenvolveu no século XVIII, sobretudo no que diz respeito ao cálculo diferencial. Segundo a historiadora da matemática Judith Grabiner, há dois aspectos diferentes do cálculo – o uso e a justificativa – que são legados de dois momentos históricos distintos: o século XVIII e o século XIX. Os matemáticos

do século XVIII, sob influência de uma nova ferramenta, o cálculo infinitesimal, iniciado por Newton e Leibniz, se ocuparam largamente do uso desse ferramental para a solução de diversos problemas de suas épocas, que envolviam curvas, processos sobre o infinito e sistemas físicos. Tais métodos, desenvolvidos nesse século, acabaram por levar o nome desses matemáticos que os utilizaram, como Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, Taylor. Embora essas ferramentas fossem amplamente utilizadas no século XVIII, o problema relacionado à justificativa, à explicação, à fundamentação delas não era considerado, para a maioria desses matemáticos, um problema em si, como podemos ler em um fragmento de *Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*:

“[...] though not indifferent to rigor, these researchers spent most of their effort developing and applying powerful methods, some of which they could not justify, to solve problems; they did not emphasize the mathematical importance of the foundations of the calculus and did not really see foundations as an important area of mathematical endeavor” (GRABINER, 1981, p. 2)

Através do exame de publicações ocorridas em algumas revistas no século XVIII, sobretudo na França e na Alemanha, a mesma historiadora conclui que praticamente não há artigos cuja preocupação central seja a fundamentação do cálculo diferencial. Os artigos, que versam sobre alguns temas entre física matemática, astronomia, estatística e probabilidades, trazem uso de manipulação algébrica juntamente com saberes de análise previamente conhecidos. No entanto, é possível apontar nos trabalhos de Lagrange no final do século XVIII algum interesse sobre o tema. Lagrange servirá de influência para a noção de rigor desenvolvida no livro de Cauchy.

As discussões ocorridas nestas publicações também tiveram sua participação na concepção do livro de Cauchy, como nos ensina GRABINER (1981):

“In trying to decide what sort of functions solved the differential equation for the vibrating string, vigorous opinions were expressed over which functions were admissible in analysis. This debate, which involved d’Alembert, Euler, Lagrange, and Daniel Bernoulli among others, had some influence on the Cauchy-Bolzano definition of continuous function, and probably also on Cauchy’s concept of integral”. (GRABINER, 1981, p. 21)

O problema das cordas vibrantes trata das vibrações infinitamente pequenas de uma corda presa em suas extremidades. Segundo o historiador Gert Schubring, esse problema é um dos principais atores no desenvolvimento do conceito de continuidade durante o século XVIII.

“Indubitably, the development of the concept of continuity is tied both to the formation of the concepts of variable and function, and to advances in the study of large classes of curves. Indeed, considerable progress was made only by the middle of the eighteenth century, due to the debates about the equation of the vibrating string, and in particular, to Euler’s contributions”, (SCHUBRING, 2005, p. 26)

O movimento de algebrização da análise encontra seu ancoramento nas práticas matemáticas do século XVIII. É de comum acordo entre os historiadores da matemática que esse século é marcado por um forte movimento de algebrização da análise. As técnicas de manipulação dos infinitamente pequenos trouxeram muitos resultados práticos para a matemática do período e influenciaram boa parte dos matemáticos do início do século XIX.

No entanto, esse movimento começa a perder a sua força no início do século XIX, no qual os métodos sintéticos passam a ser novamente valorizados. Tatiana Roque nos relata:

“[...] o movimento de algebrização da análise marcou a matemática francesa do século XVIII. Mas por volta de 1800, iniciou-se uma reação a essa tendência. Os métodos sintéticos voltaram a ser defendidos e o valor atribuído a possibilidade de generalização fornecida pela álgebra passou a ser criticado em prol de métodos que pudessem ser mais intuitivos.”(ROQUE, 2012, pp. 410-411)

É possível encontrar essa preocupação no livro de Cauchy, que escreve a necessidade de construir uma análise matemática que seja livre das “generalidades da álgebra”, conforme encontramos em uma famosa passagem de seu livro: “Quanto aos métodos, procurei lhes dar todo o rigor que é exigido na geometria, de maneira a jamais recorrer às razões advindas da generalidade da álgebra”(SCHUBRING e ROQUE, 2016, p. xix). Particularmente podemos citar, também, o trecho de um artigo de Umberto Bottazzini que também levanta essa análise:

“In contrast to an alledgedly loose treatment of foundations by eighteenth-century mathematicians, Cauchy’s Cours D’Analyse is commonly held as the source of a modern concept of rigor in mathematical analysis. This image was nourished by Cauchy himself, who claimed that, instead of resorting to the ‘generality of algebra’, ‘geometric rigor’ was needed in analysis.” (BOTTAZZINI, 2001, p.33).

2.4.2 Matemáticos também são professores

A profissionalização do matemático exerceu papel fundamental no desenvolvimento da ciência do século XIX. Através dela, foi possível a dedicação em tempo integral das atividades de pesquisa e de magistério. Isso está por trás tanto do aumento de publicações especializadas na área quanto do interesse na produção de livros textos, voltados para o ensino, uma vez que boa parte desses matemáticos eram responsáveis pela formação de novos alunos.

Se olharmos superficialmente, parece difícil acreditar que a formalização dessa profissão tenha representado alguma mudança impactante na produção científica da matemática, uma vez que temos registros de muitos matemáticos produtivos dos séculos anteriores, como é o caso do século XVII ou do século XVIII; entretanto, tal fenômeno é evidenciado por diversos historiadores da ciência do século XIX. No livro *Social History of Nineteenth Century Mathematics*, escrito na década de 1980, a segunda parte é dedicada ao tema e, sob o título de *The professionalization of Mathematics and Its Educational Context*, reúne artigo de vários historiadores interligando a profissionalização da matemática a outros tópicos.

Segundo Ivo Schneider (1980)

“[...] professionalization has do to with a transition phase in the development of mathematics in Science, at whose end it was possible to pursue Science for its own sake. The transition phase has generally placed in the 19th century, its beginning and duration being set at different times in different countries depending on local political and social conditions” (SCHNEIDER, 1980, p. 75)

Essa profissionalização não ocorre de maneira homogênea, como aponta o próprio autor. O que se entendia por profissional da ciência variava de cultura para cultura, de local para local e, por estas razões, encontrar uma definição precisa de profissional da ciência é um problema difícil. A produção da ciência antes do século XIX era realizada por amadores que, em geral, tinham outras profissões e dedicavam seu tempo livre à investigação científica. O século XIX trouxe um novo grupo, o dos cientistas profissionais, que seriam os responsáveis pelo desenvolvimento da ciência desde então.

Muitos sociólogos, como Magali Sarfatti Larson, dedicaram parte do seu trabalho à compreensão desse processo de profissionalização, apontando-o, inclusive, como uma configuração da desigualdade contemporânea em sociedades capitalistas. Não iremos nos aprofundar nessa discussão, mas mencionaremos alguns detalhes que são relevantes para esse trabalho, como por exemplo, o fato de que, para Larson, o processo de profissionalização e a estrutura de ensino estão intimamente amarrados ao desenvolvimento das universidades e da pesquisa, como podemos ler no artigo de Schneider (1980)

“The essence of the professionalization process, in Larson’s view, is the training of the professional producer, which is indissolubly tied to the development of the universities. The result of this is the ‘monopolization of competence and the demonstration that this competence is superior to others.’” (SCHNEIDER, 1980, p. 78)

“One of the most important aspects of the professionalization process is research, which Ben-David has called perhaps the highest product generated by the professional scientist. [...] Of course, there were mathematical research and forms of professional activity in mathematics in earlier times that influenced positively or negatively the structure of the forms that developed in the nineteenth century. This is especially to be expected in those places where the educational system was taken over relatively unchanged from the 18th to the 19th century” (SCHNEIDER, 1980, p. 78)

Tal visão nos ajuda a fundamentar a importância das instituições e dos projetos políticos educacionais no desenvolvimento da matemática do século XIX.

2.4.3 A trajetória de Cauchy na *École Polytechnique*

Augustin Louis Cauchy foi professor de análise da *École Polytechnique* entre os anos de 1815-1830. Em 1815, substituindo Poinsot como professor de Análise e, em 1816, obtendo uma posição de professor permanente de análise e de mecânica. É importante mencionar que Cauchy também foi aluno da *École* entre os anos de 1805 e 1807. Sylvestre François Lacroix, assistido por André-Marie Ampère, foram seus professores de análise, de sorte que sua formação se deu de acordo com o método dos limites. Esse método tem como concepção que o quociente diferencial é o limite de quociente de diferenças finitas e que, daí em diante, todo processo que envolve o infinito deve ser tratado por meio do finito. Falar sobre as influências que teve na abordagem de seu curso de análise enquanto aluno na *École* ajuda a entender as próprias concepções e crenças de Cauchy quando este retornou à *École Polytechnique* como professor.

Mas antes de desenvolvermos mais sobre Cauchy como professor da *École*, falaremos um pouco sobre sua carreira profissional. De acordo com o que se lê em Schubring, a primeira fase da carreira de Cauchy não foi como cientista, mas como engenheiro. Cauchy trabalhou em alguns projetos de engenharia na França antes de conseguir uma posição de professor na *École Polytechnique*, graças, ainda de acordo com Schubring, em parte, à sua posição política conservadora e ao que se poderia chamar de um catolicismo fundamentalista. Após a Restauração, Cauchy assume em 1815 o posto de professor na *École Polytechnique* e propõe uma reforma no curso de Análise da instituição, conforme se lê em SCHUBRING (2005):

“A reform of the *École* was ordained, and Cauchy was given Poinso’s regular teaching post when it reopened in the fall of 1816. [...] At the *École polytechnique*, his first (de Cauhy) step was to radically reform the program for the analysis course. The 1811 decision to base on the *infiniment petits* was no longer mentioned.” (SCHUBRING, 2005, p. 429)

No entanto, a reforma parece ter durado pouco tempo, em particular, por conta de sua abordagem excessivamente teórica e à mudança de orientação de ensino na *École Polytechnique*. A *École* já vinha progressivamente assumindo uma postura de formadora de engenheiros, para a qual o método dos *infiniment petits* seria mais adequado. O livro de Cauchy está inserido nesse contexto de mudança de orientação de ensino, que podemos ler em ROQUE (2012):

“Em 1811, a orientação da *École* mudou radicalmente voltando-se totalmente para a formação de engenheiros. Decidiu-se que era necessário remover do programa todo conhecimento que não fosse essencial para a prática profissional. Em mecânica, por exemplo, isso significava excluir as partes teóricas; e em análise, onde ocorreu a mudança mais importante, devia-se valorizar o método sintético, substituindo-se o método dos limites pela operação com quantidades infinitamente pequenas” (ROQUE, 2012, p.411)

Do ponto de vista das relações, segundo Grattan-Guinness, Cauchy era uma pessoa “difícil”, tanto entre os colegas de trabalho como entre os alunos. De fato, Cauchy não tivera uma experiência prévia como professor, o que certamente contribuiu para a sua falta de adaptação para o cargo. Em *Convolutions in French Mathematics*, Ivor Grattan-Guinness analisa o panorama da matemática francesa do século XIX e inclui uma seção sobre a experiência de Cauchy como professor da *École Polytechnique*. Nessa seção, podem-se encontrar trechos de documentos que incluem relatos sobre o comportamento de Cauchy, feitos pelo *directeur* da *École* à época. Tais relatos apontam problemas de adaptação às normas da *École*, como atrasos e não cumprimento do número de aulas estabelecido.

“From the start of his teaching Cauchy was proposing changes to the analysis syllabus and increases of its time at the expense of the mechanics lectures to follow; and his ideas provoked tension and dissension among his colleagues. A farcial climax occurred on 12 April 1821, during one of his lectures. [...] lectures were to comprise 30 minutes’ revision followed by an hours’ discourse; but on this occasion, the 65th of his allotted 50 lectures on analysis to the first years, he taught non-stop for 110 minutes; so a few students became restless, made noises and walked out.” (GRATTAN-GUINNESS, 1990, p. 711)

Tais problemas também são apontados em Schubring (2005), em que se lê

“Cauchy did not just lose all influence over the design of the program; he also had to suffer direct interference in his course. This was further aggravated by major educational and disciplinary problems: in his enthusiasm, he not only continued his lessons beyond the set time allocations but also increased the number needed to complete the course” (SCHUBRING, 2005, p.429)

Além disso, para os alunos da época, as aulas de Cauchy eram difíceis de acompanhar. É possível, ainda no estudo de Grattan-Guinness, encontrar um trecho de documento em que há um relato do *directeur* a respeito dos excessos em suas aulas de análise, nas quais “he employed a luxury of analysis without doubt appropriate for papers at the *institut*; but superabundant for the teaching of the Students at this School and even harmful” (GRATTAN-GUINNESS, 1990, p. 712).

De forma resumida, a experiência de Cauchy como professor da *École Polytechnique* parece não ter sido agradável para nenhum dos atores envolvidos, conforme análise de Gert Schubring e de Grattan-Guinness.

2.5 O problema da Dualidade em Geometria

“So Poncelet proclaimed a principle of duality, which said: given a conic, if you replace each line in a figure by its corresponding pole, and each point by its polar line, you obtain a new figure in which concurrent lines are replaced by collinear points and vice versa, and the original theorem becomes a theorem about the new figure on exchanging the words point and line, collinear and concurrent, throughout. (Such pairs of theorems are called dual theorems.)” (GRAY, 2011, p. 53)

Ao lermos o trecho acima, retirado do livro *Worlds out of Nothing*, de Jeremy Gray, talvez não nos espantemos tanto com o vocabulário e as conexões feitas pelo geômetra Poncelet logo no início do século XIX. Afinal, qualquer pessoa interessada e que tenha feito um curso de geometria em nosso tempo deve ter se deparado, ao menos alguma vez, com os conceitos de reta polar, pólo, reciprocidade polar, etc., ainda que de forma indireta. É também sabido de todo estudante de geometria, que dois pontos distintos determinam uma reta e que duas retas distintas e não paralelas determinam um ponto. Esses resultados nos parecem tão elementares que não nos espantamos, mas se passarmos um tempo refletindo sobre essas proposições, veremos que elas são muito parecidas. Podemos obter uma a partir da outra simplesmente trocando as palavras reta por ponto e ponto por reta. Em suas

pesquisas sobre geometrias do século XIX, o historiador da matemática Cleber Haubrichs (2015) nos apresenta um parágrafo introdutório, no qual apresenta essa semelhança:

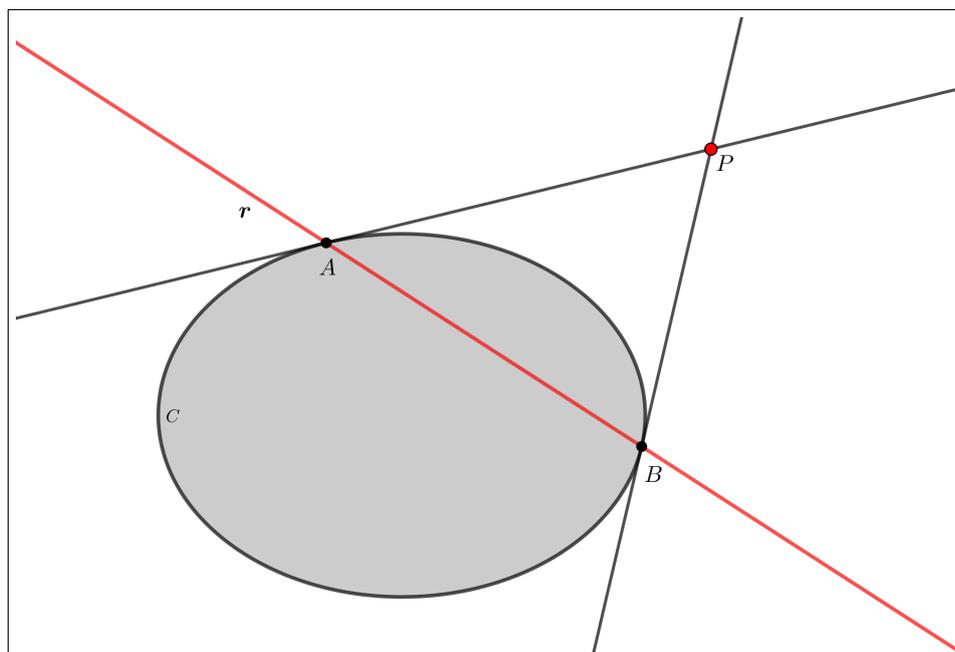
“Em cursos básicos de geometria elementar, estamos acostumados a ouvir (ou a dizer) que ‘dois pontos distintos determinam uma reta’. Mas também é comum se deparar com a proposição que diz que ‘duas retas distintas determinam um ponto’. Desconsiderando provisoriamente o arcabouço matemático que permite que essas duas proposições sejam verdadeiras, e concentrando as atenções no aspecto puramente formal dessas frases, a primeira coisa que se nota é que os enunciados são simétricos entre si. Parece que as duas afirmativas são a cara e a coroa de uma mesma moeda.” (HAUBRICHS, s/d, p. 1)

No início do século XIX, os geômetras, aos poucos, foram percebendo que determinadas proposições da geometria pareciam vir aos pares, conforme descrevemos anteriormente: esse é o início da história da dualidade, um fenômeno que passaria a intrigar os geômetras do século XIX e comporia um momento rico de debates e trocas – além de disputas – entre matemáticos da época, no qual os jornais e periódicos especializados exerceriam um papel fundamental enquanto instrumentos a acolher e recepcionar os textos advindos de diversos autores do século XIX. Atores fundamentais nessa disputa, os geômetras Gergonne e Poncelet buscaram, cada qual com seus próprios princípios, entender esse fenômeno. Poncelet, por exemplo, buscou, em sua teoria das polares recíprocas, apoio em construções geométricas para justificar a dualidade. Para os que ainda não estão habituados, essa teoria constrói, geometricamente, uma correspondência entre retas do plano e pontos do plano por intermédio de uma cônica referência e é feita da seguinte maneira:

Definição 2.5.1. *Dada uma cônica no plano e um ponto P exterior a ela, traçam-se as tangentes à cônica C passando por P , de forma a determinar os pontos A e B , sobre C . A reta r , determinada por A e B , é dita reta polar do ponto P . Reciprocamente, por meio de construção análoga, a reta em questão é levada no ponto P , que é dito pólo da reta determinada por ela. Para o caso em que o ponto P esteja sobre a cônica, é natural definir a reta polar como a reta tangente à cônica naquele ponto.*

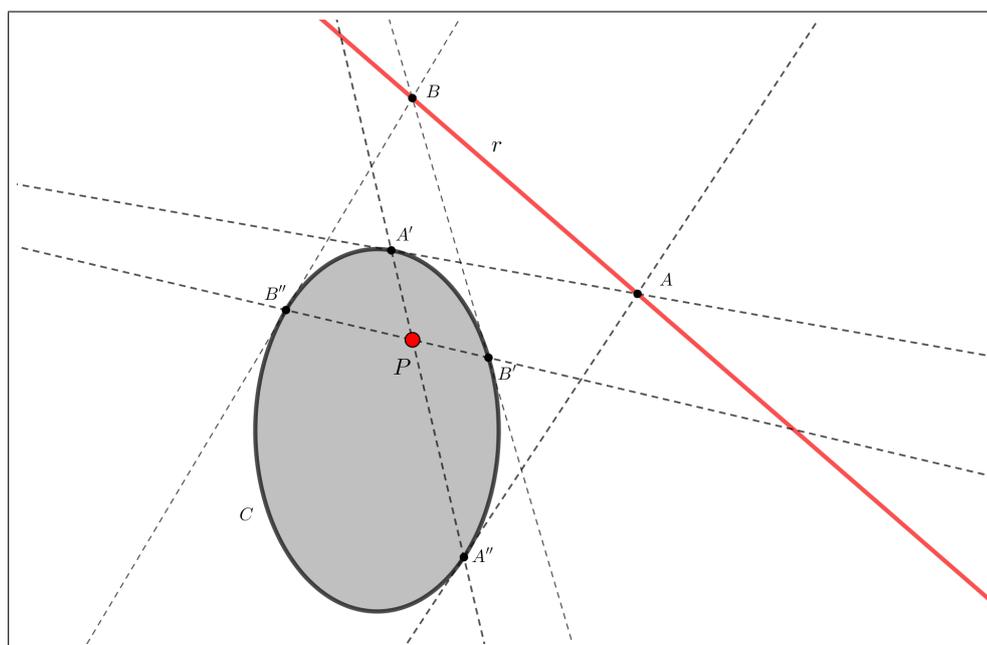
Note que a definição acima contempla apenas o caso em que o ponto é exterior à cônica ou está sobre ela. Para o caso em que o ponto P é interior à cônica, propõe-se a seguinte construção:

Definição 2.5.2. *(caso em que o ponto é interior à cônica): Seja P um ponto interior à cônica C . Traçam-se duas cordas distintas quaisquer que contêm o ponto P . Essas cordas determinam pontos sobre a cônica dada, aos quais chamaremos A' , A'' , B' e B'' . Traçando-se as tangentes à cônica C passando pelos pontos A' e A'' , obteremos o ponto A ;*

Figura 6 – reta polar do ponto P , em relação à cônica C .

Fonte: produção do autor.

fazendo o mesmo com os pontos B' e B'' , obteremos o ponto B , ambos exteriores à cônica dada. A reta determinada pelos pontos em questão é a reta polar do ponto P .

Figura 7 – reta polar do ponto P – no caso em que P é interior à cônica –, em relação à C .

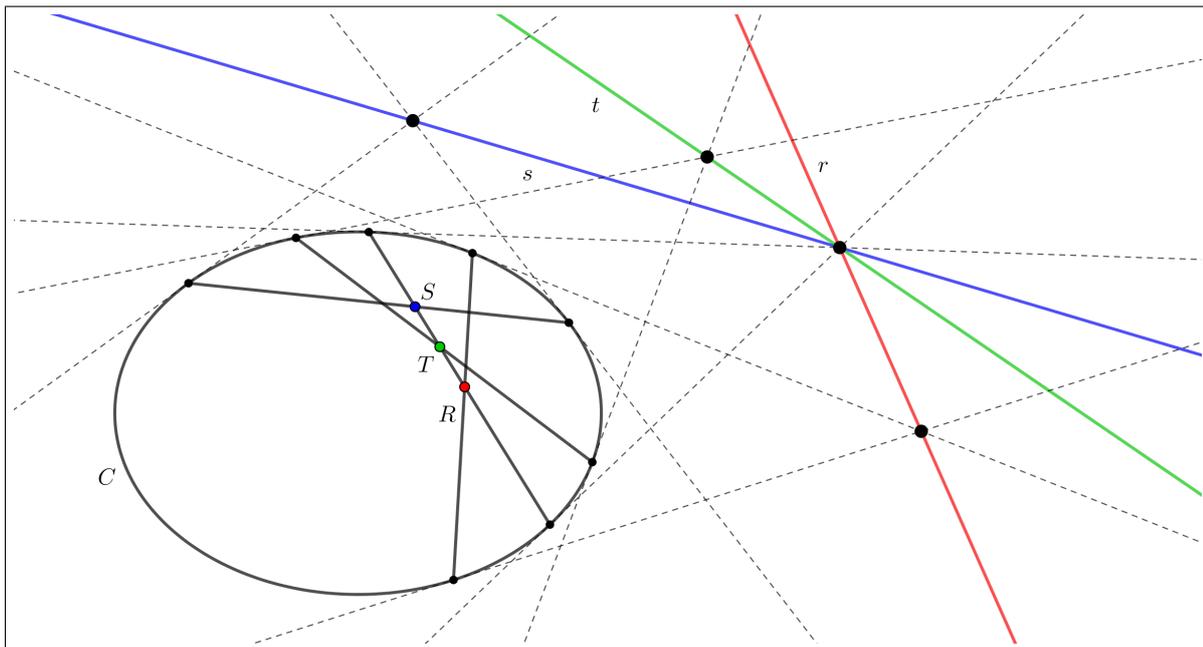
Fonte: produção do autor.

Para admirarmos a beleza que está por trás dessa correspondência, vamos observar a citação com a qual começamos essa seção. Poncelet afirma que podemos visualizar o fenômeno da dualidade através dessa construção e que, em particular, ela preserva

incidências, ou seja: três retas que concorrem em um único ponto são correspondidas aos seus pólos, que são três pontos colineares:

Teorema 2.5.1. *Considere uma cônica C , uma elipse, e três retas concorrentes externas a ela, digamos r , s e t . Por meio da teoria das polares recíprocas, levamos cada uma dessas retas em seu pólo. Obteremos os pontos R , S e T , esses últimos, de fato, colineares.*

Figura 8 – Correspondência entre incidência e colinearidade.



Fonte: produção do autor.

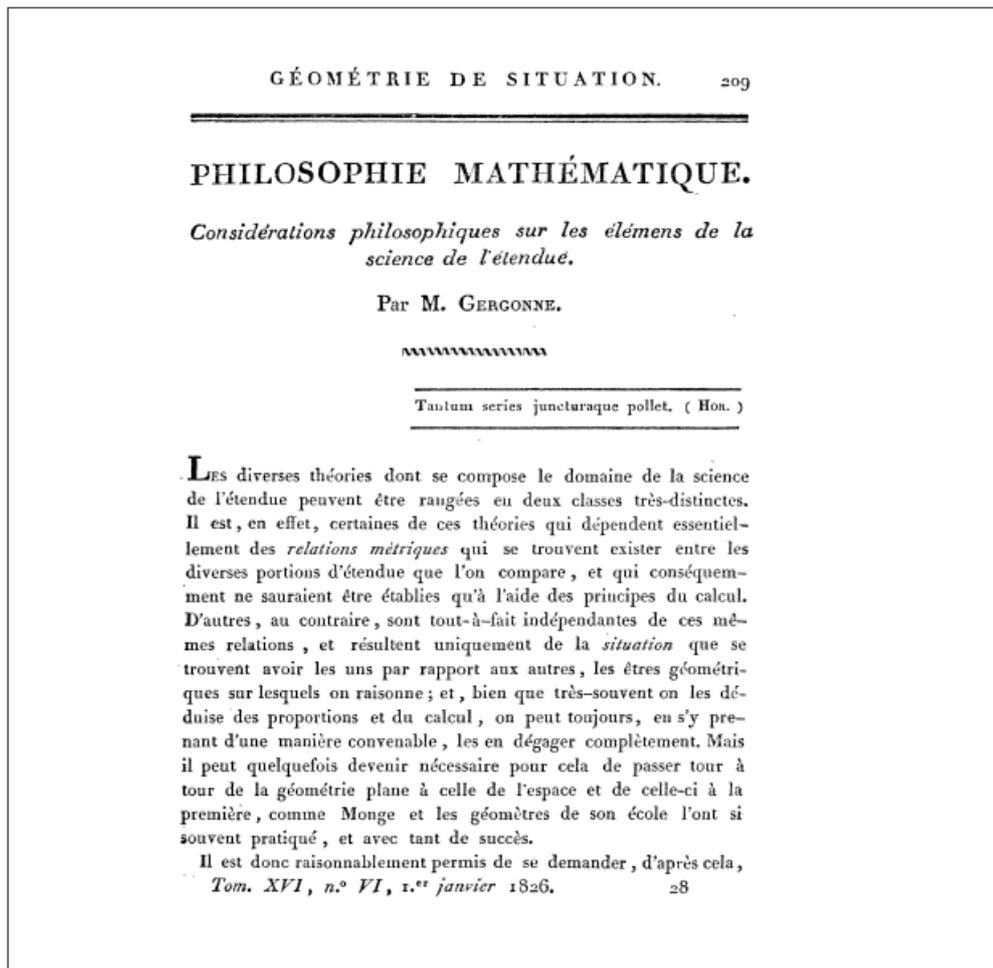
Poncelet procurava justificar a dualidade a partir de construções geométricas que a fundamentassem. Outro geômetra do século XIX também interessado nessa geometria dos teoremas duplos era Gergonne, editor do jornal publicado no início desse século, os *Annales de Mathématique Pures et Appliquées* ou os *Annales de Gergonne*, como ficaram conhecidos. Para ele, a questão da dualidade não era algo que se precisava justificar ou fundamentar com construções geométricas, mas, sim, uma questão de princípio, ou seja, estava inerentemente enraizada na geometria e fazia parte dos seus fundamentos. De fato, essas duas visões distintas de como abordar a dualidade dividiram os matemáticos da época em correntes, como observa Haubrichs:

“Ao abordar esses problemas geométricos [que se referiam à dualidade], alguns optaram por renovar a tradição euclidiana básica, porém, mantendo-se nela. O geômetra mais representativo dessa geometria que se pretende ‘moderna e pura’ é Jean Victor Poncelet (1788-1867). Outros, em contraposição, preferiram investir em construções geométricas subordinadas a sistemas de coordenadas (e conseqüentemente a equações polinomiais). A principal figura a defender

e incentivar essa ‘geometria analítica’ é Joseph Diaz Gergonne (1771-1859) [...]. Outros ainda se engajaram em tentativas de simplificar a manipulação algébrica que sustenta a geometria analítica ou de tentar aproveitar o que havia de melhor nas duas correntes opostas.” (HAUBRICHS, s/d, p. 2)

Embora tenhamos apresentado as visões de Gergonne e de Poncelet de maneira breve, elas foram tema central de um debate que ocorreu nas edições do jornal citado por um período de dois a três anos. Começaremos a nossa história a partir do ano de 1826, no qual, em Janeiro, Gergonne apresenta o texto *Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l’étendue*. Essa publicação marca o início da geometria dita de situação, que surgiu como um objeto e, logo em seguida, foi passada à rubrica editorial. Apresentamos, na figura 4, uma imagem fac-símile desse artigo:

Figura 9 – *fac-símile* do primeiro artigo publicado sob a rubrica *géométrie de situation*.



Fonte: <http://www.numdam.org/>

Nele, segundo Haubrichs, Gergonne tenta definir uma nova geometria “não por dizer o que ela é, mas por dizer o que ela não é” (HAUBRICHS, 2015, p.212) e separa as teorias da geometria em duas categorias distintas: a de *relações métricas* e *relações de situação*.

Ainda segundo Haubrichs, “Gergonne acredita que para criar novas categorias onde encaixar as geometrias, é necessário derrubar as categorias velhas” (HAUBRICHS, 2015, p. 213) referindo-se às categorias de geometria plana e de espacial, que datam da Grécia antiga. Gergonne, ainda nesse mesmo artigo, apresenta outros argumentos para sustentar a não separação entre essas categorias. É particularmente interessante o fragmento de Haubrichs em que ele fala sobre as visões de Gergonne e Poncelet, contrastando-as

“[...] Se, por um lado, a dualidade de Poncelet decorre de uma construção geométrica, por outro, a dualidade de Gergonne é admitida como princípio; ainda que essas duas dualidades comecem iguais: ponto e reta correspondem-se num plano; e ponto e plano, no espaço. A escolha de Gergonne, de não usar a teoria das polares recíprocas como base, parece ser uma forma de reivindicar para seu princípio uma certa generalidade. A outra teoria anteriormente citada (trigonometria esférica), bem como a teoria de seu rival, seriam, então, meros casos particulares de um princípio geral.” (HAUBRICHS, 2015, p.214-215)

Para os interessados em uma discussão mais abrangente sobre o tema, indicamos o trabalho de Haubrichs (2015). O que é importante observar para o trabalho que aqui apresentamos é que o tema da dualidade em geometria chamou a atenção de muitos matemáticos do início do século XIX. A “interessante geometria dos teoremas duplos” parece ter mobilizado uma parte da comunidade matemática, sobretudo nas intenções e pretensões editoriais de Gergonne em utilizar seu jornal como um ambiente propício para a divulgação e para o debate a respeito dessa “nova geometria”. Não somente, diríamos, também, utilizar o jornal como meio de defender e convencer seus leitores de sua visão, uma vez que se utilizava de recursos editoriais de diagramação para impactar os leitores na apresentação dos teoremas duplos, como podemos ler em Haubrichs

“[...] Gergonne anuncia sua última estratégia de convencimento. Dessa vez trata-se de algo puramente editorial, do ponto de vista da diagramação da página mesmo, mas com a intenção de forte impacto no leitor. Ele pretende apresentar teoremas e demonstrações duais em colunas paralelas. Cada página do jornal passa a ser, de fato, duas pequenas páginas de textos que correm juntas ‘para tornar essa correspondência mais aparente (...) [e] para que as demonstrações possam servir reciprocamente de controle.’” (HAUBRICHS, 2015, p.215)

2.5.1 A disputa entre Gergonne e Poncelet

A questão da dualidade em geometria é digerida nos debates ocorridos nos jornais e periódicos especializados em matemática e que começaram a circular no início do século

XIX. Em especial, os *Annales de Gergonne* tiveram papel fundamental nessa história, como já pudemos mencionar em seções anteriores. Na busca por tentar compreender o fenômeno da dualidade, Gergonne e Poncelet seguiram caminhos opostos, que podem ser acompanhados em seus artigos publicados nos *Annales*, bem como nos próprios trabalhos dos autores, como o tratado publicado por Poncelet. Esses artigos passam, aos poucos, a se tornar motivo de uma disputa entre esses dois nomes da geometria em relação à forma como se deveria tratar o caso da dualidade, contrapondo essas duas visões: seria a dualidade um princípio? Ou seria necessário justificar esse fenômeno através das construções geométricas, como na teoria das polares recíprocas? De acordo com Haubrichs (2015), tratava-se de uma disputa por preferências de métodos geométricos e, também, filosófica, em relação à geometria de situação que, num primeiro momento, aparece de maneira cordial, natural do embate de ideias, mas que começa a tomar outros tons à medida que as discussões vão ocorrendo. Os primeiros momentos da disputa pública entre Gergonne e Poncelet são descritos como cordiais pelo historiador da matemática citado e são pautados por visões divergentes em relação aos métodos em geometria. Apesar da divergência, os geômetras são respeitosos um com o outro e mantêm um tom amistoso. Isso pode ser visto em duas publicações também destacadas por Haubrichs em seu trabalho, as cartas entre Poncelet e Gergonne publicadas nos *Annales* em 1817, que reproduzimos aqui. A primeira delas, um trecho da carta de Poncelet a Gergonne, com tradução de Haubrichs:

“Se eu não me enganei sobre os significados das considerações que precedem ou terminam os artigos [de Gergonne] mencionados acima, a análise, ou melhor, o método das coordenadas usado de maneira adequada, teria a vantagem de conduzir, para resolver problemas de geometria, a construções bem superiores, pela elegância e simplicidade, do que as fornecidas pela geometria pura. Se por pura geometria, o senhor compreende, em geral, como aquela em que se interdita o método das coordenadas, ou mesmo de qualquer tipo de cálculo em que se permite perder momentaneamente a visão da figura com a qual se ocupa; se é isto que o senhor designa por essa geometria, cultivada pelos modernos (...); então declaro francamente que não posso concordar contigo, Senhor, que esta geometria não possa oferecer, também, soluções tão simples e tão elegantes como aquelas que se deduz por cálculo. Eu até admito que [sou] fortemente inclinado a pensar que, quando tratada de forma adequada, e menos restrita do que tem sido feito até agora, [a geometria pura] possa fornecer, por meio da intuição que lhe é própria, e para algumas classes de problemas, soluções que superam em muito aquelas deduzidas a partir da geometria analítica, mesmo com o estado de aperfeiçoamento ao qual [a geometria analítica] alcançou atualmente” (HAUBRICHS, 2015, p. 201-202)

Segundo Haubrichs, essa “ ‘geometria cultivada pelos modernos’ a que Poncelet

se refere é a geometria inventada por Monge, Carnot, Brianchon, Servois, etc, ou diretamente inspirada por eles” da qual Poncelet se considera participante. Em resposta a essa carta, Gergonne publica, também nos *Annales* em 1817, o seguinte texto, que também reproduziremos aqui e que pode ser encontrada no trabalho do historiador:

“Longe de mim acreditar que se deve negligenciar a geometria pura em prol da análise; eu penso o contrário, em acordo com o Sr. Poncelet, que não seria demais se aplicar em cultivar uma e outra com igual cuidado; mas eu penso também que pode ser bastante útil de se apoiar na análise das considerações que a geometria pode fornecer, e vice versa (...) Além disso, me parece que a natureza do problema deve influenciar de maneira notável na escolha dos métodos. De fato, acontece frequentemente que um determinado método que triunfa sem esforço para certos problemas, falha, pelo contrário, contra outros, que cedem facilmente, por sua vez, a métodos diferentes (...) Voltando agora ao objeto específico da carta do Sr. Poncelet, eu me apresso em reconhecer a superioridade dos seus métodos e de declarar que, sem ousar afirmar que a geometria analítica não possa alcançar [essa superioridade], me parece no mínimo muito duvidoso que isso possa ser conseguido de maneira fácil. (...) De minha parte, eu não negligenciarei nenhuma das oportunidades que os meus curtos divertimentos possam me oferecer para multiplicar os exemplos do gênero de aplicação da análise à geometria que eu procuro fazer prevalecer; e eu ousa crer que a diversidade dos nossos métodos não farão nascer jamais outra rivalidade entre nós, do que a do zelo pelo avanço da ciência.” (HAUBRICHS, 2015, p. 202-203)

Como se pode ler, Gergonne acredita que a rivalidade será pautada pelo “zelo pelo avanço da ciência”. Esse tom de cordialidade será ameaçado dez anos depois, em 1827, com a publicação do texto intitulado Análise de uma memória apresentada à Academia Real de Ciências, que pode ser visto como o pontapé inicial de uma desavença que envolve muitos textos, pessoas e situações. Os textos aqui mencionados não são publicados unicamente nos *Annales*. Parte deles também aparece no *Bulletin de Ferasac*, um periódico que circulou durante o século XIX. Esses dois jornais durante muito tempo publicarão as cartas direcionadas a um determinado personagem, bem como as réplicas e tréplicas dessas cartas. Segundo HAUBRICHS (2015):

“Essa folia de textos que agitou os dois periódicos nos anos de 1827 e 1828 provocou muitos mal-entendidos e grosserias, já que as idas e vindas de textos de um periódico a outro apareciam com citações truncadas ou com intervenções dos editores dos dois periódicos em questão, além de alguns atrasos e sem datas bem registradas. Por fim, são textos contendo insinuações e acusações com

diferentes graus de gravidade que, além de Gergonne e Poncelet, envolveram também outros geométricos da época” (HAUBRICHS, 2015, p. 221-222)

No ano de 1827, então, a disputa passa por uma guinada. Poncelet escreve, a pedido de Gergonne, em 1826, uma análise da Memória sobre a teoria geral das polares recíprocas que este último publica em 1827 nos *Annales* sob o título Análise de uma memória apresentada à Academia Real de Ciências, anteriormente mencionado. Gergonne, no entanto, omite a informação de que a análise é feita baseada em uma memória escrita entre os anos de 1823 e 1824, além de também omitir os dois anexos enviados por Poncelet, em que este último faz críticas que atingem o trabalho dele. Essas omissões causariam muitos mal-entendidos daqui em diante. Ainda em Haubrichs (2015) podemos ler:

“Gergonne não publicou nos Annales todo o texto que Poncelet havia enviado. [...] Esses textos contêm várias reclamações não dirigidas diretamente a Gergonne, mas que de certa forma o atingia. Numa das reclamações, Poncelet se queixa da resenha às Considerações filosóficas de Gergonne, que apareceu no Bulletin de Ferussac em fevereiro de 1826. [...] Na resenha reclamada, o editor de Bulletin de Ferussac fala com empolgação desta geometria de situação de Gergonne, mas não menciona nenhuma vez as pesquisas de Poncelet. Daí, no anexo Preâmbulo, Poncelet diz claramente que ele acha que sua teoria é muito mais ampla do que a de Gergonne, pois a reciprocidade polar alcança os aspectos métricos e projetivos da geometria” (HAUBRICHS, 2015, p. 227)

Nesse mesmo fascículo, Gergonne publica uma réplica à análise, na qual ele responde, além do texto principal, os anexos omissos. Segundo Haubrichs (2015), o tom do texto é irônico e reproduzimos aqui uma tradução dele feita pelo historiador:

“os espíritos superficiais, aqueles que estudam as ciências apenas como quem aprende um ofício, e que não consideram em nada a filosofia, poderiam ver nos belos trabalhos do Sr. Poncelet, apenas alguns teoremas novos acrescentados àqueles que já temos posse, ou uma maneira nova de demonstrar teoremas já conhecidos” (HAUBRICHS, 2015, p. 229)

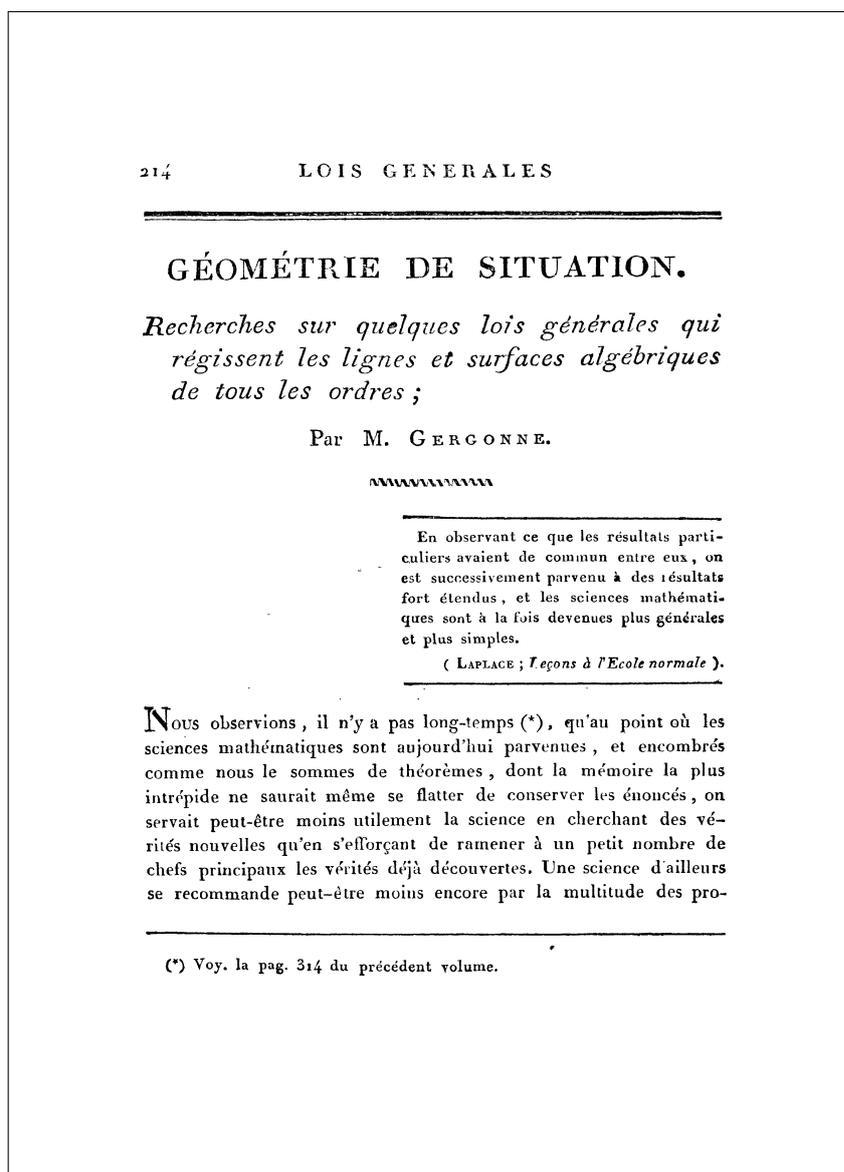
Essas réplicas e trélicas continuarão a ser publicadas pelo Bulletin e nos *Annales* e através delas é possível notar o andamento da mudança de tons ao longo das publicações. A disputa se torna muito agressiva entre os anos de 1827 e 1828, sobretudo quando, no *Bulletin*, uma resenha declara que os trabalhos de Poncelet são continuações das pesquisas de Gergonne. A partir daí, Poncelet publica cartas endereçadas a Gergonne que fazem críticas diretas ao seu trabalho, apontando, inclusive, erros matemáticos cometidos por ele e o ápice é atingido com a publicação integral da análise da Memória de Poncelet, com os

anexos que Gergonne havia omitido. É importante notar que muitos matemáticos da época acabaram participando indiretamente dessa disputa, como é o caso de Bobillier e Plücker, além de um dos editores do *Bulletin de Ferussac*, o francês Jacques Frédéric Saigey. A disputa atinge sua fase final em 1828, com publicações de outras cartas de Poncelet pelo *Bulletin*. Haubrichs (2015) faz um cuidadoso estudo sobre todas essas publicações em sua tese, que recomendamos aos interessados em se aprofundar no assunto. A importância dessa disputa para esse trabalho é o protagonismo exercido pelas publicações e pelos periódicos do século XIX. É através delas e dentro deles que a disputa toma cor e conquista o palco.

2.5.2 A amplitude da geometria de situação

“A possibilidade de enunciar teoremas aos pares, que a reciprocidade polar oferece, não passou despercebida para Gergonne. Entretanto, para o geômetra editor – que também era professor de filosofia em Montpellier – essa ‘geometria dos teoremas duplos’ era muito mais do que uma propriedade baseada em construções geométricas, mas, de fato, uma questão de princípio: o princípio da dualidade. Para atender a esse princípio, Gergonne inventa a sua geometria de situação, um misto de disciplina e rubrica editorial, aonde os teoremas de incidências entre figuras são sempre enunciados em pares (ditos ‘pares duais’).” (HAUBRICHS, 2015, p. 210-211)

O entendimento do que é a geometria de situação passa por algumas fases antes de assumir, finalmente, a categoria de rubrica editorial nos *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*. Inicialmente, essa geometria é tomada como objeto nos artigos dos *Annales* e, finalmente, passa à rubrica editorial desse mesmo jornal, no ano de 1826-1827. Para ser mais claro em relação a essa distinção, podemos entender que, inicialmente, os textos sobre incidências, paralelismos, pontos e retas e suas relações (que não fossem métricas) eram referidos como geometria de situação e eram como um tema que aparecia em problemas de geometria que envolviam tais características; em seguida, diante do aparecimento de diversos artigos de matemáticos tratando especificamente do tema da dualidade na geometria, o conjunto passa a ser etiquetado sob o rótulo de geometria de situação, assim como temos, por exemplo, geometria analítica, no mesmo jornal. Segundo Haubrichs (2015), são dois os textos que marcam essa mudança de status: um deles, de Janeiro de 1826, intitulado Considerações Filosóficas sobre os elementos da ciência da extensão, sobre o qual já falamos; e, o segundo, um artigo de Janeiro de 1827 que aparece sob o nome de Pesquisas sobre algumas leis gerais que regem as linhas e as superfícies algébricas de todas as ordens. Ainda segundo o mesmo autor, este último texto é significativo em representar o momento “em que a geometria de situação deixa de ser objeto de artigos e passa a ser rubrica de artigos” (HAUBRICHS, 2015, p. 211).

Figura 10 – *fac-símile* da primeira página do artigo de 1827 de Gergonne

Fonte: <http://www.numdam.org>

A geometria de situação figurou como um assunto que ficou em voga durante algum tempo entre os geômetras do século XIX, até sua extinção. Para se ter uma ideia da dimensão da geometria de situação, listaremos, a seguir, os autores e artigos desses autores publicados no período que compreende janeiro de 1826-1827, ano da publicação do artigo que caracteriza a geometria de situação enquanto uma rubrica editorial, até o ano de 1828-1829, em que as últimas publicações a respeito dessa geometria aparecem nos *Annales*. Deixamos claro, aqui, que a extinção das publicações a respeito da geometria de situação não elimina por completo a importância nem a discussão a respeito do problema da dualidade nos anos seguintes. Haubrichs (2015) discute, em sua tese, o que há para depois de 1830, embora não entremos em maiores detalhes neste trabalho. Dentre os principais matemáticos envolvidos com publicações sob a rubrica de geometria de situação,

encontramos Joseph Diaz Gergonne, Étienne Bobillier, Jakob Steiner e Michel Chasles. Isso não quer dizer que, no cenário anterior a essas publicações, não houvesse debates a respeito da geometria de situação, nem que esses matemáticos encerrem o corpo daqueles que se aventuraram em entender o problema da dualidade. Como já discutimos, no período anterior a 1826, ela era entendida como um objeto e, portanto, debatida sob a égide do princípio de dualidade e da teoria das polares recíprocas de Poncelet. Todo artigo que mencionava a dualidade entre ponto, reta, plano e a geometria dos teoremas duplos, ou seja, que falava da geometria de situação, não era ainda tratado enquanto uma rubrica. A partir de 1826, esses artigos passam a fazer parte de uma das categorias editoriais dos *Annales*, dentre as quais se destacam algumas outras, por exemplo: Géométrie des courbes, Géométrie Appliquée, Géométrie Élémentaire, Géométrie Analytique, isso só para citar aquelas rubricas que envolviam temas sobre geometria. A seguir, apresentamos uma tabela contendo os artigos publicados nos *Annales*, entre 1826 e 1829, classificados sob a rubrica de Géométrie de Situation.

Tabela 1 – Artigos publicados nos *Annales* sob a rubrica *géométrie de situation*.

Gergonne	Joseph Diaz	1826 - 1827	Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres
Bobillier	Étienne	1827-1828	Démonstration de quelques théorèmes sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres
Gergonne	Joseph Diaz	1827-1828	Rectification de quelques théorèmes énoncés dans les <i>Annales</i>
Bobillier	Étienne	1827-1828	Recherches sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres
Steiner	Jakob	1828-1829	Démonstration de quelques théorèmes
Chasles	Michel	1828-1829	Additions et corrections au mémoire sur les propriétés des systèmes de coniques, inséré à la pag. 277 du précédent volume
Gergonne	Joseph Diaz	1828-1829	Note sur une inadvertance grave, commise à la pag. 336 du précédent volume
Chasles	Michel	1828-1829	Démonstration de quelques propriétés du triangle, de l'angle trièdre et du tétraèdre, considérés par rapport aux lignes et surfaces du second ordre
Bobillier	Étienne	1828-1829	Recherches sur les lois générales qui régissent les courbes algébriques
Gergonne	Joseph Diaz	1828-1829	Double théorème de géométrie à trois dimensions
Gergonne	Joseph Diaz	1828-1829	Rectifications de diverses propositions énoncées dans les <i>Annales</i>
Bobillier	Étienne	1828-1829	Recherches sur les lois générales qui régissent les surfaces algébriques
Chasles	Michel	1828-1829	Recherches sur les projections stéréographiques, et sur diverses propriétés générales des surfaces du second ordre
Gergonne	Joseph Diaz	1828-1829	Sur le degré de la polaire réciproque d'une courbe proposée
Gergonne	Joseph Diaz	1828-1829	Note sur le nombre des conditions nécessaires pour que quatre droites appartiennent à une même surface du second ordre
Bobillier	Étienne	1828-1829	Théorèmes sur les polaires successives
Gergonne	Joseph Diaz	1828-1829	Sur le théorème d'Euler relatif aux polyèdres

Fonte: Produção do autor.

3 Apresentação de um protótipo de linha do tempo

Neste capítulo, mostraremos um protótipo de linha do tempo concebida e modelada de acordo com o conceito apresentado no capítulo 2 desse trabalho. Ao longo de toda a apresentação, falaremos sobre as funcionalidades da linha do tempo e as exemplificaremos com os dois problemas escolhidos: o problema do livro de Análise de Cauchy e o problema da Dualidade em Geometria.

As seções estarão organizadas da seguinte maneira:

na seção 3.1 discutiremos a estrutura da linha do tempo, ou seja, de que forma ela será visualizada e como essa visualização se adequa à nova concepção historiográfica da matemática.

Na seção 3.2 descreveremos a modelagem do grafo correspondente à nuvem do problema do livro de Análise do Cauchy.

Na seção 3.3 faremos o mesmo para o problema da Dualidade em Geometria.

Nas seções 3.4 e 3.5 apresentaremos as bases de dados utilizadas para a representação desses grafos e justificaremos a razão pela qual esses vértices foram escolhidos à luz do que já foi discutido no capítulo 2.

3.1 A estrutura da linha do tempo

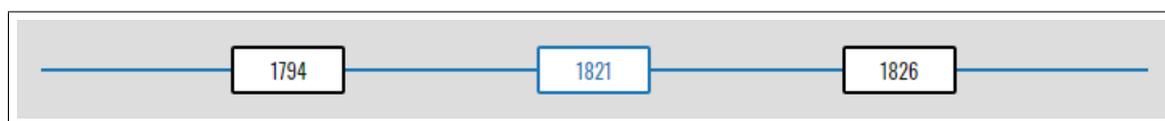
O protótipo de linha do tempo que aqui apresentamos é uma proposta de aplicação na web, um site interativo que permite a visualização e a experimentação da história da matemática. A visualização, pois, de acordo com o que discutimos nos capítulos anteriores, a história da matemática precisa de uma nova forma de ser representada, uma vez que os parâmetros historiográficos agora são outros e também o fato de que a nossa época permite um novo ferramental para lidar com a representação. A experimentação, uma vez que entendemos que qualquer conteúdo historiográfico não pode ser bem compreendido de maneira passiva, sem a interação do usuário. O meio digital viabiliza o acesso, a disseminação e a interatividade desses conteúdos.

A seguir, exibimos uma proposta de organização da linha do tempo da história da matemática. Um protótipo de site foi desenvolvido com o objetivo de ilustrar as nossas ideias e o descreveremos nas linhas que se seguem. Todas as imagens aqui apresentadas foram geradas a partir desse site. É importante deixar claro que há muitas ideias que

pensamos e que gostaríamos de ter implementado, no entanto, nos faltou tempo para tal.¹

Na sequência, apresentamos um modelo simples, em menor escala, para dar uma ideia de como está essa linha. Exibimos um pequeno segmento de reta (que, aqui, está representando uma linha reta orientada), sobre o qual estão expostas as seguintes datas: 1794, 1821 e 1826. No ano de 1826, está acoplado o grafo representando o problema da dualidade em geometria e no ano de 1821, o problema do livro de análise de Cauchy. Outras datas poderão ser colocadas na visualização inicial da linha, cada uma delas tendo em si acoplados os grafos dos seus respectivos problemas. A entrada de 1794, por exemplo, sugere que poderíamos acrescentar o problema relacionado à criação da *École Polytechnique* no contexto da França revolucionária.

Figura 11 – Linha reta com as datas de entrada.



Fonte: produção do autor.

Quando o usuário seleciona o ano, o problema historiográfico associado a ele é exibido em uma tela anexa. Nessa tela anexa, é possível ver alguns elementos, que dividimos em duas categorias: *agentes históricos* e *conceitos*. Vamos explicar essa distinção.

Quando falamos em *agentes históricos*, estamos nos referindo:

- às pessoas: podem ser matemáticos, mas, também, editores, estudantes, diretores de instituição, ministros, etc.
- às instituições: podem ser escolas, universidades, academias, laboratórios, governo, etc.
- às publicações: jornais, periódicos, livros didáticos, notas de aula, etc.

Quando falamos em *conceitos*, estamos nos referindo:

- aos conceitos historiográficos, isto é, aqueles estabelecidos, estudados e mencionados pelos historiadores daquele período histórico estudado. Por exemplo, “rigor” e “nova arquitetura da análise”.
- aos conceitos histórico-matemáticos, isto é, aqueles estabelecidos, estudados e mencionados pelos personagens do período histórico estudado. Por exemplo, “reciprocidade polar” e “continuidade”.

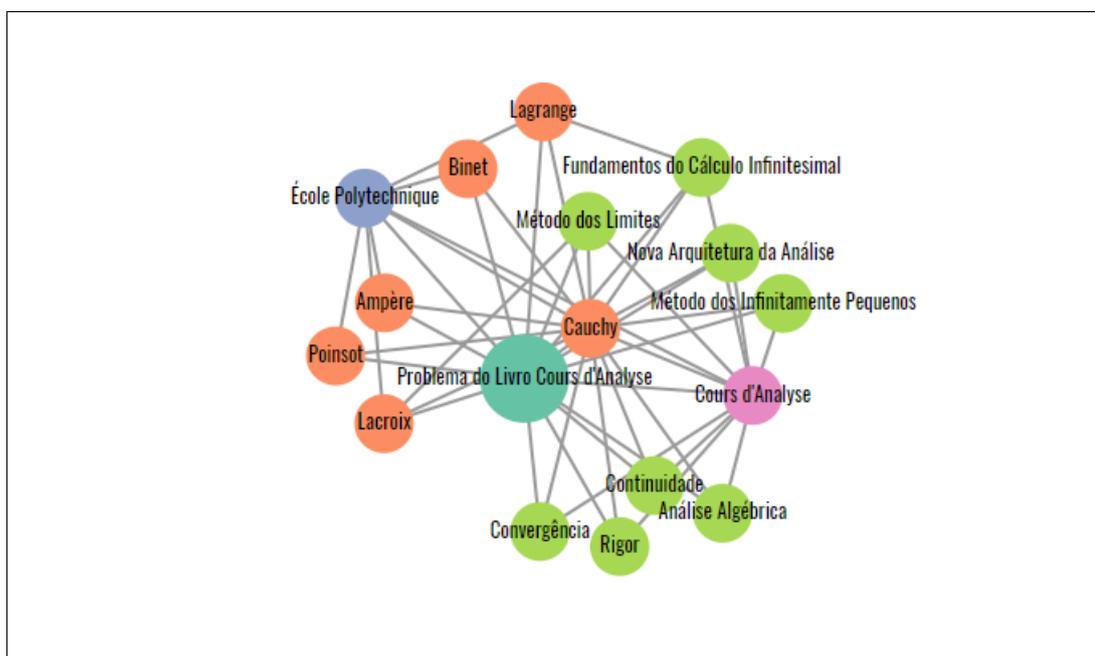
¹Apresentamos nas considerações finais deste trabalho, alguns possíveis aprimoramentos do site, indicando outras funcionalidades e melhorias na organização que propomos.

Acreditamos que pessoas, instituições e publicações movem a história de uma maneira materialista/objetiva, enquanto que conceitos movem a história de maneira subjetiva. Por essa razão, decidimos mantê-los em categorias distintas para manter uma coerência epistemológica.

A nuvem de informações exibida ao clicar em uma data contém uma imagem em forma de grafo em que cada vértice representa um agente histórico ou um conceito. Esses vértices podem, ou não, estar ligados por uma aresta, indicando algum tipo de conexão entre esses elementos. É importante mencionar que os textos escritos em cada vértice ou aresta são baseados em publicações de historiadores da matemática especialistas em cada tema. Pretende-se incluir *links* para os trabalhos desses pesquisadores.

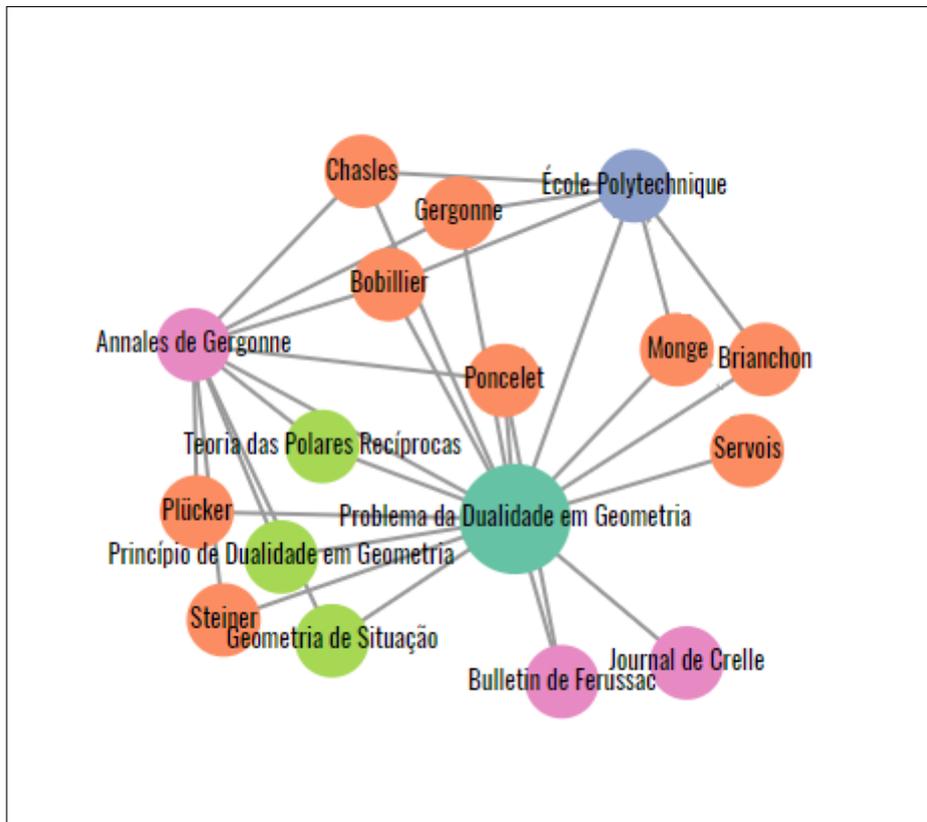
Abaixo, mostramos um exemplo de como está o problema do livro de análise de Cauchy e de como está o problema da dualidade em geometria. Quando o usuário clicar sobre 1821, será exibido o grafo correspondente ao problema do livro de Cauchy. Quando o usuário clicar sobre a data 1826, será exibido o grafo correspondente ao problema da dualidade em geometria do século XIX, conforme apresentamos abaixo:

Figura 12 – Grafo do problema do livro de análise de Cauchy.



Fonte: produção do autor.

Figura 13 – Grafo do problema da dualidade em geometria.



Fonte: produção do autor.

O pequeno modelo dá a ideia de como a linha está estruturada e qual é aparência da representação de cada problema historiográfico.

3.2 A modelagem do problema do livro *Cours d'Analyse* de Cauchy

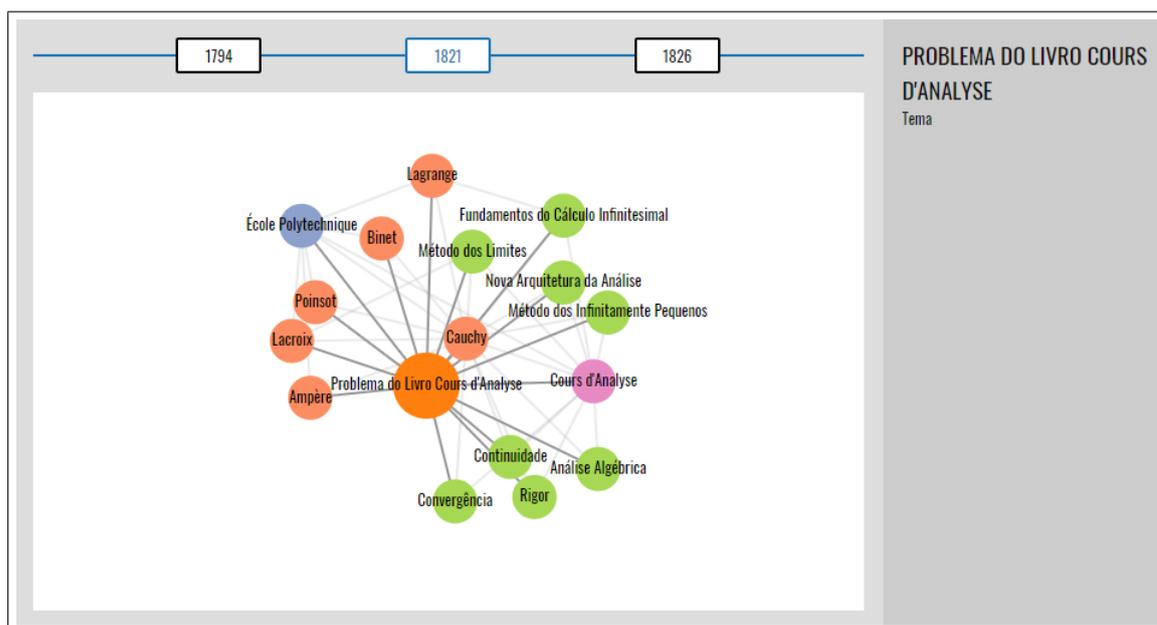
Nesta seção, descrevemos o protótipo criado para a nuvem do problema do livro de análise de Cauchy. Já temos uma ideia do grafo mostrado na seção anterior. Agora, falaremos um pouco sobre o significado dos elementos do grafo.

Conforme foi dito na seção anterior, cada vértice do grafo é um agente histórico (ou seja, uma pessoa, uma instituição ou uma publicação), ou um conceito (histórico-matemático ou historiográfico). Os vértices são representados por círculos, em princípio, de mesmo raio, à exceção do círculo que representa a raiz, que é o próprio problema historiográfico em questão. Este último apresenta um raio maior do que os demais, para identificar o centro da narrativa. Os círculos também são ilustrados por um sistema de cores. Cores distintas significam tipos distintos de agentes históricos ou conceitos. Os vértices escolhidos na representação do problema do livro de Cauchy foram todos elencados baseados também em trabalhos recentes de especialistas na história da matemática do século XIX e em Cauchy, particularmente, como é o caso de pesquisadores como Schubring,

Grattan-Guinness, Grabiner, Belhoste, etc.

Os vértices do grafo são clicáveis e arrastáveis e as arestas são clicáveis. Ao se clicar sobre um vértice, será possível ver uma descrição do vértice clicado na tela exibida ao lado. Para efeito de exemplo, apresentamos a estrutura existente ao se clicar no vértice central do problema historiográfico do livro de Cauchy:

Figura 14 – Clique sobre o vértice central do problema do livro de análise de Cauchy.



Fonte: produção do autor.

Como podemos ver acima, ao clicar sobre o círculo do problema historiográfico, ele muda de cor e a tela à direita deverá apresentar informações sobre esse vértice. Note que o problema historiográfico está conectado a todos os outros vértices.

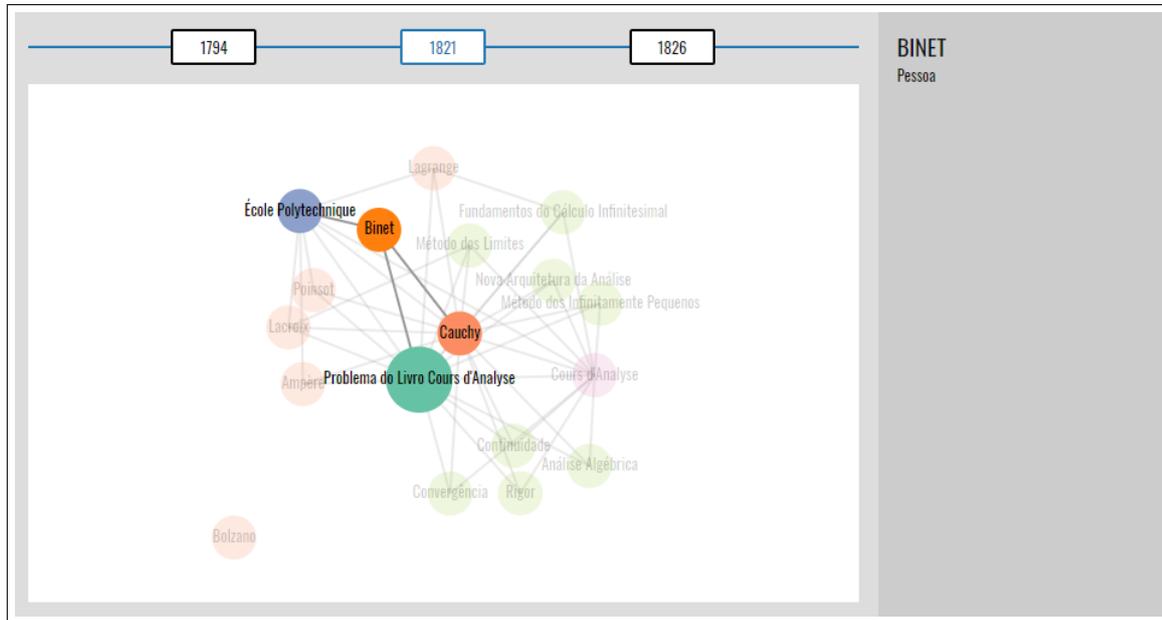
Não apenas os vértices são clicáveis, mas também as arestas, que representam as relações. Vamos apresentar um exemplo a seguir.

Quando o usuário clicar, por exemplo, sobre o personagem Binet a seguinte imagem aparecerá

Ao clicar sobre o vértice, sua cor muda e são enfatizadas a relação desse vértice com outros. No caso de Binet, podemos ver que ele está relacionado à *École Polytechnique*, ao Cauchy e ao problema historiográfico. Ao lado direito, uma tela apresentará informações através de textos e links para trabalhos acadêmicos sobre essa personagem histórica. Para efeito de exemplo, colocamos um possível texto que poderia aparecer nas informações sobre Binet:

Jacques Philippe Marie Binet nasceu no ano de 1786, em Rennes, na França e faleceu no ano de 1856, em Paris, França. Entrou para a École Polytechnique na turma de 1804. Binet também foi repetidor (repétiteur) da École entre os

Figura 15 – Clique sobre o vértice Binet.



Fonte: produção do autor.

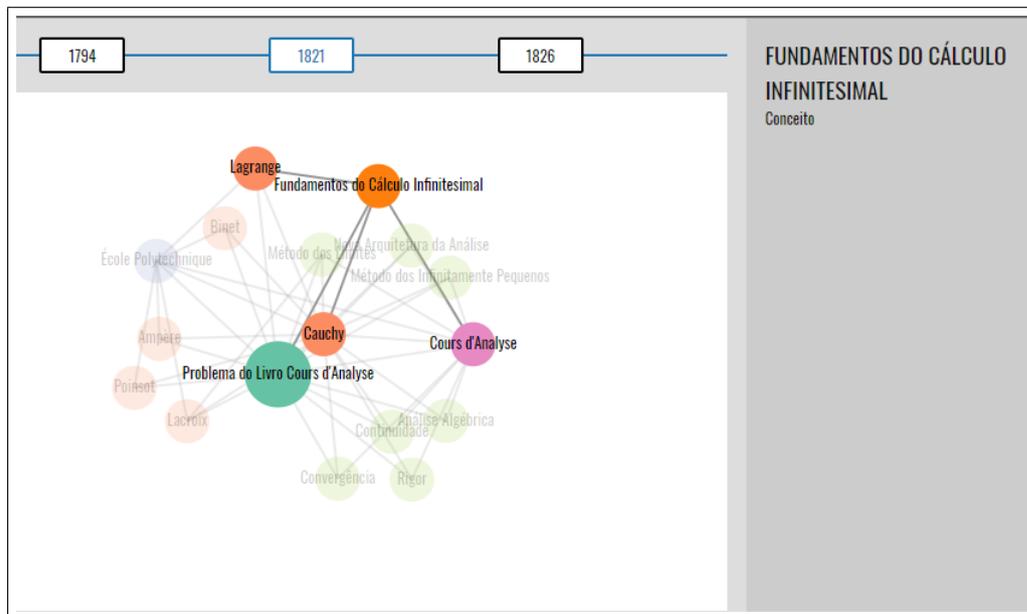
anos de 1807 e 1815; examinador (examineur) da mesma instituição entre os anos de 1815-1816 e, diretor de estudos (directeur des études) entre os anos de 1816 a 1830. Contribuiu para uma reedição da obra Mécanique Analytique de Lagrange. Binet tornou-se professor de astronomia do Collège de France em 1823 e membro da Academia de Ciências de Paris em 1843 [...]

Quando o usuário clicar sobre a aresta que liga, por exemplo, Binet à *École Polytechnique*, ela também mudará de cor. À direita, será possível ler informações sobre essa relação, conforme ilustrado abaixo:

Ao livro, estão conectados: os conceitos historiográficos e histórico-matemáticos ligados a ele, que, em nossa pesquisa, destacamos: Fundamentos do cálculo infinitesimal, Método dos limites, Nova arquitetura da análise, Método dos infinitamente pequenos, Continuidade, Convergência, Rigor e Análise algébrica; seu autor, Cauchy; a instituição *École Polytechnique*, que também é entendida como um agente histórico importante na concepção deste livro. É importante notar que o grafo é uma ferramenta que nos permite visualizar com clareza a proposta da nova historiografia, incluindo, em um só lance de olhar, elementos que compõe a narrativa de sua criação. Isto é, um livro não é apenas seu autor. Ele abraça, num amplexo, inúmeras dimensões políticas, contextuais da sua própria época, inclusive uma instituição que, a princípio, se olhada fora do contexto, poderia não ter nenhuma relevância sob a análise histórica. A proposta dessa linha é, também, oferecer ao leigo, ao estudante, ao professor de matemática, ao matemático, um diferente olhar sobre os agentes históricos, conceitos e os episódios históricos que muitas vezes são lidos isoladamente, sem as devidas conexões.

Ao clicarmos, por exemplo, sobre “Fundamentos do Cálculo Infinitesimal”, vemos todas as suas conexões. É importante observar que os conceitos também podem estar ligados às pessoas. Neste caso em especial, isso significa que tanto Cauchy quanto Lagrange contribuíram para a fundamentação do cálculo infinitesimal. Tudo isso pode ser lido ao se clicar na aresta que liga ou Cauchy ou Lagrange aos Fundamentos.

Figura 18 – Clique sobre o vértice *Fundamentos do cálculo infinitesimal*.



Fonte: produção do autor.

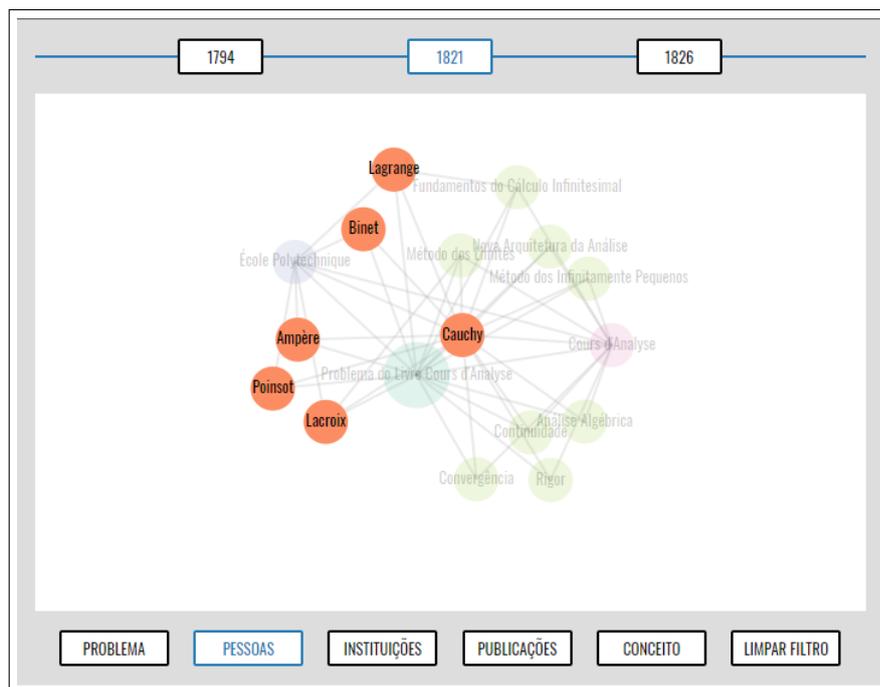
Para exemplificar, se o usuário clicar no vértice “Rigor”, um possível texto poderia ser:

O rigor é uma noção histórica que passou a ser uma questão para os histo-

riadores da matemática das décadas de 1970 e 1980. A partir de então, a historicidade das noções que integram a imagem corrente da matemática passou a ser discutida por eles. Essa noção passou a ser mais conhecida em particular pelo trabalho do historiador da matemática Ivor Grattan-Guinness que, em seu livro “*The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*”, reuniu diversos trabalhos de matemáticos do século XIX como Dirichlet, Riemann e Weierstrass em um capítulo que se intitulou “*A Era do Rigor*”. Nesse capítulo, o historiador mostra como os debates entre matemáticos do século XIX vão moldando a noção de convergência uniforme presente no livro de análise de Cauchy. [...]

Finalmente, para facilitar a visualização do grafo, incluímos filtros para os vértices, incluindo as categorias criadas. Assim, há 5 no total: a) Problema, para enxergarmos o problema historiográfico; b) Pessoas; c) Instituições; d) Publicações; e e) Conceitos. Quando o usuário clicar em “pessoas”, por exemplo, assim fica nossa representação:

Figura 19 – Clique sobre o filtro *pessoas*.



Fonte: produção do autor.

Analogamente, outro conjunto de vértices é visto quando clicarmos em outro filtro. Por exemplo, quando o usuário clicar sobre “instituições”, as instituições envolvidas se iluminarão enquanto os demais vértices ficarão apagados. Quando o usuário clicar sobre “publicações”, as publicações envolvidas se iluminarão enquanto os outros vértices ficarão apagados. Quando o usuário clicar sobre “conceitos”, os conceitos envolvidos se iluminarão enquanto os outros vértices ficarão apagados. Há, também, um botão de limpar filtros, para poder iluminar todos os vértices novamente.

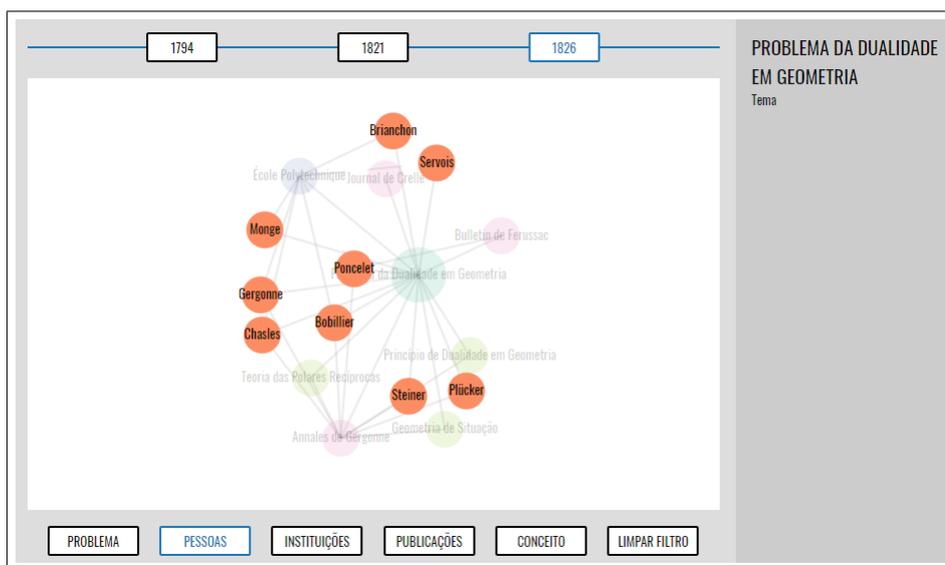
3.3 A modelagem do problema da dualidade em geometria

Nesta seção, descrevemos o protótipo criado para a nuvem do problema da dualidade em geometria do século XIX. Já temos uma ideia do grafo mostrado na seção anterior. Agora, falaremos um pouco sobre o significado dos vértices e arestas do grafo.

Conforme ficou dito na seção anterior, cada vértice do grafo é uma pessoa, uma instituição, uma publicação, um conceito histórico-matemático ou um conceito historiográfico. É importante mencionar que a seleção dos vértices (e os conteúdos associados a eles) foram escolhidos baseados nas referências bibliográficas presentes nessa dissertação, sobretudo nos trabalhos de Haubrichs e Gray, dois historiadores com estudos sobre o problema da dualidade em geometria do século XIX.

Dessa forma, no problema da dualidade, os vértices elencados e que representam pessoas são: Brianchon, Servois, Monge, Gergonne, Poncelet, Chasles, Bobillier, Steiner e Plücker, conforme ilustramos abaixo:

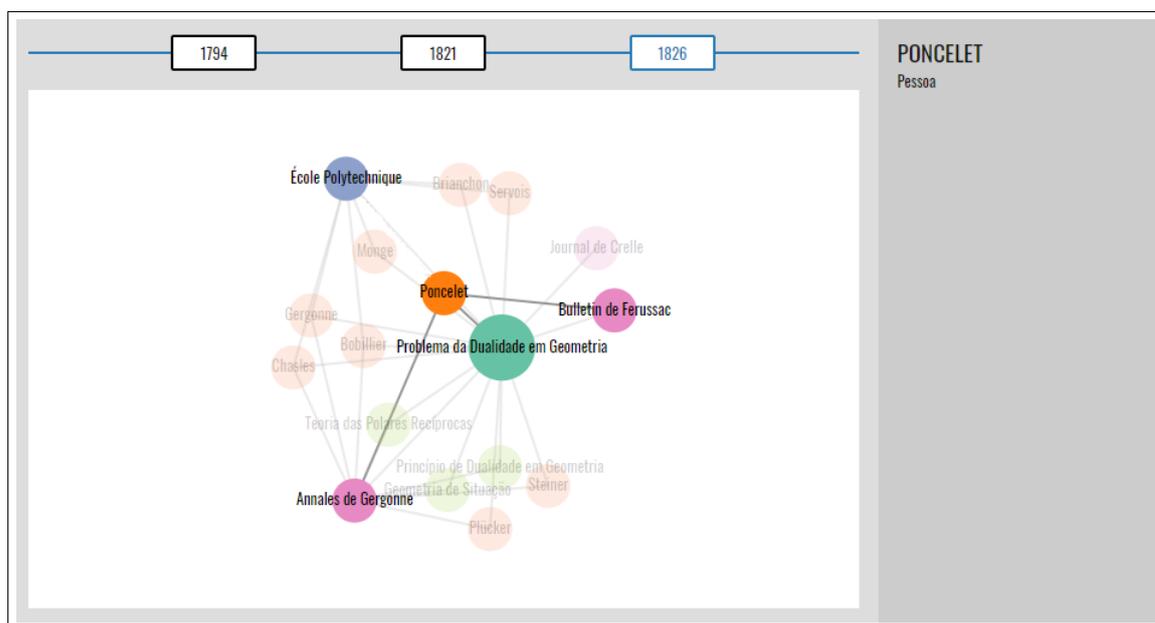
Figura 20 – Vértices que representam as pessoas no problema da dualidade em geometria.



Fonte: produção do autor.

Quando o usuário clicar em Poncelet, por exemplo, ele é destacado juntamente com suas conexões e um texto com informações sobre ele aparecerá em uma tela ao lado. Abaixo, ilustramos com uma imagem do protótipo:

Figura 21 – Clique sobre o vértice Poncelet.



Fonte: produção do autor.

Será possível, ao lado direito, ler um texto sobre Poncelet. Um esboço desse texto poderia ser:

Jean Victor Poncelet nasceu em 1788, em Metz, França e faleceu em 1867, em Paris, França. Era filho de Claude Poncelet, um rico dono de terras e advogado do parlamento de Metz, e Anne-Marie Perrein. Foi confiado a uma família na pequena cidade de Saint-Avold, que se encarregou de sua educação até voltar a Metz, em 1804. Depois dos estudos no lycée de sua cidade, ingressou na École Polytechnique como aluno no ano 1807, se formando em 1810. Foi aluno, entre outros, de Monge, de Lacroix, Ampère, Poinsot e Hachette. Publicou diversos artigos nos annales de Gergonne e no Bulletin des Sciences mathématiques, conhecido como Bulletin de Férussac. Desenvolveu, dentre outros, a teoria das polares recíprocas para lidar com o problema da dualidade em geometria. [...]

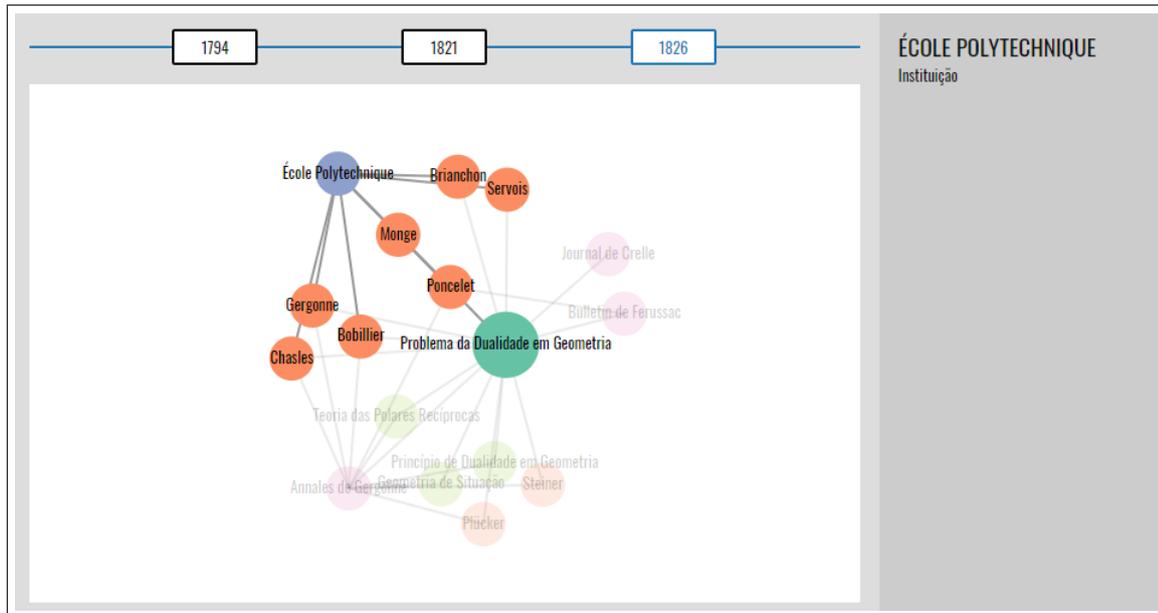
Note que Poncelet está vinculado à *École Polytechnique* e a duas publicações: o *Bulletin de Ferussac* e os *Annales de Gergonne*, ambos periódicos do século XIX que publicaram trabalhos dele sobre a dualidade em geometria. Ao clicarmos, por exemplo, na aresta que liga Poncelet à *École Polytechnique*, será possível ler um texto sobre o vínculo ou os vínculos que ele teve com a instituição. Abaixo, exibimos um possível texto:

Poncelet foi aluno da École Polytechnique entre os anos de 1807 e 1810. Comandante da École Polytechnique entre os anos de 1848 e 1850.

Ao clicarmos sobre a aresta que liga Poncelet ao *Bulletin*, por exemplo, será possível ver os trabalhos publicados por ele e também um link para pesquisas de historiadores sobre o trabalho.

A única instituição elencada para contar a história do problema da dualidade em geometria foi a *École Polytechnique*, conforme podemos ver na ilustração abaixo:

Figura 22 – Clique sobre o vértice *École Polytechnique*.



Fonte: produção do autor.

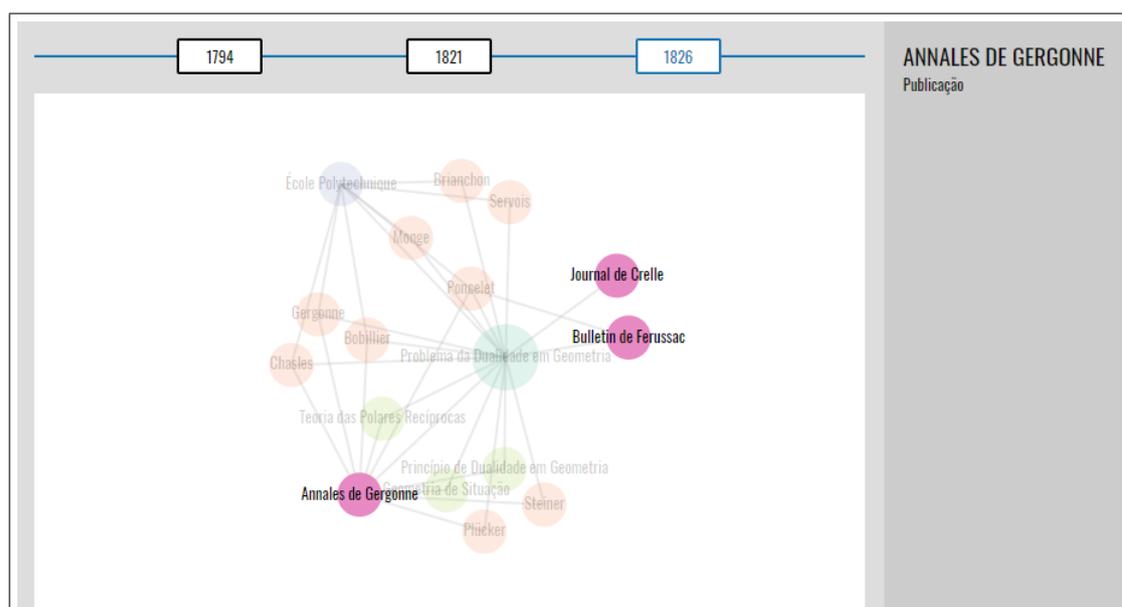
Quando o usuário clicar sobre a *École Polytechnique*, os vértices a ela conectados serão destacados e será possível ler um texto sobre ela em uma janela. Um possível texto poderia ser:

A École Polytechnique foi fundada no ano de 1794, sob o regime de Napoleão Bonaparte na França pós Revolução Francesa. Era vinculada ao Ministério da Guerra, que cuidava de sua parte administrativa e ao Ministério do Interior, que era responsável pela sua parte pedagógica. Foi responsável pela formação de vários matemáticos, físicos e engenheiros do século XIX, ainda que o currículo da École não pretendesse formar matemáticos ou cientistas profissionais. [...]

Note que, nesse caso, há apenas pessoas, dentre professores, alunos e ex-alunos da instituição. É interessante observar que, neste caso, a *École Polytechnique* é uma interseção entre os problemas da dualidade e o problema do livro de Cauchy, já que ambas possuem essa instituição como relevante. De fato, a *École* foi muito presente na história da matemática da primeira metade do século XIX, como foi falado no capítulo 2 desse trabalho.

Já as publicações, aqui, exercem um papel fundamental na história do problema da dualidade. Três delas são elencadas para esta representação: O *Journal de Crelle*, o *Bulletin de Férussac* e os *Annales de Gergonne*, todos periódicos especializados em matemática e que circularam durante o século XIX. Abaixo, retiramos uma imagem do protótipo da linha contendo a representação que destaca os periódicos:

Figura 23 – Clique sobre o filtro de publicações.

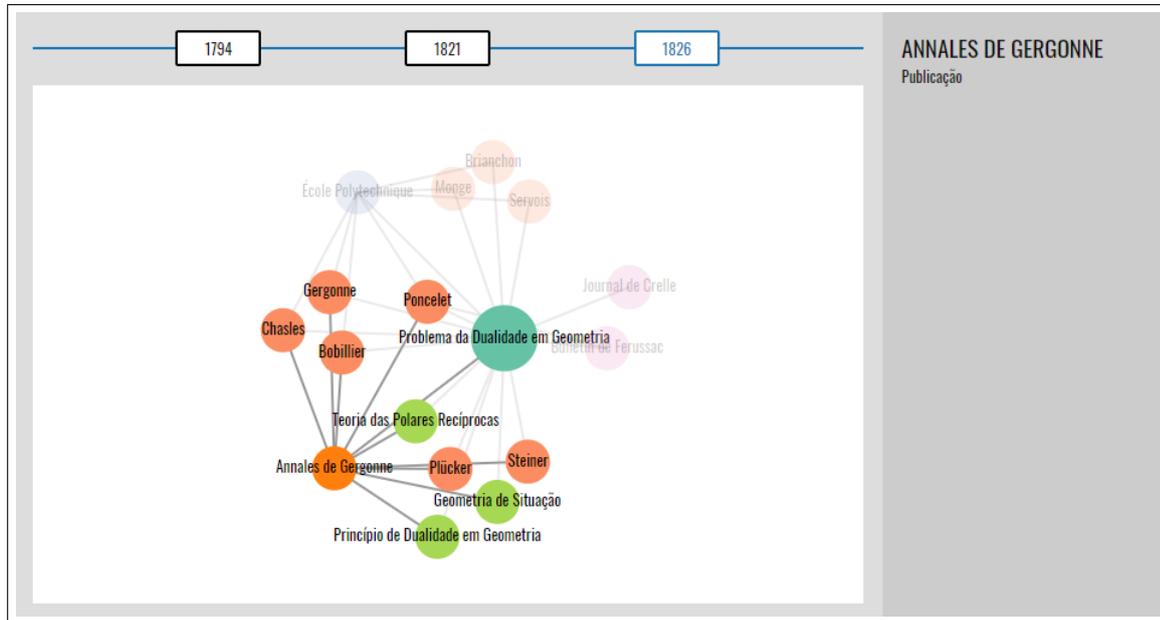


Fonte: produção do autor.

Quando o usuário clicar sobre os *Annales de Gergonne*, o vértice correspondente a ele será iluminado, bem como os demais conectados a ele. Um texto aparecerá ao lado, com informações sobre os *Annales*. Um possível texto para os *Annales* poderia ser:

Jornal criado em 1810, sob o título de Annales de mathématiques Pures et Appliquées. Foi o primeiro jornal moderno da Europa e aparecia em fascículos mensais de mais ou menos 30 a 40 páginas. Inicialmente, foi editado por Joseph Esprit Thomas Lavernède e por Joseph Diaz Gergonne, mas a partir do terceiro volume, passou a ser dirigido exclusivamente por Gergonne. O jornal cessou no fascículo de agosto de 1831. [...]

Abaixo, ilustramos mais uma vez, utilizando a imagem de nosso protótipo:

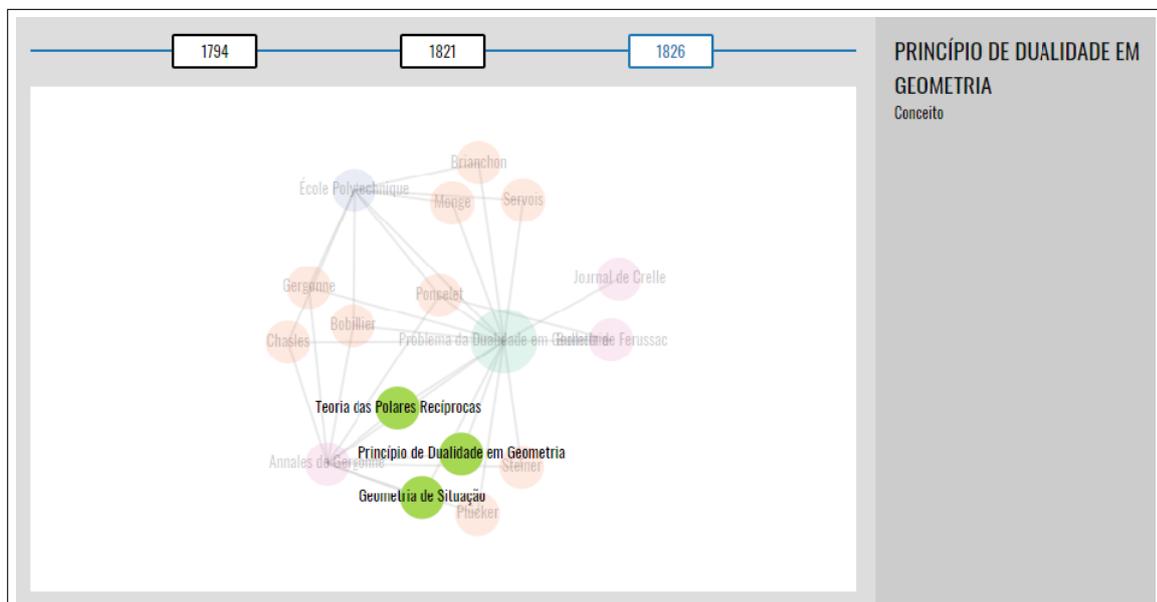
Figura 24 – Clique sobre os *Annales de Gergonne*.

Fonte: produção do autor.

Observe que, pela representação, fica claro o quão abrangente foi o periódico de Gergonne na história da matemática do século XIX. Ele é ligado a inúmeros vértices: tanto pessoas que nele publicaram, quanto conceitos, que nele foram desenvolvidos e discutidos.

Finalmente, apresentamos os conceitos relevantes para contar a história da dualidade: Teoria das polares recíprocas, Princípio de dualidade em geometria e a Geometria de situação. Na imagem abaixo, uma representação desses conceitos utilizando o recurso de filtro de nosso protótipo:

Figura 25 – Clique sobre o filtro dos conceitos.



Fonte: produção do autor.

Quando o usuário clicar sobre qualquer um desses conceitos, verá informações sobre eles em uma janela ao lado, bem como *links* e referências bibliográficas. Por exemplo, quando o usuário clicar sobre *Teoria das polares recíprocas*, um texto possível a aparecer seria:

A teoria das polares recíprocas, ou reciprocidade polar, foi uma teoria desenvolvida nas pesquisas de Poncelet no século XIX para lidar com os problemas envolvendo a dualidade em geometria. É uma transformação geométrica que associa, a cada ponto P dado, uma reta r , bem determinada, dita sua reta polar. Reciprocamente, dada uma reta r , é possível associá-la a um ponto P , de maneira bem determinada, esse último dito pólo. Essas construções são mediadas por uma cônica de referência. Um ponto e uma reta que se correspondem por essa transformação são chamados, respectivamente, de pólo e polar um do outro em relação à cônica fixada. [...]

3.4 Apresentação dos vértices utilizados no problema do livro *Cours d'Analyse* de Cauchy

Na tabela que se segue, apresentamos os vértices utilizados para a construção do grafo do problema do livro de Cauchy.

Tabela 2 – Vértices do problema do livro de Cauchy.

Categoria	Vértice
—	Problema do livro <i>Cours d'Analyse</i>
Pessoa	Ampère
Pessoa	Binet
Pessoa	Cauchy
Pessoa	Lacroix
Pessoa	Lagrange
Pessoa	Poinsot
Instituição	<i>École Polytechnique</i>
Publicação	<i>Cours d'Analyse</i>
Conceito histórico-matemático	Continuidade
Conceito histórico-matemático	Convergência
Conceito histórico-matemático	Método dos infinitamente pequenos
Conceito histórico-matemático	Método dos limites
Conceito historiográfico	Análise algébrica
Conceito historiográfico	Fundamentos do Cálculo infinitesimal
Conceito historiográfico	Nova arquitetura da análise
Conceito historiográfico	Rigor

Fonte: Produção do autor.

3.5 Apresentação dos vértices utilizados no problema da Dualidade em Geometria

Na tabela que se segue, apresentamos os vértices utilizados para a construção do grafo do problema da dualidade em geometria.

Tabela 3 – Vértices do problema da dualidade em geometria.

Categoria	Vértice
—	Problema da Dualidade em Geometria
Pessoa	Bobillier
Pessoa	Brianchon
Pessoa	Gergonne
Pessoa	Monge
Pessoa	Plücker
Pessoa	Poncelet
Pessoa	Servois
Pessoa	Steiner
Instituição	<i>École Polytechnique</i>
Publicação	Annales de Gergonne
Publicação	Bulletin de Ferussac
Publicação	Journal de Crelle
Conceito histórico-matemático	Geometria de Situação
Conceito histórico-matemático	Princípio da Dualidade em Geometria
Conceito histórico-matemático	Teoria das Polares Recíprocas

Fonte: Produção do autor.

4 Considerações Finais

4.1 O público alvo da nossa linha do tempo

A linha do tempo aqui apresentada tem o seguinte público alvo: a) professores de matemática da escola básica ou do ensino superior interessados em aprimorar seu conhecimento a respeito de história da matemática; b) estudantes, sejam eles do ensino básico, graduação ou pós graduação igualmente interessados em história da matemática, seja para um conhecimento mais amplo e aprofundado, seja para um complemento do que é visto em seus cursos; c) pesquisadores em história da matemática interessados em visualizar ou consultar temas de história da matemática e divulgar seus trabalhos científicos e d) público leigo de curiosos e interessados em geral pela matemática.

A ideia é oferecer um ambiente interativo, acessível (por meio da internet) e visualmente intuitivo que permita não somente a consulta a temas de história da matemática como, também, a exploração dos ambientes propostos pela linha do tempo.

4.2 Desdobramentos da nossa linha do tempo

O trabalho aqui apresentado limitou-se a pensar um protótipo de linha do tempo que exibisse uma nova maneira de representar a história da matemática, de acordo com as novas perspectivas postas pela historiografia da ciência do pós 1970. Não foi nossa pretensão – pelo menos não aqui – dar conta de todas as questões de representação levantadas por nós. Nossa ideia central era contestar a representação do tempo por meio de uma linha reta orientada, sobretudo pelo fato de o formato linear não dar conta de como a história de fato é: repleta de reviravoltas, de rupturas, de conexões, etc. Acreditamos que nosso protótipo, por mais simples que seja, apresentou uma forma de contar a história usando, como recursos, grafos que nos oferecem uma melhor noção de como funcionam as conexões históricas. Através deles, é possível enxergar as conexões aparentemente invisíveis entre agentes históricos que muitas vezes parecem agir isoladamente. A história é feita de relações, conexões entre agentes.

Nesta seção, falaremos um pouco sobre os desdobramentos da linha do tempo, isto é, sobre o que é possível fazer para aprimorar a nossa ideia.

Nesta dissertação, apresentamos uma linha do tempo simples, organizada através de datas (anos) às quais os problemas historiográficos são associados. Assim, por exemplo, para o ano de 1821, tivemos o problema do livro de análise de Cauchy. Nosso foco foi exibir como seriam os conteúdos de cada nuvem que representa um problema historiográfico. Na

limitação do escopo desse trabalho, essa representação deu conta de ilustrar uma possível organização. Para um trabalho futuro, poder-se-ia organizar esses problemas/temas por meio de uma sequência de eventos, agrupados por séculos. Por exemplo, quando o usuário clicar no século XIX, será possível visualizar uma série de entradas, duas delas seriam: “O livro *Cours d’Analyse*, de Cauchy, é publicado em 1821” e “Gergonne publica o primeiro artigo sobre Geometria de Situação em 1826”. Assim, nossa organização se daria por meio de eventos.

Quanto à linha do tempo, não haveria uma única e, sim, várias, para dar conta das simultaneidades da história, sobretudo o desenvolvimento da matemática em diferentes civilizações. Assim, podemos criar algumas linhas do tempo, com links interativos, para diferentes civilizações no espaço e no tempo, como, por exemplo:

- Mesopotâmia
- Egito Antigo
- Américas pré-Colombianas
- Índia
- China
- Mundo Árabe
- Europa desde o século XII
- Séculos XX e XXI

Note que propomos uma linha do tempo segmentada, composta de uma série de linhas. Isto por duas razões: a) a primeira está ligada ao fato de que a densidade de problemas/temas/eventos da linha do tempo “Europa desde o século XII” será maior do que nas linhas do tempo da antiguidade. Isso facilitaria a organização da linha. b) a segunda está relacionada à própria concepção, uma vez que o enfoque atual da história da matemática não enxerga uma continuidade desde os tempos remotos da humanidade até o presente; não se enxerga uma acumulação gradativa de conhecimento século por século. O que há são vários empréstimos entre diversas culturas, momentos em que certas práticas matemáticas foram descartadas ou esquecidas em razão do aparecimento de outros modos que fizeram mais sentido no contexto daquela época. Por isso, faz mais sentido a linha do tempo ser um agrupamento de várias linhas.

A linha deverá apresentar mecanismos de busca através de algoritmos. Por exemplo, se o usuário digitar “Cauchy” no mecanismo de busca, ele poderá visualizar todos os problemas historiográficos ligados ao Cauchy, bem como uma biografia dessa personagem.

Gostaríamos de implementar, também, uma ferramenta que permitisse a visualização de “passeios” na linha do tempo. Eles seriam seleções na linha do tempo que ressaltassem algum tema específico. Assim, por exemplo, ao se escolher o conceito “limite”, seria possível visualizar desde o aparecimento de uma noção de limite na antiguidade clássica até suas variações ao longo de séculos de história.

Como o público alvo da linha do tempo é, também, de alunos e professores do ensino básico, existe uma proposta de interatividade com a matemática escolar. Uma delas é construir alguns jogos educativos, como, por exemplo, um jogo de perguntas e respostas, em que o estudante possa estudar a linha e, em seguida, testar seus conhecimentos. O estudante também poderá selecionar e imprimir sua própria linha do tempo personalizada para representar algum momento histórico do seu interesse, que poderá ser utilizada para apresentação de trabalhos escolares.

Por fim, a linha também poderá servir como uma plataforma de contribuição, em que pesquisadores podem inserir eventos e criar novas nuvens para representar problemas historiográficos que estejam no espectro de suas pesquisas.

Referências

- BELHOSTE, B. The École Polytechnique and Mathematics in nineteenth-century France, in Bottazzini e A. Dahan-Dlamedico (orgs.) **Changing Images in Mathematics: from French Revolution to the New Millenium**. Londres, Routledge, 2001, p.15-30.
- BELHOSTE, B. **Augustin-Louis Cauchy: A Biography**, Springer-Verlag New York, 1991.
- BÖRNER, K. **Atlas of Knowledge: anyone can map**, Cambridge, MIT Press, 2015.
- BÖRNER, K. e POLLEY, D. **Visual Insights: A Practical Guide to Making Sense of Data**, Cambridge, MIT Press, 2014.
- BOTTAZZINI, U. From Paris to Berlin: Constrasted Images of Nineteenth-Century Mathematics, in Bottazzini e A. Dahan-Dlamedico (orgs.) **Changing Images in Mathematics: from French Revolution to the New Millenium**. Londres, Routledge, 2001, p.31-48.
- CORRY, L. The History of Modern Mathematics - Writing and Re-writing, **Science in Context**, 17 (1-2) 2004, p. 1-21.
- GRABINER, J. **The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus**. Cambridge, The MIT Press, 1981.
- GRABINER, J. The Mathematician, The Historian, and the History of Mathematics, **Historia Mathematica**, Vol. 2, 1975, p.439-447.
- GRAFTON, A.; ROSENBERG, D. **Cartographies of Time: A history of timeline**. Princeton, Princeton Architectural Press, 2010.
- GRATTAN-GUINNES, I. **Convolutions in French Mathematics**. Basel, Birkhäuser, 1990.
- GRAY, J. **Worlds Out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century**, New York, Springer, 2011.
- GRAY, J. **The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century**, New York, Springer, 2015.
- HAUBRICHS, C. **Étienne Bobillier (1798-1840): Percursos Matemático, docente e profissional**. Tese de doutorado. Programa de pós-graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia. UFRJ. Rio de Janeiro, 2015.
- HAUBRICHS, C. **Reciprocidade, dualidade e abreviação: alguns aspectos das geometrias nas décadas de 1810 e 1820** (por aparecer). s/d.

- KNORR, W. **The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitude and Its Significance for Early Greek Geometry.** Dordrecht, Reidel Publishing Company, 1975.
- MEHRTENS, H.; BOS, H. e SCHNEIDER, I. (Org.), **Social History of Nineteenth Century Mathematics**, Basel, Birkhäuser, 1981.
- MITCHELL, W. J. T. Spatial Form in Literature: Toward a General Theory, **Critical Inquiry**, Vol. 6, No.3, 1980, pp. 539-567.
- ROBSON, E. **Mathematics in Ancient Iraq: A Social History.** Princeton, Princeton University Press, 2008.
- SCHNEIDER, I. Forms of Professional Activity in Mathematics Before the Nineteenth Century. in: MEHRTENS, H.; BOS, H. e SCHNEIDER, I. (Org.), **Social History of Nineteenth Century Mathematics**, Basel, Birkhäuser, 1981, pp. 75-110.
- SCHUBRING, G. **Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis**, New York, Springer, 2005.
- SCHUBRING, G.; ROQUE, T. **Curso de Análise de Cauchy: Uma Edição Comentada**, Rio de Janeiro, SBM, 2016.
- SHIFFRIN, R. and BÖRNER, K. Mapping Knowledge Domains. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, abril 6, 2004, vol. 101, suppl. 1, 5183-5185. (<http://www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.0307852100>).
- ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro, Zahar, 2012.
- ROQUE, T. Sobre a noção de problema. **Revista Lugar Comum**, n.17 23-24, 2002, pp. 135-146.
- UNGURU, S. On The Need To Rewrite The History of Greek Mathematics, **Archive for History of Exact Sciences**, 15, 1975, pp. 67-114.

Apêndices

APÊNDICE A – Código do protótipo da linha do tempo

Suporte necessário: PHP, JavaScript. Recursos: jQuery, D3.js

A estrutura básica da página está programada em HTML, com design em CSS. As visualizações são geradas em JavaScript, por meio da biblioteca D3.js, e a partir de dados em JSON. Novas visualizações podem ser geradas sem o recarregamento da página.

O arquivo JSON tem o seguinte formato:

```
{
  "nodes": [
    {"id":0, "name": "Cauchy", "group": 1},
    {"id":1, "name": "Lagrange", "group": 1},
    {"id":2, "name": "École Polytechnique", "group": 2},
    {"id":3, "name": "Cours d'Analyse", "group": 3},
    {"id":4, "name": "Fundamentos da Análise", "group": 4}
  ]
  "links": [
    {"source": 0, "target": 2, "value": 1},
    {"source": 0, "target": 3, "value": 1},
    {"source": 0, "target": 4, "value":4}
  ]
}
```

Onde “nodes” são os nós e “links” são arestas não direcionais entre os nós. Em “nodes”, “id” é um inteiro não repetível, “name” é uma string com o nome de uma pessoa, ou instituição, ou publicação ou conceito e “group” é um inteiro repetível que indica se o nó específico é uma pessoa (valor 1), instituição (valor 2), publicação (valor 3) ou conceito (valor 4).

Em “links”, “source” é um inteiro repetível indicando a origem da aresta, “target” é um inteiro repetível indicando o destino da aresta e “value” é um inteiro repetível que indica o peso da aresta.

Para essa apresentação inicial, atribuiu-se peso igual a 1 para todas as arestas. No entanto, pretende-se que, para o trabalho final, apresente-se uma regra de pesagem

diferente, que ainda estão sendo pensados.

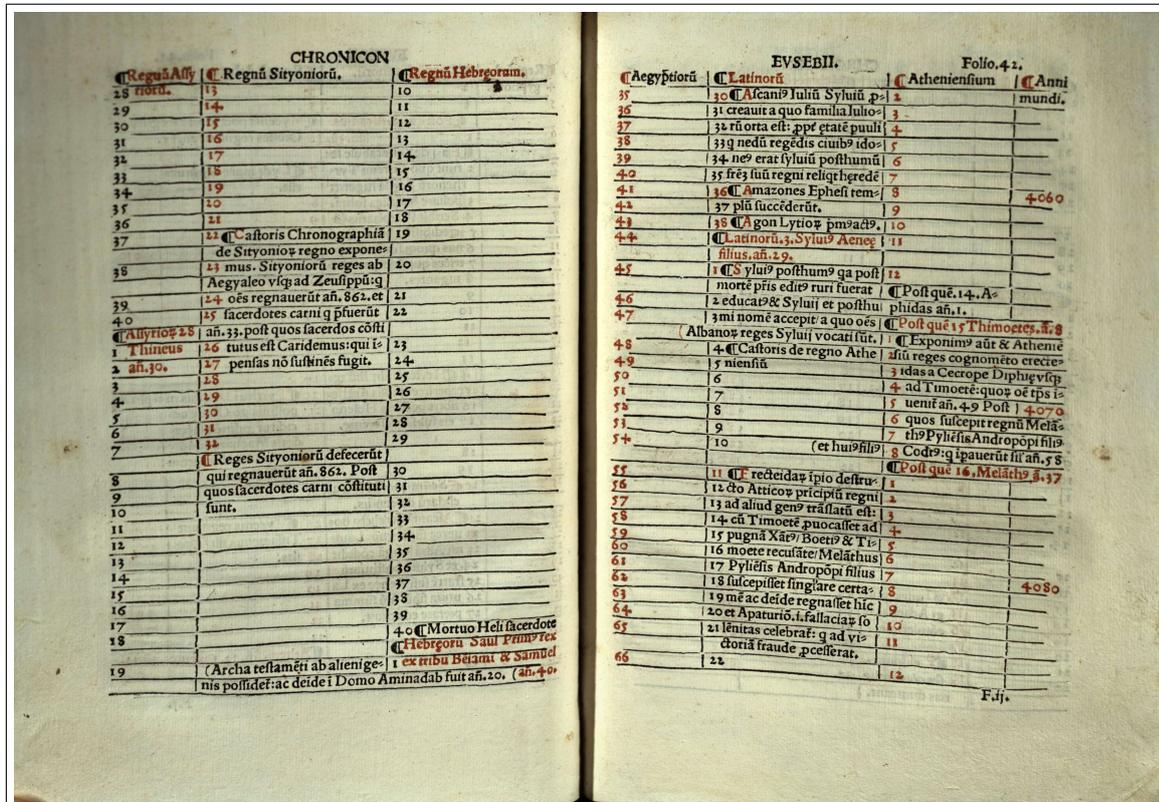
As informações organizadas são processadas por meio do D3.js para a geração da visualização. Os valores de “group” são utilizados na visualização para diferenciar o tipo de nó (ou seja, para indicar se é uma pessoa, instituição, publicação ou conceito). Os valores de “value” são utilizados para a definição da espessura da aresta que, conforme esclarecemos anteriormente, ainda serão modificados.

Para o painel de informações adicionais, são realizadas consultas AJAX a um código PHP por meio de JQuery. As consultas retornam dados específicos sobre um nó ou aresta determinada pelo usuário.

Anexos

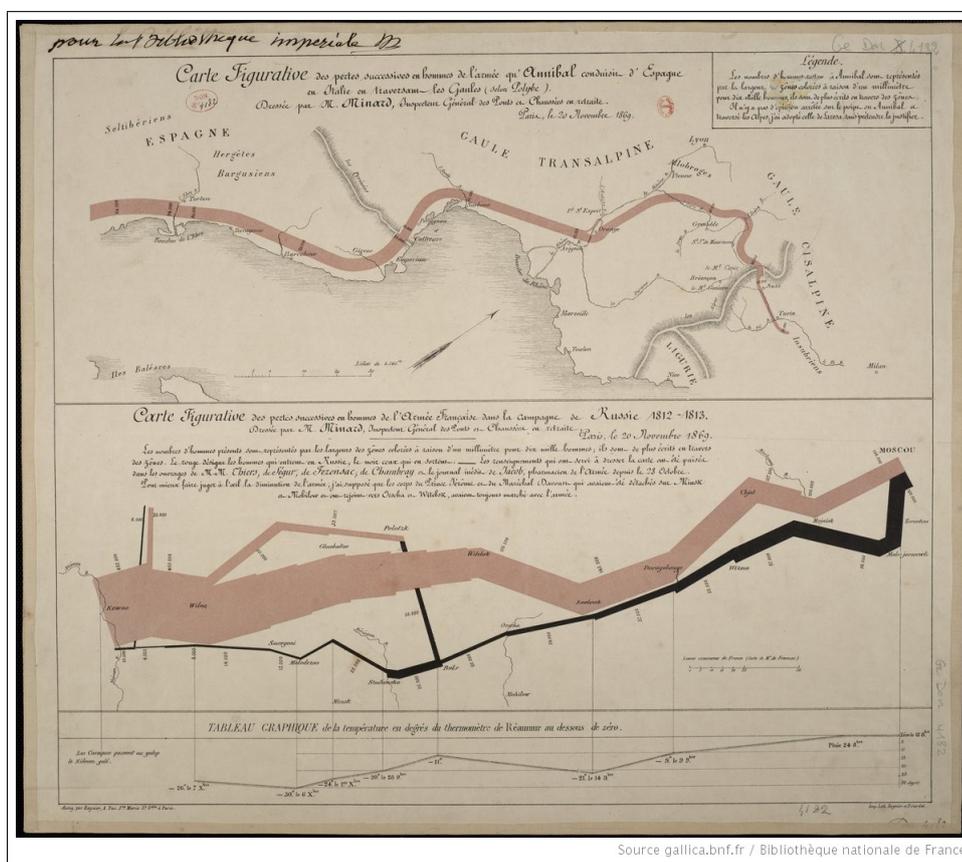
ANEXO A – Cartografias do tempo

Figura 26 – Crônicas de Eusébio.



Fonte: GRAFTON, 2010, p. 16.

Figura 27 – Carte figurative des pertes successives en hommes de l'armée française dans la campagne de Russie 1812-1813 comparées à celle d'Hannibal durant la 2^{ème} Guerre Punique



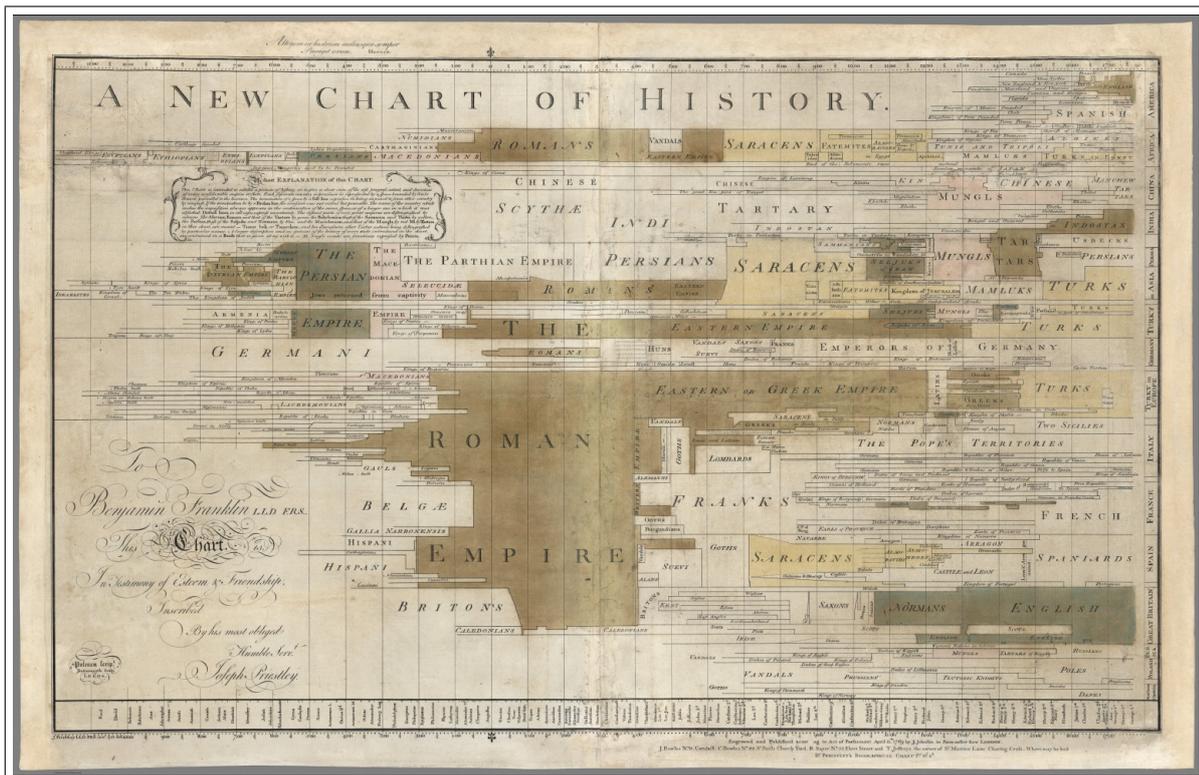
Fonte: GRAFTON, 2010, p. 22.

Figura 28 – *Universal History*, de Johannes Buno.



Fonte: GRAFTON, 2010, p.92-93

Figura 29 – *Chart of Universal History*, de Thomas Jefferys.



Fonte: GRAFTON, 2010, p.114-115