Universidade Federal do Rio De Janeiro

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

O USO DE REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS PARA A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO SOBRE ESPAÇO VETORIAL

Everton Francisco Ferreira Santiago

RIO DE JANEIRO

2017

O USO DE REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS PARA A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO SOBRE ESPAÇO VETORIAL

Everton Francisco Ferreira Santiago

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, sob a orientação da Profª. Drª. Márcia Maria Fusaro Pinto.

RIO DE JANEIRO
2017

F383u

Ferreira Santiago, Everton Francisco
O USO DE REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS PARA A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO SOBRE ESPAÇO VETORIAL / Everton Francisco Ferreira Santiago. -- Rio de Janeiro, 2017.
163 f.

Orientadora: Márcia Maria Fusaro Pinto.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2017.

1. Ensino-aprendizagem de Álgebra Linear. 2. Tecnologias. 3. Recursos Visuais. I. Fusaro Pinto, Márcia Maria , orient. II. Título.

O USO DE REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS PARA A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO SOBRE ESPAÇO VETORIAL

EVERTON FRANCISCO FERREIRA SANTIAGO

ORIENTADORA: MÁRCIA MARIA FUSARO PINTO

Dissertação de Mestrado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

____

Profª. Drª. Márcia Maria Fusaro Pinto

UFRJ

Orientadora / Presidente da Banca Examinadora

____

Prof. Drº Victor Augusto Giraldo (UFRJ)

____

Profª. Drª Lilian Nasser (UFRJ)

____

Profª. Drª Rosana Nogueira de Lima (UNIAN)

____

Profª Drª Ângela Rocha dos Santos (UFRJ)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela dádiva da vida, pela oportunidade de ver as suas obras, por todo o seu amor e por me carregar em seus braços, todos os dias.

Agradeço as minhas sobrinhas Júlia e Maria Sthefanny por todo carinho e alegria que trouxeram à minha vida.

Agradeço ao meu irmão Daniel por todo o seu apoio e por estar ao meu lado.

Agradeço aos meus primos, José Marcos por estar sempre em prontidão para qualquer situação e Vanessa pela ajuda em alguns momentos durante esse percurso.

Agradeço a Gilvano e Maria Aparecida, por todo encorajamento e suporte.

Agradeço ao meu ex-professor, orientador na graduação e grande amigo, Vilmar Fonseca, por todo o incentivo.

Agradeço aos professores que conheci na faculdade e que me auxiliaram nesta etapa: André Silva, que gentilmente esteve presente na criação das telas do Geogebra e Eduardo Silva, professor da turma que participou desta pesquisa, um excelente profissional que se envolveu de cabeça no meu projeto, e amigo que não mediu esforços para que esta pesquisa acontecesse.

Agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro- Campus Nilópolis e principalmente ao diretor Wallace Wallory por toda a colaboração a esta pesquisa.

Agradeço a todos os alunos da turma de Álgebra Linear do IFRJ que participaram da pesquisa com muito interesse e esforço.

Agradeço a Universidade Federal do Rio de Janeiro e ao Programa de Mestrado em Ensino da Matemática pela oportunidade de ensino e aprendizagem.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa que foi concedida durante o Mestrado.

Agradeço ao meu professor na pós-graduação, Victor Giraldo, por todos os ensinamentos e reflexões. Sem dúvidas, tornou-se uma fonte de inspiração para a concepção da temática desta pesquisa.

Agradeço a minha orientadora, Márcia Fusaro, por toda a sua generosidade, paciência, disponibilidade, atenção e cuidado ao longo do trabalho. Posso afirmar que hoje sou um profissional melhor por que aprendi muito durante a pós-graduação.

Agradeço principalmente a minha noiva Michele por tudo. As palavras me faltam para que eu consiga explicar o nosso caminho. Obrigado. Amo você.

Resumo

Este estudo, de cunho qualitativo, tem por objetivo investigar de que modos a utilização de recursos visuais, dinâmicos e interativos, com o auxílio de computadores, pode contribuir para a construção, pelos alunos, do conhecimento sobre espaço vetorial. O olhar teórico adotado para a investigação é o da psicologia da educação matemática, entendendo a construção de conceitos matemáticos como em VINNER (1991) e TALL e VINNER (1981). A pesquisa se justifica pelo alto índice de reprovação em Álgebra Linear, tendo em vista a dificuldade de abstração e de visualização dos conceitos que são apresentados nesta disciplina. A investigação foi realizada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, campus Nilópolis. Contou com a participação de dez alunos em seu primeiro ano do curso de Licenciatura em matemática, matriculados na disciplina de Álgebra Linear I. Para desenvolvê-la preparamos uma oficina que foi oferecida em dois encontros, durante o horário de aula da disciplina, no laboratório de informática do Instituto. Como resultados, destacamos a possibilidade de constituição de um ambiente de aprendizagem, com o auxílio de recursos tecnológicos gerando representações visuais e dinâmicas, que permitiu aos participantes concretizar e experimentar visualmente e numericamente conceitos abstratos de Álgebra Linear.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem de Álgebra Linear, Tecnologias, Recursos Visuais.

Abstract

This is a qualitative study aiming to investigate in which ways the use of visual and dynamical resources, using computers, can contribute to the construction, by the students, of knowledge about vector space. The research adopts the perspective of the Psychology of Mathematics Education, with an understanding of the construction of mathematical concepts as in VINNER (1991) AND TALL e VINNER (1981). The research interest is justified by the usual high rate of failure in Linear Algebra, in consequence of the difficulties reported by the students in their attempts to abstract and visualizethe concepts presented in a Linear Algebra course. The research was conducted at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Rio de Janeiro, campus Nilopolis. The ten participants were Mathematics students in the first year attending Linear Algebra I course. To develop the research we prepared a workshop, which was offered in two meetingsin the Computer laboratory of the Institute. As a result of the investigation we have highlighted the possibility of setting up a scenario of learning using technological resources that allowed the participants to experience visual and dynamical representations of the abstract concepts of Linear Algebra.

Keywords: Teaching-learning of Linear Algebra, Technologies, Visual Resources.

Índice de Figuras

Sumário

Introdução

Escolha do Tema

Em um levantamento que fizemos consultando o banco de teses/dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e os principais periódicos na área de educação matemática no país, como por exemplo, os arquivos da Educação Matemática em Revista - SBEM Rio Grande do Sul pudemos notar que as principais pesquisas relativas à Álgebra Linear, que ainda estão em um número inferior se comparadas a outros temas, são produzidas com o intuito de explicar as dificuldades dos alunos na compreensão de seus conceitos.

No caso particular da Álgebra Linear, suas noções básicas vêm sendo o objeto de pesquisas, em especial, por se constituírem como obstáculos para os alunos quando se defrontam pela primeira vez com tais tópicos, abstratos. Este fato é mencionado em Celestino (2000), que em sua dissertação construiu um panorama sobre as pesquisas brasileiras que tem por objeto de estudo o ensino de Álgebra Linear na década de 1990.

A Álgebra Linear traz em sua fundamentação matemática os conceitos de espaço vetorial, subespaço vetorial, dependência e independência linear, base, base-geradora. É uma das disciplinas que compõem o currículo do curso de Licenciatura em Matemática, em grande parte das universidades brasileiras. Concordo com as razões destacadas em Celestino (2000) para seu estudo e sua inserção nos currículos de diversos cursos na área de Ciências Exatas; e consequentemente para o desenvolvimento de pesquisas sobre seu ensino:

> [...] a importância da Álgebra Linear e das pesquisas sobre seu ensino-aprendizagem repousa no fato de que hoje ela se encontra subjacente a quase todos os domínios da Matemática. Desta forma, é imprescindível que aqueles que pretendem trabalhar com as ciências que utilizam a Matemática, tanto como objeto de seu estudo quanto como instrumento para outros estudos, dominem seus principais conceitos. Por isso se implantou o ensino de Álgebra Linear nos diferentes cursos das chamadas Ciências Exatas, como Engenharia, Física, Química, Ciências da Computação e outras, além da Matemática.
>
> (CELESTINO, 2000, p.9)

No entanto, observamos em pesquisas referidas neste trabalho que, de um modo geral, os conceitos de Álgebra Linear são desenvolvidos pelos professores e autores de materiais didáticos de modo interno ao próprio conteúdo, como objeto de estudo em si, excluindo o seu uso em outras áreas de aplicação. Em meu curso de Licenciatura em Matemática, por exemplo, não me recordo de ter participado de discussões em sala de aula que relacionassem o papel dos conceitos de Álgebra Linear em áreas distintas da própria Matemática.

Por outro lado, já como aluno de mestrado no curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT-UFRJ), tive a oportunidade de cursar a disciplina de Álgebra Linear com uma abordagem que não se reduzia a transmitir o conteúdo de forma sintética. Foi aberta a possibilidade de discussões sobre os conteúdos trabalhados e suas aplicações, inclusive trazendo reflexões sobre dificuldades dos alunos em assimilar esses conteúdos e sobre diferentes formas de conduzir o seu ensino-aprendizagem; como por exemplo, explorando a visualização de conceitos principalmente no âmbito da graduação.

Tais discussões iluminaram meus estudos posteriores, que culminaram na proposição e produção desta pesquisa.

A Questão de Pesquisa e Objetivos

Em meu contato com a literatura de pesquisa disponível sobre este tema, deparei-me com as conclusões da pesquisa de mestrado de Ana Luísa Carvalho Furtado (FURTADO, 2010):

> Pensamos que este trabalho suporta muitos desdobramentos, visto que ainda há muito a ser pesquisado nesta área, que é nova dentro do Ensino da Matemática. Os dados e constatações aqui obtidos mostram que mesmo os “melhores” alunos têm dificuldades em assimilar proceitos em Álgebra Linear. *Então naturalmente algumas perguntas surgem, podendo desencadear futuras pesquisas, como: relacionar as dificuldades dos alunos em Álgebra Linear com o ensino que tiveram anteriormente (no Ensino Médio), refazer o estudo com alunos de notas inferiores as do critério utilizado neste trabalho (a fim de buscar a existência de correlação ou não), estudo de novas metodologias de ensino (como um software interativo que permita aos alunos verem o que acontece com as operações da Álgebra Linear), estudo do próprio currículo brasileiro de Álgebra Linear e investigação de possíveis (e prováveis) dificuldades em outros tópicos.*[1]
>
> (FURTADO, 2010, p.134)

Assim, o trecho destacado nas considerações acima, despertou meu interesse como objeto de pesquisa. Propus-me a refletir e elaborar metodologias alternativas que, fazendo uso de representações gráficas e em estágios de desenvolvimento possibilitados pelas tecnologias digitais que temos disponíveis hoje (MORENO-ARMELLA et al,

---

[1] Grifo nosso.

2008), pudessem apoiar os alunos a estabelecer relações entre os conceitos abstratos da Álgebra Linear, resultando em o que entendemos ser um ensino-aprendizagem com significado.

Com essa finalidade, elaborei e desenvolvi um projeto de pesquisa, de cunho qualitativo e com características de uma intervenção, exploratória, que resultou nessa dissertação. Concebi e desenvolvi objetos de aprendizagem para representar virtualmente e permitir a exploração da estrutura de alguns conceitos de espaço vetorial, possibilitando sua visualização e movimentação dinâmica na tela de um computador. Planejamos as atividades e oferecemos uma oficina utilizando tais objetos,envolvendo alunos universitários cursando Álgebra Linear[2] como participantes, para investigar: "De que modos a utilização de recursos cinéticos/interativos com auxílio de computadores, pode contribuir para a construção, pelos alunos, do conhecimento sobre as noções fundamentais da Álgebra Linear, tais como espaço vetorial, subespaço vetorial, combinação linear e base geradora?"

O campo de pesquisa foi uma instituição pública de ensino superior; e o contexto, o de uma disciplina de Álgebra Linear, em que os participantes estavam matriculados. Em horário cedido pelo professor da disciplina, realizei a oficina no laboratório de informática da instituição. Para responder à pesquisa colocada, as respostas dos participantes às atividades são analisadas com os seguintes objetivos específicos:

- Investigar de que modos os alunos utilizam os recursos computacionais disponibilizados;

- Investigar de que modos os alunos utilizam o conteúdo previamente apresentado pelo professor da disciplina de Álgebra Linear;

-Identificar dificuldades evidenciadas durante as atividades realizadas pelos alunos referentes aos conceitos abstratos que envolvem a temática trabalhada;

Estes três objetivos são entendidos como eixos de desenvolvimento de análise e são considerados tanto na proposição das atividades como também na produção do material empírico para ser analisado. A intenção é a de apoiar uma interpretação do material empírico que nos permita responder à questão de pesquisa colocada.

[2] Para participar do projeto, convidamos os dez alunos da turma de Álgebra Linear, do segundo período do curso superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação do Rio de Janeiro (IFRJ).

A estrutura da Dissertação

Organizamos este texto em cinco capítulos. O capítulo 1, Revisão de Literatura, traz a pesquisa de autores que dialogam com a nossa investigação. Revisitamos pesquisas cujo objeto de estudo é o ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, e que destacam dificuldades dos alunos em relação à Álgebra Linear e seus conceitos abstratos.

No capítulo 2 apresentamos o Referencial Teórico com reflexões sobre o desenvolvimento de objetos de aprendizagem para compor as oficinas e suas diversas concepções, recorrem principalmente às discussões em Audino e Nascimento (2012), e também, Fabre, Tamusiunas e Tarouco (2003), De Bettio e Martins (2004), De Castro-Filho (2007), Longmire (2000) e Miranda (2004).

A noção de aprendizagem adotada retoma as noções de imagem de conceito e definição de conceito, cunhadas por Tall e Vinner (1981) e discutidas em Vinner (1991), e constitui a referência teórica para a elaboração dos instrumentos de pesquisa e análise do material produzido. Também incorporamos o entendimento sobre as representações matemáticas e a compreensão dos conceitos matemáticos difundidos em Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008).

O capítulo 3 apresenta os Procedimentos Metodológicos, trazendo o planejamento da pesquisa que propõe a realização de uma oficina com computadores e os objetivos e descrição das atividades elaboradas para o desenvolvimento da oficina. Descrevemos a pesquisa de campo, trazendo informações sobre seu contexto e os participantes e também o relato sobre a realização das atividades no laboratório de informática da instituição.

No capítulo 4, realizamos a Apresentação e Análise do Material, produzidos a partir de relatórios escritos sobre a atividade realizada pelos os alunos com o auxílio do computador.

No capítulo 5,apresentamos as Discussões, Resultados e Conclusões Finais deste trabalho.

O relatório produzido pelos alunos durante a oficina no computador, os quadros-sínteses das questões e o modelo do termo de consentimento assinado pelos próprios alunos encontram-se, respectivamente, nos anexos A, B e C a este texto.

Capítulo 1

Revisão da Literatura

1.1-A pesquisa sobre o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear.

Dentre as pesquisas brasileiras sobre o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear, encontramos a de Celestino (2000). O pesquisador participou de um grupo de estudos na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, produzindo pesquisas sobre o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear. Em seu trabalho, o autor sintetiza estudos que versaram em sua grande maioria sobre o ensino e aprendizagem dos conceitos da Álgebra Linear, tendo o aluno como foco da investigação.

Celestino (2000) problematiza seu tema retomando dados apresentados em relatórios de pesquisa de uma equipe da Universidade de Campinas (UNICAMP- São Paulo), entre os primeiros semestres de 1993 e 1997, envolvendo alunos integrantes de cursos de ciências exatas da UNICAMP, Universidade de São Paulo (USP- São Paulo) e Universidade Estadual Paulista (UNESP- São Paulo). O grupo de pesquisadores investigou que disciplinas os alunos indicavam como fonte de maior dificuldade, apresentando gráficos com informações sobre os índices de aprovação e reprovação em tais matérias.

Neste estudo, a Álgebra Linear assumiu uma posição de alta rejeição pelos estudantes, sendo considerada uma disciplina cujos conceitos não se tornavam claros para os alunos. Celestino (2000) propôs, então, desenvolver uma pesquisa panorâmica para disponibilizar, em seu material, uma fonte em que outros pesquisadores pudessem encontrar propostas e evidenciar as principais dificuldades dentro do ensino-aprendizagem de Álgebra Linear.

Celestino (2000) adotou procedimentos metodológicos de análise documental, produzindo fichas contendo o objetivo, o tipo de pesquisa, a metodologia, referência teórica, bem como a conclusão e a indicação do problema a ser tratado em cada trabalho de pesquisa acessado e escolhido por ele para compor o panorama da literatura em sua pesquisa.

Buscou também referências a teses, dissertações e pesquisas em muitas universidades tais como, por exemplo, a Pontifícia Universidade Católica (PUC) de Campinas e do Rio de Janeiro, a Universidade Santa Úrsula e a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), entre outras instituições. Consultou revistas científicas internacionais como *Educational Studies in Mathematics, The College Mathematics Journal,* e anais de congressos no país, como o ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática).

O autor menciona ainda que em outros países, tais como França e Estados Unidos, por exemplo, os estudos sobre o tema já datavam da década de 1980, citando alguns artigos como Niss[3] (1999), que sob a ótica da Didática da Matemática desenvolve uma análise sobre ocorrência de erros na aprendizagem da Matemática em si, trazendo subsídios para superá-los. Essas dificuldades estão presentes desde a concepção antiga de que somente o aluno seria responsável por não conseguir assimilar os conteúdos passados pelo professor; à percepção de que uma condução da análise da pesquisa deve ser realizada de maneira que ela se torne mais eficaz para ambos os lados envolvidos, aluno e professor; também esclarece que ambas as linhas teóricas e empíricas são distintas e ao mesmo tempo, complementares, fundamentais dentro das pesquisas da Educação Matemática; observa ainda que, em áreas de investigação presentes na Matemática, o ensino e a aprendizagem desempenham papéis distintos: a primeira área se ocupa principalmente de organizar e difundir o conhecimento, enquanto a segunda área procura essencialmente, entender quais fatores auxiliam ou não na aquisição do conhecimento.

Celestino (2000, p.18-21) destaca que este artigo de Niss (1999) se ocupa principalmente em esclarecer quais resultados e questões de pesquisa a “Didática da Matemática”, comumente chamada na Europa, mas também reconhecida como “Educação Matemática” poderia agregar nos estudos sobre os obstáculos que podem bloquear os caminhos do ensino. O autor infere que:

> A procura por novos métodos de ensino e processos de aprendizagem bem como a investigação do papel do professor e do aluno no processo de ensino e aprendizagem, além do exame das propriedades e efeitos de métodos atuais de avaliação em Educação Matemática e a busca de métodos inovadores de avaliação, são ações que apontam uma infinidade de tarefas teóricas e empíricas fundamentais à pesquisa aplicada.
>
> (CELESTINO, 2000, p. 20)

---

[3]NISS, M. Aspects of the nature and state of research in mathematics education. Educational studies in mathematics. v. 40, n. 1, p. 1-24, 1999.

Celestino (2000, p.21) sintetiza os aspectos mencionados por Niss (1999) que interferem no processo de ensino/aprendizagem como: “[...] as características epistemológicas da Matemática, as concepções dos estudantes, as situações sociais e culturais as semelhanças e discrepâncias entre os diferentes registros linguísticos.”. Entendemos a partir desse fragmento, que não somente as barreiras que envolvem cálculos e procedimentos que o estudante deve inferir na matemática, existem também aspectos que estão do lado de fora da sala de aula que podem interferir na aprendizagem.

Dentre as pesquisas em educação matemática nos Estados Unidos selecionadas por Celestino (2000), Kilpatrick[4] (1981) chama-nos a atenção por sintetizar o cenário da pesquisa educacional no país da década de 1960 até 1981, na área da Educação Matemática, não obrigatoriamente focando conceitos de Álgebra Linear. O período considerado estava marcado pelo aparecimento de grupos de pesquisa que se dedicavam a metodologias, de uma maneira geral, com estudos que incentivavam a proposta de resoluções de problemas.

Celestino (2000) comenta:

> Nos anos 60 a preocupação era melhorar o currículo e o ensino de Matemática, logo, as pesquisas forneciam elementos importantes para as mudanças necessárias. Mas, na década de 70 a preocupação foi suprir a necessidade de mão-de-obra. Embora a preocupação dos anos 60 ainda permanecesse em 1980, perdeu-se a confiança de que o governo satisfizesse às necessidades educacionais por meio de sua politica e programa na área de educação. As verbas destinadas às pesquisas na área de educação estavam sofrendo cortes e por isso essas pesquisas vinham passando para o setor privado.
>
> (CELESTINO, 2000, p. 28)

Ao analisar outras pesquisas em Educação Matemática dentro da sua pesquisa, Niss (1999, p.23-29) acredita potencialmente que muitas teorias (como a do processo-objeto, em que focam primeiro na ação, e depois no conceito. Há uma exceção feita à ideia de proceito, que enfatiza a dualidade, mas logo em outros momentos pode ser pré-requisito de algum conceito), e elementos como o próprio currículo, os livros, os materiais envolvidos, os recursos tecnológicos, as avaliações que são programadas e podem-se incluir também as relações, positivas ou negativas, que vão surgir entre o professor e o aluno, sejam primordiais para entendermos toda a formação do ensino.

[4] KILPATRICK, J. Research on the mathematical learning and thinking in the United States. Recherches des de Didactique Mathématiques, vol.2, nº 3, 1981. pp. 363-379.

Para concluir o seu trabalho, Niss (1999) relata que a aprendizagem de um estudante de Matemática deve ser permeada por muito cuidado e atenção para que não ocorra precipitação e que haja espaço para uma integração, sem distrações, entre a tecnologia e ambiente de ensino. Ao sugerir que a aprendizagem pode se tornar mais significativa quando as lacunas no processo forem identificadas e investigadas, o autor também indica que seria impossível abordar de uma só vez em um único artigo todas as vertentes possíveis derivadas da Educação Matemática.

Para uma análise sobre as pesquisas em educação matemática no Brasil, até a década de 1980, Celestino (2000, p.36) retoma Fiorentini[5] (1989), que se propõe a analisar as pesquisas e suas linhas e áreas emergentes. Segundo Fiorentini (1989),até o início dos anos 70, existia um empenho maior sobre o que ensinar, e muitas correntes pedagógicas eram colocadas em menor destaque justamente por essa escolha de foco. Ainda assim, o autor procurou citar que autores como Malba Tahan que na década de 40 escreveram livros atentos a uma preocupação psicopedagógica e que se ocupavam de estabelecer um ensino significativo.

Sobre a época de 1972 a 1979, o autor explica que o foco educacional estava sobre o professor e o modo como ele ensinava, o que ocasionou no surgimento de inúmeras pesquisas que procuravam novas metodologias, atualizações na abordagem das temáticas e como os professores poderiam se adaptar a novas situações de ensino. Após um breve tempo, uma visão maior sobre toda essa problemática foi pensada e a abordagem qualitativa passou a envolver as pesquisas.

Ainda segundo o trabalho de Fiorentini (1989), Celestino relata que o autor estava sempre à procura de materiais que o conduzissem a pesquisas dentro da Educação Matemática. O cenário que ele pôde constatar foi escasso, e dentro ainda dessas possibilidades existiam trabalhos que apresentavam deficiências do ensino, inclusive refletindo sobre o papel do professor. Algumas permaneciam estacionadas no tempo, pois não indicavam os fatores positivos, tão pouco as soluções para os obstáculos constantes, e se tornavam relatos superficiais. Ele cita também que a insuficiência de trabalhos também era um dos fatores que não permitia o avanço da formação de linhas ou áreas de pesquisa da Educação Matemática.

[5]FIORENTINI, D.“Tendências Temáticas e Metodológicas da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil. ” Artigo publicado nos Anais do I Encontro Paulista de Educação Matemática, 1989.

Conclui Celestino (2000) sobre este artigo:

> Destaco fatos importantes como a implantação da Matemática Moderna no Brasil, da pós-graduação e a preocupação de estudar o problema do fracasso do ensino da Matemática. Para este último item é relatada a concentração de esforços na atuação do professor e no modo como ele ensina. Vários trabalhos científicos na época propuseram-se a validar novos métodos e técnicas de ensino, treinar professores nestas inovações e desenvolver recursos didáticos.
>
> (CELESTINO, 2000, p. 40)

Complementando o panorama de pesquisas desse período com as específicas sobre a Didática da Álgebra Linear, Celestino (2000) refere-se ao artigo de Dorier[6] (1998) que destacou o crescente interesse da didática por pesquisas em Álgebra Linear, na França bem como em diversos outros países, como os Estados Unidos, em que muitos estudos começavam a focar o primeiro ano do ensino superior. Na obra de Guershon Harel[7], também comentado por Furtado (2010), Celestino (2000) encontra referências a artigos de outros pesquisadores que, igualmente, buscavam entender, principalmente, a aprendizagem e as dificuldades dos alunos em assimilar conceitos fundamentais da Álgebra Linear.

Celestino (2000, p.47) discute os modos sintético e analítico de abordagem do conteúdo colocando que: "[...] no primeiro, os objetos são dados fornecidos diretamente pra descrição, enquanto no segundo os objetos são dados indiretamente, construídos por definições e propriedades dos seus elementos.". E conclui, para os autores que debateram a questão sobre pensamento sintético e analítico na obra de Dorier (1998), que "[...] a Álgebra Linear pode ser vista como um pensar analiticamente sobre o espaço geométrico." (Celestino, 2000, p.47).

Celestino (2000) relata que gostaria de apresentar e comentar várias outras produções científicas na área de Álgebra Linear. Tentou solicitá-las a muitos pesquisadores em Educação Matemática de diversas universidades, como mencionamos anteriormente, mas não obteve resposta; levando-o então a desconsiderar sua existência. Sendo assim, no que se refere à produção no país, analisou seis investigações na área de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear no Brasil desenvolvidas na década de 90:

[6]État de l'art de larecherche em didactique- À propôs de l'enseigment de l'algébre lineáire." Recherches en didactique des mathématiques, v. 18, n. 2, p. 191-229, 1998.

[7] Pesquisador do Departamento de Matemática e Professor atualmente da Universidade da Califórnia- San Diego. Suas áreas de interesse são: Cognição e epistemologia da matemática e suas implicações no currículo escolar na formação de professores. Em 1990, participou do grupo norte-americano LACSG (Linear Àlgebra Curriculum StudyGroup).

quatro são de autoria de Marlene Alves Dias e uma de Amarildo Melchiades da Silva e Rute Henrique da Silva.

Marlene Alves Dias, hoje professora na Universidade Anhanguera de São Paulo, produziu o seu material na França, buscando uma comparação entre o ensino daquele conteúdo naquele país e no Brasil.

Em Dias (1993)[8], a autora aplicou testes sobre noções centrais do ensino de Álgebra Linear para avaliar o desempenho dos alunos do primeiro ano da faculdade de Lille, na França, concluindo que eles empregavam bem as questões que exigiam técnicas, fato que não ocorria com a utilização de teoremas. Celestino (2000, p.65) destaca a seguinte observação: “[...] a autora afirmou que os estudantes consideram a Matemática como um conjunto de “receitas”[9]que permitia resolver problemas.”.

Já Dias e Artigue (1995)[10] adota a metodologia da Engenharia Didática para analisar problemas de articulação entre os sistemas de representação simbólica em Álgebra Linear, em especial, as representações paramétricas e cartesianas. Celestino (2000, p.68) destaca que: “Segundo a autora, as competências de flexibilidade não podem ser atingidas pelo estudante apenas com esforço pessoal; elas têm de ser levados em conta explicitamente no processo pedagógico.”.

Em Artigue e Dias (1998)[11]as autoras apresentam uma análise de livros didáticos em que procuram investigar as necessidades de articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico, chegando à conclusão que “a articulação não é facilmente acessível e que os estudantes tendem a reduzi-la aos seus aspectos algorítmicos, o que os conduz a todos os tipos de “derrapagens”[12] formais." (Celestino, 2000, p.70)

Na tese de doutorado da pesquisadora (DIAS, 1998) [13] focou-se a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico para representar espaços vetoriais. Realizou uma análise de livros didáticos brasileiros e franceses, e aplicou questionários a alunos também destas nacionalidades, observando as dificuldades apresentadas por eles. Celestino (2000) finaliza ressaltando que “[...] Para que os estudantes adquiram as

---

[8] DIAS ALVES, M. Contribution à l’analyse d’um enseignement experimental d’algèbre linèaire em DEUG A première annèe. Mémoire de DEA. Paris: Université de Paris 7, 1993.
[9] Grifo do autor.
[10]“Articulation Problems between different systems of simbolic representations in linear álgebra.”In Proceedings of the 19th annual meeting of the international for the Psychology of Mathematics Education- vol. 2. p. 34-41, Universidade Federal de Pernambuco- Brasil,1995.
[11] “Articulação de pontos de vista em Álgebra Linear: caso da representação de subespaços vetoriais.”- Artigo- Anais do ENEM- CO 268, 1998.
[12] Grifo do autor.
[13] “Les problémes d’articulation entre points de vue “cartésien” et “paramétrique” dan sl’enseignement de l’algèbre linèaire.” Thése de Doctorat, Paris: Université de Paris7, p. 504, 1998.

competências necessárias desta articulação, é preciso que ela seja considerada de forma explícita no processo de ensino.”. (CELESTINO, 2000, p.74)

Celestino (2000, p. 49-59) discorre sobre os apontamentos principais que as pesquisas da Didática da Matemática revelam no decorrer dos anos; ele destaca que, atualmente, o aluno é visto como um dos elementos principais para o sucesso do ensino o que difere, por exemplo, as pesquisas dos anos 80 cujo foco estava nas resoluções de problemas, e demonstra que novos pensamentos permeiam a área.

Assim, apresenta o trabalho de Amarildo Melchiades da Silva (1997)[14] cujo objetivo estava em investigar a produção de significados que a noção de base em Álgebra Linear poderia provocar aos alunos. Para isso, o autor realizou um estudo com referências históricas e também de origem do conhecimento do tema noção de base, desde os matemáticos dos séculos XVIII e XIX, assim como quais campos semânticos foram produzidos. A sua pesquisa-diagnóstico foi realizada com dois alunos participantes que concluíam o seu primeiro curso de Álgebra Linear.

Durante a sua produção, Silva A. (1997), idealiza frases que tratavam a noção de base para autores distintos e seus respectivos livros didáticos. Dessa maneira, pôde nomear tais campos e inclusive aplicou alguns testes a alunos, antes de conceber a parte final de sua pesquisa. Sobre os campos semânticos, a sua conclusão gira em torno de que os alunos não possuem o mesmo jeito de falar ou de internalizar a matéria assim como um professor, que está habituado que provavelmente estudou inúmeros casos antes da sua exposição em sala de aula. Por isso, talvez os alunos apenas formem campos semânticos diferenciados dos que foram destacados em livros didáticos. Isto não significa necessariamente que não entendam a noção de base em Álgebra Linear.

Procurando apresentar a tese de mestrado de Rute Henrique da Silva (1999) [15], Celestino (2000, p.59-62) descreve que a autora construiu algo semelhante a um minicurso em que apresentava a Álgebra Linear, aos alunos participantes, oriundos do curso de Bacharel em Ciências da Computação da UNESP de Rio Claro e que fariam uso da disciplina durante a graduação. O aspecto interessante desse projeto está na sua metodologia diferenciada. A autora reuniu-se com o coordenador do curso e também com os professores para discutir atividades adequadas para o desenvolvimento da disciplina Álgebra Linear.

---

[14] SILVA, A. MELCHIADES da. –Uma análise da Produção de Significados para a Noção de Base em Álgebra Linear. USU-RJ, dissertação de mestrado, 1997.

[15] SILVA, RUTE H da- Álgebra Linear como curso de serviço para a Computação- Tese de mestrado- UNESP Rio Claro, 1999.

Dessa maneira, Silva (1999) analisou livros didáticos, inclusive a coleção Shaum de 1972, e construiu exercícios que foram divididos em duas categorias: os conceituais que foram reduzidos apenas aos essenciais para o andamento da disciplina e os calculatórios, cuja cobrança foi maior. Abordavam-se dentro da Álgebra Linear as suas partes geométricas, algébrica e matricial.

A autora buscava elaborar as atividades, apresentá-las ao grupo para receber sugestões e logo após, aplicava as questões aos alunos, que participavam em um movimento de assimilação que não se restringia ao individual e sim era trabalhado com o coletivo. Os resultados também seguiam o ritmo da sua preparação inicial: a autora analisava-os e posteriormente o grupo também indicava caminhos para a próxima prática.

Para concluir a sua pesquisa, as discussões sobre os resultados alcançados eram caracterizadas pelos professores participantes em forma de um questionário feito pela autora. Os alunos também registraram as suas opiniões. Finalizando, a autora procurou responder sua questão inicial, procurando entender se uma ênfase maior em Álgebra Linear através desse minicurso poderia ajudar nos obstáculos de entendimento do grupo de alunos de Computação. De sua investigação, concluiu que os alunos não compreendiam os conceitos e preferiam continuar atentos somente aos cálculos. A sua indagação final estava atrelada ao desejo de iniciar um curso de Álgebra Linear utilizando definições conceituais e a partir delas alcançar as imagens conceituais. A autora indaga se esta seria uma realidade possível.

Em sua conclusão final do trabalho, Celestino (2000) oferece uma interpretação interessante para o leitor da sua obra, trazendo um quadro comparativo das obras de autores brasileiros e de autores estrangeiros. Expõe mais uma vez, as suas interpretações sobre as contribuições de todas as obras analisadas em sua pesquisa. De sua análise, conclui que as publicações de pesquisas brasileiras, embora estejam em escala menor e sejam mais recentes que as internacionais, contribuem de maneira eficaz para a literatura de pesquisa sobre ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear e que abrem possibilidades de melhorias sobre a temática que pode ser expandida a todos.

Inserindo-se neste campo de pesquisa, Furtado (2010), como nas pesquisas anteriores, investiga as dificuldades de compreensão apresentadas por alunos em seu segundo ano em uma universidade pública, na disciplina Álgebra Linear II.

A autora problematiza o tema trazendo reflexões sobre a sua experiência como aluna do Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro e como professora substituta da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, em que ministrou essa disciplina. Enfatiza que um dos objetivos do seu trabalho é "[...] colaborar fornecendo estas evidências de escassez de sucesso [por parte dos estudantes] no curso de Álgebra Linear." (FURTADO, 2010, p. 11).

Essas evidências são destacadas pela autora durante o desenvolvimento da pesquisa, e dentre outros fatores, são citadas, por exemplo, as dificuldades dos alunos em resolver e desenvolver problemas da Álgebra Linear relacionados a temas de outras áreas do conhecimento.

A pesquisadora inicia sua pesquisa com uma síntese da ementa da disciplina, evidenciando o objetivo geral estabelecido pelo Departamento de Matemática Aplicada da universidade (Universidade Federal do Rio de Janeiro- UFRJ) em que estudou: que o aluno seja habilitado a resolver problemas sobre os tópicos de equações lineares, cálculo matricial, cálculo vetorial, autovalores e autovetores. Para desenvolver a pesquisa, elabora um questionário em que traz as construções do grupo Linear Algebra Curriculum Study Group(LACSG), que se consolidou como marco na temática de Álgebra Linear, criado em 1990.

Vale mencionar ainda que este grupo desempenhou um papel importante em muitos outros estudos que se seguiram investigando a aprendizagem e elaborando materiais didáticos para o ensino de Álgebra Linear.

"É um grupo que envolveu muitos pesquisadores e que refletia sobre o ensino da Álgebra Linear buscando torná-la mais acessível a todos, o que de certa forma, colabora para uma visão de democratização do ensino e nos traz questionamentos.", destaca ainda (FURTADO, 2010, p.8).

Guershon Harel produziu inúmeros trabalhos e recomendações do grupo, dessa maneira Furtado (2010) destacou algumas recomendações do LACSG, que foram resumidas por ele:

> 1. O programa e a apresentação do primeiro curso de Álgebra Linear deveria responder às necessidades do público[16]da disciplina.
> 2. Departamentos de Matemática deveriam seriamente considerar fazer um primeiro curso de Álgebra Linear usando matrizes como seu eixo principal.
> 3. Os professores deveriam considerar as necessidades e interesses dos alunos como aprendizes.
> 4. Os professores deveriam ser encorajados a utilizar tecnologia em seu primeiro curso de Álgebra Linear.

[16] Grifo da autora. Furtado (2010) explica que o público a que se refere é o de alunos da engenharia que representam uma quantidade superior de alunos em relação aos de licenciatura e bacharelado, inclusive no Brasil.

> 5. Ao menos um “segundo curso” em teoria matricial/álgebra linear deveria ser uma grande prioridade para todo currículo matemático.
>
> (FURTADO, 2010, p.8-9)

Assim como Celestino (2000), a autora reafirma que pesquisas no Brasil sobre esta temática são recentes, datadas a partir dos anos 90. Referencia-se em Marlene Alves Dias e as suas respectivas obras e também destaca as investigações de Dorier (1997)[17]na França, e o período da década de 60, marcado pela reforma estabelecida pela Matemática Moderna.

A autora analisa então a obra de Dorier (1997), um livro editado por ele que contêm diversos trabalhos com distintos autores em que a Álgebra Linear é estudada de acordo com a sua exibição aos alunos com idades entre 18 e 20 anos, no primeiro ano da Universidade Francesa. Também destaca que na França ainda existe uma corrente de pensamentos entre os professores que lecionam a disciplina de Álgebra Linear, que muitos temas mais conceituais do que operacionais como, por exemplo, base e espaço vetorial, estão em evidência quando falamos das principais dificuldades dos alunos. E complementa:

> O livro é dividido em duas partes:
>
> 1. Análise epistemológica da gênese da teoria do Espaço Vetorial: reflexão epistemológica baseada num processo dialético da análise histórica da gênese dos conceitos da Álgebra Linear (estudos conduzidos entre 1987 e 1994);
>
> 2. Questões de ensino e aprendizagem: análise didática do ensino da Álgebra Linear e das dificuldades dos alunos;
>
> FURTADO (2010, p.13)

Furtado (2010) também se ocupa em esclarecer que existe uma oposição de reflexões sobre a própria Álgebra Linear, que à primeira vista pode parecer um pouco simples, mas quando se resgatam problemáticas para desenvolver o seu ensino, os seus obstáculos mais particulares chegam à frente. Assim, ela desmistifica algumas concepções que não podem ser utilizadas durante o ensino-aprendizagem da disciplina:

> Dentre as muitas razões para a dificuldade na compreensão de conceitos mais abstratos da Álgebra Linear, gostaria de salientar que se verificou neste trabalho que não há situação problema que os alunos possam utilizar em um primeiro curso de Álgebra Linear, que dêem origem ao desenvolvimento de suas principais questões (espaço vetorial, transformação linear e etc). As situações existentes exigem conhecimento mais profundo de outras disciplinas, ou da própriaÁlgebra Linear, ou são muito elementares e podem ser resolvidas com a Geometria Analítica, por exemplo. Tal constatação contradiz a ideia de que sempre é possível facilitar o aprendizado de algum tema a partir do uso de suas aplicações.
>
> (FURTADO, 2010, p.12)

[17] DORIER, “L’enseignement de l’algèbre linèaire en question”. França: La Pensèe Sauvage Èditions, 1997, p. 291-297.

Foram realizadas pesquisas com alunos de universidades na situação referida por Dorier (1997) entre 1987 e 1994, e as investigações chegaram a conclusões diversas que se encontravam em comum acordo no aspecto de que os alunos ainda não superaram os principais obstáculos de entendimento dos conceitos formais.

Furtado (2010) referencia-se em três princípios básicos propostos por Harel – concretização, necessidade e generalização, fundamentais para o entendimento da construção da imagem e definição de conceito (TALL e VINNER, 1981)[18], sintetizando-os da seguinte forma:

> A concretização é a aplicação de um conceito em algo geométrico (que é o que neste caso é considerado como "concreto"). Esta percepção geométrica deve colaborar na construção de imagens de conceito, que servem de suporte para uma futura abstração.
> A necessidade está presente quando o aluno considera indispensável utilizar um conceito anteriormente entendido para a resolução de uma questão. A generalidade é o princípio mais difícil de ser alcançado.
> A generalidade exige do estudante que ele consiga abstrair o que ele aprendeu antes num contexto particular, e segundo o autor isto é difícil, porque, muitas vezes, não é possível separar o objeto de sua representação simbólica.
> (FURTADO, 2010 apud HAREL (177-189, 2000) p.9)

Furtado (2010) desenvolveu seu estudo empírico qualitativo em duas fases ou etapas: aplicação de um questionário piloto e de outro, principal. Para chegar até essas definições foram selecionados dois grupos diferentes de alunos da seguinte maneira: para o questionário piloto, chegou-se a oito alunos da UFRJ que tinham concluído a disciplina de Álgebra Linear II, não eram repetentes, e todos eram provenientes de cursos distintos da Engenharia. Os alunos selecionados estavam dentre oitocentos alunos no total e foram destacados de acordo com um sistema feito com as suas notas: deveriam possuir mais do que seis no vestibular e mais do que oito em Cálculo (matéria unificada na universidade em questão). Cinquenta e nove alunos foram pré-selecionados e os oito finalistas foram a quantidade de participantes que foram localizados e aceitaram envolver-se na pesquisa.

Para a segunda etapa, com o questionário principal, cento e sessenta e três alunos foram incialmente escolhidos, dentre alunos que estavam concluindo a disciplina Álgebra Linear II. Os critérios de nota para estes alunos foram modificados, porque ingressaram com notas inferiores ao primeiro grupo. Ao fim, treze alunos estavam aptos

[18]"Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity."Educational Studies in Mathematics, 12, pp. 151-157, 1981.

a participar e com o acréscimo de mais um aluno voluntário, que inicialmente não fazia parte do primeiro grupo, totalizando quatorze alunos componente.

Ambos os questionários traziam questões de cunho pessoal e perguntas que envolviam a Álgebra Linear. As indagações deveriam ser respondidas em ordem, pois uma questão contribuía para o entendimento da outra. A autora permitia que os alunos modificassem as suas respostas no final de cada questionário, de maneira que ele também justificasse o motivo da sua mudança. Mas ao fim, nenhum aluno desejou utilizar essa opção. Para encerrar o ciclo das atividades, a autora realizou entrevistas com os alunos, que foram gravadas e transcritas na íntegra.

Em sua análise dos questionários, a autora adotou como perspectiva teórica a noção de proceito[19]elaborada por Gray e Tall[20] (1991), Gray e Tall[21] (1994), e Tall (2004)[22]. Em seguida, expõe as respostas de cada aluno, nas duas fases, compõe quadros explicativos sobre as questões utilizadas e reflete sobre os conceitos utilizados em ambos os questionários.

Furtado (2010) chega às suas conclusões finais refletindo sobre a maneira que os alunos estão construindo inúmeras dúvidas durante o processo de aprendizagem de Álgebra Linear e a carência na assimilação dos proceitos envolvidos na disciplina.

A pesquisadora sugere como desdobramentos de sua pesquisa que novas metodologias e propostas alternativas de ensino sejam consideradas e incentivadas para a melhoria da qualidade do ensino-aprendizagem da Álgebra Linear. Tal fato levou a autora às seguintes considerações:

> É preciso uma reflexão sobre que tipo de alunos queremos formar. Com a resposta em mente, uma reforma curricular poderia ser realizada, a fim de tornar nosso ensino mais pragmático e computacional (formando profissionais bons e pragmáticos, que foi o esforço americano a partir do LACSG[23]) ou um ensino que dialogue mais com o aluno sobre conceitos delicados e que tanto custou a humanidade desenvolver (formando profissionais com maior embasamento teórico capazes de atuar no desenvolvimento da ciência). Cremos que a sociedade necessite de todo tipo de

[19]Utilizamos aqui uma definição de Gray e Tall que foi utilizada pela autora em seu trabalho, e acreditamos que seja uma interpretação concisa e esclarecedora sobre o tema; Segundo Gray e Tall (1991, p. 2, apud FURTADO, 2010, p. 28): "Nós definimos um proceito como uma mistura de processo e conceito, em que processo e produto são representados pelo mesmo simbolismo. Assim, o símbolo para um proceito pode evocar um processo e um conceito. " (Gray e Tall, 1991, p.2)

[20]"Duality, ambiguity e flexibility in successful mathematical thinking".PME 15, Assisi, 2 72-79, 1991.

[21]"Duality, ambiguity e flexibility in successful mathematical thinking".Thejornal for research in mathematics education, 26(2), 115-141, 1994.

[22]"Thinking through three worlds of mathematics".Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 4, 281288.

[23]LACSG- The Linear Álgebra Curriculum Study Group.

> profissional. Logo, não se pode abrir mão de pessoas qualificadas para atuarem como agentes do crescimento tecnológico.
> (FURTADO, 2010, p.133)

Dessa maneira, Furtado (2010), destaca algumas perspectivas para os estudos em Álgebra Linear: como considerar e trabalhar para que as dificuldades de séries anteriores dos alunos sejam resolvidas; como as novas metodologias podem estar inseridas no contexto educacional; como o estudo do programa da Álgebra Linear no Brasil e os seus obstáculos podem interferir positivamente no entendimento da área.

Ao relatarmos o trabalho de Coimbra (2008), notamos que o autor inicia a sua pesquisa relatando as dificuldades de muitos estudantes em assimilar e compreender a matemática e seus respectivos usos, de forma geral. Ele relata que a sociedade enxerga a matemática como uma área extremamente difícil, e que somente os mais inteligentes entendiam da arte dos cálculos. O autor também acredita que a grande problemática da matemática está internalizada nas escolas e nas relações entre alunos e professores, pois os métodos e estratégias utilizados para produzir o ensino são os responsáveis pelos obstáculos que surgem. Ele enfatiza que: “Parece haver algo no novo saber que não encontra ancoradouro na estrutura cognitiva do aluno universitário, e isso, no caso do estudo da Álgebra Linear, tem se mostrado de forma ostensiva.” (COIMBRA 2008, p.11).

Coimbra (2008), assim como Furtado (2010), retoma Celestino (2000), apresentando dados sobre as reprovações de alunos de instituições importantes do país e no exterior, considerando que os altos índices de reprovação na disciplina é uma característica mundial. Refletindo sobre este cenário, Coimbra (2008), disserta sobre a sua experiência como professora no estado do Pará, em universidades públicas, onde lecionava exatamente a disciplina de Álgebra Linear, e expõe as dificuldades que se relacionavam a esta área. O autor propõe investigar, estabelecendo como foco quais os obstáculos mais evidentes na conceituação de espaço vetorial.

Para o autor, a queixa dos alunos em compreender o motivo de estudar quaisquer áreas da matemática pode estar ancorada em diversos motivos como:

> [...] demonstra a existência de obstáculos à aprendizagem, decorrentes não só da filosofia matemática subjacente ao processo de ensino, mas de outras causas que precisam ser melhores compreendidas em ambiente de ensino que privilegia os processos mentais abstratos e pelo não compromisso de aplicabilidade ao mundo real do conhecimento ali gerado, de estabelecer relações entre o novo saber e os saberes já existentes em sua estrutura cognitiva.
> (COIMBRA, 2008, p. 6)

Fundamentou-se em Bachelard (1996)[24] e D'Amore (2005)[25], assumindo a relação entre aprendizagem/conhecimento e o desenvolvimento histórico-epistemológico do conhecimento. Coimbra (2008) então sintetiza as principais ideias presentes em seu estudo: a forma de aceitação da matemática como conjunto de regras sem aplicação no cotidiano, a existência de inúmeros obstáculos de entendimento e especificamente a situação da Álgebra Linear com índices de reprovações alarmantes. Ele entende que as principais críticas ao ensino da matéria são atuais:

> A Álgebra Linear, grosso modo, se caracteriza como uma teoria algébricaunificadora para o estudo de diferentes áreas da matemática, dentre elas, ageometria, as equações diferenciais lineares, a análise funcional, além daanálise matricial e por isso tem um caráter abstrato no já abstrato mundo damatemática. É isso que amiúde ouvimos pelos corredores de nossos alunosquando a "enfrentam" pela primeira vez: "Isso é muito abstrato!" Detentora dealtos índices de reprovação **[sic]**há nível planetário, ou seja, não apenas no Brasil, oensino desta matéria tem sido merecedor da atenção de muitos pesquisadores.
>
> (COIMBRA, 2008, p.6-7)

Estas críticas o conduziram a propor uma pesquisa empírica na última semana de aula do semestre letivo em uma universidade pública de Belém do Pará, entrevistando quinze alunos, de duas turmas distintas, sob a responsabilidade de professores doutores em Matemática. Coimbra (2008) aplicou um questionário com perguntas diretas sobre o entendimento de conceitos básicos sobre espaço vetorial. Muitos estudantes julgam que quaisquer respostas sobre conhecimentos matemáticos devem ser respondidos somente com cálculos; também existe a dificuldade em construir respostas que não estejam sempre ligadas à argumentação formal; a difícil assimilação de novas imagens e possibilidades de expansão de novos conceitos adquiridos; e os obstáculos no ensino de propriedades axiomáticas na matemática em geral.

Coimbra (2008) referencia-seno construtivismo de Piaget, reconhecendo que o conhecimento é produzido ao longo da vida e das experiências acumuladas, e assim também devem ser analisadas as formas subjetivas de obtenção de conhecimento, por cada aluno. Nessas ideias, a participação do professor é fundamental para envolver o aluno na construção do conhecimento, preparando um material adequado e atrativo, elucidando dúvidas e sendo aberto a conhecer diversas áreas. Os obstáculos inerentes ao

---

[24] "A formação do espírito cientifico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento". Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

[25] "Epistemologia e Didática da Matemática." Escrituras Editora: São Paulo, 2005.

conhecimento devem ser debatidos, e, segundo o autor, são fruto de natureza cognitiva, epistemológica, ontogenética e didática.

Aprofundando a sua visão sobre considerações da aquisição de conhecimentos, o autor retoma Platão e Bacon, procurando destacar alguns pontos da História do Ensino da Matemática e da Álgebra Linear, fundamentando-se em Oliveira[26](2005), Celestino (2000) e Gueudet-Chartier, (2003)[27].Ao concluir o entendimento sobre os obstáculos didáticos, adota D'Amore (2005) como conseguinte referencial teórico para investigá-los.

Da análise dos questionários respondidos pelos alunos, Coimbra (2008) evidencia principalmente, a não assimilação dos novos conteúdos, os obstáculos verbais com a linguagem da Álgebra Linear, o desconhecimento da história do conteúdo, e o reconhecimento de um despreparo dos alunos recorrente de séries anteriores. O autor enfatiza que:

> No caso da sala de aula o conhecimento não é adquirido diretamente danatureza, mas sim mediado pelo professor. O professor conhecendo bem oassunto, as dificuldades, as técnicas didáticas, os alunos, os pré-requisitos, osobjetivos a serem alcançados, pode e deve proporcionar para seus alunosfacilidades na aprendizagem.
>
> (COIMBRA, 2008, p. 10)

Da análise realizada, o autor conclui que uma abordagem do ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, adotando somente material geométrico não evita a emergência de erros, caso os estudantes não consigam relacionar os aspectos algébricos e geométricos:

> A geometria poderá ajudar com seus exemplos, com figuras, mas devemos ter cuidados para não exagerar no uso da geometria e deixar o aluno com a visão de que Álgebra Linear está baseada somente na geometria. A integração de domínios é importante para que o aluno perceba as correspondências entre as definições formais, as figuras, os exemplos e tenha uma visão mais ampla dos conceitos.
>
> (COIMBRA, 2008, p.68)

O autor menciona que a integração de domínios está inserida nos estudos de Álgebra Linear, devido à sua natureza de disciplina unificadora. Coimbra (2008) sintetiza que:

> A integração de domínios pode ser vista como um meio de se obter diferentes formulações de um dado problema, permitindo uma nova visão das dificuldades encontradas e, assim, disponibilizar ferramentas e técnicas para

---

[26]"Como funcionam os Recursos Meta em Sala de Álgebra Linear?" Dissertação de Mestrado. PUC/SP, 2005.

[27]"Should we teach linear algebra through geometry?" www.elsevier.com, Linear Algebra and its Applications 2003.

> resolver a primeira formulação. Em termos mais precisos, se os conhecimentos de um certo domínio, que podem ser seus conceitos, suas propriedades e até os procedimentos matemáticos, não são suficientes para avançar em uma dada situação, ou problema, o aluno deverá lançar mão dos conhecimentos de outrosdomínios.
>
> (COIMBRA, 2008, p.68)

Complementando, o autor argumenta que os professores de Álgebra Linear devem estar atentos tanto aos obstáculos epistemológicos, relacionados à própria história do desenvolvimento da área, quanto à sua natureza abstrata, e como enfatizada por ele, à sua característica unificadora.

Ao encontrarmos em Chiari (2013) uma investigação sobre o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear explicitando que utilizaria a Educação Matemática como norteadora de suas pesquisas, observamos que a autora acredita ter elaborado um material que abrange áreas muito enriquecedoras como o uso de tecnologias digitais, a educação à distância em Educação Matemática e também as suas concepções históricas.

Chiari (2013) apoia-se em D'Ambrosio e Borba (2010)[28] e afirma que a principal motivação das diversas tendências em Educação Matemática no Brasil é a busca por alternativas que solucionem os problemas enfrentados tanto por alunos como professores para o ensino e a aprendizagem da matemática, em geral. O seu principal objetivo foi apresentar trabalhos e seus respectivos resultados, que estivessem correlacionados com o ensino ou com a aprendizagem da Álgebra Linear em cursos de graduação pertinentes ao Brasil.

Chiari (2013) observou a escassez das investigações sobre o tema ensino e aprendizagem de Álgebra Linear entre os anos de 2000 e 2010. Para refinar as suas buscas e conseguir trabalhos atuais e digitalizados selecionou treze trabalhos para estudo. Dentre eles estavam os que revisitamos neste relatório de pesquisa: os de Celestino (2000), Coimbra (2008) e Furtado (2010). Segundo a metodologia adotada pela autora, ela desenvolveu uma análise e síntese do resumo da introdução e das considerações finais, identificando a tendência que melhor situa o trabalho. A autora produziu fichas com seus apontamentos sobre cada pesquisa e preparou um mapa conceitual em que ilustrava as relações de cada trabalho com as suas respectivas tendências em educação matemática.

De suas observações sobre o ensino-aprendizagem da disciplina de Álgebra Linear, Chiari (2013) destaca:

[28]D'AMBROSIO, U.; BORBA, M. C. Tapestry of trends in Matematics Education.Zdm - International Journal on Mathematics Education, Berlim, v. 42, n. 34, p.271-279, jun. 2010.

> Esta disciplina abrange determinados conteúdos-chave. Durante minha análise sobre as relações entre as pesquisas que focam seu ensino ou sua aprendizagem e algumas tendências em EM, pude perceber, também, de que forma os treze trabalhos analisados focaram seus estudos. O conceito de base foi o que mais apareceu como interesse principal de pesquisa, sendo estudado por 38% das teses e dissertações. Dependência e independência linear e as transformações lineares foram estudadas, cada uma, por 23% dos trabalhos, aproximadamente. Em seguida apareceram os trabalhos que olharam para a disciplina de maneira geral, sem escolher um conteúdo específico e, por fim, vieram os temas espaço vetorial, coordenadas de vetores e matrizes, que foram estudados, cada um, por aproximadamente 7% dos trabalhos. Algumas pesquisas optaram por estudar mais de um tema, motivo pelo qual o somatório dos percentuais apresentados neste parágrafo ultrapassa 100%.
> (CHIARI, 2013, p.8)

Em suas considerações finais, a autora destaca que esta organização foi importante permitindo localizar inúmeras lacunas a serem preenchidas nas diversas tendências em Educação Matemática. A autora comenta que um dos temas da sua tese, o ensino ou a aprendizagem da Álgebra Linear na Educação a Distância, foi mencionado por apenas uma pesquisa dentre as coletadas, e as mesmas pesquisas, em sua análise final, não se relacionavam completamente a uma tendência específica. Em parte, Chiari (2013) acredita que muito ainda deve ser feito, produzido e pensado para que todas as tendências possam estar relacionadas ao menos a uma área matemática.

Rodrigues (2009) realizou uma investigação com o propósito de produzir atividades para trabalhar conceitos básicos de Álgebra Linear utilizando um software educativo. Os participantes foram os alunos da referida disciplina na própria universidade em que cursava o mestrado.

Por ser professor de uma turma de Álgebra Linear, com experiência desde 1996, Rodrigues (2009) expressa sua hipótese sobre as dificuldades dos alunos em aprender o conteúdo e afirma "[...] num processo de reflexão da prática docente, [que] foram identificados três fatores: a novidade dos conteúdos, o alto grau de abstração dos assuntos e o grande volume de informações.". (ibid.,p.11-12).

Para fundamentar a construção e a proposição de sua atividade, o autor retoma a história da Álgebra Linear. Em sua revisão da literatura, busca pesquisas que o auxiliem a compreender quais são as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos. O principal objetivo do autor foi buscar alternativas para a aprendizagem dos conceitos de base e dimensão de um Espaço Vetorial.

Para elaborara sua atividade, o autor retomou dados das instituições escolhidas para desenvolver sua pesquisa, analisando a ementa e os conteúdos trabalhados em sala de aula com a Álgebra Linear. Esse procedimento foi importante para que o autor produzisse as articulações necessárias entre cada atividade proposta e os obstáculos ao ensino-aprendizagem do conteúdo proposto.

Em seguida, Rodrigues (2009) analisa os livros utilizados nas três instituições de ensino em que a pesquisa seria realizada. Com base nos exercícios, abordagem dos conteúdos e a sequência didática de cada livro procurou também detalhar como cada autor introduzia as ideias e concepções e cada particularidade de método adotado. Os livros didáticos analisados foram: Introdução à Álgebra Linear: com aplicações, de Bernard Kolman, 8ª edição; Álgebra Linear: com aplicações, de Anton Howard, 8ª edição; e Álgebra Linear e suas aplicações, de David C. Lay, 2ª edição.

Rodrigues (2009) escolhe desenvolver um software educativo exclusivamente para o ensino de base e dimensão, observando que:

> Para um software educativo que promova o ensino de um conteúdo de maneiraindependente, possibilitando a interação do conteúdo com o aluno, com o professor e com outros alunos, e que permita, além disso, a intervenção do professor quando necessário, é desejável que a concepção teórica de aprendizagem seja o Construtivismo, pois este permeia a interação do conteúdo com o aluno, por meio da ação do estudante com o objeto do conhecimento, abstraindo, num processo reflexivo, o conteúdo, através da sua própria ação.
>
> (RODRIGUES, 2009, p.38)

Adotando esta perspectiva teórica, o autor procurou investigar processos de construção mentais envolvidos na construção do conhecimento de Álgebra Linear, utilizando o software educacional desenvolvido, destacando a importância do erro, as trocas estabelecidas entre o professor e o aluno, a constatação dos resultados, a melhor visualização nos conceitos abstratos, e as estruturas cognitivas envolvidas no desenvolvimento das competências do aluno ao trabalhar interativamente. Conclui a escolha por um software permite análises durante todo o percurso da atividade e também posteriormente à sua execução.

Sobre a seleção do software, o Flash Mx, Rodrigues (2009) justifica:

> O *Flash* Mx[que] é uma ferramenta de autoria e edição de imagens vetoriais com animação, som e interatividade, com um grande poder de processamento multimídia otimizados para a publicação na *internet*. Seu conteúdo é baseado em imagens vetoriais, o que permite a criação de efeitos avançados em arquivos bastante pequenos, pois as imagens vetoriais são geradas por meio de cálculos matemáticos executados pelo computador, onde os arquivos que contêm essas imagens armazenam somente as fórmulas matemáticas que representam formas, curvas e cores, o que minimiza bastante o tamanho dos arquivos. Isso viabiliza a sua utilização na web, pois, devido a essa grande redução, os programas carregam bem mais rápidos.
>
> (RODRIGUES, 2009, p.47)

Um grupo de pesquisa esteve associado à investigação, desde a concepção, elaboração e até a aplicação da atividade: o próprio autor, o seu orientador, um bolsista de iniciação científica, dois programadores para desenvolver o software, um auxiliar de pesquisa. Houve também a participação do setor de comunicação de uma das universidades envolvidas no projeto e de duas alunas que participaram de atividades introdutórias para avaliar o software.

Rodrigues (2009) apresenta as telas da atividade com seus respectivos objetivos gerais e específicos, e as etapas das ações desenvolvidas durante as atividades: uma pequena introdução com a retomada de assuntos que fundamentaram os conceitos que serão trabalhados pelos alunos, as seções base e dimensão e, por conseguinte, as telas de visualização a que os alunos tiveram acesso.

Os participantes da pesquisa foram trinta e nove alunos do sexto período de Licenciatura em Matemática da PUC Minas de Betim que cursavam Álgebra Linear. As atividades foram desenvolvidas em um laboratório de informática e no total de quatro tempos de aulas.

Para análise do material de campo, Rodrigues (2009) produziu quadros e gráficos com as percepções dos comportamentos dos alunos obtidas durante a atividade, com os problemas evidenciados em cada aula e a solução encontrada por ele para reverter as dificuldades dos mesmos alunos.

Em suas conclusões, o autor destaca os obstáculos em relação ao entendimento do próprio software, na compreensão dos conceitos da Álgebra Linear, o suporte significativo do recurso geométrico utilizado na compreensão dos conceitos, a importância da leitura realizada através do software para atingir o entendimento da disciplina. Concluiu que o auxílio do software, de um modo geral, contribui positivamente para que os alunos compreendessem melhor o conteúdo. Assim, o autor define que:

> Com a aplicação e a avaliação do *SOFTWARE* em uma turma do curso de Licenciatura em Matemática da PUCMINAS, foi possível identificar alguns problemas quanto à usabilidade, que serão corrigidos, futuramente, no Grupo de Estudo e Pesquisa em Informática Educativa para o Ensino de Matemática da PUCMINAS. Também se constatou um alto grau de satisfação dos alunos com a utilização do *SOFTWARE*, além de se verificar, por meio de avaliações escritas, a compreensão dos conceitos de Base e Dimensão de um Espaço Vetorial para a maioria desses alunos.
>
> (RODRIGUES, 2009, p.103)

1.2- Contribuições para o campo de pesquisa

A nossa pesquisa se identifica com as pesquisas nesta revisão no que se refere à preocupação existente com os altos índices de reprovação na disciplina Álgebra Linear; em sua busca por alternativas para o ensino-aprendizagem significativo daquele conhecimento e importância atribuída à elaboração de materiais para seu ensino. Para analisar uma proposta de abordagem de ensino alternativa para o conteúdo, desenvolvemos uma pesquisa qualitativa concebendo materiais para explorar os conceitos de combinação linear e base de um espaço vetorial. Propusemos uma oficina a alunos voluntários, utilizando computadores. Aproximamo-nos, portanto, das pesquisas de Rodrigues (2009) e Chiari (2013) ao concebermos um material aliado à tecnologia para oferecer constituir novos meios de aprendizagem em Álgebra Linear.

Diferente daqueles pesquisadores investigamos de que modos uma atividade utilizando objetos de aprendizagem que concebemos e desenvolvemos, em nosso caso, utilizando o software Geogebra, permitiria novos caminhos, novas perspectivas para a produção de conhecimento, em um ambiente dinâmico e interativo. Como destacado em Celestino (2000): "[...] a Álgebra linear pode ser vista como um pensar analiticamente sobre o espaço geométrico". (p.47). Para desenvolver uma flexibilidade em articular diferente sistemas de representações, no nosso caso, geométrica, numérica e algébrica retomamos os três princípios básicos propostos por Harel em Furtado (2010) da concretização, necessidade e generalização, buscando a construção da imagem conceitual (TALL e VINNER, 1981) dos conceitos base, combinação linear e subespaço vetorial.

Acreditamos que o caminho das leituras que trouxemos até este capítulo nos proporcionou reflexões como: as principais dificuldades dos alunos, identificadas inclusive na transição entre a representação em uma figura construída ou projetada para a sua representação algébrica; ou em considerações que o curso de Álgebra Linear deve ser desenvolvido de maneira gradual e sobre o espaço de produção de diversas representações de objetos matemáticos, dentre alguns exemplos. A discussão se volta também para as múltiplas possibilidades de quadros e registros de representação semiótica que podem permear o ensino dos conceitos algébricos.

Nocapítulo a seguir, trazemos as referências teóricas que adotamos na análise do material produzido na pesquisa de campo.

Capítulo 2

Referencial Teórico

Ao refletirmos sobre as possíveis implicações do uso da tecnologia em nosso cotidiano, observamos transformações em diversas áreas. De fato, a revolução tecnológica como a que estamos vivendo transforma desde ações como a comunicação, com a agilidade no envio e recebimento de mensagens e as chamadas telefônicas, até o comércio, com as vendas online, as áreas de saúde, pesquisa, clima, entre inúmeros outros exemplos. A tecnologia está presente também na educação, e pode interferir em diversos processos de ensino-aprendizagem.

A respeito destes últimos, Audino e Nascimento (2012, p.128) chamam nossa atenção que: “[...] a atualização de metodologias nos coloca diante de um momento em que a informática e, sobretudo, a Internet, constitui-se numa realidade sem volta, reconfigurando nosso cotidiano.”.

O desenvolvimento de nossa pesquisa configura-se neste cenário, com a proposição de conceber objetos de aprendizagem utilizando o software Geogebra[29]. A escolha deste software se justifica por ser um software de geometria dinâmica, livre, possibilitando múltiplas representações dos conceitos envolvidos, proporcionando ao aluno simultaneamente, uma experimentação visual manipulando os objetos seletores e uma experimentação numérica variando os parâmetros, de modo que as atividades possibilitem explorações dos conceitos.

Acreditamos em uma busca por atualização de recursos na área da educação como um modo de estabelecer vínculos com a realidade dos estudantes, mantendo-nos atualizados com a crescente demanda por estratégias alternativas para o ensino que se mesclam com as já experimentadas.

2.1- Objetos de aprendizagem e suas diversas concepções

Dentre os recursos pedagógicos que foram concebidos à luz da inserção da Internet e do computador, encontramos muitos estudos sobre a temática de Objetos de

[29]O software **Geogebra** é uma ferramenta dinâmica, acessível, e gratuita que auxilia na construção de objetos geométricos e gráficos de funções e equações e foi desenvolvido em linguagem Java, facilitando a sua disponibilidade em plataformas variadas na internet. O programa está disponível para download emhttp://www.geogebra.org

Aprendizagem (*"Learning Objects, LO's"*) termo definido inicialmente nas pesquisas do Learning Technology Standards Committee (LTSC), do consórcio Institute of Eletrical and Eletronics Engineers (IEEE), (IEEE/LTSC, 2000). Outros autores procuram nomeá-los sob outras perspectivas, tais como "objetos educacionais" em Fabre, Tamusiunas e Tarouco (2003), ou "objetos de aprendizado" em (De Bettio e Martins, 2004), dentre outras nomenclaturas.

Fabre, Tamusiunas e Tarouco (2003) salientam que as tecnologias de informática juntamente com as de comunicação proporcionaram o surgimento de materiais e recursos didáticos que utilizam a interatividade, constituindo ambientes de ensino-aprendizado fundamentados nas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC's). Como ressalva também indica que para a realização de projetos e desenvolvimento desses recursos, há que se levar em conta o investimento de recursos humanos e financeiros.

Tal constatação resultou em elaboração de uma metodologia direcionada a objetos, denominados objetos educacionais (learning objects), havendo organizações com propostas para sua padronização; como exemplos, o IEEE (1484.12.1-2002 Standard for Learning Object Metadata) e ISO (SC 36 WG 2 - Information Technology for Learning, Education and Training) com sua categorização, os chamados metadados.

Em Fabre, Tamusiunas e Tarouco (2003) notamos a informação de que os metadados dos objetos educacionais são responsáveis por apresentar as características pertinentes para registrá-los em depósitos de objetos educacionais que serão utilizados novamente em outras atividades, cujo resgate dentro de sistemas de busca ou nos chamados learning management systems (LMS) permitem a formação de outras possíveis unidades de aprendizagem.

Existem diversas definições de objetos de aprendizagem e elementos correlacionados, compartilhadas pelos inúmeros pesquisadores que se ocuparam em elaborar um conceito para tal noção.

Dentre elas, Fabre, Tamusiunas e Tarouco (2003) propõem que:

> Objetos educacionais podem ser definidos como qualquer recurso, suplementar ao processo de aprendizagem, que pode ser reusado para apoiar a aprendizagem. O termo objeto educacional (learning object) geralmente aplica-se a materiais educacionais projetados e construídos em pequenos conjuntos com vistas a maximizar as situações de aprendizagem onde o recurso pode ser utilizado. A ideia básica é a de que os objetos sejam como blocos com os quais será construído o contexto de aprendizagem. O projeto e criação destes objetos são realizados usando-se linguagens e ferramentas de autoria que permitem maior produtividade uma vez que a construção dos

> mesmos demanda elevada quantidade de tempo e recursos, especialmente quando envolvem multimídia.
>
> (FABRE, TAMUSIUNAS E TAROUCO,2003, p.2)

Dessa maneira, os objetos de aprendizagem denominados como objetos educacionais são recursos que podem envolver ou não aplicações multimídias. Através de um entendimento de que os objetos de aprendizagem podem ser comparados a blocos para constituir o contexto da aprendizagem, é possível visualizarmos os benefícios que a articulação entre tecnologia e os conteúdos de aprendizagem podem proporcionar ao aluno.

Para Audino e Nascimento (2012), uma definição mais abrangente caracteriza os objetos de aprendizagem como:

> [...] recursos digitais dinâmicos, interativos e reutilizáveis em diferentes ambientes de aprendizagem elaborados a partir de uma base tecnológica. Desenvolvidos com fins educacionais, eles cobrem diversas modalidades de ensino: presencial, híbrida ou a distância; diversos campos de atuação: educação formal, corporativa ou informal; e, devem reunir várias características, como durabilidade, facilidade para atualização, flexibilidade, interoperabilidade, modularidade, portabilidade, entre outras. Eles ainda apresentam-se como unidades autoconsistentes de pequena extensão e fácil manipulação, passíveis de combinaçãocom outros objetos educacionais ou qualquer outra mídia digital (vídeos, imagens, áudios, textos, gráficos, tabelas, tutoriais, aplicações, mapas, jogos educacionais, animações, infográficos, páginas web) por meio da hiperligação. Além disso, um objeto de aprendizagem pode ter usos variados, seu conteúdo pode ser alterado ou reagregado, e ainda ter sua interface e seu layout modificado para ser adaptado a outros módulos ou cursos. No âmbito técnico, eles são estruturas autocontidas em sua grande maioria, mas também contidas, que, armazenados em repositórios, estão marcadas por identificadores denominados metadados.
>
> (AUDINO E NASCIMENTO, 2012, p.141)

Com este entendimento, os autores consideram que os objetos de aprendizagem devem estar aliados: à tecnologia (recursos digitais), à participação dos alunos e do professor. O dinamismo também está no uso do mesmo objeto para inúmeras outras aplicações e na representação de um mesmo conceito de modos distintos (dinâmicos e interativos). Ainda que Fabre, Tamusiunas e Tarouco (2003) considerem que objetos de aprendizagem sejam recursos digitais ou não, Audino e Nascimento (2012), por exemplo, os consideram digitais.

Por outro lado, com a expansão dos recursos tecnológicos, as plataformas de gerenciamento citadas por Fabre, Tamusiunas e Tarouco (2003) podem modernizar o material desenvolvido, de modo que ele poderá ser reutilizado novamente em diferentes contextos.

Em De Castro-Filho (2007) encontramos um olhar diferenciado sobre esta temática. O autor interpreta que a estrutura dos objetos de aprendizagem basicamente se estabelece nos seguintes aspectos:

> (1) serem digitais, isto é, possam ser acessados através do computador, preferencialmente pela Internet; (2) serem pequenos, ou seja, possam ser aprendidos e utilizados no tempo de uma ou duas aulas e (3) focalizarem em um objetivo de aprendizagem único, isto é, cada objeto deve ajudar os aprendizes a alcançar o objetivo especificado.
>
> (DE CASTRO-FILHO, 2007, p.12)

Outras características, importantes, são destacadas por Longmire (2000), pois ao trabalharmos com objetos de aprendizagem, podemos atender às perspectivas tanto de armazenamento quanto de compartilhamento de informações usando a tecnologia, de maneira que a criação e o desenvolvimento de materiais desse tipo estão relacionados com as características que foram citadas e explicadas sequencialmente.

Temos a flexibilidade, pois um mesmo material pode ser reutilizado em diversos contextos; A facilidade de atualizações, pesquisas e gerenciamento de conteúdo, que possuindo uma linguagem formada por metadados, essa atualização dos objetos torna-se simples e sempre de acordo com a seleção do conteúdo relevante para a atividade selecionada; A customização, em que uma personalização do objeto é feita de acordo com a finalidade que a sua área de pesquisa exigir; A interoperabilidade, em que um mesmo objeto tenha a sua funcionalidade presente também em outros sistemas e contextos de ensino; A facilitação da aprendizagem baseada em competências, gerando uma combinação de criação de objeto de aprendizagem e seus metadados e a competência estimulada de cada indivíduo; e por fim, o valor do conteúdo aumentado, pois a habilidade de ser reutilizado acrescenta mais valores à base que foi expandida, para outros contextos e situações-problema.

Miranda (2004) cita alguns exemplos de repositórios de objetos de aprendizagem que estão voltados à produção de material de ensino que empregam diversas tecnologias. O Lab-Virt, Laboratório Didático Virtual é um trabalho realizado pela Universidade de São Paulo, (USP), que produz objetos de aprendizagem frutos do envolvimento de alunos das escolas da rede pública e da comunidade que esquematizam situações do cotidiano em animações, simulações, debates. Estão voltados em sua maioria para a área da Física. Todo o material encontra-se disponível em http://labvirt.futuro.usp.br (acesso em 6 de fevereiro de 2017).

Outro repositório citado pela autora é o projeto Rived (Red International Virtual de Educación), um programa da Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC) e do Ministério da Educação do Brasil através da Secretaria de Educação a Distância (SEED), criado com o objetivo de produzir e armazenar conteúdos pedagógicos digitais, todos em forma de objetos de aprendizagem voltados para uma melhor aprendizagem das disciplinas que envolvem a educação básica, e também propor materiais que podem ser utilizados no ensino superior. Essas informações estão disponíveis em: http://rived.mec.gov.br/ (acesso em 06 de fevereiro de 2017).

Mais um projeto citado é da Universidade Federal do Paraná (UFPR) que coordena o projeto OE³ / e-Tools, realizando a criação de objetos de aprendizagem voltados para a comunidade acadêmica, adotando uma organização baseada em disciplinas do curso de Engenharia Civil da própria UFPR. O endereço para seu acesso é: http://www.cesec.ufpr.br/etools (acesso em 06 de fevereiro de 2017).

O último projeto mencionado pela autora foi o Educational Software Components of Tomorrow (ESCOT), realizado pela National Science Foundation (NFS) dentro do SRI Internacional Center for Technology in Learning. Seu principal foco é construir um software de educação matemática, utilizando uma plataforma Java para incorporar os seus componentes, procurando integrar diversas áreas. Dessa maneira, concebem e divulgam tabelas e outros componentes que auxiliam na exploração de conceitos da geometria e da álgebra. Para acessar mais conteúdos e dados sobre o projeto, o endereço na internet é http://www.escot.org (acesso em 06 de fevereiro de 2017).

Por fim, citamos experiências nas instituições federais de ensino superior, que muitas vezes não têm destaque em sua página de apresentação, como é o caso do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, e do Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais (DMat/UFMG).

Os professores Waldecir Bianchini e Ângela Rocha, ambos do Departamento de Matemática da UFRJ, desenvolveram inúmeros materiais e hipertextos para o ensino de Cálculo e de cursos de Pré-Cálculo, depositados no site http://www.im.ufrj.br/waldecir/ (acesso em 6 de fevereiro de 2017), que têm sido utilizados por professores da instituição.

O mesmo ocorre no DMat/UFMG, onde site http://www.mat.ufmg.br/gepemnt/, (acesso em 6 de fevereiro de 2017) é também repositório de atividades e objetos de aprendizagem desenvolvidos em colaboração com alunos de iniciação científica, mestrandos e doutorandos. Experiências do grupo estão publicadas em Pinto et ali (2011). Os relatos sobre as oficinas do grupo foram estudados por ocasião da preparação das atividades desta pesquisa.

Para finalizar abordamos duas outras questões importantes, referentes ao desenvolvimento de objetos de aprendizagem: a questão da reusabilidade desse de recursos deste tipo, pois reutilizar possibilita que os objetos de aprendizagem sejam incluídos em diversas aplicações de ensino, e a questão da funcionalidade de um objeto de aprendizagem.

Fabre, Tamusiunas e Tarouco (2003) orientam que a catalogação dos mesmos pode trazer utilidades para diversos campos de pesquisa, pois teremos: oportunidade de acessos e utilizações múltiplas (acessibilidade); o uso de elementos que foram criados em um local e que poderão ser adotados em outras plataformas (interoperabilidade); e o prolongamento da vida útil do objeto, visto que a sua base será mantida (durabilidade).

Debatendo sobre a funcionalidade geral de um objeto de aprendizagem (OA), De Castro-Filho (2007), por exemplo, esclarece que:

> Os objetos de aprendizagem devem ser usados para facilitar o uso da tecnologia por professores e alunos. Entretanto, a facilidade deve se restringir aos aspectos técnicos de manipulação do OA e não na perda de complexidade do conteúdo. Um bom OA deve criar situações interessantes para os alunos, mas que permitam uma reflexão sobre conceitos fundamentais em matemática. Para atingir tal finalidade, um OA deve estar fundamentado em elementos teóricos da Educação Matemática.
> (DE CASTRO-FILHO, 2007, p. 12)

Podemos dizer que tais considerações sobre a construção e uso dos objetos de aprendizagem ajustam-se de maneira proveitosa aos objetos de aprendizagem que foram criados em nossa pesquisa. Em particular os objetos foram elaborados a partir de representações matemáticas e fundamentados em elementos teóricos da educação matemática sobre o tema a ser estudado.

De Castro-Filho (2007) observa ainda que: “Somente o uso de um OA não é garantia de que haverá uma aprendizagem por parte do aluno, se o mesmo não criar oportunidades para que os alunos reflitam sobre o conceito matemático subjacente.”. (ibid., p.13)

Esta é uma reflexão imprescindível para que as atividades que estejam incluindo objetos de aprendizagem sejam constituídas, bem como a do desenvolvimento do objeto, em si. O aluno está diante de uma nova leitura do mundo, um ambiente constituído com inserção de novas tecnologias no ensino-aprendizagem, e isto proporciona que outras fontes de práticas de ensino e aprendizagem possam surgir para complementar todas as alternativas disponibilizadas anteriormente.

2.2- As representações matemáticas e a compreensão de conceitos matemáticos

A Álgebra Linear é um conhecimento construído a partir de inúmeros conceitos abstratos. Como aluno no ensino superior, durante a graduação e no mestrado, relembro por diversas vezes a importância, ainda que de caráter pessoal, não só de rever muitas fórmulas envolvidas na manipulação algébrica com os conceitos, mas também de conhecer a sua origem, os processos de sua formação, os meios de chegar até o produto final.

Há diversos autores que explicitam tal importância da formação dos conceitos expressos em representações matemáticas (ver, por exemplo, Tall e Vinner, 1981; Vinner, 1991). Em diálogo com o desenvolvimento das tecnologias, Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008) trazem a noção de campo de referência, em que as representações matemáticas são inscritas, e observam que:

> A natureza dos símbolos matemáticos tem evoluído nos últimos anos, de inscrições inertes e estáticas a objetos dinâmicos ou diagramas que são construtíveis, manipuláveis e interativos. Os alunos estão agora em posição de constituir sinais e símbolos matemáticos, em objetos e sistemas de objetos identificáveis pessoalmente. A evolução do campo de referência matemático pode ser agora um processo ativo que os alunos e os pedagogos podem ambos se apoiar, se identificar e atualizar ativamente. Por isso, o campo de referências tem o potencial de desenvolver-se concomitante com o pensamento simbólico humano.
>
> (MORENO-ARMELLA, HEGEDUS E KAPUT, 2008, p. 103) [30]

Tais reflexões nos levam a compreender que, realizando essa transição entre diferentes campos de referência, de representações matemáticas sem movimento, inertes e estáticas a representações dinâmicas e interativas, como definidas por Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008), puderam transformar significativamente os processos de ensino/aprendizagem desenvolvidos até então.

As múltiplas possibilidades para o ensino-aprendizagem utilizando tecnologias digitais, nosso principal foco de abordagem, são estimuladas o tempo todo por uma

---

[30] Tradução nossa.
Texto Original: “The nature of mathematical symbols have evolved in recent years from static, inert inscriptions to dynamic objects or diagrams that are constructible, manipulable and interactive. Learners are now in a position to constitute mathematical signs and symbols into personally identifiable objects, and systems of objects. The evolution of a mathematical reference field can now be an active process that learners and pedagogues can both assist in, can identify with and can actively update. Hence, the reference field has the potential to co evolve with human symbolic thinking.”

nova visão sobre as relações que encontramos entre o estudo dos símbolos matemáticos e dos novos campos de referência para representações dos conceitos matemáticos.

Sobre as representações matemáticas, e propomos dizer, também sobre os objetos de aprendizagem[31], os autores exemplificam e classificam cinco diferentes fases de desenvolvimento (MORENO-ARMELLA, HEGEDUS E KAPUT, 2008, p.102-103):

- na primeira, Estático-inerte, a inscrição é enrijecida ou fundida com a mídia, como a escrita logo após ser impressa no papel, no caso dos livros didáticos nas escolas;
- a segunda é a Estático-Cinética-Estético, em que a inscrição é fixada por meios que podem ser apagados e reescritos rapidamente, como o giz e marcadores de quadro branco, incluindo os coloridos para diferenciar as anotações;
- a terceira fase, Estático-computacional, é a apresentação de gráficos, tabelas, no computador, quando são exibidas de modo estático;
- a quarta é a Dinâmico-Discreto, em que os gráficos e as tabelas são gerados com entradas paramétricas, e sua apresentação é discreta;
- a quinta fase é a Dinâmico-Contínuo, em que são possibilitadas maiores interações e manipulações utilizando a tecnologia, tais como no caso dos softwares de geometria dinâmica[32](como o Geogebra, um software com noções de geometria e álgebra, de forma dinâmica) propiciando aos usuários, alunos ou professores, clicar e arrastar objetos, e movê-los, criando novas representações matemáticas, e assim por diante.

Nesta pesquisa, estamos nos referindo às representações em estágios dinâmico-contínuo, como definidos em (MORENO-ARMELLA, HEGEDUS E KAPUT, 2008), como cinético /interativas. Ao discutirmos os ambientes tecnológicos, que são dinâmicos, para o ensino-aprendizagem, questionamos também o papel do professor nesta interação. Acreditamos que, ao optarem por implantar essas atualizações dentro e fora da sala de aula, muitos professores poderão contar com uma nova estrutura ou campo de representação dos conceitos matemáticos, convivendo com o quadro e giz possibilitam novos caminhos para o ensino, com o objetivo de realizar uma exploração maior do conhecimento, tanto pelos alunos quanto pelo professor envolvidos.

---

[31] Tradução e adaptação nossa.
[32] Acréscimo nosso.

Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008), destacam a importância de um trabalho pedagógico possibilitado pelas tecnologias atuais que afetam o mundo que os alunos conhecem, sintetizando suas ideias como a seguir:

> O avanço dos ambientes tecnológicos dinâmicos nos permite combinar vários atos cognitivos individuais de referência. Isso é possível porque indivíduos através das notações que eles criam e compartilhampodem projetar suas intenções e expressividade. Eles também podem compreender e generalizar a estrutura da matemática através de colaboração coativa com estes ambientes. Isso pode ser possível através dos avanços em representações de infraestrutura (software de matemática dinâmica) e infraestruturas de comunicação (redes sociais e digitais).
>
> (MORENO-ARMELLA, HEGEDUS E KAPUT, 2008, p.110)[33]

Tomamos a ideia de resgatar conhecimentos sobre tópicos da Álgebra Linear que foram desenvolvidos em sala de aula, como espaço vetorial, subespaço vetorial, combinação linear e noção de base geradora. Utilizamos o software acessível Geogebra e partimos para as representações visuais desses conceitos, ou seja, a aplicação de maneira interativa como os autores disseram, de maneira que encontramos as percepções dos alunos diante de uma nova perspectiva.

Por outro lado, Vinner (1991) apresenta pontos esclarecedores sobre esta temática, e principalmente, revela-nos que a maioria dos matemáticos não concorda com a declaração de que a matemática é construída a partir noções primárias e axiomas que se incorporam formando a base dessa teoria dedutiva. Como colocado em Tall e Vinner (1981), esta forma de apresentação do conhecimento matemático é o produto final, mas não o processo de sua elaboração. Vinner (1991) descreve que:

> [...] Normalmente, começa-se com noções bem conhecidas e teoremas conhecidos e prossegue através da definição de novas noções e por provar novos teoremas. Isso pode ter algumas consequências para a forma como a matemática é ensinada, mesmo antes de se começar a pensar sobre a pedagogia apropriada. Assim, professores de matemática podem formar em suas aulas de uma sequência de definições, teoremas e provas como um esqueleto para o seu curso. Seguir essas consequências pode ser pedagogicamente errado já que o ensino deve levar em consideração os processos psicológicos comuns de aquisição de conceito e raciocínio lógico.
>
> (VINNER, 2002, p. 66)[34]

---

[33]Tradução nossa.
Texto Original: “The advance of dynamic technological environments allows us to combine multiple individual cognitive acts of reference. This is possible since individuals can project their intentions and expressivity through the notations they create and share. They can also realize and generalize the structure of the mathematics through co-active collaboration with these environments. This can be made possible through the advances in representation infrastructures (dynamic mathematics software) and communication infrastructures (social and digital networks).”
[34]Tradução nossa.
[7]Texto original: “Typically, one starts with well known notions and well known theorems and proceeds by defining new notions and by proving new theorems. This might have certain consequences for the way mathematics is taught, even before one starts to think about the appropriate pedagogy. Thus, mathematics

Assim como Tall e Vinner (1981), Vinner (2002) discute as consequências dessa apresentação da matemática, principalmente do ensino superior. O autor menciona que esta é a apresentação difundida em periódicos e livros, nos quais uma interpretação mais objetiva do conteúdo é apresentada. Esta não retoma novamente conceitos primários, iniciais. Sabemos que a Álgebra Linear envolve diversas áreas da matemática e isso proporciona uma grande sucessão de temas e fundamentos diversificados que se correlacionam. Consequentemente, não passar por esses conceitos em algum momento, ainda que seja no ensino superior, pode resultar em uma forma de se ensinar a matemática sem a pedagogia apropriada ao desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Articulamos aqui a noção de objetos de aprendizagem apresentada como de objetos desenvolvidos para o ensino de forma que uma construção seja estabelecida, respeitando o desenvolvimento cognitivo, ou os passos desde os conceitos mais simples até sua versão abstrata, referenciados em Vinner (1991) e seu debate sobre aquisição dos conceitos matemáticos (ver, também, Tall e Vinner, 1981; Vinner, 1991).

Vinner (1991) retoma a noção de *imagem de conceito*, já apresentadas em Tall e Vinner (1981), descrevendo relações entre imagens e possíveis representações verbais. Destaca seu entendimento de que estas últimas são posteriores à formação das imagens relacionadas a um conceito:

> A imagem de conceito é algo não verbal associado em nossa mente com o nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, caso este conceito tenha representações visuais; isto também pode ser um conjunto de impressões das experiências. As representações visuais, que são as imagens mentais, as impressões e as experiências que estão associadas com o nome do conceito que pode ser traduzido como formas verbais.
> Mas é importante lembrar que essas formas verbais não foram a primeira coisa a ser evocada na nossa memória. Passaram a existir apenas numa fase posterior.
>
> (VINNER, 1991, p.68) [35]

Em sua análise sobre saber definições e compreender o conceito a ela relacionado, Vinner (1991) sintetiza que adquirir um conceito indica a formação de uma

---

teachers might form in their classes a sequence of definitions, theorems and proofs as a skeleton for their course. Following these consequences may be pedagogically wrong since the teaching should take into account the common psychological processes of concept acquisition and logical reasoning."

[35]Tradução nossa.

Texto original: "The concept image is something non-verbal associated in our mind with the concept name. It can be a visual representation of the concept in case the concept has visual representations; it also can be a collection of impressions or experiences. The visual representations, the mental pictures, the impressions and the experiences associated with the concept name can be translated into verbal forms. But it is important to remember that these verbal forms were not the first thing evoked in our memory. They came into being only at a later stage."

imagem de conceito para ele. Memorizar a definição do conceito não implica que o aluno compreendeu exatamente este conceito (ver também, Tall e Vinner, 1981; Vinner, 1991). Desse modo, o autor acredita que desenvolver uma imagem de conceito, auxilia nesse entendimento.

Para Tall e Vinner (1981), o nome de muitos conceitos que encontramos na área da matemática tem uma imagem de conceito já construída por cada indivíduo antes mesmo da sua formalização; o que produz uma diversidade de imagens mentais que surgem quando o nome de um conceito é evocado. Nem sempre tais imagens são coerentes com a definição matemática do conceito. Esse tipo de percepção, segundo os autores, pode se desenvolver principalmente através de experiências individuais e o seu surgimento pode acontecer em contextos pessoais informais, e não necessariamente na escola.

Na sala de aula, apresenta-se assim um símbolo ou um nome que será associado ao conceito; porém, a imagem de conceito, estrutura cognitiva que pode envolver toda a significação do conceito, é maior do que a evocação do símbolo. Em Tall e Vinner (1981) encontramos:

> Nós usaremos o termo *imagem de conceito*[36] para descrever a totalidade de estruturas cognitivas que são associadas com o conceito, incluindo todas as imagens mentais e as propriedades dos processos associados. Ele é construído ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece.
> (TALL e VINNER, 1981, p.152)[37]

Para Vinner (1991): "Saber de cor a definição do conceito não garante a compreensão do conceito. Para entender, acreditamos, deve-se ter uma imagem do conceito. "Essa compreensão de significado deve ser associada com palavras." (ibid., p.69). Um exemplo citado pelo autor é que, no cotidiano, um significado pode ter uma associação com as palavras, facilitando o seu entendimento: uma criança pode entender que uma floresta é um local com muitas árvores, mas talvez não depreenda o significado de floresta, caso ouça a interpretação de um dicionário.

Deste modo, a apresentação da matemática em sala de aula, ou de qualquer outro conteúdo técnico, propondo definições como ponto de partida contrasta também com nossos hábitos no que diz respeito à formação de conceitos cotidianos.

[36]Grifo dos autores.
[37]Tradução nossa.
Texto original:"We shall use the term *concept image* to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures."

Algumas características do papel da definição na matemática são enunciadas em Vinner (1991), compartilhadas por muitos professores e por muitos livros didáticos, que parecem ter a expectativa que: 1- Os conceitos são adquiridos, sobretudo, através de suas definições; 2- Os alunos utilizarão definições para resolver problemas e a prova de teoremas quando necessário, de um ponto de vista que seja matemático; 3- As definições devem ser mínimas, pois não devem conter fragmentos matemáticos inferidos de outras definições; 4- As definições devem ser harmoniosas, elegantes; 5- Por fim, as definições são arbitrárias.

Entretanto, Vinner (1991) justifica que as cinco premissas relatadas podem não refletir obrigatoriamente o que acontece quando ensinamos a matemática superior ou, na verdade, em qualquer nível de seu ensino. Argumenta que o ponto central na discussão entre uma pedagogia de ensino da matemática que contrasta com essa metodologia de conceituação por meio de definições está não somente na expectativa de que os estudantes adquiram as definições dos conceitos matemáticos, mas também que os alunos desenvolvam uma imagem de conceito coerente.

Entendemos que, à medida que um novo tema seja introduzido aos alunos, devemos oferecer o suporte teórico necessário para que a aprendizagem possa ocorrer de maneira que o aluno desenvolva uma imagem de conceito abrangente e coerente, e saiba construir raciocínios matemáticos e desenvolva habilidades para resolver problemas. Isto não significa que as definições dos conceitos devem ser evitadas.

A relação que faremos entre esse referencial teórico e a direção que seguimos neste trabalho é aliar a tecnologia à formação de conceitos, para desenvolver aspectos da imagem de conceito relacionada às noções que vamos estudar que não seriam possíveis em campos de representações estático/inertes. Isto não significa que não vamos revisitar estes conceitos em tais campos; afinal, também iremos recorrer aos conceitos formais que são base da Álgebra Linear, permitindo que o aluno possa compreender as noções abstratas sob um novo ponto de vista, com o auxílio de tecnologias digitais e consequentemente, experimentando a dinamicidade e interação que ela permite.

Em Tall e Vinner (1981), encontramos outra definição que, junto com a noção de imagem de conceito, compõe a perspectiva teórica desta pesquisa:

> "A definição de um conceito (se ele tiver uma) é uma questão bastante diferente. Nós consideraremos a definição do conceito como uma forma de palavras usada para especificar esse conceito. Ela pode ser aprendido por um indivíduo de forma mecânica ou aprendida mais significativamente e relacionada ao conceito como um todoem maior ou menor grau. Também

> pode ser uma reconstrução pessoal da definição feita pelo aluno. É então a forma de palavras que o aluno usa para sua própria explicação sobre sua imagem de conceito (evocada). Se a definição do conceito é dada ou construída por ele próprio, ele pode modificá-la de tempos em tempos. Desta forma, uma definição de conceito pessoal pode diferir de uma definição de conceito formal, sendo esta última uma definição de conceito aceita pela comunidade matemática em geral ".
>
> (TALL e VINNER, 1981, p.152)[38]

Esta discussão reforça a proposta de que a formalização do conteúdo também deve ser considerada, desde que inserida em contexto e apresentada em momento apropriado. As definições que o aluno evoca referentes a conceitos e símbolos matemáticos podem ser provenientes de seu mundo de experiências informais e de sua vivência escolar atual.

A existência de tais imagens conceituais referentes a objetos matemáticos não justificam que definições e proposições formais, compartilhadas por pesquisadores na área da Educação Matemática sejam evitadas ou tenham seu conhecimento negado aos alunos. O interessante, acreditamos, apoiando-nos nessas indicações dos autores, é que sejam apresentados aos alunos, e aos professores, ambos os caminhos para entendimento dos símbolos, das imagens, da conceituação em si, da matemática.

Vinner (1991) sugere, ao trabalhar a imagem de conceito e definição de conceito, que conflitos desnecessários devem ser evitados e que conflitos cognitivos sejam explorados quando necessário, visando o desenvolvimento intelectual dos alunos. O autor acredita que os conceitos matemáticos devem ser adquiridos a partir de exemplos simples e não apresentados tecnicamente logo de início. A definição formal seria uma etapa posterior a esse começo, de maneira que os alunos estariam livres até para sugerir definições a partir de seu próprio entendimento.

Vinner (2002)[39] caracteriza que: "Assim, o papel da definição em um determinado curso de matemática deve ser determinado de acordo com os objetivos educacionais desejados e se espera que sejam alcançados pelos alunos envolvidos. " (ibid., p.80).

---

[38]Tradução nossa.Texto original: "The definition of a concept (if it has one) is quite a different matter. We shall regard the *concept definition* to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of words that the student uses for his own explanation of his (evoked) concept image. Whether the concept definition is given to him or constructed by himself, he may vary it from time to time. In this way a *personal* concept definition can differ from a *formal* concept definition, the latter being a concept definition which is accepted by the mathematical community at large."

[39]Tradução nossa.

Texto original: "Thus the role of definition in a given mathematics courses hould be determined according to the desired educational goals supposed to be achieved with the given students."

O objetivo deve ser uma mudança de hábitos no pensamento do estudante, dos modos cotidianos, gradualmente, até incorporar o modo técnico. Esta afirmação, para o autor, torna-se uma grande meta do ensino da matemática.

Desse modo, incluímos em uma prática pedagógica, objetos de aprendizagem concebidos com o auxílio do Geogebra, para os alunos do ensino superior de uma turma selecionada (segundo período de Licenciatura em Matemática) e concebemos as atividades.

Todos os applets utilizados possuem algum viés teórico que o aluno participante possivelmente teve contato em sua graduação. A tecnologia envolvida realizou uma ponte entre os conhecimentos prévios dos alunos dentro da Álgebra Linear e como seria a perspectiva gerada através da visualização e da manipulação das telas interativas.

Capítulo 3

Procedimentos Metodológicos e Descrição das Atividades

Para investigar quecontribuições as representações cinético/interativas de conceitos básicos de Álgebra Linear, em especial, de espaço vetorial, subespaço vetorial, combinação linear e base, podem trazerpara a construção desse conhecimento, propus desenvolver uma pesquisa, de cunho qualitativo, utilizando computadores em uma oficina no laboratório de informática. Desenvolvi oito objetos de aprendizagem e preparei a oficina a ser oferecida, em dois encontros, a alunos universitários cursando a disciplina de Álgebra Linear.

O contexto da pesquisa é o de uma turma de alunos do segundo período do ensino superior de Licenciatura em Matemática, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ, no campus Nilópolis. Escolhi esta Instituição porque este foi o local em que cursei a minha graduação; o professor responsável pela turma foi o mesmo profissional que lecionou em minha turma. A fácil comunicação com o coordenador do curso e a direção do campus foi fundamental para o aceite do nosso pedido de campo de pesquisa. Coordenadores, professores e diretor mostraram-se empenhados a me apoiar no desenvolvimento da investigação.

Além disto, o IFRJ é a única instituição pública de ensino superior da cidade de Nilópolis, desempenhando, portanto, um papel importante em todo o seu município. Constitui também um caso exemplar das reestruturações ocorridas nos institutos federais, na última década.

O IFRJ[40] foi criado em 1994, como uma unidade da Escola Técnica Federal de Química do Rio de Janeiro (ETFQ-RJ). Oferecia cursos técnicos em Química e Saneamento. Após ter sido a sede do Centro Federal de Educação Tecnológica (CEFET-RJ) Química, a partir de 1999, passa a ser em 2002, o Centro de Ciência e Cultura do CEFET Química de Nilópolis/RJ. Em 2009, o CEFET é reestruturado como Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, passando a oferecer cursos presenciais de Educação Profissional desde o Ensino Técnico de nível médio em Química e Controle Ambiental e EJA (Manutenção e suporte em Informática), cursos superior nas Licenciaturas de Física, Química e Matemática, Bacharelado em Produção Cultural,

[40] Informações disponíveis no endereço eletrônico: www.ifrj.edu.br

Química de Produtos Naturais e Gestão da Produção Cultural e Pós-Graduação stricto sensu, Mestrado Profissional de Ensino de Ciências e Mestrado Acadêmico de Ensino de Ciências, Especialização em Linguagens Artísticas, Cultura e Educação, Especialização em Educação de Jovens e Adultos e Especialização em Gestão Ambiental.

O Campus Nilópolis funciona em três turnos, possui em torno de dois mil e quinhentos alunos, a sua infraestrutura atende às necessidades do público em geral possuindo laboratórios bem equipados disponíveis tanto para o ensino técnico quanto o superior, como os de análise química, orgânica, biologia, física (com suporte a pesquisa de cunho experimental) e informática. Também possui rampas de acesso aos portadores de deficiência[41], saídas de emergência, auditório, quadra de esportes, piscina, vestiários, banheiros em ambos os andares, horta de cultivo orgânico, instalações de centros acadêmicos, diretórios, ambulatório, pátio externo e interno, coordenações e diretoria, biblioteca, salas de aula em sua maioria com ar condicionado e lousas brancas, possibilidade de acesso a materiais como retroprojetor, e oportunidade de realização de eventos, projetos sociais, projetos culturais e de cunho acadêmico.

Após o recebimento da autorização do coordenador do curso de Matemática e do professor de Álgebra Linear I, todos os alunos da referida disciplina foram convidados a participar da pesquisa. Em um primeiro contato com a turma, quando o convite foi feito, coloquei os objetivos do estudo, que é investigar a utilização de recursos visuais e gráficos para a construção de conhecimento sobre espaço e subespaço vetorial, combinação linear e noção sobre base geradora.

Os alunos foram informados que o material produzido na investigação, serão usados apenas na pesquisa em questão e os respectivos dados não serão divulgados de modo a possibilitar a identificação dos participantes, que podem optar por serem identificados por nomes fictícios no trabalho final.

---

[41] O Decreto nº 5.296 (Dec nº 5.296 de 02/12/2004, 2004), dispõe sobre a acessibilidade que está relacionada em fornecer condição para utilização, com segurança e autonomia, total ou assistida, dos espaços, mobiliários e equipamentos urbanos, das edificações, dos serviços de transporte e dos dispositivos, sistemas e meios de comunicação e informação, por pessoa com deficiência ou com mobilidade reduzida.
O projeto de lei nº 4536 (PL 4536 de 30/11/2004), dispõe sobre a obrigatoriedade de serem construídas rampas de acesso nos estabelecimentos de ensino da rede pública e particular, destinados ao ingresso de pessoas portadoras de deficiências nas respectivas dependências.
Disponível em: http://www.lexml.gov.br/urn/urn:lex:br:camara.deputados:projeto.lei;pl:2004-11-30;4536Acesso em 06 de fevereiro de 2017.

O endereço eletrônico do pesquisador foi fornecido aos alunos, everton.ferreira.matematica@gmail.com, para que pudessem esclarecer as suas dúvidas em relação ao projeto e sua participação, naquele período ou em qualquer momento.

Os dez alunos matriculados na disciplina investigada compareceram ao primeiro encontro e assinaram o termo de consentimento para uso do material produzido nas atividades, autorizando a sua participação na produção da pesquisa. Uma cópia do documento que foi assinado está no Anexo C.

3.1- Organização da pesquisa

Esta pesquisa foi organizada em duas etapas:

A primeira etapa, de preparação da pesquisa de campo, consistiu do planejamento de uma atividade utilizando computadores para ser ofertada aos participantes. Para isto, nos informamos sobre o conteúdo matemático já estudado pelos alunos que seriam convidados para participar do projeto e definimos o conteúdo de Álgebra Linear a ser explorado nas atividades. Concebemos as atividades e desenvolvemos doze objetos de aprendizagem utilizando o Geogebra, para constituirmos as oficinas em um Laboratório de Computação.

A segunda etapa, de realização da pesquisa de campo, foi desenvolvida em três encontros. Passamos a descrevê-la primeiro, para em seguida trazermos elementos sobre a concepção das atividades realizadas. A inversão cronológica na apresentação da organização da pesquisa tem o intuito de aproximar o planejamento das atividades da análise do material produzido pelos alunos, que é o tema do capítulo que se segue.

3.2 – Descrição da pesquisa de campo

A oficina foi oferecida nos dois primeiros encontros da pesquisa de campo, que foram realizados nos dias 21 e 28 de janeiro 2016, no final do período letivo, 2015/2. A participação dos alunos foi voluntária, e consistiu em frequentar dois encontros durante o horário de aula de Álgebra Linear I, cedido pelo professor, participando de atividades utilizando computadores. O relatório produzido sobre as questões foi realizado simultaneamente nos dois encontros.

O primeiro encontro com os alunos aconteceu no dia 21 de janeiro de 2016.

Apresentei a pesquisa e seus objetivos, estendendo a todos o convite para participar do projeto. O professor da disciplina esclareceu aos alunos que sua participação não seria incluída na avaliação da disciplina. Um total de 10 alunos se voluntariou para participar da pesquisa de campo.

Neste primeiro encontro além de introduzir os aspectos básicos do software Geogebra, ferramenta de geometria dinâmica utilizada para a construção dos objetos de aprendizagem incluídos na atividade, foi realizado pelos alunos as quatro primeiras questões da atividade. A duração do primeiro encontro foi de uma hora e dez minutos, das 20:50h às 22:00h.

Em 28 de janeiro de 2016, organizamos o segundo encontro. Os dez alunos que participaram no primeiro encontro retornaram para finalizar as atividades da oficina, iniciadas no encontro anterior. O segundo encontro foi um pouco mais longo, com duração de 19:30h às 21:00h.

Durante as atividades da oficina, cada aluno participante ocupou uma mesa individual com um computador. Foi permitida a troca de ideias entre os participantes durante a realização das atividades propostas.

O pesquisador se limitou apenas a dirimir dúvidas quanto ao uso do software, evitando intervir durante a execução das atividades.

O professor responsável pela disciplina de Álgebra Linear I esteve presente em todos os momentos, por questões de atendimento às regras institucionais, que não permitem o uso do laboratório sem a presença de um professor. Nos dois encontros o professor se posicionou na sala de modo discreto para não interferir no andamento das atividades, corrigindo outros trabalhos ou fazendo leituras para preparação de aulas posteriores.

O material produzido para a análise incluiu as observações dos registros escritos nos relatórios elaborados pelos participantes.

3.3- Sobre o planejamento e a elaboração das Atividades com computadores

Para cursar Álgebra Linear I no IFRJ- Campus Nilópolis é preciso ter sido aprovado na disciplina de Geometria Analítica. Sua oferta é obrigatória para os novos ingressantes na Instituição, no primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática.

De acordo com a ementa e programa da disciplina de Geometria Analítica[42], seu objetivo principal é introduzir os conceitos de Vetores no $\Re^2$ e $\Re^3$ e suas operações; Curvas planas: correspondência entre curvas e equações cartesianas; Reta, circunferência, cônicas; Coordenadas polares; Curvas e superfícies no $\Re^3$: correspondência entre superfícies e equações; Sistemas de coordenadas no espaço; Planos e retas no $\Re^3$; e outras superfícies: superfícies de revolução, superfícies quádricas.

Já a disciplina de Álgebra Linear I tem como objetivo estudar os conceitos de Espaço Vetorial e Transformações Lineares. A ementa deste curso prevê os seguintes conteúdos: Matrizes: Operações, inversão, determinantes, propriedades. Sistemas Lineares: Classificação, resolução e eliminação Gaussiana. Espaços Vetoriais e Subespaços Vetoriais: Base e dimensão, interseção e soma de subespaços, soma direta, mudança de base

Há uma bibliografia básica sugerida na ementa da disciplina, no entanto, o material adotado em sala de aula pelos professores da instituição é selecionado por livre escolha do docente; em alguns casos são consultados livros-referência em diversas graduações que podem ser encontrados também na biblioteca do campus e estão em destaque no programa das disciplinas no site oficial do instituto, assim como apostilas podem ser produzidas ou existe um trabalho com cópias e listas de atividades.

O professor da referida disciplina cumpriu toda a ementa do curso antes da oficina.

O objetivo geral da oficina aplicada foi investigar de que modos os alunos usam a tecnologia eevocam os conceitos previamente estudados sobre a temática espaço vetorial, que foram apresentados algebricamente e de forma abstrata em sala de aula, em uma oficina explorando representações gráficas/cinéticas/interativas dos mesmos. Sendo assim, propusemos uma atividade em que os alunos pudessem explorar essas ideias sob uma ótica geométrica ao realizar tais atividades.

Na introdução do conteúdo de Álgebra Linear[43], os conceitos de independência e dependência linear são fundamentais para o estudo de bases de um espaço vetorial, que é uma noção central em Álgebra Linear. Entender o que uma base representa para o

[42]As informações sobre os conteúdos das disciplinas descritas estão disponibilizadas no site da instituição, seguindo o link abaixo:
http://www.ifrj.edu.br/sites/default/files/webfm/images/Programa%20de%20Disciplinas_2015_1.pdf

[43]As informações sobre os conteúdos de Álgebra Linear I descrita aqui podem ser conferidas no site:
http://www.ifrj.edu.br/sites/default/files/webfm/images/Programa%20de%20Disciplinas_2015_1.pdf

estudo de um espaço vetorial U é compreender que constituí-la significa encontrar, dentro de U, um subconjunto $A \subset U$ com o menor número de vetores, tal que qualquer vetor de U seja uma combinação linear de elementos de A. Em outras palavras, uma base de U é um conjunto de vetores que gera U, contendo elementos que sejam realmente necessários para gerar U. Desta exigência de *necessidade* sobre o subconjunto para gerar U, que é chamado de base, segue o conceito de independência linear.

Dentro de um espaço vetorial U podemos identificar subconjuntos $W \subset U$, sendo eles próprios espaços vetoriais "menores" que U, com o sentido de serem gerados por um número menor de vetores que os da base do espaço vetorial U que os contém.

Tais conjuntos W serão chamados de subespaços vetoriais de U e satisfazem:

W é um subespaço de U se, e somente se:

i) 0(vetor nulo) $\in$ W.

ii) v,w$\in$ W, $\alpha v + \beta w \in W$ para todo α e $\beta \in K$, sendo K um corpo.

A noção "gerar um espaço ou subespaço vetorial" é em particular importante para entendermos o significado de base e do espaço vetorial gerado.

Os objetos de aprendizagem e atividades propostas foram planejados para explorar geometricamente as noções introdutórias do conteúdo de Álgebra Linear destacadas. Para isto desenvolvi doze aplicativos, utilizando o Geogebra, e elaboramos um roteiro de atividades constituindo objetos de aprendizagem para serem explorados.

3.4- Atividades e suas respectivas telas

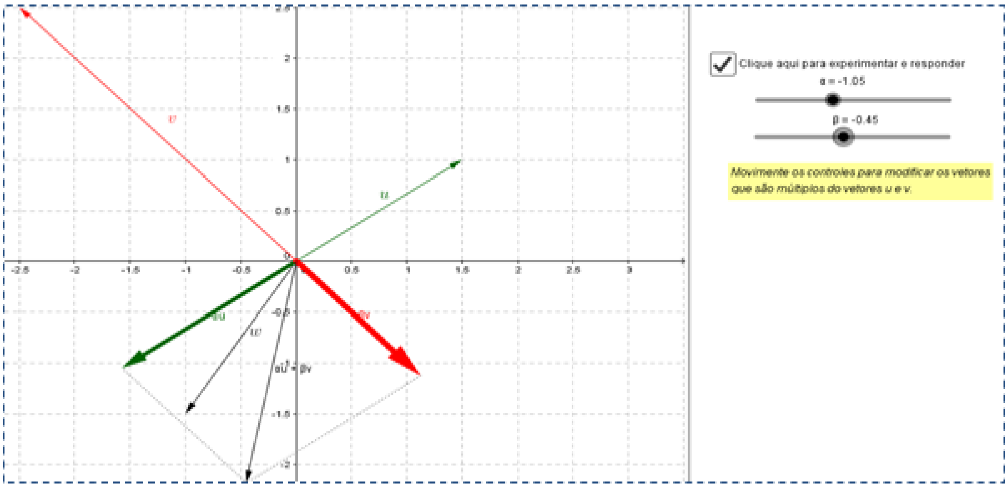
Foram planejadas oito atividades sobre os conceitos de combinação linear, base e subespaço vetorial. Iniciamos com as cincos primeiras atividades que estão relacionadas a experimentações referentes ao conceito de independência e dependência linear.A sexta e sétima atividade estão relacionadas à observação referente ao conceito de base e a oitava questão está relacionada à observação referente ao conceito de subespaço vetorial.

Atividade 1: explorando a noção de combinação linear de dois vetores

1) **Abra o arquivo atividade-1a, clique na caixa para experimentar. O vetor w, na interface, é um vetor dado, fixo. Escreva o que você observa ao realizar um experimento para responder a questão abaixo:**

É possível escrever o vetor w como uma soma de um múltiplo do vetor u mais um múltiplo do vetor v, ou seja, w=αu+βv para α,β números reais?

Figura 3.1: Tela da Atividade 1



Fonte: arquivo pessoal

A Atividade 1 e o primeiro objeto de aprendizagem criam possibilidades para explorar a noção de combinação linear de dois vetores no plano**.**

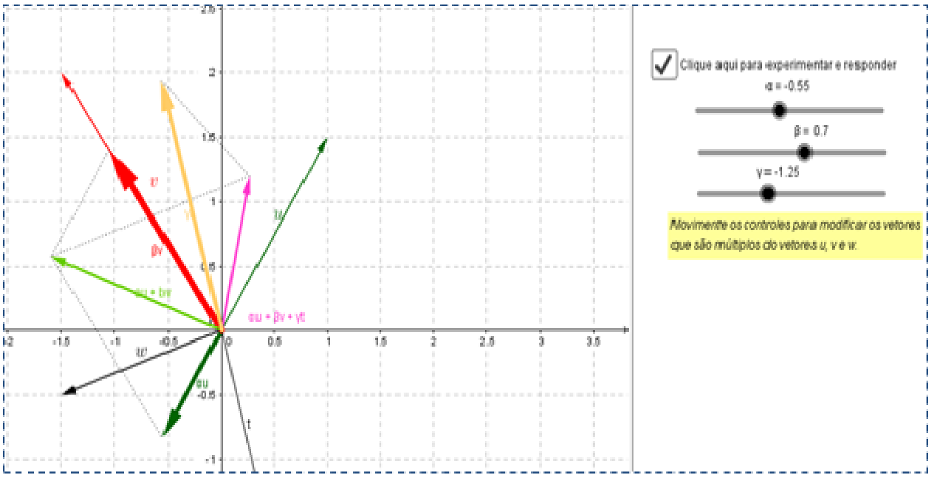
No applet Figura 3.1, temos três vetores u, v, w com direções fixas, linearmente independentes dois a dois, sendo possível variarmos o módulo e o sentido de u, v. A janela da direita possui uma caixa com a descrição “clique aqui para experimentar e responder”. Os dois seletores α e β representam números reais compreendidos no intervalo [-5,5], percorrendo números a partir dos extremos com incremento de 0,05. Ao movimentar o seletor α é permitido aos alunos, simultaneamente, a visualização dos múltiplos do vetor u representado no applet por αu; e ao movimentar o seletor β é permitida a visualização simultânea dos múltiplos do vetor v representado no applet por βv. Além disto, e também simultaneamente, o vetor soma αu+βv é representado na tela, para cada valor de α e β.

A atividade convida os alunos a escrever o vetor w como uma soma αu+βv. A proposta para iniciar a exploração é escrita como um convite. A expectativa do pesquisador é a de que o aluno movimente os seletores α e β e observe os múltiplos dos vetores u e v, sendo representados dinamicamente na interface do computador; identificando o vetor soma αu+βv.

Atividade 2: explorando a noção de combinação linear de três vetores no plano

2) **Abra o arquivo atividade-1b clique na caixa para experimentar. Desta vez, escreva suas observações durante seu experimento para responder às questões abaixo:**
   a) **É possível escrever o vetor w como uma soma de um múltiplo do vetor u mais um múltiplo do vetor v mais um múltiplo de t, ou seja, w=αu+βv+γt para α,β,γ números reais?**
   b) **Se você localizar na tela mais um vetor s(diferente dos vetores u,v,w) há possibilidade de você escrever w=αu+βv+γt+ϕs?**
   c) **E se você considerar apenas os vetores u e v?**
   d) **E se você considerar apenas o vetor u?**

Figura 3.2: Tela da Atividade 2



Fonte: arquivo pessoal

O segundo objeto de aprendizagem foi concebido com a intenção de permitir a exploração de combinações lineares de três vetores no plano. No applet figura 3.2, temos quatro vetores com direção fixa u, v, t, e w, sendo possível variarmos o módulo e o sentido dos três primeiros. A janela da direita possui uma caixa com a descrição “clique aqui para experimentar e responder”. Os três seletores α, β, e γ que simbolizam números reais compreendidos no intervalo [-5,5] com incremento de 0,05. Ao movimentar o seletor α é permitido aos alunos a visualização dos múltiplos do vetor u representado no applet por αu; ao movimentar o seletor β é permitido aos alunos a visualização dos múltiplos do vetor v representado no applet por βv; ao movimentar o seletor γ é permitido aos alunos a visualização dos múltiplos do vetor t representado no applet por γt. Simultaneamente, o vetor soma (αu+βv)+γt é representado na tela, para cada valor de α, β e γ.

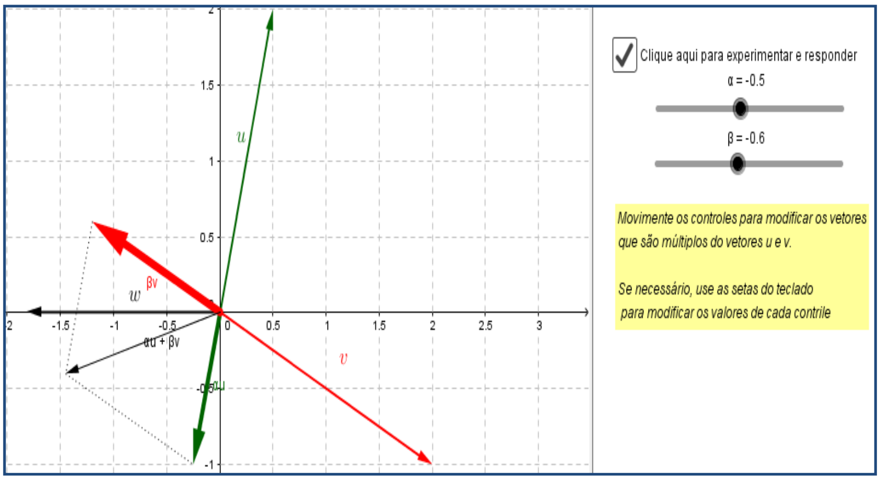
A atividade convida os alunos a explorar a possibilidade de escrever o vetor w como uma soma αu+βv+γt. Propõe, para iniciar a exploração que o aluno movimente os seletores α, β e γ e observe os múltiplos dos vetores u, v e t, e o resultado de sua soma sendo representados dinamicamente na interface do computador.

Questões sobre as possibilidades de escrever vetores como combinação linear de dois ou múltiplo de um vetor apenas são adicionadas, para conhecer as noções dos alunos referentes a espaços gerados por um conjunto de vetores.

Atividade 3: explorando a noção de combinação linear de dois vetores

3)Abra o arquivo atividade 2-a clique na caixa para experimentar, explorando geometricamente e numericamente, e investigue se, ao explorarmos geometricamente, é possível determinar os números reais α e β tais que w=αu+βv.Justifique sua resposta.

Figura 3.3: Tela da Atividade 3



Fonte: arquivo pessoal

Esse objeto de aprendizagem foi concebido com a intenção de que os alunos expressem numericamente o vetor w como combinação linear de u e v, complementando a exploração visual na atividade 1.

No applet figura 3.3, temos três vetores u, v, w com direções fixas, linearmente independentes dois a dois, sendo possível variarmos o módulo e o sentido de u, v, utilizando o produto por escalar. A janela da direita possui uma caixa com a descrição "clique aqui para experimentar e responder". Os dois seletores α e β que simbolizam números reais compreendidos no intervalo [-5,5] com incremento de 0,05. Ao movimentar o seletor α é permitido aos alunos a visualização dos múltiplos do vetor u representado no applet por αu, ao movimentar o seletor β é permitido aos alunos a visualização dos múltiplos do vetor v representado no applet por βv e o vetor soma αu+βv é representado na tela, para cada valor de α e β.

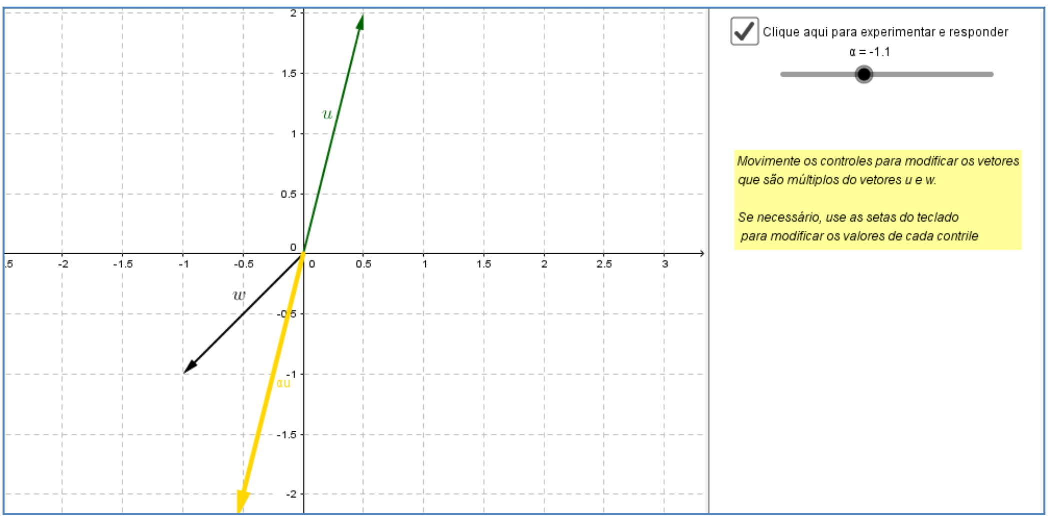
A atividade convida os alunos a experimentar através da exploração geométrica, se é possível determinar os números reais α e β tais que w=αu+βv.

Atividade 4: explorando geometricamente o significado de dependência linear

4) Abra o arquivo atividade 3-a clique na caixa para experimentar. Procure uma resposta para:

Que relações você pode estabelecer entre o vetor w e o vetor u, em termos das operações de adição de vetores e produto de um vetor por um número real α?

Figura 3.4: Tela da Atividade 4



Fonte: arquivo pessoal

Esse objeto de aprendizagem foi desenvolvido com a intenção de que os alunos pudessem explorar geometricamente o significado de dependência linear entre dois vetores; ou seja, dois vetores são linearmente dependentes se forem múltiplos um do outro.

No applet figura 3.4, temos dois vetores u, w com direções fixas, sendo possível variarmos o módulo e o sentido de u. A janela da direita possui uma caixa com a descrição “clique aqui para experimentar e responder”. O seletor α está simbolizando os números reais compreendido no intervalo [-5,5] com incremento de 0,05. Ao movimentar o seletor α é permitido aos alunos a visualização dos múltiplos do vetor u representado no applet por αu.

A atividade convida os alunos a visualizar os múltiplos do vetor u e determinar virtualmente se w é um deles.

Atividade 5: explorando a noção de base de um espaço vetorial

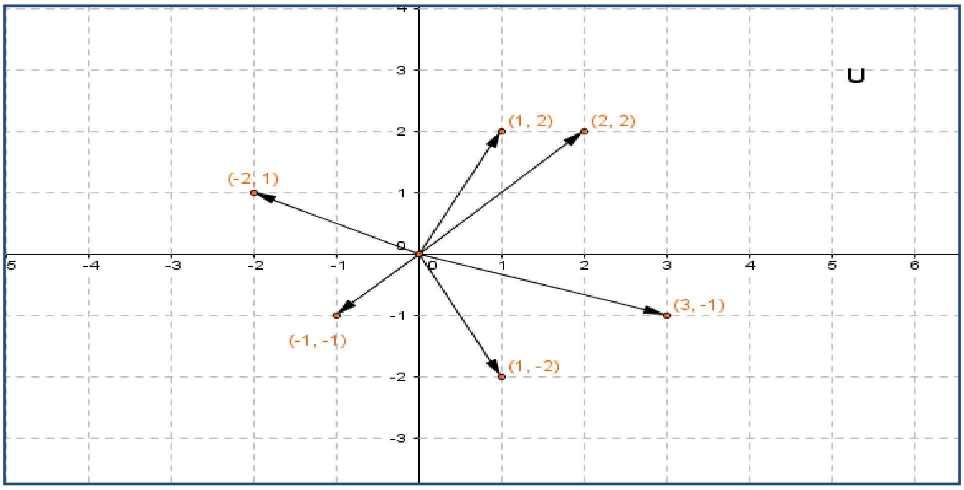
5) Abra o arquivo atividade 4-a. Nesta atividade considere um vetor t qualquer no plano $\Re^2$.

a) É possível escolher 3 vetores u,v,w do $\Re^2$ que escrevam o vetor t=αu+βv+γw? Justifique sua resposta

b) É possível escolher 2 vetores u,v do $\Re^2$ que escrevam o vetor t= αu+βv? Justifique sua resposta.

c) E com apenas um vetor, é possível? Justifique.

Figura 3.5: Tela da Atividade 5



Fonte: arquivo pessoal

A intenção é a de que os alunos explorem a noção de combinação linear e de base de um espaço vetorial, introduzindo a discussão sobre o número de vetores suficientes e necessários para escrever um vetor selecionado como combinação linear dos outros.

Todos os vetores dispostos na tela do applet são móveis.

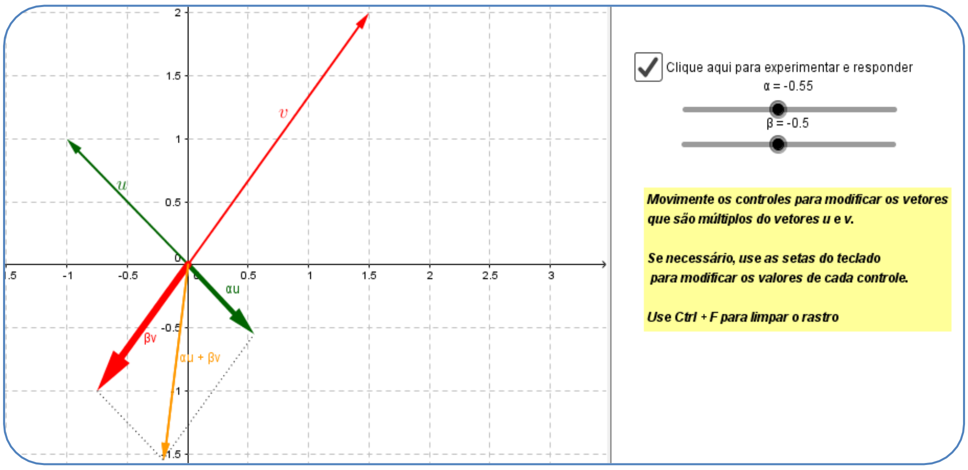
A atividade convida os alunos a escolher sucessivamente três vetores, dois vetores, um vetor, e fixar vetores livremente, para explorar a possibilidade de escrever um dos vetores escolhidos como uma soma de múltiplos dos demais vetores.

Atividade 6: explorando a noção de base

6) Abra o arquivo atividade 5-a.

O que você percebe ao variar os seletores? Que relações você percebe entre sua exploração dos seletores e os vetores correspondentes?

Figura 3.6: Tela da Atividade 6



Fonte: Arquivo pessoal

O objeto de aprendizagem possibilita explorar virtualmente o conceito de base geradora do espaço vetorial $\Re^2$, permitindo a exploração visual dos vetores na tela, e simultaneamente, uma exploração numérica escrevendo a combinação linear ao utilizar os seletores.

No applet figura 3.6, temos dois vetores u, v (linearmente independentes). A janela da direita possui, como nos demais objetos, uma caixa com a descrição "clique aqui para experimentar e responder" e os dois seletores α e β que simbolizam números reais compreendidos no intervalo [-5,5] com incremento de 0,05. Ao movimentar o seletor α é permitida a visualização dos múltiplos do vetor u representado no applet por αu, ao movimentar o seletor β é permitida a visualização dos múltiplos do vetor v representado no applet por βv, sempre acompanhado da representação do vetor soma αu+βv; nesta atividade, com o seu rastro sendo deixado na tela do applet para cada α e β escolhidos.

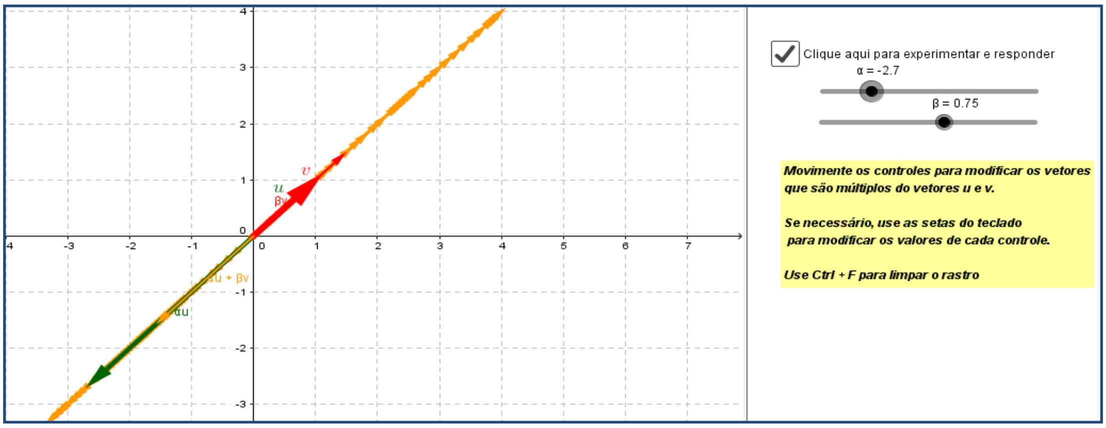
A atividade convida os alunos a explorar somas αu+βv de dois vetores linearmente independentes u e v, para que percebam que todos os outros vetores do plano podem ser escritos assim; ou seja, que o conjunto de todos os vetores da forma αu+βv é o espaço vetorial $\Re^2$. Em outras palavras, u e v geram o espaço vetorial $\Re^2$.

Atividade 7: Explorando a noção de base

7)Abra o arquivo atividade 5-b.

Faça a mesma exploração proposta em 5-a, e descreva o que você viu acontecer desta vez.

Figura 3.7: Tela da Atividade 7



Fonte: Arquivo pessoal

O objeto de aprendizagem acima possibilita explorar virtualmente o conceito de base geradora do espaço vetorial $\Re^2$, propondo uma situação em que o conjunto de vetores não é suficiente para gerar tal espaço.

No applet figura 3.7, temos dois vetores u, v, linearmente dependentes, sendo possível variar módulo e sentido de ambos. A janela da direita possui uma caixa com a descrição “clique aqui para experimentar e responder”. Os dois seletores α e β simbolizam os números reais compreendidos no intervalo [-5,5] com incremento de 0,05. Ao movimentar o seletor α é permitida aos alunos a visualização dos múltiplos do vetor u representado no applet por αu, ao movimentar o seletor β é permitido aos alunos a visualização do múltiplo do vetor v representado no applet por βv e o vetor soma αu+βv é representado na tela com seu rastro sendo deixado na tela do applet para cada α e β escolhidos.

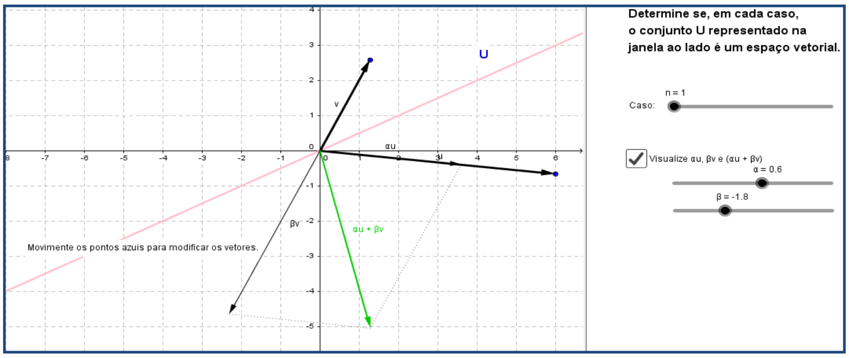
A atividade convida os alunos a explorar geometricamente que outros vetores são escritos na forma αu+βv, para os dois vetores linearmente dependentes u e v. Neste caso, e em contraste com a atividade anterior, o conjunto de todos os vetores na forma αu+βv não "cobre" o plano da tela do computador, pois não gera o espaço vetorial $\Re^2$.

Atividade 8- Explorando a noção de subespaço vetorial

8) Abra o arquivo atividade 6. Em cada caso, considere o conjunto U como um subconjunto de $\Re^2$, em que as operações de soma de vetores e produto por escalar bem definidas. Agora, considere os vetores de $\Re^2$ que são vetores posição de pontos em cada conjunto U. Diremos, em cada caso, representado pela letra n, variando de 1 a 5, que o vetor posição pertence a U. Para u e v em U, o que você pode dizer dos vetores resultantes da sua soma e produto por escalar? Para que conjuntos U tais vetores resultantes ainda pertencem a U?

Caso 1: $U = \{(x, x); x \in \Re\}$

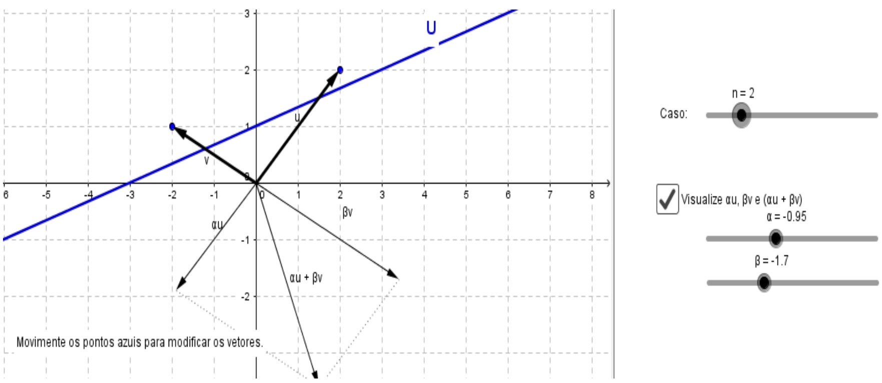
Figura 3.8.1: Tela da Atividade 8-a



Fonte: arquivo pessoal

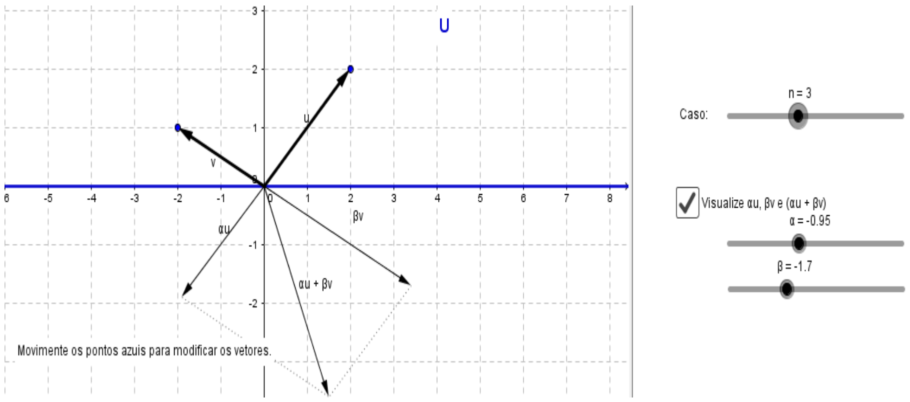
Caso 2: $U = \{(x, \frac{x}{3} + 1); x \in \Re\}$

Figura 3.8.2: Tela da Atividade 8-b



Caso 3: $U = \{(x,0); x \in \Re\}$

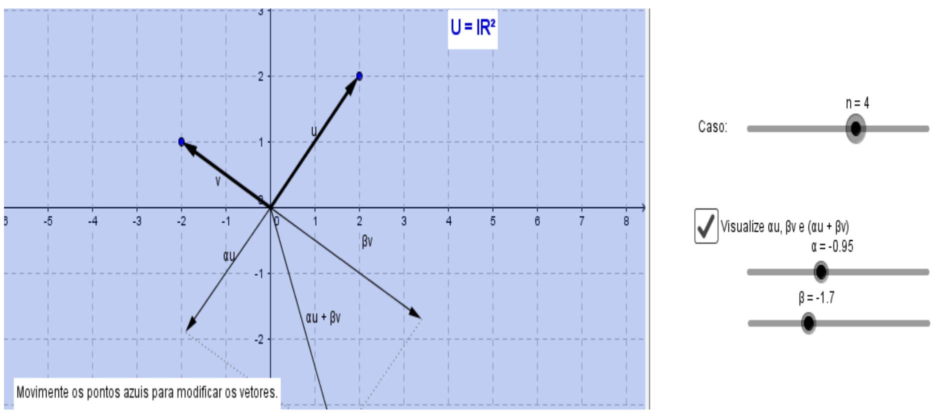
Figura 3.8.3: Tela da Atividade 8-c



Fonte: arquivo pessoal

Caso 4: $U = \Re^2$

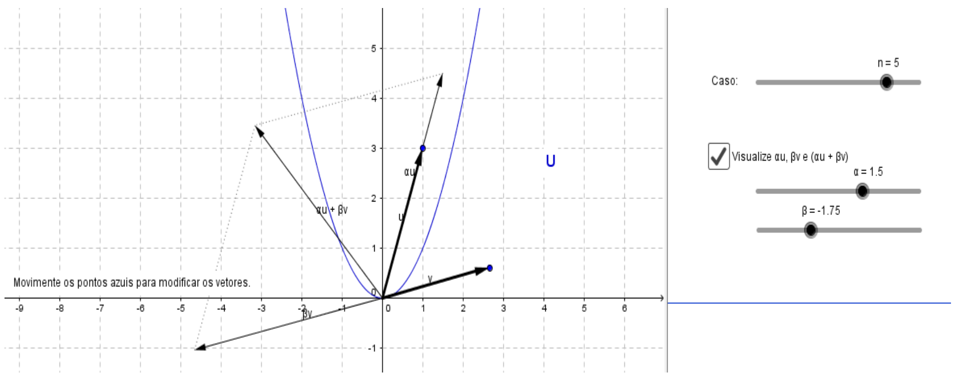
Figura 3.8.4: Tela da Atividade 8-d



Fonte: arquivo pessoal

Caso 5: $U = \{(x, x^2); x \in \Re$

Figura 3.8.5: Tela da Atividade 8-e



Fonte: arquivo pessoal

Os objetos de aprendizagem desenvolvidos possibilitam explorar e investigar virtualmente o conceito de subespaço do $\Re^2$.

No applet das figuras 3.8.1, 3.8.2, 3.8.3, 3.8.4, e 3.8.5, temos dois vetores u, v, linearmente independentes. A janela da direita possui uma caixa com a descrição “clique aqui para experimentar e responder”. Os dois seletores α e β que simbolizam os números reais compreendidos no intervalo [-5,5] com incremento de 0,05.

Ao movimentar o seletor α é permitida aos alunos a visualização dos múltiplos do vetor u representados no applet por αu, ao movimentar o seletor β é permitido aos alunos a visualização de múltiplos do vetor v representados no applet por βv e o vetor soma αu+βv. Há outro seletor descrito como “casos”,nesse seletor o aluno selecionará cinco casos de possíveis subconjunto do espaço U= $\Re^2$.A atividade convida os alunos a interpretarem geometricamente e a identificarem em quais casos U é subespaço vetorial do $\Re^2$.

A expectativa é a de que os alunos explorem virtualmente e identifiquem os conjuntos que contém o vetor nulo e que são fechados em relação à soma de seus vetores e multiplicação por escalar.

No capítulo que se segue, apresento o material empírico produzido para análise. Organizamos o relatório escrito de cada participante destacando os modos com que cada um deles desenvolveu as atividades e as imagens conceituais evocadas relacionadas aos conceitos que estavam sendo explorados. Antes de prosseguirmos com a análise, trazemos um quadro descritivo do material referente a cada questão específica, com as variações identificadas nas respostas dos participantes.

Capítulo 4

Apresentação e análise do material empírico

Neste capítulo analisamos o material empírico produzido a partir do relatório escrito pelos dez alunos da turma de Álgebra Linear I que participaram da oficina realizada durante dois encontros, na sala de informática do IFRJ.

Para elaborar uma resposta à questão de pesquisa colocada, “De que modos a utilização de recursos cinéticos/interativos com auxílio de computadores, pode contribuir para a construção, pelos alunos, do conhecimento sobre as noções fundamentais da Álgebra Linear, tais como espaço vetorial, subespaço vetorial, combinação linear e base geradora?”, organizamos as observações da realização das atividades na sala de informática e os relatórios escritos pelos alunos buscando retomar os objetivos iniciais da pesquisa:

- Investigar de que modos os alunos utilizam os recursos computacionais disponibilizados;

- Investigar de que modos os alunos utilizam o conteúdo previamente apresentado pelo professor da disciplina de Álgebra Linear;

-Identificar dificuldades evidenciadas durante as atividades realizadas pelos alunos.

A análise feita das respostas dos participantes foi realizada em duas etapas: a primeira, longitudinal, busca identificar dados que emergem nas respostas às atividades de cada participante; a segunda percorre as respostas a cada questão, identificando e distinguindo as respostas apresentadas.

Iniciamos com os relatórios escritos por cada participante, identificando os modos com que os alunos trabalharam durante a oficina e analisando as dificuldades que percebemos. Uma síntese ao final de cada uma das seções tem por intenção apoiar a segunda etapa, de identificação do que distingue cada análise individual apresentada.

Da análise inicial dos relatórios, os modos de produção de conhecimentos pelos alunos foram descrito em duas categorias amplas que denominamos: utilização de recursos computacionais e utilização do conteúdo estudado.

Uma vez que utilizamos um software de geometria dinâmica para desenvolver os objetos e as atividades, este permitiu aos participantes a experimentação visual, ou seja, a visualização de conceitos abstratos na forma geométrica e sua manipulação para apresentar uma solução para as atividades.

Tendo utilizado especificamente o software Geogebra foi também possível articular a atribuição de valores a parâmetros relacionados às representações visuais. Os objetos de aprendizagem foram desenvolvidos com esta funcionalidade, tornando possível ainda uma experimentação que denominamos numérica.

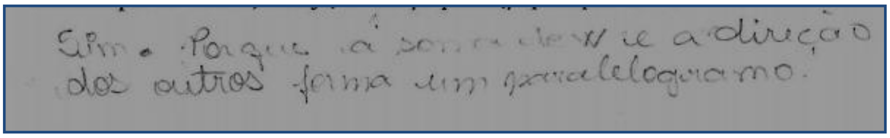
Para garantir o anonimato dos participantes na apresentação do material empírico, atribuímos um número a cada um deles, escolhidos aleatoriamente.

4.1- Análise do material empírico

4.1.1- O relatório de atividades do Aluno 1

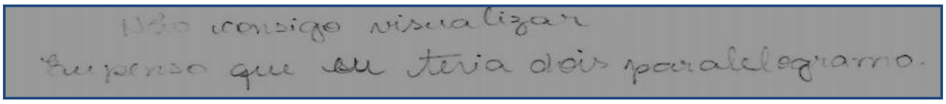
As respostas do aluno 1 às questões 1, 2-b, 2-c, 3 e 6 evidenciam o uso da *experimentação visual* durante a atividade; incluindo, em referência escrita, menções diretas à ação de visualizar. Em suas justificativas para responder as questões colocadas, o aluno 1 evoca conceitos de uma disciplina cursada anteriormente, a Geometria Analítica; em especial, a *regra do paralelogramo*, sem mencionar em nenhuma de suas respostas os conceitos trabalhados recentemente na disciplina de Álgebra Linear.

Figura 4.1: Questão 1: experimentação visual, verificação pela regra do paralelogramo.


Sim. Porque a soma de w e a direção
dos outros forma um paralelogramo.

Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.2: Questão 2-b: experimentação visual, verificação pela regra do paralelogramo.


Não consigo visualizar
Eu penso que eu teria dois paralelogramo.

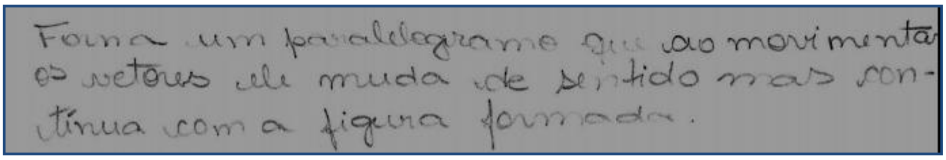
Fonte: Arquivo pessoal

Figura 4.3: Questão 2-c: experimentação visual, verificação pela regra do paralelogramo.


Eu teria um paralelogramo

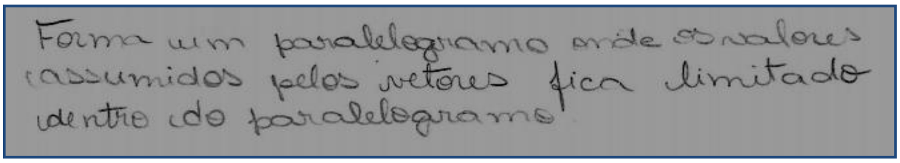
Fonte: Arquivo pessoal

Figura 4.4: Questão 3: experimentação visual, verificação pela regra do paralelogramo.


Forma um paralelogramo que ao movimenta
os vetores ele muda de sentido mas con-
tínua com a figura formada.

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 4.5: Questão 6: experimentação visual, verificação pela regra do paralelogramo.

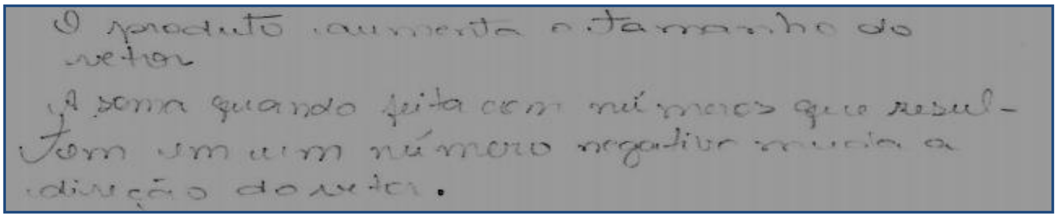

Forma um paralelogramo onde os valores
assumidos pelos vetores fica limitado
dentro do paralelogramo

Fonte: Arquivo pessoal

É também por *experimentação visual* que aluno 1 responde negativamente à questão 2 item a, com a justificativa de que "não conseguiu igualar os vetores ao mesmo tamanho" (Anexo A, p.109). Tais respostas não são incomuns: o estudante se justifica a partir da impossibilidade de executar uma ação; sem se dar conta que a impossibilidade é dele próprio, e não do problema a ser resolvido.

Na questão 4, o aluno evoca a imagem conceitual de que "multiplicar corresponde a aumentar", ignorando a possibilidade de um escalar estar entre 0 e 1 e respondendo que "o produto aumenta o tamanho do vetor", A afirmação sobre a adição de vetores é de difícil compreensão:

Figura 4.6: Questão 4: experimentação visual, sem considerar os números reais entre 0 e 1 e sem responder à questão.

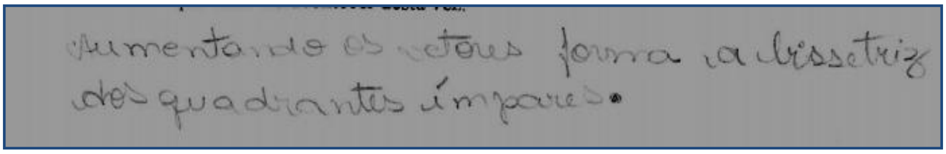

O produto aumenta o tamanho do
vetor
A soma quando feita com números que resul-
tem um um número negativo muda a
direção do vetor.

Fonte Arquivo pessoal

A resposta à questão número 5-a, que propõe a seleção de três vetores para escrever um quarto vetor como sua combinação linear, escolhidos dentre seis vetores móveis na tela, está em branco. Ele responde afirmativamente, mas sem justificativa, à questão 5-b, que propunha a seleção de dois vetores, na mesma tela anterior, para escrever um quarto vetor, a ser também selecionado; sendo portanto, inconclusiva qualquer interpretação. Interessante a sua resposta à questão 5-c, que propõe escolher um único vetor na tela, questionando a possibilidade de escrever com este todos os vetores de $\Re^2$. O aluno 1 responde negativamente, com a justificativa "Porque não há como fazer as operações. " (Anexo A, p.110). Não está claro a que operações o aluno se refere; mas podemos inferir que, por *experimentação visual* ou conhecimentos prévios evocados o aluno 1 conclui que há vetores que não se escrevem com apenas um vetor, se estamos no $\Re^2$ - talvez, ainda retomando a regra do paralelogramo.

A resposta à questão 7, que convida o aluno a experimentar e descrever o que ele vê, é interessante por corresponder ao que fica desenhado na tela caso a *experimentação visual* aconteça; o que reforça a interpretação que o aluno 1 se utilizou desta. Acrescendo a este os fatos do uso correto de linguagem matemática para se referir ao resultado da experimentação, e do uso dos números inteiros negativos:

Figura 4.7:Questão 7: experimentação visual, observando efeito o que aparece na tela.


Aumentando os vetores forma a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Fonte: Arquivo pessoal

A questão 8, em todos os seus itens, foi apresentada com respostas de difícil interpretação. As respostas do aluno 1 se baseiam em sistema de coordenadas e não serão consideradas nesta análise. (Anexo A, p.110)

Quadro 1- Síntese Aluno 1

	Modos de produção de conhecimentos		**Resultados**
Questões	**Utilização dos recursos computacionais-**	**Utilização conteúdo estudado**	
1;2-b;2-c;3;	Experimentação visual	Verificação pela regra do paralelogramo.	Resposta satisfatória
2-a	Experimentação visual		Sem sucesso
4	Experimentação visual	Produto de vetor por escalar; escalares restritos aos números inteiros positivos.	Resposta parcial
5-a			Resposta em Branco
6	Experimentação visual	Verificação pela regra do paralelogramo	Conclusão parcial, resposta insatisfatória
7	Experimentação visual	Produto de vetor por escalar,	Resposta

		considerando inteiros negativos.	satisfatória.
5-a; 5-b	Experimentação visual		Sem sucesso
8	Experimentação visual	Sistema de coordenada	Inconclusiva

Dificuldades evidenciadas

Em nossa análise, o aluno 1 não demonstra ter incorporado conceitos como os de combinação linear, subespaço vetorial. Em suas respostas, conseguimos identificar o uso da regra do paralelogramo para solucionar as questões, sendo bem-sucedido, em alguns casos. Interessante é que a regra do paralelogramo, que oferece um argumento simples inicialmente, torna-se complicada para lidar com o número crescente de vetores nos enunciados das questões seguintes. Vinner (1991) descreve que a introdução de um novo conhecimento, por meio de suas definições, como é o caso da Álgebra Linear, pode resultar em três cenários: a nova definição ou o novo conhecimento é incorporado ao conhecimento anterior, modificando-o; a nova definição é distorcida e o conhecimento anterior mantém-se inalterado; a nova definição é aprendida, memorizada, mas compartimentalizada do conhecimento anterior, que é evocado na resolução das questões. Identificamos este último cenário referente ao conhecimento do aluno 1 sobre números reais – restringindo sua argumentação aos inteiros positivos, na questão 4 ao utilizar a imagem conceitual sobre a operação de multiplicação nos inteiros positivos, a evocar sua imagem conceitual sobre operações de números inteiros positivos e identificamos os dois últimos cenários no que se refere ao uso da regra do paralelogramos para propor a solução das questões, remetendo-se a conhecimentos anteriores, de Geometria Analítica, sem incorporar as noções definidas e trabalhadas na disciplina de Álgebra Linear.

4.1.2- O relatório de atividades do Aluno 2

Na questão 1 o aluno 2 responde utilizando a *experimentação visual e numérica*. Isto porque os valores numéricos, algebricamente, não poderiam ser obtidos (uma vez as coordenadas dos vetores não foram dadas). Tentativas e erros em uma experimentação puramente numérica não nos parece também ser possível. Deste modo acreditamos que após *experimentação visual* o aluno 2 faz coincidir a combinação linear, observa os valores numéricos correspondentes e *utiliza a linguagem matemática* para escrever sua resposta.

Figura 4.8: Questão 1: experimentação visual e numérica, expressa em linguagem matemática.

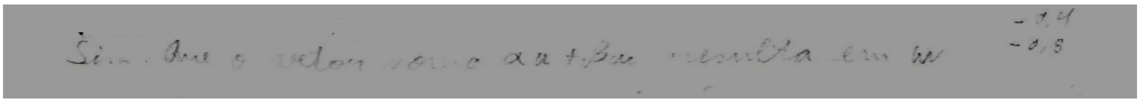

Sim, sendo = w = -1. u + (-0,2). v

Fonte: arquivo pessoal

O aluno não responde a nenhum item da questão 2 que o convida a determinar se é possível, tendo três vetores fixos linearmente independente dois a dois, escrever um quarto vetor como a combinação linear desses três.

Em sua resposta à questão 3, interpretamos que o aluno responde utilizando a *experimentação visual e numérica*, exibindo valor numérico para α e β exprimindo o vetor em linguagem matemática.

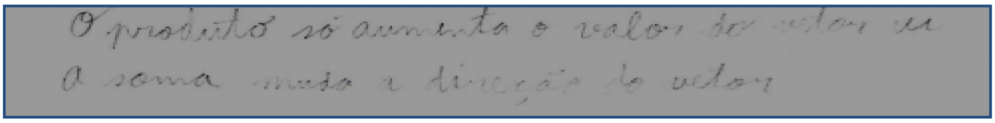
Figura 4.9: Questão 3: experimentação visual sem responder a questão.


Sim. Que o vetor soma αu + βu resulta em w
-1,4
-0,5

Fonte: Arquivo pessoal

Permanece a *escrita do vetor em linguagem matemática*, como é comum nas discussões da disciplina de Álgebra Linear. De modo semelhante ao do aluno 1, o aluno 2 responde à questão 4 afirmando que "o produto aumenta o tamanho do vetor", ignorando a possibilidade de um escalar estar entre 0 e 1. Sua resposta sobre a soma de vetores também se assemelha à do aluno anterior, sendo de difícil compreensão, mas sugerindo *experimentação visual parcial*. Esta interpretação decorre do fato de que o aluno parece restringir a sua experimentação aos vetores da tela da atividade, que eram localizados no terceiro quadrante, em uma particularização do que era solicitado.

Figura 4.10: Questão 4: experimentação visual, escalares restritos aos números inteiros positivos. Particularização vetores na tela.

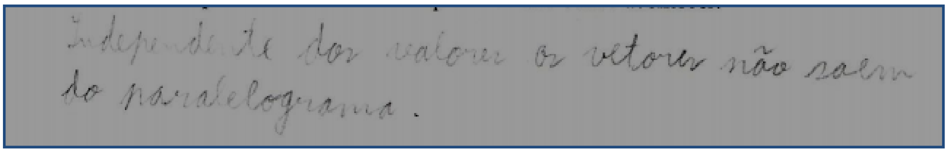

O produto só aumenta o valor do vetor u
a soma muda a direção do vetor

Fonte: arquivo pessoal

A questão 5, que propõe a seleção de três vetores para escrever um quarto vetor como sua combinação linear, escolhidos dentre seis vetores móveis na tela, não foi respondida. Isto pode significar o que este aluno também evoca conhecimentos restritos à Geometria Analítica. A experimentação fica mais complexa, mas não impossível, se usando da regra do paralelogramo em propostas em que o número de vetores aumenta na tela.

A interpretação de que *experimentação visual* e *uso da regra do paralelogramo* foram utilizadas também por este aluno é confirmada em sua resposta à questão 6. Aqui o aluno evoca de modo mais explícito os conhecimentos de Geometria Analítica, em especial, a regra do paralelogramo para justificativa de resposta que parece elaborada a partir de *experimentação visual.*

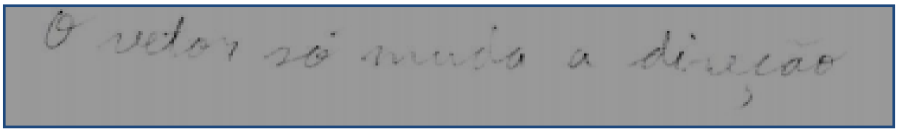
Figura 4.11: Questão 6: experimentação visual, verificação pela regra do paralelogramo.


Independente dos valores os vetores não saem do paralelograma.

Fonte: arquivo pessoal

A resposta à questão 7, que convida o aluno a experimentar e descrever o que ele vê, é interessante por corresponder ao que fica desenhado na tela caso uma *experimentação visual* aconteça. A resposta reforça a interpretação que o aluno 2 se utilizou desta, parcialmente, sem considerar todas as possibilidades que resultariam em mudança de sentido, e não de direção, e alterações nas normas dos vetores.

Figura 4.12: Questão 7: experimentação visual, restrita a movimento parcial produzido.


O vetor só muda a direção

Fonte: arquivo pessoal

A questão 8 não foi entendida, e as respostas são de difícil interpretação. (Anexo A, p.113-114)

Quadro 2- Síntese Aluno 2

	Modos de produção de conhecimentos		**Resultados**
Questões	**Utilização dos recursos computacionais-**	**Utilização do conteúdo estudado**	
1;3	Experimentação visual; numérica	Utilização de linguagem matemática Álgebra Linear, talvez noção de combinação linear	Resposta satisfatória
2-a; 2-b; 2-c;			Respostas em branco

2-d; 5-a;5-b;5-c			
4	Experimentação visual	Produto de vetor por escalar; escalares restritos aos números inteiros positivos. Particularização vetores na tela.	Resposta parcial
6	Experimentação visual	Verificação pela regra do paralelogramo.	Conclusão parcial, resposta insatisfatória
7	Experimentação visual	Produto de vetor por escalar, considerando inteiros negativos.	Conclusão parcial
8			Inconclusivo

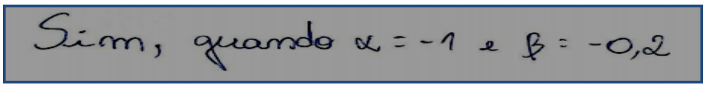
Dificuldades evidenciadas

O aluno 2 incorpora parcialmente, em algumas respostas, a linguagem da Álgebra Linear sem, no entanto, utilizar este conhecimento para elaborar suas respostas às atividades. Suas respostas são semelhantes às do aluno 1, evocando conceitos de Geometria Analítica, por tanto em nossa análise os modos de produção de conhecimento configura de forma semelhante descrito na análise das respostas do aluno 1, com a ressalva de que em alguns momentos, aspectos da linguagem de Álgebra Linear foram utilizados.

4.1.3- O relatório de atividades do Aluno 3

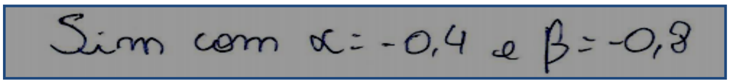
As questões 1 e 3 foram respondidas utilizando *experimentação visual* e *numérica*. Corretamente, de forma que o senso comum em aulas de matemática considera "objetiva", sem escrever os vetores, mas sim calculando e exibindo valores para dar uma resposta.

Figura 4.13: Questão 1: experimentação visual/numérica.



Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.14: Questão 3: experimentação visual/numérica.

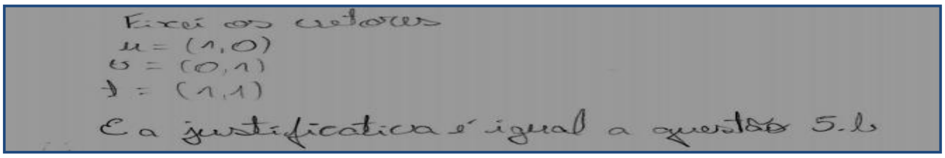

Sim com α = -0,4 e β = -0,8

Fonte: arquivo pessoal

Na questão 2, o aluno parece usar a *experimentação visual* como na questão 1;no entanto, a situação da inclusão de um número maior de vetores torna mais complexa a solução uma vez que atribuir o valor zero a uma das constantes não parece ser uma ideia que ocorra naturalmente aos alunos. (Anexo p.114-115). O aluno responde que “a partir do experimento não conseguiu igualar ao vetor w”.

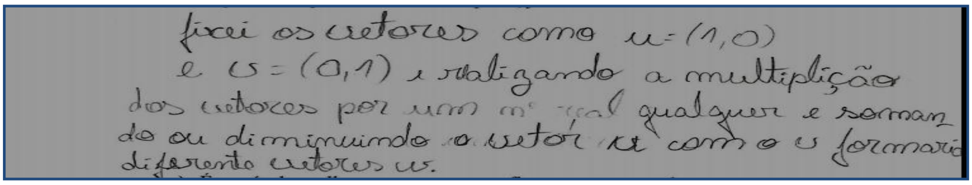
A questão 4, que propõe observar a relação entre dois vetores fixos na tela em termos das operações de adição e produto por escalar, foi deixada com um ponto de interrogação; o que pode significar que seu enunciado não foi entendido. Já em sua resposta à questão 5, itens a,b,c, o aluno 3 evoca conceitos de Álgebra Linear para respondê-la; especificamente, as noções de combinação linear e da base “canônica” do espaço $\Re^2$. O retomar tais bases “canônicas”, como são normalmente estudadas, remete a uma particularização de modo a remeter a atividade a contextos familiares, já encontrados. Sua resposta evidencia os caminhos produzidos em sua *experimentação visual*expressando ter escolhido e fixado vetores específicos.

Figura 4.15: Questão 5-a. Experimentação visual, utilizando conhecimento de combinação linear, particularizando.


Fixei os vetores
u = (1,0)
v = (0,1)
t = (1,1)
E a justificativa é igual a questão 5.b

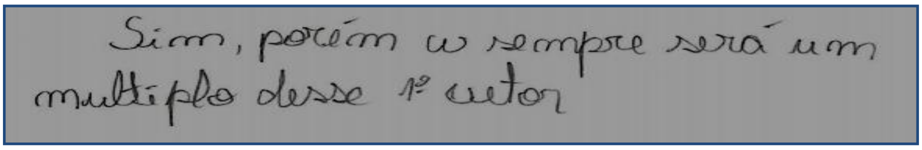
Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.16: Questão 5-b.Experimentação visual, utilizando conhecimento de combinação linear, particularizando.


fixei os vetores como u = (1,0)
e v = (0,1) e realizando a multiplição
dos vetores por um nº real qualquer e somando
ou diminuindo o vetor u com o v formaria
diferente vetores w.

Fonte: arquivo pessoal

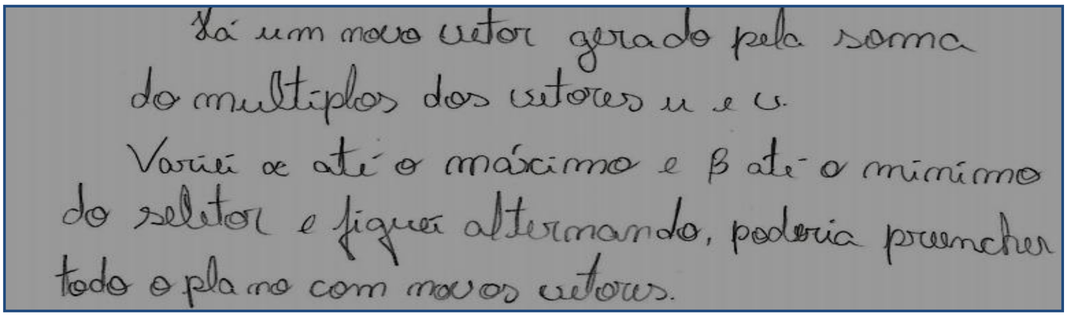
Figura 4.17: Questão 5-c: Experimentação visual, utilizando conhecimento de combinação linear.


Sim, porém w sempre será um multiplo desse 1º vetor

Fonte: arquivo pessoal

Na questão 6, o aluno conjecturou após a *experimentação visual*, limitada pela restrição do seletor do aplicativo, que o conjunto de todos os vetores preencheriam o $\Re^2$. Observe a conjugação do verbo – poderia – indicando não uma verificação na prática, mas uma experimentação mental, ou uma conjectura. A menção a um novo vetor gerado pela soma dos múltiplos dos vetores u e v leva-nos a interpretar que o aluno evoca a noção de espaço gerado e combinação linear.

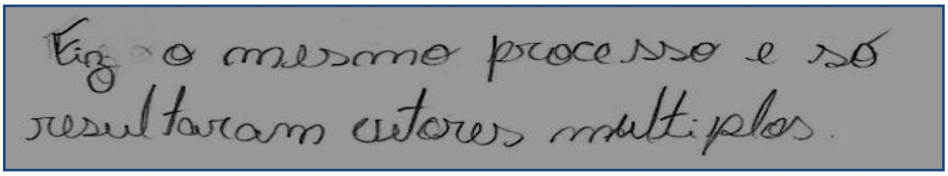
Figura 4.18: Questão 6: experimentação visual, observando efeito o que aparece na tela.


Há um novo vetor gerado pela soma do multiplos dos vetores u e v.
Variei α até o máximo e β até o mínimo do seletor e fiquei alternando, poderia preencher todo o plano com novos vetores.

Fonte: arquivo pessoal

Na questão 7, este aluno verificou que o conjunto de todos os vetores resultaram “em vetores múltiplos”, observando o efeito que aparece na tela, sem muito detalhamento da imagem visual gerada.

Figura 4.19: Questão 7: experimentação visual, usando noções de multiplicação por escalar e dependência linear.

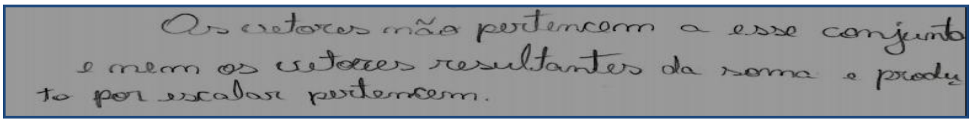

Fiz o mesmo processo e só resultaram vetores multiplos.

Fonte: arquivo pessoal.

Interpretamos que, de forma parcial o aluno evoca conceitos referentes à multiplicação de vetor por escalar e dependência linear.

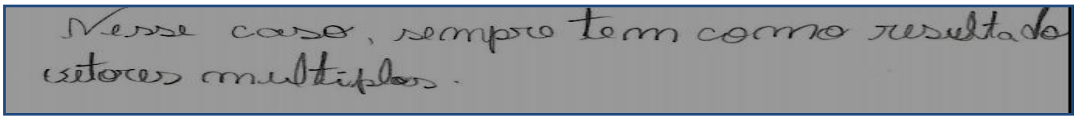
Durante a realização da questão 8, o aluno manteve uma resposta coerente com o enunciado apenas nos itens b, e. Ele notou que o conjunto dos vetores resultantes da soma e produto por escalar não pertencem ao conjunto dado. Utiliza, portanto, condições (fechamento das operações de adição e multiplicação por escalar) que os subespaços vetoriais devem satisfazer. Nos demais itens a,c,d, percebemos que o aluno não explicita suas respostas como feito nos itens b, mas apenas descreve o que observa na tela, em experimentações que não foram generalizadas. Deste modo, suas respostas são parciais.

Figura 4.20- Questão 8-a: experimentação visual, fechamento das operações de adição e multiplicação por escalar .


Os vetores não pertencem a esse conjunto e nem os vetores resultantes da soma e produto por escalar pertencem.

Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.21- Questão 8-b: experimentação visual.


Nesse caso, sempre tem como resultado vetores multiplos.

Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.22- Questão 8-c: experimentação visual, fechamento das operações de adição e multiplicação por escalar..


Ocorre o mesmo que no caso 1

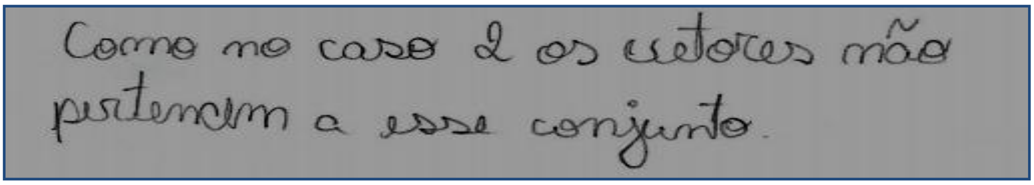
Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.23- Questão 8-d: experimentação visual.


Nesse caso consigo gerar infinitos vetores.

Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.24- Questão 8-e: experimentação visual, fechamento das operações de adição e multiplicação por escalar..


Como no caso 2 os vetores não pertencem a esse conjunto.

Fonte: arquivo pessoal

Quadro 3- Síntese Aluno 3

	Modos de produção de conhecimentos		**Resultados**
Questões	Utilização dos recursos computacionais-	Utilização conteúdo estudado	
1,3	Experimentação visual/ numérica	Inconclusivo, talvez a noção de combinação linear	Resposta satisfatória
2-a;2-b;2-c;2-d	Experimentação visual/ talvez numérica	Inconclusivo	Sem sucesso
4	Inconclusivo	Inconclusivo	Não entendeu o enunciado
5-,a;5-b	Experimentação visual	Linguagem matemática, noção de combinação linear e particularização	Resposta satisfatória
6;	Experimentação visual	Noção de combinação linear e espaço gerado	Resposta parcial
7	Experimentação visual	Noção de combinação linear	Resposta parcial
8-a; 8-c; 8-d	Experimentação visual	Possível noção de subespaço vetorial	Resposta parcial
8-b;8-e	Experimentação visual	Possível noção de subespaço vetorial	Resposta satisfatória

Dificuldades evidenciadas

O aluno 3 utiliza, em algumas de suas respostas, conhecimentos de Álgebra Linear. A experimentação numérica realizada inicialmente ao mover os seletores e exibindo valores numéricos para as combinações lineares, do mesmo modo que o recurso da regra do paralelogramo, fica complexa quando os números vetores na atividade é maior do que dois. Não ocorreu a este aluno, por exemplo, considerar uma das constantes iguais a zero na questão 2-item c fazendo recair esta questão no problema anterior que ele havia respondido.

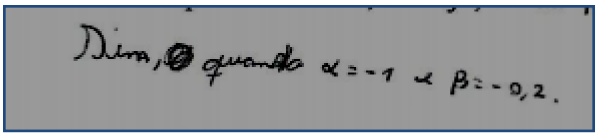
O enunciando da questão quatro não foi entendido pelo aluno. Há também uma dificuldade em explicitar as respostas na questão 2. O aluno 3 busca resolver dificuldades que emergem na experimentação remetendo-se ao conhecimento trabalhado em sala de aula, não necessariamente da disciplina de Álgebra Linear, evocando a base canônica do $\Re^2$, que lhe é familiar. Assim particulariza e lança mão de conhecimentos aprendidos para responder as dificuldades que foram colocadas pelas suas estratégias iniciais de experimentação. Isto diferencia sua atividade das anteriores, dos alunos 1 e 2.

Analisando o cenário descrito por Vinner (1991), poderíamos dizer que os conhecimentos anteriores estão sendo modificados com as novas experiências proporcionadas pelo curso de Álgebra Linear mesmo que o novo conhecimento ainda esteja parcial ou distorcido.

4.1.4- O relatório de atividades do Aluno 4

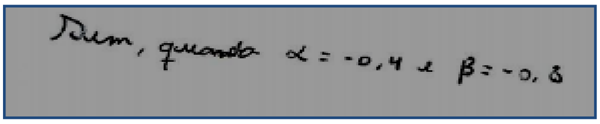
O aluno respondeu as questões 1 e 3 de forma breve, baseando-se na *experimentação visual/numérica*com as telas do software Geogebra.

Figura 4.25: Questão 1: experimentação visual/numérica.



Fonte: arquivo pessoal

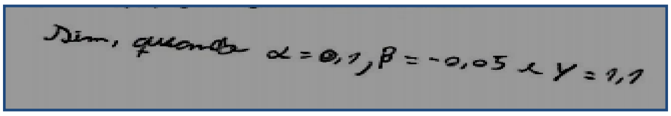
Figura 4.26: Questão 3: experimentação visual/numérica.


Sim, quando $\alpha = -0,4$ e $\beta = -0,8$

Fonte: arquivo pessoal

Já na questão 2- item a, embora tenha exibido valores numéricos para α, β e γ, após a *experimentação visual*, estes não foram os números corretos.

Figura 4.27: Questão 2-a: experimentação visual/numérica com resposta equivocada.

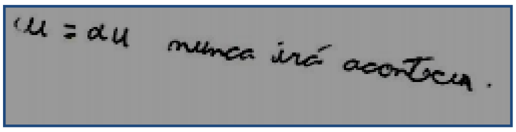

Sim, quando $\alpha = 0,1$, $\beta = -0,05$ e $\gamma = 1,1$

Fonte: arquivo pessoal

É também por *experimentação visual* que aluno 4 responde negativamente à questão 2 itens, c e d por talvez não ter entendido a questão. O aluno relata na questão 2 item-b que variando os seletores “não acharemos o vetor s”. (Anexo A, p.117). Interpretamos que ele tinha a expectativa de que tal vetor fosse exibido na tela, para algum valor dos seletores.

Na questão 4, através de sua *experimentação visual*, o aluno concluiu e respondeu de forma simples que: “w = αu nunca irá acontecer ”, observando o que aparece na tela. Deste modo ele evoca a noção de produto de vetor por escalar utilizando linguagem matemática da aprendida na disciplina de Álgebra Linear.

Figura 4.28- Questão4: experimentação visual, noção de produto de vetor por escalar utilizando linguagem matemática .

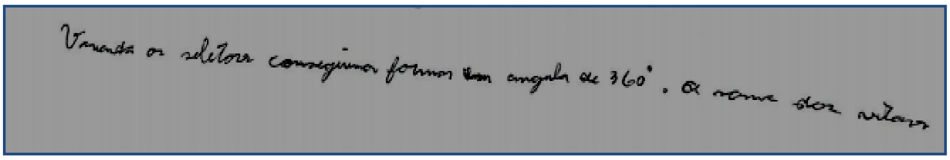

$w = \alpha u$ nunca irá acontecer.

Fonte: arquivo pessoal.

A questão 5, que propõe a seleção de três vetores para escrever um quarto vetor como sua combinação linear escolhidos dentre seis vetores móveis na tela, também não foi respondida. Em nossa análise a dificuldade desta questão está relaciona com as noções de base e combinação linear. Para os alunos que tentam respondê-la por *experimentação visual* a atividade torna-se por demais complexa caso vetores linearmente dependentes não seja excluído da experimentação

A resposta exibida pelo aluno na questão 6 após a *experimentação visual* indica que o aluno observa que o conjunto de vetores gerados percorrem todas as direções do plano sem, no entanto, incorporar a linguagem e evocar a noção de espaço gerado da Álgebra Linear.

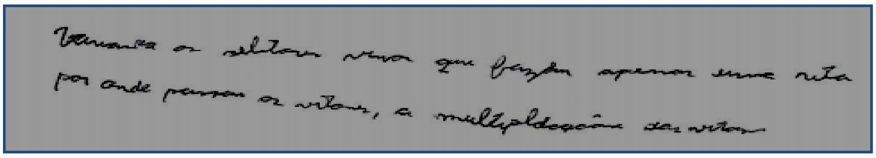
Figura 4.29- Questão 6: experimentação virtual, evocando conceito geométrico de medida de ângulos.


Variando os seletores conseguimos formar um angulo de 360°. A soma dos vetores

Fonte: arquivo pessoal

Na questão 7, ele pôde inferir através da *experimentação visual*, evocando parcialmente a multiplicação de vetor por escalar, uma vez que descreve que o conjunto de todos os vetores resultaram em vetores múltiplos, similar à resposta do aluno 3.

Figura 4.30- Questão 7: experimentação visual, menção implícita a espaço gerado.

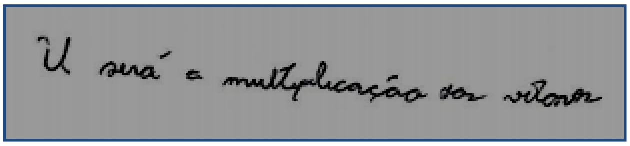

Variando os seletores vemos que fazem apenas uma reta por onde passam os vetores, a multiplicação dos vetores

Fonte: arquivo pessoal.

No entanto ao mencionar em sua resposta “uma reta por onde passam os vetores” interpretamos a menção implícita a espaço gerado por um vetor no plano.

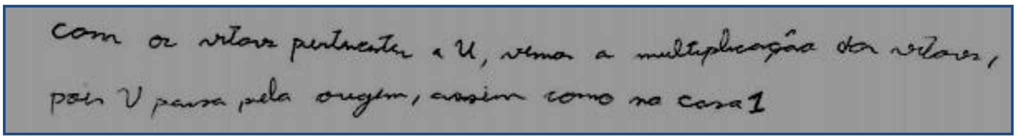
Todas as observações inseridas na questão 8 estão de acordo com a *experimentação visual*,observando o que aparece na tela. Suas justificativas são parciais, à exceção do item b, remetem aspectos importantes do conceito de subespaço vetorial, tais como o vetor nulo deve pertencer ao conjunto como relatado nos itens c e e, o fechamento das operações de adição de vetores e multiplicação por escalar, com no item d uma ideia de espaço gerado por um vetor e seus múltiplos como no item a e c.

Figura 4.31- Questão 8-a experimentação visual observando o que aparece na tela


U será a multiplicação dos vetores

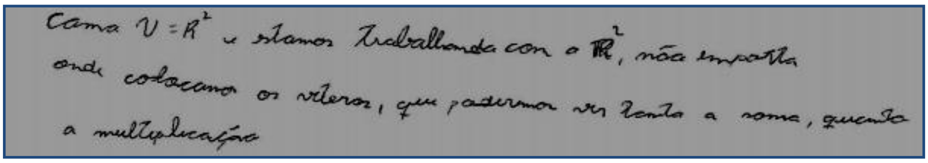
Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.32-Questão 8-cexperimentação visual observando o que aparece na tela


com os vetores pertencentes a U, vemos a multiplicação dos vetores, pois V passa pela origem, assim como na casa 1

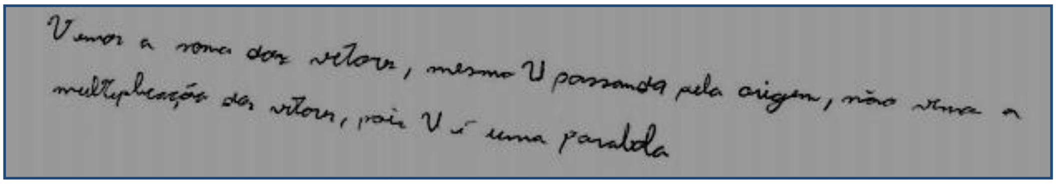
Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.33- Questão 8-dexperimentação visual observando o que aparece na tela


Como $V = R^2$ e estamos trabalhando com o $\mathbb{R}^2$, não importa onde colocamos os vetores, que podemos ver tanto a soma, quanto a multiplicação

Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.34-Questão 8-eexperimentação visual observando o que aparece na tela


Vemos a soma dos vetores, mesmo U passando pela origem, não vemos a multiplicação dos vetores, pois V é uma paralela

Fonte: arquivo pessoal

Quadro 4- Síntese do Aluno 4

	Modos de produção de conhecimentos		**Resultados**
Questões	**Utilização dos recursos computacionais-**	**Utilização conteúdo estudado**	
1,3	Experimentação visual/ numérica	Talvez a noção de combinação linear	Resposta satisfatória
2-a; 2-b;2-c;2-d	Experimentação visual	Inconclusiva	Sem sucesso
4	Experimentação visual	Noção de produto de vetor por escalar utilizando linguagem matemática	Resposta satisfatória
5-a;5-b;5-c			Resposta em branco
6	Experimentação visual	Evocando conceito geométrico de medida de ângulos	Resposta parcial

7	Experimentação visual	Menção implícita a espaço gerado	Resposta parcial
8-a;8-c;8-d;8-e	Experimentação visual	Noção parcial de subespaço vetorial	Resposta parcial
8-b	Experimentação visual	Inconclusiva	Resposta inconclusiva

Dificuldades evidenciadas

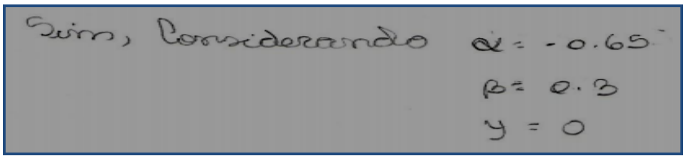
A experimentação numérica e linguagem matemática estão explicitas nas tentativas de responder as questões, mesmo não havendo sucesso em exibir valores numéricos para as combinações lineares. Como nos três casos anteriores, e de modo semelhante ao uso do recurso da regra do paralelogramo para responder à questão 2, utilizar a experimentação numérica fica gradativamente complexo porque o número de vetores na atividade é maior do que dois. Como aconteceu como o aluno 3, não ocorreu a este aluno considerar uma das constantes iguais a zero na questão 2-item c fazendo recair esta questão no problema anterior que havia respondido.

Como no caso do aluno 3, interpretamos que o cenário de aprendizagem incorpora o conhecimento de Álgebra Linear de modo parcial ou distorcido.

4.1.5-O relatório de atividades do Aluno 5

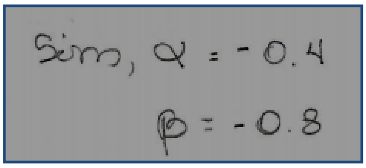
Este aluno respondeu o questionário da atividade de forma breve. Interpretamos que ele não se envolveu com as atividades, ou não se sentiu atraído por elas.

Figura 4. 35- Questão 2-c: experimentação visual/numérica, noção de combinação linear



Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.36: Questão 3: experimentação visual / numérica.



Fonte: arquivo pessoal

Em sua maioria, as questões foram apresentadas em branco e aquelas que foram respondidas estavam marcadas por termos como “Sim” e “Não”, (Anexo A, p.117-119). Não houve, portanto, evidências no material empírico de que o aluno utilizou conhecimentos anteriores apresentados pelo professor da disciplina de Álgebra Linear. Nas questões 2-c e 3 destacamos experimentação visual e numérica, evocando a noção de combinação linear. Surpreendentemente, foi o único aluno a fazer uma das constantes iguais a zero na questão 2 item c.

Quadro 5- Síntese Aluno 5

	Modos de produção de conhecimentos		**Resultados**
Questões	**Utilização dos recursos computacionais-**	**Utilização conteúdo estudado**	
1,2-a,2-b,2-d,4	Inconclusiva	Inconclusiva	Inconclusiva
2-c;3	Experimentação visual/numérica	Noção de combinação linear	
5-b;5-c;6;7;8			Em branco

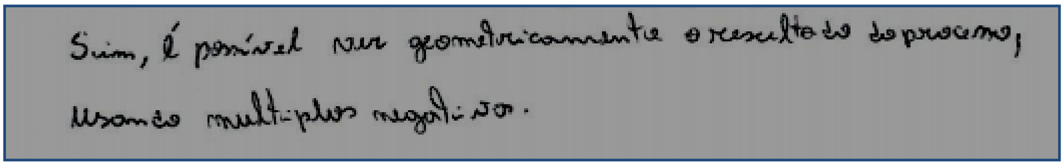
Dificuldades evidenciadas

Sobre as dificuldades apresentadas por este aluno, neste ponto da pesquisa, não podemos concluir se o estudante não compreendeu as atividades, ou teve dificuldades em expressar as respostas, ou se os obstáculos no entendimento são referentes aos conteúdos da Álgebra Linear.

4.1.6- O relatório de atividades do Aluno 6

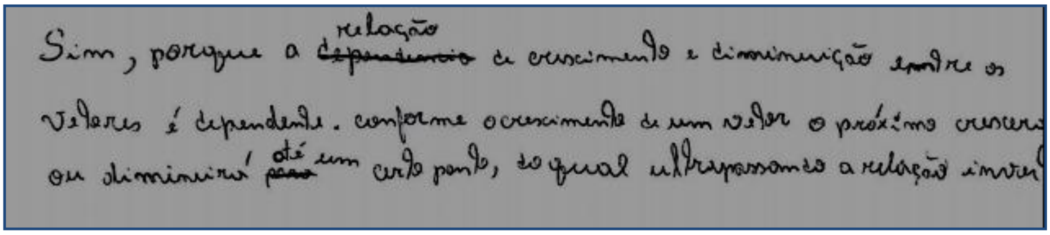
Na questão1 e 2-a, embora não tenha especificado os valores reais de α, β, γ ficou evidente que o aluno por meio da *experimentação visual* respondeu que era possível verificar geometricamente o resultado.

Figura 4.37: Questão 1: experimentação visual, justificativa geométrica


Sim, é possível ver geometricamente o resultado do processo, usando múltiplos negativos.

Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.38: Questão 2-a: experimentação visual, justificativa geométrica.

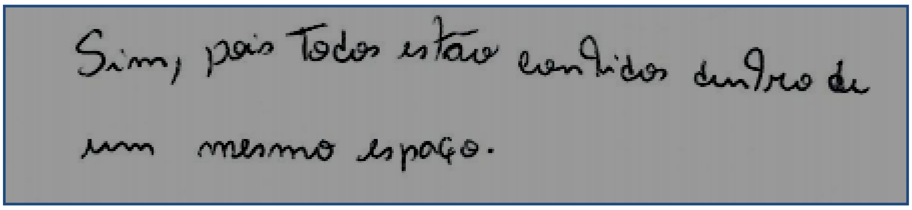

Sim, porque a ~~dependência~~ relação de crescimento e diminuição entre os valores é dependente. conforme o crescimento de um valor o próximo crescerá ou diminuirá ~~para~~ até um certo ponto, do qual ultrapassamos a relação inversa

Fonte: arquivo pessoal

Na questão 2- item a, entendemos que o aluno conseguiu visualizar com a ajuda dos seletores do applets o que era solicitado pela questão, mas não soube explicitar uma justificativa sobre o que ele observou, e dessa maneira, respondeu de modo inconclusivo.

No item b da mesma questão, o aluno afirma que é possível, pois afirma que todos estão dentro do mesmo espaço, embora não tenha mencionado a qual espaço está se referindo.

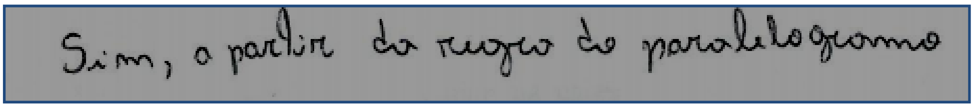
Figura 4.39: Questão 2-b: experimentação visual. evocando conceitos de Álgebra Linear.


Sim, pois Todos estão contidos dentro de um mesmo espaço.

Fonte: arquivo pessoal.

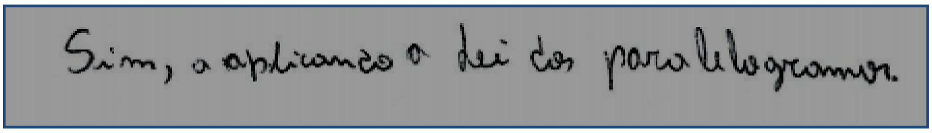
No item 2-c e 3, a sua resposta foi construída a partir da *experimentação visual* evocando os conhecimentos de Geometria Analítica em particular conceito da regra do paralelogramo.

Figura 4.40: Questão 2-c: experimentação visual, verificação pela regra do paralelogramo.


Sim, a partir da regra do paralelogramo

Fonte: arquivo pessoal

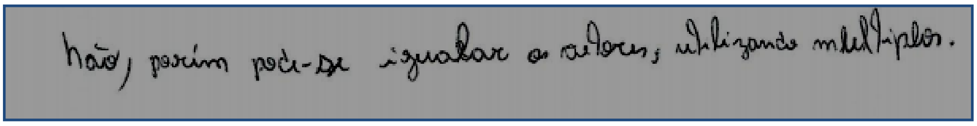
Figura 4.41: Questão 3: experimentação visual, verificação pela regra do paralelogramo.


Sim, a aplicando a lei dos paralelogramos.

Fonte: Arquivo pessoal

No item d, ele responde: “Não”, tendo como justificativa que podem-se igualar vetores utilizando múltiplos, respondendo de modo inconclusivo, mas sugerindo a noção de dependência linear.

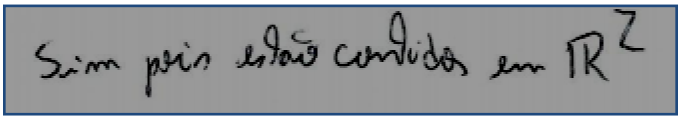
Figura 4.42: Questão 2-d: inconclusivo, evocando conceito de Álgebra Linear.


não, porém pode-se igualar os vetores, utilizando multiplos.

Fonte: arquivo pessoal.

Na questão 5- item a, a sua resposta foi “Sim” e sua justificativa, parcial, é que os vetores estão contidos no $\Re^2$.

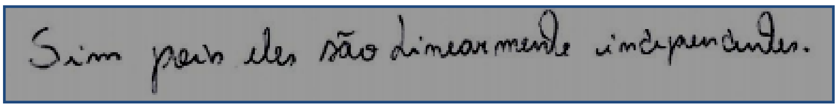
Figura 4.43: Questão 5-a: inconclusivo, evocando conceitos de Álgebra Linear.


Sim pois estão contidos em $\mathbb{R}^2$

Fonte: arquivo pessoal.

Seguindo no item b, o aluno responde que é possível, pois os vetores são linearmente independentes evocando assim conhecimentos de Álgebra Linear.

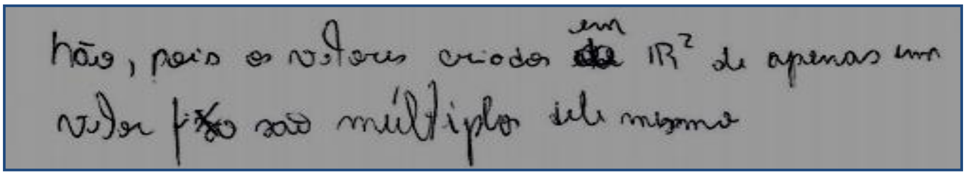
Figura 4.44: Questão 5-b : inconclusivo, evocando conceitos de Álgebra Linear.


Sim pois eles são linearmente independentes.

Fonte: Arquivo pessoal.

No item c o aluno colocou “Não” e logo em seguida, justificou que, tendo um vetor fixo, o outro será múltiplo do mesmo, talvez evocando assim conceito de combinação linear aprendido na disciplina de Álgebra Linear.

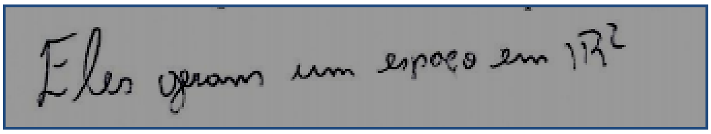
Figura 4.45: Questão 5-c: inconclusivo, talvez evocando conhecimento de Álgebra Linear.


não, pois os vetores criados ~~da~~ em $\mathbb{R}^2$ de apenas um vetor fixo são múltiplo dele mesmo

Fonte: Arquivo pessoal

Na questão 6, o aluno a partir da *experimentação visual* observou e concluiu que o conjunto de vetores “gera um espaço em $\Re^2$**”.**

Figura 4.46: Questão 6: experimentação visual, resposta parcial evocando noção de espaço gerado.

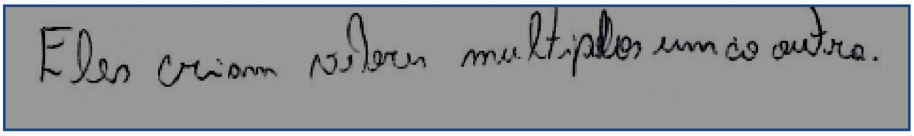

Eles geram um espaço em $\mathbb{R}^2$

Fonte: Arquivo pessoal.

Ressaltamos que a resposta do aluno a questão 6 é inconclusiva pois o mesmo não deixa claro se está referindo-se ao espaço $\Re^2$ ou algum subespaço dentro de $\Re^2$.

Na questão 7, o aluno por meio da *experimentação visual*, observando o que aparece na tela e concluindo que se “criam vetores múltiplos um do outro”; evocando portanto noção de produto por escalar.

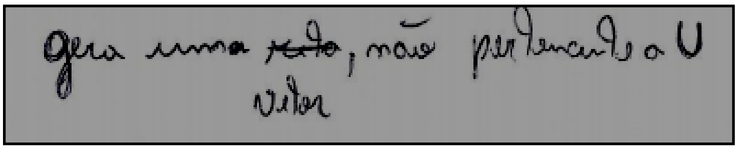
Figura 4.47: Questão 7: experimentação visual, evocando noção de produto por escalar.


Eles criam vetores multiplos um do outro.

Fonte: Arquivo pessoal.

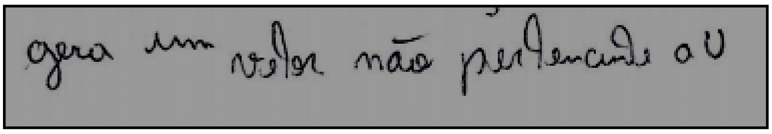
Na questão 8, a aluno apresenta respostas parciais e inconclusivas em quase todos os itens. Notamos o uso do termo “gera” nos itens a, b, d o que interpretamos como uma possível noção de base geradora.

Figura 4.48: Questão 8-a: experimentação visual observando efeito o que aparece na tela



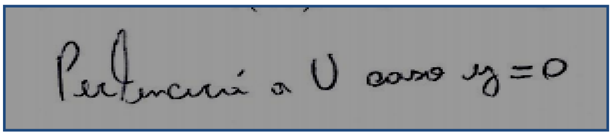
Fonte: arquivo pessoal.

Figura 4.49: Questão 8-b: experimentação visual observando efeito o que aparece na tela.



Fonte: arquivo pessoal.

Figura 4.50: Questão 8-c: experimentação visual observando efeito o que aparece na tela.

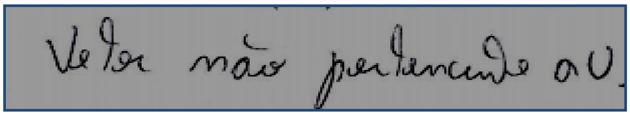


Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.51: Questão 8-d: experimentação visual observando efeito o que aparece na tela

Fonte: arquivo pessoal.

Figura 4.52: Questão 8-e: experimentação visual observando efeito o que aparece na tela.



Fonte: arquivo pessoal.

Quadro 6-Síntese Aluno 6

	Modos de produção de conhecimentos		Resultados
Questões	**Utilização dos recursos computacionais-**	**Utilização conteúdo estudado**	
1; 2-a; 2-b	Experimentação visual	Justificativa geométrica	Resposta satisfatória
2-c;3	Experimentação visual	Verificação pela regra do paralelogramo.	Resposta satisfatória
2-d,4	Inconclusiva	Noção de combinação linear	Resposta satisfatória
5-a	Inconclusiva	Noção de espaço gerado	Resposta parcial
5-b;5-c	Inconclusiva	Noção de combinação linear	Resposta satisfatória.
6	Experimentação visual	Possível noção de base geradora	Resposta parcial
7	Experimentação visual	Noção de combinação linear	Resposta satisfatória.
8-a;8-b;8-e	Experimentação visual	Possível noção de espaço gerado	Inconclusiva
8-c;8-d	Experimentação visual	Noção de subespaço vetorial	Resposta satisfatória

Dificuldades evidenciadas

A experimentação visual está evidente nas tentativas de responder as questões 1 e 2-a.O aluno não se preocupou em exibir os valores numéricos dos seletores, o que na verdade não era solicitado, e sim, confirmar visualmente o que foi pedido. O recurso da regra do paralelogramo é evocado para responder às questões 2-c e 3 assim como os alunos 1 e 2.

As dificuldades evidenciadas nas questões como 2-b, 5-a, que os alunos 1, 2 e 3 não conseguiram responder, foram respondidas por este aluno, mesmo de forma parcial, evocando o conhecimento de Álgebra Linear aprendidos e aparentemente abandonando a experimentação visual/numérica.

Interpretamos este como um cenário de aprendizagem que já incorpora o conhecimento de Álgebra Linear, mesmo que de modo parcial e ainda em construção.

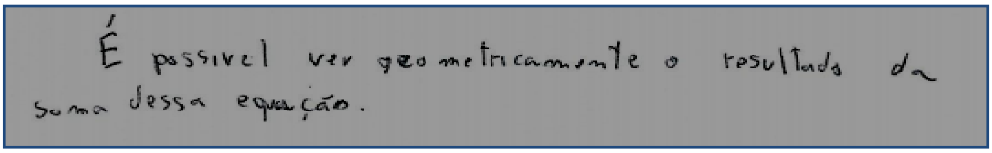
Também, de forma parcial, percebemos uma construção no conhecimento abstrato de subespaço vetorial nas questões 6 e 8, tendo dificuldades em escrever suas conclusões e justificar como está pensando a questão.

4.1.7- O relatório de atividades do Aluno 7

Observamos que o aluno respondeu, de forma direta e conclusiva, todas as questões.

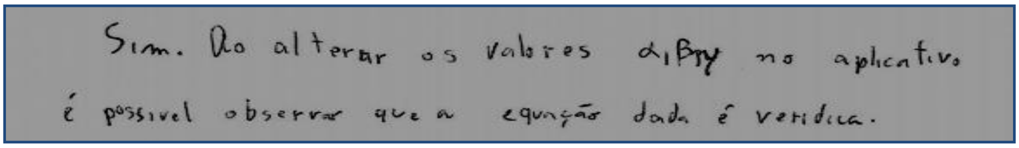
Na questão 1, o aluno 7 assim como aluno 6 respondeu que geometricamente é possível obter o resultado sem a preocupação de exibir os valores para os seletores, evidenciando que a exploração numérica não lhe parece importante para justificar sua resposta. Na questão 2- item a, a sua resposta foi similar à primeira questão. Fica evidente que o aluno utilizou de sua *experimentação visual* e descreveu o que estava observando na tela.

Figura 4.53: Questão 1: experimentação visual, justificativa geométrica.


É possivel ver geometricamente o resultado da soma dessa equação.

Fonte: arquivo pessoal

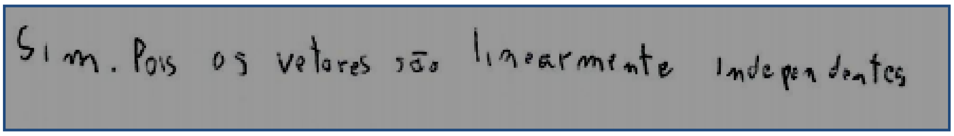
Figura 4.54: Questão 2-a: experimentação visual, justificativa geométrica.


Sim. Ao alterar os valores α, βγ no aplicativo é possivel observar que a equação dada é veridica.

Fonte: arquivo pessoal

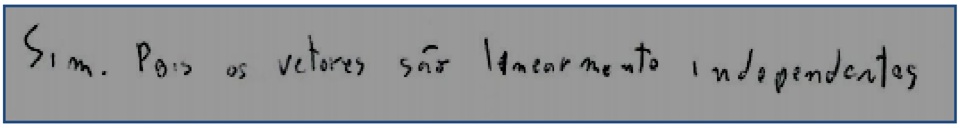
Estamos denominando justificativa geométrica à experimentação visual superpondo os vetores exibidos e modificados com a variação dos seletores. Nos itens b e c o aluno conclui que é possível, pois os vetores são linearmente independentes. No item d, ele responde não, pois está relacionado à dependência linear. Fica evidente que o aluno evoca os conhecimentos de Álgebra Linear, em particular combinação linear, e é inconclusivo se houve alguma *experimentação visual.*

Figura 4.55: Questão 2-b: inconclusivo, evocando conhecimento de Álgebra Linear



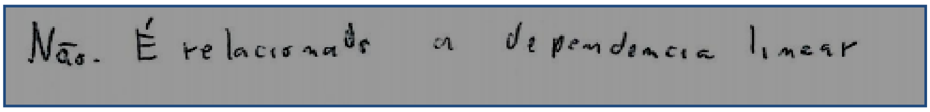
Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.56: Questão 2-c: inconclusivo, evocando conhecimento de Álgebra Linear.



Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.57: Questão 2-d: inconclusivo, evocando conhecimento de Álgebra Linear



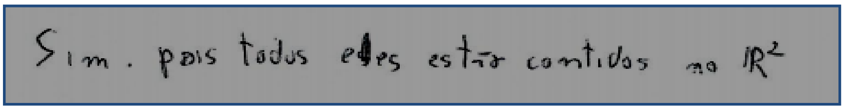
Fonte: arquivo pessoal

Na questão 3, a sua resposta foi “Sim”, porém sem justificativa. Aparentemente se negando a fazer a *experimentação visual.* (Anexo A, p.126)

Na questão 4, o aluno escreveu que não havia relação, “porque os vetores possuíam direções diferentes. ”(Anexo A,p.126). Interpretamos que possivelmente o aluno apenas olhou para a tela para elaborar sua resposta mesmo que de forma parcial.

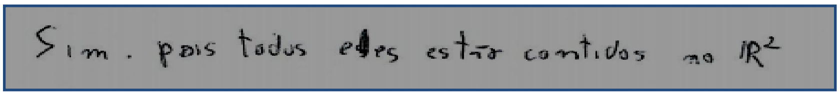
Na questão 5- itens a e b, as respostas foram positivas e as suas respectivas justificativas diziam que os vetores pertenciam ao $\Re^2$.

Figura 4.58: Questão 5-a: inconclusivo, evocando conhecimento de Álgebra Linear.



Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.59: Questão 5-b: inconclusivo, evocando conhecimento de Álgebra Linear.



Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.60: Questão 5-c: inconclusivo, evocando noção de dimensão de espaço vetorial.

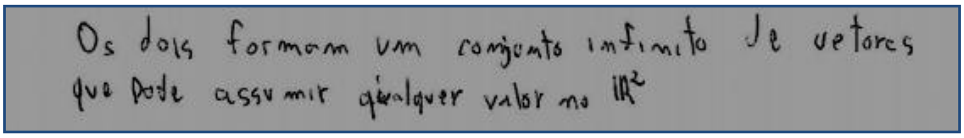

Não. pois o $\mathbb{R}^2$ necessita de pelo menos 2 vetores.

Fonte: arquivo pessoal

Em suas respostas aos itens a,b e c observamos que, em sua justificativa, o aluno não escreveu que relação é preciso haver entre os dois vetores mencionados.

Na questão 6, o aluno respondeu por meio da *experimentação visual*, observando o que aparece na tela, sem uma menção explícita ao espaço que está sendo gerado, mas percebendo o que acontece experimentalmente:

Figura 4.61: Questão 6: experimentação visual observando o que aparece na tela


Os dois formam um conjunto infinito de vetores que pode assumir qualquer valor no $\mathbb{R}^2$

Fonte: arquivo pessoal

Na questão 7, ele descreve que: “forma uma linha contínua, mas não de um espaço”. Interpretamos que talvez o aluno não tenha conhecimentos sobre espaços menores que o $\Re^2$ ou de subespaço do $\Re^2$.

Figura 4.62: Questão 7: experimentação visual observando o que aparece na tela


eles formam uma linha continua e infinita, mas não de um espaço

Fonte: arquivo pessoal

Na questão 8, o aluno, nos itens a, b, c, e interpretou de maneira equivocada os enunciados, afirmando que os conjuntos U em cada caso seria subconjunto do $\Re^2$ - o que de certo modo confirma a interpretação de que ele não incorpora a noção de subespaço vetorial, e no item d o aluno afirma que gera todo o $\Re^2$. (Anexo A, p.127).

Quadro 7-Síntese Aluno 7

	Modos de produção de conhecimentos		**Resultados**
Questões	**Utilização dos recursos computacionais-**	**Utilização conteúdo estudado**	
1,2-a	Experimentação visual	Inconclusiva	Resposta satisfatória
2-b;2-c;2-d;5-a;5-b	Inconclusiva	Noção de combinação linear	Resposta satisfatória
3;4	Experimentação visual	Inconclusivo	Resposta parcial
5-c	Experimentação visual	Noção talvez de base geradora	Resposta parcial
6;7	Experimentação visual	Inconclusiva	Resposta parcial
8-a;8-b;8-c;8-d; 8-e	Experimentação visual	Inconclusiva	Resposta insatisfatória

Dificuldades evidenciadas

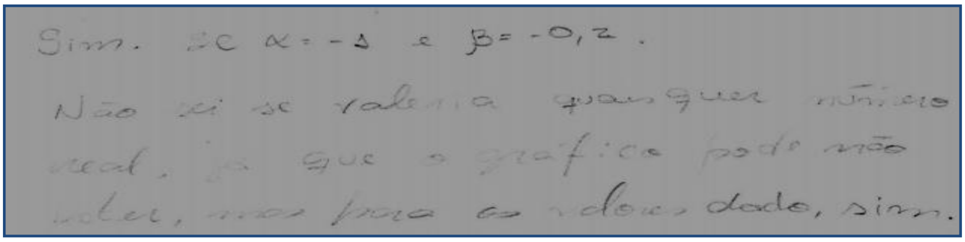
Assim como o aluno 6, o aluno 7 busca responder as questões 1 e 2-a utilizando *experimentação visual*, sem se preocupar em exibir os valores numéricos dos seletores, o que na verdade não era solicitado, mas sim, confirmar visualmente o que foi pedido. Nas questões 2-b, 2-c, 2-d o aluno evoca conhecimentos de combinação linear para responder as questões, evidenciando deixar a experimentação visual e remeter o que é exibido na tela aos conceitos estudados em Álgebra Linear.

O aluno parece não entender o conceito de subespaço vetorial, apresentado na questão 8; dificuldade percebida em muitas outras pesquisas que compuseram a revisão de literatura. Interpretamos que o cenário de aprendizagem incorpora o conhecimento de Álgebra Linear de modo parcial e ainda em construção.

4.1.8- O relatório de atividades do Aluno 8

O aluno 8 responde às atividades com uma abordagem que o diferencia dos demais alunos. Na questão 1 e 3, o aluno responde por meio da *experimentação visual* e numérica, exibindo os valores para os seletores.

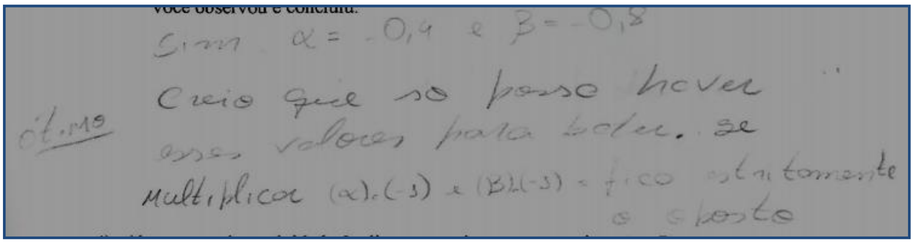
Figura 4.63: Questão 1: experimentação visual, exibindo valores numéricos.


Sim. Se α = -1 e β = -0,2.
Não sei se valeria qualquer número real, já que o gráfico pode não valer, mas para os valores dado, sim.

Fonte: arquivo pessoal

Faz considerações ao final sobre as limitações da experimentação realizada, quando se refere a não saber se o experimento valeria para qualquer número real.

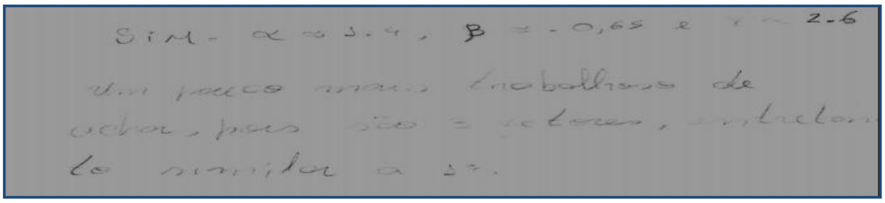
Figura 4.64: Questão 3: experimentação visual, exibindo valores numéricos.


você observou e concluiu.
Sim α = -0,4 e β = -0,8
Creio que só posso haver esses valores para valer. se multiplicar (α).(-1) e (β).(-1) fico exatamente o oposto
ótimo

Fonte: arquivo pessoal

Na questão 2, que acrescenta a dificuldade já identificada nas respostas de outros participantes, ele responde "Sim", e procura contornar o obstáculo encontrado colocando valores aproximados para α≈1,4, β≈-0,65, e γ≈2,6.

Figura 4.65: Questão 2-a : experimentação visual / numérica.


Sim. α ≈ 1.4, β ≈ -0,65 e γ ≈ 2.6
Um pouco mais trabalhoso de achar, pois são 3 valores, entretanto é similar a 1ª.

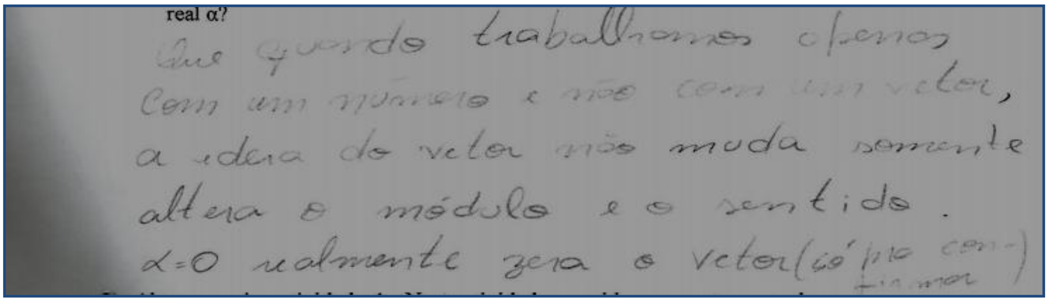
Fonte: arquivo pessoal

No item b, o aluno confunde a letra grega ϕ com o vetor nulo. Mesmo com esse engano, ele acredita que é possível escrever a combinação dos vetores dados.

Nos itens c e d, ele responde “Não” justificando que os vetores ficariam no $\Re^2$. O aluno não explicou em seu relato a sua afirmativa logo não temos como concluir como ele chegou a esta resposta. (Anexo A, p.128-129)

Na questão 4, o aluno responde de maneira confusa, envolvendo a falta de compreensão no significado do produto de um vetor por um escalar real assim como a soma de vetores.

Figura 4.66: Questão 4 : experimentação visual, justificativa inconclusiva.


real α?
Que quando trabalhamos apenas com um número e não com um vetor, a ideia do vetor não muda somente altera o módulo e o sentido.
α=0 realmente zera o vetor (só pra confirmar)

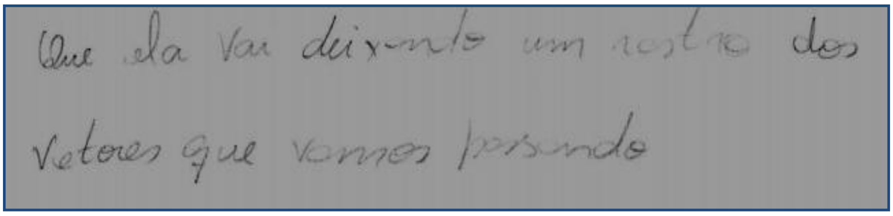
Fonte: arquivo pessoal

Na questão 5- itens a e b, observamos que o aluno não conseguiu expressar a sua resolução e tentou de certa forma, chegar a uma afirmação que não tinha sentido (Anexo A, p.130)

No item c, ele tentou usar uma equivalência à questão 4, e ainda assim não produziu coerência. (Anexo A, p.130)

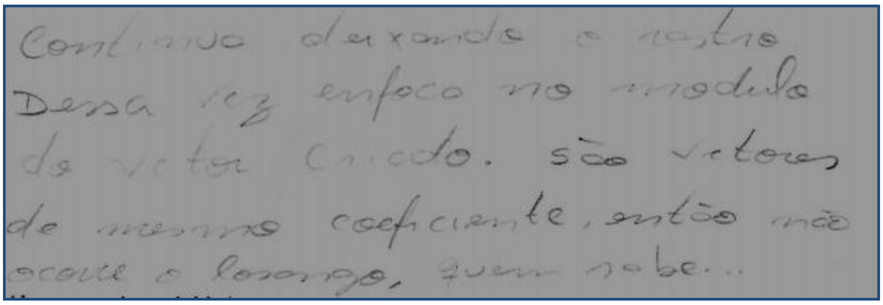
Nas questões 6 e 7, o aluno descreveu a partir de sua *experimentação visual* e apenas relatou o que ocorria na tela dos applets sem realizar uma ponte com os conteúdos de Álgebra Linear.

Figura 4.67: Questão 6: experimentação visual observando o que aparece na tela


Que ela vai deixando um rastro dos vetores que vamos passando

Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.68: Questão 7 : experimentação visual observando o que aparece na tela


Continuo deixando o rastro
Dessa vez enfoco no modulo
do vetor criado. são vetores
de mesmo coeficiente, então não
ocorre o losango, quem sabe...

Fonte: arquivo pessoal

Na questão 8 o aluno, mesmo que de forma parcial, através de sua *experimentação visual* ,conseguiu transpor respostas que tivessem ligação com algum conhecimento de Álgebra Linear em particular noção de subespaço vetorial. (Anexo A, p.131-132)

Quadro 8-Síntese Aluno 8

	Modos de produção de conhecimentos		**Resultados**
Questões	**Utilização dos recursos computacionais-**	**Utilização conteúdo estudado**	
1;3	Experimentação visual/ numérica	Possível noção de combinação linear	Resposta satisfatória
2-a	Experimentação visual/ numérica	Possível noção talvez de combinação linear	Resposta parcial
2-b,2-c,2-d	Inconclusiva	Inconclusiva	Inconclusiva
4;5-a;5-b;5-c	Experimentação visual	Inconclusiva	Inconclusiva
6;7	Experimentação visual		Inconclusiva
8-a;8-b;8-e	Experimentação visual	Inconclusiva	Inconclusiva
8-d;8-e	Experimentação visual	Possível noção de subespaço vetorial	Resposta parcial

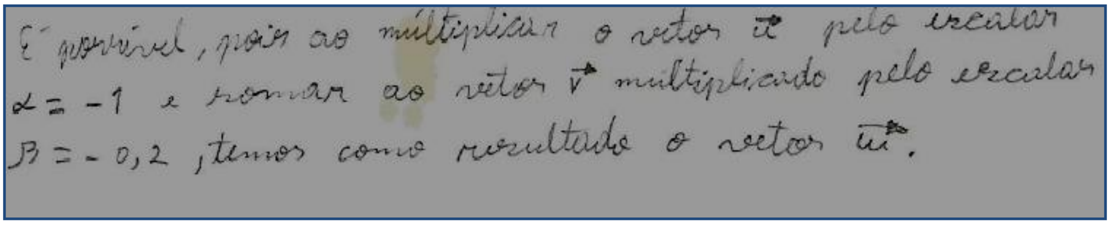
Dificuldades evidenciadas

Percebemos que este aluno utiliza na maioria de suas justificativas apenas sua experimentação visual. As respostas curtas e com sentido intuitivo, em sua maioria não remetem especificamente a conhecimentos estudados na disciplina de Álgebra Linear. Uma vez que não fez uso dos conhecimentos trabalhados na sala de aula de Álgebra Linear, interpretamos que o aluno compartimentalizou ou ignorou o conhecimento estudado, envolvendo-se no experimento.

4.1.9- O relatório de atividades do Aluno 9

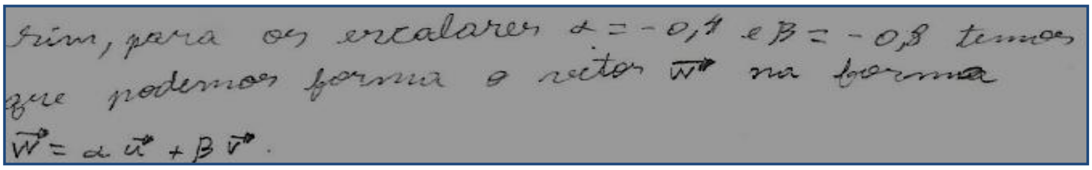
Na questão 1 e 3, o aluno determina após a realização da *experimentação visual e numérica* os valores dos seletores. A notação utilizada para denominar os vetores adota linguagem técnica comum em textos de Física. A combinação Linear dos vetores não é escrita, mas nomeada em linguagem natural na questão 1, mas está presente na resposta à questão 3.

Figura 4.69: Questão 1: : experimentação visual/numérica, evoca conhecimentos de Fisica.


É possível, pois ao multiplicar o vetor $\vec{u}$ pelo escalar $\alpha = -1$ e somar ao vetor $\vec{v}$ multiplicado pelo escalar $\beta = -0,2$, temos como resultado o vetor $\vec{w}$.

Fonte: arquivo pessoal.

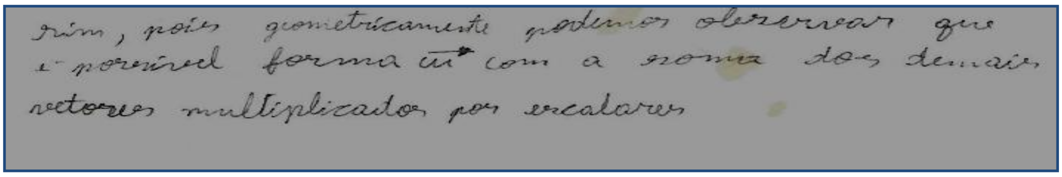
Figura 4.70: Questão 3: : experimentação visual/numérica, evoca conhecimentos de Fisica.


Sim, para os escalares $\alpha = -0,1$ e $\beta = -0,8$ temos que podemos forma o vetor $\vec{w}$ na forma $\vec{w} = \alpha . \vec{u} + \beta \vec{v}$.

Fonte: arquivo pessoal.

Na questão 2-item a ele apenas afirma por meio da *experimentação visual* que geometricamente é possível observar a formação do vetor w, mas não explicita para quais valores de α, β e γ é possível.

Figura 4.71: Questão 2-a : experimentação visual, justificando geometricamente

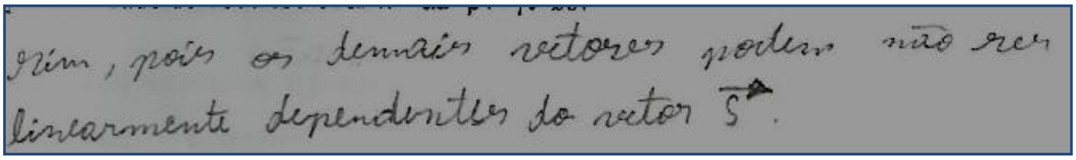


sim, pois geometricamente podemos observar que é possível formar $\vec{w}$ com a soma dos demais vetores multiplicados por escalares

Fonte: arquivo pessoal.

No item b, o aluno utiliza a *experimentação visual* e evoca conceitos de combinação linear.

Figura 4.72: Questão 2-b: experimentação visual,evoca conhecimento de Álgebra Linear.



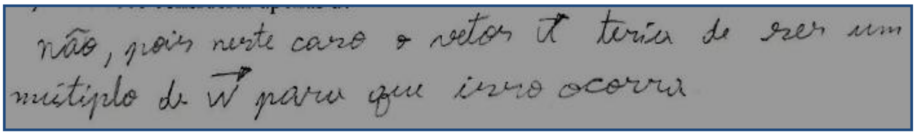
sim, pois os demais vetores podem não ser linearmente dependentes do vetor $\vec{s}$.

Fonte: arquivo pessoal.

No item c, ele apenas afirma que sim, escrevendo sua resposta em linguagem matemática formal de combinação linear. (Anexo A, p.133).

No item d, o aluno diz que "Não", pois o vetor u deveria ser múltiplo do vetor w, evocando uma noção de combinação linear.

Figura 4.73: Questão 2-d Justificando por meio de conhecimento de Álgebra Linear



não, pois neste caso o vetor $\vec{u}$ teria de ser um múltiplo de $\vec{w}$ para que isso ocorra

Fonte: arquivo pessoal.

Na questão 4, o aluno afirma que, a partir da soma de outros vetores, seria possível formar o vetor w, sem qualquer outra justificativa. (Anexo A, p.133).

Na questão 5-item a, o aluno particulariza, utilizando a base canônica, u= (0,1), v= (1,0) e o vetor t= (0,0), para demonstrar que é possível escrever a combinação pedida no item. Não temos como afirmar que ele utilizou da experimentação visual.

Figura 4.74: Questão 5-a : inconclusiva, evoca conhecimento de combinação linear, particularizando.

sim, por exemplo
utilizando dois vetores $\vec{u}=(0,1)$ e $\vec{v}=(1,0)$ e o veto
nulo $\vec{t}=(0,0)$ temos que é possível formar
um vetor $\vec{w}$ na forma $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{t}$

Fonte: arquivo pessoal.

Para o item b, ele diz que será análogo ao item a, escrevendo os vetores u=(0,1) e v=(1,0).(Anexo A,p.134)

No item c, o aluno afirma: "Não", justificando que: "deve haver pelo menos mais um vetor para formar vetores diferentes do múltiplo do vetor fixo". Interpretamos que aluno talvez que para escrever um vetor é preciso ter dois vetores e fazer suas combinações lineares (Anexo A, p.134)

Na questão 6, o aluno responde a partir da *experimentação visual,*variando os seletores, e observando na tela que infinitos números de vetores são formados. Não faz menção a gerar espaços.

Figura 4.75: Questão 6: experimentação visual observando efeito o que aparece na tela.

Que apartir da soma de dois vetores distintos podemos
formar um número infinito de vetores apenas
multiplicando por escalares

Fonte: arquivo pessoal.

Na questão 7, o aluno utiliza também a *experimentação visual*.

Figura 4.76: Questão 7: experimentação visual, observando efeito o que aparece na tela .

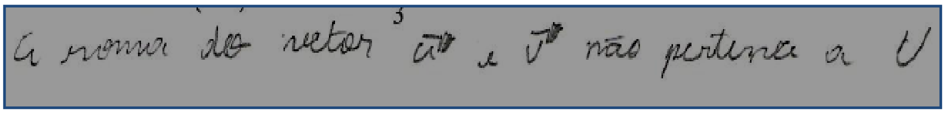
tendo dois vetores múltiplos, temos que sua soma
so gera mais um vetor múltiplo.

Fonte: arquivo pessoal.

Na questão 8- item a, o aluno infere que apenas as somas dos vetores nulos de u e v pertencem a U e não há referências ao produto escalar. (Anexo A, p.135)

No item b, ele responde que a soma não pertence a U, novamente, sem referências ao produto escalar. No item c, respondeu que, para toda coordenada com y=0, as suas somas pertencem a U. No item d, o aluno conclui que qualquer vetor pertencerá a U. No item e, ele afirma que o vetor nulo é o único vetor que pertence ao conjunto U.

Figura 4.77: Questão 8-b : exploração visual, observando efeito o que aparece na tela



Fonte: arquivo pessoal

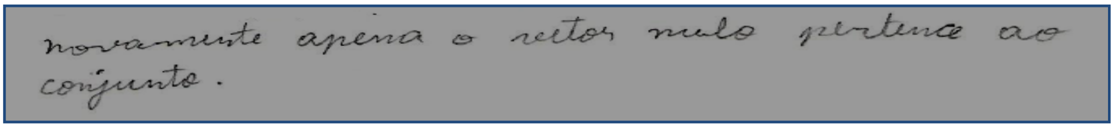
Figura 4.78: Questão 8-c: exploração visual, observando efeito o que aparece na tela.

Fonte: arquivo pessoal

Figura 4.77: Questão 8-d. experimentação visual, observando efeito o que aparece na tela.

Fonte: arquivo pessoal.

Figura 4.79: Questão 8-e: experimentação visual, observando efeito o que aparece na tela.



Fonte: arquivo pessoal.

Quadro 9-Síntese Aluno 9

	Modos de produção de conhecimentos		Resultados
Questões	**Utilização dos recursos computacionais-**	**Utilização conteúdo estudado**	
1;3	Experimentação visual/ numérica	Noção de combinação linear com linguagem matemática aprendido na disciplina de Álgebra Linear	Resposta satisfatória
2-a	Experimentação visual		Resposta parcial
2-b;2-c;2-d	Experimentação visual	Noção de combinação linear	Resposta satisfatória
4	Experimentação visual		Resposta parcial
5-a;5-b;5-c	Experimentação visual	Noção de combinação linear com linguagem matemática aprendida na disciplina de Álgebra Linear	Resposta satisfatória
6,7	Experimentação visual		Resposta parcial
8-a	Experimentação visual		Resposta parcial
8-b;8-c;8-d;8-e	Experimentação visual	Noção de subespaço vetorial	Resposta satisfatória

Dificuldades evidenciadas

É evidente que este aluno faz do uso tanto da experimentação visual como nas questões 1, 2-a,3,6 e 7 quanto de conhecimentos de Álgebra Linear, mesmo de forma parcial, como nas tentativas de responder as questões 2-b, 2-c, 2-d, 5-a, 5-b, 5-c. Utiliza os conceitos de combinação linear e de linguagem matemática. Na questão 8evoca,mesmo que implicitamente, conceitos de subespaço vetorial. Interpretamos que o cenário de aprendizagem incorpora o conhecimento de Álgebra Linear de modo parcial e ainda em construção. Também, como o aluno 6, de forma parcial, percebemos uma construção no conhecimento abstrato de subespaço vetorial.

4.1.10- O relatório de atividades do Aluno 10

Nas questões 1 e 3, o aluno afirma por meio da *experimentação visual* que é possível o vetor w como combinação linear de u e v, alterando o valor de α e β, sem exibi-los numericamente. Sua justificativa é geométrica, superpondo os vetores.

Figura 4.80: Questão 1: experimentação visual, justificativa geométrica.

Sim, podemos observar quando os modificarmos os valores de β e α. Assim os vetores mudam de posição até ficar em posição de soma

Fonte: arquivo pessoal.

Figura 4.81: Questão 3: experimentação visual, justificativa geométrica.

Ao assumir valores negativos (α e β), os vetores mudam de sentido

Fonte: arquivo pessoal.

Na questão 2- item a partir da *experimentação visual* e numérica o aluno responde exibindo os valores para α, β e γ e escrevendo o vetor w como combinação linear de u, v e t.

Figura 4.82: Questão 2-a: experimentação visual / numérica.

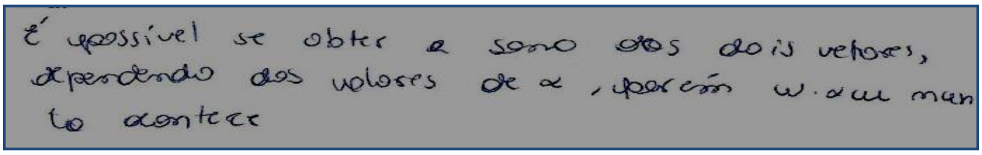
Sim, ao posicionarmos α = -3,35, β = 0,35 e γ = -4,1, vemos que o vetor w se formou αu + βv + γt

Fonte: arquivo pessoal.

No item b, o aluno confunde a letra grega ϕ com o vetor nulo. Mesmo com esse engano, ele acredita que é possível escrever a combinação dos vetores dados. No item c, o aluno responde negativamente, justificando, “pois, t não é um vetor nulo”. No item d, a sua resposta foi análoga ao item c, acrescentando “também, não, pois u também não é um vetor nulo. Só será possível se somente, w e u não forem vetores nulos”. Interpretamos que o aluno não tenha entendido o enunciado (Anexo A,p.137)

Na questão 4, o aluno relata que é possível obter a soma dos vetores w e u, porém w=αu nunca irá acontecer, percebendo, implicitamente, que os vetores não têm a mesma direção.

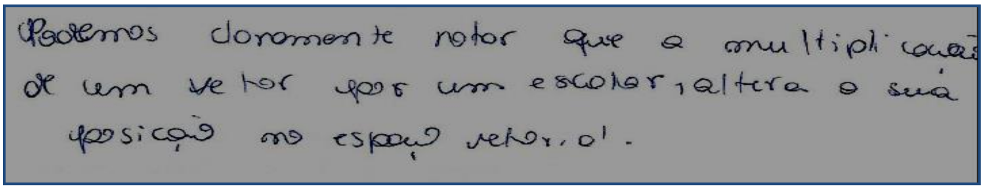
Figura 4.83: Questão 4: experimentação visual


É possível se obter a soma dos dois vetores,
dependendo dos valores de α, porém w.αu nun
to acontecer

Fonte: arquivo pessoal.

Na questão 5,em todos os seus itens, o aluno respondeu através da percepção geométrica.(Anexo A,p.137). Na questão 6, o aluno através da *experimentação visual* descreve o que aparece na tela. Interessante o uso do termo espaço vetorial, o que nos leva a interpretar que este aluno possa ter noção de base geradora.

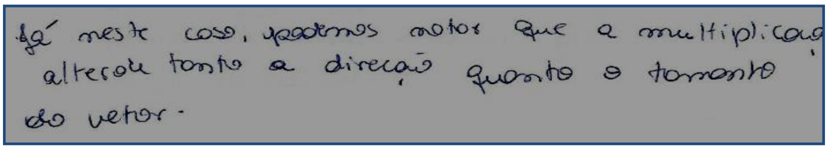
Figura 4.84: Questão 6: experimentação visual observando apenas o que aparece na tela


Podemos claramente notar que a multiplicação
de um vetor por um escalar, altera a sua
posição no espaço vetorial.

Fonte: arquivo pessoal.

Na questão 7, o aluno também através da *experimentação visual* responde baseando no que observa na tela, evocando conhecimentos anteriores e utilizando a expressão informal “tamanho” do vetor, ao invés de norma.

Figura 4.85: Questão 7: experimentação visual observando apenas o que aparece na volta.


Já neste caso, podemos notar que a multiplicação alterou tanto a direção quanto o tamanho do vetor.

Fonte: arquivo pessoal.

Na questão 8 há indícios de que o aluno experimentou visualmente utilizando o aplett, mas em nenhum dos itens, o aluno observou que ocorre com as somas dos vetores e o produto por escalar. (Anexo A, p.138-139).

Quadro 10-Síntese Aluno 10

	Modos de produção de conhecimentos		**Resultados**
Questões	**Utilização dos recursos computacionais-**	**Utilização conteúdo estudado**	
1;3	Experimentação visual	Inconclusiva	Resposta parcial
2-a	Experimentação visual/ numérica	Noção de combinação linear	Resposta satisfatória
2-b;2-c;2-d	Inconclusiva	Inconclusiva	Inconclusiva
4	Experimentação visual	Noção de combinação linear	Resposta satisfatória
6	Experimentação visual	Possível noção de base geradora	
7	Experimentação visual	Noção de produto de vetor por escalar	Resposta parcial
8-a;8-b;8-c;8-d;8-e	Experimentação visual	Inconclusiva	Inconclusiva

Dificuldades evidenciadas

As experimentações visuais e numéricas estão evidentes nas tentativas de responder as questões 1, 2-a, 3 mesmo não havendo sucesso em exibir valores numéricos para as combinações lineares. Nas respostas às questões 6 e 7 ficam evidenciadas as experimentações visuais remetendo à noções de base. Embora tenha acontecido um equívoco na questão 2-b, assim como os alunos 2, 3, não ocorreu a este aluno considerar uma das constantes iguais a zero na questão 2-itens b e c fazendo recair esta questão no problema anterior que havia respondido.

Os conceitos de subespaço vetorial não foram incorporados pela a aluna na questão 8. Evidenciamos a tentativa de evocar conceitos de Geometria Analítica, em especial a regra do paralelogramo, para responder à questão 8-d. Interpretamos que o cenário de aprendizagem inclui o conhecimento de Álgebra Linear de modo parcial ou distorcido.

No capítulo a seguir, trazemos uma síntese dos resultados dessa pesquisa.

Capítulo 5

Discussão, Resultados e Considerações finais

Neste capítulo buscamos responder a questão de pesquisa colocada:

"De que modos a utilização de recursos cinéticos/interativos com auxílio de computadores, pode contribuir para a construção, pelos alunos, do conhecimento sobreas noções fundamentais da Álgebra Linear, tais como espaço vetorial, subespaço vetorial, combinação linear e base geradora?"

Para isto, iniciamos retomando as análises do relatório escrito de cada aluno, reorganizando o que foi feito até aqui em termos das respostas a cada atividade da oficina.

Os quadros de respostas que foram construídos a partir dos modos de produção de conhecimentos por cada participante estão no anexo B.

5.1-Discussão: análise das respostas a cada atividade

A partir da análise que realizamos até aqui, podemos notar que na primeira atividade, a metade dos participantes, exibiu além da experimentação visual, os valores numéricos dos seletores. Vale a ressalva que nesta atividade os valores numéricos não foram solicitados. Dentre estes alguns fizeram uso de linguagem matemática evocando, talvez, a noção de combinação linear. Quatro participantes restringiram-se à experimentação visual, sem se preocupar com a representação numérica. Um aluno justificou sua resposta evocando um conceito de geometria analítica, a regra do paralelogramo. As respostas dos outros três alunos sugerem a sobreposição na tela de formas geométricas dinâmicas para justificar suas conclusões. E um aluno apresentou uma resposta inconclusiva.

Entendemos que esta atividade atende ao princípio básico da concretização proposto por Harel (2000), por possibilitar a exploração dinâmica na tela do computador de representações de conceitos matemáticos, em especial o de combinação linear.

Refletindo sobre o uso da regra do paralelogramo, embora explícito na resposta de apenas um aluno, nos perguntamos se o aluno evocou conhecimentos de Geometria

Analítica ignorando o novo conhecimento de Álgebra Linear ou se foi um caso em que a figura geométrica no applet o levou a responder de tal forma.

Na segunda atividade, percebemos que o fato de termos um grande número de vetores na tela, dificultou a *experimentaçãovisual/numérica* impossibilitando a concretização de suas respostas.

Analisamos que trouxemos o segundo princípio básico segundo Harel (2000), o *da necessidade*, para o desenvolvimento da imagem conceitual dos estudantes relacionados aos conceitos que estavam sendo trabalhados.

Nas respostas à atividade 2-a temos uma resposta em branco, uma resposta inconclusiva quanto ao uso dos recursos tecnológicos e conhecimentos produzidos, quatro experimentações visuais e-ou experimentação visual e numérica sem sucesso ou com resposta parcial, duas experimentações com possível justificativa geométrica e apenas duas experimentações já evocando uma noção de combinação linear e resposta parcial.

Alguns participantes utilizaram a regra do paralelogramo, sem sucesso, em algumas situações. Novamente não temos a certeza se o aluno foi sugestionado pela figura geométrica no applet que se assemelha aos lados de um paralelogramo.

À exceção de um participante, algumas tentativas de respostas às atividades utilizando experimentação visual/numérica também foram inconclusivas e /ou sem sucesso. Ressaltamos dois alunos que responderam utilizando conhecimentos de Álgebra Linear, em particular, a noção de combinação linear.

O que acontece nas atividades 2-b, 2-c e 2-d é um cenário semelhante ao que acontece em 2-a; exceto pelo fato de que o número de participante que passa a evocar o conceito de combinação linear aumenta, bem como o número das respostas em branco ou inconclusivas daquelas que se restringem à experimentação visual e numérica.

Interpretamos que a atividade, embora fazendo uso de representações cinéticas/interativas, passa a demandar um recurso a conceitos e noções teóricas para serem respondidas; por exemplo, as noções de base e combinação linear e dependência linear.

Por outro lado, interpretamos que alguns alunos possam ter parado com a experimentação e ter respondido utilizando apenas a teoria como recurso. Isto porque as respostas de alguns alunos a estas atividades (ver, por exemplo, as respostas dos alunos 7, 9) são discursivas, evocando conhecimentos que são comumente estudados na disciplina de Álgebra Linear. Como observado por Coimbra (2008), se os conhecimentos de certos domínios, que podem ser seus conceitos, suas propriedades e até os seus procedimentos matemáticos, não são suficientes para avançar em uma dada situação, ou problema, é desejável que o aluno lance mão dos conhecimentos de outros domínios.(ibid, p.75). No caso em estudo, a dificuldade da experimentação visual na tela em decorrência do acréscimo no número de vetores linearmente dependentes pode ter levado os participantes a utilizar o conteúdo teórico já estudado para responder à atividade.

A terceira atividade remete novamente ao princípio básico da concretização quando solicita a identificação de valores numéricos para escrever um vetor como combinação linear de outros. Dois alunos utilizando a experimentação visual e a regra do paralelogramo, afirmaram que era possível encontrar esses números sem exibi-los. Dois alunos utilizando experimentação visual justificaram suas respostas geometricamente também sem calcular o que fora solicitado. Mais da metade dos alunos exibiu os valores dos seletores e alguns em destaque utilizaram a linguagem matemática para responder à questão. Surpreendentemente, o resultado parece ser melhor do que o da primeira questão; o que pode se explicar pela intimidade com o software como observado por Rodrigues (2009).

Na quarta atividade, notamos que alguns alunos passam a evocar noção de combinação linear, em respostas parcialmente satisfatórias. Dois participantes evocaram a imagem conceitual de que “multiplicar faz crescer” bastante discutida na literatura de pesquisa, restringindo, portanto, os escalares utilizados em um produto de vetor por escalar a inteiros positivos. Dois alunos não entenderam o que foi pedido, sendo que um deles deixou a questão em branco e o outro escreveu um ponto de interrogação. Entendemos esta quarta questão como um retorno ao princípio básico da concretização.

Na quinta atividade, em particular, no item a, as dificuldades foram semelhantes às vistas na atividade 2. Ou seja, que uma grande quantidade de vetores na tela complexificou a elaboração das respostas. Dois alunos, em resposta a este item usaram como estratégia, particularizar e utilizar a base canônica do $\Re^2$ para responder à questão. Algumas respostas contêm imprecisões de linguagem, já ressaltadas em, por exemplo, Coimbra (2008) como uma das dificuldades não só da Álgebra Linear, mas como de toda a matemática, e que nos deixam em dúvida sobre o entendimento do conceito de Álgebra Linear, em si.

Nos demais itens da mesma atividade, com o número de vetores reduzidos na tela, grande parte dos alunos passam a evocar noções de combinação linear e base geradora, mesmo em respostas parciais.

Na sexta atividade dois alunos utilizam novamente a regra do paralelogramo. Na verdade, estes dois participantes, sistematicamente utilizaram a regra do paralelogramo em suas respostas. No caso desta atividade interpretamos que as respostas destes dois alunos não generalizam no sentido de que não reconstrói a noção de base. O mesmo pode ser percebido na resposta do participante 4 que evoca o conceito geométrico de medida de ângulo como descrição do resultado de sua atividade.

A produção de respostas tanto da sexta quanto da sétima atividade consequentemente obtiveram o seguinte padrão: um grupo de alunos, por meio da experimentação visual, apenas relatou o efeito do applet como resposta, e outra parte dos alunos responderam utilizando novamente a sua experimentação visual, evocando noções de combinação linear, base geradora e espaço gerado. As respostas nos parecem parciais deixando dúvidas se a dificuldade é com a linguagem matemática ou com a generalização.

Na oitava atividade, percebemos o uso da experimentação visual pelos alunos para responder os cinco itens. Dentro dessas experimentações visuais, constatamos que uma parte dos alunos respondeu de forma inconclusiva, ou seja, experimentaram o applet, mas não chegaram a uma conclusão do que foi pedido, gerando respostas inconclusivas. Identificamos que algumas respostas mostravam que uma parte dos alunos apontou o conceito de subespaço vetorial como, por exemplo, o vetor nulo pertencer ao subconjunto, embora não descrevessem completamente o que é um subespaço vetorial.

Acreditamos que esta questão tenha sido incompreendida por causa de seu enunciado e que possa ser reformulada para uma melhor compreensão.

O quadro a seguir é uma síntese da análise que fizemos, ressaltando os modos com que os recursos computacionais e o conteúdo estudado previamente na disciplina de Álgebra Linear foram utilizados. (Anexo A-p.148)

Quadro-5.1: Modos de produção de conhecimentos

Modos de produção de conhecimentos						
Atividades	**Experimentação visual Evoca solução numérica-**	**Experimentação visual Evoca justificativa geométrica**	**Experimentação visual Evoca regra do paralelogramo**	**Experimentação visual Evoca Física e noção de combinação linear**	**Experimentação visual/numérica Evoca noção de conjunto gerador**	**Experimentação visual/ numérica Evoca noção de espaço gerado**
1	2,3,4,8	6,7,10	1	9		
2	2,5,4	3,5,6,7	1,6	9,10	7,8,9	6,7,9
3	2,3,4,5,8		1,6	9		
4		1[44], 2,6,7, 10		3,4,9		
5		8		3,6, 9	9	6,7,9
6		4, 10	1,2		7	3,6, 7, 9
7		1, 2,7, 10		6		3, 4, 9
8					3	3,6,7,9

A incidência do número de um participante em mais de uma coluna em cada linha é decorrente do fato de que o mesmo usa recursos diferentes para responder aos diferentes itens da atividade.

5.2- Resultados

A proposta desta pesquisa foi investigar que contribuições as representações cinéticas/interativas de conceitos básicos de Álgebra Linearpodem trazer para a produção, pelos alunos, do conhecimento sobre espaço vetorial. Aqui entendemos que a produção de conceitos matemáticos resulta, e é resultado, do desenvolvimento da imagem conceitual relacionada ao conceito (VINNER (1991), TALL e VINNER (1981)).

Para desenvolver a investigação, oferecemos uma oficina em dois encontros, utilizando computadores, em uma Instituição Federal de ensino superior. Nela participaram 10 alunos do curso de Matemática, matriculados na disciplina de Álgebra Linear I. No planejamento da oficina, desenvolvemos oito objetos de aprendizagem, que foram incluídos no ambiente para permitir aos participantes experimentar visualmente e numericamente conceitos abstratos de Álgebra Linear. Atividades utilizando computadores foram elaboradas e os participantes escreveram, individualmente, um

[44] Interpretamos que a resposta da aluna corresponde ao que ela visualizou na tela.

relatório sobre os resultados de seus experimentos. Nosso foco foi em como os participantes expressaram a matemática durante a oficina e não na matemática que por ventura eles tenham aprendido anteriormente em sala de aula.

Sobre o ambiente constituído durante a oficina utilizando computadores, nossa análise do material empírico, que consiste dos relatórios escritos pelos alunos durante as atividades, ressalta que ele ofereceu a oportunidade de *concretização* de conceitos abstratos de Álgebra Linear, trouxe a *necessidade* de utilização de novos recursos, e possibilitou a *generalização* de conceitos. Resgata, deste modo, os três princípios básicos propostos por Harel (2000)– da concretização, da necessidade e da generalização, para o ensino e aprendizagem da Álgebra Linear.

Para o autor, é importante para a aprendizagem da Álgebra Linear queo aluno entenda objetos matemáticos partindo de representações concretas para os conceitos abstratos, um princípio que ele denomina da concretização; que perceba uma necessidade do que está aprendendo e sendo formalizado; e que, em conjunto com este último princípio, da necessidade, que abstraia conceitos aprendidos através de modelos específicos, princípio que ele denomina da generalização.

Em nossa pesquisa, estes princípios permearam a utilizaçãodo software de geometria dinâmica para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Como destacamos na seção anterior, as atividades da oficina possibilitaram a exploração dinâmica na tela do computador de representações de conceitos matemáticos, em especial o de combinação linear, base geradora, espaço gerado e subespaço vetorial. Uma vez que as representações cinéticas/interativas concretizaram as noções estudadas, entendemos que estas atividades atenderam ao princípio da *concretização*.

Já naquelas atividades em que a experimentação foi complexificada, por exemplo, aumentando o número de vetores linearmente dependentes na tela para o estudo do espaço gerado, trouxemos o princípio da *necessidade* para o desenvolvimento da imagem conceitual dos estudantes, relacionada aos conceitos que estavam sendo trabalhados. Assim, a partir do momento em que arestrição à experimentação visual não era um bom recurso para responder à questão, a necessidade de recorrer a conhecimentos já formalizados em sala de aula foi criada. De fato, como observado anteriormente, em muitos casos, os participantes recorreram à teoria estudada em para elaborar suas respostas.

Além disto, ao analisarmos os modos de produção do conhecimento no ambiente constituído no laboratório de computação, identificamos seis modos principais com os quais os alunos produziram o conhecimento durante as atividades, utilizando os computadores, que são: experimentação visual, evocando solução numérica; experimentação visual, evocando justificativa geométrica; experimentação visual evocando regra específica, a saber, a regra do paralelogramo; experimentação visual evocando a linguagem de vetores utilizados na Física e combinação linear; experimentação visual e numérica evocando a noção de conjunto gerador, formalizada na sala de aula de Álgebra Linear; experimentação visual/numérica, evocando noção de espaço gerado formalizada na sala de aula de Álgebra Linear.

A maioria dos participantes usou como recurso a experimentação visual evocando solução numérica, provavelmente influenciada pelo contrato didático da sala de aula que é o de apresentar uma solução numérica como resposta. Por outro lado podemos perceber a flexibilidade de lançar mão de recursos distintos quando o que se está utilizando não se mostra adequado, movendo-se entre múltiplos modos de produção de conhecimento ao longo da oficina.

A partir desses resultados entendemos que a utilização de recursos cinéticos/interativos com auxílio de computadores contribui para a construção, pelos alunos, do conhecimento a Álgebra Linear concretizando, criando a necessidade e possibilitando a generalização de suas noções fundamentais, flexibilizando os modos de produção do conhecimento pelos estudantes.

Retomando Dias (1993) a autora destaca que os estudantes, ao estudarem a Álgebra Linear, empregavam bem as questões que exigiam técnicas, fato que não ocorria com a utilização de teoremas. No ambiente constituído, as diferentes representações utilizadas ofereceram uma oportunidade para o aluno experimentar as articulações entre elas, desenvolvendo a flexibilidade em elaborar respostas e estratégias distintas de técnicas algébricas ou mesmo utilização direta de teoremas. Deste modo entendemos que tais experiências correspondem a um desenvolvimento da imagem conceitual dos alunos, referentes aos conceitos trabalhados.

A limitação do método de pesquisa que adotamos, ou seja, a análise do material escrito, e as dificuldades dos alunos com a linguagem matemática, que são bastante conhecidas, deixam dúvidas quanto a muitas respostas dos participantes em seus relatórios na oficina. Em algumas respostas escritas, as expressões imprecisas dos alunos remetem aos conceitos de Álgebra Linear, mas não nos permitem afirmar absolutamente se estes conceitos foram aprendidos.

Destacamos, no entanto que o ambiente de aprendizagem se configurou de um modo que os novos conhecimentos eram incorporados, mesmo que ainda se apresentassem distorcidos de uma maneira geral (VINNER, 1991), expondo todas as dificuldades com a linguagem matemática, resultado apresentado também por muitos outros pesquisadores.

5.3- Considerações Finais

A partir dos resultados de nossa pesquisa, deparamo-nos com temas que foram debatidos também nos trabalhos de pesquisa em que nos apoiamos. Seguimos, principalmente, com a ideia de que a Álgebra Linear é uma disciplina e área da matemática que trabalha exaustivamente com conceitos abstratos. Tal fato não é impositivo de que esta área de conhecimento seja impossível de ser compreendida.

Os dez alunos voluntários envolvidos na atividade que propusemos representam, ainda que em menor número, os alunos em suas dificuldades com a própria Álgebra Linear: em geral os alunos consideram extremamente complicado assimilar este conhecimento,por causa de seu conteúdo abstrato.

Ao concebermos os applets utilizando o software Geogebra com o intuito de apoiarmos as construções de conhecimentos sobre espaço vetorial, procuramos estabelecer e aproveitar de maneira significativa todas as nuances que os recursos tecnológicospossibilitam para o aprendizado da Matemática. Vimos que a interatividade e o dinamismo que os seletores do software proporcionam para o ensino-aprendizagem são importantes para múltiplas possibilidades de ensino na área de ciências exatas.

Os resultados alcançados ao longodas atividades, respondem a muitas críticas e ao mesmo tempo concretizam sugestões que foram descritas nas pesquisas que citamos em do nosso estudo: a da carência de alternativas para o ensino em sala de aula, que pode contribuir para um desinteresse por parte dos alunos.

Acreditamos que muitos outros processos e alternativas de aprendizagem da Álgebra Linear podem proporcionar um ensino mais abrangenteque auxilie os alunos a, principalmente, assimilarem os conceitos abstratos a partir de suas representações concretas, explorando inicialmente tais conceitos abstratos nos espaços vetoriais $\Re^2$ e $\Re^3$, utilizando o Geogebra.

Alguns alunos, durante o desenvolvimento da nossa atividade, evocaram entendimentos de noções que eles próprios não tinham ideia de que se tratava de conceitos da Álgebra Linear. Isso nos diz que, além de terem adquirido conhecimento estudados anteriormente nas aulas da disciplina, a dinamicidade trazida pelo software e a organização das telas, permitia que eles visualizassem os conceitos antes conhecidos somente por meio de representações abstratas, e consequentemente de tornando-os concretos.

Entendemos que, dentre as possibilidades de melhorias do ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, esta é uma temática que ainda está pouco desenvolvida. As principais dificuldades encontradas pelos alunos em salas de aulas, em geral, foram observadas em nossa pesquisa envolvendo um pequeno grupo de participantes. Este é um reflexo do panorama de dificuldades envolvendo o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, em que os conteúdos são apresentados, primeiramente, de forma abstrata, o que pode afetar aqueles que estão pretendendo aprender.

A premissa de aliarmos o uso de recursos tecnológicos às atividades que propusemos sobre conteúdos básicos para o entendimento da Álgebra Linear foi qualitativamente relevante para essa pesquisa e direcionou nosso olhar para outras questões em outras áreas do conhecimento matemático: como tornar mais significativo o estudo da álgebra e outras áreas da matemática? Como mesclar dados da nossa realidade em tópicos da álgebra, em aplicações simples? Como ensinar a álgebra de modo significativo para que o aluno a compreenda conceitualmente desde séries anteriores e não somente na graduação? Quais são os aspectos positivos e negativos que estudos sobre esses conhecimentos podem proporcionar?

Retomando o tema desta pesquisa, a Álgebra Linear, deixamos a seguinte questão para prosseguir esta pesquisa, futuramente: Que contribuições o uso simultâneo de recursos tecnológicos nas aulas de Álgebra Linear gerando visualização dos conceitos, concretizando-as a partir dos conceitos mais básicos, podem trazer para a produção, pelos alunos, do conhecimento sobre este conteúdo?

Referências Bibliográficas

AUDINO, Daniel Fagundes; DA SILVA NASCIMENTO, Rosemy. **Objetos de Aprendizagem–diálogos entre conceitos e uma nova proposição aplicada à educação.** *Revista Contemporânea de Educação*, v. 5, n. 10, 2012.

CELESTINO, Marcos Roberto. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90.** PUC-SP. Dissertação de Mestrado. São Paulo, 2000.

CHIARI, Aparecida Santana de Souza. **Ensino de Álgebra Linear e Tendências em Educação Matemática: relações possíveis.** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013, Curitiba. Anais... Curitiba: PUC, 2013.

COIMBRA, Jarbas Lima. **Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear.**UFP- PA. Dissertação de Mestrado. Belém-Pará, 2008.

DE BETTIO, R. W.; MARTINS, Alejandro**. Objetos de aprendizado: um novo modelo direcionado ao ensino a distância**. Documento online publicado em 17/12/2004.
Avaliable from web in: http://www.universia.com.br/materia/materia.jsp?id=5938 Acesso em 20/05/2016.

DE CASTRO FILHO, José Aires. **Objetos de Aprendizagem e sua Utilização no Ensino de Matemática.** 2007.

FABRE, Marie-Christine JM; TAMUSIUNAS, Fabricio; TAROUCO, Liane Margarida Rockenbach. **Reusabilidade de objetos educacionais. RENOTE**, v. 1, n. 1, 2003.

FURTADO, Ana Luisa Carvalho. **Dificuldades na aprendizagem de conceitos abstratos da Álgebra Linear.** UFRJ-RJ. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro, 2010.

HAREL, G. Three Principles of Learning and Teaching Mathematics Particular Reference toLinear Algebra-Old and New Observations. On the Teaching of Linear Algebra, vol 23. Mathematics Education Library- pp 177-189, 2000.

IEEE Learning Technology Standards Committee (LTSC). **“Draft Standard for Learning Object Metadata”, 2000.** Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.LTSC. (2000). Learning technology standards committee website. Disponível em: <htttp://ltsc.ieee.org/> Acesso em: 20 de maio de 2016.

LONGMIRE, Warren. **A primer on learning objects.** Learning Circuits, v. 1, n. 3, 2000.

MIRANDA, Raquel Mello. **GROA: Um gerenciador de repositórios de objetos de aprendizagem.** Dissertação de Mestrado.(Mestrado em Ensino em Ciências da Computação) –Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2004.80 f.

MORENO-ARMELLA, Luis; HEGEDUS, Stephen J.; KAPUT, James J. **From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives.***Educational Studies in Mathematics*, v. 68, n. 2, p. 99-111, 2008.

RODRIGUES, José Renato Fialho. **Criação de um software de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear.** Dissertação de Mestrado. (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica. Belo Horizonte, 2009. 151 f.

ROMANOWSKI, Joana Paulin; ENS, Romilda Teodora. **As pesquisas denominadas do tipo “estado da arte” em educação.** Revista Diálogo Educacional, v. 6, n. 19, p. 37-50, 2006.

TALL, David; VINNER, Shlomo. **Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.** Educational studies in mathematics, v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981.

VINNER, Shlomo. **The role of definitions in the teaching and learning of mathematics.** In: TALL, David (ed).**Advanced Mathematical Thinking**. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. Vol. 11, Science Education Department. University of Warwick, 1991. p. 65-81.

ANEXOS

A- Relatório produzido pelos alunos durante a oficina

B- Quadros-Sínteses das questões

C- Termo de Consentimento

Anexo A-

Relatório produzido pelos alunos durante a oficina

Aluno 1

Questão 1-

Sim. Porque a soma deles e a direção
dos outros forma um paralelogramo.

Questão 2-a

Não. Porque não consigo igualar
os vetores ao mesmo tamanho.

Questão 2-b

G

Não consigo visualizar
Eu penso que eu teria dois paralelogramo.

Questão 2-c

Eu teria um paralelogramo

Questão 2-d

Só tenho um vetor.

Questão 2-e

O programa facilita a visualização
das experiências feitas.

Questão 3-

Forma um paralelogramo que ao movimentar
os vetores ele muda de sentido mas con-
tinua com a figura formada.

Questão 4-

O produto aumenta o tamanho do vetor
A soma quando feita com números que resultem um um número negativo muda a direção do vetor.

Questão 5-a

Questão em Branco

Questão5-b

Sim.

Questão 5-c

Não. Porque não há como fazer as operações.

Questão 6-

Forma um paralelogramo onde os valores assumidos pelos vetores fica limitado dentro do paralelogramo.

Questão 7-

Aumentando os vetores forma a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Questão 8-a

Sendo $n=3$ toda coordenada negativa no eixo oy esta fora do conjunto.

Questão 8-b

O x não pode ser negativo

Questão 8-c

O vetor sempre ficará sobre o eixo y (positivo

Questão 8-d

O vetor não pode assumir nenhum valor
que esteja no 3º e 4º quadrante.

Questão 8-e

Qualquer valor que for colocado em y valerá
para o conjunto.

Aluno 2

Questão 1-

Sim, sendo = $w = -1 \cdot u + (-0{,}21) \cdot v$

Questão 2-a

Questão em Branco

Questão 2-b

Questão em Branco

Questão 2-c

Questão em Branco

Questão 2-d

Questão em Branco

Questão 2-e

Questão em Branco

Questão 3-

Sim. Pois o vetor soma $\alpha u + \beta u$ resulta em w

Questão 4-

O produto só aumenta o valor do vetor e
a soma muda a direção do vetor

Questão 5-a

Questão em Branco

Questão5-b

Questão em Branco

Questão 5-c

Questão em Branco

Questão 6-

Independente dos valores os vetores não saem do paralelogramo.

Questão 7-

O vetor só muda a direção

Questão 8-a

Sendo $V = 3$, ele fica sobre o eixo x, com isso qualquer valor negativo na coordenada do eixo y fica fora de V.

Questão 8-b

O valor da coordenada x não pode ser negativo

Questão 8-c

Colocando qualquer valor de x positivo ou negativo teremos y positivo

Questão 8-d

O vetor não pode ficar no 3º e 4º quadrantes

Questão 8-e

Colocando qualquer valor de X positivo ou negativo teremos y positivo

Aluno 3

Questão 1-

Sim, quando $\alpha = -1$ e $\beta = -0,2$

Questão 2-a

Não, a partir do experimento não consegui igualar ao vetor w.

Questão 2-b

Não

Questão 2-c

Não

Questão 2-d

Não

Questão 2-e

O vetor w é um multiplo do vetor t, quando γ = 1. Não é possível encontrar esse mesmo vetor somando a outros dois vetores

Questão 3-

Sim com α = -0,4 e β = -0,8

Questão 4-

Questão em Branco

Questão 5-a

Fixei os vetores
u = (1,0)
v = (0,1)
t = (1,1)
E a justificativa é igual a questão 5.b

Questão 5-b

fixei os vetores como u = (1,0) e v = (0,1), realizando a multiplição dos vetores por um nº real qualquer e somando ou diminuindo o vetor u com o v formarão diferente vetores w.

Questão 5-c

Sim, porém w sempre será um multiplo desse 1º vetor

Questão 6-

Há um novo vetor gerado pela soma do multiplos dos vetores u e v.
Variei α até o máximo e β até o mínimo do seletor e fiquei alternando, poderia preencher todo o plano com novos vetores.

Questão 7-

Fiz o mesmo processo e só resultaram vetores multiplos.

Questão 8-a

Nesse caso, sempre tem como resultado vetores multiplos.

Questão 8-b

Os vetores não pertencem a esse conjunto e nem os vetores resultantes da soma e produto por escalar pertencem.

Questão 8-c

Ocorre o mesmo que no caso 1

Questão 8-d

Nesse caso consigo gerar infinitos vetores.

Questão 8-e

Como no caso 2 os vetores não pertencem a esse conjunto.

Aluno 4

Questão 1-

Sim, quando $\alpha = -1$ e $\beta = -0,2$.

Questão 2-a

Sim, quando $\alpha = 0,1$, $\beta = -0,05$ e $\gamma = 1,1$

Questão 2-b

Não, pois não importa a variação de α, β ou γ, não achamos a reta s

Questão 2-c

Não

Questão 2-d

Não

Questão 2-e

Questão em Branco

Questão 3-

Sim, quando $\alpha = -0,4$ e $\beta = -0,8$

Questão 4-

$u = \alpha u$ nunca irá acontecer.

Questão 5-a

Questão em Branco

Questão 5-b

Questão em Branco

Questão 5-c

Questão em Branco

Questão 6-

Variando os seletores conseguimos formar um angulo de 360°. a soma dos vetores

Questão 7-

Variando os seletores vemos que fazem apenas uma reta
por onde passam os vetores, a multiplicação dos vetores

Questão 8-a

U será a multiplicação dos vetores

Questão 8-b

Com os vetores pertencentes a U, vemos a soma dos vetores

Questão 8-c

Com os vetores pertencentes a U, vemos a multiplicação dos vetores, pois V passa pela origem, assim como no caso 1

Questão 8-d

Como $V = R^2$ e estamos trabalhando com o $\mathbb{R}^2$, não importa onde colocamos os vetores, que podermos ver tanto a soma, quanto a multiplicação

Questão 8-e

Vemos a soma dos vetores, mesmo V passando pela origem, não vemos a multiplicação dos vetores, pois V é uma parabola

Aluno 5

Questão 1-

Sim.

Questão 2-a

não

Questão 2-b

Sim, Pós esse vetor diminuiria o tamanho de um deles.

Questão 2-c

Sim, Considerando $\alpha = -0.65$

$\beta = 0.3$

$\gamma = 0$

Questão 2-d

não é possível

Questão 2-e

Questão em Branco

Questão 3-

Sim, $\alpha = -0.4$

$\beta = -0.8$

Questão 4-

Que o vetor resultante de $w + \alpha \cdot v$ é igual a u.

Questão 5-a

não é possível

Questão 5-b

Questão em Branco

Questão 5-c

Questão em Branco

Questão 6-

Questão em Branco

Questão 7-

Questão em Branco

Questão 8-a

Questão em Branco

Questão 8-b

Questão em Branco

Questão 8-c

Questão em Branco

Questão 8-d

Questão em Branco

Questão 8-e

Questão em Branco

Aluno 6

Questão 1

Sim, é possível ver geometricamente o resultado do processo, usando multiplos negativos.

Questão 2-a

Sim, porque a relação ~~dependencia~~ de crescimento e diminuição entre os valores é dependente. conforme o crescimento de um valor o próximo crescerá ou diminuirá ~~para~~ até um certo ponto, do qual ultrapassando a relação inver

Questão 2-b

Sim, pois Todos estão contidos dentro de um mesmo espaço.

Questão 2-c

Sim, a partir da regra do paralelogramo

Questão 2-d

não, porém pode-se igualar os valores, utilizando multiplos.

Questão 2-e

O aumento do número de vetores torna cada vez mais
específico a formação de um outro vetor dependendo, por conta
da relação entre os vetores de formação, porém com um número
muito reduzido também encontra-se dificuldades pela falta de ~~pos~~
possibilidades para a formação do vetor.

Questão 3-

Sim, aplicando a lei dos paralelogramos.

Questão 4-

Os vetores tendo direções diferentes, impossibilita tais relações

Questão 5-a

Sim pois estão contidos em $\mathbb{R}^2$

Questão 5-b

Sim pois eles são linearmente independentes.

Questão 5-c

não, pois os vetores criados ~~da~~ em $\mathbb{R}^2$ de apenas um vetor fixo são múltiplo dele mesmo

Questão 6-

Eles geram um espaço em $\mathbb{R}^2$

Questão 7-

Eles criam vetores multiplos um do outro.

Questão 8-a

gera uma ~~reta~~ vetor, não pertencendo a U

Questão 8-b

gera um vetor não pertencendo a U

Questão 8-c

Pertencerá a U caso $y = 0$

Questão 8-d

Todo valor gerado pertencerá a U

Questão 8-e

Vetor não pertencendo a U

Aluno 7

Questão 1

É possível ver geometricamente o resultado da soma dessa equação.

Questão 2-a

Sim. Ao alterar os valores α, β, γ no aplicativo é possível observar que a equação dada é verídica.

Questão 2-b

Sim. Pois os vetores são linearmente independentes

Questão 2-c

Sim. Pois os vetores são linearmente independentes

Questão 2-d

Não. É relacionado a dependencia linear

Questão 2-e

Todo observado ate aqui está ligado a matéria de pendencia linear.

Questão 3-

Sim

Questão 4-

Nenhuma, pois possuem direções diferentes.

Questão 5-a

Sim. pois todos eles estão contidos no $\mathbb{R}^2$

Questão 5-b

Sim. Pois todos estão contidos no $\mathbb{R}^2$

Questão 5-c

Não. pois o $\mathbb{R}^2$ necessita de pelo menos 2 vetores.

Questão 6-

Os dois formam um conjunto infinito de vetores que pode assumir qualquer valor no $\mathbb{R}^2$

Questão 7-

elos formam uma linha continua e ~~~~ infinita, mas não da um espaço

Questão 8-a

geram uma reta U, que é subconjunto de $\mathbb{R}^2$

Questão 8-b

geram a reta $y = \frac{x}{3} + 1$, subconjunto de $\mathbb{R}^2$

Questão 8-c

gera uma reta contida no eixo x

Questão 8-d

gera todo o $\mathbb{R}^2$

Questão 8-e

gera a parábola contida no $\mathbb{R}^2$

Aluno 8

Questão 1

Sim. se $\alpha = -1$ e $\beta = -0,2$.

Não sei se valeria qualquer número real, já que o gráfico pode não bater, mas para os valores dados, sim.

Questão 2-a

Sim. $\alpha \approx 1.4$, $\beta \approx -0,65$ e $\gamma \approx 2.6$

Um pouco mais trabalhoso de achar, pois são 3 vetores, entretanto similar à 1ª.

Questão 2-b

Creio que sim devido ØS ser um vetor nulo, é bem capaz de não alterá-lo. Creio que não alteraria.

Questão 2-c

Não. Ficaria em $\mathbb{R}^2$.

Questão 2-d

Não. Idem (c)

Questão 2-e

É um pouco esquisito, já que se diminuirmos e trabalharmos só com u e v ou u, não acharíamos um vetor com valores nas outras coordenadas.

Pode ser que uma explicação de [illegible]

Questão 3-

você observou e concluiu:

Sim. α = -0,4 e β = -0,8

ótimo

Creio que só possa haver esses valores para bater. Se multiplicar (α).(-1) e (β).(-1) fica exatamente o oposto

Questão 4-

real α?

Que quando trabalhamos apenas com um número e não com um vetor, a ideia do vetor não muda somente altera o módulo e o sentido.

α=0 realmente zera o vetor (só p/ confirmar)

Questão 5-a

Sim. Movimentando os vetores e colocando "certinho" consegue achar sim.

Questão 5-b

Sim. Idem (a)

Questão 5-c

Não. Se tiver apenas 3, cai no problema da 4, ou algo próximo. Vamos fixar uma "reta" aí não poderemos mais [illegible]

a o arquivo atividade-5a. O que você percebe ao variar os variar os

Questão 6-

Que ela vai deixando um rastro dos vetores que vamos passando

Questão 7-

Continuo deixando o rastro. Dessa vez enfoco no modulo do vetor criado. são vetores de mesmo coeficiente, então não ocorre o losango, quem sabe...

Questão 8-a

Se posicionarmos os vetores em cima de u, achamos a resposta

Questão 8-b

Nesse caso não conseguimos encontrar valores que batam.

Questão 8-c

Se colocarmos os vetores com $y=0$. Exemplo $(-5,0)$ $(4,0)$

Questão 8-d

Qualquer um valor real, os
$u = \mathbb{R}^2$, ou seja, todo os vetores
possíveis em $\mathbb{R}^2$

Questão 8-e

Não entendi muito bem, mas se
colocamos a "ponta" dos vetores
em cima da parábola u, achamos
o eixo de simetria y.

Aluno 9

Questão 1

É possível, pois ao multiplicar o vetor $\vec{u}$ pelo escalar
$\alpha = -1$ e somar ao vetor $\vec{v}$ multiplicado pelo escalar
$\beta = -0,2$, temos como resultado o vetor $\vec{w}$.

Questão 2-a

sim, pois geometricamente podemos observar que
é possível forma $\vec{w}$ com a soma dos demais
vetores multiplicados por escalares

Questão 2-b

sim, pois os demais vetores podem não ser linearmente dependentes do vetor $\vec{s}$.

Questão 2-c

sim, pois ainda podemos escrever $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

Questão 2-d

não, pois neste caso o vetor $\vec{u}$ teria de ser um múltiplo de $\vec{w}$ para que isso ocorra

Questão 2-e

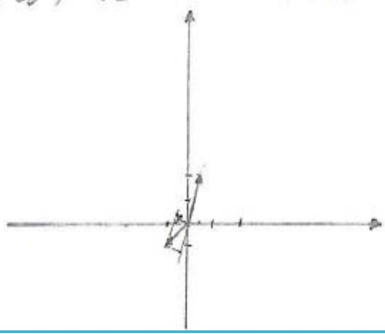
com dois ou mais vetores podemos criar outros vetores, porém com apenas um vetor é possível criar apenas múltiplos.

Questão 3-

sim, para os escalares $\alpha = -0,1$ e $\beta = -0,8$ temos que podemos forma o vetor $\vec{w}$ na forma $\vec{w} = \alpha . \vec{u} + \beta \vec{v}$.

Questão 4-

Apartir da soma de outros vetores teriamos como formar o vetor $\vec{w}$.



Questão 5-a

sim, por exemplo
utilizando dois vetores $\vec{u} = (0,1)$ e $\vec{v} = (1,0)$ e o vetor nulo $\vec{t} = (0,0)$ temos que é possível formar um vetor $\vec{w}$ na forma $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{t}$

Questão 5-b

analogo a questão a, sabemos que é possível apartir de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formar um vetor $\vec{w}$ na forma $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$

Questão 5-c

não, pois deve haver ao menos mais um vetor para forma vetores diferentes dos multiplos do vetor fixo.

Questão 6-

que apartir da soma de dois vetores destintos podemos formar um número infinito de vetores apenas multiplicando por escalares

Questão 7-

tendo dois vetores multiplos, temos que sua soma so gera mais um vetor multiplo.

Questão 8-a

Apenas a soma dos vetores nulos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pertencem a U.

Questão 8-b

A soma do vetor $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não pertence a U

Questão 8-c

toda soma tenha a coordenada $y = 0$ pertence a U

Questão 8-d

sendo $U = \mathbb{R}^2$ temos que qualquer vetor formado pertence a U

Questão 8-e

novamente apena o vetor nulo pertence ao conjunto.

Aluno 10

Questão 1-

Sim, podemos observar quando os modificaremos os valores de p e α. Assim os vetores mudam de posição até ficar em posição de soma

Questão 2-a

Sim, ao posicionarmos $\alpha = -8,35$, $\beta = 0,35$ e $\gamma = -4,1$, vemos que o vetor w se formou $\alpha u + \beta v + \gamma t$

Questão 2-b

Sim, pois não vai modificar pois é um vetor nulo se 0s.

Questão 2-c

Não, pois t não é um vetor nulo.

Questão 2-d

Também não, pois u também não é um vetor nulo. Só será possível se somente w e u não forem vetores nulos.

Questão 2-e

Pude perceber que se o vetor não for nulo ele será considerado no espaço vetorial e influenciará na soma e na multiplicação por escalares

Questão 3-

Ao assumir valores negativos (α e β), os vetores mudam de sentido

Questão 4-

É possível se obter a soma dos dois vetores, dependendo dos valores de α, porém w.α u muito acontece

Questão 5-a

Sim, é possível. Podemos observar ao mudarmos os vetores de possição o que seria possível alterando os valores de α, β e γ

Questão 5-b

Sim, assim como o anterior podemos possicionar os vetores de acordo com os valors de α e β.

Questão 5-c

Sim, só devemos atribuir valores os coordenados do vetor

Questão 6-

Podemos claramente notar que a multiplicação de um vetor por um escalar, altera a sua posição no espaço vetor, o'.

Questão 7-

Já neste caso, podemos notar que a multiplicação alterou tanto a direção quanto o tamanho do vetor.

Questão 8-a

Nesse caso os vetores se sobrepõe.

$U = u \cdot v$

Questão 8-b

Nesse caso u é a soma de $u + v$.

Questão 8-c

Neste caso não podemos achar um vetor resultante e nem fazer nenhum tipo de cálculo.

Questão 8-d

Podemos achar os valores pela regra do paralelogramo.

Questão 8-e

Assim como o acima podemos calcular o vetor resultante pela regra do paralelogramo.

Anexo B

Quadros- sínteses das questões

Quadro 11- Questão 1

	Modos de produção de conhecimentos		Respostas
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais-**	**Utilização conteúdo estudado**	
1,	Experimentação visual	Verificação pela regra do paralelogramo	Satisfatória
2, 3,4,8,9,	Experimentação visual/ numérica	Utilização de linguagem matemática, talvez noção de combinação linear	Satisfatória
5	Inconclusivo	Inconclusivo	Inconclusivo
6,7, 10	Experimentação visual	Justificativa geométrica	Satisfatória

Quadro 12- Questão 2-a

	Modos de produção de conhecimentos		Respostas
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais**	**Utilização conteúdo estudado**	
1,4,6,	Experimentação visual	Inconclusivo	Sem sucesso ou resposta parcial
7,9	Experimento visual	Justificativa geométrica	Resposta satisfatória
2	Em branco	Em branco	Em branco
3	Experimentação visual / numérica	Inconclusivo	Sem sucesso
8,10	Experimentação visual/ numérica	Possível noção de combinação linear	Inconclusivo
5	Inconclusivo	Inconclusivo	Inclusivo

Quadro 13- Questão 2-b

Alunos	Modos de produção de conhecimentos		Respostas
	Utilização dos recursos computacionais	**Utilização conteúdo estudado**	
1	Experimentação visual	Verificação pela regra do paralelogramo	Inconclusiva
2	Em branco	Em branco	Em branco
3	Experimentação visual/ numérica	Talvez noção de combinação linear	Satisfatório
4,6,7	Experimentação visual	Inconclusivo	Resposta: Sem sucesso ou satisfatória
5,8,10	Inconclusivo	Inconclusivo	Inconclusivo
9	Experimentação visual	Noção de combinação linear	Satisfatório

Quadro 14- Questão 2-c

Alunos	Modos de produção de conhecimentos		Respostas
	Utilização dos recursos computacionais	**Utilização conteúdo estudado**	
1,6	Experimentação visual	Verificação pela regra do paralelogramo	Satisfatória
2	Em Branco	Em branco	Em branco
3	Inconclusivo	Inconclusivo	Inconclusivo
4	Experimentação visual	Inconclusivo	Resposta: Sem sucesso ou satisfatória
5,8,10	Inconclusivo	Inconclusivo	Inconclusivo
9	Experimentação visual	Noção de combinação linear	Satisfatória
7	Inconclusivo	Noção de combinação linear	Satisfatória

Quadro 15- Questão 2-d

	Modos de produção de conhecimentos		**Respostas**
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais**	**Utilização conteúdo estudado**	
	Experimentação visual	Verificação pela regra do paralelogramo	
2	Em Branco	Em branco	Em branco
3	Experimentação visual/ numérica	Inconclusivo	
4	Experimentação visual	Inconclusivo	Resposta: Sem sucesso ou satisfatória
1, 5,8,10	Inconclusiva	Inconclusivo	Inconclusivo
9	Experimentação visual	Noção de combinação linear	Satisfatória
6,7	Inconclusivo	Noção de combinação linear	Satisfatória

Quadro 16- Questão 3

	Modos de produção de conhecimentos		**Respostas**
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais**	**Utilização conteúdo estudado**	
1,6	Experimentação visual	Verificação pela regra do paralelogramo	Satisfatória
			Em branco
2,3,4,5,8,9	Experimentação visual/ numérica	Utilização de linguagem matemática de álgebra linear, talvez noção de combinação linear	Satisfatória
7,10	Experimentação visual	Inconclusivo	Inconclusivo

Quadro 17- Questão 4

	Modos de produção de conhecimentos		Respostas
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais**	**Utilização conteúdo estudado**	
1,2	Experimentação visual	Produto de vetor por escalar; escalares restritos aos números inteiros positivos	Resposta parcial
7,8,9	Experimentação visual	Inconclusivo	Em branco
4	Experimentação visual	Noção de produto por escalar	Satisfatória
3,5	Inconclusivo	Inconclusivo	Não entendeu o enunciado
10	Experimentação visual	Noção de combinação linear	Satisfatória
6	Inconclusivo	Noção de combinação linear	Satisfatória

Quadro 18- Questão 5 a

	Modos de produção de conhecimentos		Respostas
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais**	**Utilização conteúdo estudado**	
3,9	Experimentação visual	Linguagem matemática; noção de combinação linear; particularização	Satisfatória
1,2,4,5	Em branco	Em branco	Em branco
6	Inconclusivo	Noção de espaço gerado	Satisfatório
8,10	Experimentação visual	Inconclusivo	Inconclusivo
7	Inconclusivo	Noção de combinação linear	Satisfatório

Quadro 19- Questão 5 b

	Modos de produção de conhecimentos		**Respostas**
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais**	**Utilização conteúdo estudado**	
3,9	Experimentação visual	Linguagem matemática; noção de combinação linear; particularização	Satisfatória
1	Experimentação visual	Inconclusivo	Sem sucesso
8,10	Experimentação visual	Inconclusivo	Inconclusivo
6,7	Inconclusivo	Noção de combinação linear	Satisfatória
2,4,5			Em branco

Quadro 20- Questão 5 c

	Modos de produção de conhecimentos		**Respostas**
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais**	**Utilização conteúdo estudado**	
3,9	Experimentação visual	Linguagem matemática; noção de combinação linear	Satisfatória
1	Experimentação visual		Sem sucesso
7	Experimentação visual	Talvez noção de base geradora	Satisfatória
6	Inconclusivo	Noção de combinação linear	Satisfatória
2,4,5			Em branco
8,10	Experimentação visual	Inconclusivo	Inconclusivo

Quadro 21- Questão 6

	Modos de produção de conhecimentos		Respostas
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais**	**Utilização conteúdo estudado**	
1,2	Experimentação visual	Experimentação pela regra do paralelogramo	Resposta parcial
7,8,9,10	Experimentação visual	Inconclusivo	Resposta parcial
6	Experimentação visual	Talvez noção de base geradora	Satisfatória
3	Experimentação visual	Noção de combinação linear espaço gerado	Satisfatória
5			Em branco
4	Experimentação visual	Evocando conceito geométrico de medida de ângulo	Resposta Parcial

Quadro 22- Questão 7

	Modos de produção de conhecimentos		Respostas
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais**	**Utilização conteúdo estudado**	
1,2	Experimentação visual	Produto de vetor por escalar, considerando inteiros negativos	Resposta parcial
4	Experimentação visual	Menção implícita à espaço gerado	Satisfatória
7,8,9,10	Experimentação Visual	Inconclusivo	Resposta parcial
3,6	Experimentação visual	Noção de combinação linear	Resposta parcial
5	Em branco	Em branco	Em branco

Quadro 23- Questão 8 a

	Modos de produção de conhecimentos		Respostas
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais**	**Utilização conteúdo estudado**	
1	Experimentação visual	Sistema de coordenadas	Sem sucesso
3,4	Experimentação visual	Possível noção de subespaço vetorial	Satisfatória
2	Inconclusivo	Inconclusivo	Inconclusivo
6	Experimentação visual	Possível noção de espaço gerado	Sem sucesso
5	Em branco	Em branco	Em branco
7,8,9,10	Experimentação visual	Inconclusivo	Resposta parcial

Quadro 24- Questão 8 b

	Modos de produção de conhecimentos		Respostas
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais**	**Utilização conteúdo estudado**	
1	Experimentação visual	Sistema de coordenadas	Sem sucesso
3,9,	Experimentação visual	Possível noção de subespaço vetorial	Satisfatória
2	Inconclusivo	Inconclusivo	Inconclusivo
6	Experimentação visual	Possível noção de espaço gerado	Satisfatória
5			Em branco
4,7,8,10	Experimentação visual	Inconclusivo	Sem sucesso

Quadro 25- Questão 8 c

	Modos de produção de conhecimentos		**Respostas**
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais**	**Utilização conteúdo estudado**	
1	Experimentação visual	Sistema de coordenadas	Sem sucesso
3,4,6,8,9	Experimentação visual	Possível noção de subespaço vetorial	Satisfatório
2	Inconclusivo	Inconclusivo	Inconclusivo
5			Em branco
7,10	Experimentação visual	Inconclusivo	Sem sucesso

Quadro 26- Questão 8 d

	Modos de produção de conhecimentos		**Respostas**
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais**	**Utilização conteúdo estudado**	
1	Experimentação visual	Sistema de coordenadas	Sem sucesso
3,4,6,8,9	Experimentação visual	Possível noção de subespaço vetorial	Satisfatório
7,10	Experimentação visual	Inconclusivo	Sem sucesso
2,5	Inconclusivo	Inconclusivo	Inconclusivo ou em branco

Quadro 27- Questão 8 e

	Modos de produção de conhecimentos		**Respostas**
Alunos	**Utilização dos recursos computacionais**	**Utilização conteúdo estudado**	
1	Experimentação visual	Sistema de coordenadas	Sem sucesso
3,4,8,9	Experimentação visual	Possível noção de subespaço vetorial	Satisfatória
6	Experimentação visual	Possível noção de espaço gerado	Satisfatória
2,5	Inconclusivo	Inconclusivo	Inconclusivo ou em branco
7,10	Experimentação visual	Inconclusivo	Sem sucesso

Quadro-28/: Modos de produção de conhecimentos

Modos de produção de conhecimentos						
Atividades	**Experimentação visual Evoca solução numérica-**	**Experimentação visual Evoca justificativa geométrica**	**Experimentação visual Evoca regra do paralelogramo**	**Experimentação visual Evoca Física e noção de combinação linear**	**Experimentação visual/numérica Evoca noção de conjunto gerador**	**Experimentação visual/ numérica Evoca noção de espaço gerado**
1	2,3,4,8	6,7,10	1	9		
2	2,5,4	3,5,6,7	1,6	9,10	7,8,9	6,7,9
3	2,3,4,5,8		1,6	9		
4		1, 2,6,7, 10		3,4,9		
5		8		3,,6, 9	9	6,7,9
6		4, 10	1,2		7	3,6, 7, 9
7		1, 2,,7, 10		6		3, 4, 9
8					3	3,6,7,9

Anexo C-

Termo de Consentimento

UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Programa de Pós-graduaçãoemEnsino da Matemática

Instituto de Matemática

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Caro aluno,

Você está sendo convidado(a) para participar da pesquisa **“O uso da representação gráfica para a construção do conhecimento de espaço vetorial”**. Após receber a autorização do coordenador do curso de Matemática e com o professor de Álgebra Linear I, convido osalunos dessa disciplina a fazer parte da pesquisa. Sua participação não será obrigatória, e consistirá em frequentar os 2 encontros durante o horário de aula de Álgebra Linear I participando das atividades propostas. As observações feitas nos encontros serão registradas por meio de suas anotações, caderno de campo, para esclarecimentos sobre respostas às atividades realizadas.Os objetivos desse estudo são: investigar se a utilização de recursos visuais e gráficos para a construção do conhecimento de espaço vetorial poderá colaborar para a aprendizagem matemática. Os resultados desta pesquisa referem-se, principalmente, às análises das respostas ao questionário, incluindo reflexões sobre as eventuais intervenções do professor-pesquisador. A pesquisa se justifica pelo alto índice de reprovação em Álgebra Linear tendo em vista a dificuldade e abstração e visualização dos conceitos que são apresentados nesta disciplina. Tenho a expectativa de tornar útil esse estudo, promovendo uma reflexão sobre o processo de ensino-aprendizagem e sobre recursos didáticos.

s informações dessa investigação, além de serem usadas apenas na pesquisa em questão, serão confidenciais e asseguramos o sigilo sobre sua participação. Os dados não serão divulgados de forma a possibilitar sua identificação, pois os participantes podem optar por serem identificados por nomes fictícios no trabalho final. Você receberá uma cópia desse termo onde consta o endereço eletrônico do pesquisador, podendo tirar suas dúvidas em relação ao projeto e sua participação, agora ou a qualquer momento.

____

Aluno

____

Mestrando Everton Francisco Ferreira Santiago

E-mail: everton.ferreira.matematica@gmail.com