UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ASPECTOS VISUAIS E GRÁFICOS DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

ERASTO PIEDADE ALONSO

RIO DE JANEIRO

MARÇO – 2017

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ASPECTOS VISUAIS E GRÁFICOS DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

ERASTO PIEDADE ALONSO

Trabalho apresentado como requisito para a obtenção do título de Mestre pelo programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

ORIENTADORA: MARIA MÁRCIA FUSARO PINTO

RIO DE JANEIRO

2017

ERASTO PIEDADE ALONSO

ASPECTOS VISUAIS E GRÁFICOS DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Dissertação de Mestrado submetida ao programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Rio de Janeiro, 10 de março de 2017.

Aprovada por:

Marcia Maria Fusaro Pinto
Profa. Dra. Márcia Maria Fusaro Pinto – UFRJ (Orientadora)

Lilian Nasser
Profa. Dra. Lilian Nasser – UFRJ

Angela Rocha dos Santos
Profa. Dra. Ângela Rocha dos Santos – UFRJ

Frederico da Silva Reis
Prof. Dr. Frederico da Silva Reis – UFOP

RIO DE JANEIRO
2017

CIP - Catalogação na Publicação

AA454a

ALONSO, ERASTO PIEDADE
ASPECTOS VISUAIS E GRÁFICOS DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO / ERASTO PIEDADE ALONSO. -- Rio de Janeiro, 2017.
193 f.

Orientadora: MÁRCIA MARIA FUSARO PINTO.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2017.

1. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO. 2. VISUALIZAÇÃO. 3. IMAGEM CONCEITUAL. 4. INTUIÇÃO. 5. RECURSOS DIGITAIS. I. PINTO, MÁRCIA MARIA FUSARO, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado a Jesus Cristo, pois por causa Dele tenho vida e é para Ele e por Ele que eu vivo.

Toda Honra, Glória e Louvor sejam dados ao único e suficiente Salvador Jesus Cristo, que morreu por nós, ressuscitou e que hoje vive para que nós tenhamos vida eterna.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais por todo amor, amizade, atenção, empenho, incentivo, correção, educação e instrução que foram concedidos a mim ao longo de toda a minha vida. Amo vocês!

Agradeço à minha princesa, minha bênção do Senhor, minha noiva e futura esposa Ana Lívia. Sou grato a você por tudo, meu amor. Obrigado pela companheira maravilhosa, abençoada, amorosa e carinhosa que você sempre foi para mim. Obrigado por sempre acreditar em mim, me incentivando e ajudando em tudo. Você é e sempre será a minha melhor companhia, minha melhor amiga e o grande amor da minha vida. Te amo, meu amorzinho!

Sou grato a Deus por ter me presenteado com os meus irmãos Felipe e Lucas e pela amizade que temos. Obrigado por vocês me darem sempre toda força que precisei para alcançar meus objetivos e por acreditarem em mim em tudo. Contem sempre comigo. Amo vocês!

Agradeço às minhas avós Raimunda e Clarice por todo amor, carinho e incentivo de sempre. Vocês são exemplos para mim. Amo vocês! Muito grato por todos os meus familiares, tios, primos, cunhados e sogros. Vocês todos foram e são muito importantes em minha caminhada. Obrigado por tudo!

Eu sou grato à Deus por meus amigos. Vocês são presentes de Deus para minha vida. Agradeço por todos os meus irmãos da fé, por meus pastores e conselheiros. Obrigado por sempre orarem por mim, me aconselharem e torcerem por mim.

Agradeço à minha professora e orientadora Márcia por todo suporte, ajuda, correção, auxílio e orientação neste trabalho e na minha carreira profissional. A senhora é uma professora exemplar. Muito obrigado! Que Deus a abençoe!

Eu sou grato por todos os professores do PEMAT com os quais tive a oportunidade de aprender e crescer muito como professor. Vocês são alguns dos melhores professores que eu poderia ter. Muito obrigado!

Agradeço a CAPES pelo suporte concedido com a bolsa de mestrado que me permitiu estudar e me dedicar ainda mais para esta pesquisa.

"Porque o Senhor dá a sabedoria; da sua boca procedem o conhecimento e o entendimento; ele reserva a verdadeira sabedoria para os retos; e escudo para os que caminham em integridade, guardando-lhes as veredas da justiça, e preservando o caminho dos seus santos." (Provérbios 2:6-8 – Bíblia Sagrada)

RESUMO

Os objetivos desse estudo são: investigar a utilização de recursos visuais e gráficos na aprendizagem matemática, especialmente na do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), e que conceitos matemáticos os alunos evocam ao participar de atividades, relacionadas ao TFC, estimulados por meio de tal prática pedagógica. A pesquisa é qualitativa, sob a perspectiva teórica que considera o papel da visualização e da intuição no processo de ensino e aprendizagem (TALL&VINNER, 1981; FISCHBEIN, 1994), envolvendo graduandos dos cursos de Licenciatura em Matemática e de Ciências da Computação da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Para responder a questão de pesquisa, elaboramos e analisamos as respostas a um questionário e os relatórios escritos pelos participantes sobre atividades de uma oficina, que foi finalizada com uma entrevista em grupo. Da análise do material produzido, organizada em torno de conceitos matemáticos evocados e aspectos intuitivos relacionados ao TFC, ressaltamos fatores de conflitos referentes à noção de continuidade, e entre as noções de área sob curvas e de integral definida. As referências dos participantes ao TFC reduziram-se durante as atividades com computadores se comparadas às evocadas durante as desenvolvidas com lápis e papel; em contraste, a exploração e inter-relações entre representações visuais/gráficas foram intensificadas. Conjecturamos que essas últimas desenvolvem aspectos intuitivos na produção do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo; Visualização; Imagem conceitual; Intuição; Recursos digitais no ensino de matemática.

ABSTRACT

The aims of this study are: to investigate the use of the visual and the graphical resources in the learning of mathematics, especially in the learning of the Fundamental Theorem of Calculus (FTC), and the mathematical concepts that students evoke when participating in activities related to the FTC stimulated by a pedagogical practice using such alternative resources. The research is qualitative, adopting a theoretical perspective that considers the role of visualization and intuition in the teaching and learning processes, involving undergraduate students enrolled in the courses of Mathematics and Computer Science at the Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. In order to respond the research questions, we elaborated and analyzed the participants' written answers to a questionnaire, their written reports on the activities of a workshop and their final discussion in a group interview. From the analysis of the empirical material organized around the concepts and the intuitive aspects related to FTC evoked by the participants, we emphasize the conflict factors concerning the notion of continuity, and between the notions of area under curves and definite integral. The participants' references to FTC were reduced during the computer activities if compared to those evoked during the pencil and paper ones. In contrast, the exploration and interrelationships between visual/graphical representations were intensified. We conjecture that the latter develop intuitive aspects articulated in the production of mathematical knowledge.

Keywords: Fundamental Theorem of Calculus; Visualization; Conceptual image; Intuition; Digital resources in the learning of mathematics

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

Sumário

Introdução e motivações de pesquisa

> É naturalmente mais fácil fornecer a demonstração de um problema quando adquirimos conhecimento prévio sobre ele, por meio de um método mecânico, do que achar a demonstração sem nenhum conhecimento prévio a respeito dele. (Arquimedes - III AC)

A literatura de pesquisa na área de educação matemática no ensino superior tem evidenciado que, quando em contato com os conteúdos de cálculo pela primeira vez, os alunos, em geral, encontram diversas dificuldades que são tanto de cunho pedagógico, em relação à maneira como o professor ensina, quanto de cunho técnico-teórico ou epistemológico, inerente ao próprio conteúdo da disciplina. Em minha experiência, enquanto graduando, meus colegas e eu encontramos muitos desses obstáculos em nosso percurso na graduação. Em um curso em que a reprovação é alta, podemos e devemos, como profissionais do ensino de matemática, nos preocupar com essa e tantas outras situações que permeiam o ensino deste conteúdo.

As dificuldades no ensino e aprendizagem de cálculo, que retomo a partir de minha própria experiência, são o foco de diversas pesquisas no campo da Educação Matemática. Interesso-me pelas que investigam a aprendizagem das relações entre derivação e integração, e o Teorema Fundamental do Cálculo. Tall (1991) analisou, dentre outros aspectos, a compreensão de alunos de cálculo sobre aquele conteúdo e verificou que os alunos que participaram da investigação tinham um entendimento “confuso” sobre o significado da diferenciação e integração e sobre as relações entre suas notações. O autor relata que os alunos aprenderam que $\frac{dy}{dx}$ representa a derivada de uma função y = f(x) e, num curso de cálculo, deve ser entendida como um simples símbolo indivisível; porém dx é representado como uma entidade independente, chamada “infinitamente pequena mudança em x” (p.1). Além disso, o significado de dx em $\int f(x)dx$ significa “com respeito a x”, ainda que eles tenham que fazer a substituição $du = \frac{du}{dx}.dx$ para calcular a integral, por substituição. Quando eles passam a resolver equações diferenciais, os alunos lidam com dx e $\int f(x)dx$, utilizando-os de maneira “confusa”, em relação ao que lhes havia sido ensinado anteriormente.

Partindo de investigações específicas sobre entendimento dos alunos sobre o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), o propósito em Segadas (1998) foi “ajudar a identificar alguns desses obstáculos” no cálculo, relatados por Tall (1991) e retomados no parágrafo anterior, a fim de fornecer recursos que pudessem viabilizar a superação das barreiras cognitivas encontradas. Resultados semelhantes aos dessa pesquisadora estão em Anacleto (2007), que objetivou "investigar os conhecimentos que são mobilizados pelos alunos, [...], quanto à inter-relação entre a diferenciação e a integração" , verificando, após aplicação de questionários, que:

> ... a maioria dos alunos encontrou dificuldades para solucionar problemas em que a simples visualização de gráficos faria com que não necessitassem desenvolver longos algoritmos. Este resultado demonstra que os obstáculos dos estudantes para compreender o TFC estão relacionados com uma incompleta mobilização das noções de derivada, integral e continuidade, uma vez que utilizaram apenas parcialmente esses conhecimentos para solução das questões apresentadas. Tal fato está provavelmente associado aos hábitos dos estudantes, que tendem a não focar atenção aos aspectos conceituais do teorema, apenas memorizando o algoritmo dos procedimentos sem refletir sobre a sua aplicabilidade. (p.5)

Esta citação evidencia as dificuldades e obstáculos de aprendizagem encontrados em cálculo, relacionados com os resultados em Tall (1991) e em Segadas (1998).

Retomando minha própria experiência, dentre as várias dificuldades encontradas em meu primeiro contato com o Cálculo, situa-se, com certeza, o entendimento do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Seu significado mantinha-se obscuro, sem um entendimento pleno, desde sua apresentação pela primeira vez em minha graduação até pouco tempo atrás, quando comecei essa pesquisa, embora conseguisse utilizá-lo com agilidade.

O TFC tem papel central no cálculo, pois relaciona problemas centrais ao que passou a ser denominado cálculo: o da determinação de tangentes e o do cálculo de áreas e volumes, que correspondem aos temas diferenciação e integração.

O problema do cálculo de áreas é foco de investigação desde a "Grécia antiga, pelo menos 2500 anos atrás, quando áreas de figuras planas eram encontradas usando o chamado 'método da exaustão"; enquanto "o problema da determinação da tangente deu origem ao ramo do cálculo chamado cálculo diferencial" (STEWART, 2012, p.2), estudado por muitos matemáticos do século XVII. Stewart (2012) ressalta ainda a relação entre essas áreas de conhecimento, dizendo que esses "dois ramos de conhecimento e seus problemas principais, o da área e o da tangente, apesar de parecerem completamente diferentes, tem uma estreita conexão" (ibid, p.3), sendo "os problemas da área e da tangente problemas inversos" (ibid, p.3).

Em meu modo de ver, o entendimento do resultado enunciado no TFC torna-se considerável por sua relevância em si, reconhecidamente central à área, e definidor do campo de conhecimento que hoje denominamos Cálculo. No que diz respeito `a pesquisa sobre seu ensino/aprendizagem, é um resultado potencialmente rico, com inúmeras possibilidades para investigarmos sobre o assunto; tais como o seu desenvolvimento teórico e histórico; as potencialidades de suas diversas formas de representação: algorítmica, conceitual e, inclusive, o de sua representação visual, que são importantes em seu ensino.

Em referência à última forma de representação, a visual (gráfica), minha dúvida recorrente sempre foi: como poderíamos interpretar (entender) as relações expressas pelo TFC graficamente? Se derivada é a inclinação da reta tangente a uma curva e integral é a área sob um gráfico, como podemos associar essas duas informações em um só resultado como o faz o TFC, representando-o graficamente? Que conceitos estão obscuros em meu entendimento para que eu não entenda o TFC em modos em que as relações enunciadas são estabelecidas conceitual e visualmente?

Essas e outras questões fizeram com que o meu interesse em entender esse resultado constituísse o foco dos meus estudos.

Ainda como aluno, mas já cursando Análise Real no mestrado em ensino de matemática, estas mesmas e outras questões vieram à tona; algumas com respostas devido ao nível de estudo e outras ainda permanecendo como uma real incógnita. Nessas aulas, diferentemente das aulas recebidas na graduação, uma abordagem diferenciada pedagogicamente foi iniciada, em que as dificuldades recorrentes nas aulas de cálculo e análise eram exploradas, com discussões sobre propostas para saná-las. Um dos aspectos trazidos em aula foi a visualização do TFC, quando o professor explorou graficamente este resultado expandindo assim nosso entendimento sobre o mesmo. Apesar de muito eficaz, seu desenvolvimento, porém, foi feito apenas como uma ilustração do teorema e não como parte integrante de sua demonstração. Com isso, algumas questões surgiram: é possível explorar/desenvolver um entendimento visual/gráfico do TFC de forma que tais aspectos (visuais) sejam parte integrante da sua demonstração? Que contribuições uma proposta visual\gráfica do TFC têm para o entendimento deste resultado?

Para responder questões como estas propus desenvolver uma pesquisa sobre este tema, o Teorema Fundamental do Cálculo. A perspectiva adotada é a de seu ensino e aprendizagem, de um ponto de vista da psicologia da educação matemática. Organizei a apresentação da investigação planejada e desenvolvida em cinco capítulos.

No capítulo 1, trazemos os aportes teóricos. A pesquisa é situada na área de investigação da educação matemática no ensino superior, buscando o diálogo com trabalhos recentes desenvolvidos no país. Destacamos de que modos percebemos estar contribuindo para o campo, trazendo proposições para trabalhar o TFC de modo integrado com a visualização do resultado, e os principais conceitos teóricos utilizados na pesquisa. Elaboro a questão de pesquisa, destacando objetivos específicos para organizar a produção do material empírico para análise.

O capítulo 2 apresenta o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida e os procedimentos metodológicos utilizados. Descrevemos as três etapas e os objetivos do desenvolvimento da investigação. As ferramentas metodológicas elaboradas para responder a questão colocada, consistiram de um questionário e de uma oficina utilizando computadores. Para planejar a pesquisa, os conceitos matemáticos continuidade, integração, derivação e o Teorema Fundamental do Cálculo são estudados nos livros texto indicados na ementa das disciplinas de cálculo do curso investigado.

O capítulo 3 traz o planejamento da pesquisa, apresentando as questões do questionário e as atividades da oficina, que são descritas bem como seus objetivos.

No quarto capítulo produzimos o material empírico para análise, organizando as respostas escritas dos alunos ao questionário e às atividades da oficina.

No capítulo 5, os resultados, buscando responder, essencialmente, à questão de pesquisa e, também, a questões que surgiram ao longo deste trabalho. Em considerações finais delineamos um panorama geral desta pesquisa, indicando novas questões que surgiram durante o seu desenvolvimento e sugestões para desdobramentos da investigação realizada.

Ao final, temos as seções Referências Bibliográficas e cinco Anexos. Nestes últimos, trazemos documentos de interesse para nossa investigação, incluindo a ementa do curso de cálculo 2 na Instituição que foi contexto da investigação, o termo de consentimento livre e esclarecido que os participantes da pesquisa assinaram, permitindo o uso de suas informações fornecidas, o questionário elaborado, o roteiro das quatro atividades da oficina e a transcrição das respostas dos alunos às atividades da oficina. Esses foram anexados ao final para não interromper o fluxo da discussão no trabalho.

Capítulo 1 – Aportes teóricos e a Questão de Pesquisa

Este capítulo tem como objetivo expor o referencial teórico utilizado nesta pesquisa, bem como explorar os conceitos matemáticos cujo ensino e aprendizagem serão o foco nesta investigação. Concluímos o capítulo trazendo a questão de pesquisa.

1.1 O referencial teórico

As ideias e noções apresentadas em Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991) fundamentaram diversas pesquisas que abordam o mesmo tema desta investigação. Sua concepção teórica sobre a relação entre ensino e aprendizagem em matemática envolvendo visualização e intuição, também discutidas, por exemplo, em Vinner e Dreyfus (1989), Vinner (1991), mas principalmente trazida em Tall e Vinner (1981), adequa-se à desta pesquisa. Por isso, adotamos esta perspectiva para analisar a aprendizagem de conceitos matemáticos, dialogando com outras publicações e resultados conhecidos na literatura e contribuindo para a pesquisa sobre o tema na educação matemática. Em particular, estudos sobre visualização do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) em Tall (1991a) e Tall (1991b) são importantes para a concepção e desenvolvimento metodológicos da pesquisa. O TFC é explorado também em Tall (2013); porém sem o detalhamento dos textos anteriores que são, por este motivo, a referência principal neste trabalho.

1.1.1 Imagem conceitual e definição conceitual

Iniciamos com uma reflexão sobre rigor no ensino da matemática, ou em outras palavras, sobre a precisão que a matemática proporciona em sua construção teórica e a tensão que esta causa, em seu ensino. Partindo da definição de conceitos, constrói uma base lógica sólida para a teoria matemática, que significa a construção de propriedades de seus objetos a partir do processo denominado dedutivo. Tall e Vinner (1981) ressaltam que “as realidades psicológicas são diferentes” de pessoa para pessoa, pois “existe uma estrutura cognitiva complexa na mente de cada indivíduo” (TALL E VINNER, 1981, p. 1). Como muitos conceitos matemáticos e conceitos com o mesmo nome podem ser encontrados por um indivíduo com outros significados em sua experiência na escola e fora da escola, a definição de um conceito pode produzir “uma variedade de imagens mentais pessoais quando um conceito é evocado”.

Buscando contemplar a realidade psicológica de um indivíduo, os autores observam que “a estrutura cognitiva total que dá significado ao conceito é muito maior do que a evocação de um único símbolo. É mais do que qualquer imagem mental, seja ela pictórica, simbólica ou de outra forma.” (TALL e VINNER, 1981, p.2) Durante os processos mentais de recordação e manipulação de um conceito, muitos outros processos associados são colocados em jogo, afetando, consciente e inconscientemente, o seu significado e uso.

Assim, eles usam o termo *imagem conceitual* “para descrever a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, que inclui todas as imagens mentais e propriedades e processos associados a ele.” (TALL e VINNER, 1981, p.2)

Prosseguem destacando que “ela [a imagem conceitual] é construída ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece.” (p. 2)

Para os autores, o desenvolvimento da *imagem conceitual* não precisa ser coerente em todos os momentos, referenciando-se em resultados de pesquisa na biologia que afirmam que o cérebro não funciona de um modo homogêneo e coeso:

> as entradas sensoriais excitam certas vias neuronais e inibem outras. Desta forma, diferentes estímulos podem ativar diferentes partes da imagem conceitual, desenvolvê-las de uma maneira que não necessariamente forma um todo coerente. (TALL e VINNER, 1981, p. 2).

Eles denominam a parte da imagem do conceito que é ativada em um momento particular como *imagem conceitual evocada*. Acrescentam que, “em diferentes momentos, imagens mentais aparentemente conflitantes podem ser evocadas.” (p. 2). Como um exemplo de situação em que isto pode acontecer, e retomando a adição de frações para ilustrar, ao efetuar a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ as crianças podem fazê-la corretamente fazendo $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, devido ao número 4 ser múltiplo do número 2; mas confrontando com a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, o método usado na segunda soma pode ser equivocado (por exemplo, multiplicar por 2 ou por 3 o numerador e o denominador da primeira fração, mantendo inalterada a segunda fração), pois 3 não é múltiplo de 2.

Tall e Vinner (1981) denominam *definição conceitual* (se ela existir) de um conceito

> ... a forma de palavras usadas para especificar um conceito .... pode ser aprendida por um indivíduo de uma forma mecânica ou mais significativa e relacionada com um maior ou menor grau com o conceito como um todo, podendo também ser uma reconstrução pessoal pelo estudante de uma definição. Ela é, então, a forma de palavras que o estudante usa para sua própria explicação de sua imagem conceitual (evocada). (p.2)

Com este entendimento, uma definição conceitual é pessoal, podendo ser ou não compartilhada em um grupo ou coerente com a definição matemática do conceito em questão. Os autores consideram que as experiências dos indivíduos, fora e dentro da escola, intervêm em seu modo de expressar os conceitos

> tanto a definição conceitual que é apresentada ao aluno quanto a que é construída por ele mesmo podem variar com o tempo. Desta forma, uma definição conceitual pessoal pode diferir de uma definição conceitual formal, sendo esta última uma definição conceitual que é aceita pela comunidade matemática em geral. (TALL e VINNER, 1981, pg. 2).

Ao discutir o papel das definições no ensino e aprendizagem da matemática, Vinner (1991) descreve três cenários diferentes que podem acontecer: a imagem conceitual se reconstrói e a definição conceitual é incorporada; a imagem conceitual permanece como antes, e a definição conceitual apresentada fica esquecida ou distorcida; a imagem conceitual permanece como antes, mas a definição conceitual apresentada é evocada, quando for solicitada. Para desenvolver seus argumentos, Vinner (1991) considera que a definição conceitual e a imagem conceitual como disjuntas, mas relacionadas. As relações entre elas, no entanto, levam Tall e Vinner (1981) a propor que a definição conceitual é parte da imagem conceitual:

> ... para cada indivíduo uma definição conceitual gera a sua própria imagem conceitual (o que poderia ser chamado a 'imagem da definição conceitual'). Isto é, claramente, uma parte da imagem conceitual. Para alguns indivíduos, ela pode ser vazia ou praticamente inexistente. Para outros, pode, ou não, ser coerentemente relacionada com outras partes da imagem conceitual. (ibid, p.2,3).

Para esclarecer estes pontos, Tall e Vinner (1981) exemplificam que a definição conceitual de uma função matemática pode ser considerada como sendo "uma relação entre dois conjuntos A e B, em que cada elemento de A está relacionado a somente um elemento de B." (TALL e VINNER, 1981, p.3). Mas os indivíduos que estudaram funções podem ou não se lembrar desta definição conceitual formal. Contudo, sua imagem conceitual pode incluir muitos outros aspectos, tais como

> a ideia de que uma função é dada por uma regra ou uma fórmula, ou talvez que várias fórmulas diferentes podem ser utilizadas em diferentes partes do domínio A. Podem haver outras noções, por exemplo, de a função ser pensada como uma ação que relaciona um **a** do domínio A até **f(a)** em B, ou

> como um gráfico, ou uma tabela de valores. Todos ou nenhum destes aspectos podem estar na imagem conceitual de um indivíduo. (TALL e VINNER, 1981, p.3).

Em referência ao ensino, respostas dos alunos, e programas, Tall e Vinner (1981) argumentam que

> um professor pode dar a definição formal e trabalhar com a noção geral por um tempo antes de passar longos períodos em que todos os exemplos são dados por fórmulas, pois, assim, a imagem conceitual sobre o conceito pode tornar-se mais restrita, envolvendo apenas fórmulas, enquanto que a definição conceitual é largamente inativa na estrutura cognitiva do aluno. (TALL e VINNER, 1981, p.3).

Uma situação como esta pode levar o aluno a operar satisfatoriamente com sua noção restrita adequada a um contexto restrito. Ou seja, ela pode resolver os problemas em contextos específicos. Porém, quando o estudante se deparar com as funções definidas em um contexto mais amplo, ele pode ser incapaz de lidar com elas. Para os autores, um dos possíveis causadores desse fato é o próprio programa de ensino, que, segundo eles, "tem sido responsável por esta situação infeliz." (TALL e VINNER, 1981, pg. 2 e 3)

Já a coerência e consistência da imagem conceitual em desenvolvimento pode acontecer que

> uma parte da imagem conceitual ou definição conceitual que pode entrar em conflito com outra parte da imagem conceitual ou da definição conceitual, chamado de fator de conflito potencial. Tais fatores nunca precisam ser evocados em circunstâncias que causam conflito cognitivo real, mas se eles são muito evocados, os fatores serão então chamados de fatores de conflito cognitivo. (TALL e VINNER, 1981, p.3).

Um exemplo sobre a expansão de conjuntos numéricos esclarece este fato:

> a definição de um número complexo x + iy como um par ordenado de números reais (x, y) e a identificação de x + i0 = (x, 0) como o número real x é um fator de conflito potencial no conceito de número complexo ... inclui um conflito potencial com a noção teórica de conjunto na qual o elemento x é distinto do par ordenado (x, 0). (TALL e VINNER, 1981, p. 3)

Em uma das investigações conduzidas sobre números e cujos resultados estão em (TALL, 1977b), o autor discute o fato de que alunos muitas vezes não consideraram um número real como $\sqrt{2}$ como sendo um número complexo; vários definiram números reais como "números complexos com parte imaginária zero." (TALL, 1991, apud, TALL, 1977b, p. 3) Assim $\sqrt{2}$ foi considerada como real e $\sqrt{2}$ + i0 como complexo. Estes foram convenientemente considerados como sendo entidades distintas ou a mesma, dependendo das circunstâncias, sem causar qualquer conflito cognitivo. Tall e Vinner (1981) ressaltam que esses fatores – os fatores de conflito potencial – só se tornam *fatores de conflito cognitivo* quando evocados simultaneamente. De qualquer modo, quanto ao papel do conflito na formação de conceitos, os autores expressam que uma criança não precisa ser exposta a conflitos referentes a diferentes métodos para solução de questões; ela simplesmente precisa saber utilizar a matemática adequada em cada ocasião ou contexto.

1.1.2 Visualização, intuição e rigor

A importância da visualização e da intuição precedendo o rigor em matemática é ressaltada em Tall (1991b) que argumenta que

> em pesquisa matemática, prova é a última etapa do processo. Antes que possa haver prova, deve haver uma ideia de que os teoremas são dignos de prova, ou que teoremas podem ser verdadeiros. Esta fase exploratória do pensamento matemático beneficia a construção de um quadro geral de relações que pode ser beneficiado por uma visualização. Não é por acaso que, quando achamos que entendemos algo, dizemos ‘ah, entendi!’[1] (TALL, 1991b, p.2).

Tall considera que há um lado negativo na visualização, porque

> *figuras* podem, muitas vezes, sugerir falsos teoremas. Por exemplo, acreditou-se no século XIX que a funções contínuas tinham no máximo um número finito de pontos onde elas podem ser não-diferenciáveis, porém a ideia que uma função poderia ser contínua em toda parte e não-diferenciável em toda parte era inaceitável. (TALL, 1991b, p.3).

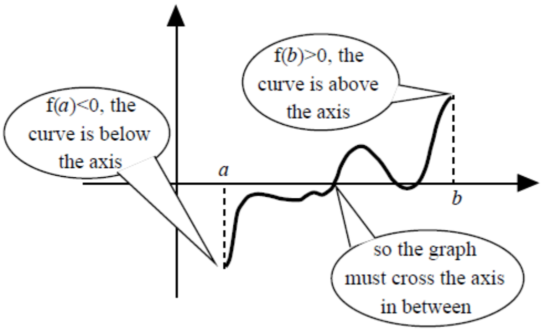
Por outro lado, a visualização já foi utilizada e bem aceita para compor uma prova:

> métodos gráficos eram muitas vezes usados para provar teoremas analíticos. Por exemplo, foi considerado como satisfatório para dar uma prova visual do teorema do valor intermediário que uma função contínua no intervalo [a, b] assume todos os valores de f entre f(a) e f(b). A curva foi considerada como um ‘fio contínuo’ de modo que se for negativo em algum lugar e positivo em algum outro lugar, ela deve passar pelo zero em algum lugar entre esses dois pontos. (TALL, 1991b, p.3).

A figura a seguir ilustra uma situação descrita na citação anterior:

[1] A expressão “ah, entendi!” é a tradução de “Oh, I see.”, que manifesta uma relação de ver para entender. O texto original diz: “In mathematical research proof is but the last stage of the process. Before there can be proof, there must be an idea of what theorems are *worth* proving, or what theorems might be true. This exploratory stage of mathematical thinking benefits from building up an overall picture of relationships and such a picture can benefit from a visualization. It is no accident that when we think we understand something we say “oh, I *see*!”.” (TALL, 1991b, p.2)

Figura 1: o teorema do valor intermediário



Fonte: Tall (1991b, p.3)

No entanto, a sofisticação da matemática a ser estudada fornece exemplos em que a visualização pode gerar concepções errôneas nos alunos. Por exemplo, ao considerarmos

> ... a função **f (x) = x² - 2** definida somente nos números racionais, ela será negativa para **x = 1**, e positiva para **x = 2**, mas não existe um número racional **a** para o qual **f(a) = 0**. Assim, as capacidades da visualização parecem falhar neste caso. (TALL, 1991b, p.3).

A conjectura do pesquisador é a de que a fonte dos problemas sejam advindas do "indivíduo que tem experiências inadequadas com os conceitos que o impede de ter intuições adequadas." (Tall, 1991b, pg. 3). Em outras palavras, entendemos que, no exemplo anterior, o conhecimento sobre as hipóteses do Teorema do valor Intermediário e as noções de continuidade de funções e da reta real tornam-se essenciais para que a visualização seja utilizada de acordo com o teorema.

Ainda mais sutil que um entendimento sobre visualização é o conceito de intuição. Embora evocado com frequência no senso comum, muitos teóricos apresentaram uma definição para o conceito. Tall define intuição como um dos modos de pensamento de um indivíduo, descrevendo sua concretização como um processo em oposição ao pensamento lógico dedutivo matemático. Ele diz que

> a existência de diferentes modos de pensamento sugere uma distinção entre os processos de pensamento intuitivo e o pensamento lógico, que é exigido pela matemática formal. Intuição envolve o processamento paralelo bastante distinto do processamento sequencial passo a passo necessário na dedução rigorosa. Uma intuição chega inteira na mente e pode ser difícil separar suas componentes em uma ordem lógica dedutiva. (TALL, 1991b p.4).

Ele afirma ser necessária uma abordagem que apele para a intuição e que se una ao rigor, buscando justificar suas afirmações em estudos da biologia sobre o funcionamento do cérebro. Ele considera que, já no início da década de noventa,

> há muita evidência para mostrar que a forma mais poderosa de usar o cérebro é a de integrar ambas as formas de processamento: apelar para o (metafórico) lado direito do cérebro para dar vínculos globais e padrões unificados, enquanto que se deve, também, analisar as relações e construir inferências lógicas entre os conceitos, o que está no lado esquerdo. Isso requer uma nova síntese do conhecimento matemático que dá o devido peso às duas formas de pensamento. Em particular, ele precisa de uma abordagem que apela para a intuição e ainda pode ser dada uma formulação rigorosa. (TALL, 1991b, p. 4).

Vale observar que a noção de intuição expressa por Tall não se reduz a uma qualidade epistemológica, ou seja, inerente a um conteúdo; mas sim a uma qualidade da relação de um indivíduo com um conteúdo específico. De modo coerente com a noção de imagem conceitual, que se modifica ao longo das experiências com a matemática dentro e fora da escola, Tall constrói uma justificativa para a afirmar que a intuição, como uma "ressonância global no cérebro" irá depender "da estrutura cognitiva do indivíduo, que por sua vez também é dependente da experiência anterior do indivíduo". (ibid, p.5) As dificuldades encontradas no cálculo, naquela década, são justificadas por Tall com base neste argumento:

> uma das razões pelas quais o ensino do cálculo está em desordem é que os conceitos matemáticos que especialistas consideram como intuitivos não são 'intuitivos' para os alunos. A razão é bastante simples. Intuição é uma ressonância global no cérebro e que depende da estrutura cognitiva do indivíduo, que por sua vez também é dependente da experiência anterior do indivíduo. Não há razão para supor que um novato tenha as mesmas intuições como um especialista, mesmo considerando percepções visuais aparentemente simples. (TALL, 1991b, p. 5).

Já naquela década, o autor propôs que a utilização de recursos visuais nos ajuda a apropriar uma intuição a serviço da lógica dedutiva, construindo suas justificativas em sua hipótese de pesquisa, ou seja, baseando-se em estudos sobre o funcionamento do cérebro, que à época distinguiam entre as funções do lado direito e do lado esquerdo do cérebro:

> a ideia é apelar para o poder da padronização visual do lado direito do cérebro (metafórico), de tal forma que ele estabeleça intuições adequadas para o serviço da dedução lógica do lado esquerdo. (TALL, 1991b, p. 8)

Ele critica os profissionais da educação, dizendo que se os profissionais são tão incapazes de dar uma explicação significativa de um conceito, que esperança há para os seus alunos? Tall (1991b) diz que “a resposta a esta pergunta está no uso efetivo de visualização que enriquece a intuição para uma prova formal.” (p.8)

Para concluir, o autor discorre sobre relações entre intuição e rigor no ensino de matemática. Ele considera, a partir de sua experiência como professor e pesquisador, que a visualização pode fornecer intuições poderosas e que ao introduzir adequadamente visualizações de ideias matemáticas complicadas, é possível construir uma imagem muito mais ampla das formas possíveis nas quais os conceitos podem ser percebidos, oferecendo assim “intuições muito mais poderosas do que em uma abordagem tradicional.” (TALL, 1991b, p. 20). Ele acrescenta ainda que não se pode distanciar da conexão entre intuição e rigor. Quando o professor explora exemplos que funcionam e exemplos que falham em uma sala de aula, os alunos podem ganhar intuições visuais necessárias para construir ideias formais. Assim, para o autor, “intuição e rigor não precisam estar em desacordo um com o outro. Ao fornecer um contexto adequadamente poderoso, a intuição conduz naturalmente ao rigor da prova matemática.” (ibid, p.20)

Parece não haver como estudar o tema intuição sem nos referenciarmos em Efraim Fischbein, pelo número de citações à sua produção, quando se trata deste assunto. Ele foi um professor e pesquisador em Matemática e em Psicologia e desenvolveu estudos relevantes sobre o tema. Em um artigo seu, já em 1994, Fischbein traz suas reflexões sobre a matemática e propõe que ela deve ser considerada a partir de dois pontos de vista:

> (a) a matemática como um corpo rigoroso formal e dedutivo do conhecimento como expostos em tratados e livros didáticos de alto nível; (b) a matemática como uma atividade humana. (FISCHBEIN, 1994, p. 231).

O autor ressalta a importância de os alunos compreenderem que a matemática é, essencialmente, uma atividade humana, ou seja, inventada por seres humanos, cujo processo de criação “implica em momentos de iluminação, hesitação, aceitação e refutação” (FISCHBEIN, 1994, p. 231) e não apenas numa construção sequencialmente formal e dedutiva. Esse processo é defendido por ele para que os alunos não apenas entendam as demonstrações mas também entendam intuitivamente seus resultados e validações.

Neste artigo, ele considera a interação entre três componentes básicos da matemática como uma atividade humana: “o formal, o algorítmico e o intuitivo.” (FISCHBEIN, 1994, p. 231) O aspecto formal refere-se aos axiomas, definições, teoremas e provas, os quais, segundo o autor, “têm de penetrar como componentes ativos no processo de raciocínio” (ibid, p.232), pois eles tem que ser inventados ou aprendidos, organizados, verificados e usados ativamente pelo aluno. Ele destaca que esses conteúdos são aquisições espontâneas do aluno.

Sobre o componente algorítmico, ele diz que “é uma mera ilusão acreditar que, sabendo axiomas, teoremas, provas e definições como eles são expostos formalmente em livros didáticos, um aluno se tornará capaz de resolver quaisquer problemas matemáticos.” (FISCHBEIN, 1994, p. 232). Ele chama a atenção para o fato de que se uma pessoa entender um certo sistema de conceitos, isso não quer dizer que ela espontaneamente tenha se tornado capaz de usá-los na resolução de uma classe correspondente de problemas, pois precisamos de habilidades e não só compreensão; e tais habilidades só podem ser adquiridas por prática, treinamento sistemático. O autor, ainda, salienta que

> a recíproca também é por vezes esquecida, uma vez que o raciocínio matemático não pode ser reduzido a um sistema de resolução de procedimentos, pois o mais complexo sistema de habilidades mentais permanece congelado e inativo quando se tem de lidar com uma situação fora do normal. (ibid, p. 232).

ou seja, quando não se construiu o conhecimento formal sobre o assunto.

O terceiro componente de um raciocínio matemático produtivo no entender de Fischbein (1994) é a intuição, distinguindo entre: cognição intuitiva, compreensão intuitiva, solução intuitiva.

O autor considera como *cognição intuitiva* um tipo de cognição que é aceita diretamente, sem a sensação de que seja necessário qualquer tipo de justificação. Ele complementa dizendo que uma cognição intuitiva é “caracterizada, em primeiro lugar, por (aparente) auto-evidência.” Fischbein considera como auto-evidentes, declarações como: “O todo é maior do que qualquer das suas partes”; “Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma, e apenas uma, reta paralela a essa.”; “O caminho mais curto entre dois pontos é uma linha reta.” (FISCHBEIN, 1994, p. 232) Ele, ainda, destaca que se o entendimento cognitivo for aparentemente auto-evidente e intuitivamente aceito, ele trará uma convicção e confiança consideráveis sobre as nossas interpretações e estratégias de raciocínio.

Porém, em sua perspectiva, as intuições podem desempenhar um papel de facilitador no processo de instrução; embora muitas vezes, contradições podem aparecer: intuições podem se tornar barreiras na aprendizagem, no processo de resolução ou de invenção, pois a relação entre o formal e os aspectos intuitivos de raciocínio matemático na aprendizagem, compreensão e resolução de processos é muito complexa e, às vezes, há certa congruência entre os processos. No entanto, muitas vezes, “os fenômenos conflituosos podem aparecer nos levando a equívocos, erros sistemáticos e, até, a obstáculos epistemológicos (Bachelar).” (FISCHBEIN, 1994, p. 234)

Após essas definições, Fischbein dá alguns exemplos em que a intuição funciona na construção da teoria formal e, também, alguns exemplos onde conflitos cognitivos podem aparecer gerando equívocos nas resoluções dos problemas apresentados.

Como efeito de uma relação conflituosa entre a definição formal e a representação intuitiva, no caso específico do conceito de limite, vários equívocos podem surgir. Por exemplo, a interpretação que o aluno vai conferir ao termo “tende a” em relação ao conceito de limite depende do modelo intuitivo aprendido. Segundo o autor, o mesmo pode significar: “se aproximar (eventualmente, ficar longe dele); se aproximar (sem alcançá-lo); se aproximar (alcançá-lo); ou, se assemelhar (tais como ‘um azul tende para violeta’).”(FISCHBEIN, 1994, pg. 239) Como a nossa mente não está naturalmente adaptada à conceituação do infinito, o conceito de limite pode se tornar contraditório.

Outro tipo de erro comum, citado pelo autor, em que uma técnica de resolução não obedece às regras formais e é, assim, aplicado de forma errada, aparece no exemplo a seguir:

Figura 2: Erro na utilização das propriedades de divisão de frações

$$\frac{an}{an+by} = \frac{\cancel{an}}{\cancel{an}+by} = \frac{1}{by}$$

Fonte: FISCHBEIN (1994, p. 232)

Em sua análise, o autor destaca que

> o aluno tem que entender a base formal (definições e teoremas) que justifica um algoritmo. É a aprendizagem cega de algoritmos que conduz a estes tipos de utilização indevida. Na falta de uma compreensão clara da estrutura formal e da justificação, a semelhança superficial leva a problemas de generalizações erradas. (FISCHBEIN, 1994, p. 242)

Este exemplo ilustra a importância de não se ter como único objetivo a aquisição de habilidades dos procedimentos, mas, também, de os alunos consolidarem o conhecimento formal.

Fischbein (1994) traz ainda uma reflexão sobre como as figuras geométricas, e as imagens em geral, ocupam uma posição especial na atividade de pensar. Ele traz o seguinte questionamento:

> O que é uma reta, um triângulo, uma esfera, ou um cubo? Certamente, eles são imagens. Elas possuem uma determinada forma. Eles são entidades abstratas, ideais. Elas possuem uma espécie de universalidade que caracteriza apenas conceitos. Cada propriedade de uma figura geométrica é derivada da definição da respectiva figura, a partir da estrutura axiomática a que a mesma pertence. (FISCHBEIN, 1994, p. 242)

Ele conclui que as figuras geométricas, embora imagens espaciais, incorporam qualidades que caracterizam apenas conceitos matemáticos, tais como idealidade, abstração, universalidade, dependência da definição, que correspondem a uma espécie de perfeição que não existe na natureza. No raciocínio geométrico, lidamos com figuras que não são meras imagens, mas sim entidades mentais idealizadas completamente subordinadas a restrições axiomáticas. Podemos afirmar que uma figura geométrica é um objeto mental que não é redutível a conceitos ou imagens usuais:

> um conceito é uma ideia que, estritamente falando, não possui qualidades figurativas. Por outro lado, uma figura geométrica não é uma mera imagem, porque todas as suas propriedades são, estritamente, de forma rigorosa imposta por uma definição. A figura geométrica é, ao mesmo tempo, uma figura e um conceito. O desenho de um círculo ou um triângulo é um modelo gráfico de uma figura geométrica, e não a própria figura geométrica. (FISCHBEIN, 1994, p. 242)

Essas ideias se tornam consideravelmente relevantes neste trabalho, pois iremos pesquisar os aspectos visuais e gráficos do TFC. Representações visuais dos conceitos serão utilizadas, tanto na prova matemática do teorema, quanto na resolução de problemas; devendo ser entendidos como modelos gráficos, e não o próprio conceito.

Com tudo isso, o autor ressalta que a principal reivindicação de seu trabalho foi a de destacar a importância, no ensino de matemática, dos três aspectos fundamentais da matemática, como atividade humana: o formal, o algorítmico, e o intuitivo, e como a interação entre eles é relevante, cognitivamente, para os alunos. Porém, ele salienta que às vezes, esses três componentes não conduzem à aprendizagem. Às vezes, um esquema de solução é aplicado adequadamente por causa de semelhanças superficiais em desrespeito das restrições formais. Outras vezes, um esquema de resolução de problemas, profundamente enraizada na mente do estudante, é erroneamente aplicado, apesar de uma compreensão intuitiva potencialmente correta. Mas, geralmente,

> é a interpretação intuitiva baseada em uma experiência primitiva e limitada, mas fortemente enraizada, que aniquila o controle formal ou os requisitos da solução algorítmica, e, portanto, distorce ou até mesmo bloqueia uma reação matemática correta. (FISCHBEIN, 1994, p. 244).

Em sua conclusão, ressalta que deve existir uma colaboração íntima entre psicologia e experiência didática para obtermos uma condição básica para o desenvolvimento da educação matemática.

Outro autor que investiga o conceito de intuição, e o faz relacionando-a com a ideia de rigor no ensino de cálculo e de análise, é o pesquisador Frederico Reis que, em seu artigo *Rigor e intuição no ensino de cálculo e análise*, de 2009, utilizou as ideias de intuição de Perminov (1988) que são dividas em cinco categorias, a saber, a empírica, a objetiva, a lógica, a categórica e a conceitual para definir intuição em sua pesquisa. Nessa pesquisa, Reis (2009) "busca compreender melhor a forma como o rigor e a intuição são explorados/entendidos no ensino de cálculo e análise." (p. 83). Ele conduz sua pesquisa a partir de uma análise histórica do desenvolvimento da ideia de rigor na matemática e como ele se relaciona com a intuição que, historicamente, se mostra presente na construção dos resultados e no pensamento matemático. Além disso, ele observou que alguns livros texto de cálculo abordam os conteúdos de um ponto de vista mais intuitivo, já os de análise utilizam o rigor matemático para construir sua estrutura matemática.

Ele conclui seu trabalho dizendo "que intuição e rigor são dimensões interdependentes, uma não podendo existir sem a outra, embora possamos, equivocadamente, privilegiar uma delas em detrimento da outra." (p. 93). Com isso, ele adverte-nos quanto à medida do uso de rigor e de intuição no ensino dizendo que o primeiro deve complementar o segundo: "O rigor pode e dever complementar a intuição, nunca sobrepujá-la." (Reis, 2009, p. 94). Além disso, destacou que "o rigor, num outro nível, se faz presente na constituição de conceitos elementares, assim como a intuição, sob múltiplas faces, permeia o desenvolvimento de ideias avançadas.” (ibid, p. 94).

Vemos, então, que a pesquisa feita por Frederico Reis fornece valiosas informações para esta pesquisa; a saber, a relação mútua entre rigor e intuição como passo fundamental para o ensino e aprendizagem do cálculo e da análise e importância da intuição para o desenvolvimento de ideias matemáticas.

1.2 Revisão de literatura: o ensino e aprendizagem do TFC

Nesta seção trazemos pesquisas desenvolvidas no Brasil sobre o ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Essa revisão faz-se necessária visto que é importante situar a presente pesquisa no cenário brasileiro de investigação, procurando, assim, desenvolvê-la de modo autêntico, de modo a contribuir para a comunidade matemática. Tratando-se de uma dissertação de mestrado, a investigação pode reproduzir métodos e questões de trabalhos anteriores, cuidando, no entanto dos modos com que a investigação em desenvolvimento possa ampliar o conhecimento já existente sobre o objeto de estudo.

Dentre as pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) que compõem a revisão bibliográfica deste estudo, destaco o trabalho de Segadas (1998). Seu trabalho tem grande relevância no cenário brasileiro, tendo sido o primeiro a enfocar o tema. É referência de diversos trabalhos que se seguiram com o mesmo objeto de estudo, como Anacleto (2007), Grande (2013), Andersen (2011), Picone (2007), Campos (2007), dentre outros. Vamos inverter a ordem cronológica de desenvolvimento destas pesquisas encerrando esta seção com a pesquisa de Segadas (1998), expondo sua questão de pesquisa, sua metodologia e seus resultados, por serem referências para a metodologia e análise dessa investigação.

A pesquisa de Andersen (2011) tem por foco a dificuldade da compreensão da expressão algébrica da “função área”, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{dt}$. Ela aplicou e analisou atividades envolvendo 14 alunos de Licenciatura em Matemática de uma universidade particular de São Paulo, concluintes dos 2.° e 3.° semestres. Andersen se interessa por “quais processos mentais intervêm e são combinados quando se insere atividades que se apoiam em figuras construídas pelo aluno tanto em folha de papel quanto pelo *software Winplot2* ao se tratar da expressão $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{dt}$?” (Andersen, 2011, p. 17)

A pesquisa, qualitativa, fundamentou-se em Dreyfus (1991) e no Pensamento Matemático Avançado (PMA), utilizando-se da engenharia didática como metodologia de pesquisa. Segundo Almouloud (2007), quando a engenharia didática é

> vista como metodologia de pesquisa, ela é caracterizada por um esquema experimental com base em “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino e, também, caracteriza-se como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre a análise a priori e a análise a posteriori. (ANDERSEN, 2007, apud ALMOULOUD, 2007, p. 171).

Em seu referencial teórico, Andersen (2007) traz resultados de pesquisas que apontam que a forma de se construir um conhecimento considerando o conteúdo como pronto e acabado ou utilizando um método de ensino baseado no modelo exposição teórica – exemplos – exercícios interfere de modo negativo no desempenho dos alunos, favorecendo a algoritmização da Matemática. Segundo as pesquisas mencionadas, tal concepção de ensino de matemática impede que o aluno pense e raciocine ricamente sobre os conteúdos, o que prejudica consideravelmente o entendimento pleno dos conceitos e a exploração de atividades que possibilitem elaborar hipóteses e conjecturas sobre objeto de estudo.

Os participantes já haviam cursado as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e II em que são abordados assuntos como limite e derivada, mas sem ter ainda contato com o tema integral. As atividades elaboradas para esta pesquisa procuravam levantar questões e realizar conjecturas sobre a expressão $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{dt}$, no sentido de favorecer a compreensão das ideias centrais que envolvem o TFC.

A pesquisadora selecionou 14 alunos para participar das atividades, os quais foram divididos em sete duplas. Foram realizadas quatro sessões com atividades, e cada sessão pode ser dividida em duas partes:

- a primeira atividade propunha questões que exploravam a função área, em que os alunos, a partir de uma figura limitada pelo gráfico de uma função polinomial do primeiro grau e pelo eixo das abscissas, deveriam expressar algebricamente a área da região limitada em função da abscissa. Outra questão apresentava uma função polinomial do segundo grau, em que os alunos deveriam obter a área por aproximações de figuras retângulares;
- a segunda parte apresentava atividades utilizando o *software Winplot* explorando a soma de Riemann para integrais, além de questões propondo conjecturas sobre a

expressão que representava o TFC em que se afirma que se $\mathbf{F(x)} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f(t)dt}$, então **F'(x) = f(x)**.

Como resultados da pesquisa, a autora destaca que os alunos apresentaram dificuldades em distinguir as funções derivada **f** e primitiva **F**, principalmente no que diz respeito ao avaliar qualitativamente a função **F**. Porém, muitos alunos conjecturaram que, se $\mathbf{F(x)} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f(t)dt}$, então **F'(x) = f(x)**, ou seja, que integração e derivação são operações inversas, embora alguns alunos não tenham percebido a necessidade de a função **f** ser contínua.

Outro trabalho importante na área foi a tese de André Lúcio Grande, de 2013, que teve por objetivo realizar um estudo didático e epistemológico do TFC. Sua motivação para começar esse estudo surgiu em uma atividade proposta pelo professor da disciplina Didática da Matemática do mestrado que esse pesquisador cursava, em que os alunos deveriam, a partir da representação gráfica de uma função, identificar o gráfico da sua função primitiva. Os estudantes envolvidos em tal atividade, dentre eles o autor, demonstraram muita dificuldade na resolução da questão, não sendo capazes de associar os gráficos de uma função ao de sua primitiva. Assim, ele se questionou: "Quais seriam os fatores e os conceitos relacionados que poderiam contribuir para tais dificuldades?" (GRANDE, 2013, p. 24)

Após prosseguir suas pesquisas nessa área de ensino, o autor percebeu que algumas pesquisas concluídas e outras em andamento no seu grupo de estudo no mestrado apresentavam o TFC como tema, entretanto um número reduzido dessas pesquisas propunha uma intervenção no ensino que contribuísse para a compreensão do teorema e a ligação existente entre as operações de derivação e integração.

Assim, refletindo sobre o assunto e pensando no cenário do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), considerou temas fundamentais como as operações de integração e questionou se "seria possível elaborar uma sequência de ensino que fizesse emergir e evidenciar a ligação entre esses dois conceitos fundamentais do Cálculo?" (GRANDE, 2013, p. 24). Seu projeto de pesquisa busca respostas para tal indagação. Realizou uma intervenção de ensino na qual procurou fazer emergir a relação entre as operações de integração e derivação e as condições para que essa relação se estabeleça. Baseando-se em possíveis situações-problema que auxiliassem na compreensão nessa relação, buscou fazer emergir tal conexão, que constitui a essência do teorema. No referencial teórico foram utilizadas as ideias relacionadas ao uso da intuição e do rigor na construção do conhecimento matemático, citando Henri Poincaré (1995), que considera as cognições intuitivas fundamentais na elaboração de conjecturas para posteriormente formalizarem-se os conceitos. Como referência teórica, ele utiliza as categorizações da intuição e as inter-relações entre os componentes: formal, algorítmico e intuitivo nas atividades matemáticas, de acordo com Efraim Fischbein (1994).

A questão inicial é reconstruída, buscando também avaliar qual o alcance que uma intervenção desse tipo traz para o ensino e aprendizagem do TFC:

> uma intervenção de ensino baseada nos princípios da intuição contribui para a compreensão da relação existente entre as operações de integração e derivação, por meio de uma situação-problema que propicie emergir e evidenciar tais relações? (GRANDE, 2013, p. 32).

A pesquisa é qualitativa, tendo como procedimentos metodológicos a elaboração de uma intervenção de ensino, bem como a análise das resoluções das questões respondidas por 14 estudantes do curso de Tecnologia de uma faculdade pública do Estado de São Paulo, com o auxílio do *software* GeoGebra. Para análise das resoluções, além do referencial teórico citado, foram adotados os trabalhos de Tall (1991b) sobre o papel da visualização no ensino do Cálculo e as inter-relações com a intuição e o rigor.

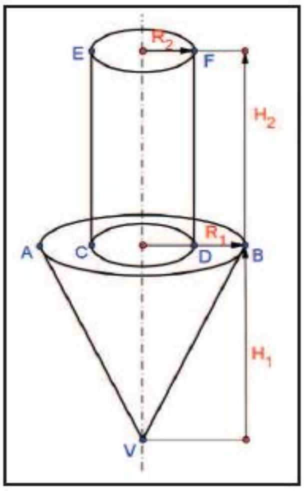
No tocante ao ensino e aprendizagem do TFC, o autor percebeu, pelos resultados de algumas pesquisas descritas, que na maioria dos casos em um curso de Cálculo não se dá um tratamento da relação mútua entre as operações de integração e derivação, seja por meio de atividades propostas pelos professores, ou até mesmo na abordagem dos livros didáticos que não enfatizam o tema. O autor diz, ainda, que a ausência de exploração dessa relação e, também, a escassez da utilização do registro gráfico em sua abordagem podem contribuir para a incompreensão, pelos estudantes, deste resultado do teorema.

Analisando a questão da visualização no ensino e aprendizagem do Cálculo e sua relação com a intuição e o rigor com o desenvolvimento ou a manifestação das intuições a partir das explorações ou representações proporcionadas pela atividade com o GeoGebra. Constatou que a utilização deste software permitiu explorar situações diversas, tais como a criação de um modelo para uma situação-problema. Este modelo, na ilustração na figura 1 a seguir, apresentou

> questões relacionadas ao cálculo do volume e da área da seção transversal de um sólido que foi composto por um cilindro circular apoiado sobre um cone circular de base concêntrica ao cilindro. (GRANDE, 2013, p. 281)

A situação-problema fez emergir questões relacionadas com o Teorema Fundamental do Cálculo, tais como a continuidade da função, a ideia de acumulação e a variação entre as grandezas.

Figura 3: cilindro circular apoiado sobre um cone circular de base concêntrica ao cilindro



Fonte: Grande (2013, p. 311)

As atividades foram realizadas em um ambiente informatizado

> tornando esse modelo ‘concreto’ e possibilitando aos alunos acessar, interagir, manipular, e fazendo com que essas ações se tornassem as grandes responsáveis pela exploração das suas cognições intuitivas. (GRANDE, 2013, p. 290).

O conceito de *cognições intuitivas* foi apresentado em seções anteriores deste capítulo; dentre suas principais características, dadas por Fishbein, Grande utiliza: “auto-evidência; convicção intrínseca; efeito coercitivo; globalidade.” (GRANDE, 2013, p. 105)

O autor considera a interação dos alunos com o *software*

> a grande responsável não somente pela visualização e concretização dos conceitos envolvidos, como também permitiu que os componentes intuitivo, algorítmico e formal fossem inter-relacionados e confrontados” (ibid, p.290)

A iteração com o software permitiu ainda testar, confirmar e validar as proposições apresentadas. Assim, o autor da pesquisa considera que a interação entre os participantes e o GeoGebra constituiu um fator preponderante para a realização das tarefas no que se refere à exploração intuitiva realizada pelos alunos. Outro resultado importante encontrado na resolução das tarefas na intervenção de ensino diz respeito à

> melhora significativa apresentada pelos alunos na compreensão do conceito de integral por meio de acumulação, desprendendo-se da interpretação geométrica de integral como sinônimo de área, e consequentemente sua relação com a questão de variação ligada ao conceito de derivada, fato que permite inferir que esse tipo de abordagem colabora na compreensão da essência do TFC. (ibid, p.282)

A análise destacou um desempenho melhor dos estudantes nas atividades matemáticas, quando o eixo das interações entre os componentes algorítmico, formal e intuitivo é trabalhado em conjunto com o eixo relacionado à questão da visualização no ensino e aprendizagem do Cálculo. Ao final das tarefas, observou-se que os estudantes começaram a mostrar indícios da preocupação em relacionar a intuição com o rigor na construção do conhecimento matemático.

Respondendo especificamente à questão de sua pesquisa, de acordo com a análise do material empírico produzido, a intervenção promoveu não somente a construção de relações entre as operações de integração e derivação pelos sujeitos envolvidos na pesquisa, como também refinou e permitiu a discussão de alguns conceitos já interiorizados por meio da exploração das cognições intuitivas, até atingir o estágio do rigor. Consequentemente, sobre o alcance da sequência didática desenvolvida com uma abordagem fundamentada nos princípios da intuição, "ela revelou-se essencial na organização das ideias e conceitos desenvolvidos que posteriormente foram refinados com o formalismo matemático agregado com o rigor necessário." (GRANDE, 2013, p. 291)

O trabalho de Scucuglia (2006) insere-se em um panorama na educação matemática que sinaliza para uma utilização crescente da informática no ensino. A pesquisa é qualitativa e busca responder "Como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo?" (SCUCUGLIA, 2006, p. 19). Apoia-se na perspectiva epistemológica Seres-Humanos-com-Mídias apresentada em Borba e Villareal (2005), que evidencia o papel das tecnologias no processo de produção de conhecimento, e "propõe que o conhecimento não é produzido somente por humanos ou por coletivos humanos, mas por Seres-Humanos-com-Mídias" (ibid, p.18). O autor realizou experimentos de ensino com duplas de estudantes do primeiro ano da graduação em matemática[2]. Os encontros foram filmados. Essa escolha se deu, segundo o autor, devido aos elementos que constituem os processos de experimentação/demonstração de Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas, que são

[2] Os alunos são estudantes da UNESP, da cidade de Rio Claro, em São Paulo.

complexos e que “envolvem uma diversidade de vertentes provenientes de falas, gestos, formas de utilizar determinada mídia na investigação matemática, etc” (ibid, p.22), fazendo-se necessário o registro desses elementos. Além disso, o autor tem por foco a demonstração, que, “está articulado à questão da prova em matemática com informática e, principalmente, à questão da experimentação com tecnologias e dedução.” (ibid, p.19)

As duplas realizaram duas sessões de experimentos de aproximadamente duas horas cada. Primeiramente, investigaram os conceitos de Soma de Riemann e Integração Definida (Primeira a Terceira Atividades) e, em seguida, o Teorema Fundamental do Cálculo (Quarta e Quinta Atividades). Analisando os vídeos da primeira sessão de Experimentos de Ensino, o pesquisador notou que a utilização de programas e comandos da Calculadora Gráfica TI-83 condicionou o pensamento das estudantes na investigação dos conceitos de Soma de Riemann e Integração (conceitos intrinsecamente inerentes ao TFC). Na segunda sessão, explorando exemplos de funções polinomiais com o comando de integração definida da Calculadora Gráfica, os “coletivos pensantes formados por Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas-Lápis-e-Papel” formularam conjecturas sobre o TFC.

Durante o processo de demonstração deste Teorema, foram utilizadas noções intuitivas e notações simplificadas, antes que fosse usada a simbologia já padronizada pela matemática acadêmica. Essa abordagem possibilitou o engajamento gradativo das estudantes em “discussões matemáticas dedutivas” a partir dos resultados obtidos “experimentalmente” com as atividades propostas na pesquisa. Além disso, para Scucuglia (2006), a visualização atuou como auxílio ao processo de pensamento matemático, evidenciando a formulação de inferências, conjecturas e justificativas sobre determinado problema.

Outro fator relevante no processo de ensino-aprendizagem do cálculo é a utilização de livros-texto, que são bases para os estudos dos alunos e, talvez, até dos professores ao prepararem suas aulas. Por este motivo analisamos o trabalho de Campos (2007), que pesquisou a maneira como quatro livros didáticos, sendo um deles de análise real, tratam do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), procurando explicar como os autores, em seus textos, exploram a coordenação dos registros de representação (DUVAL, 2003, 1999).

O autor traz como principais resultados que os livros didáticos *Curso de Análise* (LIMA, 1982), *Um Curso de Cálculo* (GUIDORIZZI, 2001), *Cálculo* (STEWART, 2012), *Um Curso Universitário* (MOISE, 1970) não discutem explicitamente a questão referente à inter-relação entre derivada e integral, que é fundamental para o entendimento do TFC. Nos prefácios de suas obras, alguns destes autores reiteram a importância da representação gráfica na abordagem dos conceitos, sem, entretanto, explorá-los de forma incisiva no desenvolvimento de seu livro.

Outro trabalho pesquisado que também tem contribuições relevantes para a minha pesquisa é a dissertação de Picone (2007). Fundamentada, como a anterior, na teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (1999), o pesquisador investiga quais registros de representação semiótica são mobilizados por professores no ensino do TFC; bem como se consideram importante a coordenação desses registros e, ainda, se exploram a visualização, utilizando representações gráficas.

Com esse objetivo, a pesquisadora elaborou e aplicou um questionário em duas etapas, seguido por uma entrevista com oito professores de Cálculo de instituições públicas e particulares do Estado de São Paulo; quatro delas públicas e outras quatro privadas.

A autora elaborou um questionário retomando o trabalho de Segadas (1998), em duas etapas. A primeira, com oito questões, visou identificar o perfil de cada professor participante da pesquisa: sua formação profissional, experiência docente na disciplina de Cálculo, livros didáticos que utiliza e como aborda o TFC. Uma segunda etapa, constituída por nove questões, teve por objetivo investigar que enfoque era dado ao TFC pelos professores de Cálculo no tocante à conexão entre derivação e integração, e sua utilização como ferramenta para o cálculo de integrais definidas.

Após a análise das respostas ao questionário, os professores foram entrevistados com a intenção de se

> obter alguns detalhes que aprofundassem as respostas obtidas nas etapas anteriores, como, por exemplo, identificar a exploração da inter-relação entre as variáveis visuais pertinentes ao analisar as situações propostas no questionário. (PICONE, 2007, p. 52).

Como resultados, Picone (2007) reitera que os professores entrevistados consideram pertinente a coordenação simultânea dos registros envolvidos; entretanto alguns não relevaram sua importância no ensino do TFC.

Ao analisarem uma situação que explora a conexão entre a derivada e a integral graficamente, alguns afirmaram que não costumam propor esse tipo de atividade aos seus alunos e, nesse caso, as justificativas foram diversas; porém em nenhum momento apontaram para a não importância de serem propostas.

A autora conclui que o TFC pode ser utilizado como uma ferramenta, mas que essa conexão não é explorada graficamente pelos professores entrevistados. Alguns professores sugerem que deve ser dada uma visão do TFC “intuitiva” precedendo à demonstração e formalização, explorando propriedades entre os gráficos das funções primitiva e derivada.

Essa visão, denominada por alguns professores entrevistados por Picone (2007) como “intuitiva”, diz respeito a explorar, inicialmente nas aulas de Cálculo, o registro gráfico na construção dos conceitos e contrapor em seguida esse registro com o registro algébrico. Este último seria usado para os alunos confirmarem ou não o conceito que eles já possuem, intuitivamente desenvolvido utilizando visualização geométrica.

Além disso, a pesquisadora sugere que futuras pesquisas busquem responder à pergunta: “por que mais professores de Cálculo, no momento do ensino do TFC, não o exploram graficamente?” (PICONE, 2007, 118). Como a presente pesquisa trata da exploração gráfica do TFC, torna-se relevante nesse trabalho a citação da questão colocada já em 2007. Porém, não iremos investigar o ensino segundo perspectiva do professor, como Picone (2007), mas a aprendizagem, focando o aluno.

Com este foco, Anacleto (2007) que teve por objetivo investigar os conhecimentos mobilizados por alunos que estudaram o Teorema Fundamental do Cálculo. A intenção era avaliar se a mobilização desses conceitos se deu de forma adequada na resolução de questões específicas em que a aplicação dos conceitos relacionados era necessária. A pesquisa fundamentou-se nos pressupostos teóricos da dialética ferramenta-objeto e jogos de quadros de Régine Douady (1987). Ainda, esse trabalho também retoma a pesquisa realizada por Segadas (1998) sobre a compreensão do TFC pelos alunos, ao final do curso de Cálculo.

A pesquisa de Anacleto (2007) é qualitativa e teve como objetivo obter dados descritivos conseguidos por meio de uma participação ativa entre o investigador e os sujeitos. Para isso foi elaborado um questionário, que foi aplicado a 13 duplas de alunos de uma turma de Licenciatura em Matemática, de uma Universidade particular de São Paulo, em que cursavam o curso de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) III. A análise dos dados teve como base os trabalhos de Douady (1987) e de Segadas (1998).

O interesse foi investigar os conhecimentos mobilizados pelos alunos referentes aos conteúdos do TFC, especialmente da sua segunda parte. Almejando conhecer os conhecimentos retidos pelos alunos ao solucionar problemas relacionados à esse tema, ela verificou que “eles identificam que: a derivada da integral é a função integrando; a integral (indefinida) da derivada de uma função é a própria função; a integral de uma função resulta do cálculo da diferença entre o valor de uma primitiva dessa função no limite superior e o valor no limite inferior de integração; a derivação e integração são operações inversas.” E ainda, “verificou como os alunos manipulam conceitos relacionados ao TFC, como a continuidade e a integrabilidade.” (ANACLETO, 2007, p. 23)

A pesquisadora constatou que a maioria dos alunos encontrou dificuldades para solucionar problemas em que a simples visualização de gráficos poderia substituir longos algoritmos. Ela concluiu que a maioria dos estudantes buscou conhecimentos anteriores como ferramenta, em cálculo de primitivas e conceito de integral definida, porém constata “que em muitas situações tais ferramentas não foram empregadas corretamente” quando questionados sobre identificar “que a integral [definida] de uma função resulta do cálculo da diferença entre o valor de uma primitiva dessa função no limite superior e no limite inferior de integração”, que é o Teorema Fundamental do Cálculo, em uma de suas versões. Além disso, a pesquisadora verificou “que para maioria dos alunos a derivação e a integração são operações inversas, porém foram identificadas dificuldades na visualização e interpretação geométrica dessas operações” (ANACLETO, 2007, p. 117). Estes resultados demonstram que os obstáculos dos estudantes para compreender o TFC estão relacionados com uma mobilização incompleta, ou parcial, das noções de derivada, integral e continuidade, uma vez que utilizaram apenas parcialmente esses conhecimentos para a solução das questões apresentadas. A pesquisadora traz a hipótese de que tal fato está provavelmente associado aos hábitos dos estudantes, que tendem a não focar atenção aos aspectos conceituais do teorema, apenas memorizando o algoritmo dos procedimentos sem refletir sobre a sua aplicabilidade.

A tese de Segadas (1998) traz os resultados de uma pesquisa sobre a compreensão de estudantes universitários sobre o TFC. Tem como o objetivo identificar quais as dificuldades apresentadas por eles em relação aos conceitos envolvidos nesse teorema, considerados essenciais, e que interferem no seu entendimento, explícita ou implicitamente. Investigou os aspectos formais ligados a essa compreensão, tais como o conhecimento de definições e de teoremas a ele relacionados.

Sua análise, referenciada nas noções de *imagem conceitual* e *definição conceitual* (Tall e Vinner, 1981) destaca o papel desempenhado pelo conceito de função no desenvolvimento de outros objetos matemáticos, tais como limite, continuidade e inclinação de uma reta tangente. No estudo do TFC, especificamente, a noção de função auxilia os estudantes a compreender o modo com que uma função primitiva e sua derivada são definidas na expressão

$$\mathbf{F(x) = \int_a^x f(t)dt}, \text{ em que } \mathbf{F'(x) = f(x)}.$$

A autora considera que uma grande dificuldade para os alunos ocorre quando eles buscam estabelecer uma conexão entre as diferentes representações de uma função, que coexistem em sua imagem conceitual, particularmente a relação existente entre a representação gráfica e a representação analítica.

A autora retoma, dentre outras, a pesquisa em Tall (1991a), que discute que os alunos inicialmente não observam que a derivada de uma função é também uma função, com um gráfico associado a ela. Para eles, em sua imagem conceitual, a derivada de uma função está principalmente relacionada com a inclinação da reta tangente em um determinado ponto do gráfico da função.

Essa dificuldade dos estudantes em relacionar a imagem conceitual de um objeto matemático que eles evocam e a sua definição foi constatada também em Segadas (1998), em referência ao conceito de continuidade de uma função, que possui uma importância central na discussão da interpretação visual e prova do TFC.

Uma discussão sobre a noção de continuidade é trazida em Tall e Vinner (1981). Ao questionar os alunos, com bom desempenho em matemática em sua universidade, sobre a continuidade da função f(x) = $\frac{1}{x}$, dentre os 41 estudantes que responderam à questão, 6 classificaram-na como uma função contínua e 35, como uma função descontínua. A justificativa dos alunos a respeito de uma função ser ou não contínua é a imagem interiorizada de o gráfico não possuir lacunas, ou de que o gráfico só pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel[3], ressaltando uma imagem conceitual dos alunos que não acomodou a definição formal de continuidade, já trabalhada no curso.

Ciente de tais pesquisas e de que imagens produzidas pelos alunos a respeito de derivada e da continuidade de uma função interferem diretamente na compreensão do TFC e na habilidade de interpretá-lo graficamente, Segadas (1998) elaborou e aplicou

[3] As frases ditas pelos alunos citadas em Tall e Vinner (1981) são: “The graph is not in one piece”, “The function in not defined at the origin”; “The function gets infinite at the origin”.

um questionário-piloto a 72 estudantes do primeiro ano de graduação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Eles eram provenientes dos cursos de Ciências da Computação e de Engenharia. O questionário continha cinco questões, buscando avaliar a familiarização dos alunos com o TFC, com os conceitos a ele relacionados e com sua aplicação; além de duas questões que visavam conhecer suas crenças sobre a demonstração do TFC.

Após a análise do questionário-piloto, a autora elaborou um segundo questionário, e planejou a pesquisa principal em três fases.

Na primeira fase, 148 estudantes do primeiro ano de graduação da UFRJ, provenientes dos cursos de Matemática, Ciências da Computação e Engenharia e que já cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, responderiam um questionário. Este era dividido em duas partes: a primeira parte apresentava questões envolvendo as principais estratégias utilizadas pelos estudantes ao resolverem questões relacionadas ao TFC e sobre a continuidade de uma função; a segunda parte visava conhecer as crenças dos alunos sobre possibilidades de generalizações em Matemática, explorando as concepções dos estudantes sobre o processo de prova e demonstração do TFC.

Na segunda fase, após a análise das respostas dos alunos ao questionário, 26 estudantes que participaram da primeira fase foram selecionados, por terem respondido às questões do questionário com estratégias diversas e aqueles que responderam de forma mais inesperada, para participar de uma entrevista. As entrevistas foram planejadas no sentido de explorar mais profundamente alguns dos argumentos que os estudantes usaram para resolver as questões do questionário, na primeira fase. Algumas das questões foram destinadas a todos os entrevistados e outras foram elaboradas a partir das respostas específicas do questionário da primeira fase.

Na terceira fase foram propostas atividades no computador envolvendo 17 estudantes, do universo dos 26 anteriormente selecionados, e, utilizando o software Graphic Calculus (Tall, 1986). A pesquisadora buscou explorar em maior detalhe como os alunos visualizavam alguns dos conceitos relacionados ao TFC, tais como diferenciação e integração, a conexão entre estes conceitos, a exigência da continuidade da função a ser integrada.

Não houve intenção, segundo a autora, de avaliar o software ou de utilizar as atividades como uma intervenção de ensino. O computador foi utilizado nesta pesquisa como outra possibilidade, aberta pelos software dinâmicos, para manipular objetos virtuais, permitindo examinar a compreensão dos alunos sobre os conceitos referentes ao teorema, nesse ambiente virtual.

Quanto aos resultados, a autora observou dificuldades na compreensão e resolução pelos alunos de questões que envolvem não somente o TFC, mas também questões correlatas tais como integração e diferenciação de uma função, continuidade e diferenciabilidade. Mais especificamente, essas dificuldades estão diretamente ligadas à compreensão e à representação gráfica da função $\mathbf{F(x) = \int_a^x f(t)dt}$ bem como o significado de suas variáveis **x** e **t** e a relação entre continuidade e diferenciabilidade de funções.

No tocante à utilização das imagens visuais/dinâmicas associadas aos conceitos de integração e diferenciação na resolução de problemas, constatou-se que mesmo quando os alunos evocaram uma imagem, por exemplo, de integral definida como área, esse conceito não foi utilizado na resolução da questão $\mathbf{\int_{-1}^{1} |x|dx}$: tentaram resolvê-la de maneira algébrica por procedimentos algorítmicos. Houve ainda uma discordância entre a definição formal e a imagem conceitual evocada sobre o conceito de integral pelos alunos revelada nessa questão.

Nem todos os alunos familiarizados com as definições conceituais de conceitos como diferenciação e integração conseguiram visualizar a relação entre os gráficos das funções **f** e **F**, sendo **F' = f**. Em particular, observou-se uma dificuldade maior na construção do gráfico da função primitiva **F** a partir da sua função derivada **f**, do que o contrário.

Para a autora, esses conceitos não são evidentes para os estudantes, pois eles fazem uso de imagens que contêm aspectos parciais das definições ou que eram baseadas em alguns exemplos particulares. Essa visão fragmentada prejudicou consideravelmente a visualização geométrica e a demonstração do TFC.

De modo geral, a autora concluiu que os alunos apresentam como ferramentas para resolução de problemas que envolvem de maneira implícita ou explícita a utilização do TFC apenas procedimentos algorítmicos memorizáveis, tais como técnicas de derivação e integração, utilizando excessivamente a representação algébrica. Além disso, foi identificado que o emprego de imagens gráficas não tem sido tão eficiente, pois são utilizados durante o curso apenas para ilustrar conceitos em exemplos de casos em que uma dada definição aplica-se ou não. Pouco uso se faz deles como facilitadores na resolução de alguns problemas e auxiliares efetivos na compreensão de uma definição ou teorema. Esta autora verificou que a maioria dos estudantes apresentou dificuldades para solucionar problemas em que a simples visualização de um gráfico evitaria o uso de longos algoritmos. Em Anacleto (2007) vemos uma conclusão semelhante a essa. Em Segadas (1998), a razão disso foi atribuída às dificuldades na apresentação de gráficos, que sempre aparecem, no ensino de matemática, de forma estática e não dinâmica. Algumas sugestões foram apresentadas no sentido de reverter essa situação, incluindo atividades com o uso do computador.

Assim, vemos que um desdobramento possível para novas pesquisas é investigar o uso do computador para construção e uso de imagens visuais geométricas não-estáticas, ou seja, dinâmicas.

Levaremos esses resultados em consideração posteriormente; porém, antes de apresentarmos a questão de pesquisa deste trabalho, retomamos uma das questões motivadoras deste trabalho, presente na introdução:

É possível explorar/desenvolver um entendimento visual/gráfico do TFC de forma que tais aspectos (visuais) sejam parte integrante da sua prova?

Ao pesquisar diversos livros, artigos, teses e dissertações sobre a prova do TFC que contivessem aspectos visuais integrados à sua prova, encontramos os artigos Tall (1991a) e Tall (1991b), que nos indica um possível caminho em direção à resposta anteriormente feita. Estes dois artigos estão sintetizados em Tall (2013), em menor detalhe. Por isto vamos retomar os dois textos da década de noventa como referências nesta pesquisa. A próxima seção se ocupa de propor uma prova com esta característica, procurando ser ao mesmo tempo rigorosa e intuitiva.

1.3 Uma proposta visual/gráfica integrada à prova do TFC

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) é um resultado central do Cálculo Diferencial e Integral, estabelecendo uma relação entre diferenciação e integração. Dentre tantos aspectos que estão envolvidos neste resultado, estaremos investigando tais relações em representações visuais/gráfico/cinéticas.

Uma proposta de prova do teorema a partir da visualização gráfica da função, derivada, integral e todos os conceitos relacionados a esse resultado, construção que não é igual ao que é feito convencionalmente e pode se mostrar muito rica cognitivamente no tocante ao ensino deste tópico, retoma Tall (1991a) e Tall (1991b). Porém, utilizamos informações de Kirsch (2014) e do livro de cálculo Hughes-Hallett et al (1999) para compor uma proposta nesta pesquisa.

Parte 1

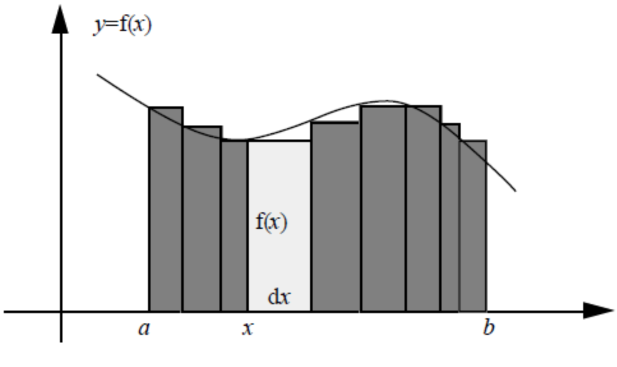
Tall (1991a) discute aspectos formais ligados ao TFC. A importância particular de sua pesquisa são suas ideias sobre o significado da diferenciação e da integração. Desenvolvendo e utilizando um programa de computação gráfica (Graphic Calculus (1986)), Tall trouxe contribuições para o entendimento do TFC e para a compreensão do conceito de continuidade de uma função.

Neste artigo, David Tall, constrói visualmente a parte 1 do TFC, que estabelece que se uma função **f** for integrável em **[a. b]** e se **F** for uma primitiva de **f** em **[a, b]**, então

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx = F(b) - F(a).}$$

Indica-nos o gráfico que devemos focar para entendermos este resultado. Ao trabalharmos com uma função y = f(x) procurando saber qual seria a área sob este gráfico em um dado intervalo $[a, b]$ sobre o eixo **x**, nós terminaremos relacionando esta primeira com sua função primitiva y = I(x). Assim, para entendermos visualmente os conceitos e relações envolvidas no TFC, Tall nos convida a olhar para o "gráfico certo", observando relações existentes entre o gráfico da primitiva da função e a função, e não restringindo o foco ao gráfico da própria função, dada inicialmente.

Figura 4: aproximação da área sob o gráfico por soma das áreas de retângulos

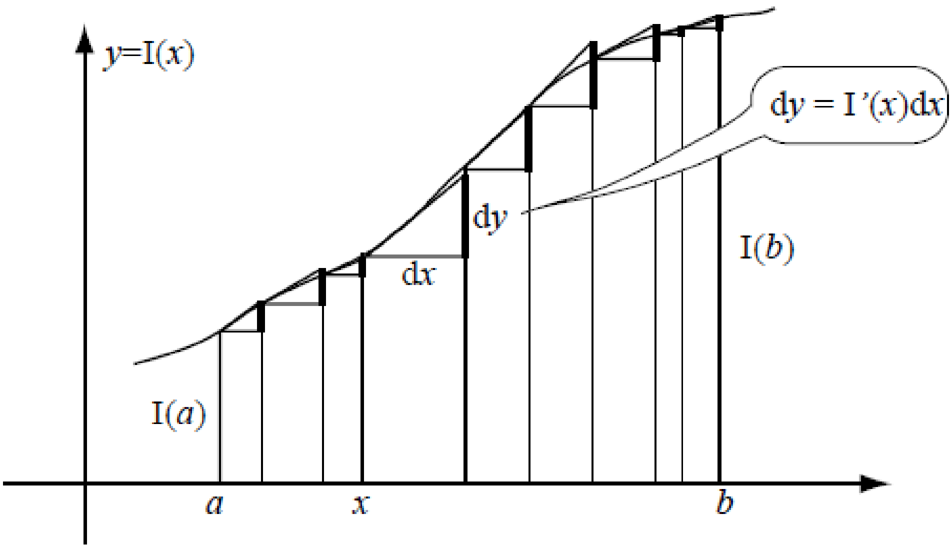


Fonte: Tall (1991a, p. 4)

A Figura 4 a traz o gráfico de uma função **f** e uma ilustração do método de Riemman para a determinação da área sob este gráfico.

Com **y = f(x)**, consideremos também y = I(x), tal que **I'(x) = f(x)**, ilustrado na Figura 5. Aqui temos a mesma divisão do intervalo **[a, b]** em subintervalos da Figura 4. Tall propõe olhar o gráfico da função **I(x)**, e não ficar restrito ao de **f(x)**. Para ele, a Figura 4 "que por muito tempo foi a visão padrão não é a correta para o TFC" (Tall, 1991j).

Figura 5: A soma $\sum_a^b \mathrm{f(x).dx}$ como a soma dos comprimentos $\sum \mathrm{dy}$



Fonte: TALL (1991a, p.4)

Em cada ponto **x** da subdivisão está desenhado, na Figura 5, a tangente à curva gráfico de y = I(x), cuja inclinação da reta tangente num ponto **x** qualquer é:

$$\mathbf{I'(x)} = \frac{\mathbf{I(x+\Delta x) - I(x)}}{\mathbf{\Delta x}} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}},$$

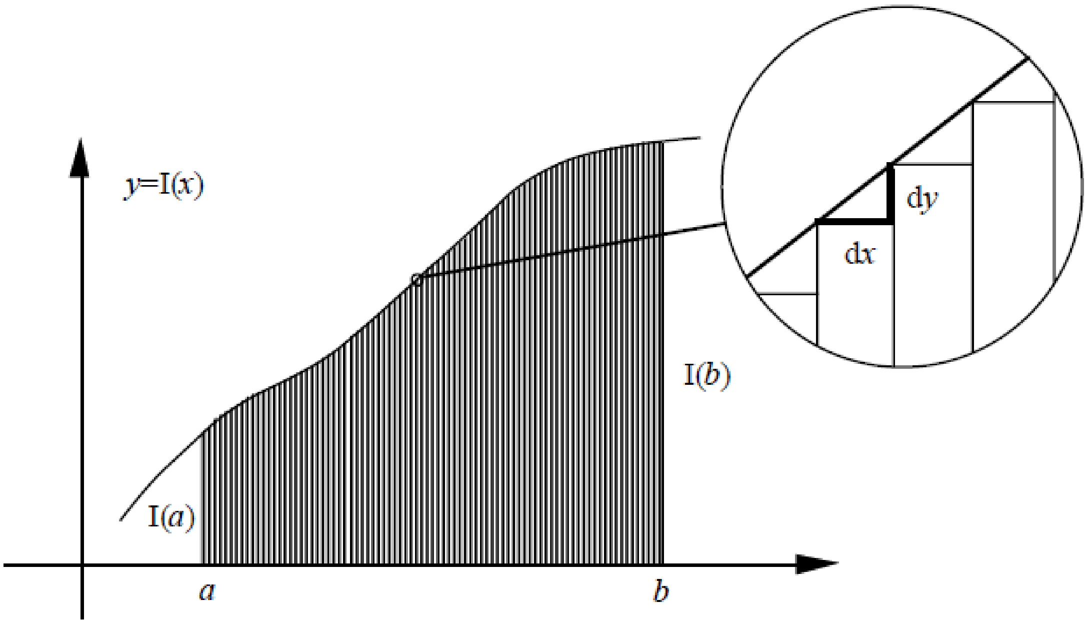
Então o incremento dy correspondente à tangente é:

$$\mathbf{dy = I'(x).dx = f(x).dx}.$$

Assim, a soma $\sum_a^b \mathbf{f(x).dx}$ é vista como a soma dos comprimentos $\sum \mathbf{dy}$ onde cada **dy** é a componente vertical do vetor tangente ao gráfico de **y = I(x)**. A soma $\sum \mathbf{dy}$ é a soma dos segmentos de reta verticais. Quando **dx** é muito pequeno, de modo que o gráfico de y = I(x) seja praticamente uma linha reta de extremidades $(\mathrm{x}, \mathrm{I(x)})$ e $(x + dx, I(x + dx))$, então dy é aproximadamente igual ao incremento no gráfico, **I(x+dx) – I(x)**. Somando os incrementos ao gráfico de **x = a** à **x = b**, ou seja, os "degraus" verticais **dy,** temos como resultado o valor **I(b) – I(a)**. A Figura 4 nos dá uma indicação desta ideia.

O autor coloca a questão que este argumento visual falha em parte porque o autor foi obrigado a fazer os retângulos claramente largos para que pudéssemos ver o que está acontecendo e isto, por sua vez, significa que o gráfico pode ser tão curvo em cada retângulo que **dy** seja claramente diferente de **I(x+dx) - I(x)**. Por outro lado, convida o leitor a imaginar um número grande de retângulos e uma parte do gráfico sendo ampliado, para visualizarmos sua "retidão local" com um pouco de retângulos ao lado uns dos outros, como na Figura 6 abaixo.

Figura 6: olhando microscopicamente para o processo de soma



Fonte: TALL (1991a, p.5)

Agora, deve ser possível imaginar que quando o comprimento **dx** se torna cada vez menor, a soma dos comprimentos ∑ **dy** se aproxima de **I(b) – I(a)**.

Com um zoom, podemos ver que a curvatura do gráfico se torna cada vez menor – ou seja, o gráfico fica cada vez menos curvo, em cada subintervalo infinitesimal. O gráfico tende a se tornar cada vez mais reto conforme nos aproximamos com o zoom, como podemos imaginar na Figura 6.

Tall comenta que este argumento demonstra que nós devemos ser capazes de "ver" que o erro relativo na diferença entre o valor de **dy** e o real "degrau" vertical (**I(x+dx) - I(x)**) da curva torna-se menor, quando dx é infinitesimal.

Em outras palavras, este é um indício de que os erros são agora pequenos em relação ao "degrau" vertical. Então, superpondo-os, ou somando-os, o erro total também é agora muito pequeno em relação ao "degrau" vertical total. Em outras palavras, começamos a "ver" que, quando os comprimentos **dx** se tornam infinitesimais, as somas dos "degraus" verticais correspondentes, $\sum \mathbf{dy}$, se tornam aproximadamente iguais a **I(b) - I(a)**.

A expressão $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x}).\mathbf{dx}$ com o símbolo de integral é usado para representar o limite de $\sum_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x}).\mathbf{dx}$ quando (o tamanho máximo de) **dx** se torna infinitesimal. Como o limite de $\sum_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x}).\mathbf{dx}$ também representa a área sob o gráfico **f(x)** no intervalo **[a, b]**, o argumento fornece uma poderosa intuição a respeito da parte 2 do TFC:

A área dada pelo limite de $\sum_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x}).\mathbf{dx}$ pode ser aproximada, infinitesimalmente, adicionando-se incrementos dy, sobre retas tangentes à primitiva de f(x), I(x). Ou seja,

Quando dx se torna infinitesimal

$$\sum \mathbf{dy} = \sum_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x}).\mathbf{dx} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x}).\mathbf{dx} = \mathbf{I(b) - I(a)},$$

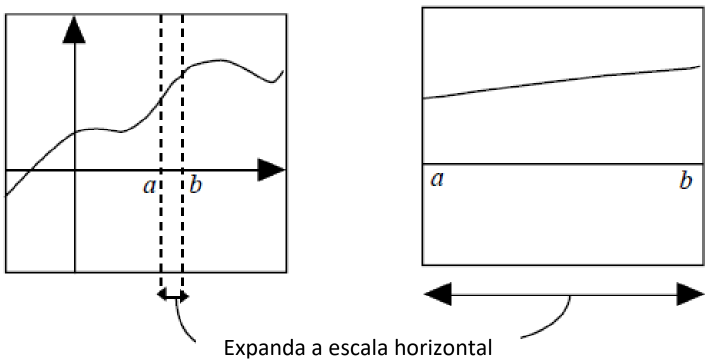
onde **I'(x) = f(x).**

Parte 2

Uma maneira de visualizar o TFC é imaginando uma parte minúscula do gráfico esticada horizontalmente, como na Figura 7 a seguir. Em muitos casos, o gráfico de uma função estica-se até parecer reto e paralelo ao eixo **x** – quanto mais for esticado, mais reto e paralelo ao eixo **x** o gráfico irá parecer.

Isto é fácil de simular, utilizando-se um software matemático, como o Geogebra, com o qual podemos usar uma extensão curta de **x**, dando um zoom out, e uma extensão normal de **y**, mantendo as unidades naquele eixo, para esticar o gráfico horizontalmente. Quando a função é contínua em $[a, b]$, o gráfico fica horizontal, com este movimento.

Figura 7: esticando o gráfico horizontalmente

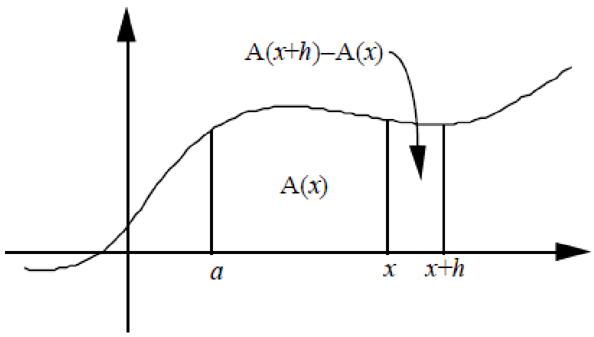


Fonte: TALL (1991b, p.18)

Podemos nomear por A(x), como na Figura 8, como a área sob o gráfico de uma função $y = f(t)$, de um ponto fixado **a** até um ponto (ou posição) variável **x**. Dito de outro modo, $A(x)$ é a área acima do eixo que vamos denominar por t **,** abaixo de $y = f(t)$ e entre as retas $t = a$ e $t = x$; sendo que x pode ser qualquer posição sobre o eixo t. $A(x)$ pode também ser escrita como $\int_{a}^{x} \boldsymbol{f(t).dt}$**.**

Observe que $A(x)$ é, na verdade, uma imagem de uma função $y = A(t)$. Observe na figura que área entre **a** até **x+h** é **A(x+h)**, logo a variação na área de **x** até **x+h** é **A(x+h) - A(x)**.

Figura 8: a variação na área



Fonte: TALL (1991b, p.19)

Com o auxílio das ferramentas visuais do software, podemos ver que se a área de **x** até **x+h** é aproximadamente um retângulo (pois o gráfico fica praticamente reto e paralelo ao eixo x ao esticarmos o gráfico horizontalmente) de largura **h** e altura **f(x)**, então sua área é aproximadamente $f(x).h$:

$$\mathbf{A(x+h) - A(x) \approx f(x).h}$$

Ou seja,

$$\frac{\mathbf{A(x+h) - A(x)}}{\boldsymbol{h}} \approx \mathbf{f(x)}.$$

Quando **h** se torna infinitesimal, o gráfico de $\mathrm{y = f(t)}$ se torna mais reto e paralelo ao eixo t, e a aproximação **A(x+h) - A(x) ≈ f(x).h** torna-se melhor. Esta é a fundamentação intuitiva para a parte 2 do TFC:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{A(x+h) - A(x)}}{\boldsymbol{h}} = \mathbf{A'(x)} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}} \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f(t).dt} = \boldsymbol{f(x)}.$$

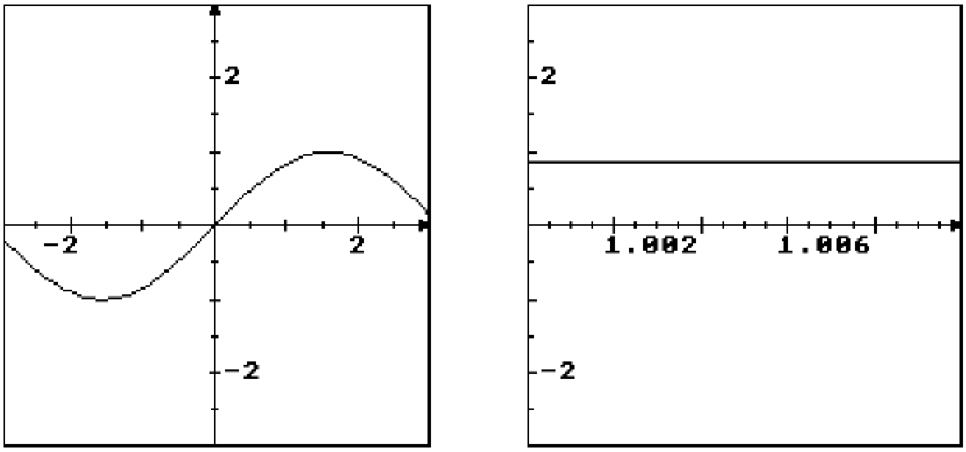
Discussão sobre validade dos resultados

Embora tenhamos construído um sentido intuitivo sobre porquê o enunciado do TFC é verdadeiro, Tall (1991a) observa que tal intuição não constitui uma prova. Para sustentar esta afirmação ele nos questiona, por exemplo: "quais são as condições sobre a função **f** que garantiriam a existência de uma função **I** tal que **I' = f**?" (TALL, 1991a, p.6) Realmente, se nós não estabelecermos isto, sequer poderíamos desenhar as Figuras 4 e 5, porque nós não podemos garantir a existência da função **I**.

Mostramos como visualizar as prováveis propriedades requeridas de **f** olhando ao gráfico de **f** de uma forma diferente: mantendo constante a extensão **y** enquanto tomamos uma extensão de **x** muito menor; ou seja, esticando o gráfico horizontalmente. Por exemplo, a Figura 9 mostra o gráfico de **y = sen(x)** com a mesma extensão de **y** no intervalo **(-3,3)** mas a extensão de **x** sendo mudada do intervalo **(-3,3)** diminuída para o intervalo **(1; 1,01)**. O que acontece é que o gráfico no segundo caso torna-se aparentemente horizontal (paralelo ao eixo **x**) e reto quando esticamos a extensão de **x**.

Se calcularmos a área sob um gráfico aparentemente reto e paralelo ao eixo **x** como na figura anterior, a área de **x** até **x+h** é aproximadamente igual a **f(x).h** (aparentemente, área de um retângulo).

Figura 9: o gráfico de y = sen(x), esticado horizontalmente



Fonte: TALL (1991a, p.6)

O valor da área deste retângulo representa a variação na área de **A(x)** para **A(x+h)**, então

$$\mathbf{A(x+h)-A(x) \approx f(x).h}$$

isto sugere que nós podemos ter

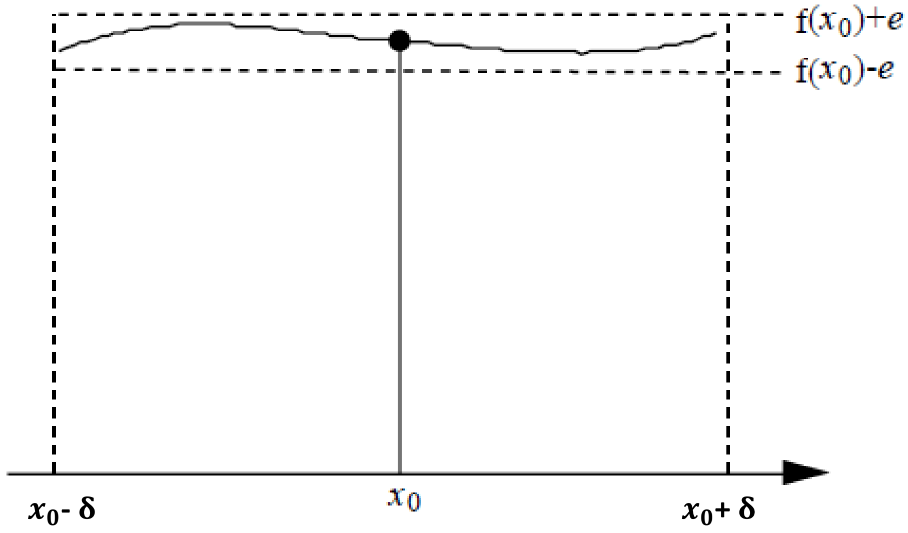
$$\frac{\mathbf{A(x+h)-A(x)}}{\mathbf{h}} \approx \mathbf{f(x)}$$

e talvez, quando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, nós podemos ter

$$\mathbf{A'(x) = f(x)}.$$

Mas que tipo de função quando esticada horizontalmente próximo de $\mathbf{x = x_0}$, parece reta e paralela ao eixo **horizontal**? Se nós supusermos que isto significa que o gráfico está contido em uma faixa no plano que se projeta verticalmente em um intervalo de **f(x) - ε** até **f(x) + ε**, então o que nós precisamos saber é se: dado um $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, então podemos encontrar um intervalo de **x** suficientemente pequenos, de **x – δ** até **x + δ**, tal que quando $\boldsymbol{x_0}$ pertence ao intervalo **(x – δ, x + δ)**, então $\mathbf{f(\boldsymbol{x_0})}$ pertence ao intervalo **(f(x) – ε, f(x) + ε)**, como podemos visualizar na Figura 10 a seguir. Em outras palavras, uma condição natural (e necessária) para que a função satisfaça o TFC é que ela seja contínua em um sentido que é formal: "Dado qualquer $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, um $\boldsymbol{\delta} > 0$ pode ser encontrado tal que sempre que $\mathbf{x} - \boldsymbol{\delta} < \boldsymbol{x_0} < \mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}$, sabemos que $\mathbf{f(x)} - \boldsymbol{\varepsilon} < \mathbf{f(\boldsymbol{x_0})} < \mathbf{f(x)} + \boldsymbol{\varepsilon}$." (TALL, 1991b).

Figura 10: o conceito de continuidade através do alongamento horizontal



Fonte: TALL (1991b, p.20)

Para tal função, se a largura do retângulo **h** é tomada positiva e menor que **δ** então o valor de **f(x_0)** pertencerá ao intervalo **(f(x) – ε, f(x) + ε)**, então

$$(\mathbf{f(x)} - \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{.h} < \mathbf{A(x + h)} - \mathbf{A(x)} < (\mathbf{f(x)} + \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{.h}.$$

Portanto,

$$\frac{\mathbf{A(x+h) - A(x)}}{\mathbf{h}}$$

está limitado entre **f(x) – ε** e **f(x) + ε**. Um argumento similar se sustenta para **h** negativo. Como **ε** é arbitrário, esta é a definição formal que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{A(x+h) - A(x)}}{\mathbf{h}} = \mathbf{f(x)}$$

isto é, **A'(x) = f(x)**.

1.4 A Questão de Pesquisa

Após a análise das pesquisas descritas anteriormente, a partir das questões motivadoras desta pesquisa e com embasamento matemático teórico, verificamos que ainda existe muito a ser pesquisado a respeito dos processos de ensino e aprendizagem do TFC. Ao averiguar as questões das pesquisas estudadas, constatei que muito tem se pesquisado sobre o ensino e aprendizagem do TFC, porém quase sempre em relação à parte 2 deste resultado, como nas pesquisas de Segadas (1998), Andersen (2011), Picone (2007), Grande (2013) e Anacleto (2007), e muito pouco em relação à parte 1 do mesmo, como em Scucuglia (2006). Vale a pena salientar que muitos desses trabalhos aplicaram questionários em suas pesquisas que versavam sobre as duas partes do TFC, porém os trabalhos citados estavam voltados mais para investigar questões referentes à parte 2 deste teorema. Com isso, o cenário de estudo sobre a parte 1 se mostra, ainda, com um amplo espaço para novas pesquisas.

Dentre estes pesquisadores muitos tem se preocupado com a questão da visualização no processo de ensino-aprendizagem deste teorema, como os trabalhos de Segadas (1998), Andersen (2011), Picone (2007), Campos (2007), Anacleto (2007) e Scucuglia (2006). Outros também se ocuparam em refletir e pesquisar sobre como a intuição pode contribuir para cognitivamente ao longo do processo de ensino e aprendizagem, como as pesquisas de Andersen (2011), Grande (2013) e Scucuglia (2006). Esses estudos se mostraram muito eficientes e úteis evidenciando que a visualização e a intuição podem contribuir muito para o processo de ensino-aprendizagem. Além disso, concluíram que se alguns conteúdos fossem ensinados, inicialmente, de forma intuitiva com uso de recursos visuais como gráficos antes da exposição das definições formais, teoremas e provas, haveria um grande ganho cognitivo, de aprendizagem. Com isso, a questão da visualização e da intuição no ensino de matemática se mostra como um campo de pesquisa fértil para novas pesquisas.

Em referência à intuição e rigor no ensino de matemática, tomaremos como base os estudos, já citados, de Tall (1991b) e Fischbein (1994). Adotamos o estudo de Segadas (1998) como ponto de partida para construção metodológica, os conceitos de *Imagem Conceitual* e *Definição Conceitual* (TALL e VINNER, 1981; TALL, 1991a; VINNER, 1991) como fonte teórica para entender a aprendizagem de conceitos matemáticos. Propomos a utilização do computador como um recurso digital potencialmente rico para o desenvolvimento cognitivo. Enunciamos assim a questão de pesquisa desta dissertação, presente na introdução como a pergunta norteadora dessa investigação:

Que contribuições uma proposta visual/gráfica do TFC pode ter para o entendimento deste resultado?

Para respondê-la, planejamos um questionário e uma oficina utilizando computadores, constituindo um ambiente que nos permitisse investigar:

- Que conceitos matemáticos os alunos evocam ao participarem de atividades que exploram a aplicação da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), com o auxílio de recursos visuais gráficos e computacionais?

- Como os alunos usam os conceitos trabalhados em sala de aula ao se envolverem em tais atividades utilizando recursos visuais gráficos e computadores?

- De que modos a intuição se mostra presente nas respostas dos alunos a tais atividades?

O material empírico produzido teve as três questões acima como eixos de análise, para responder à questão de pesquisa formulada.

No próximo capítulo descreveremos os procedimentos metodológicos desta pesquisa, os locais da coleta de dados e os participantes da investigação.

Capítulo 2 – O contexto, procedimentos metodológicos e a preparação da pesquisa

Neste capítulo iremos descrever o contexto, os procedimentos metodológicos utilizados, bem como as etapas do desenvolvimento da pesquisa. Encerramos com a elaboração do questionário e planejamento da oficina, trazendo o enunciado das questões e a descrição do roteiro de atividades, com seus objetivos.

2.1 Procedimentos metodológicos

Este estudo tem caráter qualitativo e busca responder à questão desta pesquisa, enunciada ao final do capítulo anterior. Após uma revisão da literatura sobre o ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo, retomamos a tese de Segadas (1998) como norteador metodológico deste trabalho.

Em sua pesquisa, a autora elaborou um questionário, atividades no computador e entrevistas baseadas nas respostas dos participantes às atividades propostas. Devido à visibilidade dessa pesquisa no cenário brasileiro, acreditamos que estes passos podem ser seguidos; porém, agora com outros objetivos, descritos no primeiro capítulo. Ou seja, neste trabalho trilharemos um caminho metodológico similar ao proposto em Segadas (1998) para responder a questionamentos que foram elaborados em nossa investigação.

Para atingirmos nosso objetivo, planejamos uma investigação em três etapas: elaboração e aplicação de um questionário piloto; elaboração e aplicação de um questionário principal; e, planejamento de atividades e proposição de uma oficina. Imediatamente ao final da oficina, como em Segadas (1998), realizamos uma entrevista com os participantes da pesquisa.

O objetivo de aplicação de um questionário é o de conhecer aspectos do conhecimento matemático dos alunos relacionados a conteúdos matemáticos do cálculo que estão estritamente ligados ao foco matemático desta pesquisa; a saber: continuidade, derivação, integração e, principalmente, o Teorema Fundamental do Cálculo. Além disto, procuramos promover uma experiência que já explorasse aspectos gráficos e visuais na discussão do conteúdo matemático. O questionário completo está no *Anexo 3* ao final deste trabalho.

No cenário das pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo descrito no capítulo anterior vários pesquisadores aplicaram questionários em suas pesquisas; mas apenas três utilizaram recursos metodológicos além da aplicação de um questionário: Segadas (1998) que propôs atividades no computador; Grande (2013) que propôs uma intervenção de ensino; e Scucuglia (2006) que propôs uma investigação utilizando calculadoras gráficas. Como estas três últimas, nossa pesquisa não se restringe à aplicação do questionário. Planejamos investigar a imagem conceitual evocada pelos alunos, em especial investigar os modos como a intuição e a percepção visual podem se articular ao explorarmos o Teorema Fundamental do Cálculo utilizando recursos visuais/gráficos e computacionais, fornecidos pelo *software* Geogebra.

2.2 O contexto da pesquisa

A primeira etapa da pesquisa consistiu da elaboração e aplicação de um questionário e teve a colaboração de dois alunos do quarto período do curso noturno de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Em experimento piloto, esses alunos foram voluntários para respondê-lo e avaliá-lo, em breve entrevista. Este presente trabalho foi elaborado dentro do contexto do programa de pós-graduação em Ensino de Matemática desta mesma instituição, que nos permitiu a aplicação desta etapa inicial, incentivando-nos à produção científica no local.

O experimento principal que teve início na segunda etapa da pesquisa e consistia da aplicação de um questionário, após a análise das respostas e avaliações do questionário piloto aplicado. A terceira etapa desta pesquisa envolvia a participação de alunos voluntários em uma oficina com utilização e exploração de recursos digitais. Após o consentimento do coordenador do curso de Matemática, da professora da disciplina de Cálculo 2 e da assinatura do termo de consentimento esclarecido por dezoito alunos voluntários (*Anexo 1*), ambas etapas foram realizadas no Instituto Multidisciplinar (IM) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), localizado no município de Nova Iguaçu, na baixada fluminense. Desses participantes, dez cursavam Licenciatura em Matemática do turno da noite e oito, do curso vespertino de Ciência da Computação. Todos estavam matriculados na mesma disciplina de Cálculo 2 do curso noturno de Licenciatura em Matemática, pois ela é aberta à alunos de outros cursos desde que a disciplina de Cálculo 2 de seus cursos seja equivalente a essa, pensada para alunos de licenciatura em matemática.

O Instituto Multidisciplinar é uma unidade acadêmica da UFRRJ e tem caráter central na formação acadêmica em Nova Iguaçu, pois ela é a única universidade federal e a única pública desta cidade. A UFRRJ foi criada em 1910, porém este *campus* foi criado quase um século depois, em 2006. Nela são oferecidos dez cursos de graduação: Administração; Ciências da Computação; Ciências Econômicas; Direito; Geografia; História; Letras; Pedagogia; Turismo; Matemática Aplicada e Computacional; e Licenciatura em Matemática. O oferecimento desses cursos tem o objetivo de suprir as necessidades locais, da baixada e, até, da capital do estado.

A escolha dessa universidade como local de aplicação das etapas desta pesquisa levou em consideração alguns fatos: esta instituição foi o local no qual o mestrando desta pesquisa licenciou-se em matemática; proximidade pessoal do mestrando desta pesquisa com os professores e coordenadores desse curso de licenciatura em matemática; possibilidade de produção científica envolvendo o espaço e pessoas da cidade em que ela se situa.

À época do desenvolvimento da pesquisa, todos os alunos envolvidos, nos experimentos piloto e principal e na oficina já haviam tido contato com cálculo diferencial, cálculo integral de uma variável e com Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Ou seja, eles já tinham vivido experiências adequadas aos propósitos da investigação.

No *Anexo 2*, consta a ementa de cálculo 2, com o programa da disciplina do curso de licenciatura em matemática do Instituto Multidisciplinar da UFRRJ.

2.3 Etapas da pesquisa

A etapa inicial da pesquisa consistiu da elaboração de um questionário com 8 questões, após a análise de livros texto de cálculo em sua abordagem do TFC, com consulta à literatura da área, e a colaboração de dois alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRJ em experimento piloto. A versão final apresentada no *Anexo 3* foi redigida após esta primeira aplicação e análise. Esta etapa preliminar teve por objetivo rediscutir as questões utilizá-las no experimento principal.

A segunda etapa da pesquisa consistiu da aplicação do questionário, em horário noturno durante uma aula da disciplina Cálculo 2, gentilmente cedido pela professora regente. Decidimos realizá-la em um horário de aula devido à dificuldade de os alunos estarem presentes em outro horário fora das atividades obrigatórias de aula. Sua duração foi de aproximadamente 1 hora e 40 minutos. Esta etapa contou com a participação de dezoito (18) alunos.

Na terceira etapa da pesquisa, almejávamos que os participantes da oficina fossem os mesmo que responderam ao questionário. No entanto a semana da aplicação da oficina coincidiu com a da semana de provas das disciplinas que eles cursavam. Ainda assim, dentre os 17 participantes da oficina, 12 haviam participado da segunda etapa e respondido o questionário. Optamos por considerar o material produzido por estes doze alunos, na segunda e terceira etapas, para desenvolver a análise.

A oficina foi planejada para ser realizada em um encontro apenas. Porém, o uso do laboratório no dia inicialmente marcado foi impossibilitado, pois a secretária do departamento de matemática da UFRRJ agendou um laboratório que era utilizado toda semana por um professor de computação. O equívoco foi descoberto no início da oficina, que coincidiu com o início da aula do professor.

Depois de liberarmos o laboratório, já preparado e ocupado, para que o professor iniciasse sua aula, fomos até o departamento de matemática para providenciarmos a chave de outro laboratório de informática. Conseguimos outra sala, realocamos os alunos e instalamos o programa nos computadores deste laboratório, iniciando a oficina com aproximadamente 45 minutos de atraso. Por este motivo a oficina aconteceu em dois dias.

No primeiro dia, introduzimos as atividades com uma breve explicação sobre o que eu havia planejado com informações básicas sobre a utilização do *software Geogebra*. Convidamos os participantes a seguir o roteiro planejado para a oficina, auxiliando-os em dificuldades técnicas quanto à manipulação do *software*. O andamento da oficina foi proveitoso e os alunos se envolveram nas primeira e segunda atividades, sem, no entanto, concluí-las. Houve interações entre eles, visto que algumas duplas foram formadas, e era permitido também troca de informações entre as duplas. Planejamos a realização desta oficina em duplas; porém alguns alunos solicitaram ao pesquisador realizar a atividade individualmente, porque não se sentiam confortáveis trabalhando com os colegas.

O segundo dia da oficina foi diferente deste primeiro. Não foi possível o agendamento do laboratório para que os alunos pudessem responder às atividades manipulando, eles mesmos, os recursos computacionais, como no primeiro dia. Por isto utilizei a sala de aula de cálculo e, com o auxílio do meu computador portátil e de um projetor, exibi as atividades propostas. Tendo em vista a impossibilidade da realização de mais um novo encontro, pelo fato de os participantes não terem conseguido concluir o roteiro das atividades 1 e 2 que planejara, e com receio de não conseguir concluir as quatro atividades, tomamos a decisão de trabalhar o roteiro da Atividade 3, cujo objetivo específico é explorar o TFC, tema desta pesquisa. O material empírico produzido para análise inclui, portanto, as respostas de doze participantes ao questionário e à Atividade 3. No *Anexo 4* temos o roteiro e todas as atividades planejados para a oficina.

2.3 Uso do computador e o Geogebra

Para exploração de recursos visuais, o uso de tecnologias digitais fornece ferramentas ricas como possibilidade alternativa de representação dinâmica dos conceitos matemáticos. Algumas pesquisas na revisão da literatura realizada fizeram uso de recursos digitais como meio para visualização gráfica/dinâmica dos conceitos matemáticos, como os estudos de Segadas (1998) que utilizou o software Graphic Calculus (Tall, 1986) e Scucuglia (2006) que fez uso de calculadora gráfica. A respeito do uso do computador, Segadas (1998) sugere como desenvolvimentos futuros para a pesquisa sobre o tema a exploração de recursos digitais dinâmicos.

> seria interessante investigar como seu uso poderia ajudar os estudantes a visualizar alguns dos mais formais aspectos do cálculo, dando a eles ideias que os ajudariam a compreender as provas. (SEGADAS, 1998, pg. 267).

Para o desenvolvimento desta pesquisa, utilizaremos o *Software* Geogebra[4] por ser livre e gratuito, acreditando que o mesmo pode trazer inúmeras contribuições para esta e outras pesquisas com a utilização das atividades nele produzidas. Além disso, reiteramos a conclusão em Grande (2013), que fez uso deste *Software* e considerou que a interação dos alunos com o Geogebra como “a grande responsável não somente pela visualização e concretização dos conceitos envolvidos, como também permitiu que os componentes intuitivo, algorítmico e formal fossem inter-relacionados e confrontados” (GRANDE, 2013, p. 290).

---

[4] Este Software é livre e o *download* do mesmo pode ser feito no sítio: http://www.geogebra.org/

Esta pesquisa utiliza as possibilidades abertas pelas mídias digitais para a exploração visual, gráfica e cinética dos conceitos estudados. Os recursos numérico/algébricos do Geogebra também foram utilizados.

2.4 Continuidade, derivação, integração e o Teorema Fundamental do Cálculo

No *anexo 5*, apresentamos um estudo sobre abordagens e definições de conceitos básicos do cálculo, especificamente os tópicos continuidade, derivação, integração e o teorema fundamental do cálculo (TFC), como apresentados em livros selecionados. Os livros consultados foram Hughes-Hallett et al (1999), Leithold (1994), Spivak (1992), Stewart (2012) e Guidorizzi (2001). Eles foram escolhidos por constarem das ementas das disciplinas oferecidas na UFRRJ e serem disponibilizados na biblioteca para consulta pelos estudantes. Seu estudo contribui para delinearmos possibilidades para as experiências anteriores dos participantes, que são importantes para o desenvolvimento de sua imagem conceitual e intuição relacionados aos conceitos que serão investigados. Além disso, analisamos como os recursos visuais são utilizados nos livros texto de cálculo selecionados e como o conteúdo matemático é formalizado, com foco nas definições dos conceitos. Fizemos uso desse estudo para elaborarmos as questões do questionário e planejarmos a oficina; e, no momento da análise do material empírico, contrastamos as definições conceituais dos alunos e as definições conceituais (formais) apresentadas nos livros.

Capítulo 3 - A preparação da pesquisa e os objetivos das atividades

Esta seção tem a finalidade de descrever a preparação da pesquisa, bem como expor os objetivos que tivemos ao elaborar as questões do questionário e a oficina. Começaremos detalhando a elaboração do questionário principal.

3.1 Questionário

A primeira questão tem por objetivo investigar aspectos da imagem e da definição conceituais evocados pelos alunos participantes e relacionados à noção de função contínua.

Questão 1

1) a) Diga o que você entende por função contínua. Dê três exemplos diferentes de funções contínuas.

b) Esboce o gráfico de uma função descontínua. Justifique porque ela não é contínua.

A noção de função contínua é central no enunciado e demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo. Temos a intenção de utilizar o recurso computacional de aproximação (zoom-in) na oficina, para analisar a continuidade de funções representadas por seu gráfico, na tela do computador. As imagens conceituais evocadas podem ser diferentes após o experimento, uma vez que os recursos são diferentes. Temos a intenção de investigar como os alunos usam a noção de continuidade já trabalhada em sala de aula ao se envolverem com a atividade no computador.

A segunda questão tem por objetivo conhecer os modos com que os alunos desenvolvem os cálculos básicos de integral e que recursos são utilizados pelos alunos.

Questão 2

2) Calcule:

a) $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1)dx$

b) $\int_{-1}^2 |x|dx$

Aqui o objetivo é investigar se os alunos utilizam o TFC e a relação:

$$\text{se } F' = f, \text{ então } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

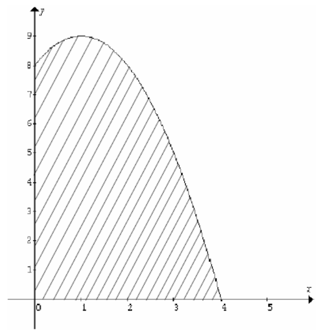
Interessa-nos investigar se os alunos ficam restritos a manipulações algébricas ou se utilizam algum recurso geométrico para responder as questões propostas; por exemplo, desenhando um esboço do(s) gráfico(s) no papel e interpretando as integrais como sendo as áreas sob os gráficos.

O propósito da questão 3 foi conhecer as estratégias desenvolvidas pelos alunos para resolver os problemas enunciados como área sob o gráfico.

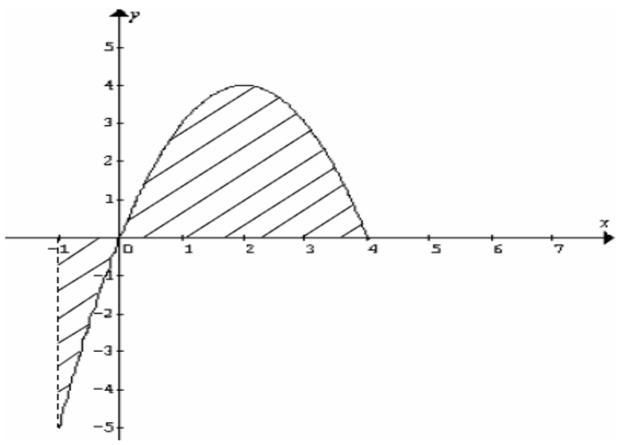
Questão 3

3) Em cada um dos casos abaixo, calcule a área da região hachurada.

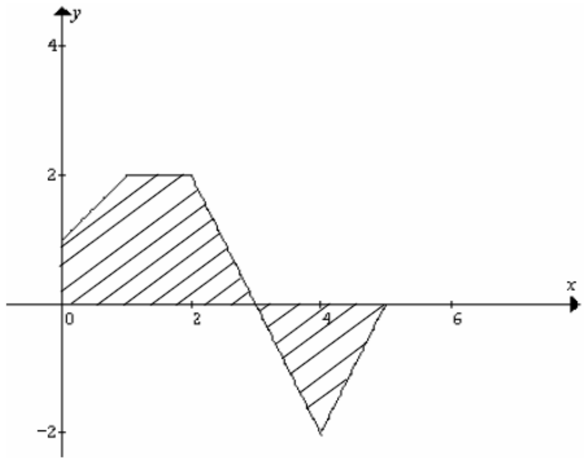
a) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$



b) $f(x) = -x^2 + 4x$



c) $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \\ -2x+6, & 2 \leq x \leq 4 \\ 2x-10, & 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$



A intenção é investigar como os alunos utilizam a noção de integral definida, como traduzem para a linguagem matemática, em termos da integral definida, a área a ser calculada, se utilizam o Teorema Fundamental do Cálculo para encontrá-la, se desenvolvem técnicas de integração ou alternativamente, usam argumentos geométricos quando possível e mais econômico em termos técnicos. No item c, um conhecimento básico de área de figuras planas é suficiente para determinar a área desta região. Para calcular a área algebricamente temos que escrever a função envolvida algebricamente, dividir o intervalo de integração em subintervalos, e usar o Teorema em cada uma destas partes.

A questão 4 tem por finalidade conhecer que estratégias são utilizadas pelos alunos ao encontrar uma integral definida que não corresponde a um número real específico.

Questão 4

4) Se $g(x) = \int_2^x (2t-1)dt$, *determine:*

a) g(2) =

b) g'(x) =

c) g'(2) =

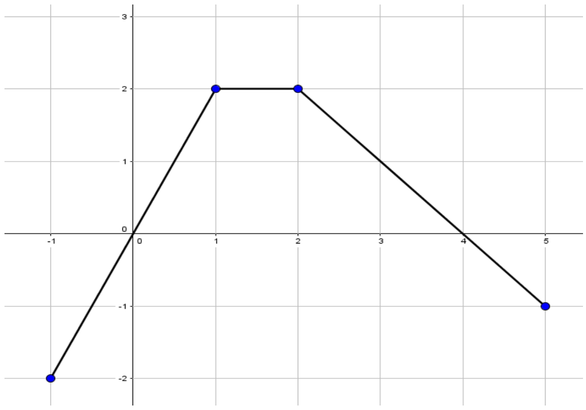
d) O que você pode dizer a respeito das funções g e g'?

A questão explora o entendimento de conceitos, manipulações algébricas e resultado referentes ao Teorema Fundamental do Cálculo; a saber, o entendimento do resultado da integral definida como uma função em x, o uso da linguagem matemática na escrita da integral nas variáveis x e t, a manipulação das duas variáveis na integral proposta, a derivada g'(x) que é "igual" ao integrando de g. A questão pode ser respondida usando o TFC, ou não.

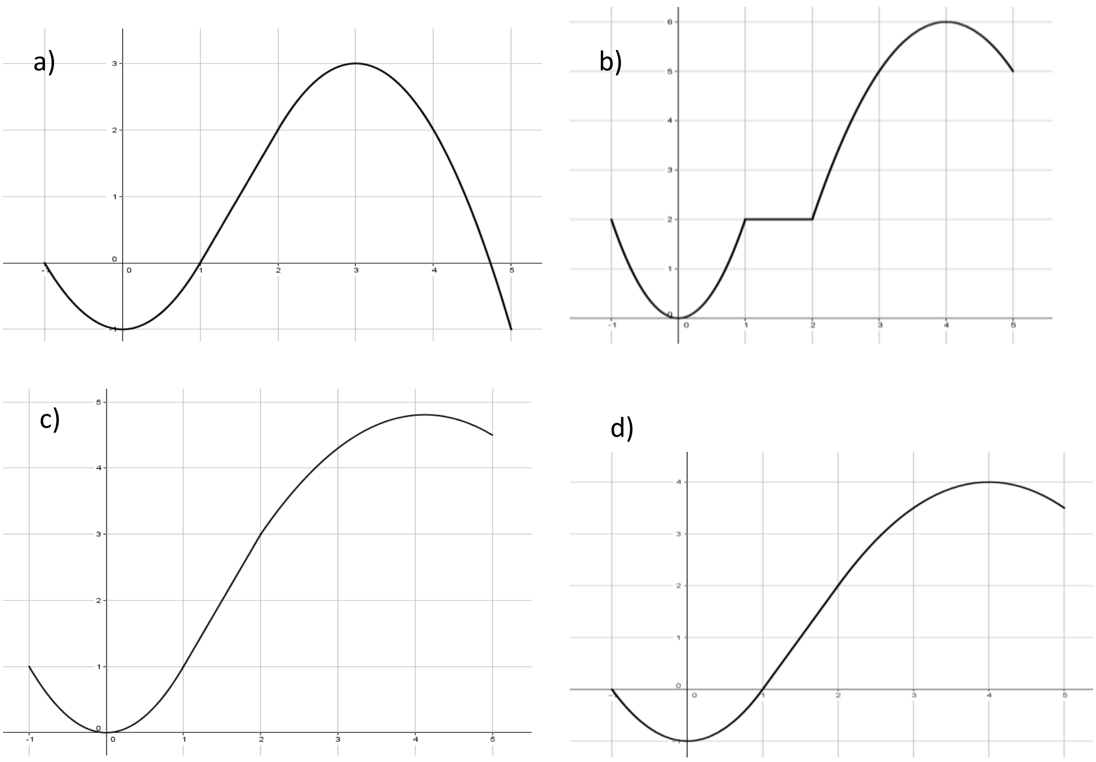
A questão 5 explora as relações entre uma função, sua integral e a derivada de sua integral.

Questão 5

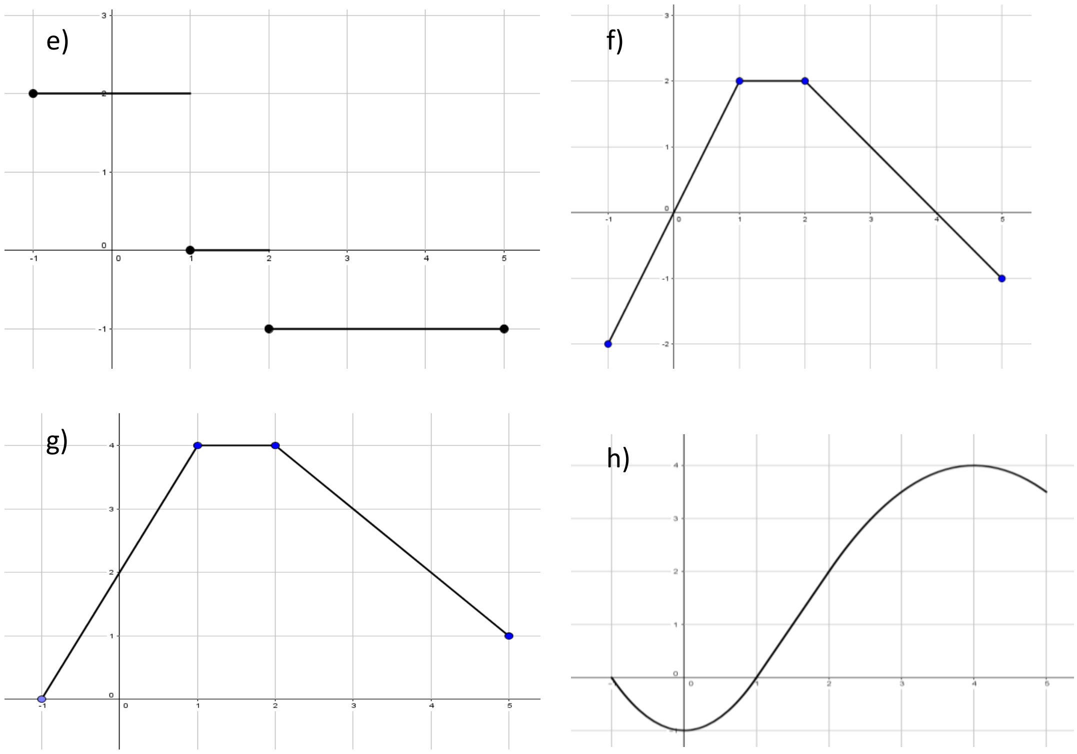
5) O gráfico abaixo é o gráfico da função f definida no intervalo [-1, 5].



a) Qual dos gráficos (a), (b), (c), (d) poderia ser o gráfico de F, onde $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)$*? Justifique sua escolha.*



b) Qual dos gráficos (e), (f), (g), (h) poderia ser o gráfico de F'? Justifique sua resposta.



Aqui, relacionamos os conceitos presentes na questão 4 (anterior) com suas representações gráficas. Ou seja, dado o gráfico de uma função, a questão é qual dos gráficos pode ser o gráfico de sua integral (sua primitiva); e dado o gráfico da integral dessa função, qual será o gráfico de sua derivada (derivada da integral da função dada inicialmente). Procuramos, assim investigar de que modos os alunos associam as relações expressas na segunda parte do TFC, graficamente. Temos ainda a intenção de conhecer a imagem conceitual evocada pelos alunos, investigando se as representações visuais dos mesmos estão incluídas. Entendemos que a resolução desta questão está intimamente ligada à resolução da questão anterior, pois esta questão tenta verificar se os alunos conseguem reconhecer a função derivada e integral de uma outra função observando apenas seus gráficos, enquanto que a questão anterior tem objetivos semelhantes porém com foco algoritmo, e não gráfico.

Pretendemos, na questão 6, contrastar a imagem conceitual evocada pelos alunos sobre integral definida com a definição conceitual, e a definição formal do conceito.

Questão 6

6) Explique o que você entende por $\int_a^b f(x)dx$ *(a integral definida da função f no intervalo [a, b]).*

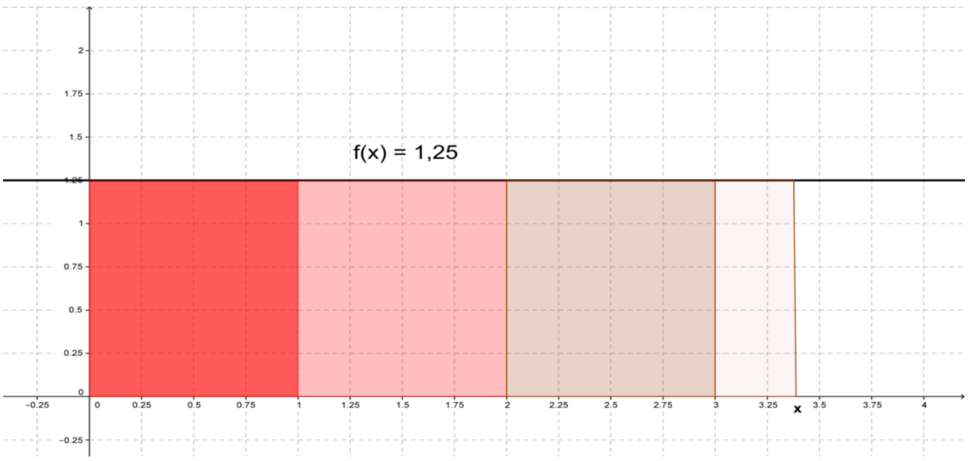
Os resultados da análise das respostas a esta questão serão comparados com as respostas ao exercício anterior (5), a fim de elaborar explicações a partir de concepções evocadas.

Na questão 7, o propósito é o de analisar como os alunos resolvem esta questão; em especial, se evocam e usam a ideia central do TFC ($\int_a^b$ f(x)dx= F(b) – F(a)). Aqui, fazemos uso da representação gráfica do teorema.

Questão 7

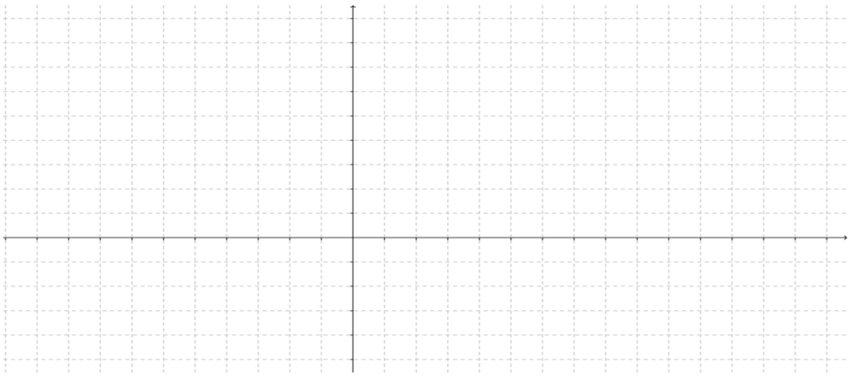
7) Desenhe o gráfico da função área A para a função dada f, como no exemplo abaixo. Calcule a área sob o gráfico f geometricamente, primeiramente em pontos individuais, e depois generalize para um x qualquer. Além disso, escreva a função área A em função de x.

a)

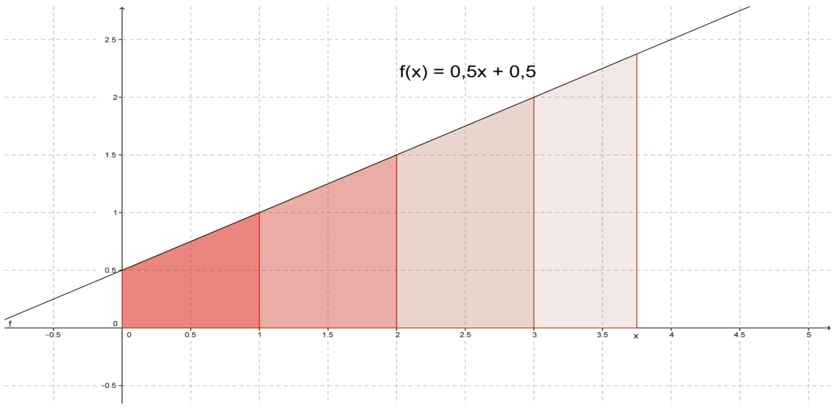


X	*A(x)*
1	
2	
3	
T	

Tabela dos valores da função A em cada ponto x

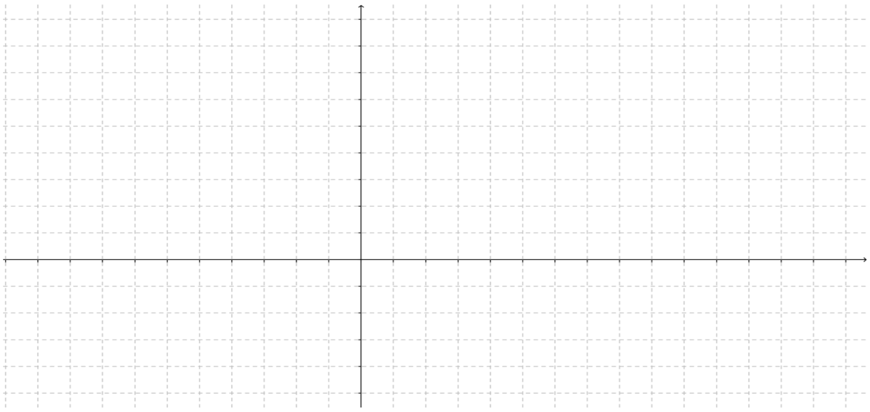


b)



X	*A(x)*
1	
2	
3	
T	

Tabela dos valores da função A em cada ponto x



Além de mapear as soluções propostas, investigaremos se os alunos conseguiram associar as ideias contidas no teorema com a representação gráfica e resolver os itens pedidos.

Do mesmo modo que na questão anterior, temos a intenção de investigar se os alunos conseguem relacionar as ideias centrais do TFC utilizando recursos visuais e gráficos, mas agora explorando a primeira parte deste teorema.

Questão 8

8) Nas figuras abaixo estão representados os gráficos das funções f e g. Sabendo-se que g' = f (ou seja, g é a primitiva de f), calcule a área sob o gráfico de f (ilustrado na figura 1) no intervalo [-1, 1]. Justifique sua resposta, explicitando o método usado.

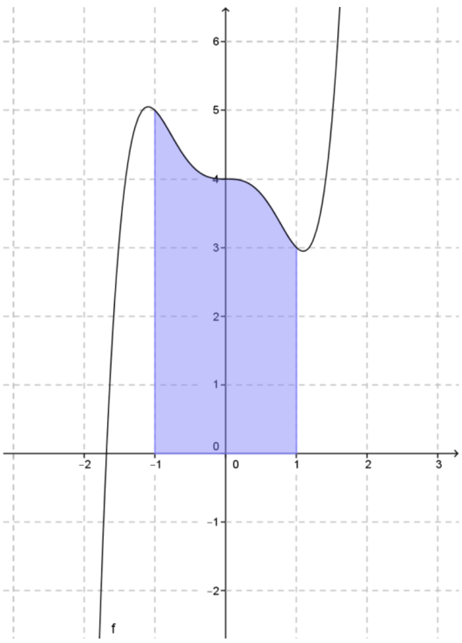


Figura 1: Gráfico da função **f**

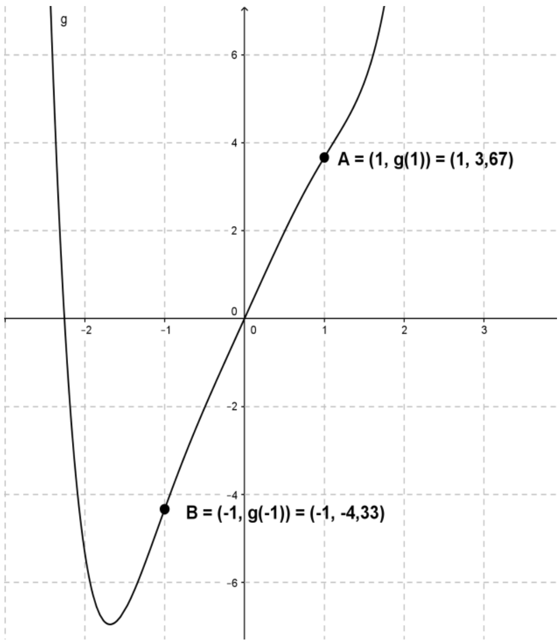


Figura 2: Gráfico da função **g**

Estamos interessados em investigar qual é a imagem conceitual que os alunos irão evocar ao se depararem com uma questão em que a "simples" visualização e uso das ideias do TFC seriam suficientes para resolver o problema. Em particular, investigamos se os estudantes conseguem entender que a área sob o gráfico de f em [-1, 1] é igual a calcular g(1) – g(-1), onde g é uma primitiva de f.

As questões 1, 2, 4 e 5 foram inspiradas no questionário em Segadas (1998). A questão 1 foi adaptada da sua versão original e as questões 2 e 5 foram propostas como naquela pesquisa, com os gráficos refeitos. Na questão 4 acrescentamos um item, o item d, que não havia sido proposto no questionário original.

As questões 3 e 6 são adaptadas do questionário em Escarlate (2008), cuja pesquisa é investigar o ensino e aprendizagem do conceito de integral definida. Este autor procurou identificar os principais conflitos surgidos na aprendizagem deste conceito por alunos de graduação em matemática da UFRJ. Ele questionou se a noção de área pode ser considerada uma raiz cognitiva adequada para o conceito de integral definida. Neste contexto, adaptamos duas questões do questionário aplicados na pesquisa de Escarlate (2008) para aplicá-las nesta pesquisa, buscando verificar quais são os conceitos que os alunos evocam quando questionados sobre integrais definidas.

A questão 7 foi retirada de Kirsch (2014), com gráficos refeitos para este trabalho. Eu desenvolvi totalmente a oitava questão para esta pesquisa, em sua concepção e proposição de gráficos. Essa questão tem estreita relação com as questões de pesquisa desta dissertação, por isso a mesma torna-se relevante na composição das respostas. Não encontrei em outros trabalhos questões que explorassem tais conceitos, como desejado para esta atividade.

A seguir, descreveremos como foram pensadas e planejadas as atividades da oficina.

2.5.2 Oficina

Elaboramos uma oficina com quatro atividades, visando responder à questão desta pesquisa. Propusemos atividades que explorassem a visualização dos conceitos envolvidos no TFC, que é o objeto deste estudo. No Anexo 4 estão todas as atividades propostas na oficina da maneira como foram apresentadas aos alunos.

A primeira atividade tem por objetivo investigar a imagem conceitual referente ao conceito de continuidade e explorar virtualmente a noção de uma função contínua em um intervalo (ver Tall, 1991 a).

A segunda atividade explora o cálculo aproximado de áreas abaixo de gráficos de funções positivas, buscando relacionar a possibilidade do cálculo com o fato de a função ser localmente horizontal por meio de uma extensão do eixo x, que é a noção de continuidade explorada na atividade 1. A proposta seria trabalhar no sentido de relacionar a continuidade e a integrabilidade de funções (ver Tall, 1991 a; b).

A terceira atividade explorou a primeira parte do TFC e foi a atividade efetivamente considerada na produção do material empírico para análise, por motivo já justificado. As imagens visuais utilizando o software *GeoGebra* estão detalhadas, iniciando pela descrição da atividade e objetivos.

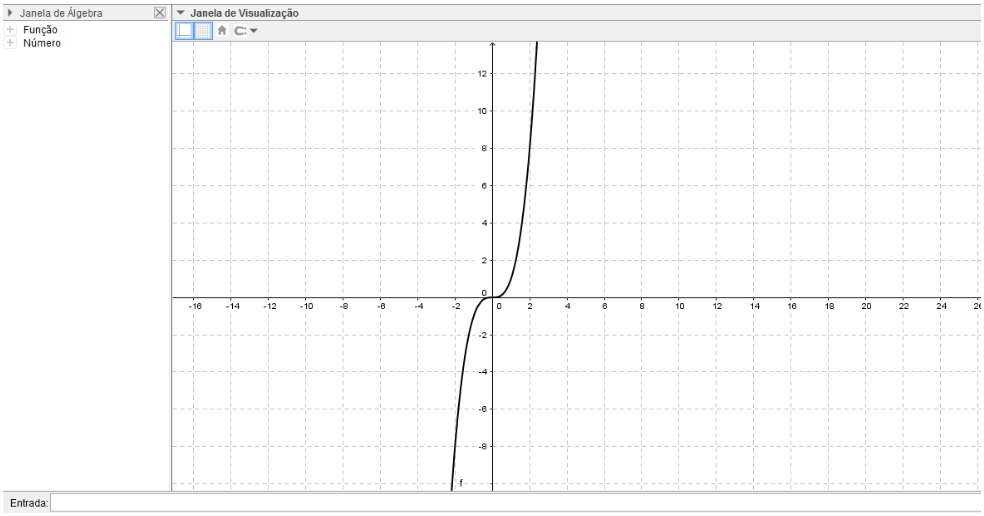
A quarta atividade teve o objetivo de investigar o TFC, a determinação da função primitiva de uma função e da área sob o gráfico de uma função, relacionando graficamente as informações entre os gráficos de uma função e de sua primitiva.

Atividade 1

A Atividade 1 tem por objetivo explorar visualmente a noção de continuidade de função em um intervalo, como sugerido em Tall (1991 a). Está dividida em 4 seções, nomeadas por **a**, **b**, **c** e **d**. Cada seção é um sub-roteiro, com número variável de questões.

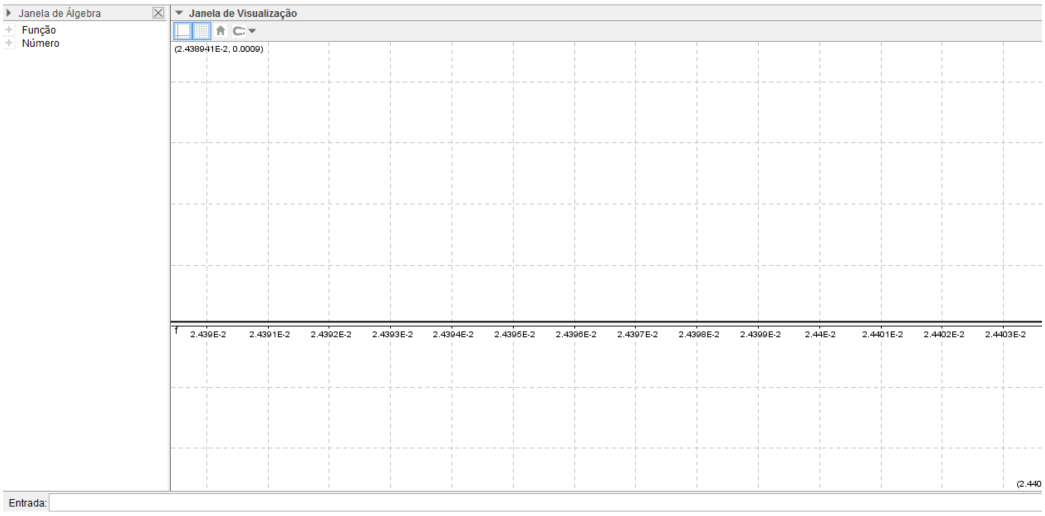
A seção a) propõe uma exploração direcionada do gráfico da função $y= x^3$ representada na janela de visualização buscando conhecer, primeiramente, que aspectos da imagem conceitual sobre continuidade os participantes evocam. Em seguida há instruções sobre como nos aproximarmos de um ponto no eixo x, mantendo a escala do eixo y inalterada, para observarmos o gráfico da função que no caso, sendo contínua, fica horizontal. Após o experimento proposto ser realizado, busca-se conhecer as explicações dos participantes sobre a imagem na tela, e as relações, que eles podem estabelecer a partir do experimento, se alguma.

a) Observe a função desenhada na janela de visualização do Geogebra.



1-A função f dada é contínua? Justifique.

Pressione a tecla ***Shift*** *(mantenha pressionada) e clique em qualquer valor do eixo x e arraste para a direita pelo menos umas 3 vezes até o final da tela. Clique com o botão direito no fundo da janela e dê* ***zoom*** *de 400% por pelo menos 3 vezes próximo ao gráfico.*

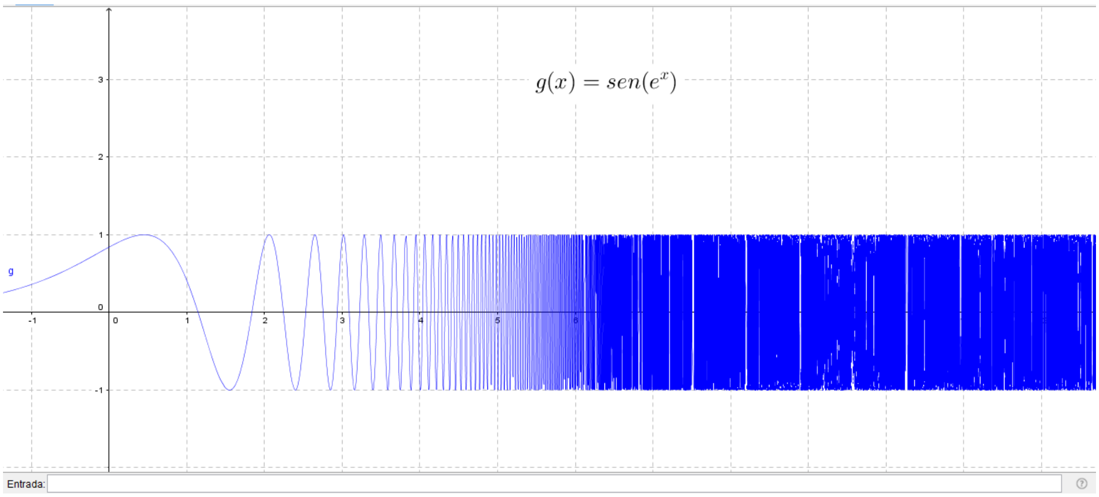


2-O que você acha que aconteceu com o gráfico?

3-Qual é a aparência do gráfico no intervalo que você está visualizando? Da forma como você vê o gráfico agora, que tipo de função este gráfico parece se baseando somente nessa visualização?

As seções que se seguem propõem explorações semelhantes, de outras funções; a saber, a função g(x) = $\sin(e^x)$ na seção b), a função g(x)= $\begin{cases} x^2 : x \leq -2 \\ 3 : \; -2 < x \leq 2 \\ sen(x) + 3 : caso\ contrário \end{cases}$ na seção c) a função h(x) = $\frac{1}{x}$ na seção d). Ao seguir o roteiro, os participantes são convidados a explorar as funções representadas, comparar o que eles vêm acontecer na tela durante o zoom, estimulado a elaborar conjecturar e investigar uma mesma função em proximidades de pontos distintos, para compará-las e levantar conjecturas sobre sua continuidade ou não nos pontos investigados.

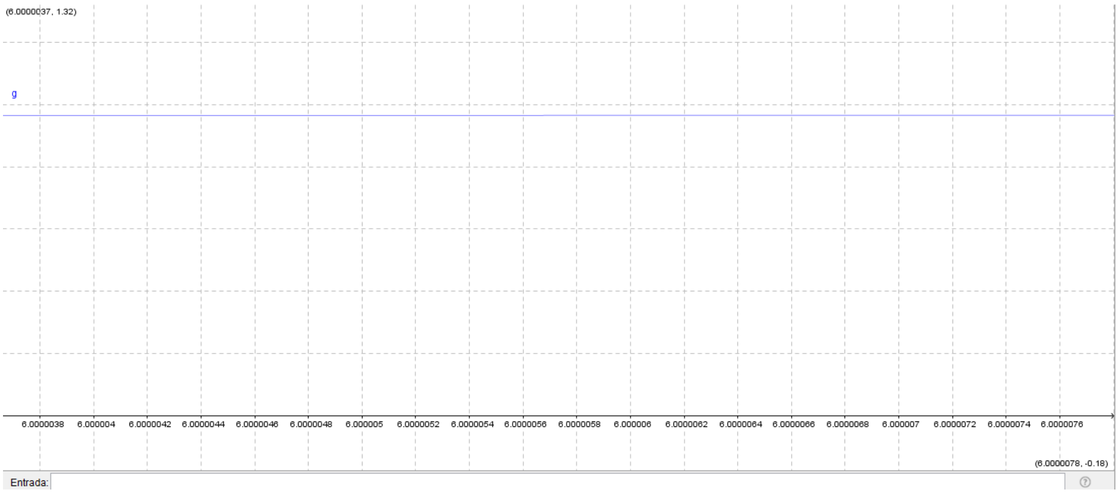
b) Observe a função desenhada na janela de visualização do Geogebra.



1-A função g dada é contínua? Justifique.

2-Como você acha que ficará o gráfico da função g se fizer os mesmos procedimentos feitos para o caso anterior?

Pressione a tecla ***Shift*** *(mantenha pressionada) e clique em qualquer valor do eixo x entre 6 e 7 e arraste para a direita pelo menos umas 9 vezes até o final da tela. Clique com o botão direito no fundo da janela e dê* ***zoom*** *de 400%uma vez próximo ao gráfico.*

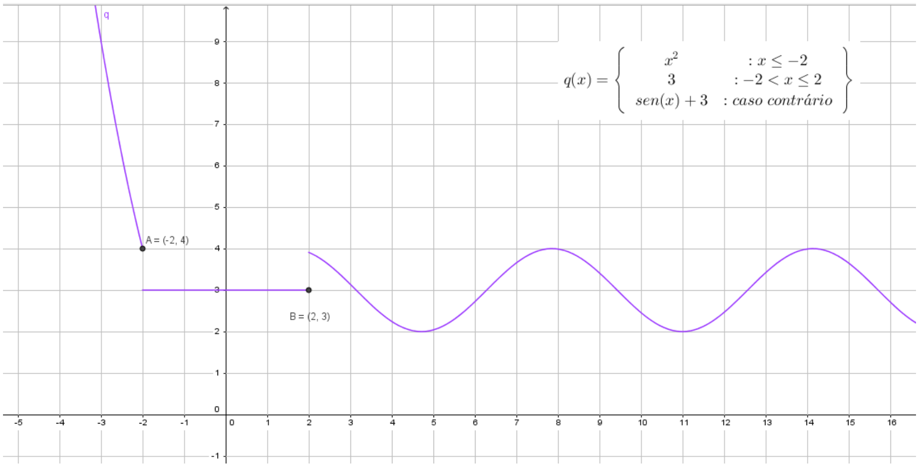


3-O que você acha que aconteceu com o gráfico?

4-Qual é a aparência do gráfico no intervalo que você está visualizando? Da forma como você vê o gráfico agora, que tipo de função este gráfico parece se baseando somente nessa visualização?

5-Depois de fazer os mesmo passos do caso anterior, você achou que os tipos de gráficos encontrados são ou não semelhantes? Você acha que isso ocorrerá para os tipo de gráfico?

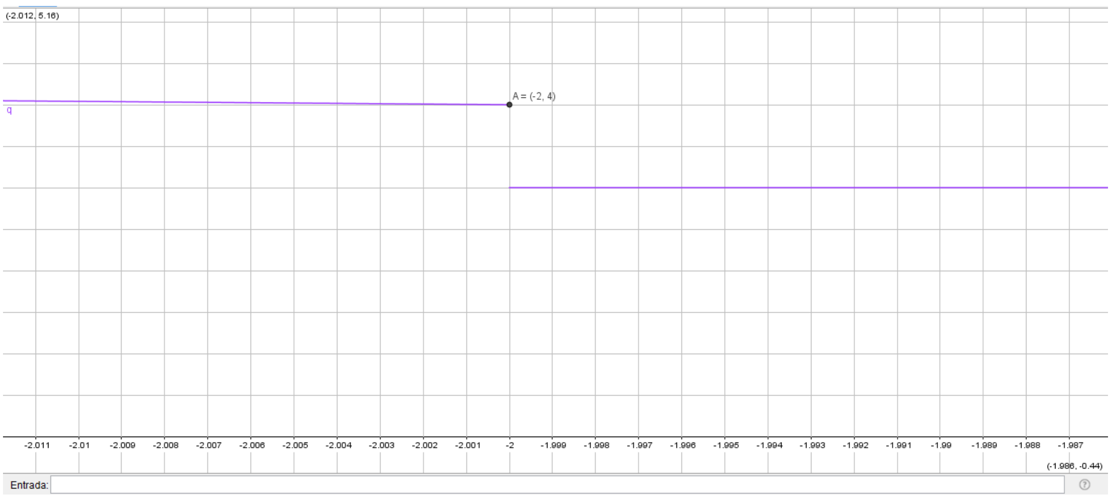
c) Observe a função desenhada na janela de visualização do Geogebra.



1-A função q dada é contínua? Justifique.

2-Como você acha que ficará o gráfico da função q se fizer os mesmos procedimentos feitos para o caso anterior?

*Pressione a tecla **Shift** (mantenha pressionada) e clique em qualquer valor do eixo x próximo x = -2 e arraste para a esquerda pelo menos umas 6 vezes até o final da tela. Clique com o botão direito no fundo da janela e dê **zoom** de 200% uma vez próximo aoponto A.*

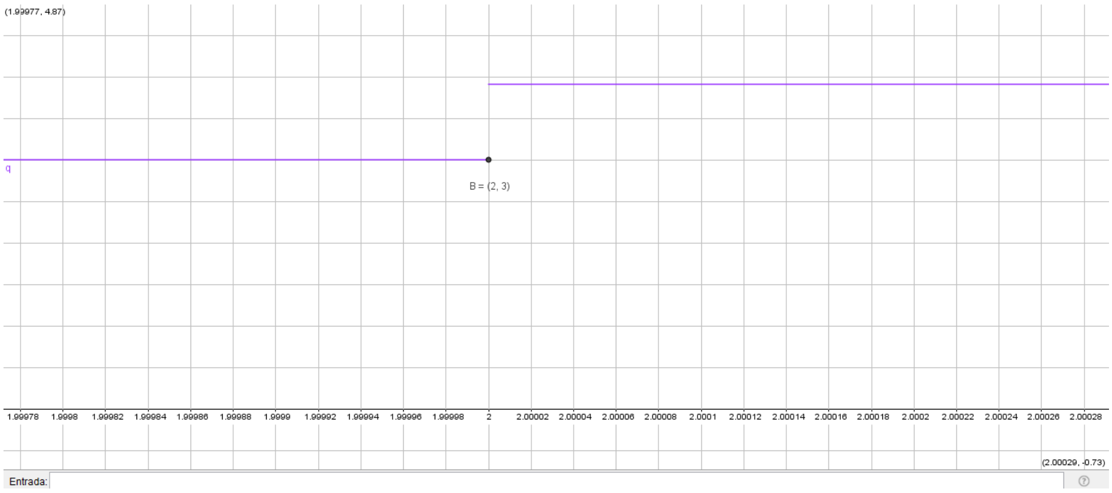


3-O que você acha que aconteceu com o gráfico?

4-Qual é a aparência do gráfico no intervalo que você está visualizando? Da forma como você vê o gráfico agora, que tipo de função diria que este gráfico seria se baseando somente nessa visualização?

5-O que acontece com o gráfico nas proximidades do ponto A? Justifique.

*Clique com o botão esquerdo e depois em **Visualização padrão.** Pressione a tecla **Shift** (mantenha pressionada) e clique em qualquer valor do eixo x próximo x = 2 e arraste para a direita pelo menos umas 6 vezes até o final da tela. Clique com o botão direito no fundo da janela e dê **zoom** de 200% uma vez próximo ao ponto B.*



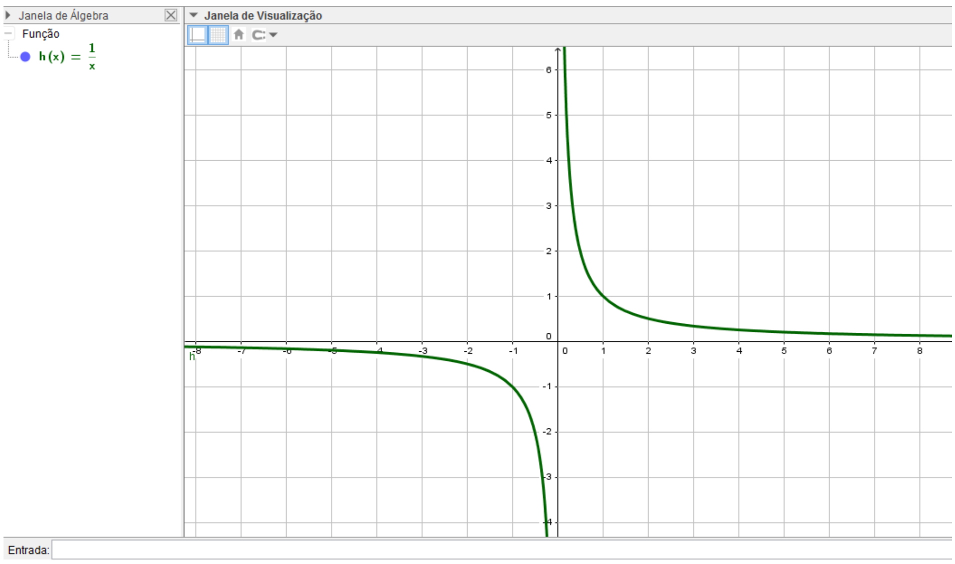
6-O que você acha que aconteceu com o gráfico?

7-Qual é a aparência do gráfico no intervalo que você está visualizando? Da forma como você vê o gráfico agora, que tipo de função diria que este gráfico seria se baseando somente nessa visualização?

8-O que acontece com o gráfico nas proximidades do ponto B? Justifique.

9-Comparando a função q toda com as funções anteriores, o que você pode dizer quanto à característica das funções quando as esticamos horizontalmente?

d) Observe a função desenhada na janela de visualização do Geogebra.

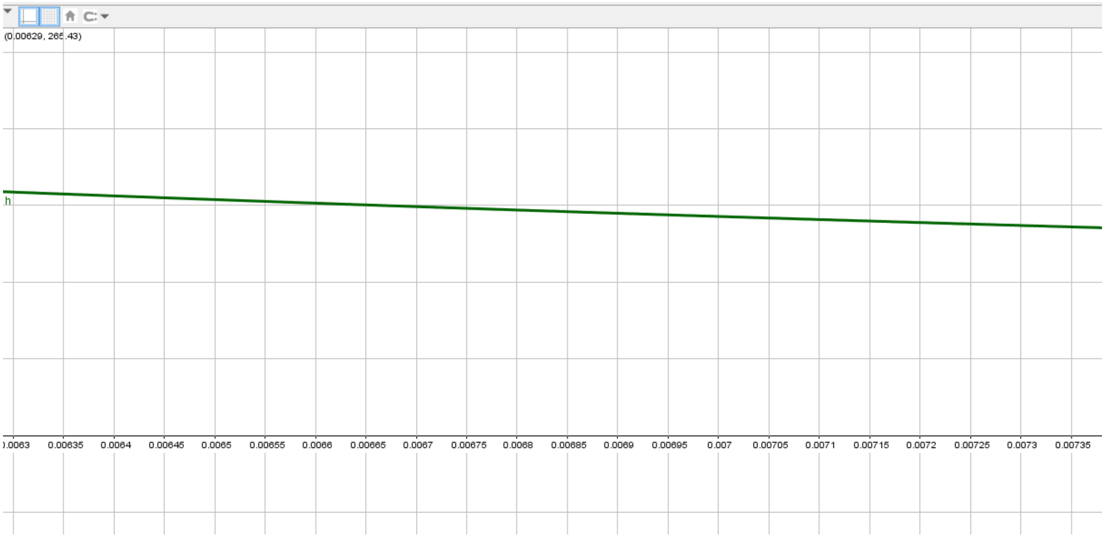


1-A função h dada é contínua? Justifique.

2-Como você acha que ficará o gráfico da função h se fizer os mesmos procedimentos feitos para o caso anterior?

*Pressione a tecla **Shift** (mantenha pressionada) e clique em qualquer valor do eixo x próximo a x = 0 e arraste para a direita pelo menos umas 3 vezes até o final da tela.*

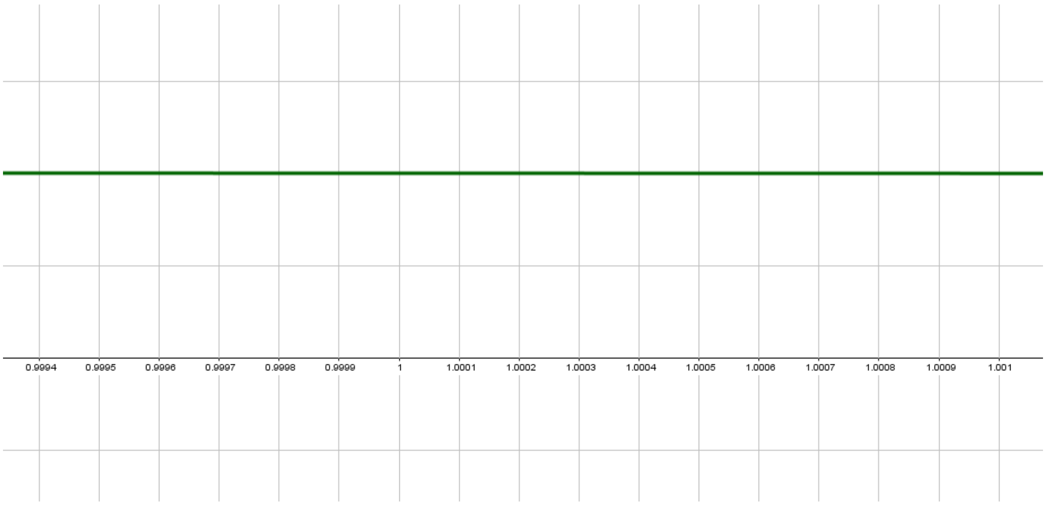
Clique com o botão direito no fundo da janela e dê zoom de 200% uma vez próximo à x=0.



3-O que você acha que aconteceu com o gráfico para x próximo de 0?

4-Qual é a aparência do gráfico no intervalo que você está visualizando? Da forma como você vê o gráfico agora, que tipo de função diria que este gráfico seria se baseando somente nessa visualização? Parece com os casos anterior? Explique.

Clique com o botão esquerdo e depois em Visualização padrão. Pressione a tecla Shift (mantenha pressionada) e clique em qualquer valor do eixo x próximo x = 1 e arraste para a direita pelo menos umas 6 vezes até o final da tela. Clique com o botão direito no fundo da janela e dê zoom de 400% uma vez próximo à x=1.



5-O que você acha que aconteceu com o gráfico?

6-Qual é a aparência do gráfico no intervalo que você está visualizando? Da forma como você vê o gráfico agora, que tipo de função diria que este gráfico seria se baseando somente nessa visualização?

7-O que acontece com o gráfico nas proximidades próximo x=1? Justifique.

8-Comparando a função q toda com as funções anteriores, o que você pode dizer quanto à característica das funções quando as esticamos horizontalmente?

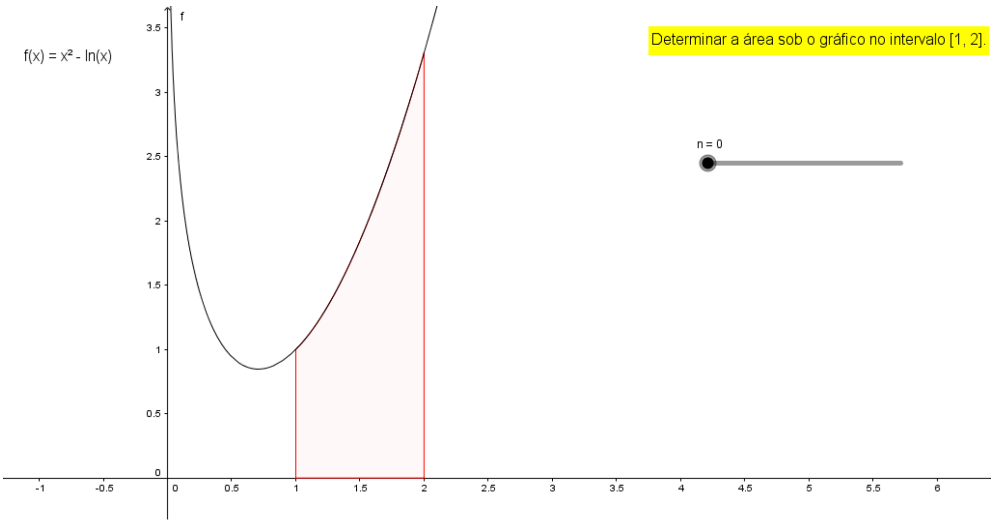
9-O que você diria agora, a função h é contínua ou não? Justifique.

Atividade 2

O objetivo da atividade 2 é explorar virtualmente o cálculo de áreas sob o gráfico de funções utilizando somas de Riemman. É desenvolvida em duas seções, que diferem apenas pela função dada; a saber, a função f(x) = x² - ln(x) na seção a) e a função f(x) = $\begin{cases} x+1 : x \leq 1 \\ -x^2+5 : x > 1 \end{cases}$ na seção b):

a) Iniciar a atividade apresentando o problema:

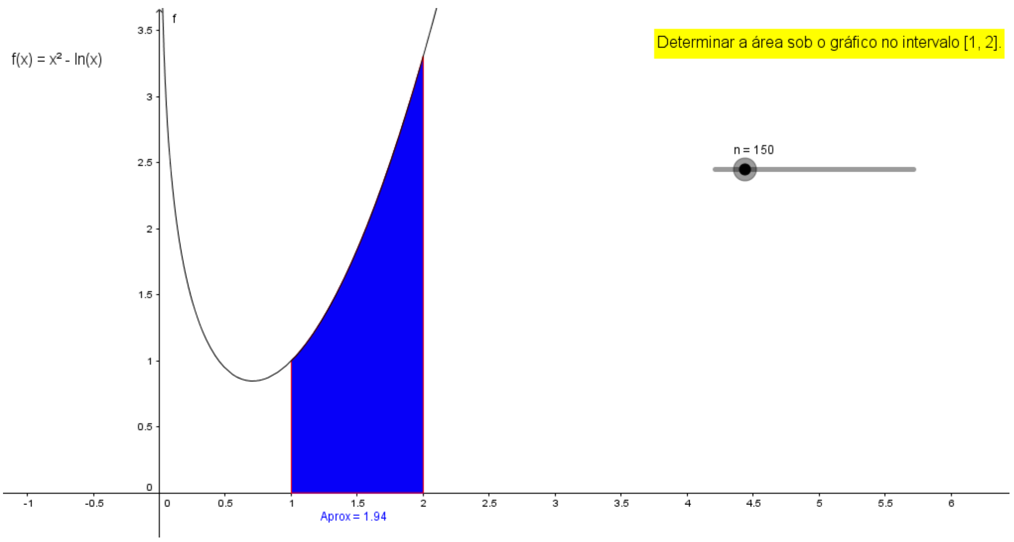
Determinar a área sob o gráfico no intervalo [1, 2].



Utilizar o controle deslizante para aumentar o número de retângulos e "melhorar" a aproximação da área sob o gráfico. Iniciar com n=0 e aumentar até n=100. Procurar respostas para as perguntas:

1- O que acontece com a aproximação da área pelos retângulos quando aumentamos o número de retângulos?

2-Quando n=150, a aproximação encontrada representa o valor exato da área?

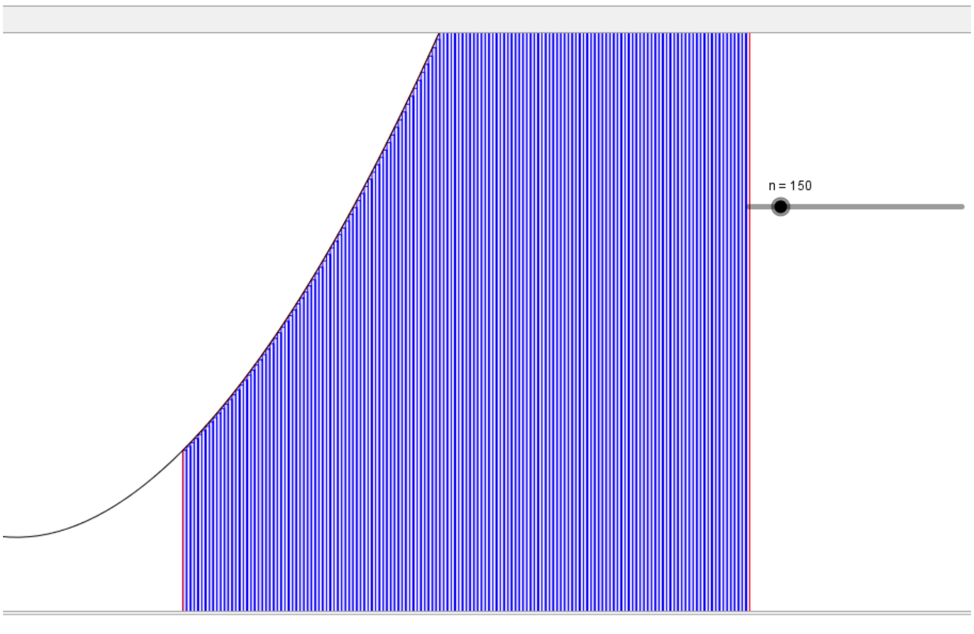


Clicar na aba ***Número*** *e depois no item* ***Área*** *com o botão direito e clicar em* ***Exibir rótulo****. Compare os valores numéricos da aproximação e do valor real da área sob o gráfico.*

Aprox = 1.94
Área = 1.95

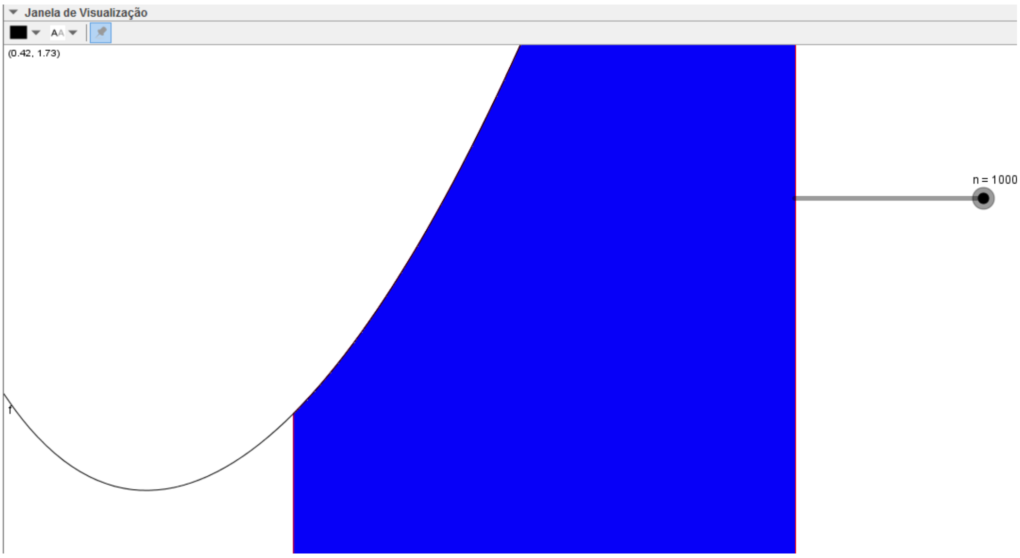
3-Qual é a sua interpretação da situação? Os valores são iguais? Por que?

Clique com o botão direito no fundo da janela e dê ***zoom*** *de 400%no gráfico.*



4-Qual é a sua interpretação a respeito da situação? O que você acha agora?

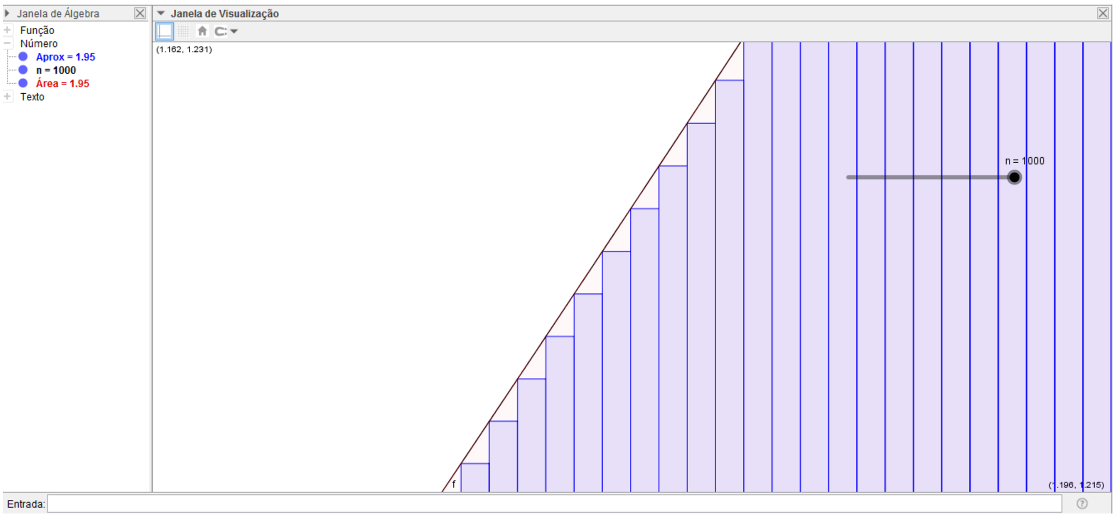
5-Aumente o valor de n para 1000.



6-O que você acha da aproximação da área sob o gráfico e da área com n=1000?

7-Será que elas representam graficamente a mesma coisa?

Clique com o botão direito no fundo da janela e dê ***zoom*** *de 400% por 3 vezes no gráfico.*



8-Agora, os valores numéricos da aproximação e da área são iguais?

9-Graficamente, a aproximação é igual a área?

9-O que você diria sobre o valor exato da aproximação ser igual ao da área mas graficamente os valores não serem iguais? Como isso pode acontecer?

10-O que ocorre quando n vai para até o infinito. Quando isso acontece, podemos dizer que a área vale 1,95 u.a.? Se sim, como você comprovaria isso?

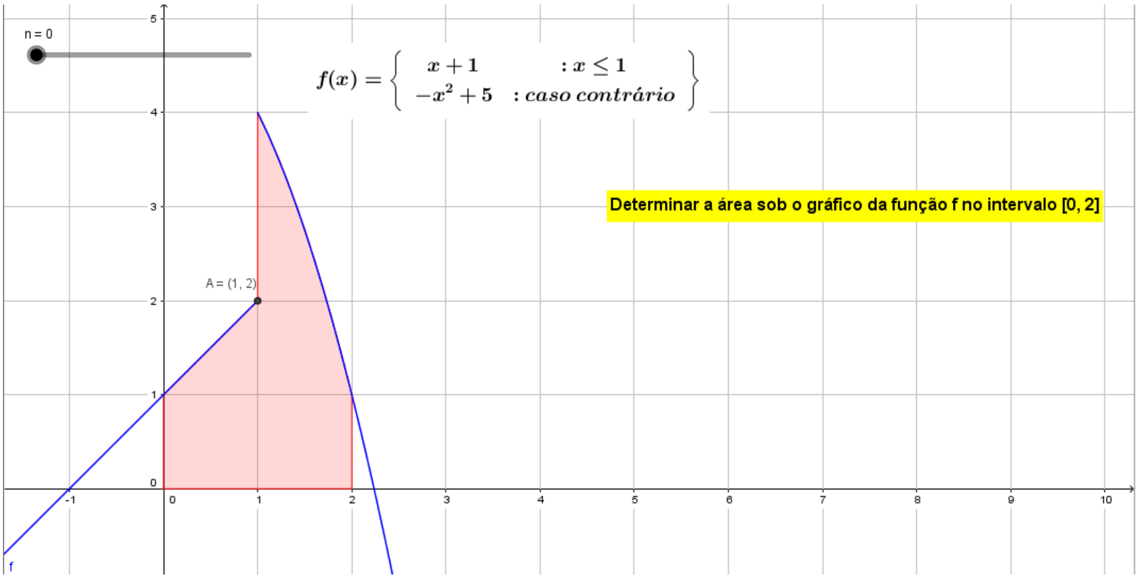
Clique com o botão direito no fundo branco da janela com o botão direito e depois clique em ***Visualização padrão****. Dê zoom de 200% no gráfico. Pressione a tecla* ***Shift*** *e* *clique em qualquer valor do eixo x entre 1 e 2 e arraste para a direita pelo menos umas 5 vezes.*

11-O que acontece quando "esticamos" o gráfico horizontalmente? Qual é a aparência do gráfico no intervalo que você está visualizando? Você acha que os retângulos descrevem bem a área sob o gráfico?

12-Se o número de retângulos tender ao infinito e "esticarmos" horizontalmente o gráfico, o que você pode dizer sobre a ideia de determinação da área por aproximações?

b)

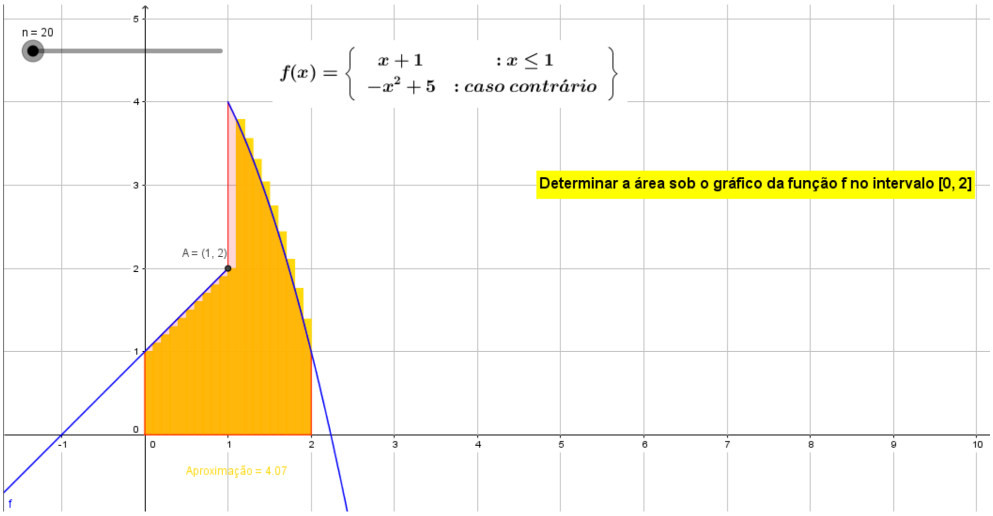
Determinar a área sob o gráfico da função f no intervalo [0, 2].



1-A função f é contínua? Justifique.

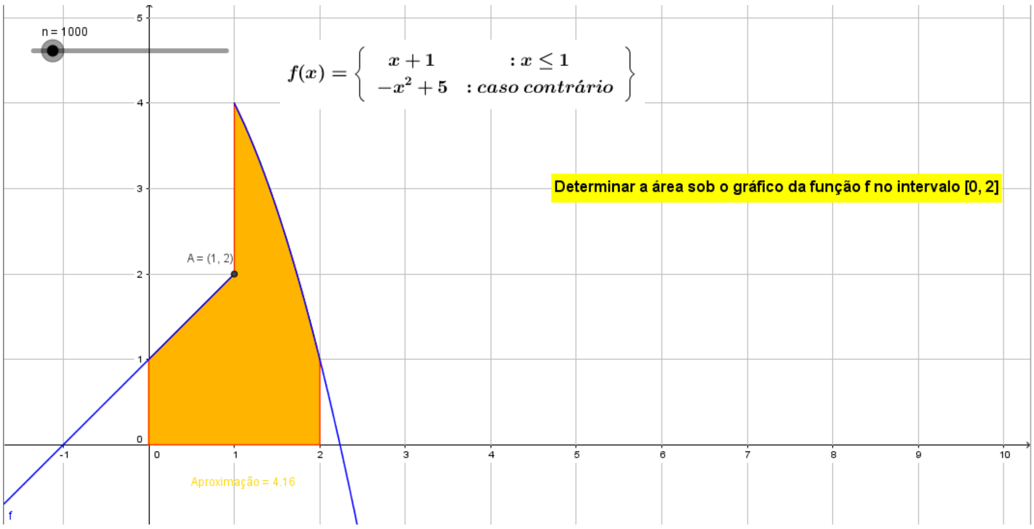
2-Você acha possível realizar uma boa aproximação da área por soma de retângulos de forma semelhante ao do caso anterior? Por que?

Aumente o valor de n de 1 em 1 até chegar em n = 20 e analise os valores numéricos da aproximação para cada retângulo.



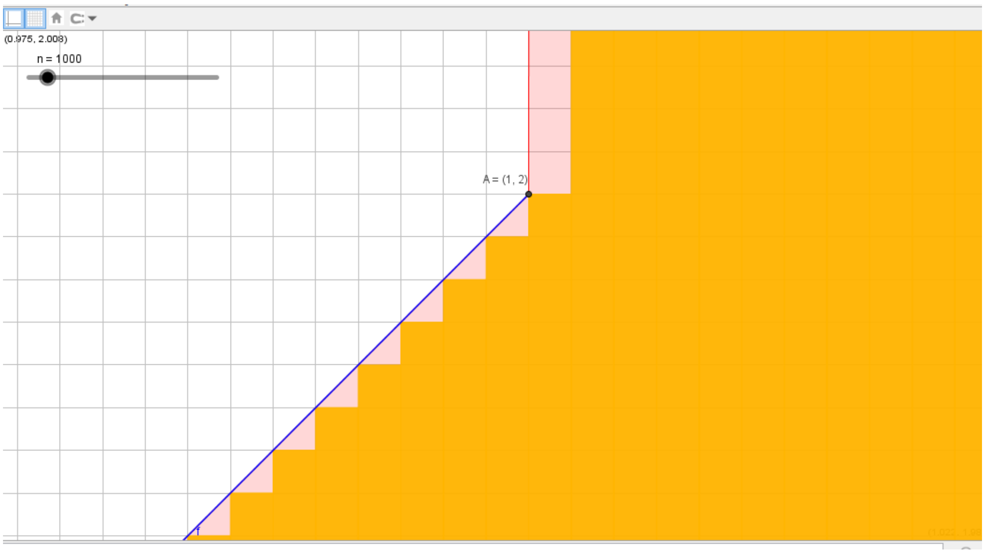
2-O que você acha dos valores da aproximação? A medida que aumentamos os valores de n, os valores da aproximação também continuam crescendo constantemente? Como você explicaria isso?

*3-Aumente o valor de n para 1000. Clique na aba **Número** e depois no item **Área** com o botão direito e clicar em **Exibir rótulo**. Compare os valores numéricos da aproximação e do valor real da área sob o gráfico.*



4-Qual é a sua interpretação da situação? Os valores são iguais? Por que?

*Clique com o botão direito no fundo da janela e dê **zoom** de 400% no gráfico pelo menos 3 vezes, próximo ao ponto A.*



5-Agora, os valores numéricos da aproximação e da área são iguais?

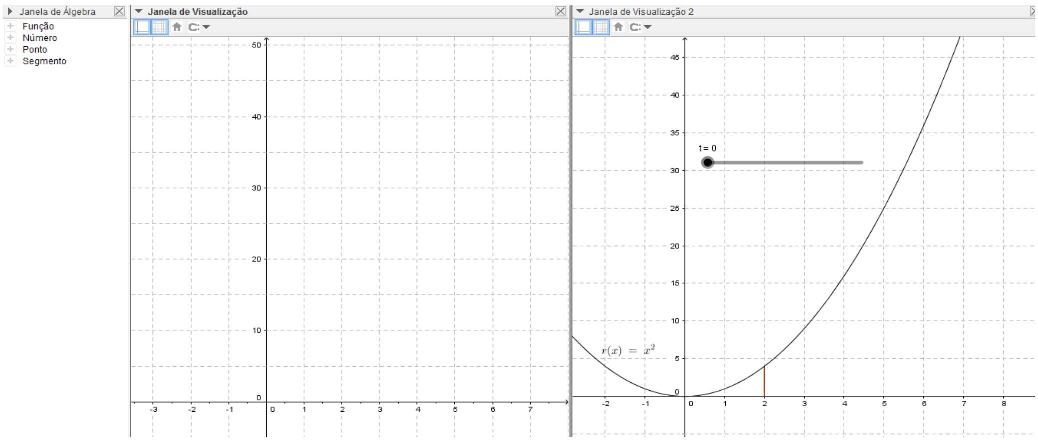
6-Graficamente, a aproximação é igual a área?

7-Quando n vai para o infinito, temos uma boa aproximação?

Atividade 3

O objetivo da atividade 3 é possibilitar a visualização de gráficos que fornecessem informações sobre área, função primitiva, a relação entre a função $r(x) = x^2$ e sua primitiva e a identificação da possibilidade do uso da primeira parte do TFC na resolução da mesma.

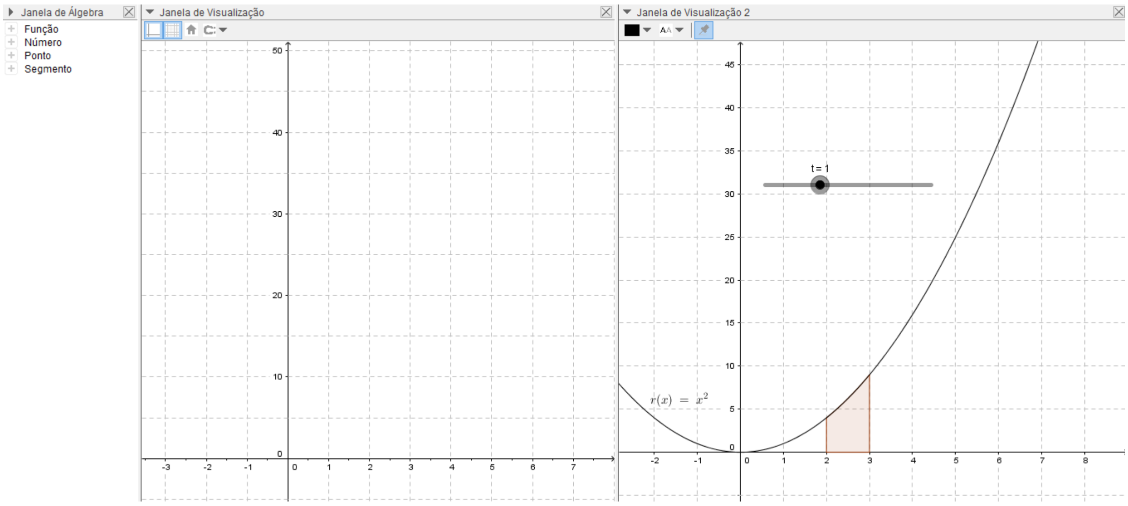
As imagens a seguir foram gravadas em telas da atividade no Geogebra por mim após a realização dos procedimentos indicados. Utilizamos esta seção para que se tenha real ideia do que foi encontrado pelo aluno ao participar da oficina.

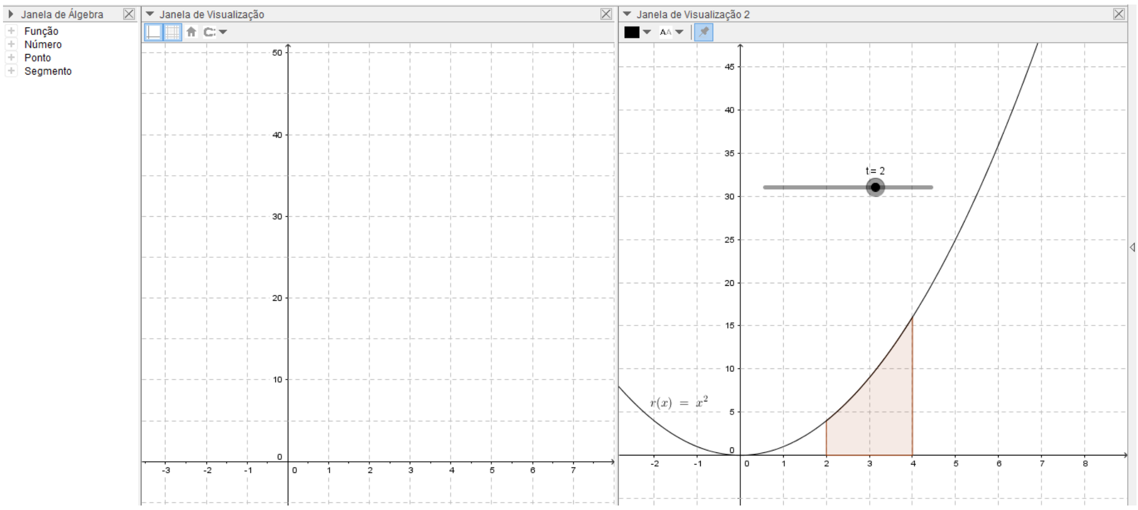


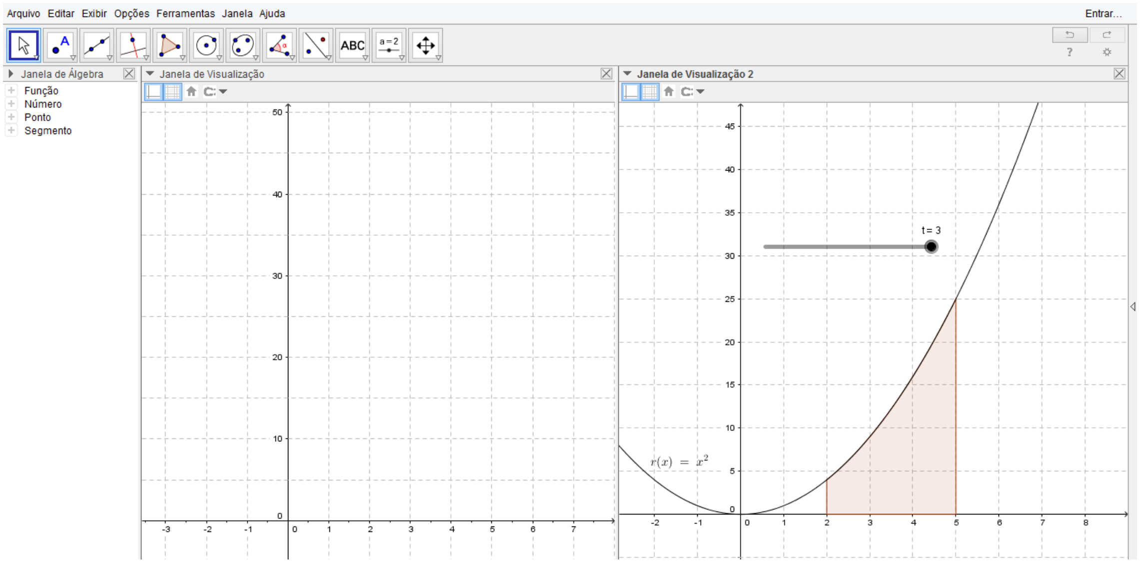
a)

Explore os recursos disponíveis no gráfico. Altere os valores da variável ***t****.*

1. *A função* ***r*** *é contínua? Justifique.*
2. *O que acontece no gráfico quando você altera os valores da variável* ***t****?*

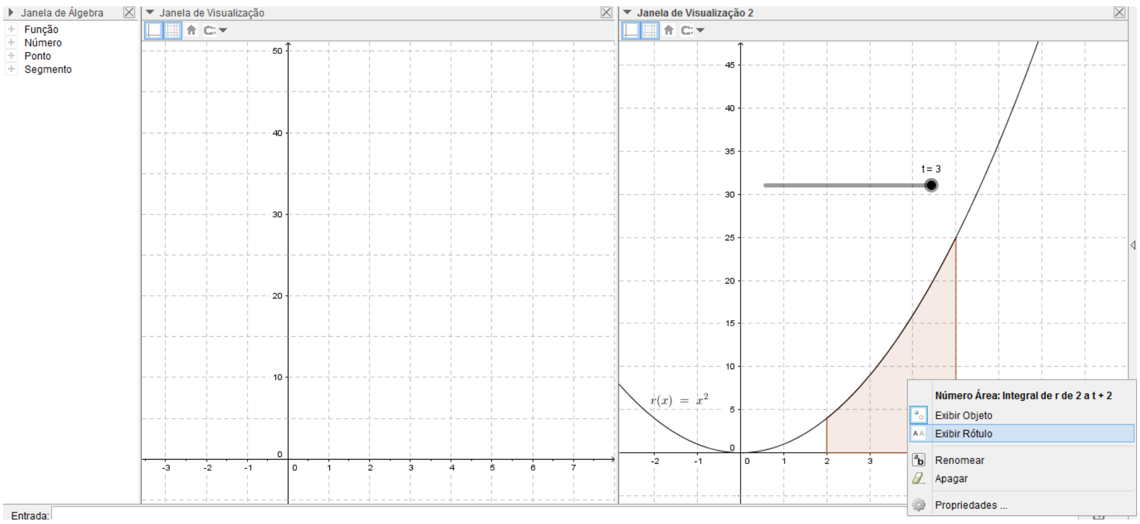




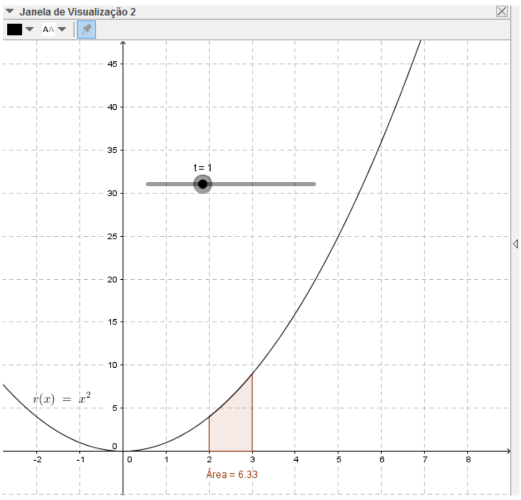


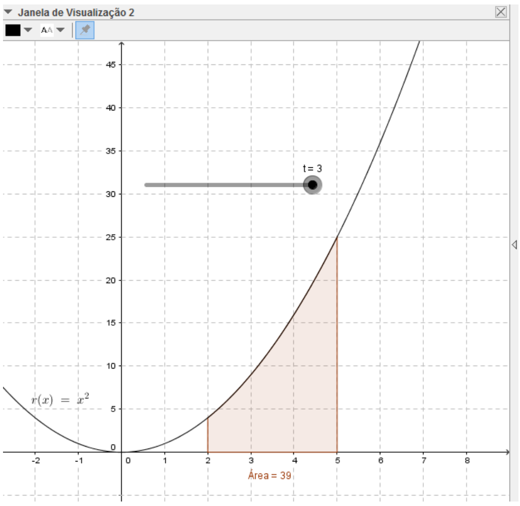
3. *Quando **t = 1**, o que está representado no gráfico?*
4. *Qual seria o valor desta representação?*
5. *E se **t = 3**? Qual seria o valor desta representação?*
6. *E se esta representação partir de **x=2** e for até um **x=t** qualquer onde **t>2**? Qual seria o valor desta representação nessas condições? Como poderíamos representar este valor encontrado?*

*Clique com o botão direito do mouse na representação que obtemos ao alterarmos os valores da variável t e clicar em **Exibir rótulo.***

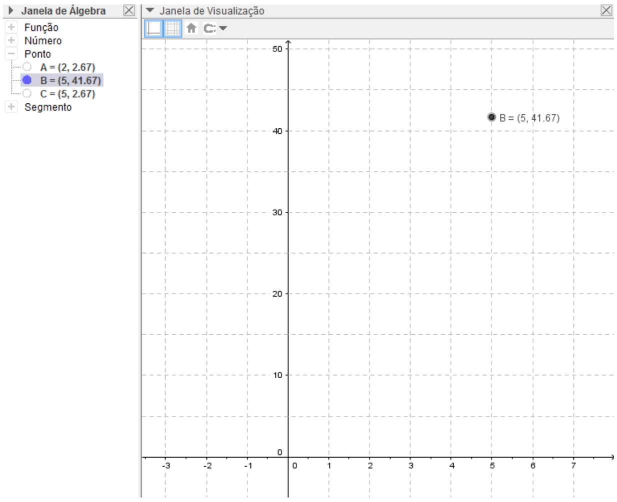


7. *Altere os valores da variável t e comparar os valores descritos para a área sob este gráfico e o que encontrou para **t=1** e **t=3**. Os valores são iguais ou diferentes? Se forem diferentes, explicite qual pode ter sido a causa para tal diferença?*

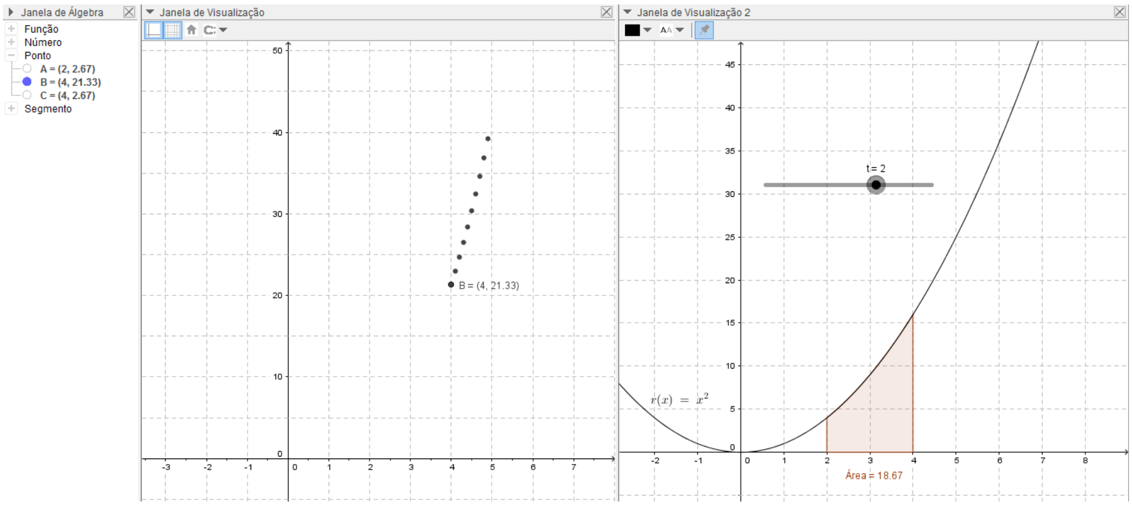


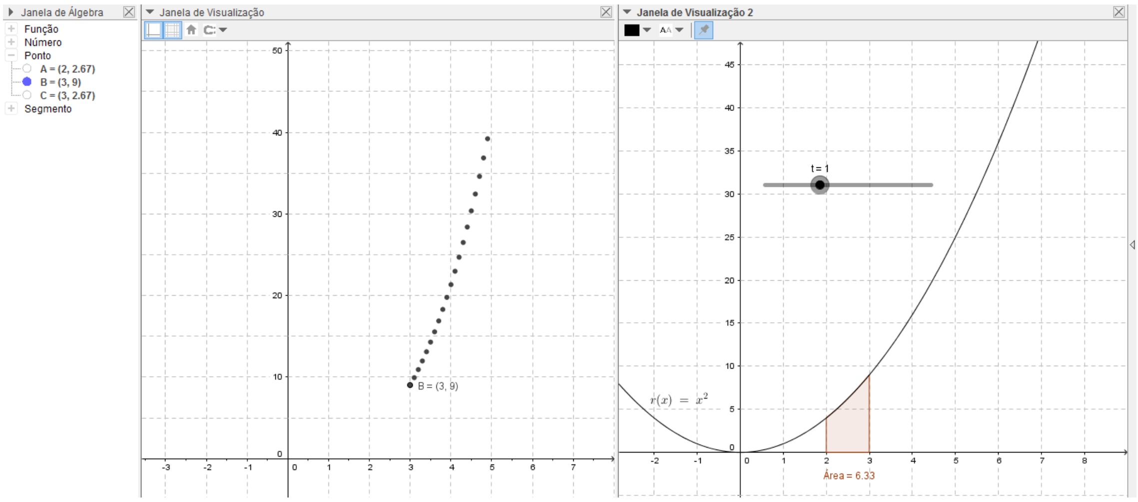


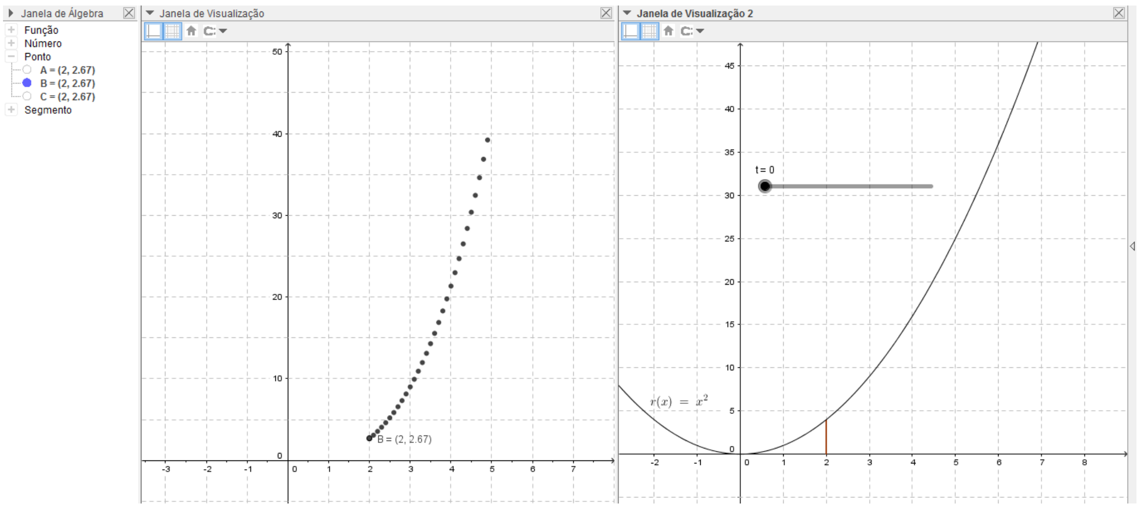
Clique na aba ***Ponto*** *situada a esquerda e ative o ponto* ***B****.*



8. *Ao alterar os valores da variável t, observe as coordenadas do ponto* ***B*** *e diga: o que acontece na janela ao lado? Qual a relação desta situação com o valor da área para cada valor de* ***t****? Como poderíamos encontrar um outro ponto* ***B'*** *se aumentássemos ou diminuíssemos o valor* ***t****? Qual a relação das coordenadas de* ***B*** *e o valor da área para cada valor de* ***t*** *na janela da direita?*

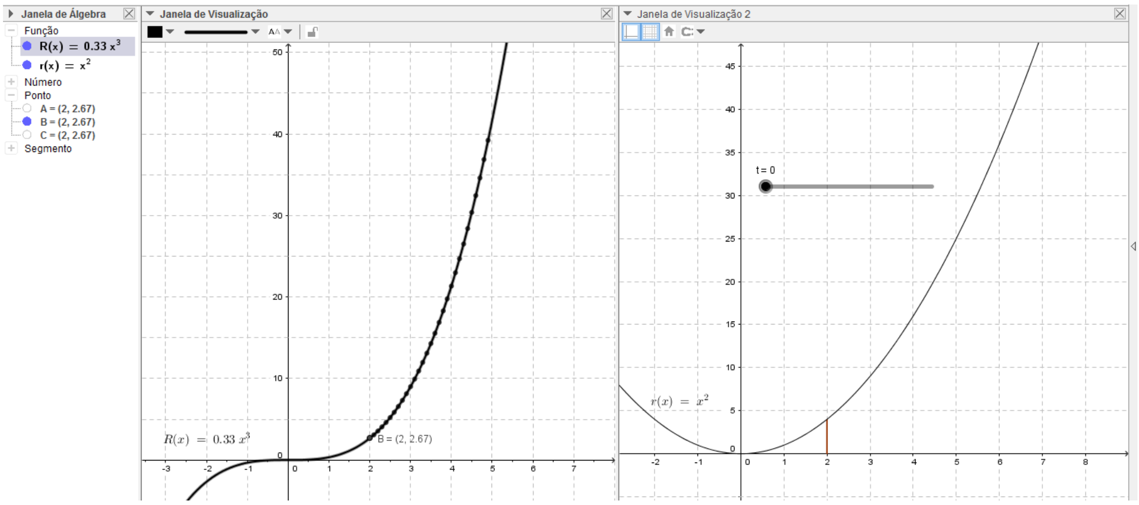






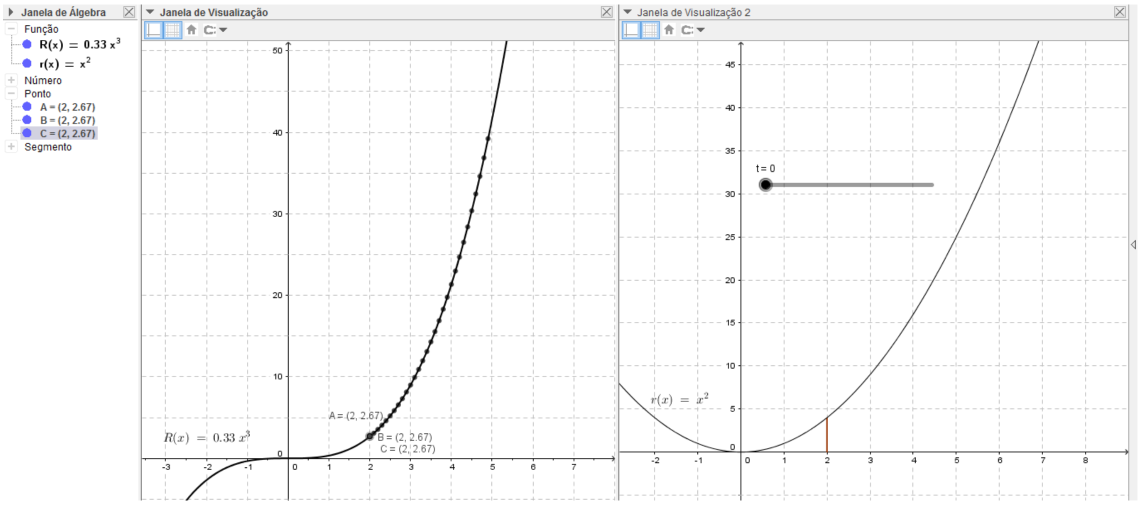
9. *Olhando para os rastros de* ***B****, o que você diria a respeito da representação gráfica de todos os pontos* ***B****'s? Existem algum forma geral de determina-los?*

*Cliquem na aba **Função** e ativem a função **R**. E perguntar:*



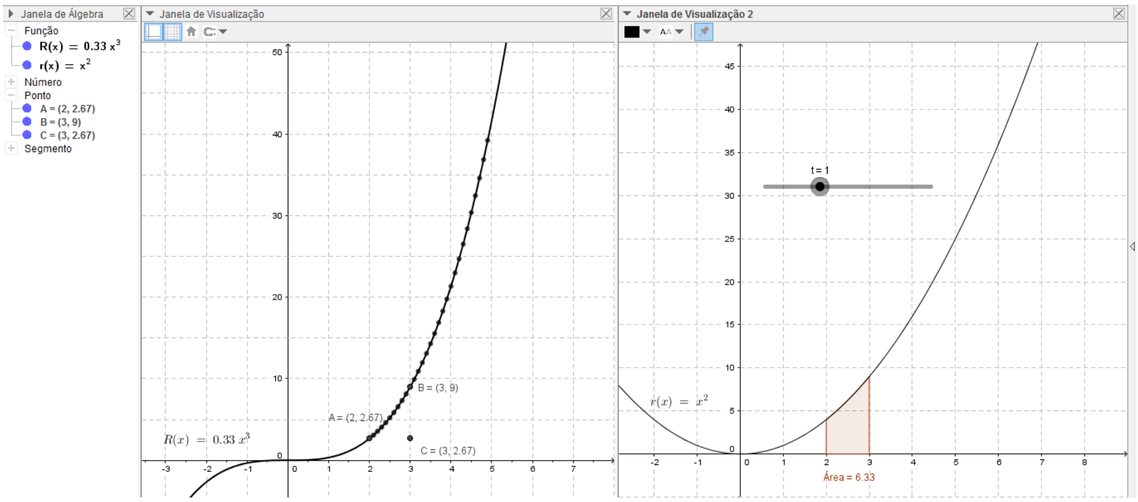
10. *O que você pode dizer sobre a função **R**? Pra você, esta função representa o quê?*
11. *Se quiséssemos achar as coordenadas de outros pontos **B** que não estão representados na janela, o que você faria?*
12. *Qual é a relação entre as funções **R** e **r**?*

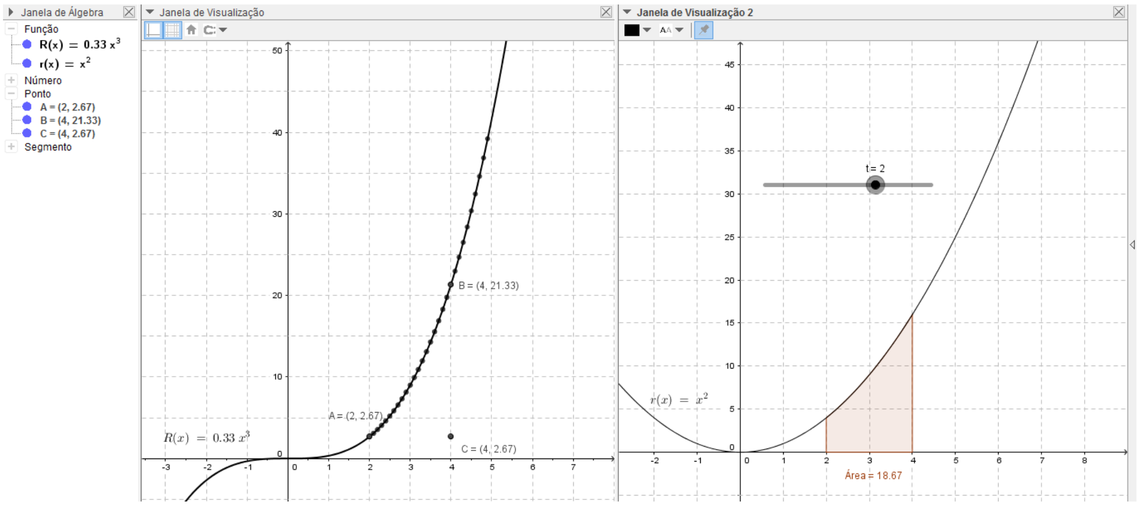
*Faça com que **t = 0** e depois clique na aba **Ponto** e ativar os pontos **A** e **C**.*

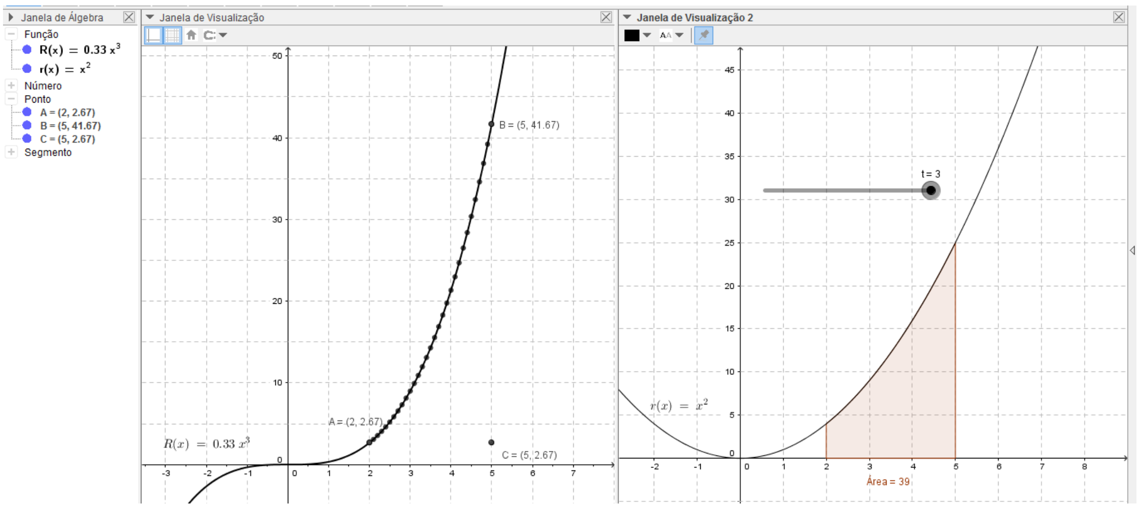


13. *Qual a relação entre as coordenadas desses pontos?*

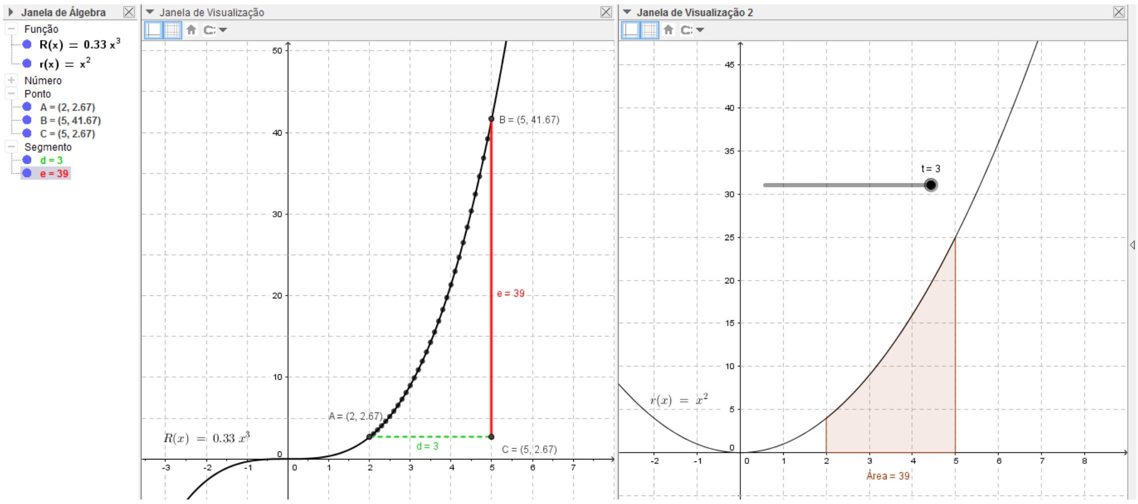
*Altere os valores da variável **t** e analise o que ocorre com os pontos **A, B** e **C**.*

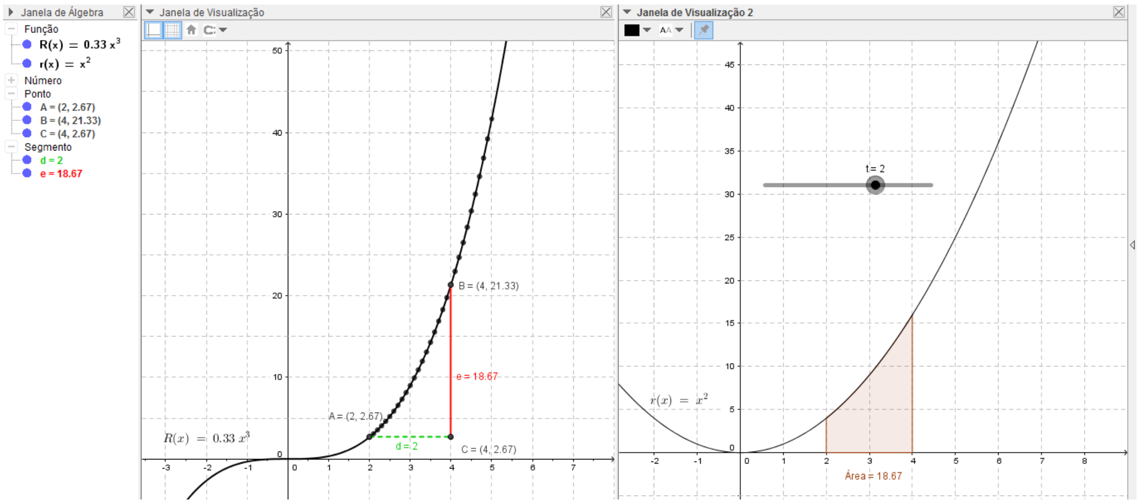


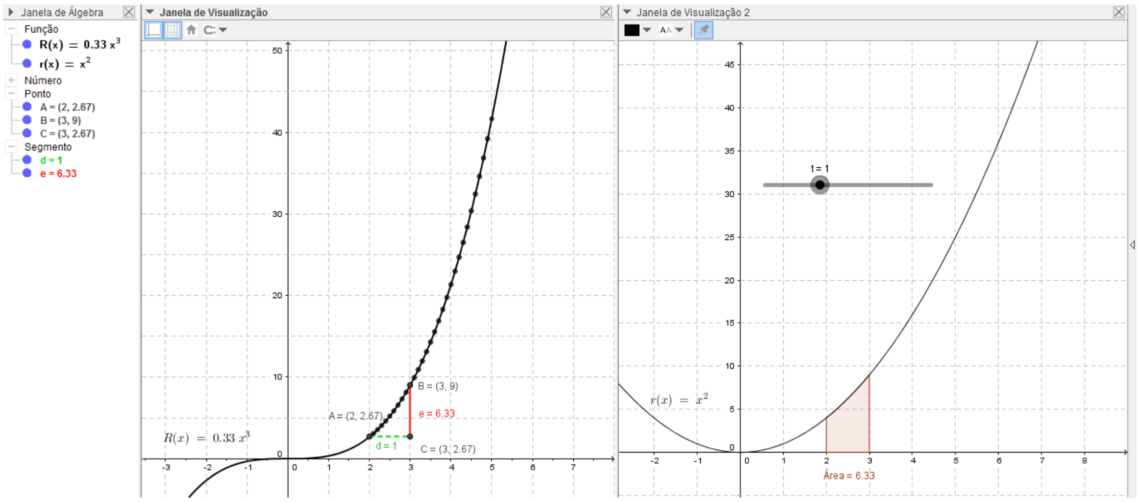




*Após, clique na aba **Segmento** e ative os itens **d** e **e** e altere os valores da variável t novamente.*







Após esses passos, perguntar:

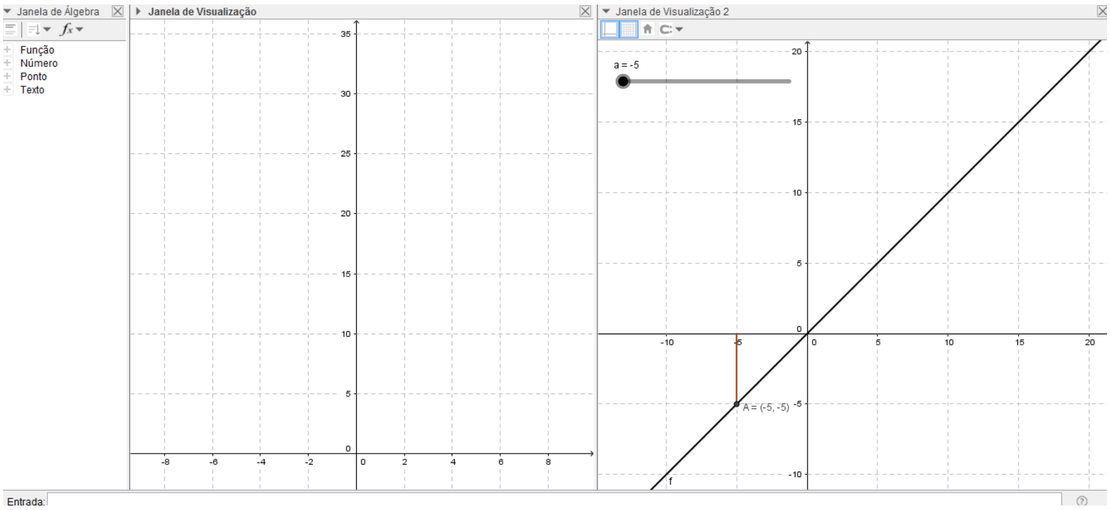
*14. Explique o que são os valores de **d** e **e** para os valores de **t** da janela ao lado?*

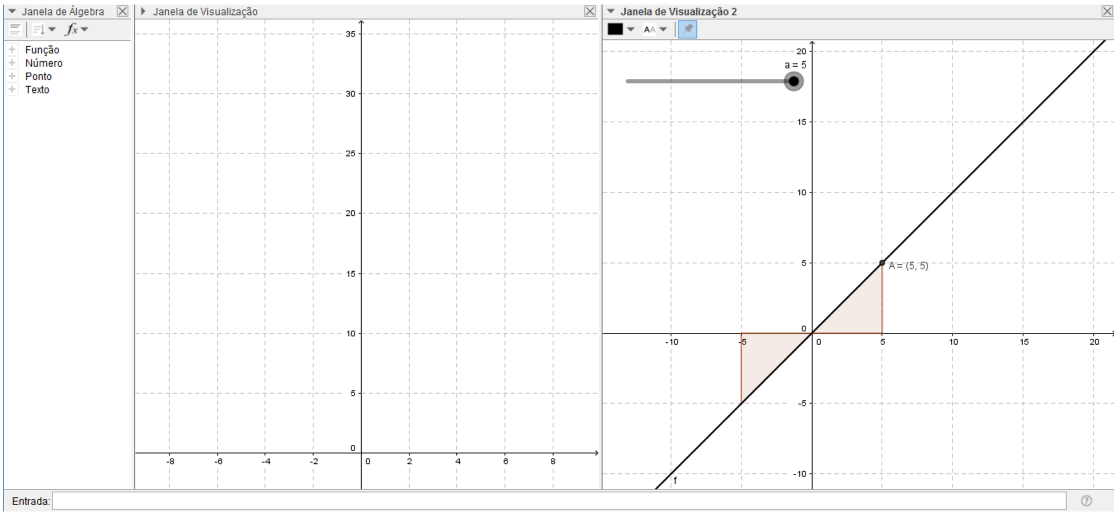
15. *Você poderia escrever **e** em função dos valores da função **R?***
16. *Qual é a relação do valor de **t** com o valor de **d**?*
17. *Qual é a relação do valor da **Área** da janela da direita e o valor de **e**? Por que isto acontece?*
18. *Utilizando as informações encontradas nesse exercício e tendo os dois gráficos a sua disposição, para você é possível encontrar a área sob o gráfico **r** num intervalo **[a, b]** utilizando somente as informações do gráfico de **R**?*

Atividade 4

Essa atividade se divide em três etapas, as quais tem como objetivo a investigação do TFC, a determinação da função primitiva de uma função e da área sob o gráfico de funções diferentes para cada seção; a saber, a função derivada f(x) = x na seção a), a função derivada f(x) = x+1 na seção b) e a função derivada h(x) = $\begin{cases} e^x : x \leq 1 \\ \ln(x) + 4 \end{cases}$ na seção c), relacionando graficamente as informações entre os gráficos dessas funções e de suas primitivas.

*a) Observe a função f. Altere o valor da variável **a.***



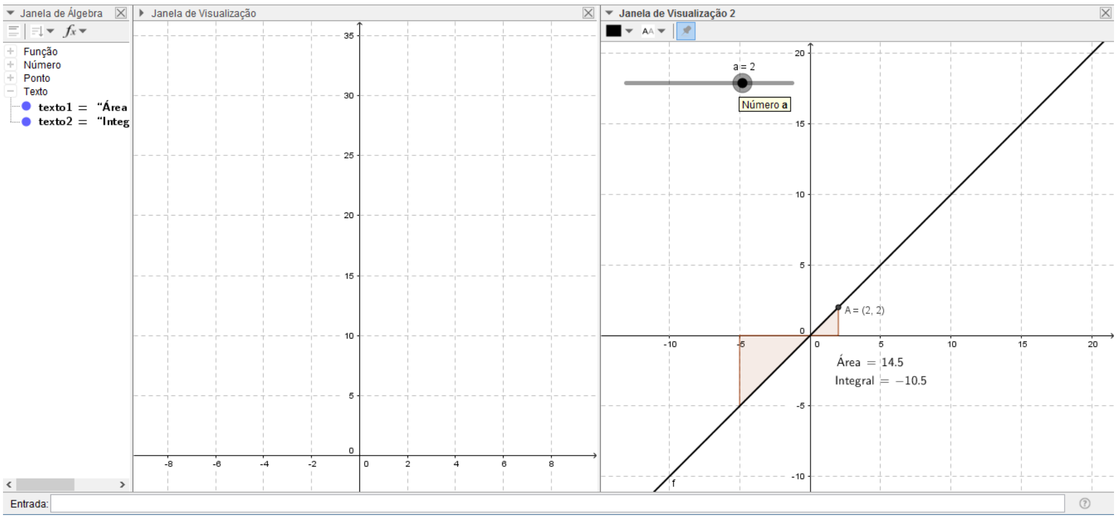


1. *O que acontece no gráfico quando você altere o valor da variável **a**?*
2. *Quando **a = 0**, o que está representado no gráfico?*
3. *Qual seria o valor desta representação?*
4. *E se **a = 5**, o que está representado no gráfico?*
5. *Qual seria o valor desta representação?*

*Clique na aba **Texto** e habilite o item **Texto 1** e faça **a=5** .*

6. *Compare os resultados obtidos nos itens anteriores e no valor real da representação obtida. O que você tem a dizer sobre os valores encontrados?*
7. *Calcule:* $\int_{-5}^{5} f(x).dx$.

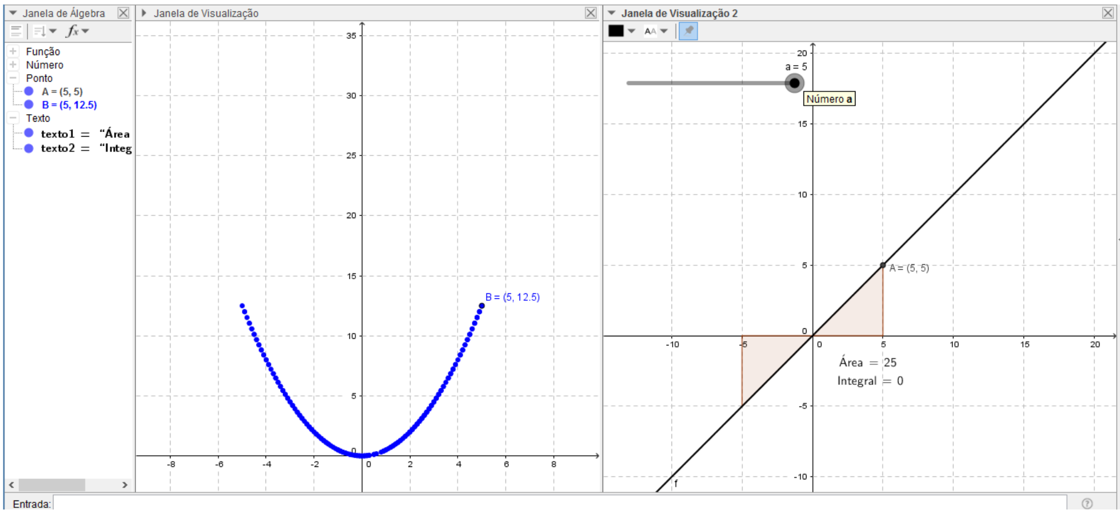
*Clique na aba **Texto** e habilite o item **Texto 2**. Altere o valor da variável **a**.*



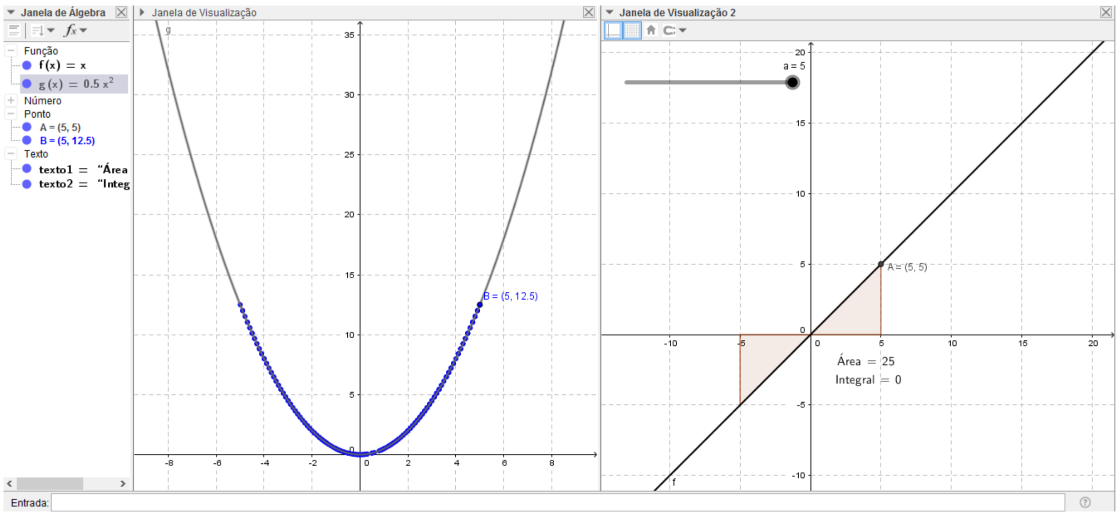
8. *Comparando os resultados obtido nos itens 5., 6. e 7., discuta cada um desses resultados, destacando o significado de cada um deles.*
9. *E se esta representação partir de **x=-5** e for até um **x=t** qualquer onde **t>-5**? Qual seria o valor desta representação nessas condições? Como poderíamos representar este valor encontrado?*

*Após responder ao item anterior, clique na aba **Ponto** e depois ative o ponto **B**. Altere o valor da variável **a**.*

10. *O que você pode dizer a respeito do movimento do ponto **B** de acordo com os movimentos de a? Geometricamente, qual sua característica?*
11. *Se você pudesse escolher um tipo de função que melhor descrevesse este movimento, qual seria?*

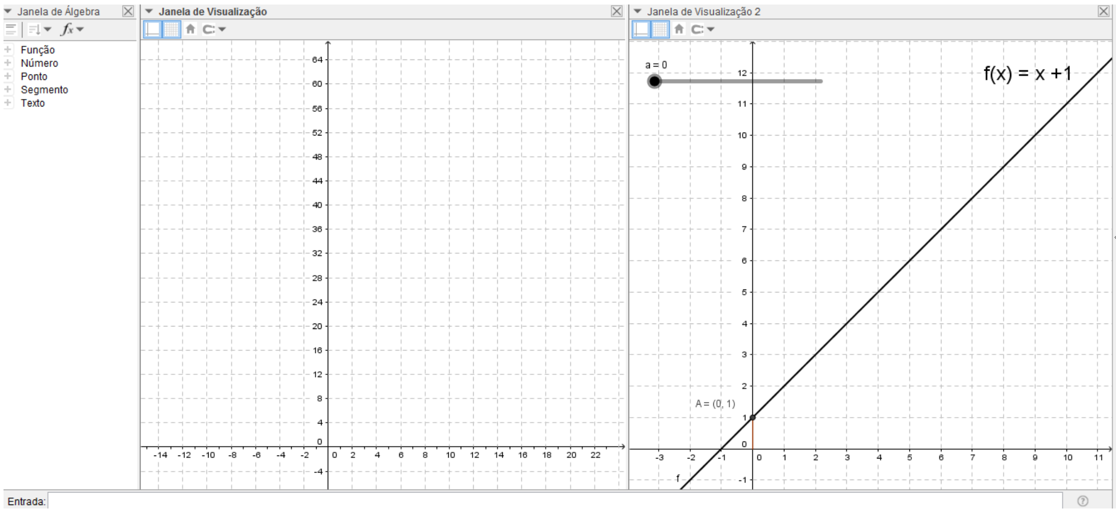


*Após responder aos itens anteriores, clique na aba **Função** e depois ative a **Função g**.*

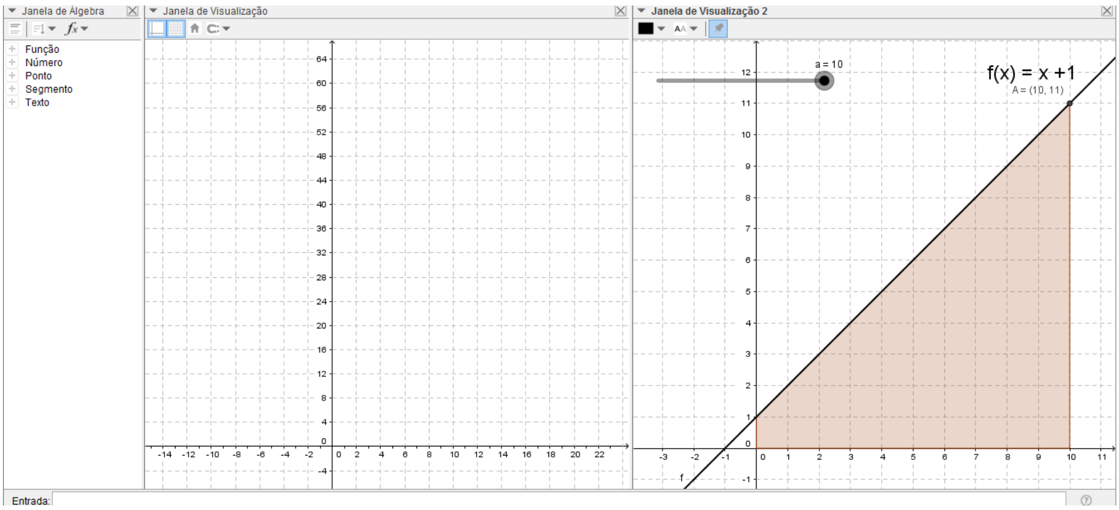


12. *Compare a função g com a função que você escolheu no item 11. Elas são parecidas?*
13. *Qual é a relação entre g e f?*

*b) Observe a função f. Altere o valor da variável **a.***



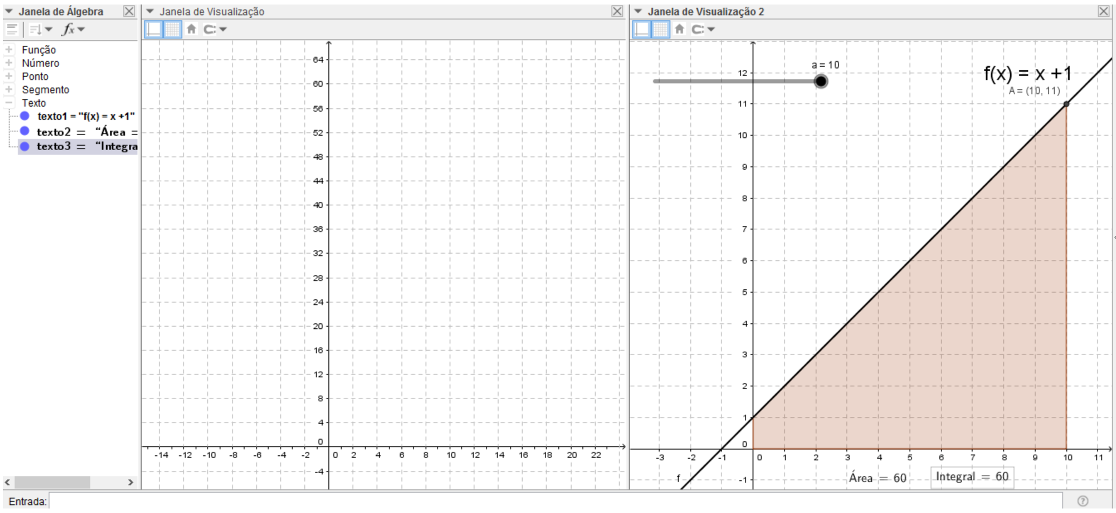
1. *O que acontece no gráfico quando você altere o valor da variável **a**?*
2. *Quando **a = 10**, o que está representado no gráfico?*
3. *Qual seria o valor desta representação?*



*Clique na aba **Texto** e habilite o item **Texto 2** e faça **a=10**.*

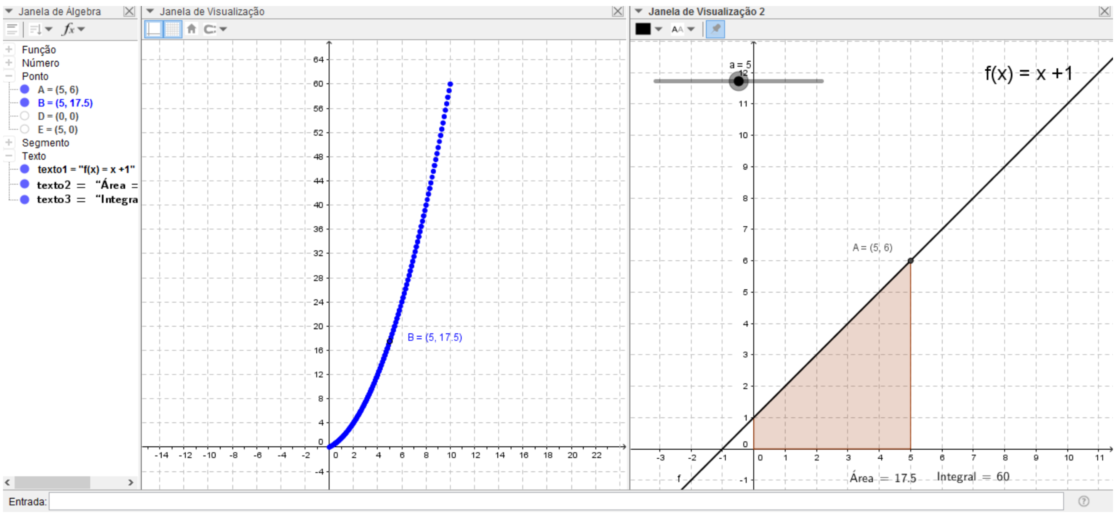
4. *Compare os resultados obtidos no item anterior e no valor real da representação obtida. O que você tem a dizer sobre os valores encontrados?*
5. *Calcule:* $\int_0^{10} f(x).dx$.

*Clique na aba **Texto** e habilite o item **Texto 3**. Altere o valor da variável **a**.*



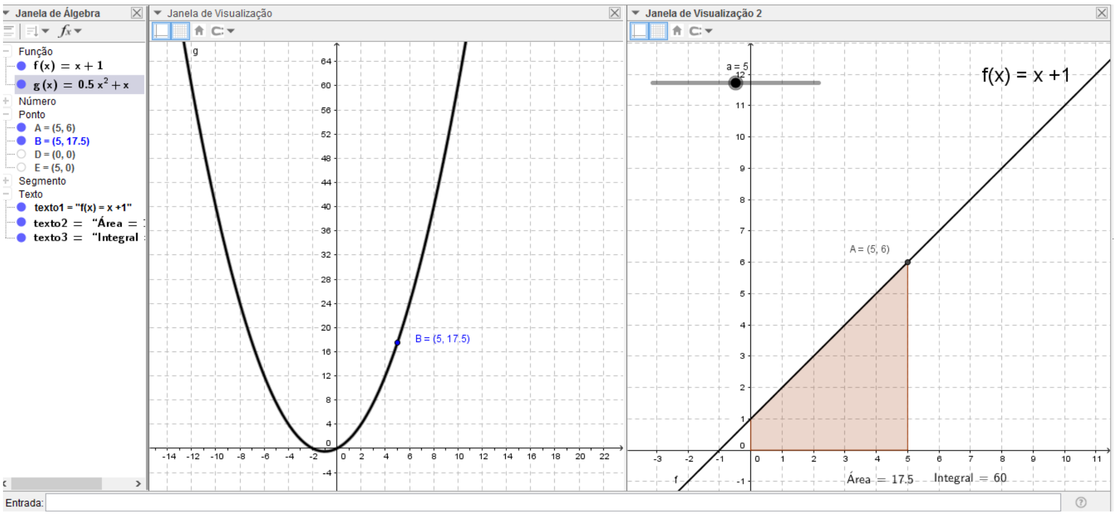
6. *Comparando os resultados obtido nos itens 3., 4. e 5., discuta cada um desses resultados, destacando o significado de cada um deles.*
7. *A resposta do item anterior tem a mesma estrutura do item 8 do exercício a)? Se não, qual é a diferença?*
8. *E se esta representação partir de **x=0** e for até um **x=t** qualquer onde **t>0**? Qual seria o valor desta representação nessas condições? Como poderíamos representar este valor encontrado?*

*Após responder ao item anterior, clique na aba **Ponto** e depois ative o ponto **B**. Altere o valor da variável a.*



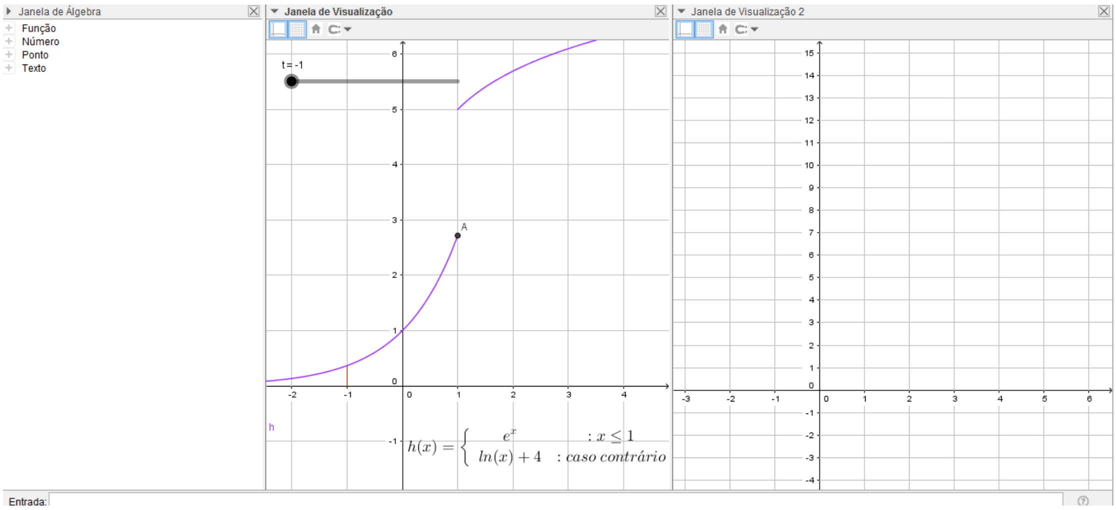
9. *O que você pode dizer a respeito do movimento do ponto **B** de acordo com os movimentos de a? Geometricamente, qual sua característica?*
10. *Se você pudesse escolher um tipo de função que melhor descrevesse este movimento, qual seria?*

*Após responder aos itens anteriores, clique na aba **Função** e depois ative a **Função g**.*

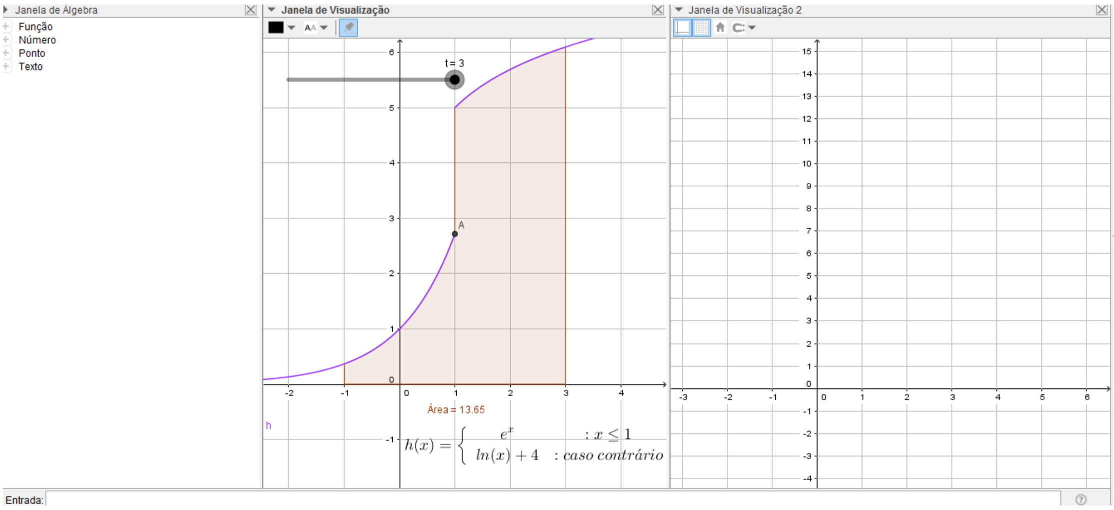


11. *Compare a função g com a função que você escolheu no item 10. Elas são parecidas?*
12. *Qual é a relação entre g e f?*

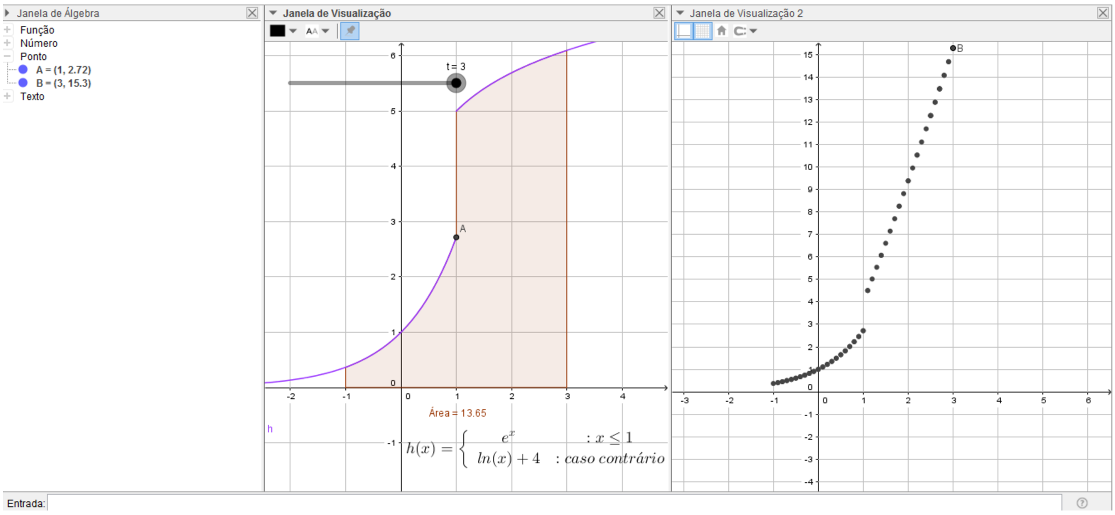
*c) Observe a função h. Altere o valor da variável **a.***



1. *O que acontece no gráfico quando você altere o valor da variável **t**?*

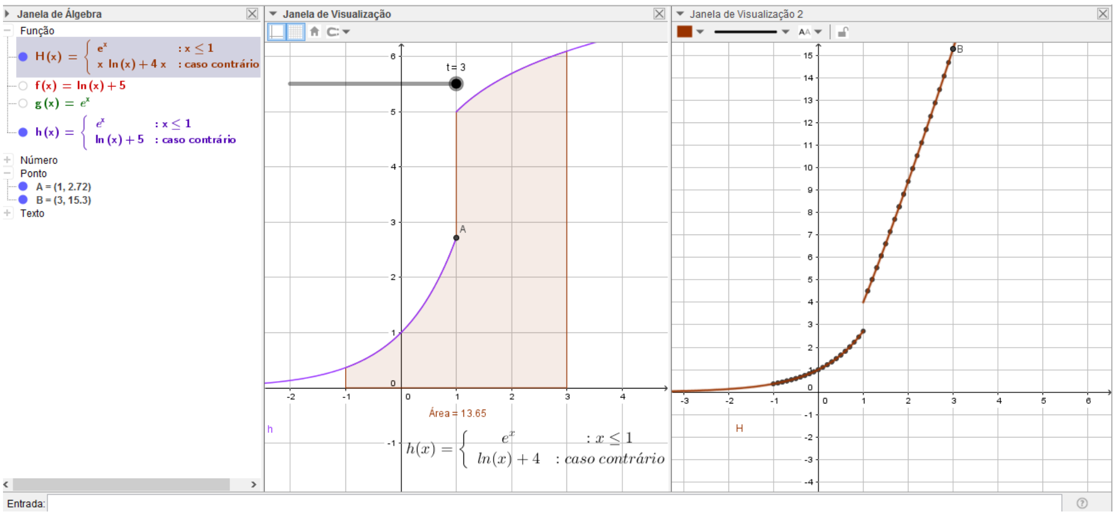


Após responder ao item anterior, clique na aba ***Ponto*** *e depois ative o ponto* ***B****. Altere o valor da variável* ***t****.*



2. *O que você pode dizer a respeito do movimento do ponto* ***B*** *de acordo com os movimentos de* ***t****? Geometricamente, qual sua característica? Mesmo sem efetuar cálculos, qual é a sua impressão a respeito do movimento de B, graficamente?*
3. *Se você pudesse escolher um tipo de função que melhor descrevesse este movimento, qual seria?*

Após responder aos itens anteriores, clique na aba ***Função*** *e depois ative a* ***Função H****.*



4. *Compare a função h com a função que você escolheu no item 3. Elas são parecidas?*
5. *Qual é a relação entre h e H?*

Ao observar suas respostas, procuramos identificar quais conceitos relacionados aos temas anteriormente citados foram evocados, bem como a maneira como foram expostos em suas respostas, associá-los à definição conceitual formal dos conceitos evocados, julgando suas respostas com o intuito de verificar se a forma como eles estruturam seu raciocínio é correta ou não.

Com isso, no próximo capítulo encontram-se as respostas dos participantes desta pesquisa aos questionários piloto e principal e, também, às atividades da oficina. Além disso, iremos expor nossa análise às respostas das questões.

Capítulo 4 – Análise do material empírico

Este capítulo apresenta a análise das respostas dos alunos ao questionário piloto, ao questionário principal e ao relatório escrito das atividades da oficina. Iniciamos retomando os objetivos específicos para organizar o material empírico, buscando identificar

Que conceitos matemáticos os alunos evocam ao participarem de atividades que exploram a aplicação da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), com o auxílio de recursos visuais gráficos e computacionais?

Como os alunos usam os conceitos trabalhados em sala de aula ao se envolverem em tais atividades utilizando recursos visuais gráficos e computadores?

De que modos a intuição se mostra presente nas respostas dos alunos a tais atividades?

e visando responder a questão

Que contribuições uma proposta visual/gráfica do TFC pode ter para o entendimento deste resultado?

Na seção a seguir, faremos a análise das respostas ao questionário piloto.

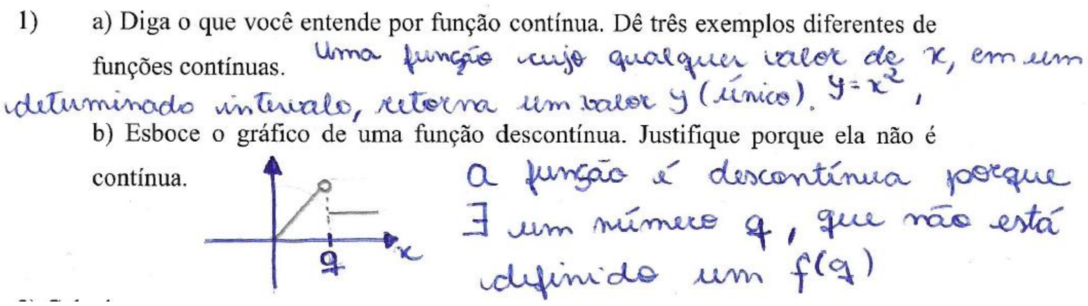
4.1 Análise das respostas ao Questionário Piloto

Os alunos A e B participaram desta fase da pesquisa como voluntários. De sua avaliação após responderem as questões, decidimos mantê-las integralmente no questionário, para a fase principal. Para responder à questão de pesquisa colocada, destacamos em itálico os modos com que esses alunos construíram suas respostas. As variações nas respostas são consideradas e ampliadas ao longo da análise do material produzido utilizando o questionário principal e a oficina, que estão apresentadas nas seções que se seguem.

A aluna A

A aluna A responde à Questão 1 do questionário no item a, *evocando definição conceitual* de função, e identificando-a com seu entendimento do que é função contínua. O exemplo apresentado, (embora apenas um, tendo sido solicitado três), é, de fato, o de uma função contínua. No item **b,** retratado na imagem a seguir, vemos que o gráfico apresentado aparenta condizer com o de uma função que realmente não é contínua; embora o desenho não indique uma “bola fechada” correspondendo à ordenada no ponto q indicado no eixo x. A justificativa da aluna A para o fato da função ser descontínua reafirma sua *definição conceitual de função contínua distorcida*, pois diz respeito a uma função que não está definida em um ponto x real; o que não é consistente com a definição conceitual formal de descontinuidade, mas perfeitamente *coerente com a definição de continuidade apresentada*. Basta considerarmos o exemplo da função f:R-{0} -> R, onde y = x é contínua mesmo não tendo o número **0** como integrante do domínio.

Figura 11: Resposta da aluna A à questão 1 do questionário



1) a) Diga o que você entende por função contínua. Dê três exemplos diferentes de funções contínuas. Uma função cujo qualquer valor de x, em um determinado intervalo, retorna um valor y (único). $y = x^2$,

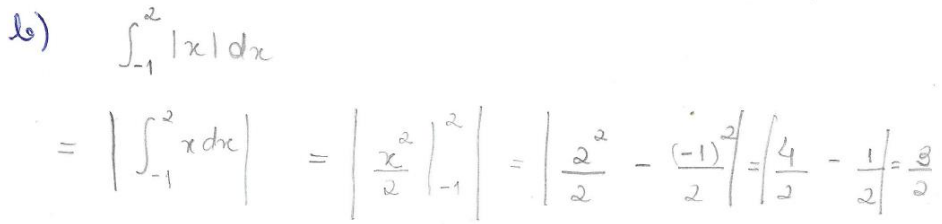
b) Esboce o gráfico de uma função descontínua. Justifique porque ela não é contínua.

A função é descontínua porque ∃ um número q, que não está definido um f(q)

Fonte: Questionário

A responde à Questão 2 *desenvolvendo corretamente os procedimentos algébricos* necessários para encontrar a integral solicitada são desenvolvidos. No item b desta mesma questão ela *utiliza, corretamente, propriedades de integrais definidas* para resolver a questão, *evocando conhecimentos teóricos* do cálculo.

Figura 12: Resposta da aluna A ao item b) da questão 2 do questionário



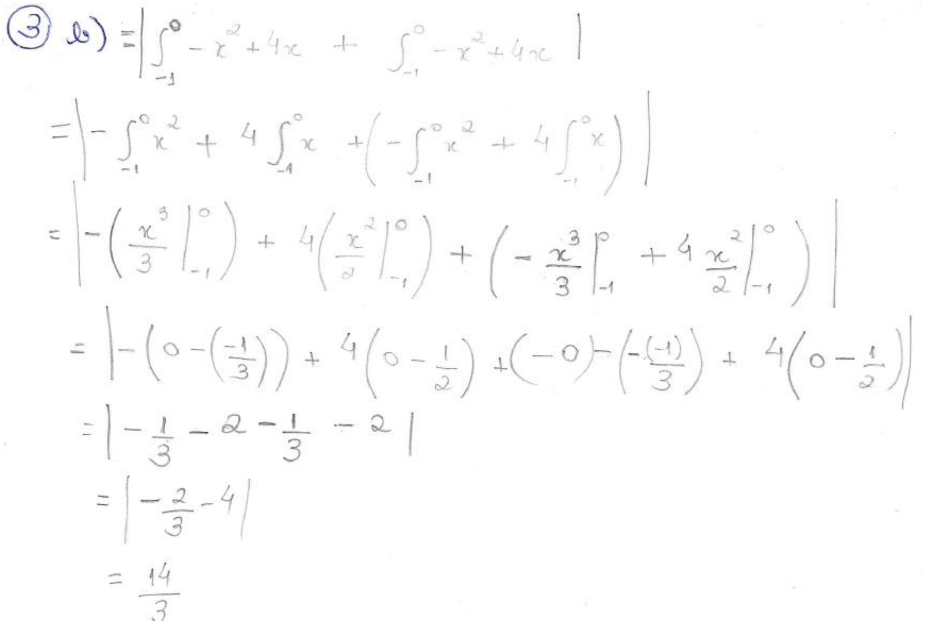
b) $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$

$= \left| \int_{-1}^{2} x\,dx \right| = \left| \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{2} \right| = \left| \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right| = \left| \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2}$

Fonte: Questionário da aluna A

O item a) da questão 3 é resolvido corretamente, porém o item b) contém um erro no intervalo de integração apresentado. A aluna A *evoca conhecimentos teóricos* e *evoca o conceito de integral definida para determinar a área* solicitada.

Figura 13: Resposta do aluno A ao item b) da questão 3



$$3\ b) = \left|\int_{-1}^{0} -x^2+4x + \int_{-1}^{0} -x^2+4x\right|$$

$$= \left|-\int_{-1}^{0} x^2 + 4\int_{-1}^{0} x + \left(-\int_{-1}^{0} x^2 + 4\int_{-1}^{0} x\right)\right|$$

$$= \left|-\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0}\right) + 4\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}\right) + \left(-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + 4\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}\right)\right|$$

$$= \left|-\left(0-\left(\frac{-1}{3}\right)\right) + 4\left(0-\frac{1}{2}\right) + (-0)-\left(-\frac{(-1)}{3}\right) + 4\left(0-\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{3} - 2\right|$$

$$= \left|-\frac{2}{3} - 4\right|$$

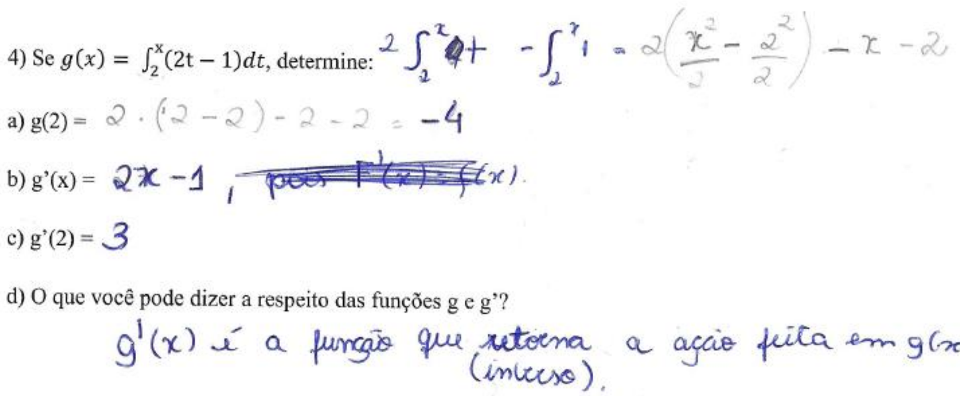
$$= \frac{14}{3}$$

Fonte: Questionário da aluna A

No item b percebemos que a *linguagem matemática ainda não é precisa* – uma vez que o *dx* está ausente no comando da integração. A integração que não é realizada como um todo de uma só vez, indicando, talvez, um *processo inicial do desenvolvimento da mecanização dos procedimentos de integração*.

Em sua solução para a Questão 4 a aluna A *evoca relações entre operações de integração e derivação*. Podemos ver que ela associou a função g’(x) ao integrando da integral que define a função g(x) no item (b). Além disso, vemos que a partir de g’(x) ela determinou g’(2) no item (c). *Evoca relações entre as funções g e g’ como ações ou operações inversas*, uma vez que g’ se trata da derivada de g. E a função g, por sua vez é igual a integral de g’. Interessante observar que, mesmo sendo capaz de evocar aspectos e relações teóricas dos conceitos, sua *linguagem matemática está em construção*, com a ausência do comando dx nas expressões das integrações.

Figura 14: Resposta do aluno A à questão 4


4) Se $g(x) = \int_2^x (2t-1)dt$, determine: $2\int_2^x t - \int_2^x 1 = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) - x - 2$

a) g(2) = $2 \cdot (2-2) - 2 - 2 = -4$

b) g'(x) = $2x - 1$, ~~pois F'(x) = f(x)~~.

c) g'(2) = 3

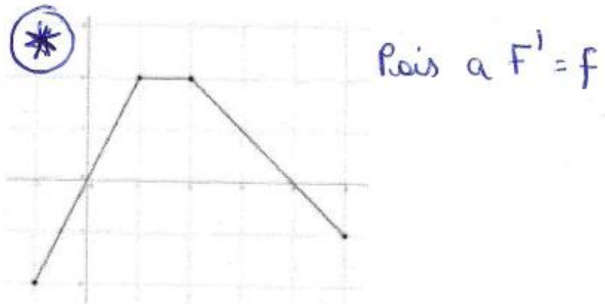
d) O que você pode dizer a respeito das funções g e g'?

g'(x) é a função que retorna a ação feita em g(x) (inverso).

Fonte: Questionário da aluna A

Na Quinta Questão, de múltipla escolha, a aluna A *relaciona gráficos das funções derivada e sua primitiva*. *Evoca o resultado sobre a derivada da primitiva de uma função*, que é igual a essa função. Afirmamos isso devido às respostas assinaladas na escolha do segundo gráfico, como vemos na figura a seguir.

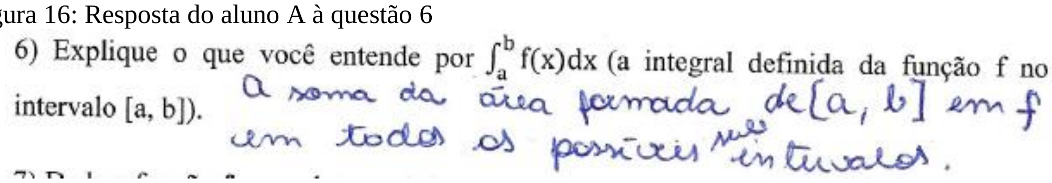
Figura 15: Resposta do aluno A à questão 5



Fonte: Questionário da aluna A

Na Sexta Questão a aluna A *evoca relação entre integrais definidas e cálculo de área* sob o gráfico f(x) no intervalo [a,b], sugerindo *menção ao processo das somas de Riemman.*

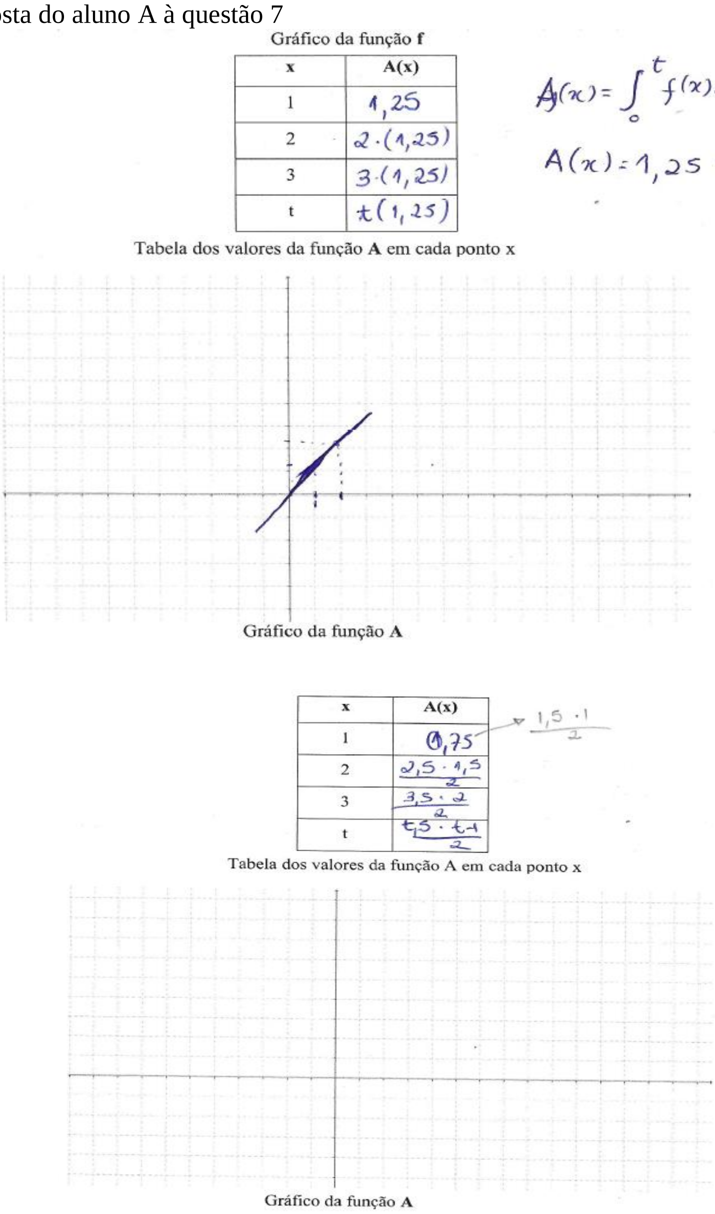
Figura 16: Resposta do aluno A à questão 6


6) Explique o que você entende por $\int_a^b f(x)dx$ (a integral definida da função f no intervalo [a, b]). a soma da área formada de [a, b] em f em todos os possíveis subintervalos.

Fonte: Questionário da aluna A

Nesta sétima questão, a aluna A *evoca a noção de integral para responder à questão sobre função área*, mesmo tendo feito uso de outras representações, completando as tabelas e desenhando o gráfico relativo à função que, de fato, seria determinada pela integral da função constante dada. No caso do segundo gráfico a determinação da função área sob o gráfico dado parece ter sido menos evidente para a aluna, que não completa a questão.

Figura 17: Resposta do aluno A à questão 7



A Questão 8 representa uma oportunidade para exploração e articulação entre informações visuais, suficientes para respondê-la. Ele escreveu apenas o que está na figura a seguir:

Figura 18: Resposta do aluno A à questão 8

$$g(x) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

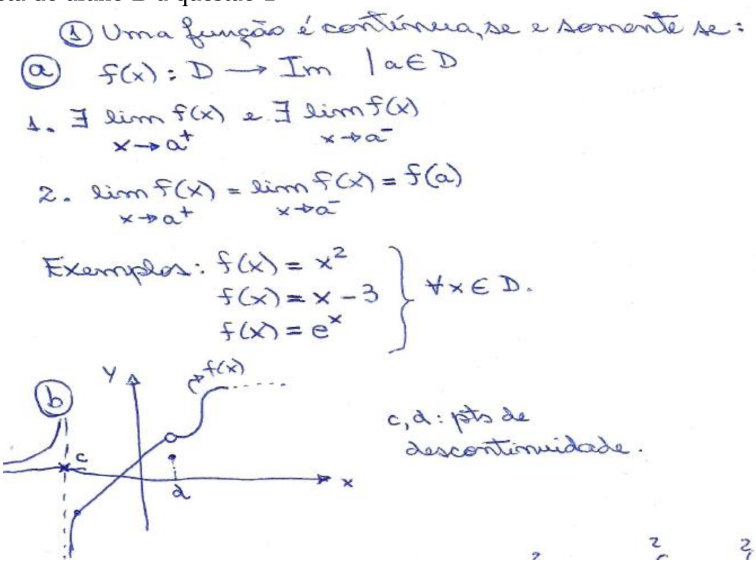
Fonte: Questionário da aluna A

Podemos constatar que a aluna A *evoca o conceito de integral definida*, interpretando-a e escrevendo-a com limites de integração e nome das funções corretos, usando conceitos trabalhados em sala de aula, uma vez que já havia concluído a disciplina de Cálculo 2 que trabalha com integrais definidas. No entanto, ela *não relaciona as informações visuais entre os dois gráficos* apresentados na questão e *não explora as informações visuais expressas por eles* de forma a respondê-la. Além disso, ele *não evoca o TFC*, o que pode se justificar pelo fato de que as relações estavam estabelecidas visualmente ou graficamente, e não expressas algebricamente como comumente são apresentadas em sala de aula e na maioria dos livros textos analisados.

O Aluno B

O aluno B escreve o que entende por função contínua e *evoca definição conceitual formal que se assemelham às* apresentadas nos cursos de Cálculo. Observamos que sua definição conceitual é coerente com as que temos nos livros de cálculo, inclusive naqueles citados neste trabalho. No item (b), o gráfico da função por ele esboçado corresponde ao de uma função descontínua; mas o aluno não justificou como solicitado.

Figura 19: Resposta do aluno B à questão 1



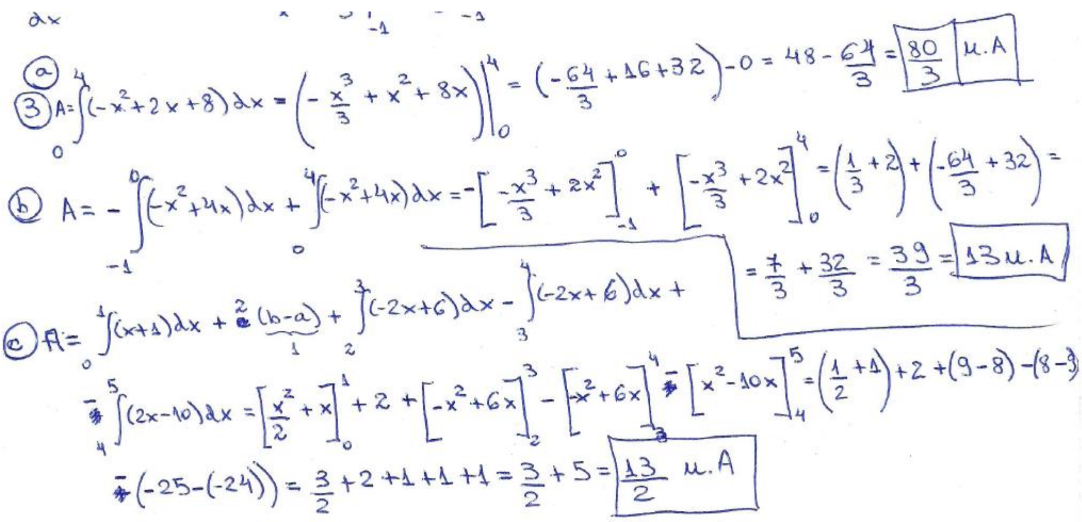
Fonte: Questionário da aluna B

O aluno B resolveu o item a da questão 2 *desenvolveu corretamente os procedimentos algébricos, evocando procedimentos algorítmicos referentes a integral*.

Ele *utilizou, corretamente*, *propriedades de integrais definidas* para resolver a questão, *evocando conhecimentos teóricos* do cálculo.

Analisando as respostas do aluno B à terceira questão do questionário, verificamos que ele *evocou o conceito de integral definida para determinar a área* entre os gráficos e o eixo x. O aluno B *evoca conhecimentos teóricos* nos três itens desta questão.

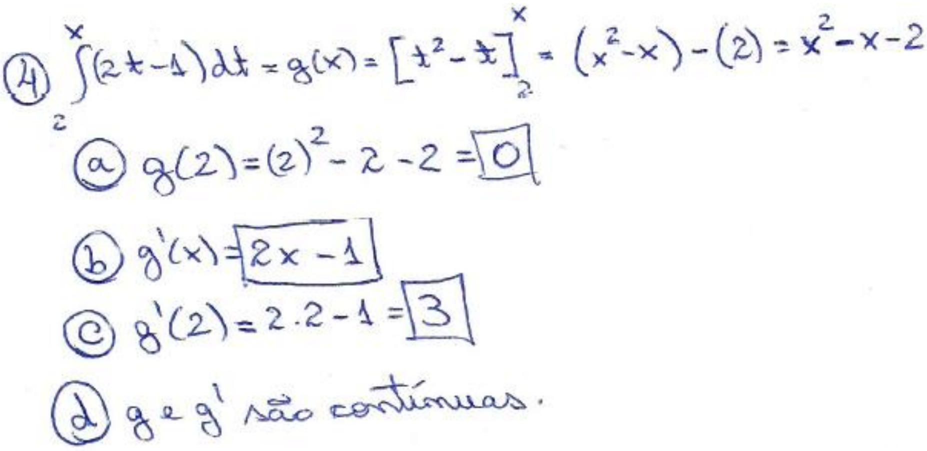
Figura 20: Resposta do aluno B a questão 3



Fonte: Questionário do aluno B

O aluno B, em sua resposta à questão 4, mostrou que sua imagem conceitual muito coerente a definição formal ao solucionar os itens (a), (b) e (c), *evocando relações entre operações de integração e derivação* e utilizando uma *linguagem matemática adequada*. No quarto item, vemos que ele fez uma associação correta entre as funções, porém *não evoca relações entre as funções g e g' como ações ou operações inversas*. A seguir, expomos a imagem contendo sua resposta.

Figura 21: Resposta do aluno B à questão 4



(4) $\int_2^x (2t-1)dt = g(x) = [t^2 - t]_2^x = (x^2-x)-(2) = x^2-x-2$

(a) $g(2)=(2)^2-2-2=\boxed{0}$

(b) $g'(x)=\boxed{2x-1}$

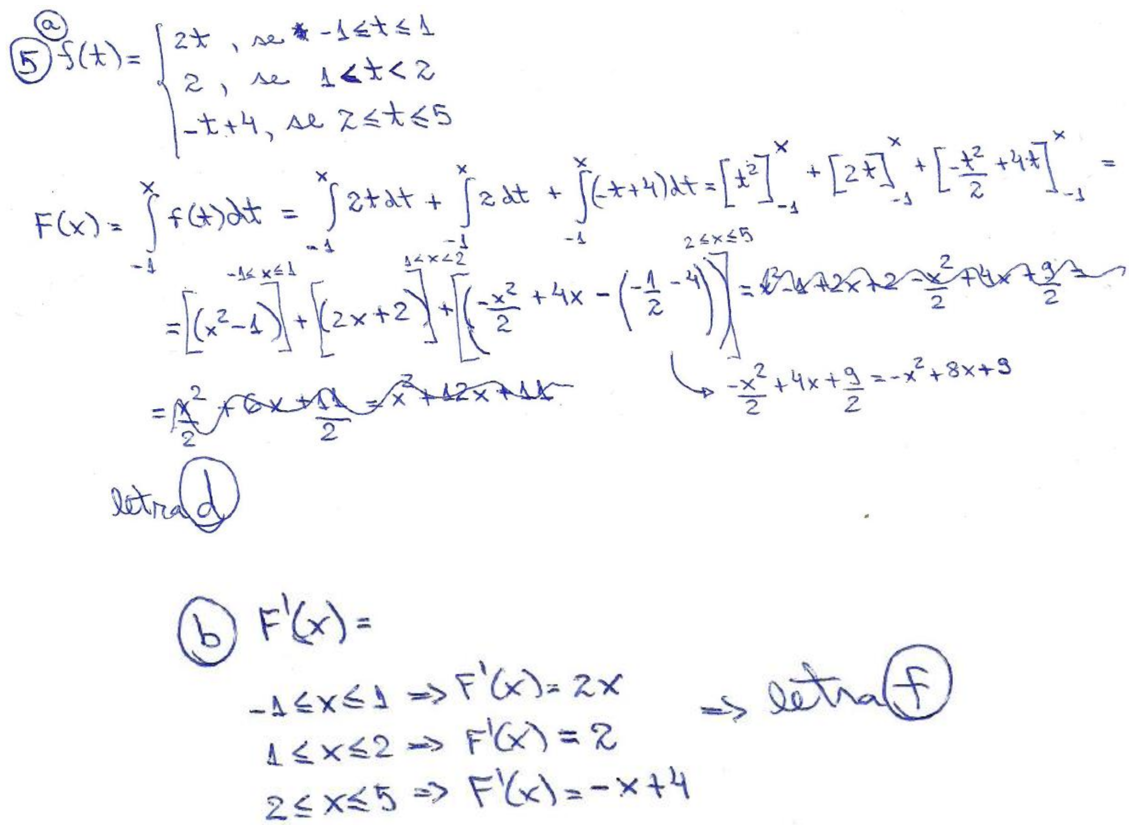
(c) $g'(2)=2.2-1=\boxed{3}$

(d) g e g' são contínuas.

Fonte: Questionário do aluno B

Observando a resposta à quinta questão dada pelo aluno B, percebemos que ele *relaciona gráficos das funções derivada e sua primitiva*. Na escolha do primeiro gráfico, o aluno B *evocou sua definição formal sobre integração* e *a determinação de uma função primitiva utilizando o conceito de integral*, almejando determinar a expressão algébrica da função dada e, posteriormente, *associar a expressão algébrica ao gráfico* correto. Sua resolução para este item segue a seguir.

Figura 22: Resposta do aluno B ao exercício 5



(5) (a) $f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{se } -1 \le t \le 1 \\ 2, & \text{se } 1 < t < 2 \\ -t+4, & \text{se } 2 \le t \le 5 \end{cases}$

$F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt = \int_{-1}^x 2t\,dt + \int_{-1}^x 2\,dt + \int_{-1}^x (-t+4)dt = [t^2]_{-1}^x + [2t]_{-1}^x + \left[-\frac{t^2}{2}+4t\right]_{-1}^x =$

$= [(x^2-1)] + [(2x+2)] + \left[\left(-\frac{x^2}{2}+4x-\left(-\frac{1}{2}-4\right)\right)\right]$

$\to -\frac{x^2}{2}+4x+\frac{9}{2} = -x^2+8x+9$

letra d

(b) $F'(x) =$

$-1 \le x \le 1 \Rightarrow F'(x) = 2x \Rightarrow$ letra f

$1 \le x \le 2 \Rightarrow F'(x) = 2$

$2 \le x \le 5 \Rightarrow F'(x) = -x+4$

Fonte: Questionário do aluno B

O aluno respondeu à questão 6 *evocou o conceito de cálculo de área* sob o gráfico f(x) no intervalo [a,b], sugerindo *menção ao processo das somas de Riemman*, pois ele *evocou as ideias de soma de retângulos*.

Figura 23: Resposta do aluno B ao exercício 6


(6) Representa as somas de vários retângulos (ou áreas) de lados "f(x)" e "dx" no intervalo [a,b].

Fonte: Questionário do aluno B

Questão 7

Na sétima questão, O aluno B *generalizou as informações da tabela para determinar a expressão algébrica* da função área no item a e *evoca a noção de integral para determinar a função área* do item b. Este aluno *associou os dados da tabela para esboçar o gráfico* da função área

Figura 24: Resposta do aluno B ao item (a) do exercício 7

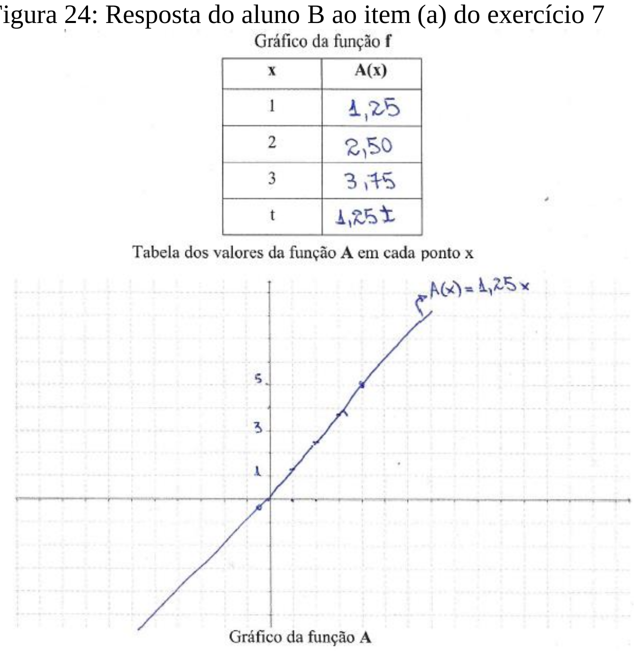
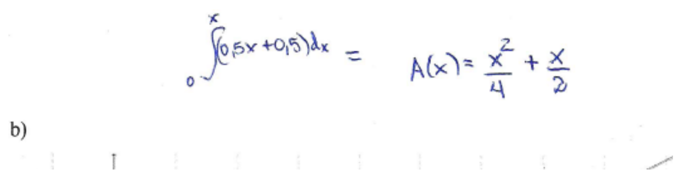


Gráfico da função **f**

x	A(x)
1	1,25
2	2,50
3	3,75
t	1,25t

Tabela dos valores da função **A** em cada ponto x

Resposta do aluno B ao item (b) do exercício 7


$$\int_0^x (0,5x+0,5)dx = \quad A(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$$

b)

x	A(x)
1	$3/4$
2	2
3	$15/4$
t	$\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}$

Tabela dos valores da função A em cada ponto x

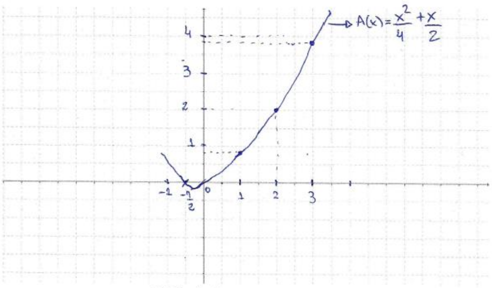


Gráfico da função A

Fonte: Questionário do aluno B

Na oitava questão aluno B *relacionou as informações visuais entre os dois gráficos* e *evocou o TFC* de sua imagem conceitual para resolver o problema. Vemos que ele *evocou o conceito de integral definida* e que ele *explorou as informações presentes nos gráficos* para determinar os valores de g(1) e g(-1), essenciais para a resolução da questão. A seguir, encontra-se sua resposta à referida questão.

Figura 25: Resposta do aluno B ao item (a) do exercício 8

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \Big[g(x)\Big]_{-1}^{1} = g(1) - g(-1) = 3{,}67 - (-4{,}33) = 4{,}33 + 3{,}67$$

$$\boxed{=8}$$

A área de f até o eixo x, no intervalo é a integral de f(x)dx nesse intervalo, que é o valor da primitiva (g) do valor final menos o valor inicial do intervalo, ou seja, g(1) - g(-1).

Vemos na figura anterior que o aluno evocou conceitos matemáticos que forneceram ferramentas suficientes para que ele pudesse resolver o problema, tais como aqueles que estão relacionados à definição conceitual formal do TFC.

Estas respostas, para nós, mostram-se como um referencial, por mostrar que sua solução é acessível, quanto ao que é esperado como resposta e ao que procuramos: investigar a aprendizagem do TFC. Com isso consideramos que esta questão poderia ser utilizada no questionário principal sem alterações.

Resultados iniciais e decisões para o questionário principal e sua análise

Analisaremos as respostas dos alunos ao questionário utilizando as questões que são eixos de análise desta pesquisa.

Que conceitos matemáticos os alunos evocam ao participarem de atividades que exploram a aplicação da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), com o auxílio de recursos visuais gráficos e computacionais?

Ambos alunos A e B *evocam o conceito de integral definida*, e *escrevem corretamente a expressão da integral*; indicando reconhecer o Teorema. No entanto, a *exploração das informações visuais presentes* no gráfico e o *estabelecimento de relações entre as informações visuais, e* consequentemente a *identificação do TFC visualmente* e o *uso das informações visuais* foi evidenciado na resposta de apenas um dos alunos.

Como os alunos usam os conceitos trabalhados em sala de aula ao se envolverem em tais atividades utilizando recursos visuais gráficos e computadores?

Os alunos *evocam definições conceituais e conceitos trabalhados em sala de aula* e *buscam relações entre estes e as representações visuais* investigadas. Por outro lado, a identificação do conceito da integral definida para resolver questões de área, mesmo quando a resolução utilizando visualização ou outras representações podem ser encaminhadas, *remetem à necessidade de desenvolver procedimentos algébricos*, de calcular uma integral pelos métodos aprendidos em aula. É o que inferimos pelo menos nas respostas dos alunos à Questão 7. Podemos entender este uso como um hábito, ou imagem conceitual constituída em nossas aulas de cálculo, que favorece a resolução de questões utilizando procedimentos algébricos em detrimento do uso de métodos visuais e gráficos.

De que modos a intuição se mostra presente nas respostas dos alunos a tais atividades?

Deixamos esta como uma questão para refletirmos ao final das análises do questionário principal e da oficina.

4.2 Questionário Principal

Nesta seção iremos expor a análise que fizemos das respostas dos alunos às questões do questionário principal.

Trazemos para esta análise as descrições em itálico destacadas na análise anterior, das respostas dos alunos A e B ao questionário piloto. No entanto, diferentemente da análise realizada, e pelo fato de um número maior de participantes terem respondido ao questionário principal, organizaremos a análise por questões.

Questão 1

Ao analisarmos as respostas dos alunos verificamos que suas imagens conceituais de continuidade não se mostram semelhantes quando observamos o todo.

Na letra (a), obtivemos uma diversidade de conteúdos contidos que estão presentes nas respostas dadas pelos alunos. A seguir, vemos uma lista com alguns desses conceitos evocados pelos estudantes ao responder à questão. Por exemplo, nesta tabela vemos que três alunos definiram continuidade utilizando, na verdade, a definição que pode ser entendida como a definição para o conceito de função.

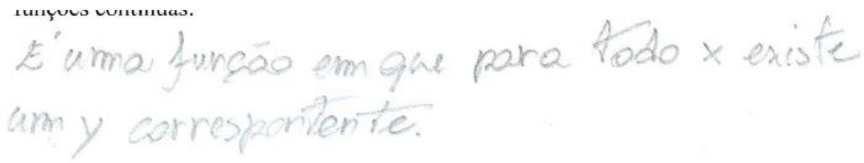
Quadro 1: respostas dos alunos ao item a) da questão 1 do questionário

	Conteúdos das respostas	**Quantidade de alunos**
Evocam definição conceitual distorcida	Função	3
	Derivada	1
	Função Injetora	2
Evocam imagem conceitual / visualização	Identificação de continuidade com um padrão	1
	Gráficos que não possuem lacunas ou “buracos” ou “saltos”	6
Evocam definição conceitual de continuidade, coerente e/ou distorcida	Definição formal de limites laterais	3
	Definição formal de continuidade	1
	Em branco	1

Nós destacaremos agora, algumas das respostas dos alunos que mais se mostraram presentes em suas justificativas. Além disso, pontuaremos outras que julgamos relevantes para a composição deste trabalho.

Quanto à definição de continuidade utilizando as ideias da definição de função, vemos que três alunos utilizaram tal conteúdo para continuidade. A figura a seguir traz um exemplo desta categoria de resposta, realizada pelo aluno C.

Figura 26: resposta do aluno C ao item a) da questão 1 do questionário

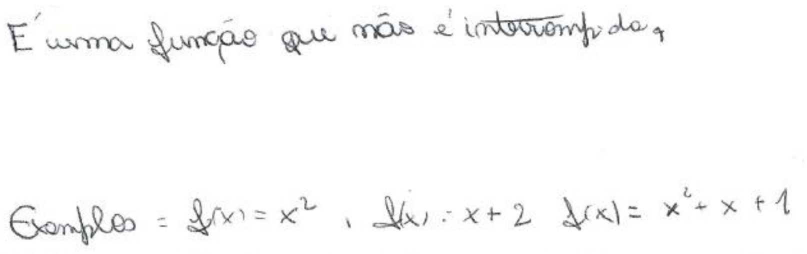

funções contínuas.

É uma função em que para todo x existe um y correspontente.

Fonte: Questionário do aluno C

Alguns alunos utilizaram ideias gráficas para expressar suas imagens conceituais a respeito do conceito de continuidade. A seguir vemos a resposta do aluno H, em que o mesmo utilizou a expressão “não interrompida” relacionada à continuidade. Entendemos que esta expressão descreve funções cujos desenhos à lápis, por exemplo, são feitos de forma que “não o retiramos do papel”.

Figura 27: resposta do aluno H ao item a) da questão 1 do questionário


É uma função que não é interrompida,

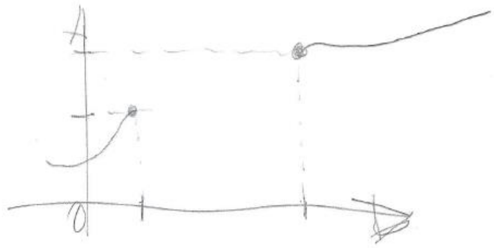
Examplos = $f(x) = x^2$, $f(x) = x+2$ $f(x) = x^2+x+1$

Fonte: Questionário do aluno H

Vale salientar, ainda, que esses tipos de descrições e relatos para funções contínuas foram muitos recorrentes. Relatos semelhantes ao que foi expresso na imagem anterior foram: “funções que não tem espaços entre ela”; “funções que não apresentam algum espaço vazio no intervalo do domínio”; “função contínua é aquela que não possui intervalo”. Esta última afirmação diz respeito a funções que possuem algum “salto” ou, em outras palavras, que “se descolam e se movem em direções diferentes”.

A imagem a seguir retrata a resposta do mesmo aluno da imagem anterior (H) ao segundo item, a saber (b), da mesma questão, na qual solicitamos um esboço de uma função descontínua e a devida justificativa do que fosse apresentado.

Figura 28: resposta do aluno H ao item b) da questão 1 do questionário



Como podemos ver neste gráfico, o aluno esboçou um gráfico que não é contínua e nem função se o domínio for o conjunto dos números reais, por exemplo, visto que existiriam valores x para os quais não haveria imagens associadas a eles. Este fato se repetiu muitas vezes quando analisamos as respostas dos alunos ao item (b) da primeira questão. O quadro a seguir descreve a quantidade e porcentagem de alunos que *evocam ruptura de gráficos* para se referir à funções descontínuas.

Quadro 2: descrição dos conceitos evocados por alunos quando questionados sobre continuidade

	Quantidade de alunos	**Porcentagem de alunos**
Evocam a ideia de ruptura de gráficos	15	83,3 %
Não evocam a ideia de ruptura de gráficos	3	16,7 %

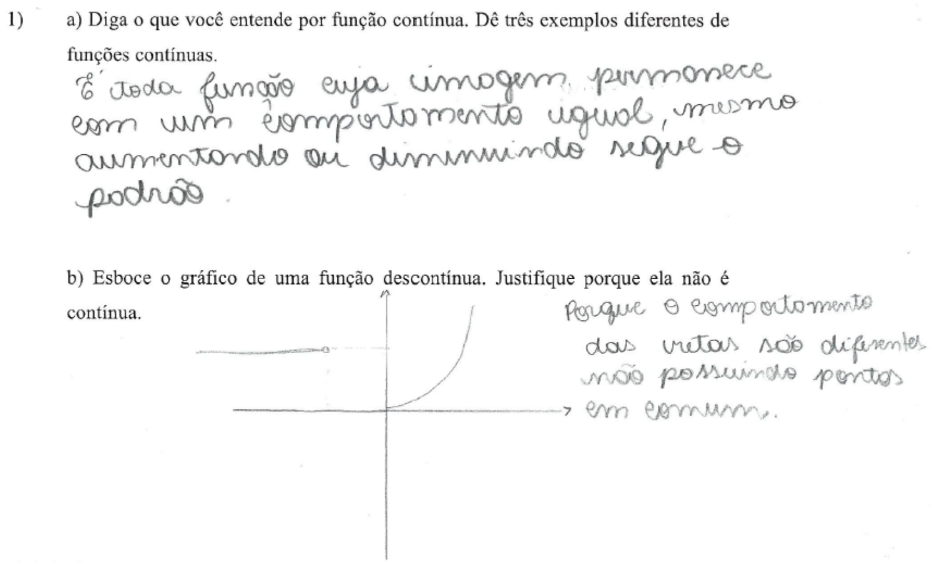
Ressaltamos que dessas 15 respostas que apresentaram rupturas nos gráficos para representar funções descontínuas, cinco desenharam “gráficos sem retirar a caneta ou lápis do papel”, porém sem uma ruptura acentuada, como no caso anterior, mas apresentam pontos de descontinuidade. Mais especificamente, cada gráfico apresenta um ponto de descontinuidade ou no qual a função não está definida. Podemos exemplificar este fato como o esboço abaixo feito pelo aluno E.

Figura 29: resposta do aluno E ao item b) da questão 1 do questionário

Fonte: Questionário do aluno E

Associando a ideia de continuidade à função que apresenta um determinado padrão, o aluno D disse que se o comportamento da imagem de uma função permanece igual para diferentes valores do domínio, essa dada função será continua. Além disso, pudemos observar que o exemplo dado por ele para descontinuidade revela que sua imagem conceitual sobre este conteúdo está, de fato, relacionada à um padrão no gráfico da função, como podemos ver em sua resposta dada a seguir.

Figura 30: resposta do aluno D à questão 1 do questionário


1) a) Diga o que você entende por função contínua. Dê três exemplos diferentes de funções contínuas.

É toda função cuja imagem permanece com um comportamento igual, mesmo aumentando ou diminuindo segue o padrão.

b) Esboce o gráfico de uma função descontínua. Justifique porque ela não é contínua.

Porque o comportamento das retas são diferentes não possuindo pontos em comum.

Fonte: Questionário do aluno D

O aluno L respondeu à pergunta utilizando aspectos relacionados à definição formal de continuidade, dizendo que uma função é contínua se ela é contínua em todos os pontos de seu domínio, como mostra o recorte de sua resposta abaixo.

Figura 31: resposta do aluno L ao item a) da questão 1 do questionário

Quando a função é contínua em cada ponto do seu domínio

x^2 / $\frac{1}{x}$ / sen

Fonte: Questionário do aluno L

Apesar de este aluno ter relatado a importância de a função ser contínua em cada ponto do seu domínio, vemos que ele nos deu exemplos de funções porém sem explicitar o domínio de cada uma delas.

Com esses fatos, somos levados a acreditar que eles, de forma geral, associam a ideia de descontinuidade a situações em que uma função não está definida ou, ainda, para casos em que existem rupturas em seus gráficos. Não foi percebida a utilização de uma definição formal para continuidade (ou descontinuidade) para esta questão.

Questão 2

No item (a) desta questão, a grande maioria das respostas dadas contém propriedades algébricas de integral definida que são ensinadas em um curso de cálculo integral. Analisando todas as respostas, vemos que apenas um aluno deixou a questão em branco e que outro aluno não conseguiu utilizar os algoritmos algébricos de integral que pudessem fornecer uma resposta. Apesar desses dois casos descritos, os outros dezesseis alunos responderam a questão com algoritmos coerentes ao que era esperado e conseguiram determinar uma solução para o problema.

Dessas dezesseis respostas, destacamos as de dois alunos que representam os tipos de respostas que identificamos ao analisar a totalidade das respostas.

A imagem a seguir, retirada das respostas do aluno D, retrata uma resposta que contém os algoritmos realmente inerentes à integral e que foram realizados de maneira fiel à definição formal de integral definida. O resultado desta integral realmente é igual a dois.

Figura 32: resposta do aluno D ao item a) da questão 2 do questionário

a) $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1)dx$

$$\int 3x^2 - 4x + 1\, dx = \int 3x^2 dx + \int -4x\, dx + \int 1\, dx = 3\int x^2 dx - 4\int x\, dx + \int dx$$

$$\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + x \Big|_0^2 = x^3 - 2x^2 + x \Big|_0^2 \Rightarrow 2^3 - 2\cdot 2^2 + 2 - 0^3 - 2\cdot 0^2 + 0$$

$$\Rightarrow \cancel{8} - \cancel{8} + 2 = 2$$

Fonte: Questionário do aluno D

O aluno T respondeu à questão utilizando algoritmos relativos aos procedimentos de resolução de uma integral definida. Porém, durante o processo ele realizou algumas operações e substituições de forma que não condiz com a definição formal de integral definida. Sua resposta podemos vera seguir.

Figura 33: resposta do aluno T ao item a) da questão 2 do questionário

a) $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1)dx$

$$\int_0^2 3x^2 - 4x + 1\, dx = \int_0^2 3x^2 - 4\int_0^2 x + \int_0^2 1\, dx$$

$$= 3\int_0^2 x^2 - 4\int_0^2 x + \int_0^2 dx = x^3 - 2x^2 + x \Big|_0^2$$

$$(3.4 - 4.2 + 1) - (1) = 5 - 1 = \boxed{4}$$

Fonte: Questionário do aluno T

Ao analisar as respostas de outros cinco alunos, percebemos que eles tiveram respostas cujas características são semelhantes às do aluno T. No mais, outros alunos tiveram respostas parecidas com as do aluno D.

Investigando as respostas dos alunos ao item (b) da segunda questão, vemos que a quantidade de alunos que deixaram a questão em branco aumentou consideravelmente, foram oito. E a quantidade de respostas cujos algoritmos continham aspectos que não fazem parte da definição conceitual de integral definida para esta função. Também foram oito alunos nesta situação. Com isso, apenas dois alunos utilizaram suas imagens sobre o conceito de imagem conceitual em que os procedimentos realizados são condizentes com a definição formal de integral definida.

Chamou-nos a atenção o fato de nenhum dos alunos evocou a ideia gráfica para resolver o problema. Ao desenhar o gráfico de y = |x| e recordar que a integral definida tem o seu valor igual à área sob o gráfico no intervalo de integração, o resultado solicitado seria igual a área sob o gráfico que é composto por dois triângulos, cujas dimensões são de fácil descoberta. No entanto, nenhum aluno utilizou esta ideia para solucionar o problema, apesar de esperarmos por tal resolução.

Questão 3

Esta questão consiste em determinar a área sob três gráficos que foram dados em conjunto com as suas respectivas função. A área solicitada era limitadas pelos eixos x e y e pelo gráficos: $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ no intervalo [0, 4]; $f(x) = -x^2 + 4x$ no intervalo [-1, 4]; e $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \\ -2x+6, & 2 \leq x \leq 4 \\ 2x-10, & 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$ no interval [0, 5].

Ao observarmos as respostas dos alunos, percebemos que a maioria absoluta dos alunos evocou o conceito de integral definida, utilizando a função dada e o intervalo de integração percebido no gráfico para determinar as áreas solicitadas. As tabelas seguintes revelam que os alunos enfrentaram dificuldades para solucionar o item (c), visto que uma porcentagem considerável não realizou a atividade somente neste item. Ainda, podemos ver que com exceção do item (c), quatorze alunos utilizaram a integral definida para a determinação da área sob o gráfico e os outros quatro alunos não elaboraram nenhum tipo de solução.

Quadro 3: Panorama geral da questão 3

	Quantidade de alunos	**Porcentagem de alunos**
Responderam a todos os itens utilizando o conceito de integral	7	38,9 %
Deixaram o item (c) em branco	7	38,9 %
Deixaram todos os itens da questão em branco	4	22,2 %

Quadro 4: Utilização da integral definida x questões em branco

	Quantidade de	**Porcentagem de**

	alunos	alunos
Fizeram os itens (a) e (b) utilizando o conceito de integral definida	14	77,8 %
Deixaram todos os itens da questão em branco	4	22,2 %

Com a análise das respostas a essa questão podemos afirmar que a imagem conceitual de integral está ricamente associada com a determinação de área sob o gráfico. Ainda que nem todos os cálculos e procedimentos realizados os levassem à resposta padrão, vemos que este conceito está bem registrado em suas mentes. Eles resolveram esta questão como se o único e mais eficiente método a ser utilizado fosse o da integral definida.

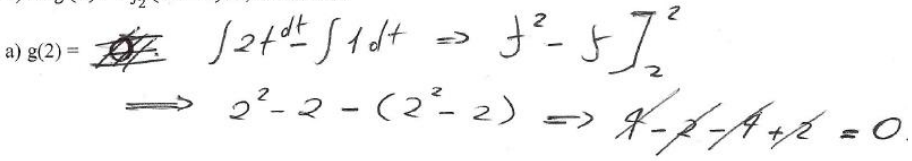
Questão 4

No primeiro item desta questão solicitamos que os alunos encontrassem o valor de g(2). Para tal, eles teriam que calcular o valor de uma integral que iria variar de 2 até 2 que, de acordo com a definição formal de integral definida, resulta em zero, independente do integrando.

Assim, analisamos as respostas dos alunos e vimos que dez alunos nos forneceu a resposta zero. Porém, destes dez, quatro não realizaram nenhum cálculo e os outros seis calcularam a integral definida de 2 a 2. Ou seja, a imagem evocada por esses seis alunos utilizou recursos diferentes daqueles outros quatro.

Abaixo vemos a resposta do aluno P que calculou o valor da integral completamente para determinar o valor de g(2).

Figura 34: Resposta do aluno P ao item (a) da questão 4 do questionário


4) Se $g(x) = \int_2^x (2t-1)dt$, determine:

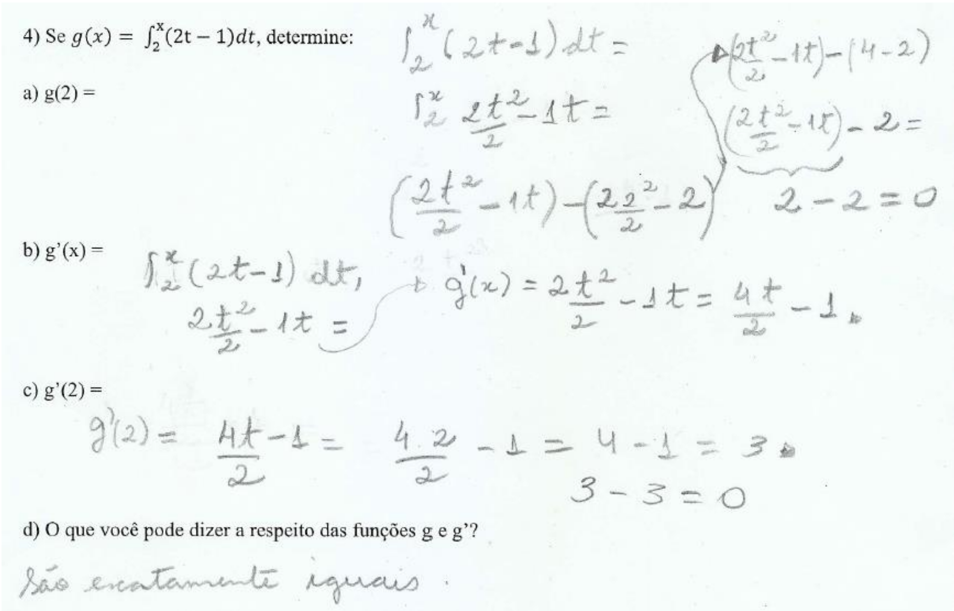
a) g(2) = $\cancel{0}$ $\int 2t\,dt - \int 1\,dt \Rightarrow t^2 - t \Big]_2^2$

$\Longrightarrow 2^2 - 2 - (2^2 - 2) \Rightarrow \cancel{4} - \cancel{2} - \cancel{4} + \cancel{2} = 0.$

Fonte: Questionário do aluno P

Dos dezoito alunos que responderam ao questionário, apenas cinco determinaram a derivada de g' solicitada no item (b). Dos quais, três alunos resolveram a integral pela qual g é definida e, só depois disso, derivou o resultado encontrado. Já os outros dois alunos reconheceram que a derivada da integral de uma função (integrando da integral pela qual g é definida) era igual a essa própria função (integrando). Podemos ver o exemplo deste fato na resposta do aluno M exposta a seguir.

Figura 35: Resposta do aluno M ao item (b) da questão 4 do questionário



4) Se $g(x) = \int_2^x (2t-1)dt$, determine:

a) g(2) =

$\int_2^x (2t-1)\,dt = \int_2^x \frac{2t^2}{2} - 1t = \left(\frac{2t^2}{2} - 1t\right) - \left(\frac{2\cdot 2^2}{2} - 2\right)$

$\left(\frac{2t^2}{2} - 1t\right) - (4-2)$

$\left(\frac{2t^2}{2} - 1t\right) - 2 =$

$2 - 2 = 0$

b) g'(x) =

$\int_2^x (2t-1)\,dt,$

$\frac{2t^2}{2} - 1t =$

$g'(x) = \frac{2t^2}{2} - 1t = \frac{4t}{2} - 1.$

c) g'(2) =

$g'(2) = \frac{4t}{2} - 1 = \frac{4\cdot 2}{2} - 1 = 4 - 1 = 3.$

$3 - 3 = 0$

d) O que você pode dizer a respeito das funções g e g'?

São exatamente iguais.

Fonte: Questionário do aluno M

Vale a pena salientar que (4t/2) – 1 dito, por M, como sendo igual a g'(x) é igual a 2t – 1, que é o integrando da integral que define a função g(x).

O item (c) está intimamente ligado à resposta do interior (b), pois neste segundo item solicitamos a função g'(x), enquanto que no terceiro, g'(2). Com isso, o que nos chamou atenção no terceiro item foi que mesmo descrevendo adequadamente a resposta do item (b), quatro alunos não alcançaram a resposta certa desta questão devido a equívocos nos procedimentos algébricos ou por evocarem ideias não esperadas para este problema.

Figura 36: Resposta do aluno P ao item (c) da questão 4 do questionário

b) g'(x) = $2t - 1.$

c) g'(2) = $\left.2t - 1\right]_2^2$ $2.2-1-(2.2-1)$
$\cancel{4}-\cancel{1}-\cancel{4}+\cancel{1}=0.$

Fonte: Questionário do aluno P

Observando as respostas à essa questão e, principalmente, ao item (d), vemos que os estudantes concluíram que a função g era primitiva da função g' a partir das resoluções dos itens anteriores, que exploravam propriedades correlatas. Um exemplo de um aluno cujas respostas expressam este fato é a que foi fornecida pelo aluno J, expressa abaixo.

Figura 37: Resposta do aluno J à questão 4 do questionário

4) Se $g(x) = \int_2^x (2t-1)dt$, determine:

a) g(2) = 0

b) g'(x) = $2x - 1$

c) g'(2) = 3

d) O que você pode dizer a respeito das funções g e g'?

g' É A FUNÇÃO DERIVADA DA FUNÇÃO g.

Fonte: Questionário do aluno J

Apesar deste aluno não expor uma elaboração extensa ao responder aos itens desta questão, vemos que sua imagem conceitual se mostra muito enriquecida. Aliás, além de rica, o aluno a evocou de forma precisa nesta questão, mostrando bem consciente das relações requeridas nesta questão.

Após esta análise dos itens, individualmente, podemos concluir que a imagem conceitual dos alunos não está nutrida de forma que tenhamos uma boa porcentagem de alunos que conseguiram desenvolver adequadamente todos os itens. A saber, apenas o aluno J forneceu todas as respostas corretas. Com isso, podemos dizer que a relação entre derivada e integral (expressa pelo TFC) não está bem solidificada em sua imagens conceituais. Provavelmente, essa questão pode ter gerado conflitos cognitivos que os fizeram determinar alguns questionamentos e não desempenharem o mesmo papel em outros.

Questão 5

A tabela a seguir nos fornece informações sobre quais foram as respostas que os alunos marcaram na questão 5, visto que a mesma era de múltipla escolha. Com isso, podemos ver que três alunos marcaram o item (a) como primeiro gráfico e seis deixaram esta mesma questão em branco. Da mesma forma, podemos dizer que quatro alunos escolheram o item (g) como segundo gráfico e cinco alunos não responderam a essa segunda parte da questão.

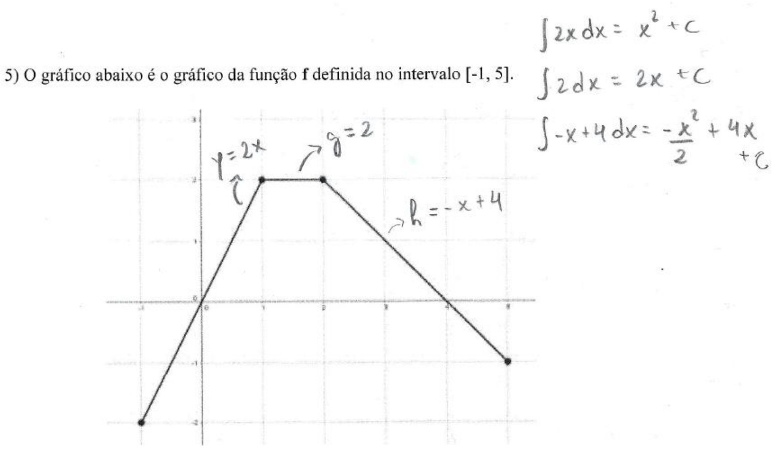
Quadro 5: respostas que os alunos marcaram na questão 5 do questionário

	Item marcado	**Quantidade de alunos**	**Porcentagem de alunos**
Grafico 1	a	3	16,7 %
	b	4	22,2 %
	c	1	5,6 %
	d	4	22,2 %
	Em branco	6	33,3 %
Gráfico 2	E	3	16,7 %
	F	3	16,7 %
	G	4	22,2 %
	H	3	16,7 %
	Em branco	5	27,8 %

Apesar de essa questão ser de múltipla escolha, dois alunos (G e J) escreveram algo além da simples marcação da alternativa correta. Eles escreveram suas justificativas para os itens. Os outros alunos não fizeram nenhum tipo de marcação no questionário, além da alternativa escolhida por eles.

A próxima imagem retrata a resposta do aluno J ao primeiro item do problema que era o de determinar qual dos gráficos dados seria o que representaria a função derivada do gráfico abaixo.

Figura 38: Resposta do aluno J à questão 5 do questionário

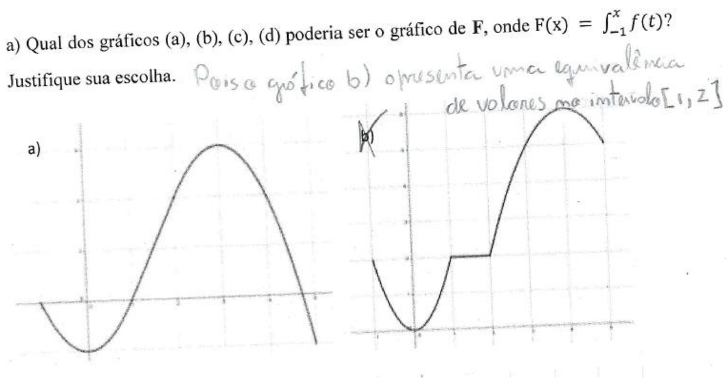


Fonte: Questionário do aluno J

Vemos que este aluno expressou que sua imagem conceitual está de acordo com a definição formal de determinação de função primitiva. Ele identificou três partes distintas do gráfico e as representou algebricamente. Depois disso, ele evocou o conceito de integração para determinação das primitivas calculando a integral de cada uma das partes do gráfico, formando, assim, o gráfico da primitiva, unindo as três partes encontradas.

O aluno G comparou o gráfico do item (b) com o gráfico **f** fornecido inicialmente no intervalo [1, 2] onde as duas realmente são iguais e julgou que a integral de **f** e a própria **f** teria a mesma representação gráfica. A seguir podemos verificar sua justificativa.

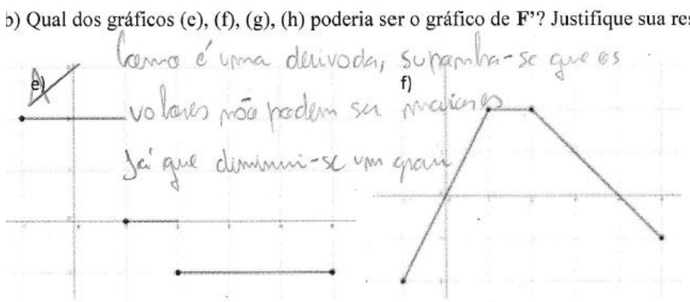
Figura 39: Resposta do aluno G ao primeiro item da questão 5 do questionário



Fonte: Questionário do aluno D

A seguir vemos sua resposta ao segundo item em que este aluno justificou a escolha do gráfico (e) acreditando que a derivada de **F’** seria igual à derivada de **f**, visto que de fato este gráfico representaria o gráfico de **f’**.

Figura 40: Resposta do aluno G ao segundo item da questão 5 do questionário



Fonte: Questionário do aluno G

Este aluno evocou imagens conceituais gráficas que realmente podem estar bem representadas graficamente, porém ele não conseguiu relacionar as funções **f** e **F**, de forma que **F** seja a primitiva de **f**.

Esta questão nos fornece dados que nos permite dizer que os alunos de forma geral encontram muitas dificuldades em relacionar, graficamente, as funções, suas derivadas e as primitivas. Considerando que as respostas corretas eram os gráficos C e F, temos que nenhum aluno marcou essas duas em seu questionário. Além disso, vemos que a porcentagem dos que marcaram os itens C e F, separadamente, também são muito baixos, 5,6% e 16,7%, respectivamente.

Questão 6

Ao solicitarmos a descrição do que eles entendiam da integral definida, encontramos respostas tais como as descritas na tabela abaixo. Com isso, vemos que: onze alunos relacionaram este conceito à determinação da área sob o gráfico no intervalo de integração; quatro relacionaram a integral definida com a determinação da função primitiva à função do integrando; dois alunos deixaram em branco; e, um aluno escreveu que a integral definida nos fornece a função inversa da derivada de f(x)dx.

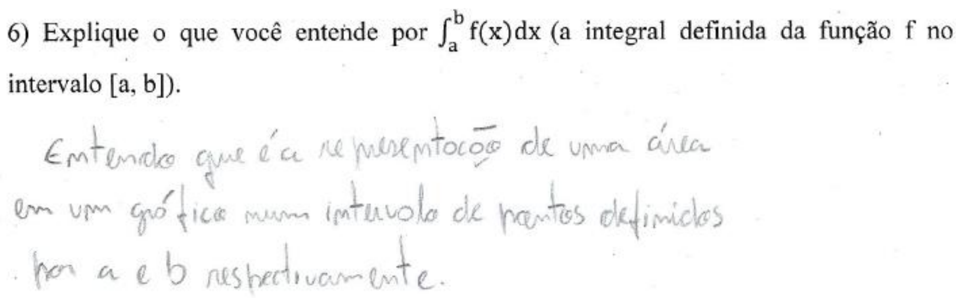
Quadro 6: respostas à questão 6 do questionário

	Quantidade de alunos	**Porcentagem de alunos**
Área sob o gráfico no intervalo dado	11	61,1 %
Função primitiva à do integrando	4	22,2 %
Em branco	2	11,1 %
Função inversa da derivada de F(x)dx	1	5,6 %

A seguir, vemos as imagens das resposta dos alunos G, D e O, representando respostas relativas aos alunos que associaram o conceito de integral definida como sendo a ferramenta para a determinação da área sob o gráfico, da determinação da função primitiva da função **f** e a função inversa da derivada de F(x)dx, respectivamente.

Aluno G

Figura 41: Resposta do aluno G à questão 6 do questionário



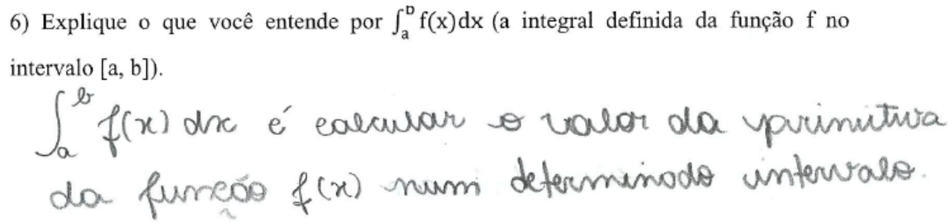
6) Explique o que você entende por $\int_a^b f(x)dx$ (a integral definida da função f no intervalo [a, b]).

Entendo que é a representação de uma área em um gráfico num intervalo de pontos definidos por a e b respectivamente.

Fonte: Questionário do aluno G

Aluno D

Figura 42: Resposta do aluno D à questão 6 do questionário



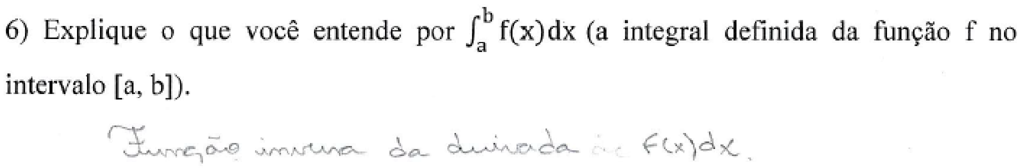
6) Explique o que você entende por $\int_a^b f(x)dx$ (a integral definida da função f no intervalo [a, b]).

$\int_a^b f(x)\,dx$ é calcular o valor da primitiva da função f(x) num determinado intervalo.

Fonte: Questionário do aluno G

Aluno O

Figura 43: Resposta do aluno O à questão 6 do questionário



6) Explique o que você entende por $\int_a^b f(x)dx$ (a integral definida da função f no intervalo [a, b]).

Função inversa da derivada de F(x)dx.

Fonte: Questionário do aluno O

Com isso, podemos concluir que a imagem conceitual dos alunos está ricamente preenchida com o conceito de área sob o gráfico. A sua relação com a determinação de uma função primitiva também se mostra muito presente nas imagens dos alunos.

Acreditamos que, apesar de a inversa da derivada de F(x)dx não representar a integral definida de uma função, este aluno pode ter relacionado o conceito de função inversa com a relação inversa entre derivação e integração. Com isso, sua imagem conceitual sobre integral não se mostrou muito claro.

Questão 7

Na sétima questão, vemos no item (a) uma função constante, representada gráfica e algebricamente, cuja área limitada por seu gráfico e o eixo x está sendo representada no gráfico indo de x = 0 até um x qualquer maior que zero. Solicitamos aos alunos que eles calculassem a área da região marcada de igual a zero até x igual a 1, 2, 3 e para um valor x = t qualquer, onde t é maior que zero.

No segundo item, solicitamos informações bem semelhantes às do item anterior. Porém, ao invés de se tratar de um gráfico de uma função constante, agora temos o desenho e a expressão algébrica de uma função afim (1º grau).

Foi dada uma tabela para preenchimento desses dados e um eixo para que eles pudessem esboçar o gráfico da função área A em cada caso.

As tabelas abaixo mostram como os alunos responderam aos itens (a) e (b), respectivamente.

Quadro 7: Respostas ao item (a) da sétima questão

	Quantidade de alunos	**Porcentagem de alunos**
Em branco	9	50,0 %
Função afim	5	27,8 %
Constante	4	22,2 %

Quadro 8: Respostas ao item (b) da sétima questão

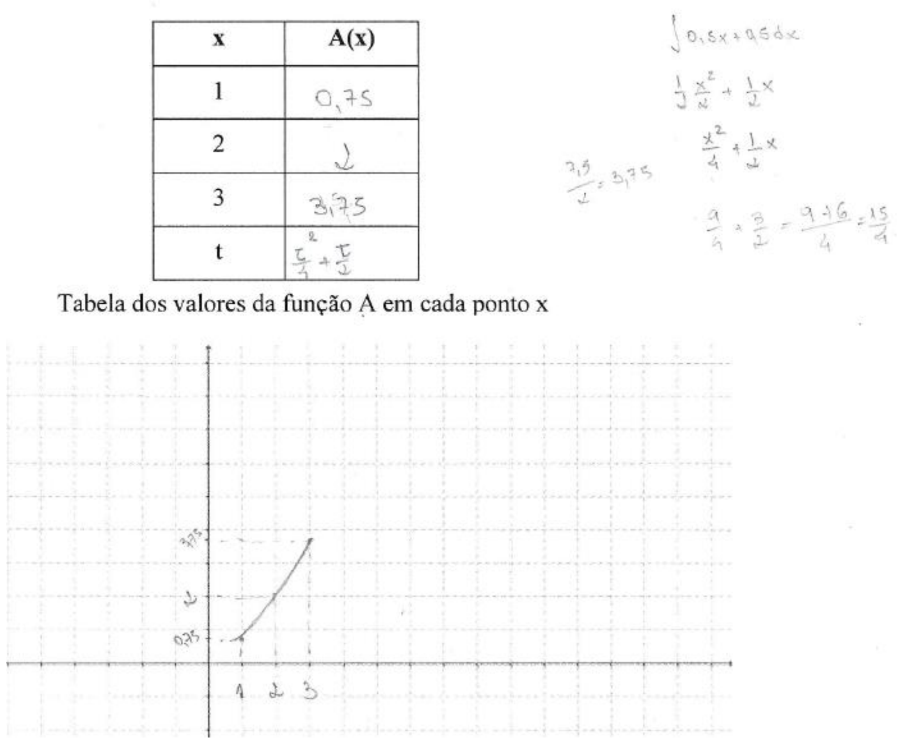
	Quantidade de	**Porcentagem de**

	alunos	**alunos**
Em branco	8	44,4 %
Função afim	8	44,4 %
Função Quadrática	2	11,2 %

Podemos ver que nove alunos deixaram o primeiro item em branco, cinco esboçaram gráficos de uma função afim e quatro representaram a função área com uma função constante. Destacamos que todas as quatro funções constantes representadas eram exatamente iguais à função dada. Além disso, as cinco respostas que apresentaram funções afim como a função área eram iguais entre si e representavam a primitiva da função dada, apesar de somente dois deles expressarem os cálculos de integração para a determinação da primitiva. Os outros utilizaram as informações da tabela para generalizar seus resultados.

Em relação ao segundo item, temos que oito representaram a função área com uma função afim e outro oito deixaram o item em branco. A seguir, vemos a resposta ao item (b) fornecida pelo aluno O.

Figura 44: Resposta do aluno O à questão 7 do questionário



x	A(x)
1	0,75
2	2
3	3,75
t	$\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2}$

Tabela dos valores da função A em cada ponto x

Fonte: Questionário do aluno O

Podemos perceber que apenas dois alunos responderam fornecendo uma função quadrática como resposta. Além disso, esses alunos foram os alunos que haviam respondido ao item anterior utilizando a integral para determinar a função área e que evocaram os meus conceitos de suas imagens para auxiliá-los neste item.

Com essas informações, podemos dizer que as imagens conceituais presentes nas respostas dos alunos demonstram que eles não conseguiram associar a relação de área sob o gráfico, em uma situação em que ela varia, com a da primitiva da função dada. Ou ainda, podemos dizer que a imagem conceitual evocadas deles mostraram, de forma geral, que eles encontraram dificuldades para calcular os valores solicitados na tabela e, a partir dos dados obtidos, generalizar para o caso em que x fosse igual a t, esboçando o seu respectivo gráfico.

Questão 8

Ao analisarmos as respostas dos alunos ao questionário principal, constatamos que houve 12 alunos que não responderam nada a oitava questão, 1 (um) que apenas fez algumas marcações, dois alunos que escreveram que não sabiam resolvê-la e três que deram uma resposta à essa questão. Os alunos que não responderam nada foram: F, E, C, D, J, G, L, M, N, Q, R e S.

Apesar de não trazer uma solução à essa questão, o aluno T fez algumas marcações nos gráficos dados na parte superior da folha fornecida para resolução da questão que podem fornecer informações sobre suas imagens mentais associadas ao problema.

Como vemos na figura abaixo, ele fez traços limitando a área da figura 1 – cujo valor era pedido – e as distâncias verticais entre o eixo x e os pontos A e B na figura 2, que era igual ao valor da área da figura 1. Com isso, podemos dizer que ele *explorou as informações visuais* expressas pelos gráficos. Mesmo não estabelecendo uma resposta à questão utilizando esses traços ao TFC, vemos que ele evocou sua imagem conceitual que contém conteúdos que podem ser associados (ou não) com a 1ª parte do TFC. Observando o que este aluno "rabiscou" na parte superior de sua folha, vemos que sua imagem conceitual também pode conter elementos conceituais sobre a segunda parte do TFC, uma vez que ele estabelecer uma relação entre a função derivada (f) e sua primitiva (g). Com isso, podemos dizer que ele *evoca o TFC*, ainda que não fosse formal ou completa. Ainda assim, ele não associou sua imagem à definição conceitual formal deste teorema, *não evocou o conceito de integral definida* e *não relacionou as informações visuais entre esses dois gráficos* para responder à questão. A seguir, podemos observar sua resposta.

Figura 45: Resposta do aluno T à oitava questão do questionário

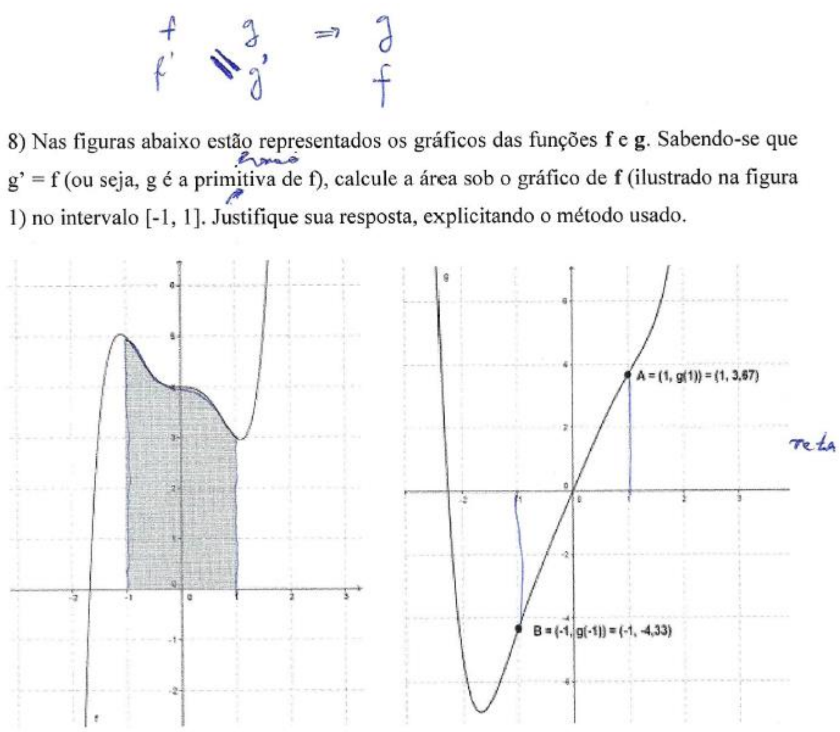


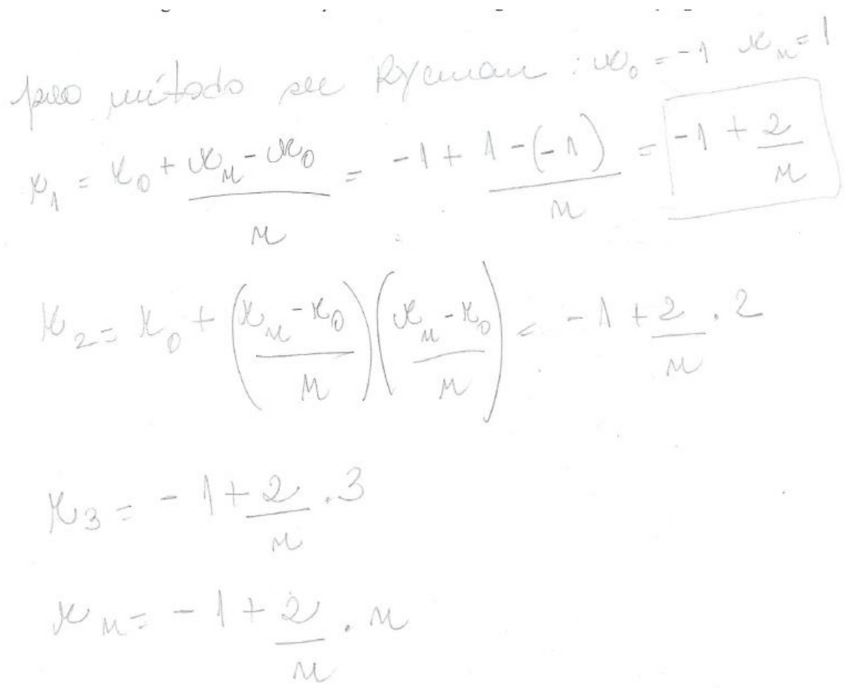
Figura 1: Gráfico da função **f** Figura 2: Gráfico da função **g**

Fonte: Questionário do aluno T

Os alunos H e O escreveram em seus questionários que não sabiam responder à oitava questão. O aluno O *explorou as informações visuais* do gráfico da figura 2, fazendo marcações dos valores de g(1) e g(-1), circulando-os com a caneta, mas mesmo assim *não evocou conceitos relacionados ao TFC* para resolver a questão e disse que não sabia dar resposta.

Vemos nas imagens das respostas do aluno I a seguir que ele tentou utilizar o que ele chamou de "método de Riemann" para determinar a área da figura 1. Para tal, ele utilizou a ideia de determinação de área sob um gráfico por soma de retângulos, mesmo não havendo informações suficientes para que ele o fizesse utilizando este recurso. Além disso, a solução esperada não envolvia o "método de Riemann". Portanto, podemos entender que ele evocou conceitos de sua imagem sobre este conceito que tem alguma relação com o problema, mas que, de fato, não é uma ferramenta com potencial para a resolução do mesmo. O uso dessas ideias para resolução desta questão da maneira que foi feita pode ter sido fortemente influenciada pela ação do professor em sala, visto que esta construção é comumente feita nas aulas de cálculo. Com isso, podemos dizer que este aluno *explorou as informações visuais* para estabelecer sua solução, mas *não evocou conceito de integral definida*, *não relacionou as informações visuais entre os dois gráficos* e, também, *não evocou o TFC* para solucionar a questão.

Figura 46: Resposta do aluno I à questão 8 do questionário



Fonte: Questionário do aluno I

Figura 47: Resposta do aluno I à questão 8 do questionário (continuação)

$$n = x_i - x_{i-1} = \frac{2}{n} = \Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{n} = \left[(x_1 \cdot \Delta x) + (x_2 \cdot \Delta x) + (x_3 \cdot \Delta x) + (x_n \cdot \Delta x)\right]$$

$$= \left(-1+\frac{2}{n}\right) + \left(-1+\frac{2}{n} \cdot 2\right) + \left(-1+\frac{2}{n} \cdot 3\right) + \left(-1+\frac{2}{n} \cdot n\right)$$

$$-1+\frac{2}{n}\left(1+2+3+n\right)$$

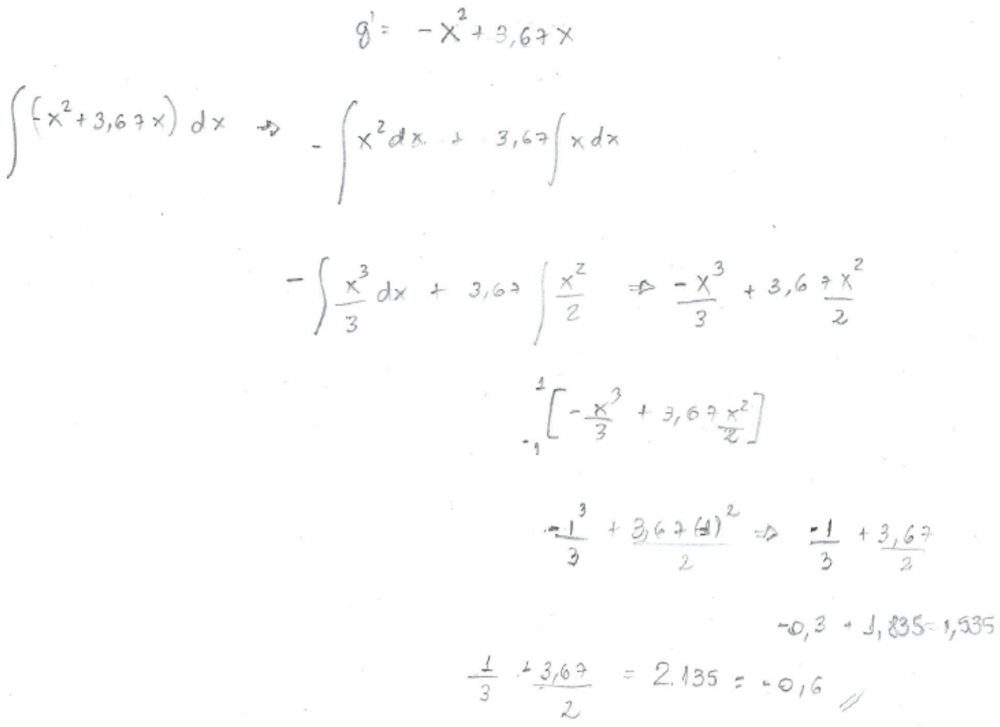
$$-1+\frac{2}{\cancel{n}} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot \cancel{n}$$

$$\frac{1+n}{2}$$

Fonte: Questionário do aluno I

A imagem abaixo é do questionário do aluno K. Nela podemos observar que este aluno *explorou as informações visuais* da questão, mas *não estabeleceu uma relação entre os dois gráficos* de modo coerente, visto que ele *particularizou a questão utilizando procedimentos conhecidos* por ele, identificando o gráfico da função g’=f da figura 1 como de uma função do 2° grau, ainda que tal gráfico claramente não se assemelhe à forma gráfica de uma parábola. Após ele considerar g’ como sendo quadrática, ele *evocou e utilizou o conceito de integral definida*, *evocando, também, o TFC* para responder à questão.

Figura 48: Resposta do aluno K à questão 8 do questionário



O aluno P utilizou um recurso geométrico de área, que não era esperado nesta questão, o de decomposição de figuras. Ele *explorou as informações visuais* presente no gráfico da figura 1, identificando visualmente que uma parte da figura “completaria” a outra formando um retângulo, cuja área pode ser determinada mais facilmente. Ele *não evocou o TFC, nem o conceito de integral definida* e, também, *não relacionou as informações visuais entre os dois gráficos* para solucionar o problema, pois só utilizou as informações do primeiro gráfico. Porém, sua visualização e sua intuição agiram potencialmente para determinar a área do gráfico 1, como podemos ver a seguir.

Figura 49: Resposta do aluno P à questão 8 do questionário

$A = b \cdot h \Rightarrow A = 2 \cdot 4 \Rightarrow A = 8.$

De $y=0$ até $y=3$, no intervalo $[-1, 1]$, a parte hachurada forma um retângulo. De $y=4$ até $y=5$, no intervalo $[-1, 0]$, a parte hachurada é exatamente "o que falta" no intervalo $[0, 1]$ em $y=3$ até $y=4$. Logo, se somarmos uma e outra, formaremos um retângulo de base 2, pois está no intervalo $[-1, 1]$ e altura 4, pois está ~~ent~~ entre $y=0$ e $y=4$.

4.3 Oficina

Nesta seção iremos analisar as respostas dos alunos que participaram da oficina após terem respondido ao questionário principal. A terceira atividade proposta na oficina mostra-se central no que diz respeito ao presente trabalho por ter um grande potencial para fornecer dados relevantes para compor a resposta à sua questão de pesquisa. A transcrição de todas as respostas dos alunos à essa atividade encontram-se no *anexo 6*. Almejamos explorar a visualização gráfica, incentivando sua associação à definição formal do TFC a fim de procurar respostas aos problemas propostos. Procuramos analisar quais imagens conceituais os alunos evocam que estão relacionadas ao TFC e sua visualização gráfica. Além destas, observaremos respostas diversas que podem evidenciar que suas imagens conceituais sobre o TFC não existem, está empobrecida ou se elas geram conflitos conceituais com outros conceitos na mente dos alunos.

A realização das atividades se deu de forma individual e em dupla. Planejamos a realização das atividades em duplas, porém alguns alunos solicitaram a participação das atividades de forma individual. Na tabela a seguir estão os alunos e suas respectivas duplas ao participarem da oficina.

Quadro 9: alunos e duplas participantes da oficina

	Alunos
Individual	P
	K
	J
	O
Duplas	H e R
	I e T
	M e N
	D e K

Vale a pena ressaltar que outros três alunos participaram somente da oficina e não da aplicação do questionário principal. Com isso, suas respostas não foram analisadas, pois pretendíamos analisar as respostas dos alunos que participaram das duas etapas de pesquisa e não apenas de uma delas.

Atividade 3

Algumas questões consecutivas da atividade 3 da oficina podem ser vistas como extensões umas das outras, cujas respostas se complementam e se relacionam. Com isso, decidimos organizar a análise das respostas dos alunos em quarto grupos de questões, como descrito na tabela a seguir. As questões contidas em um grupo estão estritamente relacionadas. A tabela a seguir mostra o detalhamento das questões que pertencem a cada grupo.

Quadro 10: divisão das questões da atividade 3 da oficina em grupos

Grupos	Questões
Grupo 1	1 - 7
Grupo 2	8 - 9
Grupo 3	10 - 13
Grupo 4	14 - 18

As questões que pertencem ao grupo 1, exploram os conceitos de continuidade e o de determinação da área sob um gráfico. As questões pertencentes ao segundo grupo buscam verificar se os alunos conseguem determinar um ponto de uma função primitiva, dada uma função derivada. Com o terceiro grupo de questões buscamos investigar se os alunos conseguem relacionar algébrica, visual e graficamente os gráficos da função derivada e de sua primitiva. O grupo 4 de questões explora as relações visuais e gráficas expressas pela primeira parte do TFC.

A seguir, iremos explorar e analisar as respostas dos alunos a cada grupo separadamente.

Grupo 1

No primeiro grupo de questões vemos que os alunos identificaram a função r como sendo contínua. Alguns deles justificaram e outros não o fizeram, como quantifica a tabela a seguir.

Quadro 11: justificativas para continuidade da função r da atividade 3

	Justificativa	Número de alunos	Porcentagem de alunos
Contínua sem justificativa	----------------	3	37,5%
Contínua com justificativa	É Polinomial	1	12,5%
	Não tem interrupções	2	25%
	Tem um padrão	2	25%

De forma geral, vemos nas respostas dos alunos que quando o valor de t varia, o valor da área sob o gráfico de r varia também. Das oito respostas analisadas, vemos que em seis delas ocorre uma variação da área sob o gráfico e que nas outras duas que existe uma variação no intervalo em x. Provavelmente, esses dois últimos alunos, a saber o aluno P e a dupla I e T, visualizaram o intervalo em x em que a área varia.

Em relação à identificação da área fornecida pelo gráfico ao variarmos os valores de t, temos que a maioria dos alunos (seis) identificou a representação pedida como sendo a área sob o gráfico no intervalo [2, 3] do domínio da função. As outras duas respostas associavam o valor de t, ou seja, o tamanho do intervalo [2, 2+t], que é igual a t, à área. Por exemplo, a dupla M e N disse que "quando t=1, temos um área igual a 1". Dessas seis respostas, podemos ver que todas elas utilizaram integral para determinar a área solicitada, os quais dois deles cometeram equívocos nas resoluções das integrais. Destacamos, também, a resposta da dupla D e K na qual podemos ver que para eles a área valeria 1 (um), associando o valor da área ao tamanho em x do intervalo [2, 3], pois fez algo semelhante a isso quando, na questão seguinte, para t=3, a área também seria igual três, visto que o intervalo em x da área seria de [2, 5].

Na questão seguinte, cujo objetivo era semelhante ao anterior, mas para o valor de t igual a cinco, vemos que seis alunos utilizaram integral para solucionar a questão, na qual um aluno se equivocou na utilização dos seus procedimentos. As outras duas respostas foram das duplas M e N e de D e K, que responderam de forma semelhante à questão anterior.

A respeito da generalização da determinação da área sob o gráfico de r no intervalo [2, 2+t], pedida na questão 6, observamos que três respostas estavam em branco. Além desses, a dupla D e K confirmou as suas afirmações anteriores, dizendo que o valor da área é igual ao valor de t. O aluno L utilizou a integral $\int_{\infty}^{5} x^2$ para determinar a área pedida. A dupla I e J disse que $\int_{2}^{t} x^2$ é maior que zero, com t>2, pois $\int_{2}^{2} x^2$ é igual a zero. O aluno O e a dupla I e J responderam à questão utilizando a integral $\int_{2}^{t} x^2$ para descrever a área solicitada.

Ao comparar o valor real da área sob, fornecido pelo *software,* como planejado para a atividade, para valores de t igual a um e três, vemos que o aluno J deixou a questão em branco. As duplas M e N, I e T, D e K e os alunos P e L responderam que os valores para área que eles encontraram não eram iguais ao valor real da área. Além desses, temos que os alunos O, H e R determinaram a área que é exatamente igual à fornecida pelo *Geogebra*.

Grupo 2

Em relação ao rastro do ponto B ao alterarmos os valores de t, o aluno P disse que “quando o valor de t aumenta ou diminui a diferença de y – x no par (x, y)”, do ponto B, “é bem próxima à da área”. Já o aluno L disse que o valor da coordenada x de B é o mesmo que no gráfico ao lado. O aluno J registrou que existe uma variação da área quando o ponto B se move.

A dupla D e K relatou que não há relação entre o valor da área sob o gráfico de r e o rastro do ponto B, porém não relatou como poderíamos determinar o valor do ponto B. A dupla H e R disse que “B é o valor da área no ponto O selecionado por t”. A dupla I e T disse que os pontos B’s coincidem com a função r no intervalo [2, 5]. O aluno O disse que “o ponto B é a relação de x e a integral da área de 0 a x”, ou seja, disse que determinamos os valores das coordenadas de B(x, y), onde y = $\int_{2}^{k} x^2$, para um k>2 qualquer do domínio.

Perguntamos, também, se o rastro dos pontos B's poderia ser modelado por alguma função. Para o caso afirmativo, solicitamos um exemplo desta função cujo gráfico contenha todos os pontos B's. Analisando as respostas dos estudantes vemos os alunos P e L que disseram que a função que descrevia o rastro visto no *Software* seria a função $f(x) = x^3$, o aluno J disse que seria a função $f(x) = x^3/3$. A dupla I e T disse que se o ponto B tem coordenadas (a, b), então o valor b – a é aproximadamente igual à área sob o gráfico de r. A dupla D e K disse que não existe solução, ou seja, que não existe uma função que descreva tal rastro. A dupla H e R disse que não sabe responder, enquanto que a dupla M e N, e o aluno O não responderam à questão. O quadro a seguir mostra como podemos organizar as respostas dos alunos.

Quadro 12: como os alunos relacionam um função e as coordenadas dos pontos de sua primitiva

	Número de alunos	**Porcentagem de alunos**
Função polinomial do 3° grau	3	37,5 %
Não sabe, não tem solução ou em branco	4	50 %
Se B(a, b), então b – a é aproximadamente igual a área sob r.	1	12,5 %

Grupo 3

Na décima questão perguntamos o que os alunos poderiam dizer a respeito da função R e o que ela representa. O aluno O disse que "para valores à esquerda de 0, a função vai para -∞ e que, para valores maiores que 0, a função vai para +∞. O aluno L disse que a função R se trata de "uma parábola cortada ao meio" com "uma das partes invertida". Já o aluno J relatou essa função "representa a área de sua derivada". A dupla D e K disse que apenas que "as coordenadas mudariam", ainda que essa justificativa não seja muito clara e não revele a que se refere. A dupla H e R disse que R é "a função de x^3". I e T disseram que a função R "representa uma função logarítmica". A dupla M e N não respondeu ao questionamento e o aluno O disse que poderíamos determinar a função R calculando "a integral no ponto x no gráfico que tem a função $r(x) = x^2$".

Quanto à determinação de um ponto B(x, y) qualquer, pedimos que eles dissessem como poderíamos descobrir suas coordenadas. O aluno P substituiria valores arbitrários de x na função $f(x)=0{,}33x^3$, tal que $y=f(x)$. O aluno L disse que atribuiria "valores de x e formar y para obter os pontos", mas não especificou em qual função. De forma semelhante ao aluno P, o aluno J disse que iria "supor valor para x e substituir em $f(x) = \frac{x^3}{3}$ para encontrar f(x)", onde $y = f(x)$. Diferença nas respostas desses dois alunos é que P provavelmente utilizou a forma algébrica de $R(x)=0{,}33x^3$ dada no *Software*, cujo coeficiente tem sua forma decimal truncada no segundo dígito, e J utilizou a forma algébrica determinada por ele em questões anteriores.

A dupla H e R disse que para determinar o um ponto B qualquer ele mudaria o valor de t, obtendo novas coordenadas para este ponto. O aluno O disse que obteria o ponto B "calculando a integral $\int_0^2 x^2$".

A dupla D e K respondeu com a palavra "não" à essa pergunta. Enquanto que as duplas M e N, I e T não responderam.

Quanto à relação entre as funções r e R, podemos ver que o aluno P e a dupla D e K identificaram que R tem um grau maior que r. Já o aluno L disse que "quanto maior for o valor de t, maior será o valor da área e maior será o espaço percorrido por B", mas, de fato, não expressou uma relação entre as duas funções.

O aluno J disse R é a função primitiva da função r, enquanto que o aluno O disse que R é a integral de r. Esses dois resultados expressam conceitos semelhantes, porém escritos de formas distintas.

A dupla H e R disse que os pontos B's são iguais nas duas funções.

Os alunos I e T revelaram que ao alterarmos o valor de t, o valor de d é igual ao de t e **e** é igual a área sob o gráfico, porém não determinou a relação entre R e r. A dupla M e N deixou a questão em branco.

Grupo 4

Solicitamos que os alunos nos dissessem o que representavam os valores de d e de **e** expostos no gráfico de R.

O aluno P escreveu que eles são “lados de um triangulo”, cujo terceiro lado é um “pedaço” do gráfico da função $R(x)=x^3/3$. O aluno L disse que d é “o tamanho da área da base”, se referindo à medida da base da área sob o gráfico r. Já o aluno J disse que “d significa a medida de 2 à 5 na função r(x) e **e** significa a área da função r(x) de 2 à 5”. De forma semelhante ao aluno J, vemos que as duplas H e R, I e T consideraram que “d é igual a t e **e** é igual à área”. O aluno O disse que d é o crescimento da área em relação a distancia x.

A dupla D e K respondeu à essa questão, simplesmente, com a palavra “não”. A dupla M e N não respondeu.

Na décima quinta questão, o aluno P disse que poderíamos escrever **e** de R de forma que **e** se obtenha com o resultado da subtração y_B - y_A, em que y_A e y_B são as ordenadas dos pontos A e B, respectivamente.

O aluno L disse que se $y = x^2$, então y = **e**. O aluno J escreveu apenas que $x = \sqrt[3]{3y}$. A dupla H e R escreveu que **e** = $\int_2^t x^2$. Já a dupla D e K disseram que não poderia expressar **e** em função de R. Além disso, temos que o aluno respondeu apenas “sim”, enquanto que as duplas M e N, I e T não responderam à questão.

Na questão 16, temos das oito respostas dadas, temos que 6 delas vemos o relato de que as medidas de **d** e **t** são iguais, a saber os alunos P, L e O, e as duplas D e K, H e R, I e T. O aluno J escreveu, apenas, que “a distância varia”, não detalhando seu raciocínio. Além disso, a dupla M e N deixaram essa questão em branco.

Sobre a relação entre os valores de **e** e da área sob o gráfico de r, vemos que os alunos P, L, J e O e as duplas D e K, I e T disseram que essas duas medidas são iguais. Além disso, temos que H e R disse que não sabe e a dupla M e N deixou a questão em branco. A tabela a seguir retrata o resultado das análises das respostas à questão 17.

Quadro 13: relação entre o valor de *e* e a área sob o gráfico de r

	Número de alunos	Porcentagem de alunos
A medida de *e* é igual à medida da área sob o gráfico de r	6	75 %
Não sabem ou não responderam	2	25 %

Vale salientar, ainda, que o aluno J utilizou a palavra “equivalente” para descrever a igualdade entre as medidas de **e** e da área sob o gráfico de r.

Na última questão desta atividade, podemos verificar que para o aluno P que “o parâmetro t do segundo gráfico é exatamente o parâmetro de d. E a área é o parâmetro **e** do segundo gráfico”. Já o aluno L diz que é possível determinar o valor da área sob r utilizando apenas as informações do gráfico de R, porém não diz como encontrá-lo. De forma semelhante, temos os alunos J e O e as duplas D e K, H e R que disseram que a questão é possível, mas que não sabiam como explicar tal conclusão ou que simplesmente não apresentaram uma justificativa. A dupla I e T disse que “é possível, pois **e** = área”. Por fim, a dupla M e N não respondeu a essa questão.

Panorama geral das análises das respostas à oficina

Verificando as respostas ao primeiro grupo de questões, percebemos que as imagens conceituais relativas às ideias de continuidade para o caso de funções polinomiais estão bem solidificadas, especialmente a função $r(x) = x^2$ cujo gráfico já estava plotado no *software*.

Os resultados mostram que eles tiveram dificuldades em determinar de forma precisa o valor da área por si só, e quando o valor da área real foi dado, o contraste entre os valores encontrado e dado no problema podem ter gerado conflitos conceituas relativos ao valor da área. Somente dois alunos associaram os valores reais das áreas dados pelo *software* com os obtidos por eles anteriormente.

Salientamos que as imagens conceituais dos estudantes relativas à determinação da área sob o gráfico de r estão muito enriquecidas com o conceito de integração.

De forma geral, os alunos identificaram que os rastros dos pontos **B**’s poderiam ser modelados por uma função polinomial do 3º grau. Suas respostam foram as funções

f(x) = x^3 e **g**(x) = $x^3/3$. A segunda delas foi determinada por alunos que utilizaram integral para encontrar a área sob o gráfico anterior e, assim, determinando a primitiva de **r** que é igual a **g**. Pode-se dizer que a imagem conceitual deles quanto às características gráficas da primitiva de uma função quadrática está bem consolidada e representada por eles por uma função do 3º grau que variou pela multiplicação de uma constante.

Ao solicitarmos que eles descrevessem a relação entre as funções **r** e **R**, alguns não as relacionaram como sendo derivada e primitiva, uma da outra. Chamou-nos atenção o fato de que as respostas apresentadas não levaram em consideração a função **R** que estava descrita na janela ao lado no *Software*, o que poderia ajudá-los a pensar em tal relação.

Ao tentar determinar uma forma geral para as coordenadas do ponto **B**(x, y), no gráfico de **R**, vemos que os alunos evocaram imagens relativas aos aspectos não formais de tal conceito.

Ao analisarmos as respostas dos alunos às questões do grupo **4** da atividade 3 da oficina objetivamos responder à questão desta pesquisa. Para isso, observamos quais conceitos os alunos evocaram ao apresentar soluções à esse grupo de questões, que eram estritamente ligadas ao TFC e foco principal de nossa análise das respostas da oficina.

Podemos ver que os alunos P, L, J e a dupla I e T *exploraram as informações visuais e relacionaram as informações entre os dois gráficos.* Porém, eles *não evocaram o conceito de integral definida e nem o TFC.* O aluno P descreveu bem o valor de **e**, associando-o a área sob o gráfico de r. O aluno L disse que os valores de **e** e da área eram iguais, porém sem apresentar uma justificativa. A dupla I e T não respondeu à questão que perguntava se era possível escrever **e** utilizando as informações do gráfico de R e, na última questão, disse que é possível escrever a área sob o gráfico de r em um intervalo utilizando o gráfico de R, pois o valor de **e** é igual ao da área. Apesar de não ser evidente, podemos pensar que eles podem ter *evocado conceitos relativos ao TFC*, pois tal resultado permitiria, de maneira formal, estabelecer o resultado que essa dupla apresentou.

A dupla D e K *exploraram as informações visuais, relacionaram as informações entre os dois gráficos e não evocou o conceito de integral definida e nem o TFC.* Esta dupla disse que não é possível escrever o valor **e** em função dos valores de R, porém o mesmo associou este valor à área sob o gráfico de r, dizendo que é possível descrever **e** utilizando as informações de r. Sua resposta revela que sua imagem conceitual pode haver imagens conflituosas que não o permitiu apresentar uma resposta coerente à questão.

A dupla H e R, e o aluno O *exploraram as informações visuais, relacionaram as informações entre os dois gráficos.* Além disso, eles *evocaram o conceito de integral definida,* revelando que eles podem ter *evocado conceitos relativos ao TFC,* pois ambos utilizaram a integral da função r para determinar uma medida presente no gráfico da função R, esta última sendo a primitiva da primeira.

A dupla M e N não apresentou nenhuma resposta à esse grupo de questões.

Capítulo 5 – Resultados

Esse presente trabalho contém as análises de diversas pesquisas sobre o TFC, aprendizagem, intuição, e as dificuldades no ensino do cálculo de forma geral fornecendo um panorama geral das pesquisas relativas aos temas citados, principalmente, no Brasil. Essa pesquisa traz contribuições relativas à investigação dos aspectos visuais e gráfico do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) que não foram explorados em outras pesquisas. As pesquisas em Tall (1991a; 1991b) trazem recursos que foram importantes para a investigação sobre possibilidades de visualização gráfica do TFC, para a formulação das questões e atividades do questionário e da oficina.

Desenvolvendo as etapas deste trabalho observamos que nossa análise das respostas escritas dos alunos às questões do questionário e às atividades da oficina forneceram informações relevantes para o escopo desta pesquisa, ajudando-nos a responder a questão de pesquisa.

Ao investigarmos *que conceitos matemáticos os alunos evocam ao participarem de atividades que exploram a aplicação da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), com o auxílio de recursos visuais gráficos e computacionais,* obtivemos os resultados que passamos a apresentar.

Os resultados de nossa análise das respostas dos participantes ao questionário indicam que cerca de metade dos alunos *evoca o conceito de integral definida* e em sua maioria *explora as informações visuais* fornecidas pelos gráficos. Também em torno da metade dos participantes *evoca o TFC*, embora a porcentagem de alunos que conseguem evocá-lo *relacionando as informações visuais entre dois gráficos* seja muito baixa, 12,5 %, ou seja, apenas um aluno. Da mesma forma, essa porcentagem se repete para o caso em que houve uma *particularização da questão de modo a serem usados procedimentos conhecidos pelo aluno*.

O quadro a seguir resume esta análise. Vale a pena salientar que consideramos os alunos que participaram do questionário piloto, uma vez que não houve alteração de nenhuma questão para a aplicação principal. Além disso, o percentual em cada item não representa o número total de alunos, uma vez que alguns alunos evocaram ou evidenciaram mais de uma imagem que são associadas aos conceitos a seguir.

Quadro 14: Uma análise das respostas ao questionário referentes à aplicação da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), com o auxílio de recursos visuais gráficos

	Número de alunos
Evocam o conceito de integral definida	3
Exploram as informações visuais	6
Relacionam informações visuais entre dois gráficos	1
Evocam o TFC	3
Particularizam a questão de modo a usar procedimentos conhecidos	1

Relembrando os resultados obtidos nas análises das respostas ao questionário, doze (12) alunos não responderam à oitava questão deste questionário, ou seja, somente oito responderam à essa questão, incluindo os dois participantes do questionário piloto. Logo, considerando apenas as respostas válidas, temos as seguintes porcentagens:

Quadro 15: Percentual de respostas válidas referentes ao Quadro 14

	Porcentagem de alunos
Evocam o conceito de integral definida	37,5 %
Explora as informações visuais	75 %
Relaciona informações visuais entre dois gráficos	12,5 %
Evoca o TFC	37,5 %
Particularizou a questão de modo a usar procedimentos por ele conhecidos	12,5 %

Das atividades da oficina utilizando computadores, de um modo interessante, há algumas diferenças que valem um destaque. Todos os alunos que forneceram respostas no relatório solicitado evidenciaram que eles *exploraram as informações visuais* e *relacionaram as informações visuais entre dois gráficos* fornecidos pelo Geogebra na atividade proposta. Um pouco mais de um quarto das respostas continham aspectos que indicavam que o aluno *evocou o conceito de integral definida*. Esta mesma porcentagem se repete para os que *evocaram o TFC*. Houve, portanto, uma porcentagem menor de alunos que evoca o conceito de integral definida relacionando-o ao cálculo de áreas do que no questionário, e um acréscimo no número dos que exploram as informações visuais. Esta observação pode ser natural, mas pode também indicar que os recursos de geometria dinâmica se mostram eficientes na tentativa de construção visual da relação expressa pelo TFC.

Em síntese, obtivemos oito respostas à oficina, oriunda das quatro duplas que participaram juntos e outros quatro alunos que participaram de forma individual. Das oito respostas, uma dupla não apresentou respostas ao grupo 4 de questões da atividade 3 da oficina. O Quadro 3 expõe a quantidade e porcentagem de alunos que evocaram ou utilizaram os conceitos nela expressos.

Quadro 16: Uma análise das respostas no relatório da oficina referentes à aplicação da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), com o auxílio de recursos visuais gráficos

	Número de alunos	**Porcentagem de alunos**
Evocam o conceito de integral definida	2	28,5 %
Exploram as informações visuais	7	87,5 %
Relacionam informações visuais entre dois gráficos	7	87,5 %
Evocam o TFC	2	28,5 %

Da nossa análise sobre *como os alunos usam os conceitos trabalhados em sala de aula ao se envolverem em tais atividades utilizando recursos visuais gráficos e computadores*, destacamos que os alunos *evocam definições conceituais e conceitos trabalhados em sala de aula*, e *buscam relações entre estes e as representações visuais* investigadas. Este é o caso do conceito de integral definida, identificado com a noção de área sob gráfico de uma função. Mesmo quando a visualização pode fornecer uma solução rápida para a questão do cálculo de áreas, os participantes favoreceram utilização de métodos algébricos. Outro fato que detectamos foram alguns fatores de conflito potencias, incluídos nas imagens conceituais sobre integral que foram evocadas, pois a integral definida foi identificada como sendo a área sob o gráfico num intervalo; mas quando questionados da área entre o gráfico e o eixo x em um gráfico com regiões negativas, as respostas se mostraram equivocadas, não considerando o módulo das partes negativas, abaixo do eixo x. Com isso, ao somarem o valor da área negativa com a positiva, o resultado diminuía e não aumentava como se espera. Assim, podemos concluir que *as imagens conceituais evocadas a respeito do uso de integrais definidas estão em conflito com a noção de área entre um gráfico e o eixo x* na mente dos alunos.

Sobre o conceito de função contínua, imagens conceituais e definições conceituais evocadas refletem os cenários descritos em Vinner (1991) de que mesmo em contato com a definição formal do conceito, esta pode ser reconstruída ou pode permanecer como antes, compartimentalizada, ou distorcida. Ainda assim os participantes são capazes de desenvolver os procedimentos algébricos e enunciar relações que estão presentes no enunciado. Ou seja, desconsiderando, ou como em Segadas (1998) sem compreender, o papel central da continuidade na hipótese do TFC. Além disso, na atividade 3 da oficina, os alunos identificaram as relações entre os gráficos propostos, porém eles não evocaram uma imagem conceitual relacionada ao TFC, pois nenhum aluno citou ou justificou sua resposta baseando-se neste resultado, mas sim no cálculo de áreas e integral definida. Os alunos não generalizaram os conteúdos relacionados ao TFC utilizando as informações contidas nos gráficos de uma função e sua primitiva. Essas informações evidenciam o fato de que quando se trata de aspectos visuais e gráficos, de forma geral eles *não evocam conceitos formais relacionados ao TFC* para solucionar questões relacionadas a esse tema.

Na entrevista ao final da oficina, quando questionados, os participantes manifestaram que a pesquisa tratava-se da relação entre derivada e integral; mas não mencionaram o TFC. Estes resultados reforçam um modelo de aprendizagem ou de construção do conhecimento que não se dá de modo linear, hierárquico, organizado; mas sim pela constituição de imagens conceituais relacionadas aos conceitos, nem sempre coerentes e consistentes, que podem conter fatores de conflito, como concebido em Tall e Vinner (1981), ou Vinner (1991), por exemplo.

Ao refletirmos *de que modos a intuição se mostra presente nas respostas dos alunos a tais atividades,* retomamos REIS, noção de intuição do TALL, e do FISCHBEIN.

Conjecturamos que um entendimento global das representações que estão sendo exploradas, e portanto uma cognição intuitiva, é requerida para estabelecermos as relações entre representações visuais distintas, e entre estas e resultados matemáticos expressos simbolicamente ou formalmente. Como constatamos nesta pesquisa, apenas um aluno foi capaz de relacionar as duas representações, uma função, sua primitiva, o cálculo de uma área e o Teorema Fundamental do Cálculo.

Os alunos mostraram imensas dificuldades para resolver questões relativas ao TFC tanto quando os gráficos estavam impressos em papel, ou seja, representados de forma estática, quanto no modo dinâmico, utilizando o computador que permitisse a visualizações dos gráficos. Os resultados mostram que juntando as respostas ao questionário piloto com as do questionário principal somente o aluno B *evocou os conceitos necessários e efetivamente os usou*, solucionando a oitava questão do questionário *utilizando as ferramentas fornecidas pelo TFC,* visto que essa questão explorava muito fortemente a relação expressa por este teorema.

Deste modo, analisando essas informações referentes às respostas dos alunos às questões do questionário e da oficina, podemos concluir que nas atividades em que exploram as características visuais e gráficas expressas pelo TFC de forma dinâmica com o auxílio do computador, pode ser possível desenvolvermos aspectos intuitivos dos conceitos matemáticos, uma vez que os alunos evidenciaram que eles *exploraram as informações visuais* dadas e *relacionam informações visuais entre os dois gráficos*, em algumas situações. Com isso, em resposta a *que contribuições uma proposta visual/gráfica do TFC pode ter para o entendimento deste resultado*, podemos dizer que esta pode contribuir para o desenvolvimento de aspectos intuitivos dos conceitos matemáticos, com o fortalecimento das imagens conceituais sobre as relações existentes entre o gráfico de uma função e sua derivada, bem como entre a área sob um gráfico e o valor deste resultado expresso pelo gráfico de sua primitiva.

Assim, podemos entender que o ensino de cálculo, mais especificamente o ensino do TFC, necessita ser mais amplo, explorando seus variados aspectos, porém de forma dinâmica, utilizando *softwares* que forneçam estas possibilidades. Além disso, a variação de exemplos que efetivamente representem a ideia expressa pelo TFC, pelas definições de continuidade, de diferenciabilidade, de integrabilidade, para que a imagem conceitual dos alunos seja ampliada com exemplos do que caracteriza e do que não caracteriza sua definição, com exemplos que causem conflitos conceituais para que sejam explorados e solucionados em conjunto com os alunos. Assim, cremos que a imagem conceitual dos alunos sobre os conceitos fica muito mais enriquecida, gerando maiores possibilidades de aprendizado e, consequentemente, aumento o desempenho da intuição na resolução de problemas relacionados a eles.

Acreditamos que os docentes podem utilizar as ferramentas gráficas e visuais, com o auxílio de um computador ou de outra mídia, para ministrar suas aulas utilizando estes recursos para auxiliá-los na construção das ideias de teoremas, resultados e definição de conceitos, desenvolvendo os aspectos intuitivos sobre os resultados antes de estabelecer uma prova formal. As respostas dos alunos confirmam esta afirmação, pois suas respostas mostram que *suas imagens conceituais relacionadas aos aspectos formais do TFC se mostram empobrecidas*, pois eles não evidenciaram respostas que contivessem tais aspectos quando expostos a atividades que exploram aspectos gráficos deste resultado. Com isso, vemos que existe uma lacuna na aprendizagem dos alunos quanto à esse Teorema, no que diz respeito à sua aplicação na resolução de questões e da fundamentação teórica que não esteve presente nas respostas dos alunos. Então, com os resultados apresentados neste trabalho cremos que a utilização de recursos visuais para o enriquecimento das imagens conceituais dos alunos relativas aos aspectos visuais e gráficos formais relacionados ao TFC.

Considerações Finais

Acreditamos que esta pesquisa possa servir como inspiração e, principalmente, como fonte de recursos de dados matemáticos ligados ao seu ensino.

Em respeito às questões motivadoras desta pesquisa, a saber: “É possível explorar/desenvolver um entendimento visual/gráfico do TFC de forma que tais aspectos (visuais) sejam parte integrante da sua demonstração?”; “Como poderíamos interpretar (entender) as relações expressas pelo TFC graficamente?”; “Se derivada é a inclinação da reta tangente a uma curva e integral é a área sob um gráfico, como podemos associar essas duas informações em um só resultado como o faz o TFC, representando-o graficamente?”; “Que conceitos estão obscuros em meu entendimento para que eu não entenda o TFC em modos em que as relações enunciadas são estabelecidas conceitual e visualmente?”; podemos dizer que elas não foram exploradas e respondidas em sua totalidade, pois não eram foco desta pesquisa. Elas evidenciam um caminho para novas pesquisas relacionadas com estes questionamentos.

Estudando para esta pesquisa e analisando as respostas às suas etapas, outros questionamentos emergiram cheios de potencialidades para futuras pesquisas no campo de pesquisa do Ensino de Matemática:

1. Como relatado anteriormente, não conseguimos aplicar todas as atividades da oficina. Acreditamos que pode haver outras pesquisas que utilizem essas ideias para novas pesquisas, trazendo novos dados e conclusões.
2. Quais contribuições uma intervenção de ensino que proponha o ensino do Cálculo que associe a intuição e o rigor com a exploração dos recursos visuais gráficos, digitais ou não, para o desenvolvimento e prova de resultados e teoremas pode gerar na relação aprendizagem dos alunos? Como o professor pode se preparar para estar em condições para intervir nestas condições?
3. A visualização no ensino de matemática: quais são as suas potencialidades? Como usá-la em aulas de matemática?
4. Existe um grande investimento no Brasil na produção, revisão e distribuição de livros didáticos para alunos da educação básica, vide o PNLD (Plano Nacional do Livro Didático). Apesar da crescente produção de livros na versão digital, quantos utilizam de ferramentas visuais gráficas dinâmicas como as que vemos

aqui? Será que a utilização emergente deste tipo de recurso tornaria a aprendizagem matemática mais significativa naqueles casos onde a visualização realmente tem influência? Que contribuições didáticas a disponibilidade desses recursos podem nos fornecer?

5. É possível utilizar informações visuais gráficas para provar resultados e teoremas de forma rigorosa, permitindo que a intuição esteja ricamente atuante no pensamento matemático e os gráficos sejam parte integrante da demonstração de resultados que contenham conceitos com aspectos geométricos?

Seria um grande prazer fazer parte de uma pesquisa cujo tema fosse algum dos descritos acima, pois se mostram muito relevantes e nos motivam de forma bem intensa.

Bibliografia

ALMOULOD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ANACLETO, G. M. C. **Uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo**. Dissertação de mestrado. PUC/SP, 2007.

ANDERSEN, E. **As ideias centrais do teorema fundamental do cálculo mobilizadas por alunos de licenciatura em matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2011.

CAMPOS, R. P. **A abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2007.

ESCARLATE, A. C. **Uma investigação sobre a aprendizagem de integral**. Dissertação de Mestrado: UFRJ. Rio de Janeiro, 2008.

FISCHBEIN, E. **The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity**. In: Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Dordrecht: Kluwer Academic, 1994.

GRANDE, A. L. **Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação Matemática),**Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2013.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. V. 1, 2. 5ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2001.

HUGHES-HALLETT, D. et al. **Cálculo e aplicações**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Blucher, 1999.

KIRSCH, A. **The fundamental theorem of calculus: visually?**, ZDM Mathematics Education 46:691-695, 2014.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica. Volume 1.** 3ª Edição. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. Editora Harbra, São Paulo, 1994.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. V. 1. 3ª edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1982.

MOISE, E. E. **Cálculo. Um Curso Universitário**. V. 1. Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo. 1970.

PICONE, D. F. B. **Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do Cálculo**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2007.

REIS, F. S. **Rigor e intuição no ensino de cálculo e análise.** Em: Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Volume 5. SBEM. Recife, 2009.

SCUCUGLIA, R., **Experimentação com Calculadoras Gráficas: a Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – UNESP. Rio Claro, 2006.

SEGADAS, C. **Students' understanding of the fundamental theorem of calculus: an exploration of definitions, theorems and visual imagery**, Ph. D. Thesis, University of London, 1998.

SPIVAK, M. **Cálculo Infinitesimal**, segunda edição. Editora Reverté. Versão espanhola: Dr. Bartolomé Frontera Marqués. Espanha, 1992.

STEWART, J. **Cálculo. Volume 1.** 7ª Edição. Editora Cengage Learning, São Paulo, 2012.

TALL, D. O. **Using Technology to Suport and Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics**. In: Primeiro Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro**.** Rio de Janeiro, 2002.

______. **Visualizing Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus**. In: Mathematics Teaching, 137, p. 29–32, 1991a.

______. **Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus**. In: Visualization in Mathematics (ed. Zimmermann & Cunningham), M.A.A., Notes No. 19, 105 –119, 1991b.

______. **How Humans Learn To Think Mathematically**. New York: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. O. e VINNER, S. **Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity**. In: Educational Studies in Mathematics, v. 12, p. 151– 169, 1981.

THOMPSON, P. W. **Images of Rate and Operational Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus**. In: Educational Studies in Mathematics, v. 26 (2-3), p. 229-274, 1994.

Vinner, S. **The Role of definitions in the teaching and learning of mathematics**. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Press, p. 65 – 80, 1991.

VINNER, S. e DREYFUS, T. **Images and Definitions for the Concept of Function.** Journal for Research in Mathematics Education, v. 20, No. 4, p. 356-366, 1989.

Anexos

Anexo 1 - Termo Consentimento

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Caro aluno,

Você está sendo convidado (a) para participar da pesquisa **“Aspectos visuais e gráficos do Teorema Fundamental do Cálculo”**. Após receber a autorização do coordenador do curso de Matemática e com a professora de Cálculo 2, convido os alunos dessa disciplina a fazer parte da pesquisa. Sua participação não será obrigatória, e consistirá em freqüentar três encontros durante o horário de aula de Cálculo 2 participando das atividades propostas. Posteriormente, você poderá ser convidado para participar de entrevistas sobre os encontros realizados, convite que, como antes, você tem total liberdade em aceitar ou não. As observações feitas nos encontros serão registradas por meio de suas anotações, caderno de campo, áudio e entrevistas, para esclarecimentos sobre respostas às atividades realizadas. Os objetivos desse estudo são: investigar se a utilização de recursos visuais e gráficos pode ou não contribuir para a aprendizagem matemática, especialmente do Teorema Fundamental do Cálculo, e quais processos são estimulados por meio de tal prática pedagógica. Os resultados desta pesquisa referem-se, principalmente, às análises das respostas ao questionário e da discussão sobre alguns aspectos levantados nas entrevistas, incluindo reflexões sobre as eventuais intervenções do professor-pesquisador. A pesquisa se justifica pelo alto índice de reprovação em cálculo e o caráter central que o Teorema Fundamental do Cálculo representa nesta disciplina. Tenho a expectativa de tornar útil esse estudo, promovendo uma reflexão sobre o processo de ensino-aprendizagem e sobre recursos didáticos. As informações dessa investigação, além de serem usadas apenas na pesquisa em questão, serão confidenciais e asseguramos o sigilo sobre sua participação. Os dados não serão divulgados de forma a possibilitar sua identificação, pois os participantes podem optar por serem identificados por nomes fictícios no trabalho final. Você receberá uma cópia desse termo onde consta o endereço eletrônico do pesquisador, podendo tirar suas dúvidas em relação ao projeto e sua participação, agora ou a qualquer momento.

____

Aluno

____

Mestrando Erasto Piedade Alonso - E-mail: erasto.alonso@yahoo.com.br

Anexo 2 - Ementa do Curso de Cálculo 2 da UFRRJ

Disciplina	Cálculo II			
Código	Pré-requisitos	Carga Horária	Créditos	
IM402	Cálculo I	60 h	Teóricos	Práticos
			4	0

Ementa

A integral de Riemann de Funções de Uma Variável Real. Funções Reais de Várias Variáveis: limites e continuidade.

Conteúdo Programático

UNIDADE I - INTEGRAÇÃO
1. A Integral indefinida;
2. Integrais definidas: interpretação geométrica. Propriedades básicas e operações. Teorema Fundamental do Cálculo;
3. Integração por mudança de variável simples;
4. Cálculo de áreas.

UNIDADE II - TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO
1. Integração por partes;
2. Integração por substituição trigonométrica;
3. Integração de funções racionais;
4. Substituições diversas.

UNIDADE II - APLICAÇÕES DA INTEGRAL
1. Volume de sólido de revolução: métodos do disco circular e da casca cilíndrica;
2. Comprimento de arco;
3. Extensões do conceito de integral: Integrais impróprias;
4. Convergência e divergência de integrais impróprias: critério de comparação.

UNIDADE III - FUNÇÕES REAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS
1. Funções reais de duas ou mais variáveis;
2. Gráficos e conjuntos de nível;
3. Noções de conjuntos abertos e fechados no $\mathbb{R}^n$;
4. Limite e continuidade. Definições e propriedades.

Bibliografia

1. LEITHOLD, L., *O Cálculo com Geometria Analítica* - volumes 1 e 2, São Paulo: Harbra, 1994.
2. STEWART,J. *Cálculo* - volumes 1 e 2, São Paulo: Pioneira,2002.
3. THOMAS, G. B. *Cálculo* - volumes 1 e 2. São Paulo: Pearson, 2002.

Anexo 3 – Questionário

1) a) Diga o que você entende por função contínua. Dê três exemplos diferentes de funções contínuas.

b) Esboce o gráfico de uma função descontínua. Justifique porque ela não é contínua.

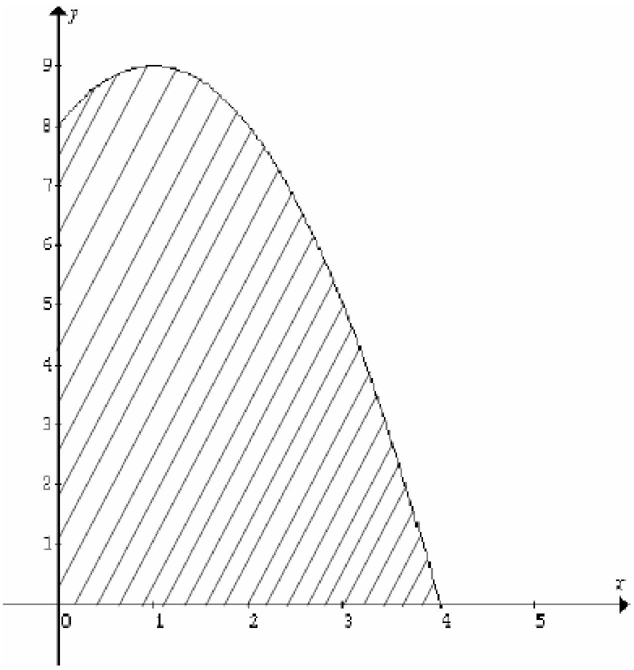
2) Calcule:

a) $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1)dx$

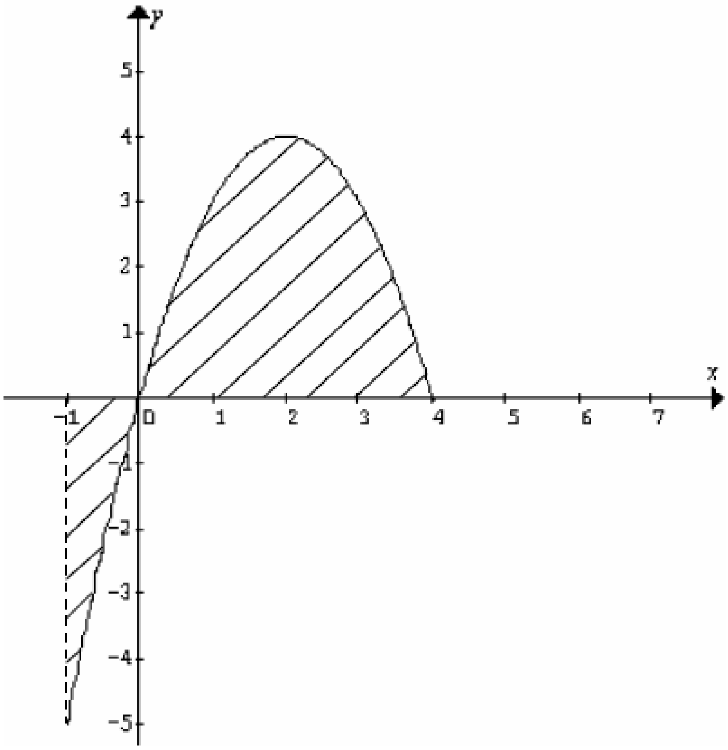
b) $\int_{-1}^2 |x|dx$

3) Em cada um dos casos abaixo, calcule a área da região hachurada.

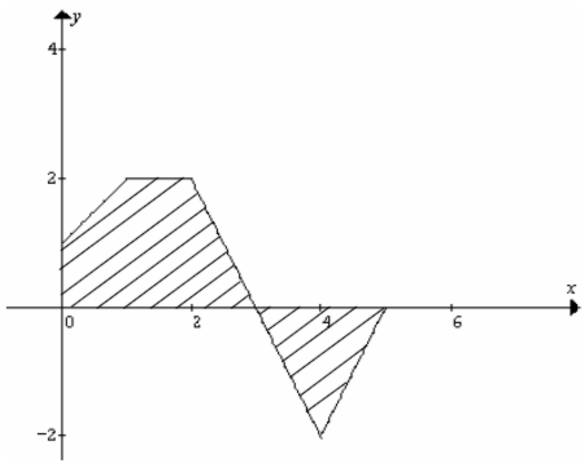
a) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$



b) $f(x) = -x^2 + 4x$



c) f(x) = $\begin{cases} x+1, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \\ -2x+6, & 2 \le x \le 4 \\ 2x-10, & 4 \le x \le 5 \end{cases}$



4) Se $g(x) = \int_2^x (2t-1)dt$, determine:

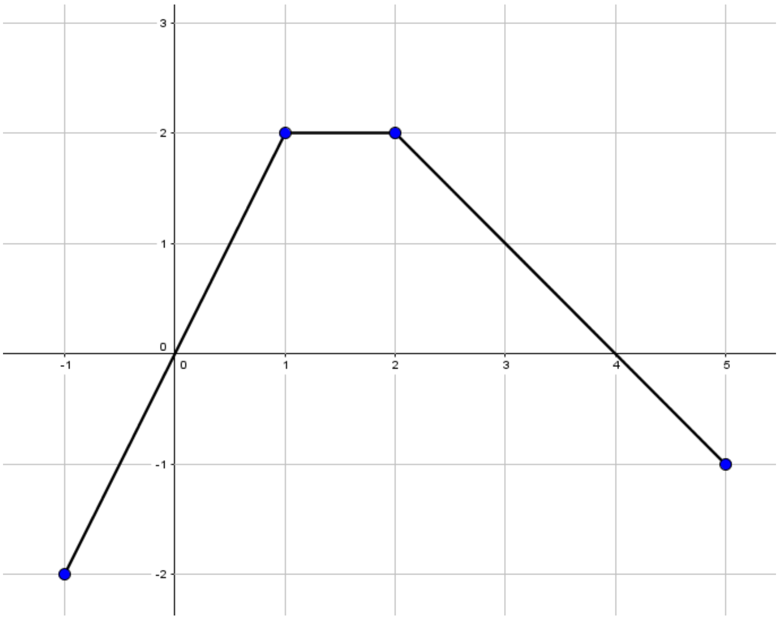
a) g(2) =

b)g'(x) =

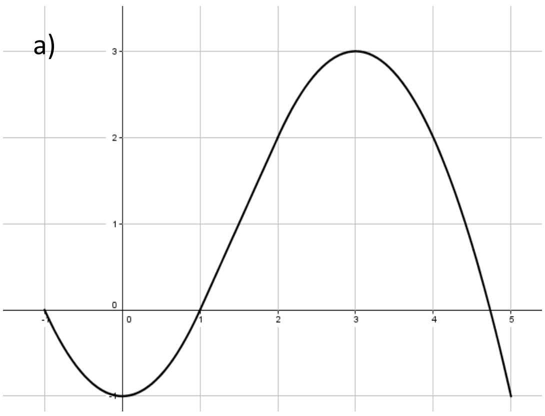
c)g'(2) =

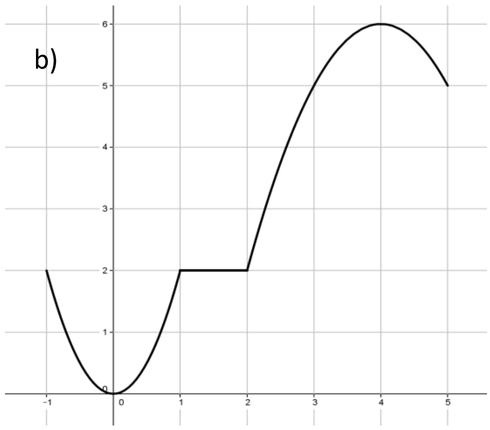
d) O que você pode dizer a respeito das funções g e g'?

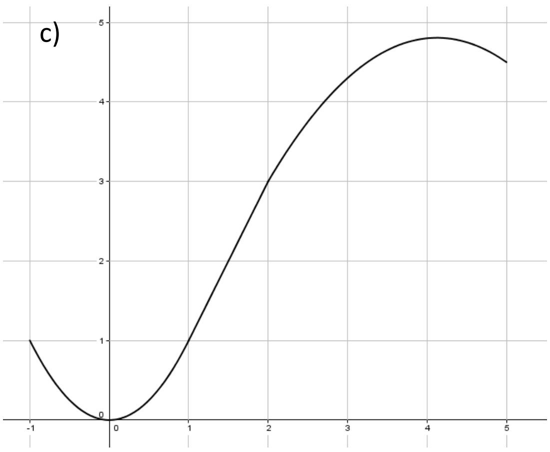
5) O gráfico abaixo é o gráfico da função **f** definida no intervalo [-1, 5].

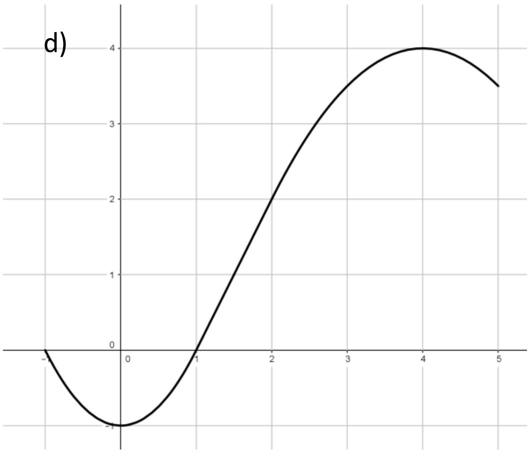


a) Qual dos gráficos (a), (b), (c), (d) poderia ser o gráfico de **F**, onde $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)$? Justifique sua escolha.

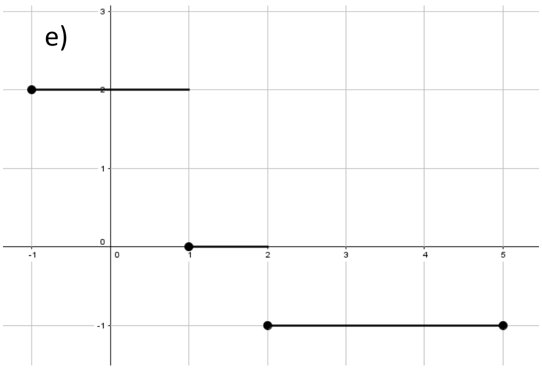


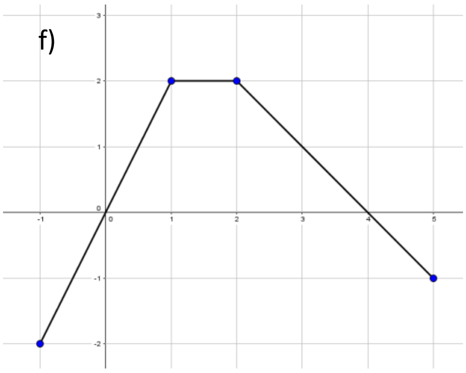


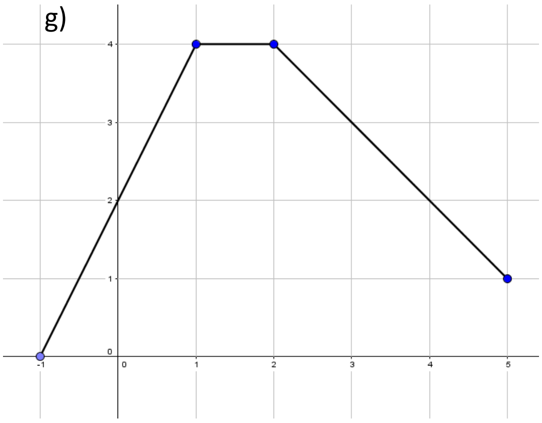


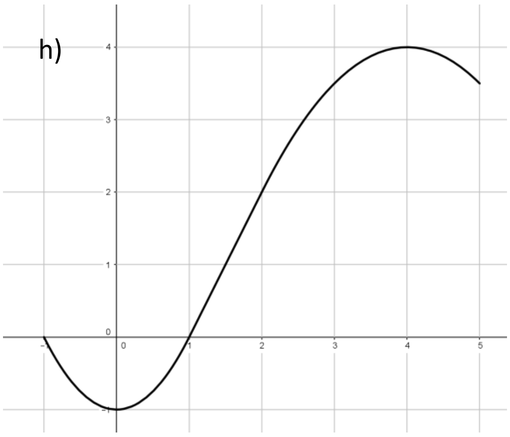


b) Qual dos gráficos (e), (f), (g), (h) poderia ser o gráfico de **F'**? Justifique sua resposta.









6) Explique o que você entende por $\int_a^b f(x)dx$ (a integral definida da função f no intervalo [a, b]).

7) Dada a função **f**, complete a tabela com os valores da função **A** para cada **x** indicado, tal que a função **A** é a função áreasob o gráfico de**f**.Além disso, escreva a função área **A** em função de **x** e esboce seu gráfico.

a)

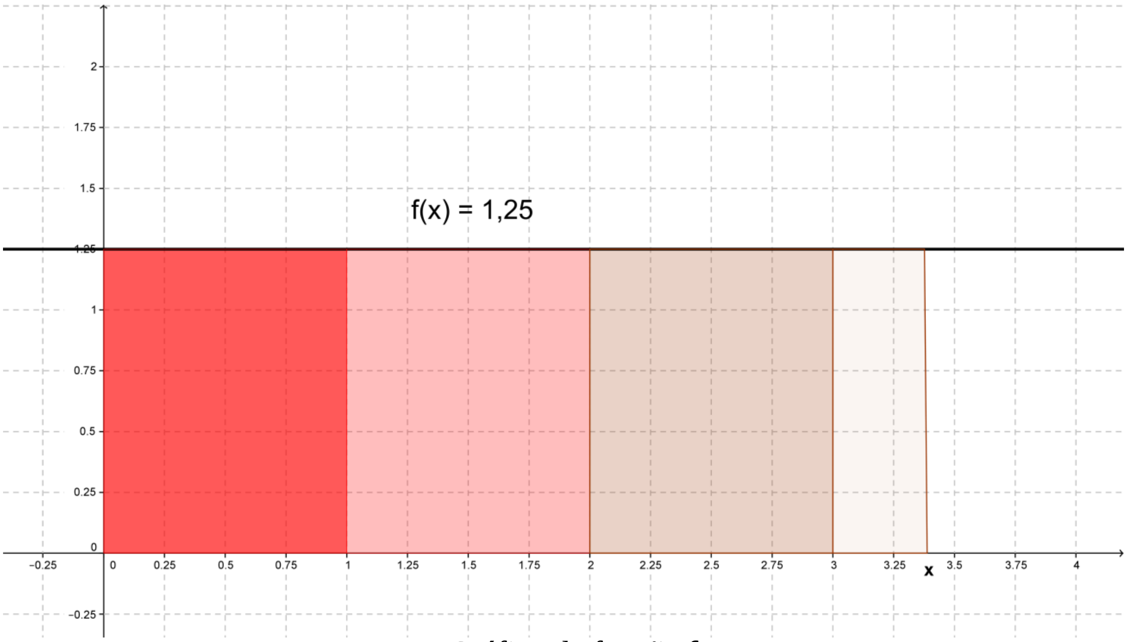


Gráfico da função **f**

x	**A(x)**
1	
2	
3	
t	

Tabela dos valores da função **A** em cada ponto x

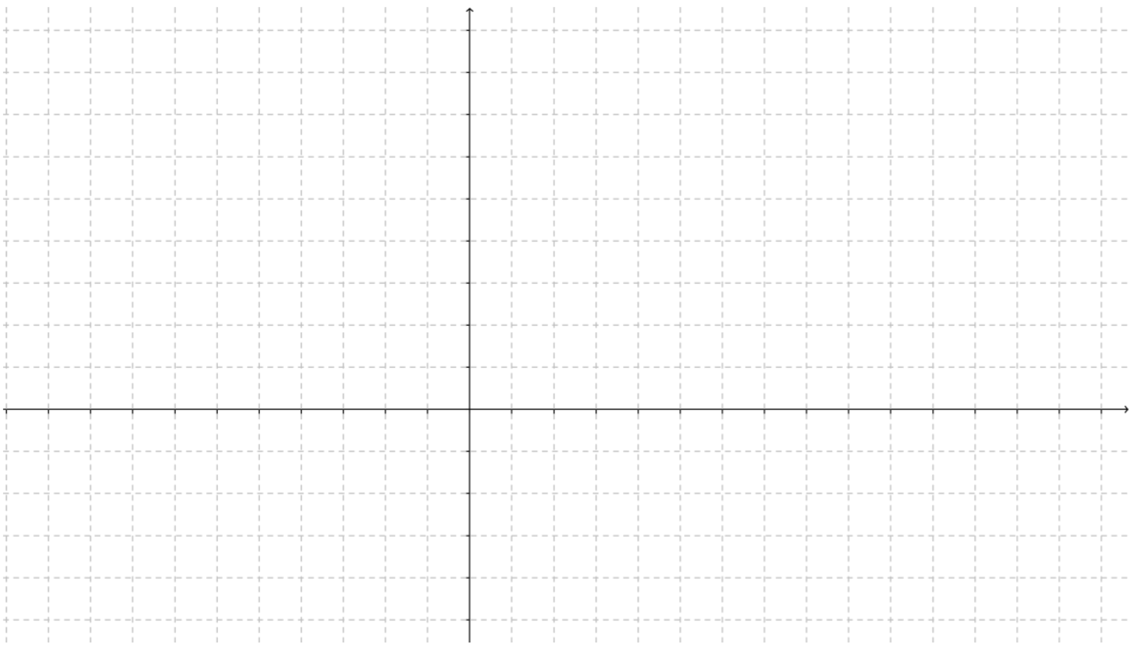


Gráfico da função **A**

b)

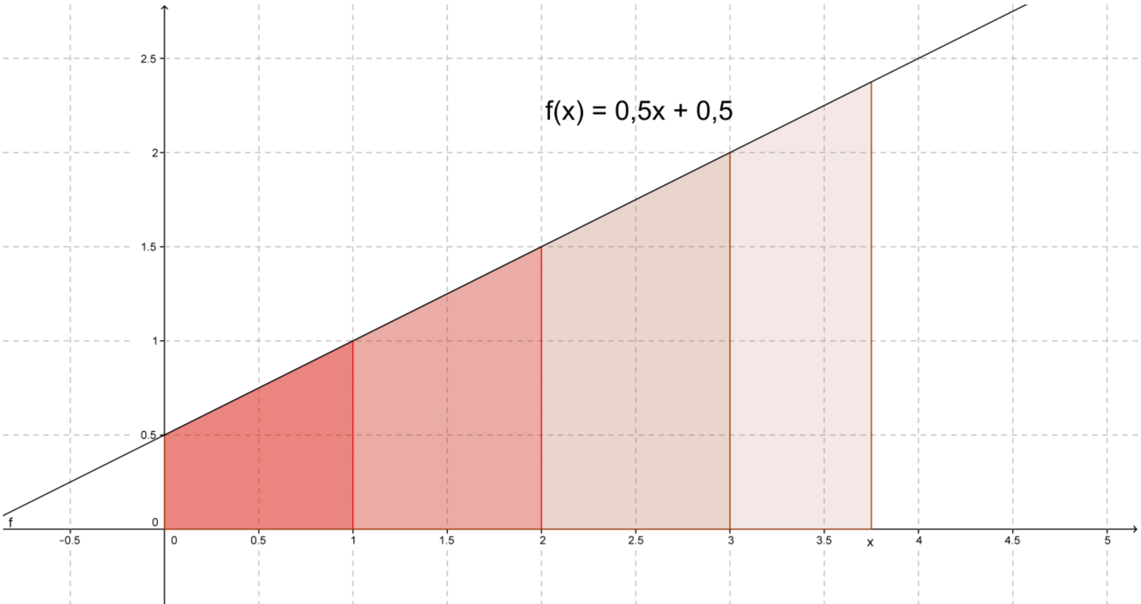


Gráfico da função **f**

x	**A(x)**
1	
2	
3	
t	

Tabela dos valores da função A em cada ponto x

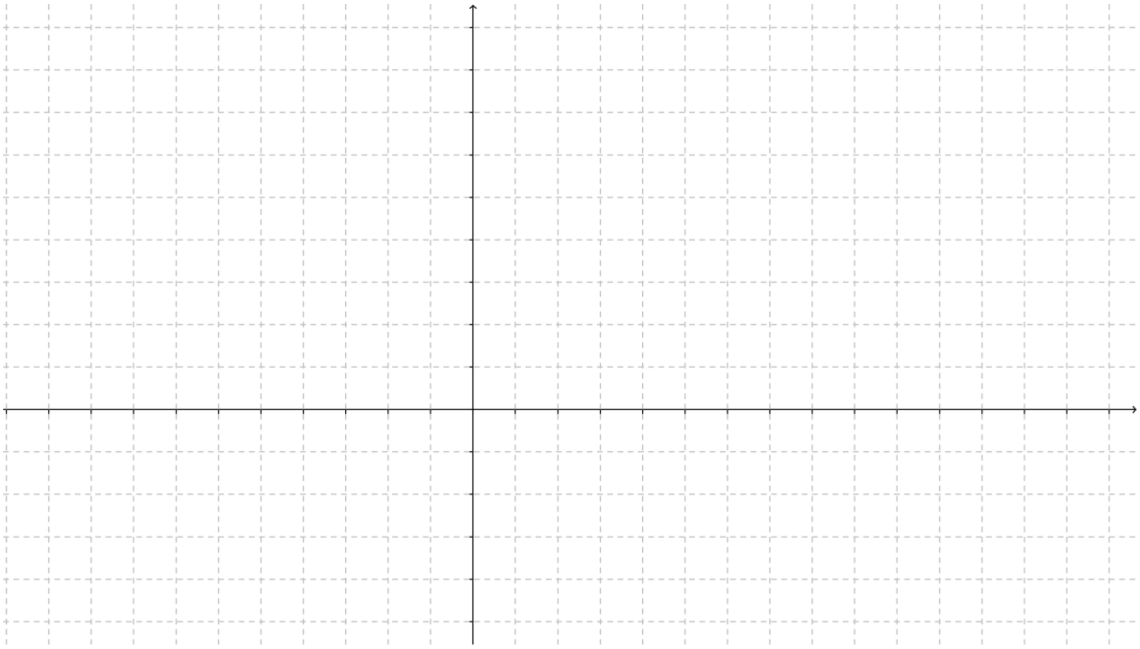


Gráfico da função **A**

8) Nas figuras abaixo estão representados os gráficos das funções **f** e **g**. Sabendo-se que g’ = f (ou seja, g é a primitiva de f), calcule a área sob o gráfico de **f** (ilustrado na figura 1) no intervalo [-1, 1]. Justifique sua resposta, explicitando o método usado.

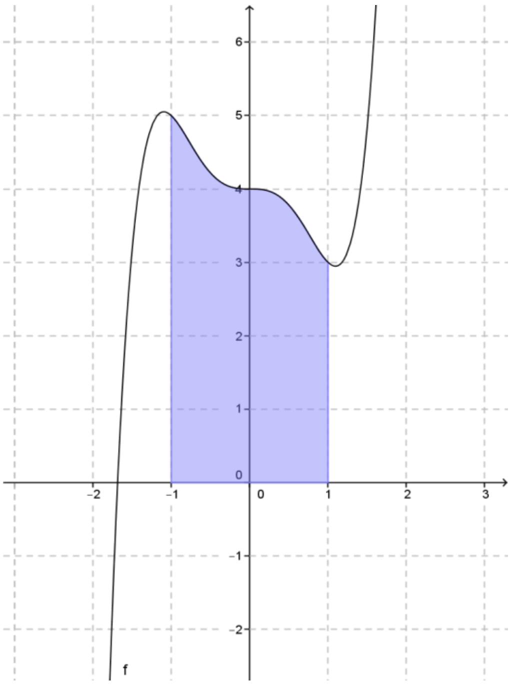


Figura 1: Gráfico da função **f**

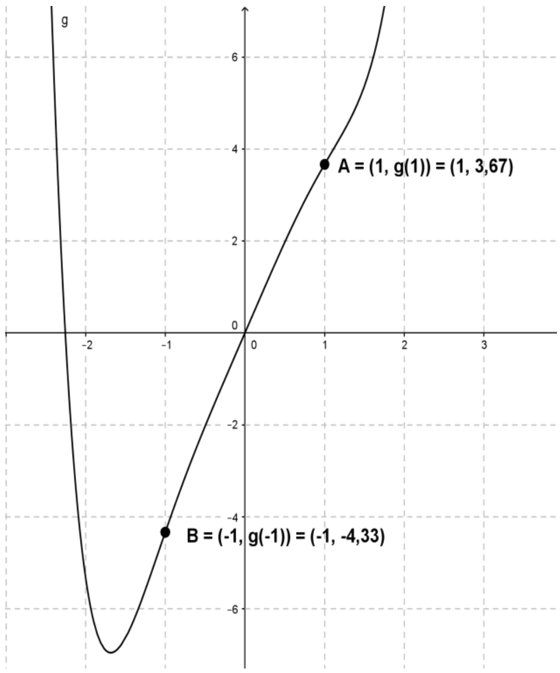


Figura 2: Gráfico da função **g**

Anexo 4 – Roteiro e Atividades da oficina

Atividades

Atividade 1

a) Observe a função desenhada na janela de visualização do Geogebra.
   1. A função f dada é contínua? Justifique.

Pressione a tecla **Shift** (mantenha pressionada) e clique em qualquer valor do eixo x e arraste para a direita pelo menos umas 3 vezes até o final da tela. Clique com o botão direito no fundo da janela e dê **zoom** de 400% por pelo menos 3 vezes próximo ao gráfico.

   2. O que você acha que aconteceu com o gráfico?
   3. Qual é a aparência do gráfico no intervalo que você está visualizando? Da forma como você vê o gráfico agora, que tipo de função este gráfico parece se baseando somente nessa visualização?

b) Observe a função desenhada na janela de visualização do Geogebra.
   1. A função g dada é contínua? Justifique.
   2. Como você acha que ficará o gráfico da função g se fizer os mesmos procedimentos feitos para o caso anterior?

Pressione a tecla **Shift** (mantenha pressionada) e clique em qualquer valor do eixo x entre 6 e 7 e arraste para a direita pelo menos umas 9 vezes até o final da tela. Clique com o botão direito no fundo da janela e dê **zoom** de 400%uma vez próximo ao gráfico.

   3. O que você acha que aconteceu com o gráfico?
   4. Qual é a aparência do gráfico no intervalo que você está visualizando?Da forma como você vê o gráfico agora, que tipo de função este gráfico parece se baseando somente nessa visualização?
   5. Depois de fazer os mesmo passos do caso anterior, você achou que os tipos de gráficos encontrados são ou não semelhantes? Você acha que isso ocorrerá para os tipo de gráfico?

c) Observe a função desenhada na janela de visualização do Geogebra.
   1. A função q dada é contínua? Justifique.
   2. Como você acha que ficará o gráfico da função q se fizer os mesmos procedimentos feitos para o caso anterior?

Pressione a tecla **Shift** (mantenha pressionada) e clique em qualquer valor do eixo x próximo x = -2 e arraste para a esquerda pelo menos umas 6 vezes até o final da tela. Clique com o botão direito no fundo da janela e dê **zoom** de 200% uma vez próximo aoponto A.

   3. O que você acha que aconteceu com o gráfico?
   4. Qual é a aparência do gráfico no intervalo que você está visualizando? Da forma como você vê o gráfico agora, que tipo de função diria que este gráfico seria se baseando somente nessa visualização?
   5. O que acontece com o gráfico nas proximidades do ponto A? Justifique.

Clique com o botão esquerdo e depois em **Visualização padrão.** Pressione a tecla **Shift** (mantenha pressionada) e clique em qualquer valor do eixo x próximo x = 2 e arraste para a direita pelo menos umas 6 vezes até o final da tela. Clique com o botão direito no fundo da janela e dê **zoom** de 200% uma vez próximo aoponto B.

6. O que você acha que aconteceu com o gráfico?
7. Qual é a aparência do gráfico no intervalo que você está visualizando? Da forma como você vê o gráfico agora, que tipo de função diria que este gráfico seria se baseando somente nessa visualização?
8. O que acontece com o gráfico nas proximidades do ponto B? Justifique.
9. Comparando a função q toda com as funções anteriores, o que você pode dizer quanto à característica das funções quando as esticamos horizontalmente?

d) Observe a função desenhada na janela de visualização do Geogebra.
   1. A função h dada é contínua? Justifique.
   2. Como você acha que ficará o gráfico da função h se fizer os mesmos procedimentos feitos para o caso anterior?

Pressione a tecla **Shift** (mantenha pressionada) e clique em qualquer valor do eixo x próximo a x = 0 e arraste para a direita pelo menos umas 3 vezes até o final da tela. Clique com o botão direito no fundo da janela e dê **zoom** de 200% uma vez próximo à x=0.

3. O que você acha que aconteceu com o gráfico para x próximo de 0?
4. Qual é a aparência do gráfico no intervalo que você está visualizando? Da forma como você vê o gráfico agora, que tipo de função diria que este gráfico seria se baseando somente nessa visualização? Parece com os casos anterior? Explique.

Clique com o botão esquerdo e depois em **Visualização padrão.** Pressione a tecla **Shift** (mantenha pressionada) e clique em qualquer valor do eixo x próximo x = 1 e arraste para a direita pelo menos umas 6 vezes até o final da tela. Clique com o botão direito no fundo da janela e dê **zoom** de 400% uma vez próximo à x=1.

5. O que você acha que aconteceu com o gráfico?
6. Qual é a aparência do gráfico no intervalo que você está visualizando? Da forma como você vê o gráfico agora, que tipo de função diria que este gráfico seria se baseando somente nessa visualização?
7. O que acontece com o gráfico nas proximidades próximo x=1? Justifique.
8. Comparando a função q toda com as funções anteriores, o que você pode dizer quanto à característica das funções quando as esticamos horizontalmente?
9. O que você diria agora, a função h é contínua ou não? Justifique.

Atividade 2

a) Iniciar a atividade apresentando o problema:

Determinar a área sob o gráfico no intervalo [1, 2].

Utilizar o controle deslizante para aumentar o número de retângulos e “melhorar” a aproximação da área sob o gráfico. Iniciar com n=0 e aumentar até n=100. Procurar respostas para as perguntas:

1. O que acontece com a aproximação da área pelos retângulos quando aumentamos o número de retângulos?
2. Quando n=150, a aproximação encontrada representa o valor exato da área?

Clicar na aba **Número** e depois no item **Área** com o botão direito e clicar em **Exibir rótulo**. Compare os valores numéricos da aproximação e do valor real da área sob o gráfico.

3. Qual é a sua interpretação da situação? Os valores são iguais? Por que?

Clique com o botão direito no fundo da janela e dê **zoom** de 400%no gráfico.

4. Qual é a sua interpretação a respeito da situação? O que você acha agora?

Aumente o valor de n para 1000.

5. O que você acha da aproximação da área sob o gráfico e da área com n=1000?
6. Será que elas representam graficamente a mesma coisa?

Clique com o botão direito no fundo da janela e dê **zoom** de 400% por 3 vezes no gráfico.

7. Agora, os valores numéricos da aproximação e da área são iguais?
8. Graficamente, a aproximação é igual a área?
9. O que você diria sobre o valor exato da aproximação ser igual ao da área mas graficamente os valores não serem iguais? Como isso pode acontecer?
10. O que ocorre quando n vai para até o infinito. Quando isso acontece, podemos dizer que a área vale 1,95 u.a.? Se sim, como você comprovaria isso?

Clique com o botão direito no fundo branco da janela com o botão direito e depois clique em **Visualização padrão**. Dê zoom de 200% no gráfico. Pressione a tecla **Shift** e clique em qualquer valor do eixo x entre 1 e 2 e arraste para a direita pelo menos umas 5 vezes.

11. O que acontece quando "esticamos" o gráfico horizontalmente? Qual é a aparência do gráfico no intervalo que você está visualizando? Você acha que os retângulos descrevem bem a área sob o gráfico?
12. Se o número de retângulos tender ao infinito e "esticarmos" horizontalmente o gráfico, o que você pode dizer sobre a ideia de determinação da área por aproximações?

b)

Determinar a área sob o gráfico da função f no intervalo [0, 2].

1. A função f é contínua? Justifique.
2. Você acha possível realizar uma boa aproximação da área por soma de retângulos de forma semelhante ao do caso anterior? Por que?

Aumente o valor de n de 1 em 1 até chegar em n = 20 e analise os valores numéricos da aproximação para cada retângulo.

3. O que você acha dos valores da aproximação? A medida que aumentamos os valores de n, os valores da aproximação também continuam crescendo constantemente? Como você explicaria isso?

Aumente o valor de n para 1000. Clique na aba **Número** e depois no item **Área** com o botão direito e clicar em **Exibir rótulo**. Compare os valores numéricos da aproximação e do valor real da área sob o gráfico.

4. Qual é a sua interpretação da situação? Os valores são iguais? Por que?

Clique com o botão direito no fundo da janela e dê **zoom** de 400% no gráfico pelo menos 3 vezes, próximo ao ponto A.

5. Agora, os valores numéricos da aproximação e da área são iguais?
6. Graficamente, a aproximação é igual a área?
7. Quando n vai para o infinito, temos uma boa aproximação?

Atividade 3

a)

Explore os recursos disponíveis no gráfico. Mexa na variável **t**.

1. A função **r** é contínua? Justifique.
2. O que acontece no gráfico quando você move a variável **t**?
3. Quando **t = 1**, o que está representado no gráfico?
4. Qual seria o valor desta representação?
5. E se **t = 3**? Qual seria o valor desta representação?
6. E se esta representação partir de **x=2** e for até um **x=t** qualquer onde **t**>**2**? Qual seria o valor desta representação nessas condições? Como poderíamos representar este valor encontrado?

Clique com o botão direito do mouse na representação que obtemos ao variar t e clicar em **Exibir rótulo.**

7. Mexa com a variável t e comparar os valores descritos para a área sob este gráfico e o que encontrou para **t=1** e **t=3**. Os valores são iguais ou diferentes? Se forem diferentes, explicite qual pode ter sido a causa para tal diferença?

Clique na aba **Ponto** situada a esquerda e ative o ponto **B**.

8. Ao mexer com a variável **t**, observe as coordenadas do ponto **B** e diga: o que acontece na janela ao lado? Qual a relação desta situação com o valor da área para cada valor de **t**? Como poderíamos encontrar um outro ponto **B’** se aumentássemos ou diminuíssemos o valor **t**? Qual a relação das coordenadas de **B** e o valor da área para cada valor de **t** na janela da direita?
9. Olhando para os rastros de **B**, o que você diria a respeito da representação gráfica de todos os pontos **B**’s? Existem algum forma geral de determina-los?

Cliquem na aba **Função** e ativem a função **R**. E perguntar:

10. O que você pode dizer sobre a função **R**? Pra você, esta função representa o quê?
11. Se quiséssemos achar as coordenadas de outros pontos **B** que não estão representados na janela, o que você faria?
12. Qual é a relação entre as funções **R** e **r**?

Faça com que **t = 0** e depois clique na aba **Ponto** e ativar os pontos **A** e **C**.

13. Qual a relação entre as coordenadas desses pontos?

Mexa na variável **t** e analise o que ocorre com os pontos **A, B** e **C**. Após, clique na aba **Segmento** e ative os itens**c** e **d** e mexa na variável **t** novamente. Após esses passos, perguntar:

14. Explique o que são os valores de **c** e **d** para os valores de **t** da janela ao lado?
15. Você poderia escrever **e** em função dos valores da função **R?**
16. Qual é a relação do valor de **t** com o valor de **d**?
17. Qual é a relação do valor da **Área** da janela da direita e o valor de **e**? Por que isto acontece?
18. Utilizando as informações encontradas nesse exercício e tendo os dois gráficos a sua disposição, para você é possível encontrar a área sob o gráfico **r** num intervalo **[a, b]** utilizando somente as informações do gráfico de **R**?

b)

Mexa na variável **t**. Perguntar:

1. A função **f** é contínua?
2. O que acontece no gráfico quando você move a variável **t**?

Clique na aba **Ponto** situada a esquerda e ativar o ponto **B**.

3. Ao mexer na variável t, qual é o comportamento do ponto **B** na janela ao lado?
4. O comportamento de **B** é parecido com o do caso anterior da função **r**? Justifique.
5. Olhando para os rastros de **B**, o que você diria a respeito da representação gráfica de todos os pontos **B**’s? Existem algum forma geral de determina-los?

Clique na aba **Função** e ative a função **F**.

6. O que você pode dizer sobre a função **F**? Pra você, esta função representa o quê? Ela é contínua?
7. Qual é a relação entre as funções **F** e **f**?

Faça com que t = -1 e para clique na aba **Ponto**, ative os pontos **C** e **D** e mexa na variável t e analise o que ocorre com os pontos **B**, **C** e **D**. Após, clique na aba **Segmento** e ative os itens**d**e **e**e mexa na variável t novamente.

8. Explique o que são os valores de **c** e **d** para os valores de t da janela ao lado?
9. Você poderia escrever **e** em função dos valores da função **R?**
10. Qual é a relação do valor da **Área** da janela da direita e o valor de **e**? Por que isto acontece?
11. Utilizando as informações encontradas nesse exercício e tendo os dois gráficos a sua disposição, para você é possível encontrar a área sob o gráfico **r** num intervalo **[a, b]** utilizando somente as informações do gráfico de **R**?

Atividade 4

d) Observe a função f. Mexa na variável **a.**

14. O que acontece no gráfico quando você move a variável **a**?
15. Quando **a = 0**, o que está representado no gráfico?
16. Qual seria o valor desta representação?
17. E se **a = 5**, o que está representado no gráfico?
18. Qual seria o valor desta representação?

Clique na aba **Texto** e habilite o item **Texto 1**e faça **a=5** .

19. Compare os resultados obtidos nos itens anteriores e no valor real da representação obtida. O que você tem a dizer sobre os valores encontrados?
20. Calcule: $\int_{-5}^{5} \mathrm{f(x). dx}$.

Clique na aba **Texto** e habilite o item **Texto 2**.Mexa com o valor de a.

21. Comparando os resultados obtido nos itens 5., 6. e 7., discuta cada um desses resultados, destacando o significado de cada um deles.
22. E se esta representação partir de **x=-5** e for até um **x=t** qualquer onde **t>-5**? Qual seria o valor desta representação nessas condições? Como poderíamos representar este valor encontrado?

Após responder ao item anterior, clique na aba **Ponto** e depois ative o ponto **B**. Mexa na variável a.

23. O que você pode dizer a respeito do movimento do ponto **B** de acordo com os movimentos de a? Geometricamente, qual sua característica?
24. Se você pudesse escolher um tipo de função que melhor descrevesse este movimento, qual seria?

Após responder aos itens anteriores, clique na aba **Função** e depois ative a **Função g**.

25. Compare a função g com a função que você escolheu no item 11. Elas são parecidas?
26. Qual é a relação entre g e f?

e) Observe a função f. Mexa na variável **a.**

13. O que acontece no gráfico quando você move a variável **a**?
14. Quando **a = 10**, o que está representado no gráfico?
15. Qual seria o valor desta representação?

Clique na aba **Texto** e habilite o item **Texto 2**e faça **a=10**.

16. Compare os resultados obtidos no item anterior e no valor real da representação obtida. O que você tem a dizer sobre os valores encontrados?
17. Calcule: $\int_{0}^{10} \mathrm{f(x). dx}$.

Clique na aba **Texto** e habilite o item **Texto 2**.Mexa com o valor de a.

18. Comparando os resultados obtido nos itens 3., 4. e 5., discuta cada um desses resultados, destacando o significado de cada um deles.

19. A resposta do item anterior tem a mesma estrutura do item 8 do exercício a)? Se não, qual é a diferença?
20. E se esta representação partir de **x=0** e for até um **x=t** qualquer onde **t**>**0**? Qual seria o valor desta representação nessas condições? Como poderíamos representar este valor encontrado?

Após responder ao item anterior, clique na aba **Ponto** e depois ative o ponto **B**. Mexa na variável a.

21. O que você pode dizer a respeito do movimento do ponto **B** de acordo com os movimentos de a? Geometricamente, qual sua característica?
22. Se você pudesse escolher um tipo de função que melhor descrevesse este movimento, qual seria?

Após responder aos itens anteriores, clique na aba **Função** e depois ative a **Função g**.

23. Compare a função g com a função que você escolheu no item 10. Elas são parecidas?
24. Qual é a relação entre g e f?

f) Observe a função h. Mexa na variável **a.**

6. O que acontece no gráfico quando você move a variável **a**?

Após responder ao item anterior, clique na aba **Ponto** e depois ative o ponto **B**. Mexa na variável a.

7. O que você pode dizer a respeito do movimento do ponto **B** de acordo com os movimentos de a? Geometricamente, qual sua característica? Mesmo sem efetuar cálculos, qual é a sua impressão a respeito do movimento de B, graficamente?
8. Se você pudesse escolher um tipo de função que melhor descrevesse este movimento, qual seria?

Após responder aos itens anteriores, clique na aba **Função** e depois ative a **Função H**.

9. Compare a função h com a função que você escolheu no item 3. Elas são parecidas?

12. Qual é a relação entre h e H?

Anexo 5 - Continuidade, derivação, integração e o Teorema Fundamental do Cálculo

Continuidade

Stewart (2012) define *função contínua em um ponto de seu domínio* como: "Uma função f é contínua em um número **a** se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$." (p.109). O autor complementa ainda dizendo que esta definição implicitamente requer três condições para a continuidade de **f** em **a**, que são:

1. **f(a)** está definida (Isto é, **a** está no domínio de **f**);

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe;

3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. (ibid, p. 109)

E temos ainda, que se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em **a**, a função **f** será descontínua em **a**.

Este autor diz que a definição de continuidade tem "correspondência bem próximo ao significado da palavra continuidade no uso comum" e diz que "um processo contínuo é aquele que ocorre gradualmente, sem interrupções ou mudanças abruptas" (STEWART, 2012, p.).

O livro Hughes-Hallett et al (1999) apresenta uma definição de continuidade bem próxima à de Stewart (2012), descrita anteriormente. Porém, acrescenta a *definição de continuidade em um intervalo*, estabelecendo que "uma função é contínua num intervalo **[a, b]** se for contínua em cada ponto do intervalo." (p. 111)

Já Leithold (1994) inicia dizendo que a *função **f** será contínua à direita em um número **a** se e somente se forem satisfeitas as três condições anteriores para continuidade*, porém considerando os limites como sendo os laterais à direita, ou seja, usando $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ao invés de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, como nos dois livros anteriores. A continuidade à esquerda é definida de modo análogo, dizendo que a função **f** será contínua à esquerda em um número **a** se e somente se as três condições anteriores também forem satisfeitas, porém considerando os limites como sendo os laterais à esquerda, ou seja, usando $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ao invés de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Prossegue *definindo continuidade em um intervalo fechado*, dizendo que "uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado **[a, b]** será contínua em **[a, b]** se e somente se ela for contínua no intervalo aberto **(a, b)**, contínua à direita em **a** e contínua à esquerda em **b**." (p.109) .

Além disso, ele aborda outras duas situações:

> uma função cujo domínio inclui o intervalo semi-aberto **[a, b)** será contínua em **[a, b)** se e somente se ela for contínua no intervalo aberto **(a, b)**, contínua à direita em **a**." e "uma função cujo domínio inclui o intervalo semi-aberto

> **(a, b]** será contínua em **(a, b]** se e somente se ela for contínua no intervalo aberto **(a, b)**, contínua à esquerda em **b**.

Leithold acrescenta, ainda, que definições similares às dadas anteriormente podem ser dadas para a continuidade nos intervalos **[a, +∞)** e **(−∞, b]**.

A respeito da continuidade de funções, vale refletirmos sobre um exemplo do livro do Leithold (1994) que pode elucidar o caminho para decidirmos se uma função é contínua ou não, quando olhamos para o seu domínio. Em meu entender, este tipo de exercício pode tornar-se problemático se os alunos considerarem o domínio da função o conjunto dos números reais, sem considerar as restrições desta função. Desconsiderando a restrição, evidentemente chegaríamos a resultados equivocados. No exemplo a seguir, se testássemos a continuidade para x=3, por exemplo, a resposta seria negativa ou até não teríamos como responder, pois o número 3 não está no domínio da função, como explicado na resolução da questão na Figura 50 a seguir.

Figura 50: Exemplo de continuidade em um caso em que o domínio não é o conjunto dos números reais.

EXEMPLO 3 Determine o maior intervalo (ou união de intervalos) em que a função a seguir é contínua:

$$f(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 3}$$

Solução Primeiro determinamos o domínio de f. A função é definida em qualquer parte, exceto quando $x = 3$ ou $25 - x^2 < 0$ (isto é, quando $x > 5$ ou $x < -5$). Portanto, o domínio de f é $[-5, 3) \cup (3, 5]$. Como

$$\lim_{x \to -5^+} f(x) = 0 = f(-5) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 5^-} f(x) = 0 = f(5)$$

f é contínua à direita, em -5 e à esquerda, em 5. Além disso, f é contínua nos intervalos abertos $(-5, 3)$ e $(3, 5)$. Logo, f é contínua em $[-5, 3) \cup (3, 5]$.

Fonte: Leithold (1994, p. 110)

Derivação

Para estudarmos o processo de derivada, iremos expor o conteúdo do livro de Cálculo do Stewart (2012), pois ele reúne todas informações presentes em outros livros e o faz de forma a se adequar aos propósitos desta pesquisa.

Stewart (2012) inicia o capítulo sobre derivadas refletindo sobre *como determinar a inclinação de retas tangentes ao gráfico de funções. O cálculo desta inclinação envolve um limite, chamado derivada*. Além disso, ele diz que uma outra interpretação para *derivada é a taxa de variação.*

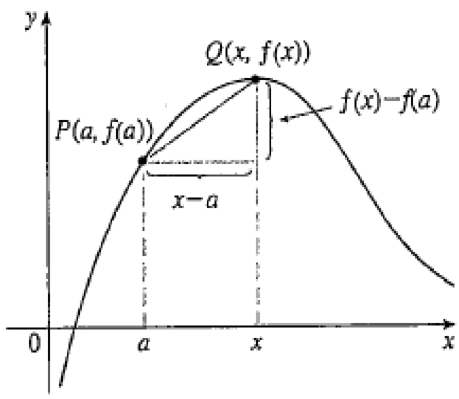
Iremos explorar duas ideias para interpretação do conceito de derivada: inclinação da reta tangente e taxa de variação. Comecemos pela primeira, como colocado por Stewart (2012).

Consideremos uma curva **C** cuja equação é **y = f(x)**. Para encontrar a reta tangente a **C** em um ponto **P(a, f(a))**, consideremos um ponto próximo **Q(x, f(x))**, onde **x≠a**, a inclinação da reta secante **PQ** é

$$\mathbf{m_{PQ}} = \frac{\mathbf{f(x) - f(a)}}{\mathbf{x-a}}.$$

A figura abaixo ilustra este fato e mostra a reta secante **PQ**.

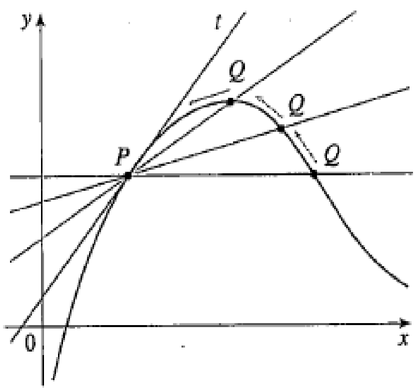
Figura 51: Reta PQ secante à curva C



Fonte: Stewart (2012, p. 131)

Ao fazermos **x** tender a **a**, teremos **Q** se aproximando de **P** ao longo da curva **C.** Se $\mathbf{m_{PQ}}$ tender a um número m, então definimos a tangente **t** como a reta que passa por **P** e tem inclinação **m**, como ilustrado na figura a seguir.

Figura 52: Reta PQ secante à curva C



Fonte: Stewart (2012, p. 131)

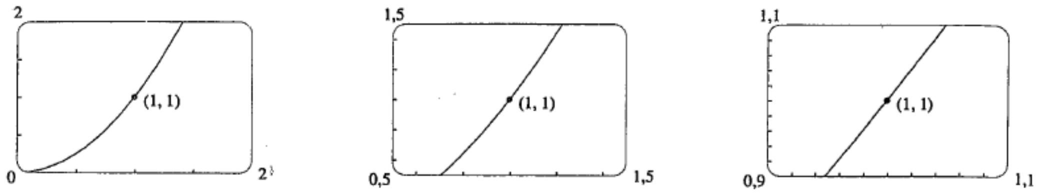
Assim, a reta tangente à curva **y = f(x)** em um ponto **P(a, f(a))** é a reta passando por **P** com a inclinação

$$\mathbf{m} = \lim_{x \to a} \frac{\mathrm{f(x) - f(a)}}{\mathrm{x - a}}$$

desde que esse limite exista.

Segue uma reflexão sobre a relação da inclinação da reta tangente com uma curva contínua e diz que, nesta situação, podemos entender a "inclinação da reta tangente como a inclinação da curva no ponto." (STEWART, 2012, pg. 131) Ele complementa dizendo sobre o recurso computacional *zoom* (ou aproximação) no gráfico, dizendo que "se dermos *zoom* (suficiente) em direção ao ponto, a curva parecerá quase uma reta" (STEWART, 2012, p. 131) e diz que quanto maior for o *zoom*, "a curva se torna quase indistinguível de sua reta tangente" (STEWART, 2012, p. 131), como ilustra a figura a seguir.

Figura 53: Aproximação (*zoom*) em uma curva



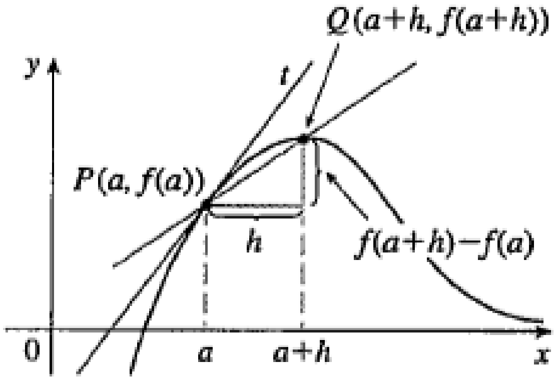
Fonte: Stewart (2012, p. 132).

Se fizermos **h = x – a**, então **x = a + h** e, assim, podemos determinar a inclinação da reta da tangente, ou seja, a derivada de uma função **f** em um número **a**, denotada por **f'(a)**, como

$$\mathbf{f'(a)} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{f(a+h) - f(a)}}{\mathrm{h}}$$

se o limite existir. A visualização desta definição pode ser feita na figura abaixo, onde **t** é a reta tangente ao gráfico da função **f** no ponto **P** quando **h** tende a **a.**

Figura 54: Visualização da tangente ao gráfico f no ponto P



Fonte: Stewart, (2012, p. 131)

Utilizando a notação anterior, também que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Como y = f(x), se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x (também chamado de incremento de x) será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em **y** será

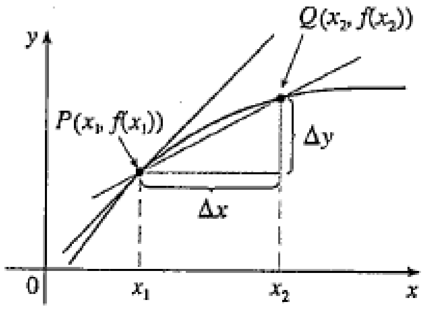
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

Stewart define o quociente das diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

e o denomina como *taxa média de variação* de y em relação a **x** no intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretado como a inclinação da reta tangente **PQ**, como podemos ver na figura abaixo.

Figura 55: Taxa de variação e a secante PQ ao gráfico f



Fonte: Stewart (2012, p. 135)

O limite dessas taxas médias de variação é chamado *taxa (instantânea) de variação* de y em relação a x em $x = x_1$. Esta é interpretada como a inclinação da reta tangente à curva y = f(x) em $P(x_1, f(x_1))$, ou seja,

$$\text{Taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Uma outra interpretação da *derivada **f'(a)** é a de inclinação da reta tangente à curva **y = f(x)** quando **x = a***, ou também, *a derivada **f'(a)** é a taxa instantânea de variação de* ***y = f(x)*** *em relação a x quando* ***x = a***.

Podemos, também, entender a derivada como uma função, quando, ao invés de calcularmos a derivada **f'(a)** em um ponto fixo **a**, calcularmos a *derivada de **f** em uma variável **x** de seu domínio*, denotada por **f'(x)**, e que podemos expressar como

$$\mathbf{f'(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Assim, dado qualquer número **x** para o qual esse limite exista, atribuímos a **x** o número **f'(x)**. Com isso, podemos considerar **f'** como uma nova função, chamada derivada de **f** e que é definida pela equação anterior.

Para ilustrar graficamente a ideia de que dada uma função **f** podemos obter **f'** como uma função, caso o limite anterior exista, retiramos o exemplo da página 140 de Stewart (2012) em o que o mesmo solicita o esboço do gráfico de **f'**, dado o gráfico da função **f**. Como **f'** é uma função, pode-se esboçar se gráfico. Isto fica representado e explicado a seguir.

Figura 56: Exemplo sobre o entendimento de f' como uma função

EXEMPLO 1 O gráfico de uma função f é ilustrado na Figura 1. Use-o para esboçar o gráfico da derivada f'.

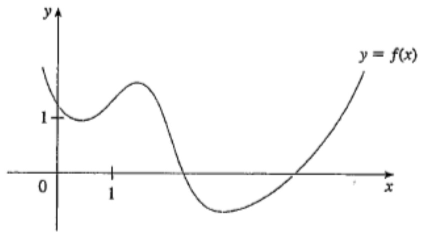
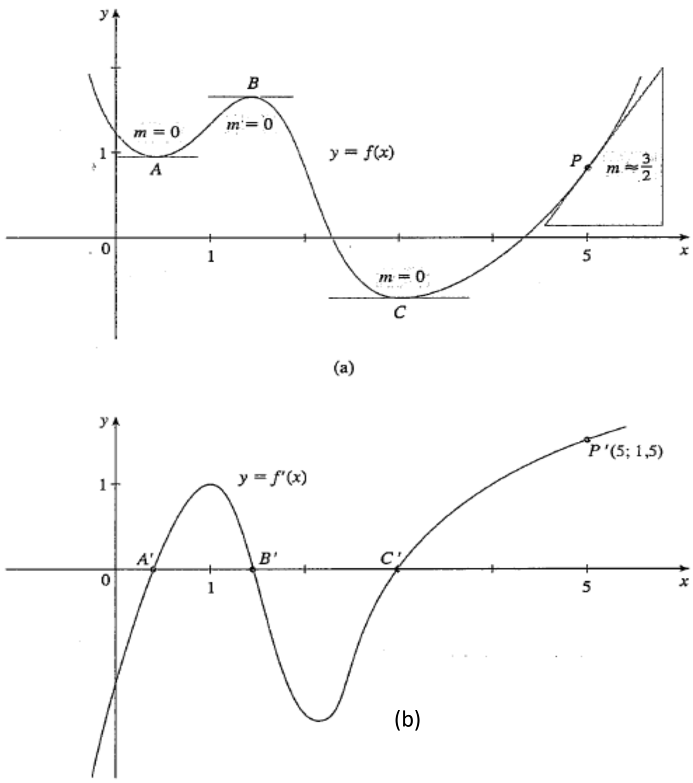


FIGURA 1

SOLUÇÃO Podemos estimar o valor da derivada para qualquer valor de x traçando a tangente no ponto $(x, f(x))$ e estimando sua inclinação. Por exemplo, para $x = 5$ traçamos a tangente em P na Figura 2(a) e estimamos sua inclinação como cerca de $\frac{3}{2}$, então $f'(5) \approx 1{,}5$. Isso nos permite desenhar o ponto $P'(5; 1{,}5)$ sobre o gráfico de f' diretamente abaixo de P. Repetindo esse procedimento em vários pontos, obteremos o gráfico ilustrado na Figura 2(b). Observe que as tangentes em A, B e C são horizontais; logo, ali a derivada é 0 e o gráfico de f' cruza o eixo x nos pontos A', B' e C' diretamente abaixo de A, B e C. Entre A e B, as tangentes têm inclinação positiva; logo, $f'(x)$ é positiva ali. Mas entre B e C as tangentes têm inclinação negativa; logo, $f'(x)$ lá é negativa.

Fonte: Stewart (2012, p. 140)

Figura 57: Exemplo sobre o entendimento de f' como uma função

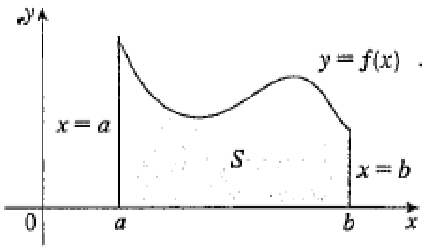


Fonte: Stewart (2012, p. 141)

Integração

Restringindo o estudo novamente ao livro de Stewart (2012) para a definição do conceito de integral, comecemos com o problema de determinação da área da região **S** que está sob a curva **y = f(x)** de **a** até **b**, como ilustrado na Figura 9 a seguir.

Figura 58: Figura: Determinação da área S sob o gráfico de y



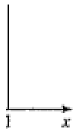
Fonte: Stewart (2012, p. 326)

Para a definição de inclinação de uma reta tangente a um gráfico de uma função y = f(x) em um ponto (a, f(a)), primeiro aproximamos a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes passando pelo ponto e, depois, tomamos o limite dessas aproximações. De modo semelhante podemos *pensar, intuitivamente, na área* ***S*** *no plano pelo método denominado de Exaustão*: “aproximando a região **S** por retângulos e depois tomando o limite da soma das áreas desses retângulos, à medida que aumentamos o número de retângulos” (STEWART, 2012, p. 326) e cuidando para que as dimensões de todos eles tendam para zero.

Ideias como essa estão muito difundidas em livros didáticos, por professores em suas aulas e por pesquisadores, pois esse *insight* fornece ferramentas intuitivas para que possamos entender essa construção e até, quem sabe, estabelecermos nossas próprias construções desse resultado.

Na figura a seguir, um exemplo de como podemos fazer isso para uma função específica y = f(x), considerando a área S como a área abaixo de seu gráfico e acima do eixo x, num intervalo especificado. O exemplo foi extraído do livro (STEWART, 2012, pg. 326) com o objetivo de ilustrar como este procedimento, para a construção dessa definição, é apresentado, de um modo geral.

Figura 59: Exemplos de determinação de área por aproximações de retângulos



EXEMPLO 1 Use retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 (a região parabólica S ilustrada na Figura 3).

SOLUÇÃO Observamos primeiro que a área de S deve estar em algum lugar entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com lados de comprimento 1, mas certamente podemos fazer melhor que isso. Suponha que S seja dividida em quatro faixas S_1, S_2, S_3 e S_4, traçando as retas verticais $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{4}$, como na Figura 4(a).

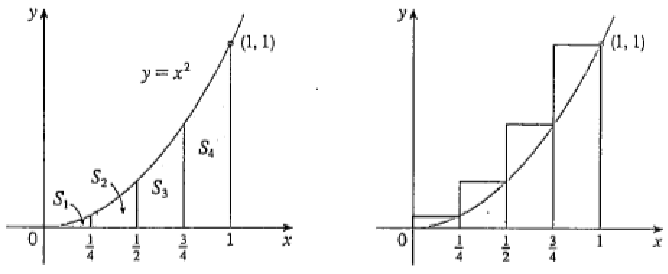


FIGURA 4 (a) (b)

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa [veja a Figura 4(b)]. Em outras palavras, as alturas desses retângulos são os valores da função $f(x) = x^2$ nas extremidades *direitas* dos subintervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e $[\frac{3}{4}, 1]$.

Fonte: Stewart (2012, p. 326)

Figura 60: Exemplos de determinação de área por aproximações de retângulos

Cada retângulo tem largura de $\frac{1}{4}$ e altura de $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{3}{4})^2$ e 1^2. Se R_4 for a soma das áreas dos retângulos aproximantes, teremos

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{4})^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0{,}46875$$

Da Figura 4(b) vemos que a área A de S é menor que R_4, logo

$$A < 0{,}46875$$

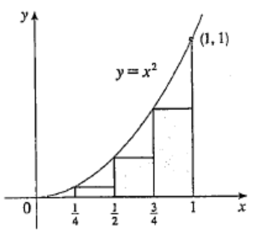


FIGURA 5

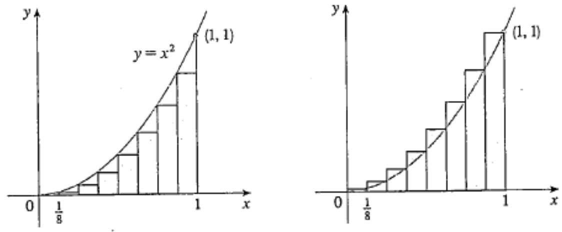
Em vez de usarmos os retângulos na Figura 4(b), poderíamos usar os retângulos menores na Figura 5, cujas alturas seguem os valores de f nas extremidades *esquerdas* dos subintervalos. (O retângulo mais à esquerda desapareceu, pois sua altura é 0.) A soma das áreas desses retângulos aproximantes é

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{4})^2 = \frac{7}{32} = 0{,}21875$$

Vemos que a área de S é maior que L_4 e, então, temos estimativas inferior e superior para A:

$$0{,}21875 < A < 0{,}46875$$

Podemos repetir esse procedimento com um número maior de faixas. A Figura 6 mostra o que acontece quando dividimos a região S em oito faixas com a mesma largura.



(a) Usando as extremidades esquerdas (b) Usando as extremidades direitas

FIGURA 6
Aproximando S por 8 retângulos

Fonte: STEWART (2012, pg. 327)

Figura 61: Exemplos de determinação de área por aproximações de retângulos

Calculando a soma das áreas dos retângulos menores (L_8) e a soma das áreas dos retângulos maiores (R_8), obtemos estimativas inferior e superior melhores para A:

$$0{,}2734375 < A < 0{,}3984375.$$

Assim, uma resposta possível para a questão é dizer que a verdadeira área de S está em algum lugar entre 0,2734375 e 0,3984375.

Podemos obter melhores estimativas aumentando o número de faixas. A tabela na lateral mostra os resultados de cálculos similares (com um computador) usando n retângulos cujas alturas são encontradas com as extremidades esquerdas (L_n) ou com as extremidades direitas (R_n). Em particular, vemos que usando 50 faixas a área está entre 0,3234 e 0,3434. Com 1000 faixas conseguimos estreitar a desigualdade ainda mais: A está entre 0,3328335 e 0,3338335. Uma boa estimativa é obtida fazendo-se a média aritmética desses números: $A \approx 0{,}3333335$.

n	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

Dos valores na tabela, parece que R_n aproxima-se de $\frac{1}{3}$ à medida que aumentamos n. Confirmamos isso no próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Para a região S do Exemplo 1, mostre que a soma das áreas dos retângulos aproximantes superiores tende a $\frac{1}{3}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$$

Fonte: STEWART (2012, p. 327)

Figura 62: Exemplo de determinação de área por aproximações de retângulos

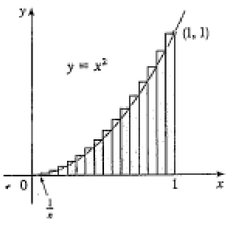


FIGURA 7

SOLUÇÃO R_n é a soma das áreas dos n retângulos na Figura 7. Cada retângulo tem uma largura $1/n$, e as alturas são os valores da função $f(x) = x^2$ nos pontos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$; isto é, as alturas são $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2$. Logo,

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \end{aligned}$$

Utilizamos aqui a fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos:

$$\boxed{1} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Talvez você já tenha visto essa fórmula antes. Ela está demonstrada no Exemplo 5 no Apêndice E.

Colocando a Fórmula 1 na nossa expressão para R_n, temos

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Estamos calculando aqui o limite da sequência $\{R_n\}$. Sequências e seus limites são discutidos em *Uma Apresentação do Cálculo* e serão estudados em detalhes na Seção 11.1. A ideia é bastante similar ao limite no infinito (Seção 2.6), exceto que ao escrever $\lim_{n\to\infty}$ nós restringimos a n número inteiro positivo. Em particular, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Quando escrevemos $\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$, queremos dizer que podemos fazer que R_n seja o mais próximo de $\frac{1}{3}$ que desejamos ao tornar n suficientemente grande.

Então, temos

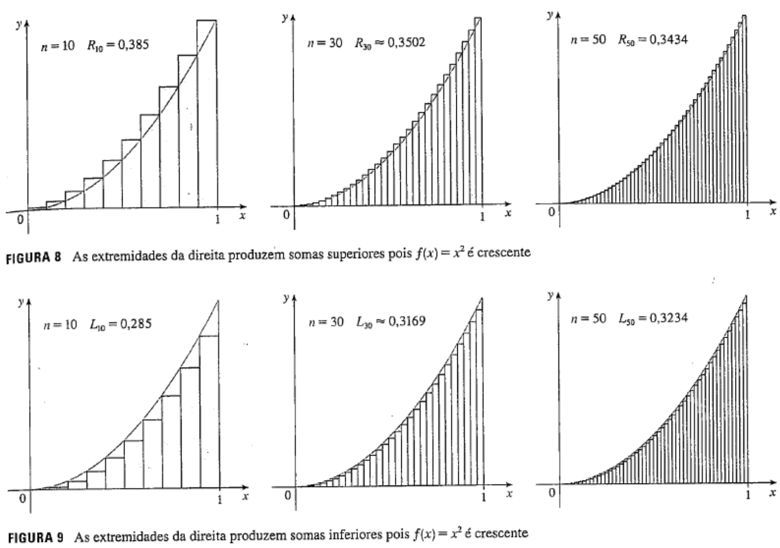
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Fonte: STEWART (2012, p. 328)

Nas figuras a seguir, podemos ver que quando **n** aumenta, $\mathbf{L_n}$ e $\mathbf{R_n}$ se tornam aproximações cada vez melhores da área de **S**. Assim, Stewart (2012) define a área **A** como sendo limite das somas das áreas desses retângulos “aproximantes”. No caso do exemplo que apresentamos, o valor da área indicada, utilizando a definição dada, será

$$\mathbf{A} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{R_n} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{L_n} = \frac{1}{3}$$

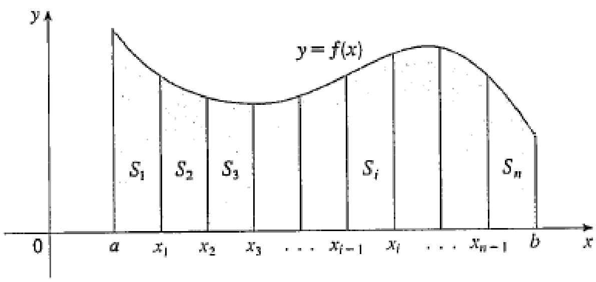
Figura 63: Gráficos das aproximações de área por retângulos superiores e inferiores



Fonte: Stewart (2012, p. 329)

Generalizando as ideias dos dois exemplos particulares explorados para considerar uma região $\boldsymbol{S}$ geral, podemos subdividir $\boldsymbol{S}$ em n faixas $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$, ... , $\mathbf{S_n}$ de iguais larguras, como ilustra a figura a seguir.

Figura 64: Subdivisão da região $\boldsymbol{S}$ em n partes



Fonte: Stewart (2012, p. 329)

Esta ‘largura’ da faixa está definida por subdivisões no intervalo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ em que a função considerada está definida. A medida ou ‘largura’ de um intervalo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ é $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Assim, a ‘largura’ de cada uma das $\boldsymbol{n}$ faixas que tem cada subintervalos como base é

$$\Delta \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{n}}.$$

As faixas produzem, e podem ser pensadas como resultado de, uma subdivisão do intervalo [a, b] em n subintervalos: $[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_1}]$, $[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}]$, $[\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}]$, ..., $[\boldsymbol{x_{n-1}}, \boldsymbol{x_n}]$, onde $\boldsymbol{x_0}$ = **a** e $\boldsymbol{x_n}$ = **b**. As extremidades direitas dos subintervalos são

$$\mathbf{x_1 = a + \Delta x}$$

$$\mathbf{x_2 = a + 2\Delta x}$$

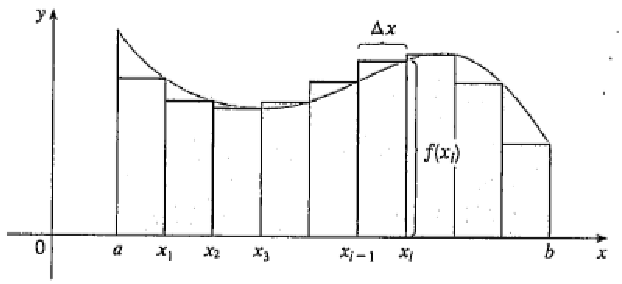
$$\mathbf{x_3 = a + 3\Delta x}$$

....

O procedimento a ser utilizado consiste em aproximar a i-ésima faixa $\boldsymbol{Si}$ por um retângulo com largura $\Delta\boldsymbol{x}$ e altura $\mathbf{f(x_i)}$, que é o valor de **f** na extremidade direita[5], como na figura abaixo. Então, a área do i-ésimo retângulo é $\mathbf{f(x_i)}.\Delta\boldsymbol{x}$. O que consideramos intuitivamente como a área de **S** é aproximado pela soma das área desse retângulos, que é

$$\mathbf{R_n = f(x_1)}.\Delta\boldsymbol{x} + \mathbf{f(x_2)}.\Delta\boldsymbol{x} + \cdots + \mathbf{f(x_n)}.\Delta\boldsymbol{x}$$

Figura 65: Subdivisão da região S em n partes pela direita



Fonte: Stewart (2012, p. 330)

Se aumentarmos o valor de **n**, de forma que **n** → ∞, a aproximação irá se tornar cada vez melhor, assemelhando-se cada vez mais com a área real da região. Assim, a área **A** da região **S** que está sob o gráfico de uma função contínua **f** e acima do eixo x é definida como sendo o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + \cdots + f(x_n).\Delta x]$$

ou

$$A = \lim_{n \to \infty} L_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_0).\Delta x + f(x_0).\Delta x + \cdots + f(x_{n-1}).\Delta x],$$

para o casos de usarmos as extremidades esquerdas aproximantes.

Usando a notação de somatória podemos escrever, ainda, de outra maneira:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x.$$

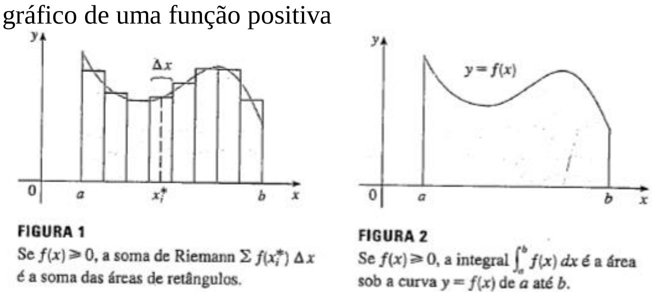
[5] Na verdade, poderíamos considerar a extremidade à esquerda ou o valor da função em qualquer ponto do intervalo.

Assim foram exploradas as condições intuitivas e formais para entendermos e enunciar a definição de integral definida, ou Integral de Riemman. Para tal conceito, Stewart (2012) escreve que

> Se **f** é uma função contínua definida em $\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, dividimos o intervalo **[a, b]** em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta\mathbf{x} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})/\mathbf{n}$. Sejam $\mathbf{x_0}$ **(=a)**, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, ... , $\mathbf{x_n}$ **(=b)** as extremidades desses subintervalos, e sejam $\mathbf{x_1}^*$, $\mathbf{x_2}^*$, ... , $\mathbf{x_n}^*$ pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que $\mathbf{x_i}^*$ esteja no i-ésimo subintervalos $[\mathbf{x_{i-1}}, \mathbf{x_i}]$. Então a integral definida de **f** de **a** a **b** é
>
> $$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx} = \lim_{\mathbf{n} \to \infty} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{f(x_i^*)}.\Delta\mathbf{x}$$
>
> desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que **f** é integrável em **[a, b]**. (pg. 337)

Caso **f** seja positiva, então a integral definida (ou soma de Riemann) pode ser interpretada como uma soma de área de retângulos aproximantes, como ilustrado nas figuras abaixo. Assim, a $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx}$ pode ser interpretada como a área sob a curva **y = f(x)** de **a** até **b.**

Figura 66: Área sob o gráfico de uma função positiva



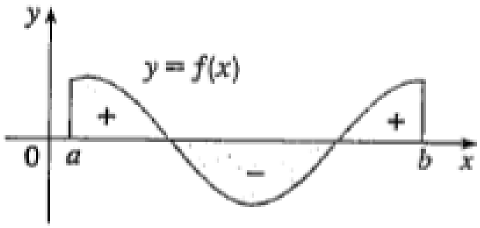
Fonte: STEWART (2012, p. 338)

Para o caso em que **f** assume valores positivos e negativos, como na figura a seguir, então a integral definida, ou soma de Riemann, como foi definida, resulta na soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo **x** e do oposto das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo **x**, isto é,

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx} = \mathbf{A_1} - \mathbf{A_2},$$

onde $\mathbf{A_1}$ é a área da região acima do eixo **x** e abaixo do gráfico de **f**, e $\mathbf{A_2}$ é a área da região abaixo do eixo **x** e acima do gráfico de **f**.

Figura 67: Área entre o gráfico e o eixo **x**, com valores positivos e negativos de **f**



Fonte: Stewart (2012) p. 338.

Outro conceito importante, por ser a operação inversa da diferenciação, é o de *antidiferenciação*, que passa a ser definido também em termos de integração. Em Leithold (1994, p. 286), temos a seguinte definição para este conceito:

"Uma função $\boldsymbol{F}$ será chamada de antiderivada de uma função $\mathbf{f}$ num intervalo **I** se $\mathbf{F'(x) = f(x)}$ para todo **x** em **I**."

Ainda, segundo este autor, *antidiferenciação*

> é o processo de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma função. O **símbolo** $\int$ denota a operação de antidiferenciação e escrevemos
>
> $$\int \mathbf{f(x)dx = F(x) + C}$$
>
> onde **F'(x) = f(x)** e **C** é uma constante real. (LEITHOLD, 1994, p. 287).

Para exemplificar esta definição o autor traz o seguinte exemplo:

Figura 68: Ilustração sobre o conceito de antidiferenciação

▶ ILUSTRAÇÃO 1 Se F for definida por

$$F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$$

então, $F'(x) = 12x^2 + 2x$. Assim, se f for a função definida por

$$f(x) = 12x^2 + 2x$$

logo, afirmamos que f é a derivada de F e que F é uma antiderivada de f. Se G for a função definida por

$$G(x) = 4x^3 + x^2 - 17$$

então, G também será uma antiderivada de f, pois $G'(x) = 12x^2 + 2x$. Na realidade, toda função cujos valores funcionais são dados por $4x^3 + x^2 + C$, onde C é uma constante qualquer, é uma antiderivada de f. ◀

Fonte: Leithold (1994, p. 286)

Em seguida, livros de Cálculo apresentam maiores detalhes a respeito sobre como lidar com os somatórios, bem como as propriedades de integral, técnicas de integração e alguns teoremas sobre integral.

Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que tem caráter central nas disciplinas de cálculo diferencial e integral, estabelece uma relação entre esses dois conceitos. Nos livros didáticos, encontramos este teorema dividido em duas partes, com diferentes abordagens quanto à ordem de sua apresentação. Por exemplo, os livros do Stewart (2012) e Leithold (1994) apresentam a primeira parte deste resultado

Se f for contínua em $[a, b]$, *então* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, *onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que F' = f.*

que é um enunciado semelhante ao da segunda parte do TFC, apresentada em Hughes-Hallett et al (1999) e Guidorizzi (2001). Tais escolhas alteram o foco da integração, do conceito de integral definida e de integração como instrumento para o cálculo de área (ou de uma variação acumulada como proposto em Hughes-Hallett et al (1999)), para o conceito de antiderivada ou primitiva e de integração como operação inversa da derivação, como em Stewart (2012) (embora amplamente referenciado em visualização), e Leithold (1994).

Por isso, é necessário escolher de abordagem. Seguiremos em nossa pesquisa a abordagem em Hughes-Hallett et al (1999) e Guidorizzi (2001), enunciando o Teorema Fundamental do Cálculo de modo a focar primeiramente o conceito de integral definida, evocando o conceito de área sob a curva:

Parte 1. Se **f** for integrável em **[a. b]** e se **F** for uma primitiva de **f** em **[a, b]**, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Parte 2. Se **f** for uma função contínua num intervalo e se a for qualquer número desse intervalo, então a função **G** definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

tem derivada **f**, isto é, **G'(x) = f(x)**.

A respeito da aplicação deste resultado, a segunda parte do TFC, destacamos exemplos apresentados em Leithold (1994) sobre como utilizá-lo para solução de problemas.

Figura 69: Ilustração do uso da primeira parte do TFC

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Vamos aplicar o segundo teorema fundamental do Cálculo para determinar

$$\int_1^3 x^2\, dx$$

Aqui $f(x) = x^2$. Uma antiderivada de x^2 é $\frac{1}{3}x^3$. Daí escolhemos

$$g(x) = \frac{x^3}{3}$$

Logo, do Teorema 5.8.2,

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2\, dx &= \frac{x^3}{3}\Big]_1^3 \\ &= 9 - \tfrac{1}{3} \\ &= \tfrac{26}{3}\end{aligned}$$

Fonte: Leithold (1994, p. 348)

Figura 70: Exemplo de como usar a primeira parte do TFC

EXEMPLO 2 Calcule

$$\int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\, dx$$

Solução

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\, dx &= \int_{1/2}^4 x^3\, dx - 6\int_{1/2}^4 x^2\, dx + 9\int_{1/2}^4 x\, dx + \int_{1/2}^4 dx \\ &= \frac{x^4}{4} - 6\cdot\frac{x^3}{3} + 9\cdot\frac{x^2}{2} + x\Big]_{1/2}^4 \\ &= (64 - 128 + 72 + 4) - (\tfrac{1}{64} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{8} + \tfrac{1}{2}) \\ &= \tfrac{679}{64}\end{aligned}$$

Fonte: Leithold (1994, pg. 349)

Figura 71: Exemplo de como usar a segunda parte do TFC

EXEMPLO 1 Calcule as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^3+1}\, dt$ (b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\, dt$

Solução

(a) De (7) com $f(t) = \dfrac{1}{t^3 + 1}$, temos

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t^3+1}\, dt = \frac{1}{x^3+1}$$

Fonte: Leithold (1994, pg. 346)

Figura 72: Exemplo de como usar a segunda parte do TFC

(b) Usamos a regra da cadeia com $u = x^2$, e temos

$$\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\, dt = \frac{d}{du}\int_3^{u} \sqrt{\cos t}\, dt \cdot \frac{du}{dx}$$

De (7) com $f(t) = \sqrt{\cos t}$ e como $\dfrac{du}{dx} = 2x$, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} \sqrt{\cos t}\, dt &= \sqrt{\cos u}\,(2x)\\ &= 2x\sqrt{\cos x^2}\end{aligned}$$

Fonte: Leithold (1994, p. 347)

Os exemplos anteriores propõem e resolvem questões intrínsecas à matemática, com destaque para procedimentos algébricos. Certamente a utilização deste resultado poderia ser explorada de outros modos. Por exemplo, em estudos sobre curvas integrais, articuladas a questões sobre movimento de partículas, conhecida a função velocidade do movimento. Poderia representar uma introdução, interessante, de questões estudadas em equações diferenciais de primeira ordem. No entanto acreditamos não haver dúvidas sobre a simplicidade e concretude maior das questões de áreas sob curvas em relações ao estudo de curvas integrais. Por isto mantemos a escolha sobre a organização do TFC já proposta.

Anexo 6 – Transcrição das respostas às atividades da oficina

Aluno P

1. Sim/ De modo grosseiro, pode ser desenhada sem tirar o lápis do papel.
2. Intervalo varia
3. Área no intervalo [2, 3]
4. Valor da área = 6,33
5. Valor da área = 39
6. Em branco
7. Diferentes. Tamanho do intervalo
8. Quando o valor de t aumenta ou diminui a diferença de y – x no par (x, y) é bem próxima da área.
9. $F(x) = x^3$
10. Para valores a esquerda de 0, a função vai para $-\infty$ e que para valores maiores que 0 a função vai para $+\infty$.
11. Daria um valor pra x e calcularia $f(x)=0{,}33x^3$
12. R tem maior grau.
13. Em branco
14. Lados de um triângulo.
15. Sim, subtraindo o valor de y_B - y_A
16. São iguais.
17. São iguais
18. O parâmetro t do segundo gráfico é exatamente o parâmetro de d. E a área é o parâmetro **e** do segundo gráfico.

Aluno L

1. Sim.
2. Mantém sua inclinação, delimitando um intervalo/área sob a função entre 2 e 4.

3. $\int_2^3 x^2$
4. $\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 = \frac{3^3}{2} - \frac{2^3}{2} = 9 - \frac{8}{2} = \frac{19}{2}$
5. $\int_2^5 x^2$
6. $\int_\infty^5 x^2$
7. Não
8. O x acompanha nos dois gráficos
9. Aparenta ser uma função x^3
10. É uma parábola cortada ao meio e uma das partes invertida.
11. Atribuiria valores de x e formar y para obter pontos
12. O x de r é igual ao x de R / quanto maior for o valor de t, maior será o valor da área e maior será o espaço percorrido por B.
13. Em branco
14. d é o tamanho da área da base.
15. $y=x^2$, sendo y = **e**
16. quanto maior o t, maior será o d / eles tem o mesmo tamanho
17. Eles tem o mesmo tamanho
18. Sim, pois os dois tem as mesmas medidas.

Aluno J

1. Sim
2. Varia a área rachurada
3. A área da função de x=2 à x=3
4. $\int_2^3 x^2 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = \frac{117}{3} = 39$
5. Não
6. Em branco
7. Em branco

8. Variação crescente da área
9. Função do 3° grau / f(x) = $\frac{x^3}{3}$
10. Representa a área de sua derivada
11. Supor valor para x e substituir em f(x) = $\frac{x^3}{3}$ para encontrar f(x)
12. A função R(x) = $\frac{x^3}{3}$ é a primitiva de r(x) = x²
13. Em branco
14. d significa a medida de 2 à 5 na função r(x) e **e** significa a área da função r(x) de 2 à 5
15. x = $\sqrt[3]{3y}$
16. Sim, a distância varia
17. equivalente, porém não sabe explicar.
18. Sim, porém não sabe explicar

Alunos D e K

1. Sim, porque o gráfico tende ao infinito / a função nunca muda
2. A área pintada aumenta ou diminui
3. Representa a área entre o 2 e o 3 no eixo x
4. Representação igual à 1
5. 3
6. A representação seria exatamente o valor de t
7. São diferentes. O intervalo mudou
8. Não tem relação
9. Não
10. Não pois as coordenadas mudariam
11. Não
12. Será maior

13. Comprimento
14. Não
15. Não
16. São iguais
17. O **e** é a área
18. sim

Alunos H e R

1. sim
2. aumenta a área sob o gráfico
3. uma área com o tamanho 1, de 2 à 3
4. $\int_2^3 x^2 =$ 6,333...
5. $\int_2^5 x^2 = 39$
6. $\int_2^t x^2$, com t>2 / utilizando limite, aonde encontraríamos o limite pela direita.
7. Os valores são iguais
8. B é o valor da área no ponto O selecionado por t
9. Não sabe
10. É a função de x^3
11. Mudaria o t
12. Os pontos B são iguais para as duas funções
13. C é o ponto de interseção de A e B
14. d é igual a t e **e** é igual à área
15. **e** = $\int_2^t x^2$
16. é o mesmo.
17. Não sabe
18. Sim, é a mesma

Alunos I e T

1. Sim, pois a função não sofre interrupção.
2. O intervalo [a, b] aumenta
3. A área do intervalo [2, 3]
4. O valor seria 19/3
5. O valor seria 117/3=39
6. Nessa representação, o valor da área será sempre maior que 0, pois $\int_2^2 x^2\,dx = 0$.
7. Os valores são diferentes. O intervalo [a, b] aumenta e também a função tem influência.
8. A janela contém os pontos de B que coincidem com a função no intervalo [2, 5]
9. A relação entre as coordenadas (a, b) de B e a área é que b – a se aproxima da área.
10. Representa uma função logarítmica.
11. Em branco
12. Repara-se que ao mover t, d = t e **e** = área de r
13. Relação de igualdade
14. d=t e **e**=área
15. em branco
16. d=t
17. os valores são iguais
18. é possível, pois **e** = área

Alunos M e N

1. sim, para qualquer valor em x teremos resultados positivos da função.
2. Aumenta o valor da área
3. Quando t=1, temos um área igual a 1
4. r(x) = t+2 => A=3-2=1. t = 1

5. t=3 / A = 5 – 2 = 3.
6. Em branco
7. Diferente, pois quanto mais alto for o ponto no gráfico, maior será minha área.
8. Em branco.
9. Em branco.
10. Em branco.
11. Em branco.
12. Em branco.
13. Em branco.
14. Em branco.
15. Em branco.
16. Em branco.
17. Em branco.
18. Em branco.

Aluno O

1. Sim, é uma função polinomial
2. Aparece a área sob a curva num intervalo.
3. A área da função entre 2 e 3
4. 19/3
5. 117/3
6. $\int_2^t x^2 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^t - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2$
7. Iguais
8. O ponto B é a relação de x e a integral da área de 0 a x.
9. Em branco
10. Sim, calculando a integral no ponto x no gráfico que tem a função r(x) = x^3.

11. Calculando a integral de $\int_0^2 x^2$

12. R é a integral de r

13. Não sabe

14. **e** é a diferença do eixo x / d é o crescimento da área em relação a distancia x

15. Sim.

16. d = 0 + t

17. **e** = $\int_0^t x^2$ - $\int_0^2 x^2$

18. sim.