UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO - UFRJ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

DIEGO MATOS PINTO

A CULTURA MATEMÁTICA MOBILIZADA POR LICENCIANDOS NO CONTEXTO DE UMA DISCIPLINA DE ANÁLISE REAL

RIO DE JANEIRO
SETEMBRO DE 2016

DIEGO MATOS PINTO

A CULTURA MATEMÁTICA MOBILIZADA POR LICENCIANDOS NO CONTEXTO DE UMA DISCIPLINA DE ANÁLISE REAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Victor Giraldo
Coorientador: Prof. Dr. Wellerson Quintaneiro

RIO DE JANEIRO

SETEMBRO DE 2016

CIP - Catalogação na Publicação

M425c

Matos, Diego
A cultura matemática mobilizada por licenciandos no contexto de uma disciplina de Análise Real / Diego Matos. -- Rio de Janeiro, 2016.
218 f.

Orientador: Victor Augusto Giraldo.
Coorientador: Wellerson Quintaneiro da Silva.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2016.

1. cultura matemática. 2. formação de professores. 3. rigor. 4. saberes docentes. I. Giraldo, Victor Augusto, orient. II. Silva, Wellerson Quintaneiro da, coorient. III. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

DIEGO MATOS PINTO

A CULTURA MATEMÁTICA MOBILIZADA POR LICENCIANDOS NO CONTEXTO DE UMA DISCIPLINA DE ANÁLISE REAL

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Rio de Janeiro, 29 de Setembro de 2016.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo – UFRJ (Orientador)

Prof. Dr. Wellerson Quintaneiro da Silva – CEFET/RJ (Coorientador)

Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira – UFOP

Profa. Dra. Marcia Maria Fusaro Pinto – UFRJ

Profa. Dra. Maria Fernanda Elbert – UFRJ

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é fruto do apoio incondicional – pessoal e/ou acadêmico – de inúmeras pessoas que colaboraram para sua realização. Considero este espaço ínfimo para retribuir e agradecer a todos que me ajudaram na conclusão desta etapa.

Primeiramente, agradeço a minha família, em especial aos meus pais Antonio e Conceição, por minha formação como pessoa, pelos sacrifícios feitos para me proporcionar amor e felicidade e, também, pelo investimento e confiança depositados em mim. Sem vocês, não conseguiria retomar o rumo e vencer seguindo meu próprio caminho.

Ao Rodrigo, amigo de longa data, por acompanhar minha trajetória durante tanto tempo, por ouvir meus desabafos e pelas inúmeras conversas que renovavam minhas energias.

Aos colegas de turma durante o Mestrado pelo companheirismo e por tornar os estudos mais agradáveis.

Aos professores companheiros de trabalho no Colégio Pedro II, agradeço a troca de experiências, o incentivo e a imensa ajuda com meus horários durante as aulas do Mestrado.

Aos meus orientadores, Victor Giraldo e Wellerson Quintaneiro, pela segurança que me passaram durante todo o desenvolvimento desta pesquisa. Ao Victor, destino minha profunda gratidão por todas as oportunidades que me concedeu. Sem dúvida, sua figura foi uma fonte de inspiração para meu amadurecimento pessoal e profissional. Ao Wellerson, agradeço a incansável dedicação e companheirismo durante essa trajetória. Além de orientador, em muitos momentos, foi um importante conselheiro e uma peça fundamental para a realização deste trabalho.

Aos membros da banca, Ana Cristina Ferreira, Maria Fernanda Elbert e Marcia Fusaro, pelas correções, críticas e sugestões que contribuíram para a qualificação deste trabalho.

Aos colegas do grupo de pesquisa LaPraMe, agradeço o acolhimento e as inúmeras contribuições durante as discussões sobre esta pesquisa.

Finalmente, não poderia deixar de agradecer a minha namorada, Alessandra. Seus ombros foram meu porto seguro durante os momentos de ansiedade, cansaço e angústia. Muito obrigado pelo amor incondicional. Sem você, eu não conseguiria encontrar forças para terminar essa caminhada.

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma discussão a respeito das percepções de licenciandos sobre a Matemática, no contexto das práticas sociais mobilizadas durante a formação inicial como professores de Matemática e considerando suas expectativas sobre a futura prática docente. As inquietações que motivaram a investigação convergiram à seguinte questão de pesquisa: *Quais aspectos emergem do discurso de licenciandos sobre suas percepções relacionadas à natureza da Matemática – especificamente no que tange às práticas sociais e culturais observadas no contexto de uma disciplina de Análise Real da Licenciatura em Matemática – e de que maneira tais aspectos se articulam com a construção de saberes matemáticos para o ensino?* Orientados por esta questão, desenvolvemos a investigação com o objetivo de (1) identificar, a partir do discurso dos participantes da pesquisa, aspectos da cultura matemática mobilizada por licenciandos que cursavam a disciplina de Análise Real; e (2) observar possíveis relações entre essa cultura e a construção dos saberes docentes do futuro professor de Matemática. Este trabalho está fundamentado na literatura de formação de professores, utilizando como referencial teórico pesquisas que discutem saberes docentes para o ensino e o lugar das Matemáticas na formação inicial do professor de Matemática. A investigação foi realizada durante e após um curso de Análise Real na Licenciatura e considerou resultados de três participantes em um questionário, em tarefas que versavam sobre ideias relacionadas ao Teorema do Valor Intermediário e em entrevistas semiestruturadas pós-tarefas. Os resultados emergentes dos dados evidenciaram aspectos de uma cultura matemática articulada à percepção hierárquica que influenciou os critérios de legitimação desses licenciandos sobre uma argumentação matemática. Essa percepção hierárquica sobre a Matemática manifestava-se, sobretudo, através da valorização do rigor da Matemática Acadêmica em detrimento de aspectos menos formais, como representações gráficas ou argumentações que não apresentavam uma escrita simbólica.

Palavras-chave: cultura matemática; formação de professores; rigor; saberes docentes.

ABSTRACT

This dissertation presents a discussion on the perceptions of prospective teachers of Mathematics, within the context of the social practices at stake during their university education as mathematics teachers, and taking into account their expectations towards forthcoming teaching agency. The concerns that have motivated this investigation gave rise to the following research question: *Which aspects of the prospective teachers' discourse on their perceptions concerning the nature of Mathematics – specifically with respect to social and cultural practices observed within the context of a Real Analysis module in the undergraduate course – and how such aspects relate with the construction of subject matter knowledge for teaching?* Guided by this question, we designed an investigation aiming to (1) identify aspects of mathematical culture put into play by prospective teachers while taking a Real Analysis module in the discourse of the participants; and (2) map out the possible relationship between this culture and the construction of teaching knowledge by prospective mathematics teachers. This work is grounded on the research literature on teachers' education, and uses as a theoretical framework the research corpus on teachers' subject matter knowledge and on the role of mathematical content on teachers' pre-service education. This research was conducted during and after a Real Analysis module in an undergraduate pre-service teachers' course and took into account results of a questionnaire, tasks related with the Mean Value Theorem, and semi-structured interviews, from three participants. Results that emerged from data highlight aspects of a mathematical culture related with a hierarchical perception that influenced the participants' validation criteria for mathematical arguments. Such hierarchical perception is above all revealed through the prominence gave to academic mathematics rigor over less formal aspects, such as graphic representation or arguments that did not embody symbolic writing.

Keywords: mathematical culture; teacher's education; rigor; teacher's knowledge.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Considero que a melhor maneira de apresentar esta pesquisa é relatar um pouco da trajetória que percorri desde minha formação inicial, passando por minha formação continuada no Mestrado, até minha atuação enquanto professor na Educação Básica. A opção por iniciar desse modo não é motivada pelo desejo de exibir meu percurso enquanto pesquisador em formação que me levou às questões desta pesquisa, apesar de caber aqui perfeitamente. A escolha por introduzir o trabalho dessa maneira foi determinada após perceber que esta descrição resume a essência da investigação, ilustra sua problemática e retrata a questão principal desta pesquisa.

Minha graduação em Licenciatura em Matemática, mesmo representando um curso cujo objetivo é formar professores, propôs pouquíssimas discussões sobre o ensino de Matemática. Os debates geralmente estavam limitados às disciplinas de estágio ou de Educação, sempre inseridos em um contexto geral que não retratava o conhecimento matemático, de modo que eu não conseguia observar relação entre minha formação matemática na universidade e minha futura prática docente. As disciplinas de conteúdo matemático não promoviam qualquer articulação com a Educação Básica ou, se realmente tinham essa intenção, não fui capaz de identificá-la. Fui formado em uma cultura na qual a lógica matemática e o rigor na argumentação representavam a maneira correta de fazer – e, consequentemente, estudar – matemática, a partir de um modelo de exposição do conteúdo que privilegiava, fundamentalmente, a estrutura definição-teorema-demonstração.

Posso afirmar, sem nenhum pudor, que sou um produto legítimo do modelo de formação que mencionei acima. Cresci e amadureci enquanto licenciando em meio a tal cultura e acreditava, realmente, que essa era a verdadeira Matemática e, ainda mais que isso, a verdadeira forma de aprender e ensinar Matemática. Para mim, a beleza da Matemática estava representada – exclusivamente – ali: no seu rigoroso jogo lógico de implicações que, partindo de uma hipótese, percorre um divertido labirinto até chegar à conclusão. Considerava prazeroso e fascinante jogar esse jogo, porém pouco percebia que minhas concepções sobre a natureza da Matemática haviam se tornado tão engessadas nessa estrutura quanto as crenças dos meus formadores.

Ingressei no Mestrado em Ensino de Matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) desconhecendo seu conteúdo e sua essência. Ao me deparar com um novo ambiente em outra universidade, o estranhamento foi imediato e acompanhado de muitas surpresas. No primeiro semestre, cursei as disciplinas de Tendências em Educação Matemática e Análise Real. Minha formação extremamente formal – que valorizava o modelo definição-teorema-demonstração de exposição dos conteúdos – me levava a ter um interesse maior pela Análise. Naquele momento, em consequência da falta de articulação entre minha formação e a prática docente, não esperava na disciplina de Tendências em Educação Matemática nada além das mesmas discussões sobre Educação, distantes da Matemática, que havia vivenciado na graduação. Porém, logo em uma das primeiras aulas, li o texto *Fincando Estacas: Uma tentativa de Demarcar a Educação Matemática como Campo Profissional e Científico* (KILPATRICK, 1996) e me estarreci com a seguinte afirmação:

> [...] Enquanto a Educação Matemática for uma Ciência, ela será uma Ciência Humana. Se ela for vista como um campo acadêmico mais do que uma disciplina, será um campo que repousa sobre uma variedade de outras disciplinas, sendo a maioria delas das Ciências Sociais.
> Pesquisadores em Educação Matemática não provam teoremas. As reivindicações que eles fazem são condicionais, tentativas e profundamente envolvidas em um contexto. (KILPATRICK, 1996, p.118)

Ao ler este trecho, vi surgir sentimentos imersos em um misto de choque e indignação. Os únicos pensamentos que ecoavam em minha mente, naquele momento, eram as afirmações que a Educação Matemática enquanto ciência seria uma Ciência Humana e que pesquisadores em Educação Matemática não provam teoremas. O estarrecimento decorrente destas frases não me permitia sequer enxergar o contexto no qual estavam inseridas e entendê-las melhor. Como a Matemática, mesmo no ambiente da Educação, poderia ser uma Ciência Humana? Por que um educador matemático não prova teoremas? Quer dizer que, a partir de então, não irei mais provar teoremas e serei um estudante de Ciências Humanas? Mas, escolhi a matemática justamente pelo meu interesse pela área de Exatas! Após a explicação da professora da disciplina, entendi que a citação estava mais relacionada ao campo de pesquisa do educador matemático comparado ao campo de pesquisa do matemático. Mas, mesmo assim, ainda era difícil compreender e aceitar aquelas afirmações.

Por outro lado, cursava ao mesmo tempo a disciplina de Análise, ministrada pelo orientador desta pesquisa, que seguia uma abordagem completamente diferente daquela que eu havia vivenciado na graduação. Além de não seguir continuamente o modelo definição-teorema-demonstração, essa abordagem sugeria reflexões e articulações do conteúdo de Análise com o conteúdo da Educação Básica e apresentava um tratamento conceitual que permitia construir o conhecimento matemático, dando sentido aos conteúdos abordados. A nova proposta me encantou porque relacionava os conceitos de Análise com o ensino básico de uma maneira que nunca havia visto e elucidava ideias que não ficaram claras quando cursei a disciplina na graduação. Ao mesmo tempo em que considerava tal abordagem inédita e encantadora, me questionava se aquela nova metodologia dava conta dos conceitos de Análise da mesma forma que o modelo apresentado em minha graduação. Será que o curso estava sendo enfraquecido e os conteúdos eram abordados de maneira, aparentemente, menos profunda? Seria porque os alunos de Ensino em Matemática não provam teoremas ou sabem menos matemática que os estudantes de Matemática Pura? Aos poucos, fui percebendo que os conteúdos eram igualmente profundos, mas que esse novo modelo permitia observar o conhecimento matemático sob outro ponto de vista.

Durante a sequência do Mestrado, vivi intensamente esses conflitos entre as minhas concepções formalistas sobre a natureza da Matemática e as novas concepções sobre o ensino da Matemática que estavam sendo apresentadas em minha formação continuada. Esses conflitos internos me fizeram reavaliar minhas crenças e estiveram acompanhados de inúmeras reflexões, controvérsias e contradições em meu discurso nessa trajetória. Por exemplo, uma discussão que não se restringe ao jogo lógico, abordando o porquê algo é definido de uma determinada maneira, pode representar uma interessante abordagem para se discutir um conceito. Pude perceber que abordagens, como a do curso de Análise que mencionei, podem trazer reflexões sobre o próprio conteúdo *per se*.

Dessa forma, a principal inquietação que surgia era de que maneira a cultura matemática[1] observada na minha graduação teria influenciado minhas concepções sobre a natureza da Matemática? Quais influências esse modelo apresentado na Licenciatura exerceu sobre minha formação docente? Ele teria influenciado, também, minha atuação enquanto professor da Educação Básica?

A trajetória aqui apresentada e as inquietações acima problematizam o modelo de formação inicial de professores que descrevi, verificado em diversos cursos de Licenciatura em Matemática, e denunciam a problemática na qual esta pesquisa está inserida: *Que professor está sendo formado mediante a cultura matemática observada atualmente na Licenciatura?*

Os saberes docentes de conteúdo para o ensino e a formação inicial do professor de Matemática vêm sendo constantemente debatidos na literatura de pesquisa em Educação

[1] De acordo com nossa interpretação, a cultura matemática está relacionada à maneira como a Matemática – o objeto cultural mobilizado – é concebida e praticada em uma determinada comunidade. Ao leitor, destacamos que o conceito de cultura matemática será discutido, com mais detalhes, no capítulo que apresenta a fundamentação teórica desta pesquisa.

Matemática (SHULMAN, 1986; BALL, THAMES, PHELPS, 2008). No Brasil, diversos pesquisadores (MOREIRA, 2012; FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013; MOREIRA, FERREIRA, 2013) têm refletido sobre o lugar da Matemática na formação inicial e apontado que, atualmente, a Licenciatura em Matemática se encontra desarticulada da futura prática docente na Educação Básica, o que revela uma enorme falha na formação de professores.

Em 1908, Felix Klein já identificava essa problemática na formação docente. Na introdução de sua obra *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*, ele identificou um problema central na formação do professor de Matemática na época: a falta de conexão entre a escola e a universidade. O autor denunciou uma *dupla descontinuidade* vivenciada pelo futuro professor ao fazer a transição da escola para a universidade e, em seguida, ao retornar à escola para ensinar.

Essa falta de articulação entre escola e universidade, vivenciada nos cursos de Licenciatura, tem sido alvo de críticas por parte de pesquisadores, formadores, egressos e licenciandos, juntamente com contestações sobre currículos, metodologias de ensino das aulas, entre outras (FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013). Essas críticas refletem a fragilidade do modelo vigente na formação inicial do professor de Matemática, que concebe a Licenciatura como uma versão diluída do Bacharelado e segue a mesma lógica subjacente ao modelo 3+1 que marcou o início das Licenciaturas no Brasil, no qual os cursos eram estruturados a partir de três anos de formação em conteúdos específicos seguidos de mais um ano de Didática (MOREIRA, 2012).

Nesse sentido, os desdobramentos do *Movimento da Matemática Moderna* ditaram uma tendência formalista que influenciou, internacionalmente, os currículos e as metodologias de ensino. A influência dessa tendência fez com que o estilo formalista penetrasse gradualmente em todos os níveis de ensino de matemática, de modo que o modelo de apresentação definição-teorema-demonstração tornou-se quase o único paradigma de exposição no ensino superior da matemática (DAVIS, HERSH, 2013). Esse modelo evidencia que os cursos de Licenciatura podem estar privilegiando uma maneira de fazer matemática, diante de tantas outras que possibilitam, igualmente, o desenvolvimento da matemática como ciência.

É importante destacar que, neste trabalho, não estamos contestando a importância do rigor e da lógica matemática, que possui inegável contribuição para os processos de aprendizagem e para a formação docente. Porém, ressaltamos que os conhecimento matemático do professor se revela extenso e dinâmico, manifestando-se de diversas maneiras em termos de uma disposição participativa aprendida dentro de um domínio de conhecimento em evolução (DAVIS, RENERT, 2009). Nesse sentido, entendemos, nesta pesquisa, que a atividade matemática é vista mediante um conjunto de práticas sociais e culturais que são determinantes para a constituição de uma cultura matemática mobilizada por uma comunidade.

De acordo com nossa interpretação, a cultura matemática está relacionada à maneira como a Matemática – o objeto cultural mobilizado – é concebida e praticada em uma determinada comunidade. Ao considerarmos as práticas de mobilização de cultura matemática, a Matemática deixa de ser apenas um corpo homogêneo de conhecimento e atinge uma dimensão plural, que considera a atividade humana em um conjunto de práticas sociais nas quais estão inseridos alunos, professores, matemáticos e todos que estão envolvidos nessa atividade (MIGUEL, VILELA, 2008).

Esta investigação, portanto, se propõe a (1) identificar, a partir do discurso dos participantes da pesquisa, aspectos da cultura matemática mobilizada por licenciandos que cursavam a disciplina de Análise Real; e (2) observar possíveis relações entre essa cultura e a construção dos saberes docentes do futuro professor de Matemática. Diante disso, a escolha pela disciplina de Análise Real como exemplo para esta discussão permite abordar a problemática da pesquisa a partir da observação das impressões do licenciando sobre a matemática formal, no contexto de sua formação, e verificar como ele vincula essas impressões à expectativa sobre sua futura prática.

As reflexões apresentadas até aqui motivaram esta investigação com o intuito de tentar responder uma importante questão que sintetiza a discussão proposta nesta pesquisa: *Quais aspectos emergem do discurso de licenciandos sobre suas percepções*[2] *relacionadas à natureza da Matemática – especificamente no que tange às práticas sociais e culturais observadas no contexto de uma disciplina de Análise Real da Licenciatura em Matemática – e de que maneira tais aspectos se articulam com a construção de saberes matemáticos para o ensino?*

É importante destacar que este trabalho se propõe a analisar a questão enunciada, exclusivamente, da perspectiva do discurso dos participantes considerados, durante e ao

[2] Em meio às fronteiras teóricas sobre o conceito de percepção apontadas na literatura, destacamos que, neste trabalho, entendemos percepção como um processo parcial e suscetível a mudanças, no qual as percepções não representariam um conjunto de eventos e experiências passadas, mas uma constante construção de significados no espaço e no tempo (MELGAREJO, 1994). A discussão sobre o conceito de percepção, com base na literatura, será apresentada posteriormente na seção em que explicitamos as questões de pesquisa.

término da disciplina de Análise Real cursada. Portanto, ressaltamos que o objeto de análise desta pesquisa não é o curso de Análise Real, mas as impressões particulares desses sujeitos sobre a Matemática, do ponto de vista das práticas sociais e culturais observadas, especificamente, no contexto de realização da disciplina de Análise em questão.

Entendam esse estudo como um meio de reavaliar profundamente minhas concepções. Obviamente, ainda vivo alguns dos conflitos que foram apresentados, implicando na possibilidade de emergirem contradições em meu discurso, nas quais enxergo uma rica fonte de reflexões com vistas à melhoria do trabalho e a discussões posteriores sobre o tema. Por essa razão, esta dissertação de Mestrado é uma tentativa de refletir sobre a formação inicial do professor despido de preconceitos e, assim, convido o leitor a acompanhá-la sob essa ótica. O intuito é levantar essa problemática e propor reflexões e questionamentos. Dessa forma, o trabalho segue a estrutura de apresentação descrita nos parágrafos a seguir.

No capítulo 1, realizamos uma revisão de literatura que situa a problemática na qual a pesquisa está inserida e propomos reflexões sobre o modelo de formação de professores de Matemática vigente em determinados cursos de Licenciatura. Além de explicitar as questões desta investigação, esta seção busca problematizar a maneira como a Matemática é apresentada ao licenciando. Nesse sentido, abordamos a relação entre o conhecimento matemático e sua filosofia, além de discutir as implicações da concepção formalista no ensino de Matemática.

No capítulo 2, apresentamos pesquisas, inseridas na literatura de formação de professores de Matemática, de autores que compuseram a fundamentação teórica deste trabalho. Nesta seção, discutimos as especificidades dos saberes matemáticos para o ensino e da formação inicial do professor de Matemática. Destacamos as ideias de Shulman (1986, 1987) e de Ball, Thames e Phelps (2008) sobre os saberes docentes necessários ao ensino; a *dupla descontinuidade* na formação do professor de Matemática, denunciada por Felix Klein (2004), e a percepção hierárquica e estanque atribuída entre Matemática Elementar e Matemática Superior; a perspectiva dinâmica dos saberes matemáticos para o ensino, apresentada nos trabalhos de Davis e Renert, inseridas no contexto das práticas de mobilização de cultura matemática destacadas por Miguel e Vilela (2008); e as reflexões sobre a formação inicial do professor e o lugar da Matemática na Licenciatura, ilustrada nos trabalhos de Moreira (2012), Moreira e Ferreira (2013) e Fiorentini e Oliveira (2013).

No capítulo 3, descrevemos o percurso metodológico realizado no desenvolvimento desta pesquisa. Nesta parte do trabalho, situamos o contexto no qual a pesquisa foi realizada e apresentamos os instrumentos metodológicos utilizados (questionário, tarefas e entrevistas semiestruturadas). Em seguida, descrevemos os procedimentos de coleta de dados e a trajetória de sua análise. Destacamos, neste momento, ideias de alguns autores que serviram como inspiração metodológica para a elaboração das tarefas aplicadas na pesquisa (BIZA, NARDI, ZACHARIADES, 2007) e para a apresentação e análise dos dados da investigação (POWELL, FRANCISCO, MAHER, 2004).

No capítulo 4, apresentamos os dados obtidos após a aplicação dos instrumentos metodológicos da pesquisa. Nesta apresentação, buscamos construir uma narrativa que articule os registros escritos dos sujeitos da pesquisa, obtidos no questionário e nas tarefas, com o discurso dos participantes em entrevistas semiestruturadas. Dessa maneira, intencionamos desenvolver uma apresentação de dados que permita percorrer todas as etapas da investigação.

No capítulo 5, descrevemos nossa análise dos dados, objetivando interpretar os resultados emergentes e responder a questão principal desta pesquisa. Neste capítulo, estruturamos a análise em dois eixos: (1) Observação de Aspectos Discursivos e (2) Práticas Culturais e Meta-reflexões sobre Cultura Matemática. A observação dos aspectos discursivos dos participantes permitiu identificarmos uma cultura matemática no contexto das práticas sociais e culturais observadas durante a formação inicial desses licenciandos. Apresentaremos, neste capítulo, uma discussão sobre a relação entre a cultura identificada, a construção dos saberes docentes dos licenciandos para o ensino e suas meta-reflexões sobre essa cultura matemática no contexto de sua própria formação.

No capítulo 6, destacamos os principais resultados da investigação e apresentamos uma discussão sobre alguns desdobramentos do trabalho que sugerem perspectivas futuras para novas investigações.

CAPÍTULO I - A Problemática

Neste capítulo, aprofundaremos a problemática na qual o trabalho está inserido, além de explicitar os objetivos e as questões de pesquisa. De maneira articulada à literatura de Educação Matemática, esta parte de nossa investigação tem como objetivo levantar tensões e propor ao leitor reflexões que o conduzam à problemática e às questões de pesquisa.

Este capítulo inicial está dividido em cinco seções: a primeira aborda os aspectos do conhecimento matemático e sua relação com a Filosofia da Matemática; a segunda seção discute as implicações da concepção formalista no ensino de Matemática; a terceira apresenta a problemática do trabalho e a última seção do capítulo explicita os objetivos e as questões de pesquisa.

1.1 O Conhecimento Matemático e sua Filosofia

De um ponto de vista filosófico, tentar entender a natureza da Matemática como ciência, não apenas a partir do conhecimento matemático que a define, pode ser uma tarefa tão complexa quanto buscar compreender o que caracteriza seus processos de aprendizagem. Para um indivíduo que é habilidoso com os métodos e procedimentos que envolvem a Matemática, o fazer matemático pode parecer natural e ser visto apenas como um processo. Entretanto, se o mesmo indivíduo refletir sobre seu significado ou sobre sua epistemologia, a Matemática pode parecer obscura e enigmática. Questões filosóficas sobre a existência da Matemática como, por exemplo, se ela representa uma invenção humana ou a descoberta de um domínio preexistente, podem nos auxiliar a ampliar a discussão sobre o conhecimento matemático, considerando-o a partir das relações entre a Matemática, o homem e a sociedade.

Nessa esfera da Filosofia da Matemática, segundo Davis e Hersh (2013), em qualquer discussão sobre os fundamentos da Matemática, são apresentadas três correntes: o *platonismo*, o *construtivismo* e o *formalismo*.

Segundo os autores, o *platonismo* é a corrente segundo a qual a Matemática existe independentemente do homem. Nesse caso, o platonista encara os objetos matemáticos como reais e já existentes. De acordo com o platonismo, um matemático é um cientista empírico, isto é, ele não pode inventar nada porque tudo já existe. Ele pode apenas descobrir.

Já a doutrina do *construtivismo* afirma que os únicos objetos matemáticos que têm existência real e significado são os que podem ser obtidos por uma construção finita, partindo dos números naturais. Assim, o construtivista encara os números naturais como o dado fundamental da Matemática, a partir da qual todas as noções têm que ser construídas. Na corrente construtivista, a Matemática não é vista como um conjunto de teoremas, mas entendida como uma construção mental apoiada na intuição e desenvolvida através de um número finito de passos. Neste caso, o conhecimento matemático não é pré-existente, mas construído e produzido pelo sujeito, o que torna a Matemática falível, aberta a questionamentos e discussões, como em todo processo de construção do conhecimento humano.

Por fim, o *formalismo* é a posição na qual a Matemática consiste meramente em símbolos ou expressões, manipulados ou combinados conforme regras e acordos preestabelecidos. De acordo com o formalismo, não há qualquer objeto matemático. A Matemática consiste apenas em axiomas, definições e teoremas, representando a ciência da dedução formal dos axiomas para os teoremas. Segundo os autores, o formalista não se preocupa com o significado das expressões. Para ele, só interessam as regras do jogo lógico que transformam uma fórmula na outra. Assim que as conclusões são alcançadas, a matemática acaba. Qualquer "significado" ou questionamento sobre o que foi aprendido não é uma questão matemática e, portanto, é irrelevante para o formalista. Nessa perspectiva, a utilização de figuras, diagramas ou até de imagens mentais é considerada não-matemática.

A concepção platônica coloca o conhecimento como algo universal a ser alcançado pelo homem. Sob essa ótica, alguns filósofos consideraram a razão como a principal fonte do conhecimento humano e o melhor instrumento para explicar a realidade. Nesse contexto, a Matemática exerceu grande influência sobre a filosofia racionalista. René Descartes, inspirado na lógica da filosofia, na geometria e na álgebra, criou um método que buscava conduzir sua razão na busca do conhecimento. Deixando claro que seu propósito não era ensinar seu método, mas sim apresentá-lo, Descartes o exibe em Discurso do Método (1637). Este método era constituído a partir de quatro preceitos:

> O primeiro era de nunca aceitar coisa alguma como verdadeira sem que a conhecesse evidentemente como tal; ou seja, evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção, e não incluir em meus juízos nada além daquilo que se apresentasse tão clara e distintamente a meu espírito, que eu não tivesse nenhuma ocasião de pô-lo em dúvida.
> O segundo, dividir cada uma das dificuldades que examinasse em tantas parcelas quantas fosse possível e necessário para melhor resolvê-las.

> O terceiro, conduzir por ordem meus pensamentos, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer para subir pouco a pouco, como por degraus, até o conhecimento dos mais compostos; e supondo certa ordem mesmo entre aqueles que não se precedem naturalmente uns aos outros.
> E, o último, fazer em tudo enumerações tão completas, e revisões tão gerais, que eu tivesse certeza de nada omitir (DESCARTES, 2001, p. 23).

Na filosofia cartesiana, o conhecimento é visto como algo a ser adquirido, alcançado de maneira gradual, percorrendo um caminho progressivo do mais simples ao mais elaborado. A partir disso, Descartes imaginou que seu método poderia ser estendido a tudo que estivesse relacionado ao conhecimento humano, fazendo com que suas declarações impulsionassem bastante o método científico.

Podemos estabelecer relações entre estas perspectivas filosóficas e a maneira como a construção do conhecimento matemático é percebida ainda hoje pela comunidade matemática. Mometti (2007) faz um paralelo entre a concepção cartesiana de aquisição do conhecimento e a ciência cognitivista tradicional. Segundo o autor, para a ciência cognitiva tradicional, mantida pelo dualismo cartesiano, a mente é uma entidade abstrata, separada e transcendente do corpo. Nesse sentido, o raciocínio, inclusive o matemático, também seria uma atividade separada do corpo, atemporal e universal. O autor critica esse ponto de vista e destaca que o conhecimento não pode ser adquirido, transferido ou apropriado, como se houvesse uma caixa vazia que pudesse ser preenchida.

Na literatura de Educação Matemática, o ponto de vista cognitivista é adotado por diversos pesquisadores. Tall e Vinner (1981) consideram que um conceito matemático não deve ter somente sua definição formal como referência. Os autores analisam a maneira com um indivíduo lida com um conceito a partir de duas dimensões: a *imagem de conceito* e a *definição pessoal de conceito*.

Segundo Tall e Vinner (1981), o termo *imagem de conceito* descreve a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Já a *definição pessoal de conceito,* se refere ao conjunto de palavras usado pelo indivíduo para especificar um conceito. Esta definição pode ser apenas memorizada ou ser mais significativamente aprendida e estar relacionada em maior ou menor grau com o conceito como um todo. Assim, a definição pessoal de conceito pode diferir da definição formal que é aceita pela comunidade matemática e, em determinados casos, entrar em conflito com a mesma.

Embora as ideias apresentadas pelos autores ilustrem a contribuição da estrutura cognitiva, elas ainda refletem uma perspectiva platônica do conhecimento, que considera a definição do conceito como o "ideal" a ser alcançado pelo indivíduo. Em pesquisas que apresentam desdobramentos dessas ideias, conceito parece ser entendido como um objeto sobre o qual o sujeito se debruça na tentativa de alcançar o conhecimento sobre ele, a partir de uma perspectiva de aquisição. Nesse contexto, apenas a atuação individual do sujeito é destacada na construção de um conceito, descrevendo um processo que desconsidera a contribuição das interações sociais entre o indivíduo e o mundo.

Em uma dessas pesquisas, Pinto e Tall (1999) analisaram a construção de teorias formais de estudantes em um curso de Análise e observaram, nos participantes da investigação, duas abordagens distintas de atribuir significado à definição formal de um conceito: *atribuir significado* e *extrair significado*. *Atribuir significado* à definição de um conceito exige a reconstrução de ideias pessoais para se concentrar apenas em propriedades essenciais da definição e para a construção de uma teoria formal integrada. *Extrair significado* da definição do conceito, fazendo deduções formais, requer trabalhar a definição, talvez por repetição, utilizando-a como base para a definição formal, construindo uma imagem formal baseada principalmente sobre as próprias atividades de prova.

Weber e Alcock (2004) apresentam uma distinção semelhante à de Pinto e Tall (1999), porém situada no contexto da produção de provas. Os autores destacam duas maneiras de um indivíduo produzir uma prova formal: a *produção de prova semântica* e a *produção de prova sintática*. Na *produção de prova semântica*, quem realiza a prova utiliza instâncias[3] do objeto matemático para sugerir ou guiar os argumentos formais que são dados. Em uma *produção de prova sintática*, o indivíduo não faz uso de diagramas ou outras representações intuitivas e não formais de conceitos matemáticos. A prova é realizada unicamente através da manipulação de definições e fórmulas simbólicas.

Embora represente uma maneira eficiente de formular uma demonstração matemática, uma vez que está estruturada a partir de uma sequência de implicações lógicas, entendemos que a simples produção de uma prova sintática pode não dar a ênfase necessária aos significados dos argumentos utilizados. Do ponto de vista da aprendizagem do conhecimento matemático, o significado de uma demonstração que foi produzida de maneira sintática pode, em algumas ocasiões, não estar claro para o estudante. Um aluno, ao construir uma prova sintática, pode reproduzir argumentos que foram memorizados de forma mecânica sem compreender como a demonstração estabelece a verdade da afirmação. Weber e Alcock

[3] Weber esclarece que entende como *instância* (instantiation) a forma sistemática com que o indivíduo pensa sobre um objeto matemático, o que é significativo internamente para esse indivíduo.

(2004) afirmam que, na comunidade matemática, a produção da prova sintática pode ser definida coloquialmente como uma prova onde tudo que se faz é "desembrulhar as definições e manipular símbolos".

Podemos associar essa valorização da apresentação lógico-formal em detrimento dos significados à corrente formalista apresentada no início desta seção. Neste trabalho, entendemos que buscar compreender conceitos formais ou demonstrações matemáticas somente a partir de suas estruturas lógicas, sem propor reflexões sobre seus significados, não reflete a maneira como a Matemática foi construída e, tampouco, concede ao indivíduo o protagonismo na produção de seu conhecimento. Obviamente, qualquer julgamento sobre o formalismo como filosofia da Matemática não representa uma crítica à lógica ou ao rigor matemático, uma vez que são elementos fundamentais para a atividade matemática e seu desenvolvimento enquanto ciência. O intuito aqui é apenas evidenciar, problematizar e refletir sobre determinadas percepções sobre a natureza da Matemática.

Buscando esclarecer as crenças que definem um representante da comunidade matemática, apresentamos a descrição de Davis e Hersh (2013) sobre o "matemático ideal", aqui entendido não no sentido de perfeito, mas sim como membro típico da comunidade dos matemáticos. Segundo os autores, o matemático ideal deposita sua fé na demonstração rigorosa e acredita que a diferença entre uma demonstração correta e uma demonstração incorreta é inconfundível e decisiva. Porém, o mesmo é incapaz de oferecer uma explicação coerente sobre o significado de rigor, ou sobre o que torna rigorosa uma demonstração. Davis e Hersh acrescentam que:

> A maior parte dos autores que escrevem sobre este assunto parece concordar que um investigador matemático típico é um platonista durante a semana e um formalista aos domingos. Quer dizer, quando está trabalhando em matemática, está convencido de que estuda uma realidade objetiva cujas propriedades tenta determinar. Mas, quando se lhe pede para fundamentar filosoficamente esta realidade, acha mais fácil fingir que, afinal, não acredita nela. (DAVIS, HERSH, 2013, p. 301)

Através dessa caracterização, em tom de crítica, os autores evidenciam que o matemático limita-se a se debruçar sobre o fazer matemático e sua descoberta do que, propriamente, refletir sobre a natureza e os fundamentos da Matemática. Davis e Hersh (2013) afirmam que a Matemática não é o estudo de uma realidade ideal, preexistente e atemporal, muito menos um jogo, como o xadrez, com símbolos e fórmulas inventadas. Na visão dos autores, não podemos restringir a Matemática a uma filosofia demasiada pequena para ela, mas sim exigir que as categorias filosóficas sejam desenvolvidas de modo a aceitarem a realidade de nossa experiência matemática.

Nesse sentido, este trabalho parte da premissa que o conhecimento matemático não se desenvolve completamente dentro da mente do indivíduo e dissociado do mundo. Entendemos que a atividade matemática é um processo em transformação, construído a partir de relações entre o sujeito, os conceitos e as práticas sociais e culturais que os relacionam. Nessa perspectiva, o indivíduo é protagonista na produção do conhecimento matemático e seus processos de aprendizagem não podem ser dissociados do contexto no qual está inserido.

A concepção adotada nesta pesquisa dialoga com as ideias de Rosch (1999), que define conceito a partir de uma perspectiva indissociável entre mente e mundo. A autora se opõe à visão cognitivista clássica, na qual a natureza dos conceitos pode ser representada simplesmente por definições analíticas fechadas que não admitem a função participativa e de inovação do indivíduo. De acordo com a autora, a função básica do conceito não é identificar ou representar as coisas. Os conceitos não são representações do mundo na mente do indivíduo, mas parte do conjunto mente-mundo. Eles nunca ocorrem de forma isolada, mas apenas em situações específicas e concretas. Reduzir conceito à definição é coloca-lo como estático e independente do sujeito.

No âmbito dessa concepção que estabelece o indivíduo como protagonista na construção do conhecimento matemático, a partir de sua relação com o mundo, a Matemática pode ser vista sob um novo paradigma. Conforme destacado por Davis e Hersh (2013), a Matemática trabalha com os significados humanos e é inteligível apenas no contexto de uma cultura. Segundo os autores, mais do que escolhermos entre um formalismo refutado ou um platonismo que postula uma terra mítica, é razoável propor uma tarefa diferente para a filosofia matemática:

> [...] essa tarefa não é a procura de verdade indubitável, mas sim encontrar uma descrição do conhecimento matemático como ele é na realidade — falível, corrigível, tentativo e sujeito a evolução, como todos os outros tipos de conhecimento humano. Em vez de continuarmos a procurar em vão os fundamentos, tentamos ver o que é a matemática na realidade e descrevê-la como parte do conhecimento humano em geral. (DAVIS, HERSH, 2013, p. 374)

Dessa maneira, a partir da diversidade da experiência matemática apresentada em sua obra, Davis e Hersh (2013) afirmam que podemos conceber a Matemática como uma coisa só, na qual as visões platonista, formalista e construtivista correspondem a uma maneira específica de observá-la sob uma ótica particular. Uma vez que as diferentes correntes filosóficas representam diferentes imagens da mesma coisa (Matemática), todas essas concepções são compatíveis. A sua aparente incompatibilidade deve-se ao fato de as encararmos com um preconceito inapropriado.

Nesse sentido, as inquietações que motivaram o desenvolvimento desta pesquisa seguiram a partir da assunção de que o conhecimento matemático não se resume somente à concepção formalista. Em nosso entendimento, a valorização do formalismo matemático privilegia apenas um aspecto da natureza da Matemática e não a diversidade de sua experiência, conforme descrito por Davis e Hersh (2013). A Matemática não representa apenas uma ciência que se constrói a partir da demonstração de teoremas e da reprodução de uma argumentação lógica e formal. Fazer matemática envolve reflexão sobre os significados dos procedimentos adotados, engajamento em situações e contextos diversos e, sobretudo, troca de experiências com o mundo em sua volta.

Portanto, nesta pesquisa, concebemos que a atividade matemática se desenvolve a partir da dimensão participativa e transformadora dos sujeitos envolvidos, estando inserida em um contexto de interações sociais e culturais que dialogam com a formação de suas percepções e concepções sobre a natureza da Matemática. Esse processo não ocorre de maneira única e imutável, assim como a própria Matemática não se constitui dessa forma. Por essa razão, defendemos que a Matemática deve ser apresentada de maneira que sua diversidade seja valorizada, sem privilegiar uma ótica particular de observá-la ou uma única corrente filosófica, permitindo ao indivíduo uma visão ampla sobre sua natureza.

1.2 A Concepção Formalista e o Ensino de Matemática

Na seção anterior, baseado em Davis e Hersh (2013), descrevemos três correntes filosóficas (platonismo, construtivismo e formalismo) que descrevem maneiras distintas de conceber a natureza da Matemática. Nesta pesquisa, daremos maior destaque à concepção formalista na intenção de observar sua relação com o ensino de Matemática e com a formação de futuros professores de Matemática. Dessa maneira, examinaremos, a seguir, como as características dessa concepção nortearam o olhar de professores sobre o ensino de Matemática em diversos níveis.

Verificamos, anteriormente, que a concepção formalista considera a Matemática uma invenção humana, construída exclusivamente a partir de axiomas, teoremas e demonstrações.

Nessa perspectiva, destacam-se a formalização de conceitos e a utilização de uma argumentação rigorosa, de acordo com as regras preconizadas pelo formalismo matemático. No âmbito dessa corrente, a noção de rigor representa um aspecto importante e valorizado, porém, carrega consigo um elevado grau de subjetividade em sua percepção.

Para iluminar o entendimento sobre a noção de rigor, iremos recorrer ao significado do termo no dicionário. Segundo a definição do dicionário, alguns dos significados que a palavra rigor adquire são:

1. Resistência à tensão; rigidez, rijeza, dureza;
2. Severidade extrema; inflexibilidade;
3. Precisão, exatidão; clareza
4. Regra de procedimentos; preceito.

O significado de rigor no dicionário se aproxima da interpretação que estamos habituados a nos deparar no contexto da Matemática. Nesse cenário, rigor é frequentemente associado à rigidez, precisão, diante de uma regra de procedimento que raramente pode ser flexibilizada.

Aproveitando essa associação com a Língua Portuguesa, citamos Bicudo (1992) que relaciona o conceito de rigor na Matemática às duas dimensões que distinguem rigor na linguagem. Segundo o autor:

> Em nível de linguagem, devemos distinguir o RIGOR SINTÁTICO do RIGOR SEMÂNTICO. Ser rigoroso sintaticamente significa proceder de acordo com os cânones gramaticais, seguir inflexivelmente o que preconiza a gramática. Ser rigoroso semanticamente significa estar de acordo com a "realidade", o que quer que isso possa querer dizer (por exemplo: "ser rigoroso com os fatos", isto é, narrar os fatos "como eles aconteceram").
>
> Na Matemática, igualmente, o conceito de rigor tem essa dupla dimensão, sintática e semântica.
>
> [...] Descontando o que deve ser descontado, o que aqui nos interessa, pois é o que tem em mente os matemáticos, quando tratam do rigor em sua ciência, é o lado sintático do rigor. Como no âmbito de qualquer linguagem, desse ponto de vista, ser rigoroso em Matemática significa proceder de acordo com as regras de sua gramática, a LÓGICA. (BICUDO, 1992, p. 2-3)

De acordo com o autor, ser rigoroso na Matemática é seguir as regras da argumentação lógica. É importante deixarmos claro que, nesta pesquisa, não temos a intenção de exercer qualquer juízo de valor sobre o rigor ou de questionar sua importância na Matemática. A problemática colocada em questão é reduzir a Matemática somente ao rigor, sobretudo no sentido sintático, e desconsiderar a diversidade de sua experiência, conforme destacado por Davis e Hersh (2013) na seção anterior. O rigor exerce um papel fundamental na construção do conhecimento matemático e nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. O que queremos enfatizar, como afirma Bicudo (1992), é que a função do rigor não é apenas sancionar a intuição, mas também possibilitar a sua construção.

Tampouco, iremos recorrer a definições epistemológicas sobre rigor, ou até mesmo sobre intuição. Apesar de apresentarmos o significado de rigor no dicionário ou o entendimento de Bicudo (1992) sobre essa noção, temos clareza da dificuldade de enquadrar determinadas abordagens como intuitivas ou rigorosas, uma vez que esses aspectos podem estar imbricados e serem individuais. No entendimento desta pesquisa, o enquadramento de algo como intuitivo ou rigoroso é relativo e depende das experiências do sujeito. O que é intuitivo ou rigoroso para um matemático profissional pode não ser considerado da mesma maneira por um individuo que não é matemático. Por esse motivo, esta investigação não se propõe a classificar um argumento como intuitivo ou rigoroso, mas apenas observar elementos de cada um desses aspectos no discurso dos sujeitos da pesquisa, identificando suas percepções sobre esses conceitos.

A percepção sobre o rigor no âmbito da concepção formalista, por exemplo, esteve diretamente relacionada ao olhar de professores sobre o ensino de Matemática. Para tentarmos compreender melhor essa relação, iremos observar, brevemente, a história do ensino de Matemática no Brasil e algumas de suas tendências. Segundo Fiorentini (1995), até 1950, o ensino no Brasil seguia a *tendência formalista clássica*, que se caracterizava pela ênfase nas ideias e formas da matemática clássica, sobretudo no modelo euclidiano, em uma concepção platônica da Matemática. O modelo euclidiano era definido a partir da sistematização lógica do conhecimento matemático fundamentado em elementos primitivos, como definições, axiomas e postulados, através dos quais teoremas e corolários são deduzidos. Segundo o autor, o ensino nessa tendência pedagógica está centrado no professor que assume um papel de transmissor do conteúdo, onde a aprendizagem do aluno é passiva e baseada na memorização e na reprodução precisa dos raciocínios e procedimentos expostos pelos livros ou professores. Essa perspectiva de transmissão e aquisição do conhecimento tornaria essa tendência compatível com a concepção platônica.

Fiorentini (1995) destaca, porém, que após 1950, o ensino de Matemática no Brasil passou por diversas mudanças curriculares em virtude do engajamento de boa parte dos matemáticos e professores no movimento internacional de reformulação e modernização do currículo escolar conhecido como *Movimento da Matemática Moderna*. Esse movimento surgiu com o objetivo de reparar a defasagem entre o progresso científico-tecnológico da nova sociedade industrial e o currículo escolar vigente, constatada após a Segunda Guerra Mundial.

Essa tendência de ensino, classificada pelo autor como *tendência formalista moderna*, promoveu uma ênfase no formalismo matemático fundamentado a partir das estruturas algébricas e da linguagem formal da Matemática, enfatizando o rigor no uso dessa linguagem. A matemática era concebida como a linguagem universal que representava o meio para acessar o pensamento científico. Segundo Fiorentini (1995), os papéis de professor e aluno não sofreram grandes modificações nessa tendência. Porém, os conteúdos passaram a ser vistos como regras que deviam ser memorizadas de maneira que os alunos se tornassem habilidosos na utilização de algoritmos e fórmulas. A proposta de ensino apresentada não visava à formação do cidadão, mas a formação do especialista matemático.

Podemos articular essa visão sobre o ensino de Matemática com a dimensão sintática na produção de provas, descrita por Weber e Alcock (2004) na seção anterior, que destaca a manipulação de símbolos e definições em um conjunto de implicações lógicas de uma demonstração. Nesse contexto, fica evidente a valorização da apresentação lógico-formal em detrimento dos significados, característica marcante da concepção formalista descrita no início deste capítulo. Entendemos, neste trabalho, que o estabelecimento de uma proposta de ensino que vise apenas o desenvolvimento de habilidades procedimentais específicas, conforme descrito por Fiorentini (1995) na tendência formalista moderna, não permeia a diversidade do conhecimento matemático demandado na formação básica de um cidadão na escola ou, ainda, na formação de um professor de Matemática na Licenciatura.

No âmbito da formação do professor de Matemática, Fiorentini (1995) destaca ainda a influência do grupo francês "Bourbaki" sobre os professores universitários, fazendo com que essa concepção formalista da Matemática fosse difundida nos cursos de Licenciatura. Davis e Hersh (2013) também citam a influência do grupo francês e acrescentam que o estilo formalista penetrou gradualmente em todos os níveis de ensino de Matemática, desde a Licenciatura até os jardins de infância. Os autores questionam a influência do Movimento da Matemática Moderna no ensino e criticam a exaltação do modelo definição-teorema-demonstração nas aulas de Matemática nas universidades.

> Com o aparecimento da “nova matemática” na década de 50, a demonstração alastrou a outros tópicos da matemática do liceu, como a álgebra, e temas como a teoria dos conjuntos foram deliberadamente introduzidos para servirem de instrumentos aos métodos e demonstrações axiomáticas. Na universidade, uma aula normal de matemática avançada, especialmente quando lecionada por um professor

> com interesses "puros", era totalmente composta por uma, concatenação solene e inalterável de definição, teorema e demonstração, definição, teorema, demonstração. Por quê? (DAVIS, HERSH, 2013, p. 149)

Davis e Hersh (2013) ressaltam que o modelo de apresentação definição-teorema-demonstração tornou-se quase o único paradigma de exposição no ensino superior da matemática e que esse padrão não representa a maneira como a matemática é criada, propagada ou mesmo compreendida. Segundo eles, a exposição nos livros didáticos se coloca, muitas vezes, de "trás para frente", desconsiderando o processo de descoberta. Weber (2004) acrescenta que, nos cursos de matemática avançada que seguem esse modelo, o conteúdo é apresentado em uma sequência estritamente lógica na qual sua natureza lógica é dada previamente à natureza intuitiva. Assim, o objetivo principal do curso acaba sendo tornar os alunos capazes de produzir demonstrações rigorosas sobre os conceitos matemáticos dados.

Nesse sentido, Davis e Hersh (2013) afirmam que, tanto em livros como nas aulas, as demonstrações matemáticas são vistas muitas vezes como autoritárias. Na verdade, o que verificamos, de fato, em sala de aula é uma contradição entre a metodologia adotada pelos professores e os objetivos do ensino de Matemática, onde:

> Idealmente, o ensino da matemática diz: "Venham, vamos raciocinar em conjunto." Porém, o que sai da boca do professor é muitas vezes: "Ouçam, digo-lhes que é assim". (DAVIS, HERSH, 2013, p. 266)

Portanto, podemos concluir que essa prática impositiva de ensino desconsidera a Matemática como atividade humana, cujo conhecimento é produzido pelo sujeito, e transmite aos alunos uma visão enganosa sobre sua natureza, uma vez que a apresentação lógico-formal é apenas um dos aspectos da Matemática e não sua essência. Essa metodologia de ensino de Matemática vai de encontro à premissa adotada nesta pesquisa que concebe a atividade matemática como uma prática social e cultural que não pode ser dissociada das relações entre a mente do indivíduo e o mundo, conforme a definição de conceito destacada por Rosch (1999). Neste caso, entendemos que o professor deve preocupar-se em propor alternativas que permitam o aluno experimentar os conceitos matemáticos, em um cenário no qual o docente exerce uma função muito mais próxima de mediador do conhecimento, do que propriamente de transmissor de conteúdo. Desse modo, acreditamos que qualquer metodologia de ensino proposta não deve engessar a participação do aluno, mas sim potencializar seu protagonismo na construção e transformação de seu conhecimento.

Nesse sentido, Reis (2001) destaca que a atuação de formadores na universidade tem papel determinante na formação de professores e, dado seus status na "hierarquia docente", exerce grande influência nas concepções dos licenciados, fazendo com que tendam a reproduzir a perspectiva técnico-formal em que são formados. Segundo o autor:

> Os professores universitários, formados sob uma perspectiva técnico-formal, enfatizam / priorizam o conhecimento específico do conteúdo em sua ação enquanto formadores de professores e estes, os últimos na "hierarquia docente" encabeçada por seus formadores, tendem a reproduzir em sala de aula no ensino fundamental e médio uma adaptação do "show" de conhecimentos específicos dado por seus formadores, mestres e doutores de inquestionável conhecimento matemático. (REIS, 2001, p. 83)

Considerando a influência que os professores da universidade podem exercer sobre as percepções dos licenciandos e futuros professores, a valorização da perspectiva formal na concepção formalista contribui para a constituição de uma cultura matemática que enaltece os saberes acadêmicos e distancia a formação do professor da prática escolar. Esse distanciamento faz com que o licenciando tenha dificuldade em articular sua formação com as questões que permeiam a prática docente. Moreira, Cury e Vianna (2005) alertam que a tarefa de articular os conhecimentos da Matemática Acadêmica com a prática docente na escola acaba derivando do esforço individual do licenciado ao iniciar a sua atuação enquanto professor.

Moreira, Cury e Vianna (2005) propõem, ainda, que uma alternativa para tentar solucionar essa problemática seria a reorganização do processo de formação matemática dentro da Licenciatura de maneira que ela se realize em conexão efetiva com as questões que se colocam na prática docente. Segundo os autores, não se trata de uma concepção que implique em "baixar o nível" da formação matemática na Licenciatura, como frequentemente é alegado, mas:

> Trata-se exatamente de superar essa visão dicotomizada das relações entre formação matemática "sólida" e as demandas de conhecimento da prática docente escolar. Trata-se de trabalhar a formação matemática do futuro professor, no sentido de promover a elaboração de uma síntese que seja, ao mesmo tempo, provisória — pois será seguramente reelaborada a partir da experiência — e complementar ao processo de formação que se desenvolve na prática, para que a reelaboração não tenda a negar essa síntese e sim a estendê-la e aprofundá-la. (MOREIRA, CURY, VIANNA, 2005, p. 30)

Esse ponto de vista reforça a conclusão de Reis (2001) que reconhece a necessidade de se adequar os manuais didáticos de Análise aos cursos de Licenciatura em Matemática de maneira que estejam voltados à formação matemática do professor. O autor também destaca que essa adequação não deve ser entendida como afrouxar, facilitar ou atenuar o curso de Análise, mas sim proporcionar uma abordagem igualmente profunda, sob outra concepção de conhecimento, que permita uma exploração múltipla e flexível dos conceitos e ideias matemáticas.

Essa visão vai ao encontro da concepção sobre o ensino de Matemática na Licenciatura adotada nesta pesquisa. Neste trabalho, não propomos uma reflexão sobre a profundidade do conhecimento matemático na formação docente, uma vez que o conhecimento do professor da Educação Básica sobre Matemática é fundamental em sua atuação. Entretanto, entendemos que a formação do professor de Matemática deve enfatizar como os conceitos matemáticos ensinados na graduação se articulam com a futura prática, possibilitando ao professor estabelecer relações entre os saberes matemáticos para o ensino e os pressupostos mais amplos da Matemática como ciência.

Nesse sentido, repensar o modelo de apresentação dos conteúdos no ensino superior de Matemática não representa seu enfraquecimento. Questionar a concepção formalista, que valoriza o rigor e não propõe uma reflexão sobre os significados dos conceitos, não significa enfraquecer o rigor matemático ou facilitar o conteúdo apresentado no currículo da Licenciatura. Ao contrário, esta pesquisa parte do pressuposto de que a reflexão conceitual problematizada sobre os fundamentos da matemática formal representa uma maneira de colocar em evidência seu conteúdo e de valorizar o próprio rigor que ela demanda. Entendemos, portanto, que o ensino de Matemática na formação docente deve permitir ao licenciando observar o conteúdo matemático sob outro ponto de vista, possibilitando o futuro professor ampliar o horizonte sobre sua prática e sobre a natureza da Matemática.

1.3 Apresentando a Problemática da Pesquisa

Com base na literatura de Educação Matemática, as seções anteriores denunciaram tensões presentes na formação inicial de professores. Verificamos a existência de diferentes maneiras de conceber a Matemática e que essas concepções estão diretamente relacionadas ao modo como o saber matemático é desenvolvido e compreendido pelo indivíduo. As diferentes visões sobre a natureza da Matemática implicam diretamente na formação de uma cultura matemática que caracteriza sua comunidade. Como estamos nos referindo a uma determinada prática matemática em larga escala, é natural que traços dessa cultura matemática sejam também verificados na formação inicial do professor.

Na Licenciatura, além da exposição do conteúdo que compõem o currículo, é apresentada também ao aluno uma visão sobre a natureza da Matemática. Nesse sentido, a formação do licenciando não é constituída apenas do conhecimento matemático exibido na graduação, mas também está inserida em uma perspectiva de construção de percepções e concepções sobre a Matemática. Em consequência disso, podemos nos questionar em quais dimensões a cultura matemática observada na Licenciatura está interferindo nos saberes docentes construídos na formação do professor.

Conforme retratado na literatura apresentada nas seções anteriores, é possível inferir que a maneira como a Matemática é apresentada ao licenciando na graduação pode exercer influência sobre suas percepções. Em resumo, podemos destacar que a problemática apresentada até aqui levantou três tensões principais na formação do professor: (1) as diferentes concepções sobre a natureza da Matemática, (2) a concepção formalista e o ensino de Matemática, e (3) a cultura matemática e a formação docente.

- *As diferentes concepções sobre a natureza da Matemática*

Considerar a Matemática a partir de uma única concepção filosófica, como a formalista, pode ignorar que sua atividade é construída pelo sujeito e desenvolvida a partir de sua relação com o mundo. A perspectiva cartesiana, sob a influência platônica, coloca o conhecimento como algo a ser adquirido de maneira gradual, indo do mais simples até o mais complexo. Já a concepção formalista, concebe a Matemática como construção estabelecida a partir de definições, teoremas e demonstrações, desconsiderando seus significados. A partir dessas duas visões, fazemos a seguinte reflexão: será que a Matemática deve ser vista como um conjunto de conhecimentos a serem adquiridos e acumulados, onde o pensamento matemático seria desenvolvido de maneira rigorosa partindo das definições até chegar aos teoremas? Essa seria a única maneira de se fazer matemática?

Processar sequências lógicas não garante a compreensão do conhecimento matemático (ROSCH, 1999) e pode colocar em dúvida se esse conhecimento está sendo construído ou simplesmente reproduzido. Isso nos leva a questionar se essa maneira de fazer matemática não está deixando de fora ideias importantes sobre os conceitos estudados para privilegiar simplesmente seu jogo lógico. O processo de construção do saber matemático deve desprezar o protagonismo do sujeito na produção de seu conhecimento e sua interação com o mundo?

- *A concepção formalista e o ensino de Matemática*

De maneira geral, o modelo de apresentação das disciplinas de conteúdo matemático na graduação segue uma concepção formalista que privilegia, fundamentalmente, a estrutura definição-teorema-demonstração. Usualmente, esse modelo apresenta o conhecimento matemático de forma impositiva ao licenciando, desconsiderando a maneira como a Matemática é constituída ou mesmo compreendida. Essa recorrente forma de apresentação se opõe aos objetivos do ensino de Matemática, ao não reconhecer o sujeito como protagonista na produção de seu conhecimento e ao ignorar a atividade matemática como uma prática social.

A ausência de reflexão conceitual problematizada sobre os significados da Matemática, característica da concepção formalista, representa um obstáculo aos processos de ensino e aprendizagem. Além disso, se considerarmos que o objetivo da Licenciatura é formar futuros professores, a valorização do rigor lógico em detrimento da compreensão dos conceitos na formação docente torna-se um aspecto ainda mais relevante nessa discussão. Isso nos leva a refletirmos sobre as implicações da concepção formalista na formação de futuros professores e de alunos do ensino básico. Que professor pretendemos formar a partir da concepção formalista no ensino de Matemática? Que aluno queremos formar na Educação Básica mediante esse modelo de ensino? No ensino de Matemática, devemos desconsiderar as práticas sociais e culturais nas quais a atividade matemática está inserida?

- *A cultura matemática e a formação docente*

Vimos que a concepção formalista não deve ser vista como a única maneira de conceber a Matemática. Porém, podemos identificar que a valorização do rigor e do formalismo faz parte de uma cultura matemática que está inserida também na graduação. Considerando que a Licenciatura em Matemática, além de formar o professor a partir da qualificação de seu conhecimento sobre o conteúdo, também contribui para a construção de percepções e concepções do licenciando sobre a natureza da Matemática, podemos nos questionar sobre quais implicações essa cultura matemática pode provocar na formação e futura atuação docente.

O papel das disciplinas de conteúdo matemático não parece estar claro para alunos e professores formadores. Em geral, a Matemática na Licenciatura é concebida como um meio de o licenciando aprofundar seu conhecimento matemático sem que, de fato, se reflita sobre como isso poderia ajudá-lo em sua futura atuação docente. Na falta de vínculos estabelecidos com sua futura prática, o licenciando vive o dilema de fazer ele mesmo essa articulação ou desconsiderar a importância dessas disciplinas em sua formação.

Dessa maneira, questionamos qual seria a função das disciplinas de conteúdo matemático na formação docente: propiciar a formação de uma base sólida, a partir da matemática formal, que dê segurança ao professor em sua atuação, ou percorrer as diversas matemáticas necessárias à atuação docente na escola, no intuito de ampliar seus horizontes sobre conceitos da Educação Básica? Nessa direção, uma mudança de paradigma no ensino dessas disciplinas na Licenciatura não representaria o enfraquecimento do conteúdo matemático na formação do professor. Ao contrário, seu objetivo seria evidenciar como o conteúdo matemático se articula com a futura prática e, sobretudo, com os pressupostos mais amplos da Matemática como ciência.

Todas as reflexões decorrentes das tensões que foram denunciadas pela literatura e explicitadas neste trabalho nos levaram a refletir sobre a formação inicial de professores de Matemática, especificamente a partir da cultura matemática mobilizada por licenciandos em um curso de Análise Real da Licenciatura. Em nosso entendimento, essas tensões estão amalgamadas e conduzem à problemática principal dessa pesquisa: *Que professor está sendo formado mediante a cultura matemática observada atualmente na Licenciatura?*

A problemática exposta neste capítulo nos leva a questionar se os cursos de Licenciatura estão privilegiando uma forma de fazer matemática, diante de tantas outras, que até então pode não estar atingindo determinados objetivos para aprendizagem dos conteúdos propostos, muito menos para o desenvolvimento dos saberes docentes e de suas relações com a prática.

1.4 Objetivos e Questões de Pesquisa

Diante da problemática apresentada na seção anterior, explicitaremos as questões de pesquisa que motivaram este trabalho. Entendemos que as reflexões que foram apresentadas anteriormente se estendem a um modelo no qual uma parcela das disciplinas de conteúdo matemático da Licenciatura estão inseridas. Entretanto, motivado por minha experiência pessoal enquanto licenciando, a disciplina de Análise foi escolhida como exemplo para a discussão por considerar que ela reúne grande parte das características denunciadas na problemática: a recorrente apresentação de seu conteúdo a partir do modelo definição-teorema-demonstração; a valorização do rigor e do formalismo na construção do saber matemático; a dificuldade de articulação entre seu conteúdo e o ensino básico; entre outras.

Além disso, é importante situar essa escolha diante de minhas inquietações enquanto pesquisador em formação e perante a trajetória que me levou à questão de pesquisa. Nesse sentido, é necessário observar meu percurso desde a formação inicial, passando pela minha formação continuada no Mestrado, até minha atuação enquanto professor da Educação Básica.

Minha graduação em Licenciatura e Bacharelado em Matemática se desenvolveu a partir de uma abordagem extremamente formal, o que me fez valorizar e enaltecer o rigor e o formalismo matemático. Mesmo inseridas em contextos diferentes de formação, as disciplinas de conteúdo matemático da Licenciatura e do Bacharelado seguiam o mesmo modelo baseado em definição-teorema-demonstração.

Nesse contexto, durante a minha formação inicial, o curso de Análise Real centralizava as discussões sobre a importância de determinadas disciplinas na formação do professor, motivadas principalmente: (1) pelo grande temor que rodeava a disciplina, caracterizada pelo uso do rigor na formalização dos conceitos; e, também, (2) devido à dificuldade em articular seu conteúdo com a futura prática docente. Diversos colegas na graduação não consideravam a disciplina relevante em sua formação. Eu, particularmente, a considerava extremamente importante, porém, meus argumentos seguiam o lugar comum que destacava a necessidade de o professor saber formalizar os conceitos matemáticos e aprender o conteúdo com “profundidade” para ter segurança em sua atuação docente.

Ao cursar a disciplina de Análise no Mestrado, ministrada pelo orientador desta pesquisa, me deparei com outra abordagem completamente diferente do tratamento vivenciado na graduação. Isso me levava a promover articulações entre o conteúdo da disciplina e a Educação Básica que nunca havia imaginado anteriormente. Hoje, percebo que “profundidade” – para a prática docente – está mais relacionada à compreensão (muitas vezes intuitiva) sobre o cerne dos conceitos em questão do que, necessariamente, à exaltação do rigor.

A partir dessa experiência e através do contato com a literatura de pesquisa em Educação Matemática, passei a me questionar como minha formação e a cultura matemática constituída na graduação teriam influenciado minhas concepções sobre a natureza da

Matemática e, até mesmo, minha atuação enquanto professor. Por esses motivos, a escolha pela disciplina de Análise como campo de pesquisa permitiria abordar a problemática da investigação a partir da observação das impressões do licenciando sobre a matemática formal, no contexto de sua formação, e verificar como ele vincula essas impressões com a expectativa sobre sua futura prática.

Inserida em um contexto mais amplo, na dimensão das influências que a cultura matemática mobilizada na formação docente pode exercer sobre as percepções do futuro professor, uma importante questão sintetizava a discussão: *Quais aspectos emergem do discurso de licenciandos sobre suas percepções relacionadas à natureza da Matemática – especificamente no que tange às práticas sociais e culturais observadas no contexto de uma disciplina de Análise Real da Licenciatura em Matemática – e de que maneira tais aspectos se articulam com a construção de saberes matemáticos para o ensino?*

Esclarecemos que este trabalho se propõe a analisar a questão de pesquisa enunciada, exclusivamente, da perspectiva do discurso dos participantes considerados, especificamente, durante e após a disciplina de Análise Real cursada. Dessa maneira, esta investigação não objetiva realizar inferências ou generalizações sobre o curso de Análise Real na formação do professor, mas apenas propor reflexões sobre as percepções dos participantes manifestadas a partir da cultura matemática identificada durante suas respectivas formações. Portanto, o objeto de análise desta pesquisa não é o curso de Análise Real, mas os sujeitos e suas impressões sobre a natureza da Matemática, do ponto de vista das práticas sociais e culturais observadas, especificamente, no contexto de realização da disciplina de Análise em questão.

Ao apresentar esta questão, destacamos que temos ciência das fronteiras teóricas, apontadas pela literatura, entre o conceito de percepção e outros termos como, por exemplo, concepção. Neste trabalho, concebemos como percepções os aspectos que podem ser apreendidos a partir do discurso dos participantes nos encontros realizados durante a investigação, entendendo que essas percepções apresentam uma forma dinâmica que pode ser alterada com mais facilidade. Ao contrário, consideramos que as concepções são mais entranhadas no sujeito e notadas em sua ação, sendo mais resistentes a mudanças.

Um dos pontos de vista filosóficos apresentado por Melgarejo (1994) descreve a percepção como um processo parcial e suscetível a mudanças, no qual as percepções não representariam um conjunto de eventos e experiências passadas, mas uma constante construção de significados no espaço e no tempo. Sob essa ótica, a autora destaca que a percepção é relativa à situação histórico-social, uma vez que está situada no espaço e no tempo e depende de circunstâncias variáveis e da aquisição de novas experiências, que incorporam outros elementos às percepções anteriores, modificando-as e adequando-as às condições encontradas.

No tocante à perspectiva cultural adotada nesta pesquisa, entendemos que "no processo da percepção se coloca em jogo referências ideológicas e culturais que reproduzem e explicam a realidade e que são aplicadas às distintas experiências cotidianas para ordená-las e transformá-las" (MELGAREJO, 1994, p.49). Portanto, conforme destacado pelo autor, consideramos que as percepções são modeladas por circunstâncias sociais, pela cultura na qual o indivíduo está situado e pelo grupo no qual ele está inserido. Por esse motivo, consideramos que as percepções dos sujeitos desta pesquisa sobre a Matemática se articulam com a cultura matemática mobilizada no contexto de realização da disciplina de Análise em questão.

Com esse olhar, esta pesquisa tem como objetivos *(1) identificar, a partir do discurso dos participantes da pesquisa, aspectos da cultura matemática mobilizada por licenciandos que cursavam a disciplina de Análise Real; e (2) observar possíveis relações entre essa cultura e a construção dos saberes docentes do futuro professor de Matemática.*

Por conseguinte, norteados pela problemática e pelas questões de pesquisa apresentadas, aprofundaremos a leitura sobre saberes docentes e cultura matemática na formação do professor que será abordada no próximo capítulo. Apresentaremos, a seguir, trabalhos que irão compor a fundamentação teórica da pesquisa e servirão como base para a análise dos dados coletados.

CAPÍTULO II – Fundamentação Teórica

Neste capítulo, iremos situar o leitor na literatura de pesquisa sobre saberes docentes e formação de professores, exibindo resultados que irão fundamentar a análise de dados desta investigação. Entendemos que compreender melhor as especificidades dos saberes matemático para o ensino e da formação inicial do professor de Matemática nos dará ferramentas que ajudem a interpretar os resultados desta pesquisa.

O capítulo é composto por quatro seções: a primeira apresenta as pesquisas de Shulman (1986, 1987) e Ball, Thames e Phelps (2008) sobre os saberes docentes de conteúdo para o ensino; a segunda expõe a famosa obra de Felix Klein (2004): *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*, que denuncia a *descontinuidade* entre a escola e a universidade; a terceira seção retrata uma perspectiva dinâmica dos saberes matemáticos para o ensino, apresentada nos trabalhos de Davis e Renert, inseridas no contexto das práticas de mobilização de cultura matemática destacadas por Miguel e Vilela (2008); e a última seção expõe os trabalhos de Moreira (2012), Moreira e Ferreira (2013) e Fiorentini e Oliveira (2013) sobre a formação inicial de professores e o lugar da Matemática na Licenciatura.

2.1 Saberes Docentes de Conteúdo para o Ensino

As pesquisas de Shulman (1986, 1987) e Ball, Thames e Phelps (2008) possibilitaram um novo olhar sobre a formação de professores ao discutir os saberes docentes necessários ao ensino. As noções de *saber pedagógico de conteúdo* (pedagogical content knowledge), apresentado por Shulman (1986), e *conhecimento matemático para o ensino* (mathematical knowledge for teaching), verificado no trabalho de Ball e seus colaboradores (2008), evidenciaram a necessidade de observar o conhecimento do professor a partir de suas especificidades e sob uma ótica voltada à prática docente. Os trabalhos de Shulman e Ball não questionam a importância do conhecimento sobre o conteúdo a ser ensinado, mas destacam a existência de um saber específico do professor que se constitui a partir de relações entre conteúdo e ensino desenvolvidas ao longo de sua prática profissional.

Ao publicar o artigo *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching* em 1986, Lee Shulman define um domínio especial do conhecimento do professor, o qual denomina *saber pedagógico de conteúdo*. Esse saber transcende o conhecimento sobre o conteúdo *per se*, abrangendo a dimensão de um saber *sobre* o conteúdo *para* o ensino, percebido como um conhecimento que congrega conteúdo e pedagogia de forma indissociável e articulada (RANGEL, 2015). A principal contribuição do trabalho de Shulman foi reformular o estudo sobre o conhecimento do professor, chamando a atenção para o papel do conteúdo no ensino. Seu trabalho situa os saberes docentes em uma dimensão que extrapola a apreciação pura e simples do conhecimento sobre o conteúdo ou a pedagogia de aspectos gerais do ensino, como a gestão de sala de aula (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Esse aspecto destacado no trabalho de Shulman (1986) dialoga com a visão adotada nesta pesquisa sobre o ensino de Matemática na Licenciatura, explicitada no capítulo anterior, ao destacar a necessidade de desenvolver um olhar sobre o conteúdo com vistas ao ensino. Embora a pesquisa de Shulman (1986) não considere os saberes de conteúdo de um campo específico, as ideias do autor se articulam, especificamente em Matemática, ao reconhecimento de que somente o conteúdo matemático *per se* não é suficiente para compor o conhecimento do professor de Matemática.

Restringindo ainda mais essa percepção sob o viés particular de nossa investigação, consideramos que a simples apresentação da matemática formal ao licenciando não contempla a diversidade necessária ao conhecimento do professor de Matemática para o ensino. A formação docente em Matemática não deve contemplar a reprodução pura e simples do conteúdo acadêmico *per se*, em sua perspectiva formal, sem propor reflexões sobre como aquele conteúdo se articula com os saberes docentes.

Com o objetivo de esclarecer melhor o que caracteriza o conhecimento do professor para o ensino, Shulman (1986) desenvolve sua pesquisa buscando responder à frase provocativa que inicia seu artigo ("Quem sabe faz, quem não sabe ensina"), que retrata a percepção pejorativa dos saberes docentes. Segundo Shulman, a ênfase dada aos conteúdos pedagógicos, em detrimento do conteúdo a ser ensinado, permeava as pesquisas do meio acadêmico na época. O autor define a desconsideração do conteúdo a ser ensinado, entre os paradigmas de pesquisa em ensino, como *paradigma perdido*.

> O paradigma perdido se refere a um ponto cego que diz respeito ao conteúdo que agora caracteriza a maioria das pesquisas em ensino e, consequentemente, a maioria dos nossos programas estaduais de avaliação e certificação do professor.
> Lendo a literatura de pesquisa em ensino, fica evidente a ausência de uma questão central. A ênfase está em como os professores gerenciam suas salas de aula, organizam atividades, alocam horas e turnos, estruturam tarefas, elogiam ou censuram, formulam o nível de suas questões, planejam aulas e avaliam o entendimento geral do aluno.

> O que deixamos de lado são questões acerca do *conteúdo* ensinado em sala, as perguntas feitas e as explicações dadas.[4] (SHULMAN, 1986, p.7-8, itálico como no original, tradução nossa)

Para elucidar o desenvolvimento do conhecimento do professor, Shulman (1986) propõe uma distinção entre três categorias de saber de conteúdo: *saber de conteúdo* (content knowledge), *saber pedagógico de conteúdo* (pedagogical content knowledge) e *saber curricular* (curricular knowledge).

De acordo com a definição do autor, o *saber de conteúdo* se refere à quantidade e organização do conhecimento *per se* na mente do professor. Esse conhecimento do conteúdo a ser ensinado não se resume à detenção de conceitos e fatos relativos ao conteúdo, mas está também relacionado com a compreensão de suas estruturas e regras e dos processos de sua produção, representação e validação epistemológica (RANGEL, 2015). Para Shulman (1986), o saber do conteúdo a ser ensinado atinge dimensões maiores do que a simples compreensão de como o conteúdo se constitui, uma vez que:

> Professores devem não apenas ser capazes de definir para os alunos as regras aceitas em uma área. Eles devem também ser capazes de explicar porque uma proposição em particular é garantida, porque é útil sabê-la, e como isso se relaciona com outras proposições, dentro e fora da disciplina, na teoria e na prática.
> [...] O professor precisa não apenas compreender *como* algo se dá, o professor deve ir além compreendendo *por que* isso se dá, com base em que fundamentos pode ser afirmado e sob que circunstâncias nossas crenças sobre o tema podem ser enfraquecidas ou mesmo negadas. Além disso, espera-se que o professor entenda por que determinado tópico é particularmente importante para disciplina, enquanto outro pode ser um tanto periférico.[5] (SHULMAN, 1986, p.9, itálico como no original, tradução nossa)

Observamos, neste trecho, que o autor reconhece as especificidades do conhecimento do professor sobre o conteúdo que ensina. Sob essa ótica, Shulman (1986) define o *saber*

---

[4] No original: “The missing paradigm refers to a blind spot with respect to content that now characterizes most research on teaching and, as a consequence, most of our state-level programs of teacher evaluation and teacher certification.
In reading the literature of research on teaching, it is clear that central questions are unasked. The emphasis is on how teachers manage their classrooms, organize activities, allocate time and turns, structure assignments, ascribe praise and blame, formulate the levels of their questions, plan lessons, and judge general student understanding.
What we miss are questions about the *content* of the lessons taught, the questions asked, and the explanations offered.” (SHULMAN, 1986, p.7-8, itálico como no original)

[5] No original: “Teachers must not only be capable of defining for students the accepted truths in a domain. They must also be able to explain why a particular proposition is deemed warranted, why it is worth knowing, and how it relates to other propositions, both within the discipline and without, both in theory and in practice.
[…] The teacher need not only understand *that* something is so; the teacher must further understand *why* it is so, on what grounds its warrant can be asserted, and under what circumstances our belief in its justification can be weakened and even denied. Moreover, we expect the teacher to understand why a given topic is particularly central to a discipline whereas another may be somewhat peripheral” (SHULMAN, 1986, p.9, itálico como no original)

pedagógico de conteúdo como um saber que vai além do conhecimento sobre o conteúdo *per se*, atingindo também a dimensão de um saber sobre o conteúdo para o ensino. Isso inclui as representações das ideias, as analogias, ilustrações, exemplos, explicações, demonstrações, isto é, todas as formas de se representar um conteúdo de maneira a torná-lo compreensível aos outros.

> Um segundo tipo de saber de conteúdo é o saber pedagógico, que vai além do conhecimento do conteúdo per se até a dimensão do conhecimento *para o ensino*. Eu ainda falo de saber de conteúdo aqui, mas da forma particular de saber de conteúdo que incorpora os aspectos do conteúdo mais relevantes ao seu ensino.
> Dentro da categoria de saber de pedagógico conteúdo eu incluo, para a maioria dos tópicos ensinados em uma área, as mais úteis formas de representação de tais ideias, as mais fortes analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações – ou seja, as formas de se representar e formular um conteúdo de forma a torná-lo compreensível aos outros.[6] (SHULMAN, 1986, p.9, itálico como no original, tradução nossa)

Segundo o autor, o saber pedagógico de conteúdo inclui também o conhecimento do professor sobre a aprendizagem dos alunos, que abarcam as estratégias docentes que visam reorganizar o entendimento dos estudantes diante de seus pré-conceitos e erros. Nesse sentido, o saber pedagógico de conteúdo representa o "amálgama entre conteúdo e pedagogia" (SHULMAN, 1987, p.8) e coloca o professor como protagonista na construção desse saber.

Para Rangel (2015), o saber pedagógico de conteúdo não pode ser identificado ao saber de pedagogia nem ao saber de conteúdo, mas constitui-se de um do saber *sobre* o conteúdo *para* o ensino. Para ilustrar seu entendimento sobre o saber pedagógico de conteúdo no ensino da Matemática, a autora cita o exemplo da divisão de números naturais.

> Por exemplo, todo professor de matemática deve conhecer a definição formal da operação de divisão envolvendo números naturais, deve saber que o algoritmo usual dessa operação se baseia na estrutura posicional do sistema de numeração decimal e deve ser capaz de efetuar corretamente esse algoritmo, descrevendo detalhadamente e justificando formalmente cada uma das etapas que o compõe. No entanto, para um professor, é necessário, também identificar situações resolvidas por meio da operação de divisão a partir de ideias de repartição e de comparação ou medida; reconhecer a relação intrínseca da divisão com as demais operações básicas; identificar diferentes formas de decomposições e de reagrupamento da representação decimal dos números que permitam diversificar e tornar mais simples a execução do algoritmo usual e compor e justificar outras formas de algoritmos e, sobretudo; *reconhecer a relevância de cada um desses aspectos para a aprendizagem, sendo*

[6] No original: "A second kind of content knowledge is pedagogical knowledge, which goes beyond knowledge of subject matter per se to the dimension of subject matter knowledge *for teaching*. I still speak of content knowledge here, but of the particular form of content knowledge that embodies the aspects of content most germane to its teachability. Within the category of pedagogical content knowledge I include, for the most regularly taught topics in one's subject area, the most useful forms of representation of those ideas, the most powerful analogies, illustrations, examples, explanations, and demonstrations - in a word, the ways of representing and formulating the subject that make it comprehensible to others." (SHULMAN, 1986, p.9, itálico como no original)

> *capaz de articulá-los para estabelecer estratégias de ensino, levando em conta as especificidades de cada contexto de aprendizagem*. (RANGEL, 2015, p.22, itálico como no original)

A última categoria do conhecimento do professor para o ensino, segundo Shulman (1986), é o *saber curricular* que inclui o conjunto de planejamentos formulados para o ensino de um conteúdo, a variedade de materiais didáticos disponíveis e sua adequação ao conteúdo e ao ensino, a familiaridade do professor com os assuntos curriculares estudados por seus alunos. De acordo com Shulman (1986), o currículo e seus saberes associados abarcam as ferramentas de ensino necessárias à apresentação de um conteúdo ou à avaliação da adequação dos resultados dos alunos.

Entretanto, Shulman (1987) destaca que o saber pedagógico de conteúdo é de especial interesse, uma vez que identifica o corpo de conhecimento próprio para o ensino e representa a chave para distinguir a base de conhecimentos para o ensino. De acordo com Rangel (2015), reconhecer a existência de um saber próprio do professor, que envolve o saber de conteúdo *per se* e a pedagogia de forma indissociável, fomenta o desenvolvimento da pesquisa sobre os saberes necessários à prática docente, configurando-se como uma referência importante para a produção científica em educação, em particular na Educação Matemática. A autora acrescenta que o conceito de saber pedagógico de conteúdo, apresentado por Shulman (1986), diferencia o conhecimento matemático do professor do saber de matemática do matemático profissional, de maneira que não seja visto como diluição ou simplificação do saber do matemático.

Nesta pesquisa, entendemos que o conhecimento de conteúdo do professor de Matemática com vistas ao ensino não deve ser entendido como subconjunto do conhecimento de um matemático profissional. Nesse sentido, a apresentação do conteúdo matemático acadêmico de maneira pronta e absoluta, exclusivamente a partir de sua perspectiva lógica-formal, como na concepção formalista retratada no primeiro capítulo, não traduz as especificidades dos saberes docentes necessários à formação do professor de Matemática. Mais do que reproduzir a Matemática dos matemáticos, é necessário ao professor refletir sobre a Matemática de uma perspectiva ampla. Por esse motivo, entendemos que a visão do professor sobre a natureza da Matemática é tão importante quanto a compreensão sobre seu conteúdo, no sentido de ampliar seu entendimento sobre o que ensina.

Ao final de seu artigo, após ter explicitado os saberes de conteúdo do professor para o ensino, Shulman (1986) responde à provocação inicial com outra frase igualmente provocativa: “Quem sabe faz; quem compreende ensina”. Esta frase parte da premissa que, para ensinar, é necessário mais que saber e resume a essência da pesquisa de Shulman sobre os saberes docentes. Entretanto, o autor reconhece que a sua base de conhecimento para o ensino não é fixa nem final e reforça que outras pesquisas podem reconhecer novas categorias de conhecimentos que são característicos do professor, ou ainda, refinar as que foram apresentadas em seu trabalho.

Ball, Thames e Phelps (2008) reconhecem a grande contribuição do trabalho de Shulman (1986) e destacam seu alcance e desdobramentos na pesquisa. Porém, os autores ressaltam que, em diversos trabalhos, pesquisadores não conseguiram estabelecer definições precisas sobre o saber pedagógico de conteúdo, não tornando claros os limites que distinguem esse saber de outros conhecimentos do professor.

Em suas análises, Ball, Thames e Phelps (2008) inferiram que a identificação e a organização dos saberes que constituem o conhecimento matemático do professor poderiam ajudar o desenvolvimento dos saberes docentes. Dessa maneira, os autores apontam em sua pesquisa a existência de uma matemática específica do professor de Matemática, denominada *conhecimento matemático para o ensino* (mathematical knowledge for teaching), que constitui o conhecimento matemático que os professores necessitam em sua prática.

Nessa pesquisa, os autores questionaram quais seriam os saberes matemáticos necessários ao professor de Matemática e de que maneira os docentes deveriam desenvolver esses saberes para lecionar. Assim, para representar suas hipóteses observadas na prática de sala de aula, os pesquisadores propuseram um refinamento das categorias de Shulman (1986). De acordo com a proposta apresentada por Ball (2008) e seus colaboradores sobre o conhecimento matemático para o ensino, o saber de conteúdo definido por Shulman poderia ser subdividido em: *conhecimento comum do conteúdo* (common content knowledge), *conhecimento especializado do conteúdo* (specialized content knowledge) e *conhecimento de horizonte do conteúdo* (horizon content knowledge); enquanto que o saber pedagógico de conteúdo poderia ser fragmentado em *conhecimento do conteúdo e dos alunos* (knowledge of content and students), *conhecimento do conteúdo e do ensino* (knowledge of content and teaching) e *conhecimento de currículo* (knowledge of curriculum). Os autores ilustram essa divisão na seguinte figura:

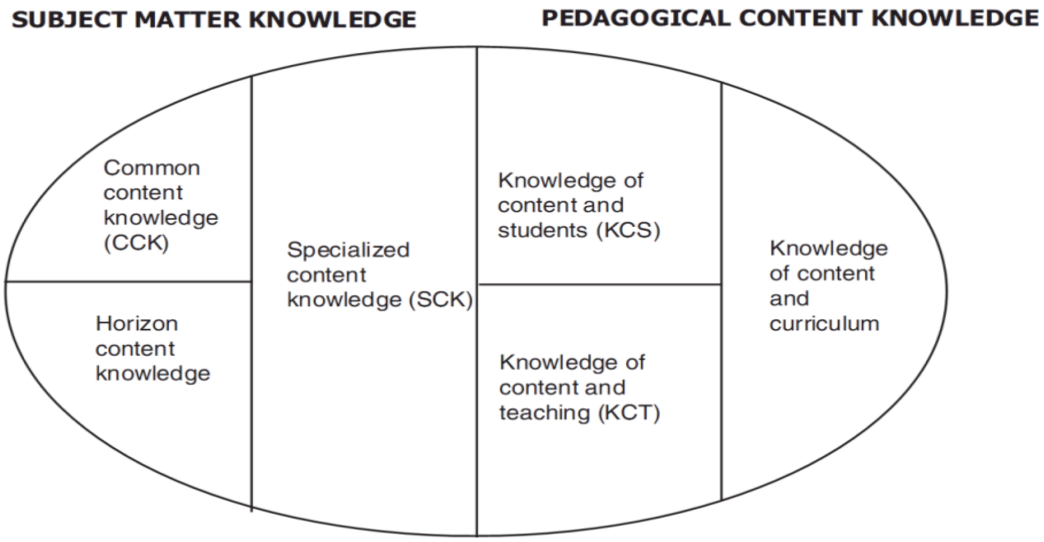


Figura 1: Categorias do conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES e PHELPS, 2008, p. 403)

De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), o ***conhecimento comum de conteúdo*** **(CCK)** corresponde a um conhecimento que não é exclusivo dos professores, isto é, trata-se de um saber que outros profissionais que lidam com a matemática também possuem. Para o professor, representa o conhecimento sobre o conteúdo que vai ensinar em sala de aula e que se verifica, por exemplo, ao reconhecer uma resposta errada de determinado aluno ou ao analisar a consistência do conteúdo apresentado em um livro didático.

O ***conhecimento especializado do conteúdo*** **(SCK)** está relacionado a um conhecimento específico do professor que abarca o que ele precisa saber para ensinar um determinado conteúdo matemático, mas que não faz parte diretamente daquilo que está ensinando. Este saber se manifesta, por exemplo, quando o docente evoca conceitos matemáticos ao verificar a natureza de um erro, especialmente aqueles que não são comuns, ou ainda na avaliação de uma solução não habitual apresentada por um aluno. Ball (2008) e seus colaboradores destacam que esse conhecimento requer uma espécie de descompactação da matemática que não é necessária em outros contextos.

Dessa maneira, os pesquisadores destacam que os professores necessitam de uma experiência estendida sobre determinadas práticas matemáticas. Falar explicitamente sobre as aplicações e nuances da linguagem matemática, escolher e utilizar representações matemáticas de forma eficiente, refletir sobre como explicar e justificar suas ideias matemáticas são exemplos de práticas matemáticas específicas que requerem a descompactação da matemática.

Para ilustrar e esclarecer a diferença entre o conhecimento comum de conteúdo e o conhecimento especializado de conteúdo, Ball, Thames e Phelps (2008) exibem, como exemplo (Figura 02), o algoritmo da subtração e discutem os saberes envolvidos na execução e no ensino desse procedimento. A partir deste exemplo, os autores procuram evidenciar as especificidades do conhecimento matemático para o ensino.

$$\begin{array}{r} 307 \\ -168 \\ \hline -1 \\ -60 \\ 200 \\ \hline 139 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 307 \\ -168 \\ \hline 139 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 307 \\ -168 \\ \hline 2 \\ 30 \\ 107 \\ \hline 139 \end{array}$$

Figura 2: Exemplo de Subtração (BALL, THAMES e PHELPS, 2008, p. 397)

Segundo Ball (2008) e seus colaboradores, realizar este cálculo faz parte do conhecimento comum do conteúdo, um saber correspondente a qualquer pessoa que lida com a Matemática em seu cotidiano. Entretanto, efetuar este procedimento é necessário, mas não é suficiente para ensiná-lo. O professor deve ser capaz de conhecer os significados subjacentes ao algoritmo como, por exemplo, as diferenças entre modelos de retirada ou comparação da operação de subtração. As justificativas dos procedimentos do algoritmo e a compreensão de seus significados fazem parte de um conhecimento que vai além do conteúdo que é ensinado diretamente ao aluno e exigem do professor um saber matemático específico que não é necessário a outras pessoas que lidam com o algoritmo da subtração.

Sobre o ***conhecimento de horizonte do conteúdo***, Ball, Thames e Phelps (2008) declaram que não estão seguros se esta pode ser uma categoria própria do conhecimento matemático para o ensino ou se a mesma está associada às outras categorias do modelo proposto por eles. Por essa razão, os autores a incluíram provisoriamente nesta pesquisa e a definiram como o conhecimento que abrange o entendimento de como determinado conteúdo matemático está relacionado às ideias, às estruturas e aos princípios mais amplos da Matemática. Por exemplo, este saber é notado quando o professor antecipa ou estabelece conexões entre diferentes conteúdos.

Em particular, destacamos, neste trabalho, que a visão do professor sobre a natureza da Matemática pode estar articulada à construção do conhecimento de horizonte do conteúdo.

Nesse sentido, entendemos que a percepção do professor sobre o conteúdo matemático escolar, em uma perspectiva mais ampla e articulada à estrutura da Matemática como ciência, pode estar diretamente ligada a suas concepções sobre a Matemática. Mais especificamente, acreditamos, nesta pesquisa, que a visão do professor sobre a matemática formal dialoga com a maneira como ele estabelece conexões entre os conceitos da Educação Básica – com vistas ao horizonte do conhecimento matemático – e, sobretudo, se relaciona ao modo como ele reflete sobre os significados desses conceitos em uma perspectiva mais ampla da Matemática.

Para esclarecer nosso ponto de vista, citamos, por exemplo, o conceito de multiplicação de números inteiros. Para alguém que concebe a Matemática a partir da concepção formalista - que valoriza o rigor lógico na construção dos conceitos matemáticos, em detrimento da reflexão sobre seus significados – a multiplicação entre números inteiros é apenas uma ferramenta, sendo entendida somente como um procedimento útil em outros conceitos da Matemática. Nesse sentido, um professor da Educação Básica pode entender que o ensino de uma tabela de sinais, na qual são estabelecidas regras de multiplicação entre números negativos, seria suficiente para a aprendizagem do aluno com vistas ao horizonte desse conteúdo. No entanto, a ausência de reflexão sobre os significados desse conceito, pode fazer o professor perder de vista ideias importantes relacionadas ao tema, como a relação entre a multiplicação de números inteiros e as noções de homotetia e reflexão, por exemplo (RIPOLI, RANGEL, GIRALDO, 2016). Tais noções se articulam com o ensino de conceitos mais amplos da Matemática, em uma perspectiva futura, como a multiplicação entre números complexos e sua relação com transformações no plano.

Já em relação à subdivisão da categoria referente ao ***saber pedagógico de conteúdo*** apresentado por Shulman (1986), Ball (2008) e seus colaboradores apresentam o ***conhecimento do conteúdo e dos alunos*** **(KCS)** que corresponde a um tipo de conhecimento pedagógico do conteúdo que combina o saber matemático e o saber que deriva da experiência com os alunos. Ao planejar uma aula, o professor precisa prever os aspectos do conteúdo que despertam interesse nos estudantes ou, ainda, antecipar as dificuldades que os alunos irão encontrar, identificar erros recorrentes e interpretá-los quando surgirem. Todas essas situações requerem do professor uma interação entre um conhecimento matemático específico e sua familiaridade com a aprendizagem dos estudantes.

O ***conhecimento do conteúdo e do ensino*** **(KCT)** é um tipo de conhecimento que articula o saber sobre a Matemática e sobre o ensino a partir de diferentes estratégias para ensinar determinado tópico. Está relacionado à escolha da sequência de apresentação de um determinado conteúdo ou dos exemplos utilizados, à avaliação das vantagens e desvantagens do uso de determinadas representações de um conceito, ao aproveitamento de uma ideia ou dúvida de um aluno no desenvolvimento da aula. Cada uma dessas situações demanda uma interação entre o conhecimento matemático específico e o saber sobre questões pedagógicas que interferem na aprendizagem do aluno.

Finalmente, o ***conhecimento do conteúdo e do currículo*** proposto por Ball (2008) não difere da definição apresentada por Shulman (1986), se referindo ao conhecimento que relaciona o conteúdo com os recursos e objetivos que compõem o programa curricular na escola.

A partir da legitimação de um conhecimento específico do professor com vistas ao ensino, apresentado nas pesquisas de Shulman (1986) e Ball (2008), este trabalho parte do pressuposto de que a maneira como a Matemática é concebida, apresentada e ensinada na Licenciatura pode estar relacionada à construção de determinados saberes docentes do futuro professor. Conforme apresentado anteriormente, esses saberes de conteúdo são amplamente discutidos na literatura em Educação Matemática e seu reconhecimento é fundamental para a formação de professores. Portanto, entendemos que a formação do professor de Matemática na Licenciatura deve propor uma reflexão sobre o conteúdo matemático apresentado com um olhar específico voltado à futura prática docente.

Exemplificando, um curso de Análise na Licenciatura, ao abordar o conteúdo de séries, não deve ter como único propósito ensinar que uma série geométrica $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k$ é convergente e igual a $\frac{1}{1-r}$ quando $0 < |r| < 1$, de uma perspectiva puramente formal. Deve ficar evidente ao futuro professor a articulação desse conteúdo – de uma maneira descompactada, conforme descrito por Ball (2008) – com o ensino de determinados conceitos da Educação Básica. Por exemplo, sua relação com o ensino de números reais, ao justificar para um aluno de 8° ano do Ensino Fundamental que $0{,}9999\ldots = 1$, ou ainda, sua articulação com o ensino da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita no 2º ano do Ensino Médio.

Este exemplo ilustra ideias que permeiam a grande contribuição da pesquisa de Ball, Thames e Phelps (2008) para o entendimento das especificidades do conhecimento matemático para o ensino. A definição de *conhecimento especializado do conteúdo* evidencia a existência de um saber sobre o conteúdo matemático específico do professor que o diferencia de outros profissionais como um engenheiro, por exemplo. Sob a perspectiva de

Ball e seus colaboradores, o professor se torna protagonista no desenvolvimento dos saberes docentes necessários ao ensino uma vez que:

> As demandas matemáticas de ensino exigem um conhecimento matemático especializado que não é necessário em outros cenários. Contadores têm que calcular e reconciliar números e os engenheiros têm que modelar matematicamente as propriedades dos materiais, mas nenhum desses grupos precisa explicar por que, quando você multiplicar por 10, tem que "adicionar um zero". [...] Estas questões fazem parte da tarefa diária de ensino. As demandas do trabalho de ensino da matemática cria a necessidade de um corpo de conhecimento matemático especializado para o ensino.[7] (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p.401, aspas como no original, tradução nossa)

No entendimento de nossas questões de pesquisa, isso reflete que a formação do professor de Matemática deve reconhecer, sobretudo no ensino das disciplinas de conteúdo matemático, que o conhecimento do professor não deve considerar somente a matemática formal. Entendemos que o ensino de Matemática na Licenciatura não deve ser concebido como uma coleção de resultados em sequência, representados através da reprodução quase ininterrupta de definição, teorema e demonstração. Destacamos que não estamos contestando, neste trabalho, a importância dos conteúdos da Matemática Acadêmica ou, tampouco, das demonstrações e do rigor matemático. Porém, ressaltamos que a apresentação da Matemática Acadêmica na Licenciatura deve realçar a descompactação da Matemática, descrita por Ball, Thames e Phelps (2008) na construção do conhecimento especializado de conteúdo, propondo ao licenciando reflexões sobre os significados dos conceitos matemáticos ensinados e sobre sua articulação com a futura prática docente.

Podemos concluir que a delimitação das categorias propostas por Ball, Thames e Phelps (2008) não determina a contribuição principal dos trabalhos desses pesquisadores. A colaboração central dessas pesquisas é a consideração de saberes sobre o conteúdo para o ensino que observam as especificidades do conhecimento matemático e seu estreitamento com a prática docente. Os estudos de Shulman (1986) e Ball (2008) mostram que o conhecimento do professor não se resume ao conteúdo que é ensinado e revelam a existência de saberes que são específicos à prática. Ao apresentarem um saber que une conteúdo e a prática de sala de aula, os autores trazem à tona uma competência que é específica do docente, rompendo com

[7] No original: “The mathematical demands of teaching require specialized mathematical knowledge not needed in other settings. Accountants have to calculate and reconcile numbers and engineers have to mathematically model properties of materials, but neither group needs to explain why, when you multiply by 10, you ‘add a zero’. […] These and questions like them are the daily fare of teaching. The demands of the work of teaching mathematics create the need for such a body of mathematical knowledge specialized to teaching.” (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p.401, aspas como no original)

um possível antagonismo existente entre pedagogia e conteúdo. Além disso, esta nova visão eleva a prática docente à posição de produtora de saber, possibilitando um novo olhar para o trabalho do professor em sala de aula.

Em nossa concepção, os saberes de conteúdo para o ensino perpassam dimensões diversas que não são exclusivas ao conhecimento do conteúdo *per se*, mas contemplam, também, a reflexão conceitual problematizada sobre os conteúdos apresentados na formação do professor, assim como sua relação com as práticas sociais e culturais que se constituem nesse processo. Nesse sentido, entendemos que a visão sobre a natureza da Matemática apresentada na Licenciatura pode estar relacionada à construção dos saberes docentes de conteúdo do futuro professor e a suas expectativas sobre a futura prática docente.

Dessa maneira, esta pesquisa considera que a construção dos saberes docentes na Licenciatura deve ser desenvolvida mediante um olhar específico sobre o conhecimento de conteúdo voltado, essencialmente, à prática docente. Sob essa perspectiva, o ensino de conceitos matemáticos acadêmicos deve objetivar o desenvolvimento de um saber especializado do professor de Matemática que amplie sua visão sobre o conteúdo que ensina na escola básica.

Por esse motivo, na seção seguinte, discutiremos o trabalho de Felix Klein sobre o conhecimento do professor de Matemática, no qual se discute, por exemplo, a existência de uma dicotomia entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar. Em sua obra, o autor aborda possíveis conexões entre os conceitos da universidade e da escola que permitam a construção de um metassaber por parte do professor de Matemática. Diferentemente das ideias de Shulman (1986) e Ball, Thames e Phelps (2008), as noções de Klein concentram-se em uma visão da Matemática que não considera os saberes docentes ou, por exemplo, as características específicas dos alunos e da sala de aula. Embora reconheça a necessidade de o professor desenvolver um saber sobre o conteúdo que ensina – metassaber –, uma discussão muito avançada para a época da publicação de sua obra, Klein não aponta a existência de saberes docentes específicos para o ensino – conforme apontado posteriormente por Shulman (1986) – ou de uma matemática específica do professor de Matemática – discussão levantada na pesquisa de Ball, Thames e Phelps (2008).

2.2 Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior

Além de suas notáveis pesquisas no campo da Geometria Não-Euclidiana, o matemático alemão Felix Christian Klein ofereceu grandes contribuições à Educação Matemática e, em especial, à formação de professores de Matemática. Sua famosa obra *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior* (Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus), publicada em 1908, continua sendo um modelo clássico de reflexão metodológica sobre os conteúdos a serem ensinados e sobre a natureza da Matemática Escolar (SCHUBRING, 2014). A obra está ordenada em três volumes que englobam diferentes conteúdos matemáticos: o primeiro volume apresenta noções sobre aritmética, álgebra e análise; o segundo volume versa sobre geometria e o último volume contém aplicações de cálculo e geometria. De acordo com Kilpatrick (2008), os dois primeiros volumes são excelentes e precoces exemplos do conhecimento matemático para o ensino abordado na literatura atual.

Logo na introdução do primeiro volume de sua obra, Klein identifica um problema central na formação do professor de Matemática na época: a falta de conexão entre a escola e a universidade. O autor denuncia uma *dupla descontinuidade* vivenciada pelo futuro professor ao fazer a transição da escola para a universidade e, em seguida, ao retornar à escola para ensinar. Ao iniciar sua trajetória acadêmica, o licenciando não identifica relação entre a matemática apresentada na universidade e a matemática aprendida na Educação Básica. Já ao terminar a graduação e retornar à escola como professor, ele não consegue estabelecer relação entre a matemática que ensina e a matemática estudada em sua formação.

> Durante muito tempo, os universitários estavam preocupados exclusivamente com as suas ciências, sem pensar sobre as necessidades da escola, sem sequer se importar em estabelecer uma conexão com a matemática da escola. Qual foi o resultado desta prática? Os jovens estudantes universitários são confrontados com problemas que nada têm a ver com as coisas que estudaram na escola e, naturalmente, esquecem-nas rapidamente. Quando, depois de completarem o curso, se tornam professores confrontados com a necessidade de ensinar a matemática elementar na forma adequada ao grau de ensino, primário ou secundário, a que se dedicam, e como não conseguem estabelecer praticamente nenhuma relação entre esta tarefa e a matemática que aprenderam na universidade, facilmente aceitam o ensino tradicional, ficando os estudos universitários como uma memória mais ou menos agradável que não tem influência na sua forma de ensinar. (KLEIN, 2004, p.1)

De acordo com Schubring (2014), Klein se referiu a essa ruptura como "alienação" entre escola e universidade. Essa falta de conexão entre a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica o instigou a mobilizar-se para mudar esse panorama. Segundo Rangel (2015), a partir da compreensão da Matemática como um corpo orgânico, Klein considera a percepção hierárquica e estanque entre Matemática Elementar e Matemática Superior como um obstáculo a ser vencido. Dessa maneira, Klein procurou evidenciar em sua obra a articulação entre diversos conteúdos matemáticos e a matemática da Educação Básica.

> O meu objetivo consiste sempre em mostrar-vos as *conexões entre problemas de diferentes áreas*, o que não acontece de forma suficiente na generalidade dos manuais, e, mais especificamente, sublinhar a relação destes problemas com os da Matemática Escolar. Espero que, desta forma, se torne mais fácil para o leitor adquirir a capacidade que eu considero o verdadeiro objetivo dos estudos acadêmicos: a de retirar das grandes questões científicas que nos são oferecidas abundantes estímulos e orientações para o exercício da própria atividade docente. (KLEIN, 2004, p. 1-2, itálico como no original)

Para Klein, o problema do currículo do ensino secundário na época era reflexo de questões relativas à formação do professor (KILPATRICK, 2008). Schubring (2014) considera que a relação entre a Matemática Escolar e a matemática ensinada na universidade, abordada por Klein, constitui, até hoje, um problema e um desafio para a formação docente e talvez represente uma problemática quase eterna.

A concepção de Klein sobre a Matemática Elementar evidencia a essência de sua obra e sugere um caminho para enfrentar essa problemática. O autor identifica como *Matemática Elementa*r as partes essenciais que sustentam e estruturam a Matemática. Dessa maneira, não há diferença de valor entre o que é elementar e o que é superior, uma vez que representam partes que se fundem e constituem, sob mesma importância, a Matemática como ciência, onde a Matemática Elementar se integra como um corpo de conhecimento que permeia todo o seu arcabouço teórico (RANGEL, 2015). Segundo Rangel (2015), na visão de Klein, Matemática Elementar não se refere a uma matemática menos elaborada ou mais simples. Para ilustrar essa afirmação e esclarecer a concepção de Klein, a autora cita o conceito de número como exemplo de conhecimento matemático elementar no sentido de Klein:

> Por exemplo, o conceito de número não é propriamente um conceito fácil, envolve em sua essência abstração e a noção de correspondência biunívoca, além de encerrar diferentes propriedades e características, determinando os diversos universos numéricos. O que há de fácil no conceito de números real? A história revela, a partir do percurso do conceito de número até sua concepção atual, que não se trata de algo fácil, nem que possa ser facilitado. No entanto, ninguém discute seu valor elementar, no sentido de Klein, para a Matemática. (RANGEL, 2015, p. 79)

A Matemática Elementar tampouco deve ser entendida como Matemática Escolar. Por constituir a Matemática enquanto ciência, é natural que o conhecimento matemático elementar, no sentido de Klein, esteja presente na Educação Básica devido ao papel formador da escola. No entanto, a Matemática Escolar tem características e saberes próprios e, assim como a Matemática Elementar, não pode ser reduzida a uma simples transposição de saberes acadêmicos, muitas vezes associada a uma versão diluída ou facilitada do conhecimento acadêmico (RANGEL, 2015).

De acordo com a concepção adotada em nossa pesquisa, conceber a Matemática Escolar como um corpo teórico diluído da Matemática Acadêmica desqualifica a escola como produtora de conhecimento e coloca os saberes inerentes à atividade profissional do professor como um subconjunto do conhecimento de conteúdo dos matemáticos. Entendemos que, sob esse paradigma, é muito provável que a formação do professor de Matemática se desenvolva de maneira desarticulada à prática docente, reforçando a descontinuidade denunciada por Klein.

Nesse sentido, esta investigação considera que a cultura matemática observada na Licenciatura, personificada na visão dos formadores sobre a natureza da Matemática, também representa um obstáculo a ser vencido e reforça a percepção hierárquica e estanque entre Matemática Elementar e Matemática Superior apontada por Klein. A concepção formalista possivelmente adotada na graduação, que estabelece a atividade matemática apenas a partir da perspectiva lógica e formal, sem propor uma reflexão sobre os elementos que a fundamentam, contribui para o distanciamento entre escola e universidade ao não considerar as especificidades do conhecimento de conteúdo do professor, no sentido de Shulman (1986) e Ball (2008).

Observando as especificidades da Matemática Escolar e sua particularidade, Klein considerou que o conhecimento de conteúdo necessário para o ensino deve oferecer ao professor uma visão abrangente da Matemática que permite observar a Matemática Elementar de um ponto de vista superior. O autor notou que os professores precisavam de um conhecimento especializado de matemática que lhes daria uma perspectiva ampla sobre o campo e permitiria desenvolver a aprendizagem dos alunos (KILPATRICK, 2008).

Entretanto, essa visão presente na obra de Klein não foi captada ao traduzirem o título original de sua obra *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior) para a língua inglesa. Kilpatrick (2008) afirma que a opção por traduzir o termo *höheren* como “advanced” (avançado, em português) não manifestava a concepção apresentada por Klein em sua obra. Segundo Schubring (2014), o termo “avançado” carrega consigo uma conotação pejorativa, implicando em uma interpretação para a Matemática Elementar que a coloca como sendo atrasada, de uma outra natureza. Esse sentido reforça, ainda mais, a visão alienada e hierárquica entre a Matemática Elementar e a Matemática do Ensino Superior denunciada por Klein, contrastando com a articulação proposta em sua obra. Para Kilpatrick (2008), o termo “higher” (superior, em português) representa uma tradução mais literal e expressa melhor a visão panorâmica da Matemática a qual Klein se referia.

> Quando chegou o momento de os americanos traduzirem o termo *Elementarmathematik* no título da obra de Klein para a língua inglesa, eles optaram por traduzir *vom höheren Standpunkt aus* como *an advanced standpoint* (um ponto de vista avançado). O termo *higher* (superior) não só é uma tradução mais literal de *höheren* do que *advanced* (avançado), mas também capta melhor a imagem que Klein tinha em seu trabalho. *Advanced* (avançado) pode significar *higher* (superior), mas sua conotação está mais próxima a “mais desenvolvido” ou “mais adiante no espaço ou no tempo”. Klein queria enfatizar que seu curso daria aos futuros professores uma visão melhor e mais panorâmica da Matemática. [...] ele queria que esses professores “ficassem acima” do conteúdo.[8] (KILPATRICK, 2008, p.39, itálico e aspas como no original, tradução nossa)

Considerando que seu público leitor fosse formado por professores com um conhecimento prévio sobre os principais conceitos matemáticos, Klein buscou evidenciar a articulação entre o conhecimento matemático como um todo. De acordo com Schubring (2014), Klein expôs explicitamente a natureza epistemológica de sua obra: abordar as interligações e conexões entre partes da Matemática geralmente tratadas de maneira desarticulada, com o intuito de aprofundar o entendimento de seus conceitos elementares. O autor acrescenta, ainda, que fica evidente na concepção de Klein sobre a relação entre a Matemática Elementar e superior a ênfase no desenvolvimento de um *metassaber* na formação do professor, isto é, um saber sobre o saber. Para Schubring (2014), esse metassaber tem um caráter essencialmente epistemológico que sugere o desenvolvimento, por parte do professor, de um conhecimento sobre a natureza dos conceitos matemáticos que vai além da teoria a ser ensinada na prática em sala de aula.

Dessa maneira, na concepção de Klein, seria necessário ao professor compreender a Matemática como um corpo único no qual a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica são intrínsecas e igualmente determinantes para seu desenvolvimento. Conforme apontado por Schubring (2014), Klein não propôs em sua obra uma translação direta da Matemática

---

[8] No original: “When it came time for the American translators of Klein’s *Elementarmathematik* to render the title in English, they chose to translate *vom höheren Standpunkte aus* as from *an advanced standpoint*. The term *higher* is not only a more literal translation of *höheren* than *advanced* is, but it also captures better the image Klein had for his work. *Advanced* can mean *higher*, but its connotation is more like ‘more developed’ or ‘further along in space or time’. Klein wanted to emphasize that his courses would give prospective teachers a better, more panoramic view of the landscape of mathematics. […] he wanted those teachers to ‘stand above’ their subject. (KILPATRICK, 2008, p.39, itálico e aspas como no original)

Acadêmica para a escola e, de maneira oposta, entendeu a relação entre esses dois domínios a partir de uma variável histórica que resulta em um processo de *elementarização*, classificado por ele como *translação histórica*.

> É de suma importância para as pesquisas atuais sobre os programas do ensino de matemática, entender que Klein não optou por uma translação direta do novo saber matemático para a escola, mas percebeu a relação entre os dois domínios de saber como uma variável histórica, e assim propôs lidar com este desenvolvimento histórico como um processo de elementarização que ele chamou de “historical shifting” – “translação histórica”. (SCHUBRING, 2014, p.50, aspas como no original)

Segundo Schubring (2014), essa visão de Klein corresponde às concepções do Iluminismo sobre como tornar uma ciência ensinável e difundir o saber na sociedade. O autor atribui a Jean d’Alembert, em sua obra *Encyclopédie*, o conceito de *elementarizar* uma ciência, que consiste em identificar seus elementos, isto é, suas partes primitivas e originais, e estabelecer uma conexão entre esses elementos e o todo. A noção de d’Alembert parte do princípio da existência de uma estrutura na ciência na qual todas as proposições podem ser deduzidas dos elementos, encontrando-se logicamente interligadas. Schubring (2014) acrescenta que, dessa maneira, não há diferença entre elementar e superior, uma vez que os elementos são considerados o cerne das partes mais desenvolvidas.

Nesse sentido, a *translação histórica* descrita por Klein consistiria em um processo no qual as partes mais complicadas da Matemática tornam-se gradativamente elementares à medida que seus conceitos vão sendo mais bem compreendidos e que sua exposição é simplificada. Obviamente, esse processo não é imediato e ocorre em longo prazo. Para ilustrar essa afirmação, consideremos o conceito de função. Atualmente, é notório que a noção de função representa um conceito elementar em Matemática, no sentido de Klein. Função não representa um conteúdo simples, mas, sem dúvida, é considerada uma ideia fundamental para a estrutura da Matemática como ciência. Contudo, historicamente, somente a partir do século XVIII que a noção de função passou a ser fundamental para a Matemática. Até esse momento, seu entendimento era complexo e pouco evidente. À medida que sua exposição foi sendo simplificada e seu conceito foi sendo mais bem compreendido, em um processo histórico que demandou séculos, a noção de função tornou-se elementar para a Matemática e essencial para seu desenvolvimento enquanto ciência.

Nesse processo de elementarização, a escola desenvolve um papel importante. Schubring (2014) afirma que Klein atribui à escola a incumbência de avaliar as necessidades do ensino e da formação e promover uma educação geral aos alunos a partir do que foi desenvolvido na Matemática enquanto ciência. Dessa maneira, Rangel (2015) destaca que, na perspectiva da translação histórica descrita por Klein, a escola assume uma posição protagonista no processo de elementarização da Matemática, cujo papel não se restringe a difundir o conhecimento matemático elementar, mas também contribuir para o desenvolvimento da própria Matemática enquanto ciência.

A partir de seu caráter formativo, a escola contribui para tornar os conceitos matemáticos mais bem compreendidos, isto é, colabora para torná-los elementares. Tal incumbência desconstrói sua imagem de simples reprodutora de conteúdo e eleva a escola à posição de produtora de conhecimento, que contribui efetivamente para o desenvolvimento da Matemática enquanto ciência. Dessa maneira, como a Matemática Escolar é a fonte principal de informação matemática para a maioria dos membros da sociedade, a forma como ela é promulgada na escola determina a maneira como ela é entendida e promulgada pela sociedade como um todo, formando um alicerce sobre o qual um novo conhecimento pode ser produzido.

Nesse sentido, tentamos estabelecer, nesta pesquisa, uma articulação entre a visão sobre a natureza da Matemática constituída na Licenciatura e a maneira como o professor apresentará a Matemática aos seus alunos em sua futura atuação docente. Entendemos que a percepção estanque entre matemática elementar e superior pode estar relacionada à cultura matemática observada na formação do professor.

Neste trabalho, reforçamos que os saberes matemáticos do professor não devem ser entendidos como um subconjunto do conhecimento de um matemático profissional, representado exclusivamente pela perspectiva formal da Matemática. Acreditamos que a valorização do saber matemático acadêmico na formação do professor e a percepção de que a Matemática se reduz apenas à concepção formalista contribuem para reforçar a hierarquia estabelecida entre a matemática elementar e superior. Em nosso entendimento, essa maneira de se observar os saberes matemáticos para o ensino contradiz suas especificidades – destacadas no trabalho de Shulman (1986) e Ball (2008) – e não contribui para que o professor observe a matemática ensinada na escola de um ponto de vista superior, conforme as ideias de Klein.

Sugerimos que conceber a Matemática Elementar como as partes que sustentam a Matemática como ciência – em contraposição à percepção comum que a coloca como um conhecimento mais simples ou facilitado – pode representar um importante passo para quebrar essa visão hierárquica entre o conhecimento escolar e acadêmico que permeia a formação do professor. Ou seja, defendemos que a formação do professor enfatize a reflexão conceitual problematizada sobre os significados dos elementos que estruturam a Matemática, na direção oposta à cultura matemática observada na Licenciatura que apresenta os conceitos de maneira estática. Com o intuito de compreender melhor esse paradigma cultural no ensino de Matemática e as práticas sociais constituídas a partir disso, abordaremos, na seção seguinte, a literatura sobre cultura matemática no contexto das interações decorrentes dos processos de ensino e aprendizagem.

2.3 Práticas de Mobilização de Cultura Matemática

Nesta seção, apresentaremos uma perspectiva dinâmica dos saberes matemáticos para o ensino, na qual destacamos as práticas sociais e culturais que se constituem em sua construção. Essa visão se opõe à concepção estática retratada em grande parte das investigações sobre saberes docentes, como a pesquisa de Ball, Thames e Phelps (2008), que não enfatiza a contribuição dessas práticas no desenvolvimento dos saberes do professor de Matemática. Nessa direção, Davis e Renert (2014) concebem a Matemática para o ensino como uma matemática distinta, constituída de uma complexa rede de entendimentos, disposições e competências que não são facilmente nomeados nem medidos. Para Davis e Renert (2009), o conhecimento matemático dos professores se revela tão extenso e dinâmico que não o permite ser enclausurado, de maneira que os saberes matemáticos individuais e coletivos devem ser vistos de modo indissociável.

> O conhecimento matemático dos professores é muito extenso e muito dinâmico para aprisioná-lo em um conjunto de recursos ou comprimi-lo em um curso. Seu conhecimento é possivelmente melhor entendido como uma atitude de engajamento matemático, e não como o domínio de um campo da matemática. A matemática dos professores pode ser vista como um modo de ser que é promulgado quando os professores abordam um novo tópico, dão sentido ao erro de um aluno, ou reconciliam interpretações idiossincráticas. Em outros termos, a matemática para o ensino implica na consciência de que o conhecimento matemático individual e o conhecimento matemático coletivo são intrínsecos.[9] (DAVIS, RENERT, 2009, p.41-42, tradução nossa)

[9] No original: "Teachers' mathematical knowledge is too extensive and too dynamic to capture in a set of resources or compress into a course of study. Their knowledge is perhaps best understood as an attitude toward mathematical engagement, and not as mastery of a domain of mathematics. Teachers' mathematics can be seen as a mode of being that is enacted when teachers approach a new topic, make sense of a student's error, or reconcile idiosyncratic interpretations. In quite different terms, mathematics for teaching entails awareness that personal mathematical knowing and collective mathematics knowledge are co-implicated, self-similar forms." (DAVIS, RENERT, 2009, p.41-42)

Rangel (2015) afirma que, sob a ótica dos autores, os saberes matemáticos para o ensino não devem ser entendidos como um corpo estático que pode ser condensado em um livro didático, por exemplo, mas sim como um tipo de conhecimento que se constitui na ação do professor em sua prática. Segundo Davis e Renert (2012), frequentemente, a Matemática Escolar e o conhecimento matemático do professor são considerados limitados, simples e estáticos. Em oposição a esse ponto de vista, os autores defendem que o conhecimento de conteúdo dos professores de Matemática é vasto, complexo e evolutivo. Ao invés de idealizarem o saber matemático para o ensino como um corpo discreto de conhecimento base, mantido individualmente pelo professor, eles propõem enquadrá-lo em termos de uma disposição participativa aprendida dentro de um domínio de conhecimento em evolução.

Nesse sentido, Davis e Renert (2012) concebem esse conhecimento como algo emergente e dinâmico, contrastando, por exemplo, com o processo de "descompactação" da matemática descrito por Ball, Thames e Phelps (2008) que considera o conhecimento matemático manifestado em formas compactas e relativamente estáticas. Em nosso entendimento, a delimitação das categorias propostas por Ball e seus colaboradores não evidencia a contribuição das práticas sociais para a construção do conhecimento de conteúdo do professor com vistas ao ensino. De acordo com a concepção adotada nesta pesquisa, os saberes docentes para o ensino não são construídos somente a partir de questões didático-pedagógicas ou se resumem exclusivamente ao desenvolvimento de um metassaber a partir da reflexão conceitual problematizada sobre o conteúdo ensinado – conforme destacado por Klein (2004). Entendemos que o conhecimento de conteúdo do professor de Matemática é dinâmico e emergente – conforme destacado por Davis e Renert (2012) – e não pode ser dissociado do contexto das práticas sociais e culturais que se constituem ao longo da formação docente.

Nesse sentido, acreditamos que os processos de ensino e aprendizagem, seja na escola ou na formação docente, não devem ser observados a partir de uma perspectiva cognitivista de acúmulo irrestrito de conteúdo que desconsidera as interações do sujeito com o mundo. Conforme destacado por Miguel e Vilela (2008), sob esse novo olhar, talvez fosse mais apropriado nos referirmos a esse processo "através de expressões tais como 'práticas escolares' e 'mobilização cultural', em vez de 'ensino' e 'aprendizagem'" (MIGUEL, VILELA, 2008, p.98). Dessa maneira, o centro da discussão não é a mente do indivíduo, mas as especificidades das práticas sociais e do objeto cultural mobilizado. De acordo com os autores, é necessário romper com as perspectivas teóricas de aprendizagem relativas ao modo de se compreender e explicar Matemática e refletir sobre a complexidade das práticas escolares de mobilização de cultura matemática.

> É preciso decretar, definitivamente, a falência do grande projeto psicológico, de ampla circulação e valorização na década de 1970, de produção de teorias gerais da aprendizagem que pudessem funcionar como camisa-de-força – ou mesmo como mera referência – para as práticas escolares de ensino e aprendizagem ou, como preferimos denominar, para as práticas escolares situadas de mobilização cultural realizadas por professores e estudantes. Sabemos, hoje, que tais práticas são complexas e multicondicionadas. Isso significa que o esclarecimento e a realização de tais práticas requerem a consideração conjugada e simultânea de um conjunto nem sempre identificável de condicionantes sociais, tais como: aqueles relacionados aos sujeitos diretamente envolvidos nessas práticas (professores e estudantes); à natureza, características e singularidades do objeto cultural (as matemáticas) que está sendo por elas mobilizado; às características comuns e singulares das instituições escolares e dos contextos geopolíticos em que tais práticas se realizam (os sistemas educacionais dos diferentes países); às naturezas diversificadas dessas práticas (que se manifestam nas atividades escolares consideradas matemáticas); etc. (MIGUEL, VILELA, 2008, p. 98)

Este trecho da pesquisa de Miguel e Vilela (2008) evidencia a complexidade das práticas escolares e a relevância de variáveis sociais que não se restringem, especificamente, ao conteúdo ensinado e aos saberes envolvidos. Nesse contexto, alunos e professores determinam práticas escolares de mobilização cultural que são condicionadas pelos sujeitos envolvidos e pelas especificidades do objeto cultural mobilizado. Mais especificamente, no âmbito desta pesquisa, entendemos que as práticas de mobilização de uma cultura matemática estão diretamente relacionadas à visão sobre a natureza da Matemática manifestada por um grupo de indivíduos envolvidos nessas práticas.

Entretanto, para compreendermos a relação de uma cultura com o ensino de Matemática, temos que esclarecer, primeiramente, o significado desse termo. Buscando compreender e esclarecer as diferentes interpretações sobre o conceito de cultura, Geertz (1989) busca desenvolver uma hermenêutica que reduza “o conceito de cultura a uma dimensão justa, que realmente assegure a sua importância contínua em vez de debilitá-la” (GEERTZ, 1989, p.3). Para o autor, mais importante do que buscar uma definição ou um padrão que a defina, é necessário compreender sua ocorrência e transmissão. Na concepção de Geertz (1989), cultura é vista como um conjunto de significados incorporados através de símbolos que se materializam em comportamentos.

> O conceito de cultura que eu defendo, e cuja utilidade os ensaios abaixo tentam demonstrar, é essencialmente semiótico. Acreditando, como Max Weber, que o homem é um animal amarrado a teias de significados que ele mesmo teceu, assumo a cultura como sendo essas teias e a sua análise; portanto, não como uma ciência experimental em busca de leis, mas como uma ciência interpretativa, à procura do significado. (GEERTZ, 1989, p. 4)

Na perspectiva do autor, cultura é uma ação simbólica determinada por uma teia de significados constituída pelo homem, sendo que as formas culturais ganham articulação através da ação social. Nesse sentido, não haveria cultura sem o homem e, tampouco, o homem existiria sem a cultura. Segundo Geertz (1989), a análise de uma cultura é interpretativa, uma vez que é realizada a partir da compreensão e da inter-relação desses significados. Em uma análise cultural, não devemos buscar padrões unificados, mas acessar esses sistemas de símbolos através da observação e da inspeção dos acontecimentos. Embora a descrição cultural exija um mínimo de coerência, o pesquisador destaca que nossas interpretações não devem ser fundamentadas na rigidez em que se apresentam, uma vez que, em sua visão, "nada contribuiu mais para desacreditar a análise cultural do que a construção de representações impecáveis de ordem formal, em cuja existência verdadeira praticamente ninguém pode acreditar" (GEERTZ, 1989, p. 13).

Geertz (1989) ressalta que o ponto central de sua abordagem semiótica sobre o conceito de cultura é permitir acessar o mundo conceitual no qual os sujeitos estão imersos. No estudo de uma cultura, os aspectos relevantes encontram-se no conjunto de atos simbólicos e seu objetivo é analisar o discurso social. Dessa maneira, o autor destaca que a tarefa da construção teórica do conceito de cultura não é identificar regularidades ou propor uma "Teoria Geral de Interpretação Cultural", mas tornar evidentes descrições minuciosas. Ou seja, o objetivo principal de uma análise cultural "não é generalizar através dos casos, mas generalizar dentro deles" (GEERTZ, 1989, p. 18). Nesse sentido, Geertz (1989) acrescenta que a análise cultural é intrinsicamente incompleta, uma vez que, de maneira paradoxal, quanto mais profunda, torna-se ainda menos completa.

Articulando as ideias de Geertz (1989) com os objetivos propostos nesta pesquisa, ressaltamos que o objeto de análise de nossa investigação repousa sobre o discurso dos participantes após cursarem a disciplina de Análise Real. De acordo com o autor, em uma análise antropológica, o *locus* do estudo não é o objeto do estudo. Por exemplo, "antropólogos não estudam *as* aldeias (tribos, cidades, vizinhanças...), eles estudam *nas* aldeias" (GEERTZ, 1989, p. 16). Dessa maneira, o propósito deste trabalho é identificar a cultura matemática observada, especificamente, no contexto o curso de Análise no qual a pesquisa foi desenvolvida, isto é, não objetivamos estudar *o curso* de Análise considerado, mas *no curso* de Análise em questão. Conforme destacado pelo autor, ao realizarmos essa análise cultural, não temos a pretensão de "generalizar através dos casos", mas discutir episódios que emergiram na investigação e "generalizar dentro deles". Portanto, nosso intuito não é apresentar inferências ou generalizações sobre o curso de Análise Real na Licenciatura, mas analisar o discurso dos sujeitos sobre suas percepções relacionadas à natureza da Matemática.

Nesse sentido, entendemos, nesta pesquisa, que a atividade matemática é vista mediante um conjunto de práticas sociais e culturais que são determinantes para a constituição de uma cultura matemática mobilizada por uma comunidade. Miguel e Vilela (2008) afirmam que, ao considerarmos as práticas de mobilização de cultura matemática, a Matemática deixa de ser apenas um corpo homogêneo de conhecimento e atinge uma dimensão plural, que considera a atividade humana em um conjunto de práticas sociais nas quais estão inseridos alunos, professores, matemáticos e todos que estão envolvidos nessa atividade.

> Nessa perspectiva que nos tem inspirado, quando falamos em processos de mobilização de cultura matemática, deixamo-nos de nos referir à matemática como um corpo homogêneo e universal de conhecimentos e passamos a falar em matemáticas no plural. E tais matemáticas passam a ser vistas como aspectos de atividades humanas realizadas com base em um conjunto de práticas sociais, tais como aquelas realizadas pelos matemáticos profissionais, pelos professores de matemática, pelas diferentes comunidades constituídas com base em vínculos profissionais, bem como pelas pessoas em geral em suas atividades cotidianas. (MIGUEL, VILELA, 2008, p. 112)

No contexto das práticas de mobilização de cultura matemática, Miguel e Vilela (2008) destacam diferentes perspectivas a serem consideradas como, por exemplo, o papel da ação efetiva ou reflexiva sobre objetos concretos ou abstratos; a produção de significados às formas simbólicas associadas à cultura matemática; a natureza cultural dos elementos mediadores no processo de produção de significados aos objetos da cultura matemática; o caráter situado dessas práticas; entre outras. Segundo os autores, essas diferentes perspectivas retratam a complexidade das práticas de mobilização de cultura matemática.

Miguel e Vilela (2008) ressaltam, ainda, que não devemos desconsiderar que cada um desses aspectos pode condicionar ou serem condicionados pelos demais elementos que envolvem essas práticas. Nesse sentido, os pesquisadores afirmam que não seria conveniente estudar as práticas de mobilização de cultura matemática promovidas por estudantes sem considerar que essas práticas também são condicionadas pelas práticas de seus professores e vice-versa. Desse modo, os aspectos condicionadores dessas práticas passam por processos de transformação e, por esse motivo, a natureza dos objetos da cultura matemática é percebida de diferentes maneiras.

Em uma perspectiva semelhante, Geertz (1989) considera a cultura como um conjunto de mecanismos de controle responsáveis por governar o comportamento e moldar o homem a nível individual e coletivo. O autor evidencia o fator condicionante de uma cultura ao ressaltar que ela nos modela enquanto espécie, assim como seres individuais. Dessa maneira, cada cultura é única, do mesmo modo que cada indivíduo é singular dentro dessa cultura. Sob esse viés, o autor destaca o impacto do conceito de cultura sobre o conceito de homem.

> Para chegar, finalmente, à razão do título, é aqui que o conceito de cultura tem seu impacto no conceito de homem. Quando vista como um conjunto de mecanismos simbólicos para controle do comportamento, fontes de informação extra-somáticas, a cultura fornece o vínculo entre o que os homens são intrinsecamente capazes de se tornar e o que eles realmente se tornam, um por um. Tornar-se humano é tornar-se individual, e nós nos tornamos individuais sob a direção dos padrões culturais, sistemas de significados criados historicamente em termos dos quais damos forma, ordem, objetivo e direção às nossas vidas. (GEERTZ, 1989, p. 37)

Observando esse aspecto teórico, apresentado tanto por Miguel e Vilela (2008) como por Geertz (1989), de maneira articulada às questões que moveram esta pesquisa, consideramos que a visão sobre a natureza da Matemática – o objeto cultural mobilizado – na Licenciatura pode ser um aspecto condicionador, e também condicionado, na constituição de uma cultura matemática na formação do professor. Dessa maneira, acreditamos que as práticas de mobilização de cultura matemática observadas na Licenciatura se relacionam com a construção dos saberes docentes de conteúdo do professor de Matemática – no sentido de Shulman (1986) e Ball (2008) – e são condicionadas pelas concepções dos formadores sobre a Matemática apresentadas na formação inicial. Por esse motivo, entendemos que a valorização da concepção formalista na Licenciatura pode contribuir para a mobilização de uma cultura que concebe a Matemática exclusivamente a partir de sua perspectiva formal. Considerando que objetivo da Licenciatura é formar professores, inferimos que traços dessa cultura matemática podem ser verificados também na escola, uma vez que os professores da Educação Básica são formados a partir dessa cultura.

Davis e Renert (2014) consideram que grande parte da Matemática Escolar gira em torno de resultados da matemática formal e, consequentemente, a percepção comum entre professores, alunos e pais – que associamos a práticas de mobilização de uma cultura matemática, articulando com Miguel e Vilela (2008) – é que o ensino da Matemática está relacionado à transmissão destes resultados de uma geração para outra. Por conta disso, geralmente, os alunos são formados a partir da fiel reprodução de conclusões pré-estabelecidas. Os autores se opõem a essa concepção platônica do conhecimento matemático e reforçam que "o ensino eficaz não é simplesmente uma questão de transmissão" (DAVIS, RENERT, 2012, p. 264). Ensinar sempre implica em transformação e, por esse motivo, eles incluem o corpo do conhecimento matemático no espaço de influência transformadora dos professores.

Davis e Renert (2014) acrescentam, ainda, que a aprendizagem parece ser mais estabelecida sobre redes de conexões complexas, onde muitas das associações feitas pelos alunos se tornam consistentes através de grupos culturais ou sociais específicos. Nesse contexto, uma matemática emergente é constituída mediante as interações sociais ocorridas no ambiente de sala de aula da escola, denominada pelos autores como *matemática cultural*.

> Nós usamos o termo (matemática cultural) para nos referirmos a toda e qualquer matemática que amplia a *matemática formal*. Para ser preciso, vemos matemática formal como a matemática dos matemáticos – o cânone dos resultados matemáticos, desenvolvido ao longo de milhares de anos, que está bem resumido em livros didáticos de matemática da escola. Matemática Cultural é tudo o que se encontra fora desse contexto. São as analogias, metáforas, aplicações, sistemas, discursos e práticas que se relacionam com a matemática, mas não são vistos tradicionalmente como matemática formal.[10] (DAVIS, RENERT, 2014, p.105, itálico como no original, tradução nossa)

As pesquisas de Davis e seus colaboradores (DAVIS, RENERT, 2009, DAVIS, 2012, 2014) evidenciaram que o professor tem papel determinante na constituição de uma matemática cultural. Como destacado por Davis e Renert (2009), os professores dão forma e substância a uma matemática cultural que não abarca somente a matemática formal, mas também a gama de aplicações culturalmente situadas, práticas e perspectivas que são habilitadas pela matemática formal e por outros modelos matemáticos de referência. No entendimento desta pesquisa, entretanto, acrescentamos que a matemática formal também representa um aspecto importante na constituição de uma matemática cultural na escola. Dessa maneira, de acordo com a concepção adotada neste trabalho, ampliamos a noção de matemática cultural de Davis e Renert (2014) ao considerar que ela se constitui a partir da relação entre as diversas matemáticas, sejam elas formais ou não, e as práticas sociais e culturais que se constituem no ensino de Matemática na Educação Básica.

Nesse sentido, os professores desempenham um papel decisivo na construção da Matemática enquanto ciência ao constituírem uma matemática cultural na escola e transmitirem aos alunos uma visão sobre a natureza da Matemática. Rangel (2015) afirma que a matemática cultural representa um componente essencial para a produção de conhecimento

[10] No original: “We use the term to refer to any and all mathematics that extends *formal mathematics*. To be precise, we view formal mathematics as mathematicians' mathematics — the canon of mathematical results, developed over thousands of years, which is neatly summarized in school mathematics textbooks. Cultural mathematics is all that resides outside of that. It is the analogies, metaphors, applications, systems, discourses, and practices that relate to mathematics but are not traditionally seen as formal mathematics.” (DAVIS, RENERT, 2014, p.105, itálico como no original)

matemático ao formar um alicerce sobre o qual um novo conhecimento pode ser produzido. Dessa maneira, conforme apontado por Davis e Renert (2014), como a matemática da escola é a fonte principal de informação matemática para a maioria dos membros da sociedade, a forma como ela é promulgada na escola determina a maneira como ela é entendida e promulgada pela sociedade como um todo.

É importante destacar as diferenças entre a noção de cultura matemática, apresentada no trabalho de Miguel e Vilela (2008), e o conceito de matemática cultural de Davis e Renert (2014), assim como a articulação entre essas teorias propostas nesta pesquisa. De acordo com nossa interpretação, a cultura matemática está relacionada à maneira como a Matemática – o objeto cultural mobilizado – é concebida e praticada em uma determinada comunidade. Por outro lado, a maneira como esse paradigma da cultura matemática vai ser estabelecido no ensino, pode ser compreendida como uma manifestação da matemática cultural. Nesse sentido, a matemática cultural irá promover a mobilização de uma matemática emergente, uma vez que o aluno irá produzir um conhecimento a partir desse paradigma e das interações sociais e culturais que se constituem nesse processo.

Ressaltamos que o objetivo desta investigação é identificar aspectos da cultura matemática observada na Licenciatura e relacioná-las com a construção dos saberes de conteúdo do professor de Matemática. Acreditamos que a discussão sobre alguns aspectos apontados na literatura como, por exemplo, a valorização da concepção formalista que desconsidera a reflexão conceitual problematizada sobre os significados da Matemática; a percepção estanque e hierárquica entre Matemática Elementar e Matemática Superior apontada por Klein; o distanciamento entre escola e universidade ao não considerar as especificidades do conhecimento de conteúdo do professor, no sentido de Shulman (1986) e Ball (2008); podem dar pistas sobre as práticas de mobilização de cultura matemática – destacadas por Miguel e Vilela (2008) – que se constituem na formação docente. Consideramos que todos esses aspectos retratam a visão sobre a natureza da Matemática que é formada a partir de práticas sociais e culturais observadas na Licenciatura.

Embora não tenhamos como objetivo discutir a matemática cultural produzida na Educação Básica, uma vez que não observamos a prática docente dos sujeitos desta pesquisa, questionamos de que maneira a cultura matemática constituída na formação do professor pode determinar, em certa medida, sua futura prática e o modo como ele irá apresentar a Matemática aos alunos na escola. A articulação entre a cultura matemática estabelecida na Licenciatura e as expectativas dos licenciandos sobre a futura prática é um objeto importante de reflexão para o qual este trabalho aponta. Nesse sentido, acreditamos que a forma como a Matemática é apresentada na Licenciatura, atualmente, coloca formação e prática na posição de antagonistas. A grande questão que surge ao debater essa tensão é: Qual matemática deveria estar presente na Licenciatura para promover a articulação entre a formação do professor e sua futura prática na Educação Básica? A partir dessa reflexão, discutiremos na seção seguinte a formação docente e o lugar da Matemática na Licenciatura.

2.4 O Lugar da Matemática na Formação Docente

Conforme verificamos nas seções anteriores, os saberes docentes de conteúdo para o ensino e a formação do professor de Matemática vêm sendo constantemente debatidos na literatura de pesquisa em Educação Matemática. Atualmente, a Licenciatura em Matemática se encontra desarticulada da futura prática do licenciando na Educação Básica, o que revela uma enorme falha na formação de professores. O modelo engessado no qual os conteúdos da matemática avançada são apresentados contribui para que o licenciando encontre dificuldade em reconhecê-los na Educação Básica.

Entretanto, ao repensar os cursos de Licenciatura deve-se colocar em pauta, primeiramente, a reflexão sobre qual matemática deve estar presente na formação do professor. Nessa direção, alguns pesquisadores têm se questionado sobre qual seria o lugar da Matemática na Licenciatura (FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013; MOREIRA, 2012; MOREIRA, FERREIRA, 2013). Segundo Fiorentini e Oliveira (2013), os cursos de Licenciatura, de maneira geral, têm sido alvo de críticas por parte de pesquisadores, formadores, egressos e licenciandos, cujas queixas se referem aos currículos, sobretudo às disciplinas específicas; às metodologias de ensino das aulas; ao distanciamento entre as práticas de formação e as práticas de ensino e aprendizagem na escola básica; à falta de articulação entre as disciplinas específicas e as de formação didático-pedagógica, entre outras.

Na verdade, essas críticas refletem a fragilidade do modelo vigente atualmente em grande parte das Licenciaturas em Matemática. Um olhar um pouco mais apurado voltado ao passado nos ajuda a compreender essa estrutura atual. Moreira (2012) recorda que o modelo curricular que marca o nascimento das Licenciaturas no Brasil, nos anos 30 do século XX, recebeu a nomenclatura 3+1. Nesta formatação, os cursos eram estruturados a partir de três anos de formação em conteúdos específicos (neste caso, Matemática) e mais um ano de Didática. O autor acrescenta que, em determinadas ocasiões, essa estrutura também foi referida através da fórmula *Licenciatura = Bacharelado + Didática*. Moreira (2012) destaca que esse modelo concebe o ensino como uma transmissão de conhecimento do professor para o aluno e, por esse motivo, a formação docente se desenvolve mediante o acúmulo do conteúdo específico da disciplina, acrescido de um saber didático que capacite o professor a transmitir seu conhecimento.

> Ensinar era visto, essencialmente, como transmitir o conhecimento do professor para o aluno. E aprender era, basicamente, receber essa transmissão sem muitos *ruídos*. A estrutura 3+1 é perfeitamente consistente com essa visão: o futuro professor, no processo de obter o licenciamento para ensinar, passa por uma primeira etapa de aprender o conteúdo (3 anos de matemática) e depois por uma etapa de aprender a transmitir (1 ano de didática). A lógica subjacente é que o bom professor precisa, antes de tudo, deter o conhecimento. Mas isso não basta, há professores que sabem muito, mas não sabem transmitir. É preciso, também, saber ensinar. (MOREIRA, 2012, p. 1138-1139, itálico como no original)

Especificamente na Matemática, acreditava-se que o professor aprenderia nos três anos iniciais o conhecimento matemático necessário para ensinar e, posteriormente, aprenderia em um ano como transmitir esse conhecimento. Dessa maneira, o curso de Licenciatura era visto como uma extensão do Bacharelado. Esse modelo não levava em conta a prática docente, muito menos o que seria necessário para o professor ensinar em sala de aula. Moreira e Ferreira (2013) afirmam que depois da consolidação do formato 3+1, questões sobre qual tipo de conhecimento matemático é relevante para a prática do professor na Educação Básica e sobre qual o seu lugar na formação docente não estiveram presentes, de modo significativo, no cenário nacional por cerca de duas décadas.

No cenário atual, já não notamos mais a configuração do modelo 3+1. Disciplinas pedagógicas como, por exemplo, didática, estágios e práticas estão mais presentes no currículo da Licenciatura e ultrapassam 25% da carga horária da formação do professor. A inclusão dessas disciplinas foi acontecendo à medida que a escola foi sendo compreendida como um espaço de negociações de significados a partir de interações sociais e de mediações do professor.

Contudo, embora essa estrutura tenha se modificado, ainda podemos perceber traços marcantes desse modelo atualmente. Moreira (2012) afirma que as Licenciaturas saíram do modelo 3+1, porém a lógica subjacente ao 3+1 ainda permanece como a lógica estruturante desses cursos. A separação entre as disciplinas de conteúdo e as disciplinas de ensino ainda persiste no currículo da Licenciatura em Matemática, mesmo que a proporção entre elas seja mais equilibrada nos dias de hoje. Segundo o autor, as disciplinas de conteúdo são projetadas e executadas de forma independente das disciplinas referentes ao ensino que, em geral, são concebidas e executadas nas Faculdades de Educação. Essa falta de articulação reflete a mesma lógica que norteou o formato do 3+1 e que ainda orienta o currículo vigente na Licenciatura.

Mesmo com essas falhas sendo observadas, não houve ainda uma reestruturação capaz de modificar esse quadro. Algumas tentativas foram feitas nesse sentido, porém se revelaram ineficientes justamente por não conseguirem se livrar das amarras presentes no modelo 3+1. Segundo Moreira (2012), a partir da década de 1980, uma dessas tentativas passou pela implementação das chamadas *disciplinas integradoras*, que tinham como objetivo interligar a formação de conteúdo e a formação pedagógica entre si e integrá-las com a prática docente escolar. Porém, tal ação não produziu os resultados esperados, uma vez que partiu do mesmo principio subjacente ao 3+1, isto é, considerou que conteúdo e ensino seriam, de fato, dois blocos separados que precisariam de um terceiro bloco intermediário para uni-los. Para Moreira (2012), essa lógica corresponde a uma armadilha para a estrutura curricular da Licenciatura que acaba delegando ao licenciado a tarefa de organizar os saberes em sua formação, cujo papel deveria ser desempenhado pela universidade.

> O resultado final dessa tentativa é a estrutura que, essencialmente, se observa ainda hoje: três blocos mais ou menos autônomos e independentes que se somam linearmente no cumprimento do tempo curricular e que se permitem, ao fim e ao cabo, deixar ao licenciado, como indivíduo, a tarefa que a instituição formadora e certificadora não consegue realizar: organizar os saberes da formação num *corpo* de conhecimentos orgânico, consistente e instrumental para a prática docente escolar em matemática.
> [...]Essa lógica, segundo a qual o processo de formação é concebido em dois blocos (a formação de conteúdo e a formação pedagógica), blocos tão separados entre si, a ponto de ser necessário agregar um terceiro bloco integrador, é uma armadilha que reduz as alternativas de inovação curricular a mudanças na proporção em que o tempo de formação (normalmente limitado a 4 anos) é dividido entre os blocos. (MOREIRA, 2012, p. 1141-1142, itálico como no original)

A falha dessa formatação é tentar corrigir a separação existente entre conteúdo e ensino a partir da demarcação ainda maior desses blocos. Na verdade, essa tentativa acaba ampliando a segregação entre disciplinas do currículo, porém agora mediante três blocos. Segundo Moreira e Ferreira (2013), a presença das disciplinas integradoras estabelece uma hierarquia entre saberes, cuja importância decresce do centro (Matemática) para a periferia (demais saberes que complementariam formação). Moreira (2012) afirma que essas tentativas alimentaram uma disputa de espaço entre conteúdo e pedagogia na formação do professor, na qual se cultiva um antagonismo entre esses blocos.

Podemos notar, atualmente, um enorme distanciamento entre as disciplinas da graduação e a prática docente na Educação Básica. Ainda sob a lógica subjacente do 3+1, a formação inicial na Licenciatura permanece como uma extensão do Bacharelado, negligenciando as demandas do ensino básico. As disciplinas de conteúdo matemático na formação docente não levam em conta o saber do conteúdo que é específico do professor em sua prática, fazendo com que o licenciando não encontre vínculo com sua futura atuação profissional ou tenha dificuldade em estabelecer conexões com a Educação Básica. Cria-se, portanto, um enorme vazio entre o conhecimento matemático aprendido na universidade e os saberes matemáticos para o ensino.

Em consequência disso, este trabalho parte do pressuposto de que a formação do professor de Matemática não deve ser entendida como uma extensão do Bacharelado, onde o conhecimento do professor é um subconjunto do conhecimento do matemático profissional. Nesta investigação, concebemos a formação docente a partir da reflexão conceitual sobre os conceitos matemáticos apresentados no ensino superior e na Educação Básica, de maneira integrada à futura prática docente, permitindo ao professor observar o conteúdo que ensina a partir de outro ponto de vista, no sentido de Klein (2004). Para isso, entretanto, o currículo da Licenciatura e o formador devem reconhecer as especificidades do conhecimento do professor para o ensino, conforme destacado por Shulman (1986) e Ball (2008) no início deste capítulo.

Conforme apontado por Fiorentini e Oliveira (2013), diversas pesquisas na literatura de Educação Matemática vem denunciando o distanciamento e a falta de articulação entre a prática e a formação necessária ao professor de Matemática (KLEIN, 2004; BALL, 1990, 2000; REIS, 2001). Essa constatação vai ao encontro dos problemas apontados por Klein (2004) na formação de professores já no início do século XX, como a dupla descontinuidade e a alienação entre escola e universidade, destacados na seção anterior.

Fiorentini e Oliveira (2013) afirmam que a supervalorização do saber acadêmico, em sua forma abstrata e formal, contrastada com as formas que o conhecimento matemático adquire nos processos de aprendizagem na escola, cria obstáculos ao professor em sua prática. Em meio a essa problemática, os autores identificam a existência de uma tricotomia na formação do professor de Matemática:

> Depreendemos [...] a existência, na formação do professor de matemática, de uma *quase tricotomia* entre: (1) a *formação matemática* voltada quase exclusivamente à matemática acadêmica, sem estabelecer relações e problematizações com a matemática escolar e com a perspectiva didático-pedagógica; (2) a *formação didático-pedagógica*, geralmente dissociada da matemática acadêmica e das práticas reais (vigentes ou inovadoras) de sala de aula nas escolas atuais; e (3) a *prática*

> *profissional*, que trabalha uma matemática mais alinhada a uma tradição escolar e distante da matemática que a Licenciatura privilegia e, de outro lado, que possui/desenvolve uma prática didático-pedagógica construída, tendo por base uma tradição pedagógica e/ou o enfrentamento consciente dos problemas e desafios das diferentes realidades complexas da escola brasileira. (FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013, p. 933, itálico como no original)

A tricotomia identificada pelos autores dialoga com nossas questões de pesquisa, uma vez que coloca a Matemática Acadêmica, e a visão constituída sobre a mesma, no centro da discussão sobre a formação do professor de Matemática. É importante destacar que a problemática apresentada pelos autores não tem o intuito de desvalorizar ou reduzir o saber acadêmico. Ela aponta para a necessidade de reconhecer as demandas do ensino de Matemática e as especificidades do conhecimento de conteúdo do professor para o ensino. Nesse sentido, é preciso refletir sobre a matemática privilegiada na Licenciatura, que tem como premissas o rigor e o formalismo, e questionar qual seu papel na formação docente. Consideramos, em nossa investigação, que a formação de uma cultura matemática que valoriza o conhecimento acadêmico na Licenciatura, exclusivamente a partir de sua perspectiva formal, reforça ainda mais a demarcação da tricotomia apontada por Fiorentini e Oliveira (2013).

Moreira (2012) aponta que o caminho para a superação da lógica do 3+1 na Licenciatura em Matemática passa por: reconhecer a especificidade dos saberes matemáticos que estão relacionados com a prática docente e repensar a Matemática do Ensino Superior a partir da aceitação da existência de uma matemática própria do professor. Nessa perspectiva, os saberes necessários ao professor diferem do conhecimento do pesquisador matemático, por exemplo.

Dessa maneira, a formação na Licenciatura não deve ser vista como uma extensão do Bacharelado, uma vez que estão sendo formados profissionais distintos nesses cursos e que necessitam de conhecimentos matemáticos também distintos. Moreira (2012) ressalta que a matemática relevante para o matemático não possibilita ao professor um olhar profissional específico para a sala de aula da escola, da mesma maneira que a matemática relevante para a escola não fornece ao matemático uma visão específica para a produção de novos resultados no meio acadêmico. Por esse motivo, a formação matemática do professor na Licenciatura deve ter o compromisso de produzir um olhar singular sobre a Educação Básica.

Moreira e Ferreira (2013) identificam duas vertentes de visões subjacentes aos estudos dos últimos 30 anos sobre o conhecimento matemático do professor e o lugar da Matemática na sua formação inicial. A primeira vertente procura entender o conhecimento matemático para o ensino em termos das especificidades da prática docente e não, preponderantemente, através da disciplina acadêmica em si. Em uma segunda vertente, valoriza-se preponderantemente o conhecimento do conteúdo acadêmico na prática docente na escola e na definição do lugar da Matemática na formação do professor. Nessa perspectiva, o conhecimento do professor é visto como um subconjunto da Matemática concebida pelos matemáticos.

Para Fiorentini e Oliveira (2013), antes de debater sobre o lugar da Matemática na Licenciatura, deve-se analisar e discutir a prática social do educador matemático, evidenciando os saberes mobilizados e exigidos por essa prática. Em meio às múltiplas interpretações e concepções de prática do educador matemático, os autores destacam três perspectivas que têm impacto na maneira de organizar a formação docente: a *primeira perspectiva* parte do princípio que a prática do professor de Matemática pode ser vista como essencialmente prática, bastando a ele apenas o domínio do conhecimento matemático; a *segunda perspectiva* vê a prática docente como campo de aplicação de conhecimento produzido pela pesquisa acadêmica e, na *terceira perspectiva*, a prática pedagógica da matemática é vista como prática social, sendo constituída de saberes e relações complexas.

Em conformidade com a terceira perspectiva apontada por Fiorentini e Oliveira (2013), Moreira (2012) declara que a matemática do professor o constrói enquanto profissional ao mesmo tempo em que é construída historicamente pelo docente e por seus alunos nas interações de sala de aula. Por conta disso, o autor acrescenta que a matemática do professor não é composta por uma soma pura e simples de conteúdo e ensino, uma vez que não deve ser concebida desvinculada de gente. Fiorentini e Oliveira (2013) acrescentam que a matemática está presente, direta ou indiretamente, nas práticas sociais e, nesse sentido, se constitui como um saber de relação.

> Em todas essas práticas sociais, a matemática está, direta ou indiretamente, presente. Essa matemática, entretanto, nunca aparece hermética e isolada em relação a outros saberes e campos disciplinares. Não faz sentido falar de *uma* Matemática (com letra maiúscula), mas de matemática (com letra minúscula) ou então de *matemáticas*, pois as matemáticas são múltiplas, dependendo do contexto de prática social (FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013, p. 922, itálico como no original)

A concepção adotada nesta pesquisa se articula com a terceira perspectiva de Fiorentini e Oliveira (2013), que concebe a atividade matemática como prática social que não pode ser desvinculada de gente e das interações sociais e culturais que se constituem nos processos de ensino e aprendizagem. Dessa maneira, nos apropriando do termo utilizado pelos autores, acreditamos que o conhecimento do professor se molda a partir das diversas *matemáticas* que são apresentadas em sua formação. Ou ainda, sendo mais específico, a partir das percepções e concepções que se constituem na Licenciatura sobre essas *matemáticas*. Nesse sentido, consideramos que a visão sobre a natureza da Matemática constituída na formação docente pode ser determinante para a formação das concepções dos licenciandos sobre a mesma.

Essa concepção contrasta com a segunda perspectiva, que vê a prática docente como campo de aplicação de conhecimento produzido pela pesquisa acadêmica. É comum verificarmos essa concepção nas aulas de Matemática ministradas no ensino superior. Na opinião de muitos matemáticos formadores que atuam na Licenciatura, uma boa formação docente requer o domínio *sólido* do conhecimento matemático por parte do licenciando, em sua forma pura e abstrata. Fiorentini e Oliveira (2013) questionam o uso do termo *sólido* para qualificar a formação docente, uma vez que o significado dessa expressão ganha uma conotação de rigidez e imobilidade. Segundo os autores, esse adjetivo é próprio de uma concepção de matemática que privilegia o rigor e sua consistência lógica, que coloca o conhecimento matemático como algo pronto e imutável e que, consequentemente, não permite o aluno explorar, interpretar, investigar e criar. Moreira e Ferreira (2013) complementam esse ponto de vista ao destacar que, embora se defenda uma formação *sólida* em Matemática para o futuro professor, na maioria das vezes, não se esclarece o que efetivamente constituiria essa *solidez*, ou ainda, não fica explícito o seu impacto na prática docente.

Para Fiorentini e Oliveira (2013), reconhecer a matemática do professor como um saber de relação a diferencia epistemológica e metodologicamente da matemática do matemático acadêmico. No entanto, destacam que essa afirmação não significa que a formação do professor deva apresentar uma matemática mais simples ou superficial. Ao contrário, os autores defendem que o professor precisa compreender com *profundidade* e *diversidade* a matemática enquanto prática social. Em seguida, esclarecem que:

> Quando nos referimos à necessidade de o professor conhecer com *profundidade* as matemáticas, especialmente a escolar, queremos dizer que não basta o professor dominar procedimentos matemáticos e saber utilizá-los em demonstrações ou na resolução de exercícios e problemas. Para a docência em matemática é importante que o professor saiba justificar esses procedimentos, conheça outros procedimentos histórico-culturalmente produzidos, conheça os conceitos e ideias atuais, bem como a evolução histórica dos mesmos.
> [...] Em relação à *diversidade*, queremos destacar que o conhecimento matemático do professor não se limita aos aspectos conceituais, procedimentais e atitudinais da matemática escolar ou acadêmica. A compreensão da matemática, enquanto objeto de ensino e aprendizagem, implica, também, conhecer sua epistemologia e história,

> sua arqueologia e genealogia, sua linguagem e semiose e sua dimensão político-pedagógica no desenvolvimento das pessoas e da cultura humana. A matemática também precisa ser compreendida em sua relação com o mundo, enquanto instrumento de leitura e compreensão da realidade e de intervenção social, o que implica uma análise crítica desse conhecimento. (FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013, p. 924-925, itálico como no original)

Deve estar claro, porém, que conhecer matemática com profundidade não é aprender matemática por ela mesma. No entendimento deste trabalho, é preciso sim conhecer matemática profundamente para lecionar, no entanto, entendemos que o conhecimento matemático não deve ser utilizado como uma ferramenta para adestrar o aluno a assimilar técnicas, mas para estimular a reflexão sobre o conteúdo e sua compreensão. Consideramos que esse requisito não é necessário apenas a um licenciando, mas é também essencial ao aprendizado de um aluno de Bacharelado ou de qualquer outro estudante de Matemática.

De acordo com a concepção adotada nesta pesquisa, é necessário – e com certa urgência – uma reavaliação do papel do conhecimento matemático na formação docente, refletindo sobre qual matemática deve estar presente na Licenciatura e como ela se articula com prática. Tampouco, defender que as disciplinas acadêmicas na formação do professor tenham um vínculo maior com a prática docente quer dizer que a matemática na Licenciatura deva ser facilitada ou simplificada. Ressaltamos que, na perspectiva deste trabalho, a formação do professor de Matemática passa por um viés de integração dos saberes necessários ao docente, porém sem deixar de tratar com profundidade o conteúdo matemático. Repensar o lugar da Matemática na Licenciatura não significa propor o enfraquecimento do conteúdo matemático na formação do professor. Ao contrário, defendemos que a reflexão conceitual problematizada sobre os conceitos matemáticos, de maneira articulada à futura prática docente, é uma maneira de valorizar e aprofundar o conteúdo matemático, além de tornar a formação do professor de Matemática ainda mais sólida.

Portanto, conforme Fiorentini e Oliveira (2013) frisam, para um reforma na formação docente, não basta modificar ementas ou reestruturar grades curriculares. É necessário, também, “adotar posturas que apontem para uma visão mais integradora do curso, sem deixar de aprofundar, numa perspectiva multirrelacional, epistemológica e histórico-cultural, o conteúdo específico” (FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013, p. 935). Nesse sentido, conforme Moreira e Ferreira (2013) complementam, ao conceber o conhecimento matemático do professor como um saber específico e singular para a sala de aula, o lugar da Matemática na Licenciatura não se reduziria a um nicho isolado que precisa ser conectado por outros, mas estaria presente em diversos lugares e momentos do currículo da formação docente.

> Assim concebida, parece que o lugar dessa *matemática do professor* na Licenciatura não se reduz a um nicho próprio, isolado, que precisa ser conectado artificialmente a outros nichos isolados. Essa matemática estaria presente, de modo natural, em diversos lugares e momentos do currículo de formação, desde as disciplinas tradicionalmente referidas como de *conteúdo matemático* (e.g., Geometria, Álgebra), até o Estágio Supervisionado e a Prática de Ensino, a Didática, passando, também, pelas práticas de investigação em sala de aula, modelagem matemática, resolução de problemas, pela história da matemática e da educação matemática, atravessando, inclusive, as discussões sobre avaliações e objetivos da educação escolar. Nesse caso, idealmente pelo menos, diversos lugares e diversos saberes matemáticos da formação se intersectariam sem se acotovelarem, algo próximo do que parece ocorrer efetivamente na prática docente escolar em matemática. (MOREIRA, FERREIRA, 2013, p. 1003-1004, itálico como no original)

Esse caminho proposto pelos autores indica que o currículo da Licenciatura em Matemática não deve ser centralizado apenas no conteúdo, mas sim percorrer toda a diversidade dos saberes matemáticos para o ensino. Dessa maneira, acreditamos que o lugar da Matemática na formação do professor não se resume exclusivamente ao conhecimento sobre o conteúdo *per se*, mas perpassa por diversos outros saberes necessários ao ensino que se aglutinam em um conhecimento matemático específico direcionado às demandas de sala de aula. De acordo com a posição adotada nesta pesquisa, a demarcação do lugar da Matemática na Licenciatura se caracteriza através do reconhecimento das especificidades dos saberes docentes, da reflexão conceitual problematizada sobre o conhecimento matemático, apresentado sob uma ótica voltada à futura prática docente, e, sobretudo, através de uma visão diversificada sobre a natureza da Matemática.

Logo, mais do que uma reforma no currículo das Licenciaturas, consideramos necessária uma mudança na concepção adotada em suas disciplinas, a partir de uma profunda reflexão sobre o papel que cada uma desempenha na formação do docente. Entendemos que, além do reconhecimento das especificidades dos saberes docentes para o ensino, essa mudança passa pela articulação e integração entre universidade e Educação Básica. Somente a partir de um olhar sobre a prática, e para a prática, o lugar da Matemática na Licenciatura se tornará evidente e bem estabelecido na formação docente.

CAPÍTULO III – Metodologia

Neste capítulo, apresentaremos o percurso metodológico desta pesquisa desde a definição e elaboração dos instrumentos metodológicos, passando pela coleta de dados, até chegar à análise dos dados da investigação. A metodologia adotada estabelece este trabalho como uma pesquisa qualitativa, cujos instrumentos objetivam a exploração e a interpretação das percepções dos participantes sobre as questões abordadas.

O capítulo está estruturado em cinco seções: a primeira situa o contexto da realização das atividades de pesquisa; a segunda apresenta os instrumentos metodológicos usados na investigação; a terceira seção descreve o processo de elaboração das tarefas aplicadas na pesquisa e explicita seus objetivos; a quarta versa sobre os procedimentos de coleta de dados e a última seção descreve a trajetória de análise de dados.

3.1 Contexto da Realização das Atividades de Pesquisa

A pesquisa de campo foi realizada em uma turma da disciplina Análise I ministrada no curso noturno de Matemática (Licenciatura e Bacharelado) de uma universidade pública do Rio de Janeiro. Além da viabilidade operacional, decorrente de minha atuação anterior enquanto aluno e professor substituto nesta universidade, a escolha por essa instituição é justificada pelo desejo de investigar e compreender melhor determinados aspectos – apresentados na problemática desta pesquisa – que caracterizaram minha formação docente.

Oficialmente, na turma em que a pesquisa foi realizada, havia 16 alunos inscritos e um aluno ouvinte que comparecia às aulas regularmente. Entretanto, em conversa preliminar com o professor da disciplina, foi relatado que alguns estudantes abandonaram o curso, restando cerca de 10 alunos regulares no momento inicial da coleta dos dados, sendo que um destes era o aluno ouvinte.

Nesta instituição, os alunos ingressantes matriculam-se no curso de Matemática e escolhem a ramificação (Licenciatura ou Bacharelado) de seu interesse no decorrer da graduação, podendo também cursar ambas simultaneamente. Por esse motivo, não há diferenciação entre as disciplinas de conteúdo matemático (em particular, Análise I) para Licenciatura e Bacharelado.

De acordo com as informações obtidas no site da instituição, verificamos que a disciplina de Análise Real é obrigatória para alunos de Licenciatura e Bacharelado e está situada no 5º período do currículo de ambos os cursos. Para inscrever-se na disciplina, o aluno deve ter sido aprovado nos cursos de Cálculo. Por sua vez, a aprovação em Análise I torna-se pré-requisito para a inscrição na disciplina de História da Matemática. O curso de Análise I, nesta instituição, é semestral e possui carga horária total de 90 horas, compreendidas em 6 hora-aulas semanais.

Segundo a ementa da disciplina (encontrada no site da instituição), durante o curso são abordados os seguintes conteúdos:

- Números reis;
- Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis;
- Sequências de números reais;
- Séries numéricas;
- Funções reais de uma variável;
- Continuidade uniforme;
- Diferenciabilidade;
- Integral de Riemann;
- Sequências e séries de funções;
- Convergência pontual e convergência uniforme

No mesmo programa da disciplina, também são apresentados os objetivos do curso: “Ao final do curso o aluno deverá reconhecer bem os conceitos de sequências, séries, diferenciabilidade e integrais em uma variável e aplicá-las adequadamente”. Embora tenhamos apresentado a ementa e os objetivos da disciplina de Análise nesta universidade, ressaltamos, entretanto, que este trabalho não se propõe a observar o curso de Análise no qual a pesquisa se desenvolveu ou, tampouco, fazer juízo de valor sobre a proposta de ensino adotada pelo professor da disciplina. Por esse motivo, no desenvolvimento metodológico desta pesquisa, não observamos as aulas ministradas no curso de Análise Real considerado e não coletamos dados nessa direção.

Apesar de considerarmos que o professor da disciplina e a maneira como o curso foi ministrado representam variáveis importantes nesta investigação, não fizemos observações nesse sentido durante a coleta de dados. As reflexões apontadas neste trabalho se referem, exclusivamente, aos participantes desta investigação após cursarem, especificamente, o curso de Análise em questão. Esclarecemos que não temos o intuito de generalizar as conclusões do pesquisador e os resultados apresentados nesta pesquisa. Obviamente, outras reflexões, questionamentos e conclusões poderiam ser levantados em outro contexto, com outros alunos e professores de um curso de Análise.

3.2 Instrumentos Metodológicos

Para a coleta de dados, foram utilizados três tipos de instrumentos metodológicos que demarcaram as etapas da investigação:

1. **Questionário** – O questionário foi elaborado com sete questões (anexo I) sobre a trajetória acadêmica dos participantes da pesquisa e sobre o papel da disciplina de Análise na formação docente. Os sujeitos da pesquisa tinham que responder ao questionário individualmente e por escrito.

O objetivo deste instrumento era traçar um perfil de cada participante e mapear suas impressões sobre a disciplina de Análise em sua própria formação.

2. **Tarefas** – Nesta etapa, os alunos deviam responder questões relacionadas a três tarefas (anexo II) que abordavam o Teorema do Valor Intermediário no contexto de um curso de Análise e em uma aplicação no contexto da Educação Básica. As questões das tarefas não se resumiam à resolução dos exercícios propostos, mas englobavam também análises e reflexões pedagógicas sobre soluções hipotéticas de alunos. Os participantes deveriam responder as questões propostas nas tarefas individualmente e por escrito.

Este instrumento tinha como objetivo inicial investigar a articulação realizada pelos participantes entre o conteúdo de Análise e o conteúdo do ensino básico, além de verificar o entendimento sobre o Teorema do Valor Intermediário e sobre suas hipóteses. Somado a esse objetivo, as tarefas foram elaboradas com o intuito de provocar a manifestação das percepções dos participantes sobre o curso de Análise na formação docente e sobre a natureza da Matemática, principalmente relacionadas ao rigor no processo de validação matemática. Inesperadamente, tal propósito acabou se materializando como a principal contribuição da tarefa após emergirem, no desenvolvimento da investigação, aspectos de uma cultura matemática que determinou os critérios de legitimação desses licenciandos sobre as argumentações matemáticas apresentadas nas tarefas.

3. Entrevistas semiestruturadas pós-tarefas – Nesta etapa final, foram realizadas, individualmente, entrevistas semiestruturadas pós-tarefas (gravadas em áudio) com determinados participantes selecionados a partir dos resultados das etapas anteriores. As perguntas da entrevista foram elaboradas após uma análise inicial das tarefas e nortearam o diálogo. Porém, o conjunto de questões pré-estabelecidas não correspondia a um modelo fixo, pois algumas consideravam a resposta individual do participante e outras, por vezes, eram modificadas no decorrer da entrevista de acordo com a relevância da discussão.

O objetivo deste instrumento metodológico era ampliar a discussão sobre as respostas apresentadas pelos participantes no questionário e nas tarefas e conhecer, de maneira mais detalhada, suas impressões e justificativas sobre os registros feitos nas etapas anteriores. Esse instrumento permitiu enriquecer os dados da pesquisa e esclarecer as percepções e conhecimentos revelados pelos participantes no questionário e nas tarefas.

No nosso entendimento, as três etapas se complementaram e a articulação de seus resultados permitiu compreender e interpretar melhor os dados da pesquisa no momento da análise. Podemos destacar, principalmente, que a entrevista semiestruturada, elaborada a partir dos resultados encontrados nas tarefas, enriqueceu os dados e possibilitou novos caminhos para a pesquisa. Ao confrontar o discurso dos participantes nas entrevistas com os resultados apresentados nas tarefas, verificamos que emergiam dos dados aspectos que não estavam nos objetivos iniciais do estudo. Neste caso, a dinâmica da investigação modificou o olhar inicial sobre a pesquisa e foi determinante para a reformulação de suas questões e objetivos, culminando na observação da cultura matemática que emergia no discurso dos licenciandos nas tarefas e na entrevista semiestruturada.

3.3 Tarefas

Nesta seção, iremos justificar o delineamento das tarefas, descrever seus objetivos e apresentar os autores que serviram como inspiração metodológica para a escolha deste instrumento. Acreditamos que a proposição de tarefas como recurso metodológico de pesquisa na formação docente constitui uma importante ferramenta para explorar o conhecimento matemático do professor e, também, suas percepções sobre questões pedagógicas específicas da prática docente.

Os trabalhos de Biza, Nardi e seus colaboradores (BIZA, NARDI, ZACHARIADES, 2007, 2009, 2012; NARDI, BIZA, WATSON, 2014) sobre tarefas na formação do professor foram utilizados como inspiração metodológica para a elaboração das tarefas apresentadas nesta pesquisa. De acordo com a metodologia de Biza, Nardi e Zachariades (2007), as tarefas devem seguir a seguinte estrutura:

- Resolver um problema matemático dado, e refletir sobre seus objetivos de aprendizagem;
- Examinar soluções de alunos (possivelmente fictícias);
- Descrever o retorno (feedback) que seria dado ao aluno.

Os autores acrescentam que a análise das respostas de professores neste tipo de tarefa pode cumprir os seguintes objetivos:

> **1.** Explorar o conhecimento de conteúdo dos professores – essencial em termos de seu movimento para determinados tipos de pensamento matemático – e identificar questões que a sua preparação para a sala de aula precisam tratar [...].
> **2.** Explorar o movimento dos professores em relação a certos tipos de pedagogia e, crucialmente, explorar como as suas preferências interagem e são influenciados pelo item anterior [...].
> **3.** Explorar o movimento dos professores em relação a certos tipos de prática didática, fundamentalmente, à luz dos itens anteriores e por meio do tipo do retorno (feedback) que dariam ao estudante [...].[11] (BIZA, NARDI, ZACHARIADES, 2007, p. 302, tradução nossa)

A dinâmica proposta pelas tarefas possibilita ao professor testar seu conhecimento de conteúdo, explorar as dificuldades dos alunos, desenvolver habilidades para identificar os erros dos estudantes, corrigi-los e conceber um retorno aos alunos. Dessa maneira, o professor pode explorar elementos que enriquecem sua prática e os processos de ensino-aprendizagem. Identificar o objetivo pedagógico subjacente a um determinado conteúdo; perceber a sutileza de um erro e averiguar sua causa; estimular a discussão entre a turma a partir do erro em uma solução de aluno; extrair os benefícios didáticos presentes no erro de um aluno, permitindo guiá-lo à solução; formam requisitos necessários ao professor em sala de aula que são

[11] No original:
1. Explore teachers' subject-matter knowledge – crucially in terms of its gravitation towards certain types of mathematical thinking – and identify issues that their preparation for the classroom needs to address […].
2. Explore teachers' gravitation towards certain types of pedagogy and, crucially, explore how their preferences interact and are influenced by 1 […].
3. Explore teachers' gravitation towards certain types of didactical practice, crucially, in the light of 1 and 2 and through the type of feedback they state they would provide to the student […]. (BIZA, NARDI, ZACHARIADES, 2007, p. 302)

investigados na execução das tarefas propostas pelos autores. De modo a extrair todo seu potencial de pesquisa, Biza, Nardi e Zachariades (2007) afirmam que, ao elaborar as tarefas, o pesquisador deve levar em consideração que:

> - O conteúdo matemático da tarefa deve se referir a um tópico ou uma questão que é conhecida por sua sutileza ou por causar dificuldade aos alunos (a partir da literatura e/ou de experiências prévias).
> - A resposta fictícia do aluno deve refletir essa sutileza (ou ausência de) ou dificuldade e oferecer uma oportunidade para o professor refletir e demonstrar as maneiras pelas quais ele/ela iria ajudar o aluno a alcançar essa sutileza ou superar essa dificuldade.
> - Tanto o conteúdo matemático quanto a resposta fictícia do aluno devem proporcionar um contexto no qual as escolhas dos professores (matemáticas, pedagógicas e didáticas) são levadas à tona.[12] (BIZA, NARDI, ZACHARIADES, 2007, p. 303, tradução nossa)

Nardi, Biza e Zachariades (2012) consideram que as atividades baseadas em tarefas revelam um enorme potencial em pesquisa sobre formação de professores, especialmente quando combinadas com entrevistas pós-tarefa. Por esse motivo, com o objetivo de aprofundar ainda mais a reflexão sobre as tarefas, optamos por realizar entrevistas pós-tarefas com participantes selecionados a partir de seus resultados. Esse instrumento metodológico permite enriquecer os dados da pesquisa e ampliar a discussão sobre as respostas apresentadas pelo entrevistado nas etapas anteriores, esclarecendo suas percepções e conhecimentos revelados nas tarefas.

Para realizar nossa investigação, foram elaboradas três tarefas. A primeira tarefa estava inserida no contexto da Educação Básica e foi delineada baseada nos trabalhos de Biza, Nardi e seus colaboradores, seguindo o modelo e a estrutura apresentados pelas autoras. Por sua vez, a segunda tarefa não seguiu o conceito de tarefas das autoras e se preocupou apenas com a verificação da validade de determinadas afirmações sobre um conteúdo de Análise. Já a terceira tarefa, estava inserida no contexto de um curso de Análise e foi elaborada a partir da exposição de duas demonstrações do Teorema do Valor Intermediário. Embora esta última tarefa não se enquadre fielmente no modelo de Biza e Nardi, nos inspiramos na estrutura

---

[12] No original:

- The mathematical content of the task concerns a topic or an issue that is known for its subtlety or for causing difficulty to students (from literature and/or previous experience).
- The fictional student response reflects this subtlety (or lack of) or difficulty and provides an opportunity for the teacher to reflect on and demonstrate the ways in which s/he would help the student achieve subtlety or overcome difficulty.
- Both mathematical content and fictional student response provide a context in which teachers' choices (mathematical, pedagogical and didactical) are allowed to surface. (BIZA, NARDI, ZACHARIADES, 2007, p. 303)

proposta pelas pesquisadoras ao solicitar a análise das demonstrações e a descrição do retorno dado aos alunos (fictícios) que elaboraram as demonstrações.

Destacamos que todas foram nomeadas pelo termo *tarefa*, mesmo que não estivessem inseridas no modelo de Biza e Nardi. Para esclarecer uma possível ambiguidade deste termo, nos baseamos no trabalho de Ponte (2014) sobre tarefas no ensino e na aprendizagem de Matemática. De acordo com o autor, as tarefas são o elemento organizador da atividade de quem aprende e são importantes, sobretudo, pela maneira como podem (ou não) dar origem à atividade educacional. Porém, o autor alerta que o termo *atividade* também ocupa um lugar de grande evidência na Educação Matemática e que sua popularidade e utilização em excesso tornaram seu significado ambíguo, principalmente quando confrontado com o termo *tarefa*.

Ponte (2014) afirma que uma atividade diz respeito, essencialmente, ao aluno e se refere àquilo que ele faz num dado contexto, podendo incluir a execução de diversas tarefas neste processo. Por sua vez, “a tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele)” (PONTE, 2014, p. 15). O autor acrescenta que:

> Em resumo, as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Uma *tarefa* pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar. Pode dar lugar a *atividades* diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior. Por outro lado, uma atividade corresponde a uma ou mais tarefas realizadas no quadro de uma certa situação. É pela sua atividade e pela sua reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende, mas é importante ter presente que esta depende de dois elementos igualmente importantes: (i) a tarefa proposta; e (ii) a situação didática criada pelo professor. (PONTE, 2014, p. 13, itálico como no original)

Portanto, fundamentado em Ponte (2014), entendemos que tarefas, neste trabalho, são as ferramentas que mobilizam as atividades de ensino e aprendizagem matemática em um determinado contexto. Assim, consideramos que, para realizar esta investigação, foram propostas e aplicadas três tarefas.

Todas as três tarefas versavam sobre ideias relacionadas ao Teorema do Valor Intermediário. A escolha do tema buscou considerar um conteúdo de Análise que estivesse relacionado com a Educação Básica. A motivação para sua escolha se desenvolveu ao notar, em minha experiência docente, que alguns professores do ensino básico relacionavam a existência de zeros de uma função a sua mudança de sinal em um determinado intervalo. Ao pronunciarem essa afirmação, os professores não evidenciam aos alunos (ou não conhecem) as hipóteses necessárias para a aplicação deste resultado. Assim, exatamente por conta de seu forte apelo visual e intuitivo em contraposição com o rigor das hipóteses para sua aplicação, o Teorema do Valor Intermediário foi escolhido para ser o tema central de todas as tarefas.

As tarefas foram elaboradas com o intuito de verificar a articulação realizada pelos licenciandos entre o conteúdo de Análise e o conteúdo da Educação Básica, além de provocar a manifestação de suas percepções sobre a Matemática nos contextos do ensino básico e superior. O propósito era, a partir da argumentação do licenciando, verificar: a maneira como o participante observava o formalismo matemático em um curso de Análise, como identificava esse formalismo a sua aprendizagem e como ele relacionava esses elementos (formalismo e sua aprendizagem em Análise) a uma atuação no ensino básico. Desejava-se, portanto, verificar se (e como) existe uma relação entre a maneira como ele observa a matemática formal e suas expectativas sobre a futura prática docente.

A seguir, descrevemos como cada tarefa foi elaborada e os objetivos pretendidos. Tais tarefas podem ser observadas no anexo II.

- **Tarefa 1** – O objetivo inicial desta tarefa era verificar se os futuros professores relacionavam o Teorema do Valor Intermediário, apresentado no curso de Análise, com um exercício de ensino básico onde era necessário identificar zeros de uma função. Dessa maneira, pretendíamos investigar como os licenciandos (e futuros professores) articulavam (ou não) conceitos da matemática superior, que aparecem implícitos em questões do ensino básico, em um contexto de sala de aula.

A tarefa consistia em um exercício, no contexto do Ensino Médio, que abordava a existência ou unicidade de zeros de uma função em determinados intervalos. Foram apresentadas duas soluções hipotéticas de alunos para o problema. A primeira solução era baseada em uma argumentação gráfica que considerava a aplicação do Teorema do Valor Intermediário de forma equivocada, pois não levava em conta a descontinuidade da função. A segunda solução utilizava o artifício algébrico de pesquisa de raízes racionais e apresentava como erro a consideração de que o método era suficiente para encontrar todos os zeros da função.

As duas soluções foram delineadas com o intuito de articular um conteúdo de Análise com a Educação Básica e contrapor uma argumentação gráfica e mais visual com outra mais algébrica, que seguia uma estética mais simbólica. Dessa maneira, buscava-se: identificar as percepções do licenciando sobre a natureza da Matemática no contexto do ensino básico e investigar como ele articulava sua formação com as expectativas sobre a futura prática docente.

- **Tarefa 2** – O objetivo inicial desta tarefa era verificar a compreensão sobre o significado do enunciado do Teorema do Valor Intermediário e das hipóteses para sua aplicação. O intuito desta tarefa não era verificar o acerto ou erro do licenciando nas questões propostas. O mais importante, neste momento, era observar o que emergia em sua argumentação que estava relacionado a suas percepções sobre a Matemática e de que maneira isto se articulava com os argumentos utilizados pelo licenciando na tarefa anterior voltada ao ensino básico.

A tarefa era composta por cinco afirmações que deviam ser classificadas em verdadeiras ou falsas e justificadas pelo participante. Os enunciados dessas afirmações correspondiam a modificações nas hipóteses ou na tese do Teorema do Valor Intermediário. Dos cinco itens, apenas um deles era verdadeiro e correspondia ao caso particular do teorema, que aborda a existência de zeros de uma função contínua em um intervalo. Destacamos que, nesta tarefa, a apresentação de contraexemplos gráficos era suficiente para justificar as afirmações falsas. Assim, a tarefa foi delineada de maneira que possibilitasse confrontar os aspectos que os participantes consideravam relevantes no processo de validação matemática enquanto cursavam Análise.

- **Tarefa 3** – Esta tarefa tinha como objetivo inicial investigar como o licenciando analisava os argumentos presentes na demonstração do Teorema do Valor Intermediário. Nesse sentido, pretendia-se observar como os participantes relacionavam determinados aspectos presentes em uma prova – como, por exemplo, o rigor e a estética da argumentação – com suas percepções sobre a natureza da Matemática e com seus critérios de validade sobre uma argumentação.

A Tarefa 3 abordava a análise de duas demonstrações do Teorema do Valor Intermediário. Esta tarefa foi especificamente desenhada para contrapor uma prova que apresentava uma estética, essencialmente, simbólica e formal com uma demonstração que exibia alguns argumentos gráficos, entretanto, sem carecer de rigor. As questões propostas buscavam observar quais destes aspectos emergiam no discurso do participante e de que maneira seus critérios de legitimação de uma argumentação matemática podiam ser influenciados pela maneira como ela era apresentada.

É importante ressaltar que a finalidade de todas as tarefas não era medir o conhecimento do licenciando ou julgar sua capacidade a partir do paradigma do erro. Seu objetivo era provocar a manifestação das percepções dos participantes sobre a natureza da Matemática, relacionadas, principalmente, à percepção sobre rigor no processo de validação matemática em questões do ensino básico e superior.

3.4 Coleta de Dados

O professor da disciplina de Análise I do curso noturno de Matemática nos cedeu, gentilmente, dois dias de suas aulas necessários à aplicação do questionário e das tarefas. A coleta de dados ocorreu no horário da aula (18:00 às 19:30) nos dias 10/07/2015 e 13/07/2015. Anteriormente a essas datas, não houve encontro entre o pesquisador e os alunos da turma. Optamos por realizar a coleta de dados próximo ao final do curso a fim que houvesse tempo suficiente para a apresentação do Teorema do Valor Intermediário e por entender que, neste momento, o aluno já teria amadurecido uma visão própria sobre a natureza da disciplina e sobre seu conteúdo.

Os encontros foram planejados a partir de um cronograma pré-determinado que sofreu modificações no momento da aplicação, de acordo com as necessidades de tempo dos alunos e com os imprevistos ocorridos. Por exemplo, a dinâmica era para ser iniciada às 18:00, porém houve a necessidade de aguardar trinta minutos até que houvesse uma quantidade satisfatória de participantes na aula. Por esse motivo, em ambos os dias, foi necessário descartar uma etapa de discussão sobre as impressões dos participantes sobre as tarefas. Entretanto, essa etapa era considerada apenas uma fase complementar à aplicação das tarefas e não representava um instrumento metodológico que seria usado na análise dos dados. Diante desse imprevisto, as aplicações seguiram o cronograma abaixo:

Data	Horário	Temática
10/07/2015	18:30 - 18:40	Apresentação
	18:40 - 18:55	Preenchimento do Questionário
	18:55 - 19:30	Resolução da Tarefa 1
13/07/2015	18:30 - 18:35	Apresentação
	18:35 - 19:05	Resolução da Tarefa 2
	19:05 - 19:30	Resolução da Tarefa 3

Tabela 1: Cronograma da Aplicação do Questionário e das Tarefas

Os horários acima não eram fixos, mas apenas norteadores para a aplicação das tarefas. Os alunos deviam responder o questionário e as tarefas individualmente e por escrito. Durante essas etapas, o pesquisador não realizou qualquer intervenção. O único momento de diálogo ocorreu na fase de apresentação nos dois dias, na qual o pesquisador apresentou-se, descreveu sua pesquisa, solicitou a autorização dos participantes e explicou a dinâmica de cada etapa. É importante ressaltar que, neste momento, cada participante assinou, voluntariamente, um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (anexo III), no qual declarava concordar com sua participação na pesquisa e autorizava a gravação em áudio das entrevistas pós-tarefas.

No primeiro encontro, seis alunos estiveram presentes enquanto que, no segundo dia, quatro alunos participaram das tarefas. Entre todos os participantes, três deles compareceram aos dois encontros. Por entendermos que todas as tarefas estão relacionadas e que sua articulação tornava-se fundamental para interpretarmos os resultados da pesquisa, concentramos nossa investigação nos três participantes presentes nos dois dias e realizamos, apenas com eles, as entrevistas semiestruturadas pós-tarefas. Assim, definimos esses três participantes como os sujeitos desta pesquisa e atribuímos a eles os seguintes nomes fictícios: Jorge, Alexandre e Rodrigo.

As entrevistas com os três participantes foram realizadas individualmente e ocorreram nos dias 15/10/2015 e 16/10/2015 com o curso de Análise I já encerrado. Além da presença dos sujeitos da pesquisa e da mediação do pesquisador, as entrevistas contaram com a presença do coorientador deste trabalho que atuou realizando anotações de campo e intervenções pontuais. O longo intervalo entre a aplicação das tarefas e a realização das entrevistas ocorreu devido ao período de análise inicial dos dados das etapas anteriores e à elaboração das perguntas que nortearam a discussão. Além disso, este hiato compreendeu o recesso da universidade decorrente da transição entre os períodos de atividade acadêmica.

As entrevistas com os sujeitos da pesquisa não tinham duração estimada. Seu término estava atrelado ao esgotamento dos assuntos abordados nas perguntas que estruturavam a entrevista e, principalmente, à disposição dos participantes em dialogar e promover a discussão. A tabela abaixo explicita a duração dos encontros.

Data	Participante	Duração
15/10/2015	Jorge	1h 19 min
	Alexandre	1h 54 min
16/10/2015	Rodrigo	1h 20 min

Tabela 2: Duração das Entrevistas Semiestruturadas Pós-tarefas

Por se tratar de uma entrevista semiestruturada, é importante destacar que a discussão não era fechada em questões previamente formuladas, desenvolvendo-se, também, a partir do discurso dos sujeitos da pesquisa e de seu contexto. Desse modo, esclarecemos que a interação com os participantes nas entrevistas ocorreu após uma análise inicial sobre seus registros nas tarefas, o que levou o pesquisador (ou o coorientador), em determinados momentos, a provocar discussões sobre inferências realizadas a partir dos dados já disponíveis (tarefas e a própria entrevista em evolução). Ao reforçar determinadas questões, com o intuito de fomentar o discurso, concedíamos ao entrevistado a oportunidade de se posicionar sobre o tema e confirmar ou refutar essas inferências.

Dessa maneira, consideramos como dados da pesquisa os registros de Jorge, Alexandre e Rodrigo no questionário e nas tarefas, além de seus pronunciamentos nas entrevistas semiestruturadas pós-tarefas.

3.5 Análise de Dados

Após a realização de todas as etapas da coleta de dados, decidimos concentrar a análise dos resultados nos participantes que estiveram presentes em todas as fases da investigação. Acreditamos que os resultados do questionário, das tarefas e das entrevistas só ganham sentido nesta pesquisa se analisados e interpretados de maneira articulada.

O período de análise de dados teve início após a aplicação do questionário e das tarefas. Em um primeiro momento, observamos os registros escritos dos participantes com o objetivo de identificar os aspectos principais que deviam ser aprofundados ou esclarecidos nas entrevistas pós-tarefas. Essa análise inicial foi necessária para a elaboração das perguntas que iriam nortear a discussão nas entrevistas e foi realizada mediante uma perspectiva já articulada às questões de pesquisa.

Em seguida à realização das entrevistas, recorremos ao trabalho de Powell, Francisco e Maher (2004) como inspiração metodológica para a transcrição das entrevistas e análise dos áudios. Embora o trabalho dos autores descreva uma abordagem metodológica para análise de vídeos, consideramos que o método descrito representava um instrumento adequado para refinar os dados e aprofundar a análise.

O modelo de análise de vídeos proposto por Powell, Francisco e Maher (2004) para estudar o desenvolvimento do pensamento matemático emprega sete fases interativas e não-lineares:

1. *Observar atentamente os dados dos vídeos* – Nesta fase o pesquisador se familiariza com o conteúdo dos dados, acostumando-se com a sessão de pesquisa em sua totalidade.

2. *Descrever os dados dos vídeos* – Nesta fase o pesquisador escreve breves descrições de situações codificadas pelo tempo, compreendidas em intervalos de dois a cinco minutos. É importante que as descrições não sejam interpretativas ou inferenciais.

3. *Identificar eventos críticos* – Neste momento da análise, o pesquisador identifica momentos significativos dentro do contexto das questões de pesquisa. Um evento é considerado crítico quando demonstra uma mudança significativa ou um salto conceitual em relação a uma compreensão prévia ou a uma concepção anterior.

4. *Transcrever os eventos críticos* – O pesquisador transcreve apenas os eventos críticos para analisar, com atenção, elementos como linguagem e fluxo de ideias.

5. *Codificar* – Nesta etapa, o pesquisador identifica, através de códigos, temas presentes nos eventos críticos que ajudam a interpretar seus dados. A codificação é dirigida pela perspectiva teórica dos pesquisadores e pelas questões de pesquisa.

6. *Construir o enredo* – Neste momento, o pesquisador examina os códigos identificados e seus respectivos eventos críticos, buscando discernir uma narrativa emergente e envolvente sobre os dados.

7. *Compor a narrativa* – A construção da narrativa começa no início da investigação desde as questões de pesquisa, passando pelos procedimentos de reunião dos dados e pelas etapas anteriores à análise. Nesta fase, o pesquisador olha para as partes a partir do todo e vice-versa.

Dessa maneira, buscamos analisar os áudios das entrevistas inspirados no modelo de Powell, Francisco e Maher (2004) para a análise de dados em vídeos. Primeiramente, foi executada a audição das entrevistas e uma breve descrição de momentos importantes para a investigação. A partir dessa descrição, buscamos selecionar os eventos críticos que dialogavam com as questões de pesquisa. A escolha sobre os eventos críticos surgiu, também, de discussões entre o pesquisador e os orientadores sobre notas de campo realizadas após as entrevistas.

Em seguida, foi realizada a transcrição com descrição desses eventos críticos. Finalmente, para construir uma narrativa de apresentação dos dados, buscamos construir um enredo que articulasse os registros das tarefas com a transcrição com descrição das entrevistas realizada na etapa anterior. Consideramos que a apresentação dos dados dessa maneira permite perpassar todas as etapas da investigação, possibilitando observar os dados através de uma perspectiva mais ampla e minuciosa na etapa final de análise.

A partir desta apresentação, realizamos a análise final dos dados fundamentada na literatura do referencial teórico apresentado nesta pesquisa. Nesta etapa buscou-se, a partir das questões de pesquisa, analisar e interpretar os resultados da investigação.

Finalizamos este capítulo com um esquema que descreve todo o percurso metodológico apresentado aqui neste segmento da dissertação:

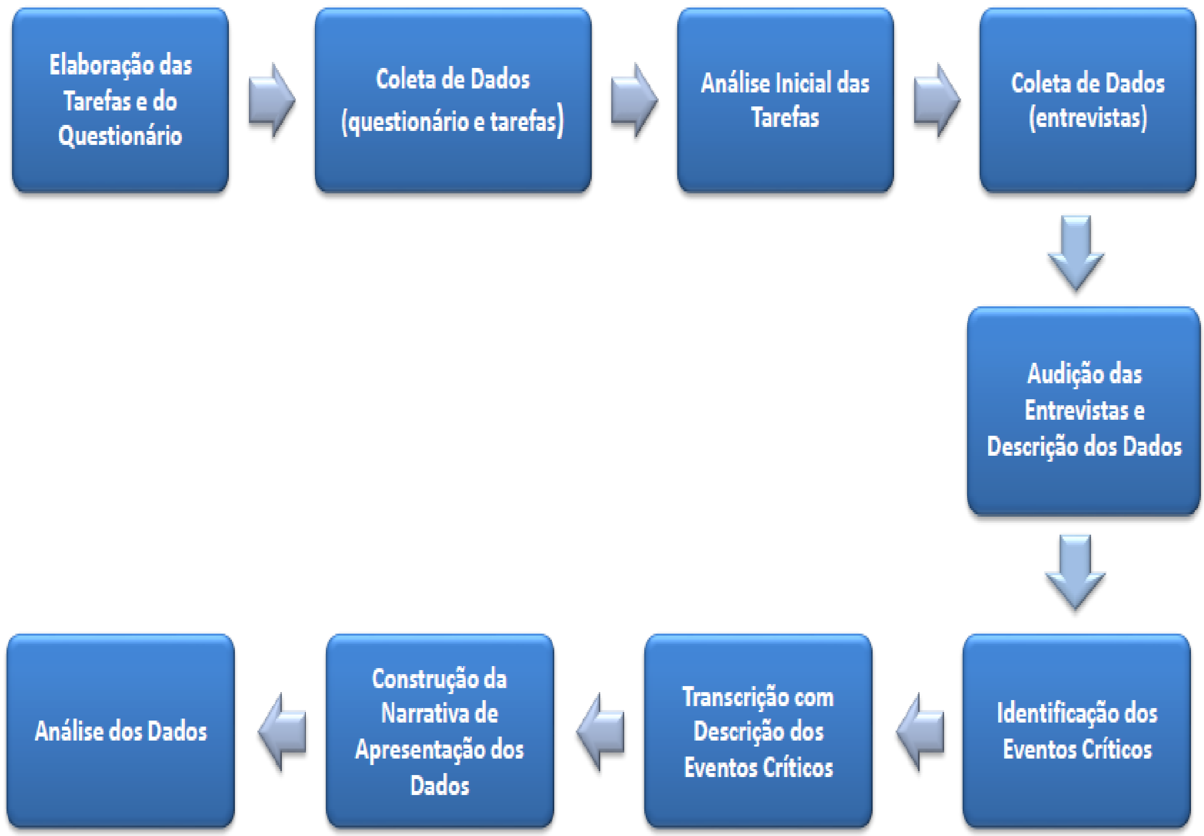


Figura 3: Percurso Metodológico

CAPÍTULO IV – Apresentação de Dados

Este capítulo é destinado à apresentação dos dados obtidos após a realização dos questionários, das tarefas e das entrevistas com os sujeitos desta pesquisa. Nesta apresentação, buscamos construir uma narrativa que articule os registros escritos – obtidos no questionário e nas tarefas – com o discurso dos participantes nas entrevistas. Ao apresentar os dados desta maneira, visamos perpassar todas as etapas da investigação e promover o diálogo entre todos os instrumentos metodológicos desta pesquisa.

Destacamos que a apresentação dos eventos críticos das entrevistas semiestruturadas reflete o contexto de uma discussão que não era fechada, mas desenvolvida, também, a partir do discurso dos participantes e da própria entrevista em evolução. Reforçamos que a interação com os participantes nas entrevistas semiestruturadas ocorreu após uma análise inicial sobre os registros escritos dos sujeitos no questionário e nas tarefas, o que possibilitou promover discussões sobre inferências realizadas a partir dos dados já disponíveis. É importante destacar que, em determinados momentos o pesquisador (ou o coorientador) tentava sintetizar a fala do participante solicitando que o mesmo confirmasse ou refutasse o que afirmava, com o intuito de fomentar o discurso e esclarecer as inferências iniciais.

Dessa maneira, a apresentação de dados descreve a articulação entre as entrevistas e os registros escritos que motivaram a discussão. O capítulo apresenta quatro seções: na primeira seção, descrevemos um breve perfil dos participantes desta pesquisa e, nas três seções seguintes, apresentamos a descrição com transcrição dos dados obtidos a partir das participações de Jorge, Alexandre e Rodrigo, respectivamente.

4.1 Apresentando os Participantes da Pesquisa

Nesta seção, apresentaremos um breve perfil dos três sujeitos desta pesquisa, com o objetivo de situar a trajetória acadêmica de cada participante e mapear suas experiências enquanto professores, suas pretensões para a sequência da carreira docente e suas expectativas sobre a futura prática. A cada participante será atribuído um pseudônimo determinado pelo pesquisador (Jorge, Alexandre e Rodrigo). A descrição a seguir foi construída com base nas respostas dos participantes a perguntas do questionário e em trechos iniciais das entrevistas semiestruturadas pós-tarefas.

- **Jorge**

Jorge era aluno de Licenciatura em Matemática desde o primeiro semestre de 2010 e estava cursando Análise pela terceira vez. O participante declarou que exercia outra profissão, atuando como analista de tecnologia da informação em uma empresa pública. Segundo Jorge, ele pretende seguir carreira docente apenas como uma atividade a ser exercida após sua aposentadoria.

O participante relatou, no questionário, não possuir nenhuma experiência enquanto professor. Entretanto, na entrevista, Jorge apontou que nunca esteve diante de uma turma de ensino básico, mas já vivenciou a prática docente ao ministrar cursos voltados à capacitação profissional em sua área de atuação. Em geral, o conteúdo dos cursos em que lecionou estava inserido no campo da tecnologia. O participante relata, também, que chegou a ensinar matemática básica em um curso que tinha como objetivo reduzir as dificuldades dos funcionários da empresa onde trabalha em operações básicas. Na entrevista semiestruturada, Jorge descreveu esta experiência:

> "Uma vez, eu ministrei em uma empresa, por iniciativa própria, um curso de Matemática para os funcionários. Eu trabalhava nessa empresa e as pessoas sempre reclamavam muito que tinham dificuldades com operações simples, operações com frações, operações de juros. Aí, a gente focou o curso na matemática básica. Mas, assim... o curso não tinha teste, não tinha prova. Era um curso de acompanhamento para que as pessoas superassem as dificuldades em matemática básica. Eu gostei muito. E achei que gostaria de trabalhar isso com jovens." (Entrevista Semiestruturada Pós-tarefa)

Ainda assim, Jorge não reconhece esta vivência como uma experiência docente: "É uma gota em um oceano muito gigantesco. Se você fosse agora diretor de uma escola e me perguntasse qual seria minha experiência como professor, eu diria nenhuma" (Entrevista Semiestruturada Pós-tarefa). Para o participante, a Educação Básica envolve questões mais profundas, diferentes de um curso técnico. Segundo ele, uma dessas questões está relacionada ao fato de a educação ser imposta ao jovem, fazendo com que o professor tenha que desenvolver uma aula atrativa para motivá-lo. O estudante não seria responsável por sua falta de motivação, mas sim a maneira como a escola está colocada para ele e a metodologia de ensino desenvolvida pelo docente.

> "Na educação básica, formal, os problemas são bem mais profundos. As questões são muito mais sérias. [...] o professor tem que tornar aquela aula algo que motive o aluno, que motive a classe que está diante dele. [...] Eu fiz uma matéria aqui muito interessante na Faculdade de Comunicação, onde o professor falou uma frase que eu

> achei muito significativa: ‘Nós vivemos em uma escola do século XIX, com professores do século XX e alunos do século XXI’. Então, há um descompasso muito grande entre a sala de aula e os alunos.” (Entrevista Semiestruturada Pós-tarefa)

- **Alexandre**

Alexandre cursava Licenciatura e Bacharelado em Matemática, simultaneamente, desde o segundo semestre de 2012. O participante cursava Análise pela primeira vez e não estava inscrito na disciplina. Porém, segundo o professor, mesmo sendo apenas aluno ouvinte em Análise, Alexandre acompanhava as aulas regularmente.

Durante todo o ensino básico, Alexandre estudou em colégios públicos, cursando o ensino fundamental na rede municipal do Rio de Janeiro e o Ensino Médio em um colégio estadual no mesmo estado. No questionário, Alexandre afirmou que algumas de suas dificuldades em Análise estavam relacionadas à defasagem em sua formação na Educação Básica.

Até o momento da coleta de dados, sua única experiência como professor havia sido durante um estágio em um projeto de reforço escolar na rede municipal do Rio de Janeiro ao longo de um ano. Segundo Alexandre, este momento despertou sua vontade em seguir na profissão e tentar modificar a realidade social encontrada na escola, apontada por ele como uma adversidade da profissão. Sobre esta experiência, o participante declara:

> “Foi uma experiência muito bacana. [...] apesar de todo o estresse, serviu para despertar a vontade de dar aula, de querer mudar algumas coisas [...]. Lá, a gente encontra muito os contras da profissão. [...] Você encontrava, infelizmente, muitos alunos que já estavam encaminhados para caminhos errados, que não conseguiam dar valor à educação. Eu encontrava muitos professores já desmotivados. Muita coisa de ruim eu vi lá. Só que, também, ao mesmo tempo, você via alguns alunos que queriam mudar alguma coisa. E eu via em mim mesmo a vontade de também querer que aqueles que estavam desistindo pudessem mudar.” (Entrevista Semiestruturada Pós-tarefa)

Alexandre atribuiu a falta de interesse desses alunos pela Matemática à metodologia de ensino adotada. Segundo ele, o desgaste da profissão e a maneira mecânica em que a Matemática é apresentada pelo professor contribuem para que o aluno considere a escola e a Matemática monótonas. Para Alexandre, a falta de motivação dos alunos encontrada em sua experiência docente é justificada:

> “Primeiro pela metodologia de ensino que, de certa forma, é bem mecânica. E o professor acaba ficando fadigado por estar ensinando sempre as mesmas coisas, os

> mesmos assuntos todo ano. Aí então, muitas vezes, o professor ia lá para passar a matéria no quadro e ponto. E aquilo ali era chato para o aluno. Ainda mais trabalhando com Matemática. Os alunos têm uma visão da Matemática que... se eles acham a escola chata, Matemática, infelizmente, eles acham ainda mais.” (Entrevista Semiestruturada Pós-tarefa)

- **Rodrigo**

Rodrigo cursava Licenciatura e Bacharelado em Matemática, simultaneamente, desde o primeiro semestre de 2012. O participante estava cursando Análise pela terceira vez e considerava a disciplina “naturalmente difícil”.

Rodrigo é graduado em Física Médica e, por esse motivo, sua iniciação como professor ocorreu no âmbito de sua formação anterior. Ainda quando era estudante universitário de Física Médica, Rodrigo atuou como professor de Física e Matemática em cursos pré-vestibulares comunitários durante os anos de 2005 e 2007. Em seu relato, ele também mencionou sua atuação enquanto professor de outras disciplinas que não se relacionam à Matemática ou a sua formação anterior em Física. O participante declarou que atuou como professor substituto na rede estadual de São Paulo em 2009, mesmo não tendo a formação exigida. Aparentemente, neste período, sua função na escola extrapolava a figura de professor, como verificado ao Rodrigo descrever suas atribuições:

> “Em 2009, fui professor substituto na rede estadual de São Paulo, lecionando Matemática, Física, Química, Biologia, Filosofia, Língua Portuguesa e Desenho, além de, eventualmente, trocar lâmpadas, fazer café, etc. A jornada de trabalho era muito estressante na época.” (Anexo XII – Questionário de Rodrigo)

Embora tivesse lecionado essas disciplinas, Rodrigo reconheceu que não estava apto a desempenhar essa função e, na entrevista, mostrou relativa indignação com a estrutura escolar que o induziu a seguir esse caminho.

> “Na verdade, minha formação inicial é em Física. Então, o certo não era nem eu ter dado aula de Matemática. Eu era temporário. Mas, lá é diferente o temporário. Você pode ser temporário *ad aeternum*. Era o que eles chamavam de professor eventual. Mas, como a carência de professores era enorme, [...] eu dava aula de Física, Química, Biologia, de coisas até que eu não tinha condições nenhuma de dar aula. E eu falava na direção quando eu tinha que dar aula de Literatura, Desenho: ‘Eu não sei nada’. Mas, eles diziam: ‘Não... vê aí! A gente vai te pagar’.” (Entrevista Semiestruturada Pós-tarefa)

Na época da entrevista, Rodrigo relatou estar atuando há três anos em uma empresa que gerencia aulas particulares, lecionando as disciplinas de Física e Matemática a alunos de maneira individual e, também, em grupos.

Para Rodrigo, a ausência de conceitos é a principal deficiência do ensino de Matemática. De acordo com o participante, há um enfoque excessivo na memorização de fórmulas em detrimento dos conceitos matemáticos, implicando na falta de motivação e de interesse dos alunos pela Matemática.

> "Eu acho que a principal deficiência no ensino da Matemática, a meu ver, no Ensino Médio é que não tem conceito. Não tem conceito. É um monte de fórmula milagrosa que você acha que com aquilo você vai resolver todos os problemas. E não vai. Não tem conceito. E eu acho que muitas pessoas acabam não gostando de Matemática por causa disso. Porque não tem conceito no ensino básico." (Entrevista Semiestruturada Pós-tarefa)

Ao ser questionado sobre suas pretensões em seguir carreira docente, Rodrigo mostrou receio em dar continuidade à profissão, mesmo tendo a educação como ideal: "Por ideal sim, mas não sei se pretendo ficar o resto da vida nesta área, pois, infelizmente, nem só de ideal vive o homem".

4.2 Descrição com Transcrição de Dados – Sujeito: Jorge

Ao responder sobre a relevância do curso de Análise na formação docente, em uma das perguntas do questionário (Anexo IV), Jorge afirmou que considerava a disciplina importante para dar segurança ao professor e citou, como exemplo, o estudo sobre a construção do conjunto dos números reais. Na entrevista, o participante destacou o domínio sobre o conteúdo como aspecto que traz segurança ao docente. Nesse sentido, para Jorge, um bom curso de Análise prepararia o professor para responder as dúvidas dos alunos. Para justificar a importância da disciplina, o participante apontou dois aspectos: sua dificuldade e a necessidade de encadeamento do pensamento.

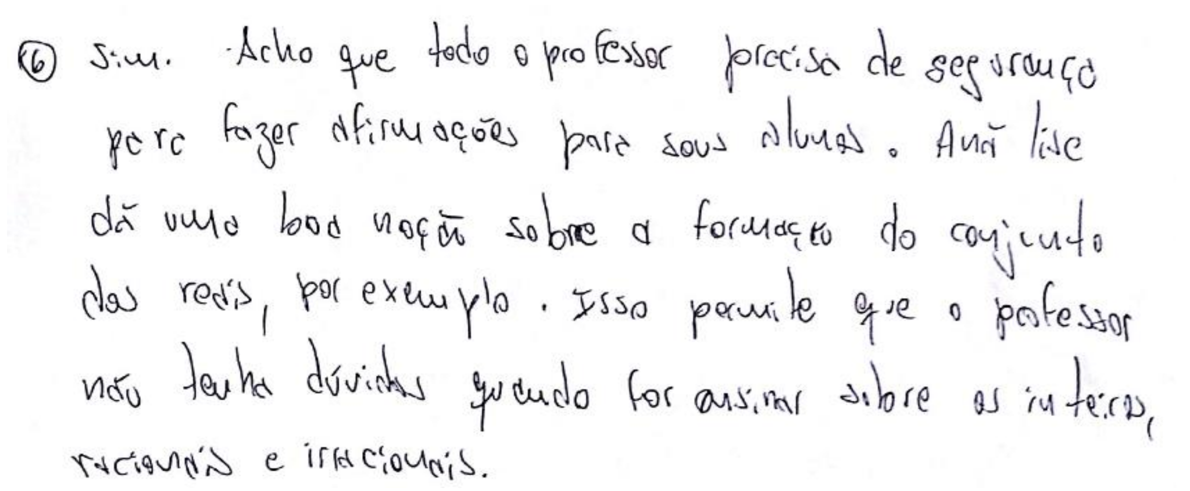

(6) Sim. Acho que todo o professor precisa de segurança para fazer afirmações para seus alunos. Análise dá uma boa noção sobre a formação do conjunto dos reais, por exemplo. Isso permite que o professor não tenha dúvidas quando for ensinar sobre os inteiros, racionais e irracionais.

Figura 4: Resposta de Jorge à Pergunta 6 do Questionário

11:24[13]	Pesquisador	A gente questionou sobre a relevância de um curso de Análise na formação do professor, se você achava relevante. Olhando suas respostas, você comentou que sim e que achava importante o professor ter segurança sobre as afirmações que ele faz. O que você acha que traz segurança ao professor em sala de aula?
11:49	Jorge	O professor tem que ter domínio sobre o que ele ensina. Tem que saber o que ele ensina.
12:01	Pesquisador	Você se refere ao conteúdo...
12:03	Jorge	Ao conteúdo. Ele tem que saber o que ensina, o conteúdo. Ele tem que ter segurança sobre aquilo. É claro que ninguém consegue estar atualizado o tempo todo. Na hora que você acha que entende as coisas, vem alguém com uma teoria que te dá uma pancada. Eu tenho certeza que o conhecimento básico sobre aquilo que ele vai ensinar é importante. É importante para que ele, de imediato, saiba responder as questões mais cruciais dos alunos. Nesse ponto de vista, a Análise é uma matéria que eu achei diferente de todas as outras que eu fiz aqui na graduação porque... primeiro, porque ela é difícil, segundo ela requer muito de você um encadeamento de pensamento muito fortemente ligado. Eu acho que, se você faz um bom curso de Análise, você está pronto para... quando vir uma pergunta, você fazer um primeiro filtro, identificar onde ela se situa, em que área de conhecimento ela está, e dar uma resposta no mínimo satisfatória para o aluno. Que não vá prejudicá-lo em outros cursos e outras coisas que ele vá fazer mais à frente.

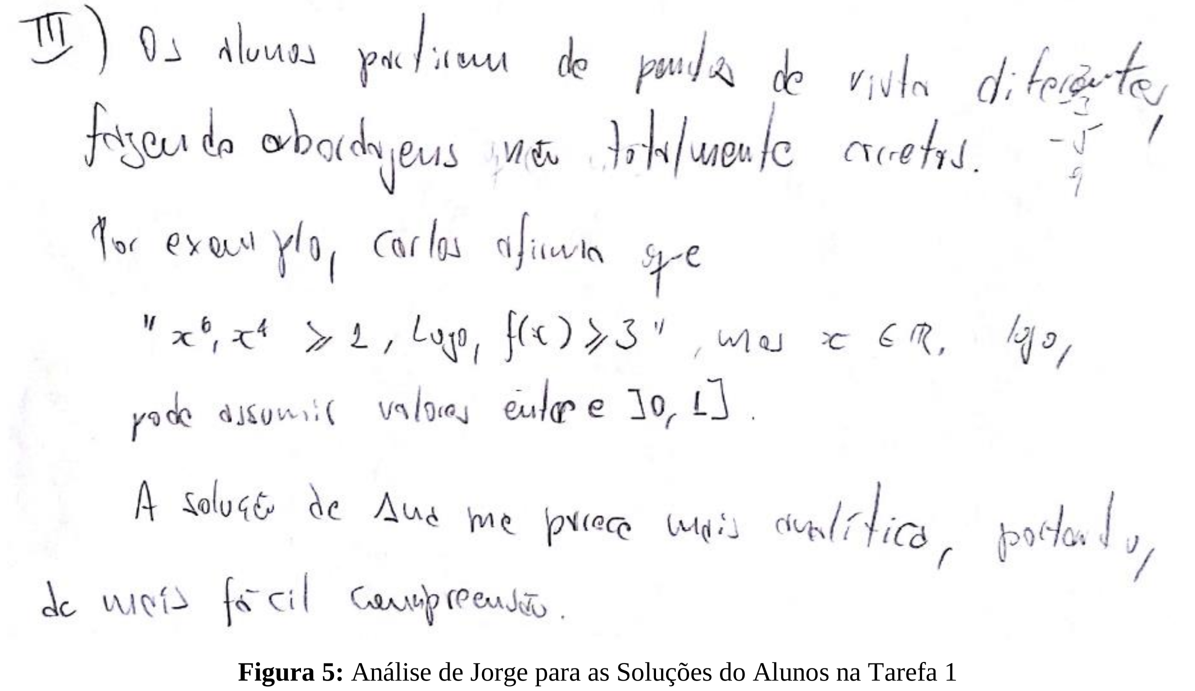
No prosseguimento da discussão, Jorge afirmou que estudar Análise permite solidificar conceitos do ensino básico, uma vez que, segundo ele, aprender um conteúdo mais

[13] Tempo decorrido na entrevista semiestruturada pós-tarefa.

difícil traz segurança em ideias mais elementares. Para ilustrar seu ponto de vista, ele faz uma analogia entre os processos de ensino e aprendizagem e um sistema de equipamento de som.

14:26	Pesquisador	Então, Análise te dá uma percepção maior sobre um conteúdo que vai além daquele que você ensina em sala de aula? Seria mais ou menos isso a que você estava se referindo?
14:35	Jorge	Sim. Ele aprende além do que ele vai ensinar em sala de aula. Tem uma analogia até com o som. Você já viu uma curva de resposta de algum equipamento de som? Ele tem trechos que é reto. Esse trecho reto é a resposta igual. Ou seja, o que entra dá a resposta na mesma forma que sai. O que está entrando no aparelho de som é o que está saindo. É igual. Ou seja, uma boa resposta. Então, se eu consigo estudar muito além daquilo que o aluno precisa, na parte reta do meu estudo... em cima eu posso não estar bem, mas nessa parte reta, eu estou bem. Porque, para estudar aquilo, eu tive uma base sólida na parte básica. Estudar mais além me capacitou a ter mais segurança na parte básica.

Em sua análise das soluções na Tarefa 1 (Anexo V), Jorge ressaltou as diferenças de abordagens utilizadas pelos alunos e apontou que a solução de Ana era mais fácil de ser compreendida. Na entrevista, o participante acrescentou que Ana propôs uma solução menos formal, ao contrário de Carlos, que seguiu um passo a passo em sua resposta. Neste momento, Jorge não estabelece hierarquia entre as soluções, porém, dá ênfase à solução de Ana, ressaltando que esse pensamento mais intuitivo deve ser valorizado em sala de aula.


III) Os alunos partiram de pontos de vista diferentes, fazendo abordagens não totalmente corretas.

Por exemplo, Carlos afirma que

"$x^6, x^4 \geq 1$, Logo, $f(x) \geq 3$", mas $x \in \mathbb{R}$, logo, pode assumir valores entre $]0, 1]$.

A solução de Ana me parece mais analítica, portanto, de mais fácil compreensão.

Figura 5: Análise de Jorge para as Soluções do Alunos na Tarefa 1

16:47	Pesquisador	Quando você analisou as soluções dos alunos na Tarefa 1, você comentou que as soluções não estavam completamente corretas e que os alunos partiram de pontos de vista diferentes. O que chamou sua atenção de diferente nesses pontos de vista nas soluções?
17:03	Jorge	Olha, Ana fez uma abordagem menos formal. Foi uma sacada que ela teve e eu achei isso interessante. O menino foi seguindo um passo a passo que, talvez, o professor dele tenha dado em sala. Eu acho que essas soluções que são, meio assim, fora da caixa são interessantes e nós temos que valorizá-las. Também, não é de menor valor o aluno que aprendeu de uma forma e segue aquele receituário. Acho que foi isso o que eu quis dizer.

Em seguida, Jorge destaca que determinadas soluções são imprevisíveis e cita um exemplo ocorrido em uma de suas experiências como professor em uma aula de estágio.

17:54	Pesquisador	Você acha que essas soluções que são mais passo a passo, que são as mais utilizadas e que a gente está mais habituado, não estimulam tanto o raciocínio do aluno como a primeira solução? Ou não?
18:11	Jorge	Eu acho que estimula da mesma forma. Eu acho que a pessoa que dá uma sacada assim, é uma coisa muito imprevisível. [...] Eu acho que, quando alguém dá uma solução dessas, eu acho que temos que valorizar o que o aluno fez. Eu estava dando uma aula no estágio uma vez em que eu estava falando sobre áreas. Deduzindo as fórmulas de áreas de figuras planas. Aí, teve uma hora em que um menino disse: “Professor, por que você não faz assim?”. Eu disse que não estava entendendo o que ele estava dizendo, não estava conseguindo. Mas, é uma droga... porque é uma aula de estágio que você não pode parar, que você tem que chegar até o final da aula e tem que dar aquele conteúdo todo. Aí, eu disse: “Vamos fazer o seguinte? Depois eu vou dar uma olhada com você”. Ele não parou ali. Pegou uma tesoura e cortou lá uns papéis, fez umas figuras e disse: “Professor, posso mostrar uma coisa?”. Aí, quando ele fez essa figura e me mostrou, eu entendi na hora. Eu disse: “Bacana essa sua solução. Vem cá. Mostra aqui.” Aí ele mostrou, foi lá e todo mundo entendeu. Eu escrevi o que ele fez no quadro... Então, eu acho que o aluno que tem esses “insights”, essas ideias assim, não é uma coisa muito sensível. Isso não dá para ensinar. Eu acho que você tem que valorizar para que o aluno se sinta estimulado a buscar.

Na resolução do primeiro item da Tarefa 2 (Anexo VI), Jorge esboçou escrever a definição formal de continuidade, mas não a apresentou de maneira completa. Na entrevista, quando questionado sobre este trecho de sua solução, ele afirmou que o formalismo da definição não dificulta sua compreensão. Segundo ele, a Análise modificou seu olhar sobre a continuidade, diferentemente da maneira como havia aprendido o conceito em sua formação anterior como engenheiro. Nesse sentido, o participante afirma que o curso de Análise interferiu em suas percepções sobre a Matemática e pode voltar a interferir ao fazer o curso novamente.

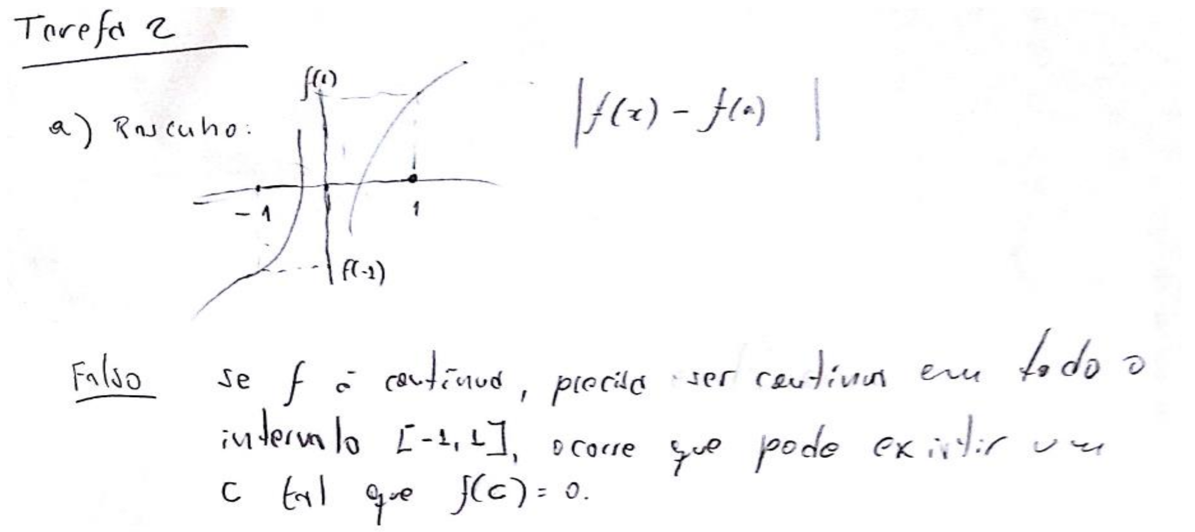


Figura 6: Solução de Jorge para o item *a* da Tarefa 2

30:36	Pesquisador	Especificamente na Tarefa 2, agora, aparecia de forma frequente o conceito de continuidade nas hipóteses das afirmações. Quando você se depara com o conceito de continuidade, com a definição de continuidade, qual é a primeira coisa que vem a sua cabeça?
31:04	Jorge	(Pausa) Você tenta relacionar situações em que você pode ter um significado fisicamente. Quando você fala em uma função contínua, eu gosto sempre de pensar nas funções trigonométricas que são contínuas (hesitação)... Quando eu estudei no Ensino Médio, diziam que quando você não tira o lápis do papel para desenhar, a função é contínua. Agora que eu vim aprender que não é bem assim. Eu acho que é muito mais interessante você relacionar para o aluno coisas que são realmente contínuas. E, quando você fala de funções trigonométricas, você fala de situações físicas que também se equiparam a isso. Eu acho que é assim que você faz uma ponte entre o mundo físico e o pensamento matemático.
32:38	Pesquisador	Em sua solução, eu vi que você esboçou a definição formal de continuidade. E você diz que sua compreensão sobre o conceito de continuidade está muito mais associada a coisas que remetem à definição e não propriamente a essa definição formal que a gente vê em Análise. Você acha que essa definição formal que a gente vê em Análise é uma barreira para você compreender a definição?
33:04	Jorge	Não, não é. Até porque, para dizer a verdade, nesse curso de Análise que eu fiz, eu estava justamente estudando sobre funções de uma outra forma. Eu estava aprendendo de outra forma. A

		minha formação como engenheiro me jogava para uma situação que era totalmente diferente. Eu acho que é muito mais forte o que você aprendeu há alguns anos, que você foi mais firmemente instruído inicialmente, do que o recente. Ao mesmo tempo em que eu sabia, eu estava aprendendo coisas novas. É possível até que esse ano eu respondesse isso de outra forma porque eu estou fazendo novamente o curso de Análise. Eu vou voltar a estudar isso agora. Pode ser até que eu tenha um outro olhar.
33:57	Pesquisador	Você acha que o curso de Análise modificou, de certa forma, as concepções que você tinha sobre a Matemática?
34:02	Jorge	Sim. Muito, muito.

Apesar de destacar, no momento anterior, que o formalismo da definição de continuidade não representa uma barreira para sua compreensão, Jorge apontou no questionário que uma de suas dificuldades em Análise era utilizar teoremas com o "rigor exigido". Na entrevista, quando questionado se o rigor interfere em sua aprendizagem na disciplina de Análise, Jorge evitou responder a pergunta e ressaltou sua necessidade. A discussão levou o participante a considerar que os cursos de Análise poderiam ser apresentados de maneira distinta aos alunos de Licenciatura e Bacharelado, considerando as especificidades da formação do professor. Entretanto, Jorge frisa que as diferenças estariam restritas às abordagens da disciplina e destaca que não deve haver modificações no conteúdo e no rigor presentes nesses cursos.

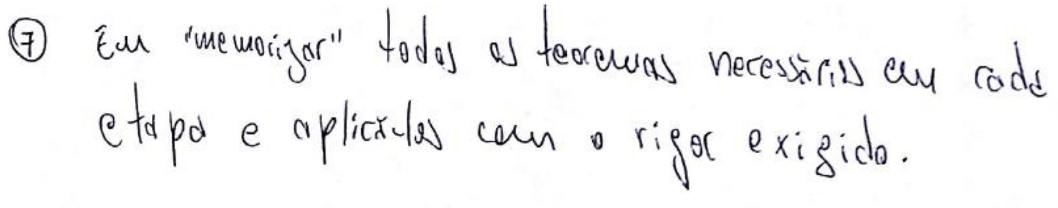

7 Eu "memorizar" todos os teoremas necessários em cada etapa e aplicá-los com o rigor exigido.

Figura 7: Resposta de Jorge à Pergunta 7 do Questionário

40:27	Pesquisador	Uma das dificuldades no curso de Análise que você citou no questionário estava relacionada ao rigor. De que maneira você acha que o rigor interfere na aprendizagem em Análise?
40:43	Jorge	Rigor é necessário. Bastante necessário. Isso aí está parecendo mais um "chororô" de aluno que acha que o professor sempre é mais rigoroso do que você gostaria, de fato. Se você não passa, então ele é rigoroso. Mas, eu acho que poderia se pensar... eu ainda não parei para pensar, mas, às vezes, eu sou tentado a pensar que poderia existir um curso de Análise para quem vai fazer Bacharelado e outro para quem vai fazer Licenciatura.

41:28	Pesquisador	Quais diferenças você identifica entre as duas formações que justificariam essa separação?
41:43	Jorge	Em termos de conteúdo, eu acho que nenhuma. Deveria ser o mesmo. Talvez, nesse aspecto de mostrar a parte que é mais sensível para o professor do Ensino Médio, de modo geral, esse curso seria voltado para a Licenciatura. Eu acho até que algumas faculdades fazem isso. Tem um curso de Análise para a Licenciatura e outro para o Bacharelado. Acho que a diferença seria, talvez, só a parte de mostrar como determinados assuntos podem ser trabalhados com alunos de Ensino Médio. Talvez, fossem importantes para esse curso. Em termos de rigor e conteúdo, sou obrigado a dizer que não pode fazer diferença. Não vai fazer concessões dentro da matéria.

Já ao comentar sobre suas soluções na Tarefa 2, Jorge contradiz seu discurso anterior e confirma que a apresentação formal dos enunciados dificultou seu entendimento nesta tarefa. Agora, ele ratifica que o formalismo e o rigor são suas principais dificuldades em Análise. O participante cita, ainda, a dificuldade encontrada na abordagem rigorosa de alguns livros da disciplina e usa o termo decodificar ao se referir à interpretação de seu conteúdo.

44:25	Pesquisador	Você acha que a apresentação formal dos enunciados da Tarefa 2, de uma forma mais rigorosa, dificultou um pouco o entendimento do significado dos enunciados das afirmações?
44:37	Jorge	Sim. Acho que sim. Uma forma muito... me fugiu o termo. Não é bem enigmático... Quando você escreve uma coisa em que é difícil a pessoa que é leiga entender tudo que está ali, toda essa simbologia.
45:05	Pesquisador	Em geral, ocorre isso em Análise em enunciados, teoremas, definições muito formais, carregadas de rigor e formalismo?
45:16	Jorge	Eu acho que sim. Essa é uma das minhas grandes dificuldades em Análise. Alguns livros são muito críticos. Às vezes, uma simples frase encerra muitos conceitos. Você tem que pegar uma frase e decodificá-la em três, quatro. Não dá para estudar Análise sem papel e um lápis.

Em suas considerações sobre a Tarefa 3 (Anexo VII), Jorge declarou que a demonstração de Júlia permitia compreender melhor o significado do enunciado do teorema e a argumentação apresentada, pois, segundo ele, visualmente explana melhor o teorema. Na entrevista, o participante apontou as diferenças que identificou nas demonstrações da Tarefa 3. Para o participante, uma argumentação é mais gráfica e a outra mais analítica. Contudo, ele destacou que essas diferenças não devem influenciar a análise das soluções, uma vez que o professor tem que estar preparado para compreender qualquer uma das duas demonstrações.

Ao ser questionado sobre a diferença entre seu discurso e os seus registros escritos na tarefa, Jorge afirmou que tem preferência por uma argumentação gráfica, mas reiterou que as duas abordagens devem ser compreendidas.

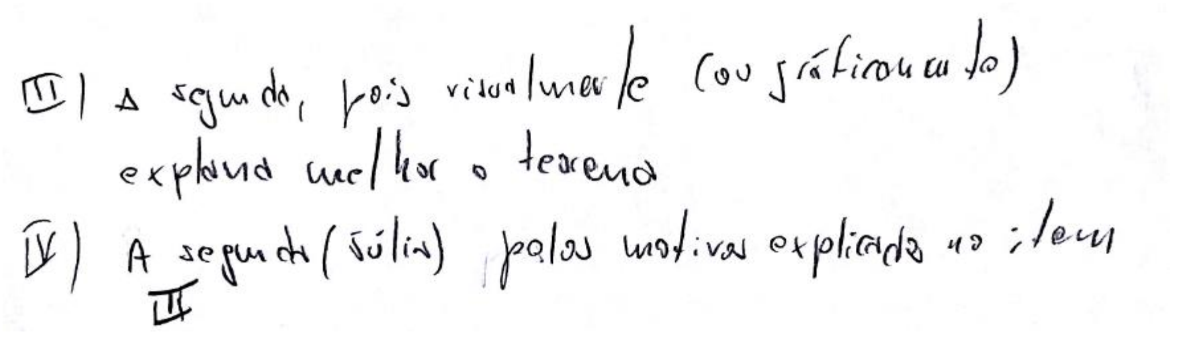

III) A segunda, pois visualmente (ou graficamente) explana melhor o teorema
IV) A segunda (Júlia) pelos motivos explicados no item III

Figura 8: Respostas de Jorge aos itens III e IV da Tarefa 3

47:33	Pesquisador	Na Tarefa 3, quais as diferenças de abordagem você identificou entre as duas demonstrações?
47:58	Jorge	(Pausa – Analisa a tarefa) Uma é gráfica e a outra é mais analítica.
48:42	Pesquisador	Essas diferenças influenciam sua análise das demonstrações?
48:57	Jorge	Não entendi o que você está querendo saber.
49:03	Pesquisador	Você comentou sobre dois aspectos diferentes nas demonstrações: uma mais analítica e outra mais gráfica. No momento de você analisar essas demonstrações, isso modifica sua análise?
49:16	Jorge	Isso não deve modificar. O professor tem que estar pronto para poder entender as duas.
49:30	Pesquisador	Inclusive, em relação a essa parte gráfica ou mais analítica, você considerou que a demonstração de Júlia permite compreender melhor os argumentos utilizados e, também, o significado do enunciado do teorema, pois graficamente explana melhor o teorema. Mas, agora você disse o contrário...
49:56	Jorge	Isso não deveria ocorrer. Do ponto de vista do entendimento, se fosse uma prova que você vai fazer no quadro, o professor tem que estar pronto para compreender as duas.

A predileção de Jorge por uma argumentação gráfica também havia sido manifestada na Tarefa 1 (Figura 5). Quando questionado sobre essa preferência em ambas as tarefas, o participante revelou ter uma inclinação maior a argumentações gráficas por permitirem, em suas palavras, melhor visualização da solução. Entretanto, ele enfatizou a necessidade de o professor compreender e apresentar tanto a argumentação gráfica quanto a mais formal, deixando a critério do aluno escolher aquela que mais lhe agrada.

50:39	Pesquisador	Eu comentei isso porque, voltando lá na Tarefa 1, a solução de Ana também apresentava uma argumentação muito mais gráfica e você comentou que ela também era mais fácil de ser compreendida.
50:56	Jorge	Eu sempre tenho uma inclinação maior para qualquer solução gráfica porque você visualiza melhor a solução. Mas, eu acho que são dois momentos distintos. O professor tem que entender as duas. Ele tem que saber olhar uma, olhar a outra, e dizer se está certo ou se está errado. Ter o discernimento suficiente para entender uma e entender a outra. Por uma questão pessoal, eu acho que, em uma solução gráfica, é mais fácil você ter uma compreensão geral sobre ela. Não sei se em uma classe seria assim. Não sei o que os alunos preferem.
51:46	Pesquisador	Pensando no contexto da Educação Básica, você acha que o professor deveria optar por uma solução mais gráfica, uma mais analítica, ou ele não deveria fazer essa diferenciação?
51:55	Jorge	Eu acho que ele tem que apresentar as duas. Eu acho que o aluno é quem escolhe.

Ao responder o segundo item da Tarefa 3, o participante escreveu que não tinha elementos suficientes para dar um retorno aos alunos a partir das demonstrações apresentadas. Agora, na entrevista, ele esclarece que esses elementos estavam relacionados à compreensão da solução. Por essa razão, Jorge declara que refletiria mais sobre as soluções antes de dar um retorno aos alunos, de maneira que não fosse desonesto com eles. Para fundamentar seu argumento, ele cita como referência um episódio ocorrido durante uma de suas aulas na graduação, na qual o professor tomou a mesma decisão.

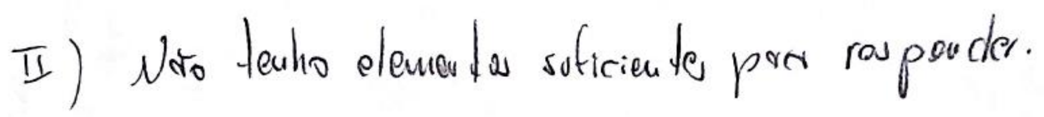

II) Não tenho elementos suficientes para responder.

Figura 9: Retorno de Jorge às Soluções dos Alunos na Tarefa 3

54:42	Pesquisador	Na Tarefa 3, sobre o retorno que você daria aos alunos a partir das demonstrações que foram exibidas, você comentou que não tinha elementos suficientes para responder. Quais seriam esses elementos?
55:03	Jorge	Eu teria que compreender a solução completamente e analisar os pontos fortes e os pontos fracos das soluções. Hoje, se eles são

		meus dois alunos, um é Pedro e o outro é a Júlia, o que eu diria para eles? Eu vou levar as soluções de vocês para casa, vou estudar e, na próxima aula, a gente conversa sobre isso. Você não pode ser desonesto com seus alunos. Você não vai chegar e dizer: eu acho que a sua está errada e a sua está certa. Esse eu acho, mata. O aluno vai pra casa com aquilo. É melhor você manter a dúvida e falar que vai estudar aquilo, ler com calma e dar o retorno exatamente daquilo que você acha que o aluno fez ali. Como o professor fez ontem na sala. O aluno mostrou lá uma solução, ele ficou olhando e disse: "Olha, eu não entendi o que você fez. Eu sei que a forma normal, que é a forma como eu tinha feito, é essa aqui. Mas, o que você fez eu não tenho elementos para dizer que está errado". Mas, eram alunos de graduação. No Ensino Médio é diferente. Ele disse: "Eu não estou vendo o que está errado, mas deve estar errado. Eu não estou vendo o que está errado, mas eu vou levar e, na próxima aula, a gente vê". Eu acho que aqui, nesta situação, é a mesma coisa. Eu vou pegar o que você fez, eu vou ler e vamos, depois, entender o que você fez para poder te dar o retorno exatamente de como pode ser feito.

No prosseguimento deste episódio, ao justificar o motivo de ter dado um retorno ao aluno na Tarefa 1, no contexto do ensino básico, e não ter feito o mesmo na Tarefa 3, no contexto do ensino superior, Jorge afirmou que as questões no ensino superior são mais difíceis e profundas. De acordo com o participante, os temas do ensino básico podem ser aprendidos prontamente, enquanto no ensino superior, até o professor se depara com questões que desconhece devido sua dificuldade. Segundo Jorge, se o professor da Educação Básica não compreende o conteúdo, é por falta de conhecimento sobre o assunto, uma vez que no ensino básico as questões não são de ponta.

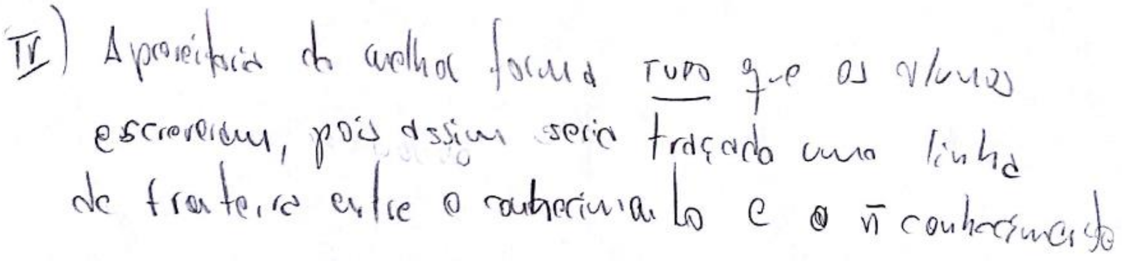

IV) A [illegible] da melhor forma tudo que os alunos escreveram, pois assim seria traçado uma linha de fronteira entre o conhecimento e o ñ conhecimento

Figura 10: Retorno de Jorge às Soluções dos Alunos na Tarefa 1

57:37	Pesquisador	Você acha que uma demonstração é, às vezes, mais difícil de ser compreendida e, talvez, até traz uma insegurança maior na hora de dar um retorno para o aluno? Por que você acha que teve uma dificuldade maior em dar um retorno ao aluno no contexto de ensino superior do que no contexto do ensino básico, quando você

		deu o retorno para o aluno?
57:57	Jorge	No ensino superior, as questões são mais amplas, mais profundas. Você trata de coisas que, muitas vezes, são muito difíceis. No ensino básico, já são temas que são mais solidificados. [...] Agora, a diferença para o ensino superior sempre é essa porque, mesmo o professor doutor, chefe da cadeira, diretor do departamento, ele olha para um assunto e diz: não entendi o que você fez. Isso se acontece no ensino médio, é por desconhecimento do professor sobre aquele assunto. Mas, é um assunto que ele recorre e pode aprender de um dia para o outro e trazer para o aluno. Acho que existe essa diferença.
59:40	Pesquisador	Então, o professor no contexto do ensino superior poderia não ter completamente o domínio do conteúdo sobre o qual ele está falando e, já o professor do ensino básico, teria que ter o domínio do conteúdo?
59:52	Jorge	Pelo menos ele é alcançável. Ele pode não ter o domínio, mas pode ser mais facilmente alcançado do que o professor de um curso de ensino superior, um curso de graduação. Ainda mais em um curso de Análise que está nos últimos períodos do curso.
1:00:12	Pesquisador	Então, você acha que, no contexto do ensino superior, é factível que o professor se depare com uma situação em que não consiga dar um retorno ao aluno porque ele não compreendeu uma solução?
1:00:25	Jorge	Sim.
1:00:26	Pesquisador	Já no ensino básico, você acha que isso não deveria acontecer...
1:00:30	Jorge	Sim. No ensino básico, eu acho que dificilmente tem questões que te levam para temas que são muito de ponta. Dificilmente. Agora, se o professor não tem domínio daquele assunto é porque falta preencher aquela lacuna do conhecimento. Isso pode acontecer no nível superior, mas pode ser, também, por serem questões muito mais difíceis.

No questionário, Jorge havia apontado que memorizar os teoremas era uma dificuldade na sua aprendizagem em Análise. Ao ser questionado sobre as contribuições desse mecanismo, Jorge apontou que a memorização de teoremas é um recurso útil para a aprendizagem em Análise, ao permitir que o aluno tenha um ponto de partida para iniciar suas reflexões. Segundo o participante, lembrar o Teorema do Valor Intermediário o teria ajudado na resolução e na análise das tarefas. Jorge declarou que chegou a desenvolver um mecanismo de memorização, inspirado em um jogo de celular, para auxiliá-lo em sua aprendizagem em Análise. Porém, citou, posteriormente, que tal técnica não foi efetiva.

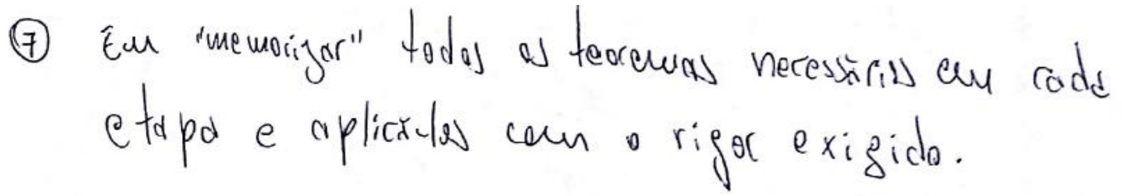

⑦ Em "memorizar" todos os teoremas necessários em cada etapa e aplicá-los com o rigor exigido.

Figura 11: Resposta de Jorge à Pergunta 7 do Questionário

1:08:07	Pesquisador	Lá no questionário, você disse que uma de suas dificuldades em Análise estava relacionada à memorização de teoremas. De que maneira memorizar teoremas contribui para a aprendizagem em Análise?
1:08:33	Jorge	Se você tem uma boa capacidade de memorização, facilita porque a ideia vem mais rapidamente. É como se fosse um celular que você pudesse olhar: "Ah, é isso aqui". Você sabe que aquilo está certo. Quando você decora um teorema, não é qualquer ideia. O teorema é uma ideia que expressa uma forma correta de você encarar certo tópico. É uma forma de você recorrer a uma base para, a partir dali, você começar a fazer algumas coisas. Tem um patamar de onde posso iniciar. Mas, infelizmente, eu não tenho essa capacidade.
1:09:51	Pesquisador	Todas essas tarefas estavam relacionadas ao Teorema do Valor Intermediário. Você acha que, de certa forma, se você tivesse lembrado, memorizado o teorema, isso te ajudaria?
1:10:03	Jorge	Sim. Acho que sim.
1:10:06	Pesquisador	Até para a primeira tarefa que está mais voltada para o ensino básico?
1:10:12	Jorge	Sim. Tem um jogo de celular que é muito usado para você aprender uma língua. De um lado tem uma figura, ou você pode botar uma palavra, uma figura. Digamos que você quer aprender japonês ou coreano. Então, você tem a palavra na sua língua e aí você tem que saber a palavra na outra língua. Você vai e fala a palavra. Se você acerta, você marca lá. Se você erra, você marca lá: errei. Aí, ele volta até que o número de acertos daquele cartão seja abaixo de um certo número lá que você considere bom para você aprender. Eu tentei fazer isso com os teoremas de Análise, mas não dá muito certo. Eu botava lá Teorema de Weierstrass e aí colocava lá o que era. Teorema da convergência monótona limitada, o que era. Postulado de Dedekind... Mas, não deu muito certo. Você cansa e...

Apesar de considerar importante para a aprendizagem, Jorge afirma que memorizar um teorema não o ajuda a compreender seu significado. Para ratificar seu comentário, ele citou que decorou por muito tempo a lei da gravidade sem, entretanto, compreendê-la, de fato.

1:11:26	Pesquisador	Você acha que memorizar os teoremas te ajudaria a compreender o significado de seus enunciados?
1:11:33	Jorge	Memorizar teorema não ajuda a compreender o significado. São coisas distintas. Você tem que aprender o significado deles. Mas, quando você lembra dele, você tem que saber associar o teorema ao significado. Como utilizá-lo. Se você não souber como utilizá-lo, não adianta nada você saber. Mesma coisa... não adianta você saber o Teorema de Pitágoras se você não souber o que é um cateto, o que é uma hipotenusa e o que eles têm entre si. Esquece. Eu decorei, por muitas décadas, a lei da gravidade: matéria atrai matéria na razão direta entre massa e na razão inversa do quadrado da distância. Somente muitos anos depois que eu fui entender o que ela significava. Então, você saber a lei, o teorema, o postulado, o axioma, por si só, não ajuda.

Ao ser questionado pelo coorientador, Jorge reforçou que considera a memorização importante para a aprendizagem e não apenas para a aprovação em uma disciplina. Em seguida, ele descreveu um método de avaliação que gostaria de experimentar no ensino básico. O participante indicou que desejaria avaliar seu aluno, em determinado momento, de maneira que ele tenha livre acesso à consulta de outros materiais ou, até mesmo, de seus colegas. Jorge idealiza que o resultado não seria muito diferente da avaliação convencional, contradizendo a valorização anterior do recurso de memorização como ponto de partida para o surgimento de outras ideias.

1:12:41	Coorientador	Mas, memorizar é importante apenas para passar nas provas ou para aprender Matemática?
1:12:45	Jorge	Para aprender Matemática. Memorizar para passar na prova você esquece logo depois da prova. Se bobear, pouco antes da prova.
1:13:02	Coorientador	E você acha que isso está relacionado àquela sua fala inicial sobre a escola do século XIX, professor do século XX e aluno do século XXI?
1:13:09	Jorge	Sim. A escola é muito conteudista. Eu estava pensando nisso outro dia que, se eu fosse professor, eu teria vários tipos de prova. Uma prova seria o seguinte: “Eu vou entregar a prova e vocês podem fazer. Se quiser colar, cola. Se quiser perguntar para o colega, pergunta. Se quiser pegar o caderno e olhar, você pode fazer. Eu vou ficar em sala e a prova é de vocês”. Eu queria ver no que isso ia dar. Sinceramente, eu tinha vontade de fazer isso. Porque aquele aluno que quer fazer, vai fazer. O que não sabe, vai “encher o saco” daquele que sabe. A partir do momento que você deixa o aluno fazer isso, você revela para ele mesmo o que ele não sabe. Eu tenho a impressão que a nota não seria muito diferente da nota que ele teria se fosse uma prova em que o aluno sentasse e

		não pudesse fazer consulta. Seria interessante. Porque quem sabe fazer, faz. Mesmo que erre ou esqueça alguma coisa, sabe como iniciar e aonde ele quer chegar.

4.3 Descrição com Transcrição de Dados – Sujeito: Alexandre

Alexandre apontou no questionário (Anexo VIII) que o rigor – termo utilizado pelo próprio participante – e a defasagem em conteúdos matemáticos do ensino básico representavam suas maiores dificuldades em Análise. Na entrevista, o participante destacou que algumas de suas dificuldades estão relacionadas às diferenças entre a maneira como a Matemática é apresentada na graduação e no ensino básico. Segundo ele, na Educação Básica, o ensino segue uma abordagem mecânica que enfatiza os procedimentos. Ao chegar à universidade, em disciplinas como Análise, o licenciando se depara com uma maneira mais investigativa de encarar a Matemática, diferente do modo que está habituado. Em suas palavras, Alexandre ressalta que, a partir deste momento, o aluno tem que pensar.

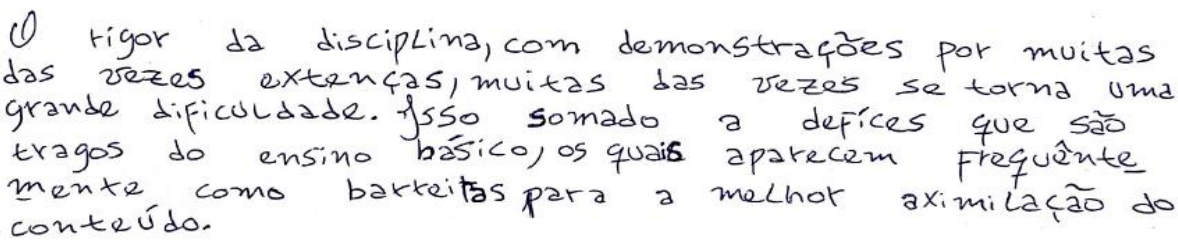

O rigor da disciplina, com demonstrações por muitas das vezes extenças, muitas das vezes se torna uma grande dificuldade. Isso somado a defíces que são tragos do ensino básico, os quais aparecem frequênte mente como barreitas para a melhor aximilação do conteúdo.

Figura 12: Resposta de Alexandre à Pergunta 7 do Questionário

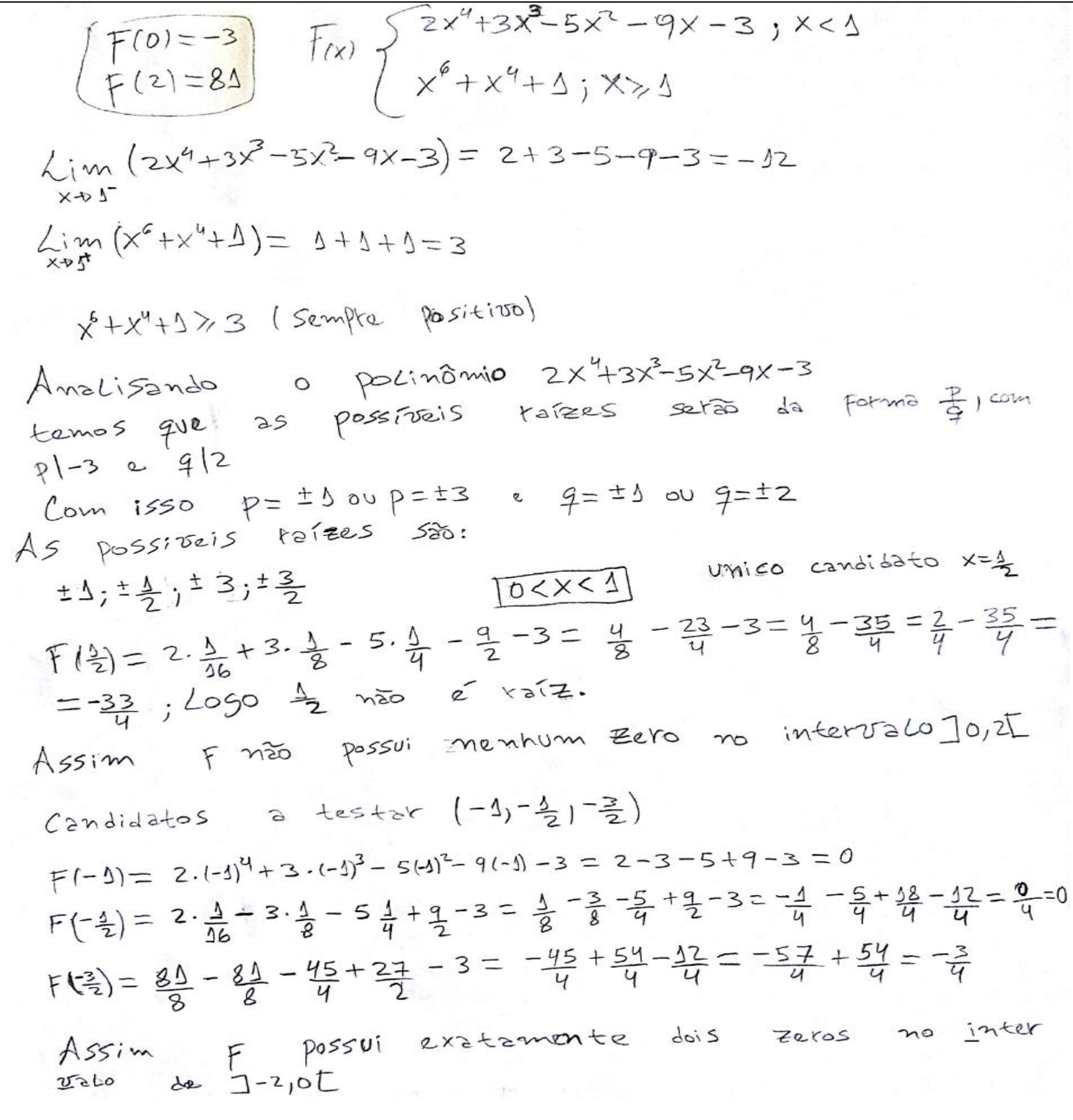
10:47	Pesquisador	Especificamente em um curso de Análise, quais foram as dificuldades que você encontrou que estão relacionadas a essa defasagem no ensino básico?
10:58	Alexandre	Em um curso de Análise, uma das grandes dificuldades que eu tive foi uma que eu já tinha encarado antes em outro curso. Foi em um curso de Álgebra. A maneira mais investigativa de encarar a Matemática. Um problema no ensino, em geral, é que a Matemática é vista como conta, como operação numérica. Até mesmo em geometria, vai muito para a álgebra da geometria. Chegando à faculdade, em matérias como Álgebra e como Análise, que você tem que não simplesmente reproduzir, mecanizar, mas começar a pensar sobre as questões, há uma grande dificuldade. Muita gente reprova em Álgebra, por exemplo, que é uma matéria que aborda assuntos vistos no ensino fundamental, como divisibilidade. A própria primeira parte de Análise, em que aparece a álgebra dos números reais, também

		pega esses temas. Às vezes, tem coisas que a gente vê desde sempre, mas que, quando você pede para o aluno provar alguma coisa, ele se perde; porque ele não tem o costume de fazer aquilo. Então, essa é uma das grandes dificuldades.
12:24	Pesquisador	Então, em sua opinião, quando o aluno se depara com esses cursos, ele sai daquela maneira mecânica que estava habituado?
12:29	Alexandre	Ele tem que pensar. Por exemplo, em coisas simples do começo de um curso de Álgebra, como a prova de que $a \cdot 0 = 0$. É uma questão que a gente aprendeu fazer e que é bem boba. Só que para um aluno que não tem costume de provar, de demonstrar nada, ele acaba perdido. Ele não sabe o que fazer. Pelo menos em coisas assim mais simples, eu acho que falta isso no ensino básico. Porque o aluno tinha que ter mais contato com demonstração, com pesquisa em Matemática, mesmo no ensino básico. E aí, chegando à faculdade, ele acaba ficando perdido por conta disso.

Buscando esclarecer o termo investigativo, utilizado anteriormente pelo participante, o coorientador questionou Alexandre sobre a relação entre universidade, investigação e rigor. Cabe ressaltar que intervenções dessa forma acorreram pontualmente, em momentos que parecia haver conflito no discurso. A intenção não era "sanar" o conflito, mas fomentar o discurso pela promoção de controvérsia.

16:06	Coorientador	Eu fiquei com uma dúvida porque você usou dois termos. Um termo que você usou é investigativo [o outro termo foi rigor]: "Na universidade, a matemática é mais investigativa". Você acha que ela tem mais investigação ou tem mais rigor? Ou é a mesma coisa?
16:29	Alexandre	Não é a mesma coisa. Ela tem ambas as coisas. As duas coisas. Primeiro, investigativa no sentido de as questões aguçarem mais o pensamento do aluno. As questões te fazem ter que pensar mais. E, além disso, principalmente na disciplina de Análise, por exemplo, não basta você saber o que escrever. É muito importante, também, o como se escreve. E aí, entra o rigor. Não basta, simplesmente, eu saber a resposta final. Conta muito para o professor que está corrigindo como eu me expresso. A forma como eu me expresso. Como é que eu consigo apresentar a matemática. Porque quando você apresenta uma coisa, alguém sempre vai ler. Então, o rigor conta muito aí também. Só que, de formas diferentes, a faculdade te exige as duas coisas. Tanto desperta maior investigação no aluno, como também exige um maior rigor.

Na sequência, o pesquisador conversa com Alexandre sobre as soluções que ele propôs na Tarefa 1. Observemos no Anexo IX que Alexandre utilizou uma solução muito semelhante à apresentada pelo estudante fictício Carlos, seguindo, basicamente, uma abordagem algébrica a partir da pesquisa de raízes racionais. Podemos destacar que ele reproduziu sua solução na mesma direção de Carlos ao desconsiderar a possibilidade de existência de zeros irracionais.



$F(0) = -3$
$F(2) = 81$

$$F(x) \begin{cases} 2x^4+3x^3-5x^2-9x-3 \ ; \ x<1 \\ x^6+x^4+1 \ ; \ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} (2x^4+3x^3-5x^2-9x-3) = 2+3-5-9-3 = -12$$

$$\lim_{x \to 1^+} (x^6+x^4+1) = 1+1+1 = 3$$

$x^6+x^4+1 \geq 3$ (sempre positivo)

Analisando o polinômio $2x^4+3x^3-5x^2-9x-3$ temos que as possíveis raízes serão da forma $\frac{p}{q}$, com $p|-3$ e $q|2$

Com isso $p=\pm 1$ ou $p=\pm 3$ e $q = \pm 1$ ou $q = \pm 2$

As possíveis raízes são:
$\pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm 3; \pm \frac{3}{2}$ $\boxed{0<x<1}$ único candidato $x=\frac{1}{2}$

$$F\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{16} + 3\cdot\frac{1}{8} - 5\cdot\frac{1}{4} - \frac{9}{2} - 3 = \frac{4}{8} - \frac{23}{4} - 3 = \frac{4}{8} - \frac{35}{4} = \frac{2}{4} - \frac{35}{4} = $$
$= -\frac{33}{4}$; Logo $\frac{1}{2}$ não é raiz.

Assim F não possui nenhum zero no intervalo $]0,2[$

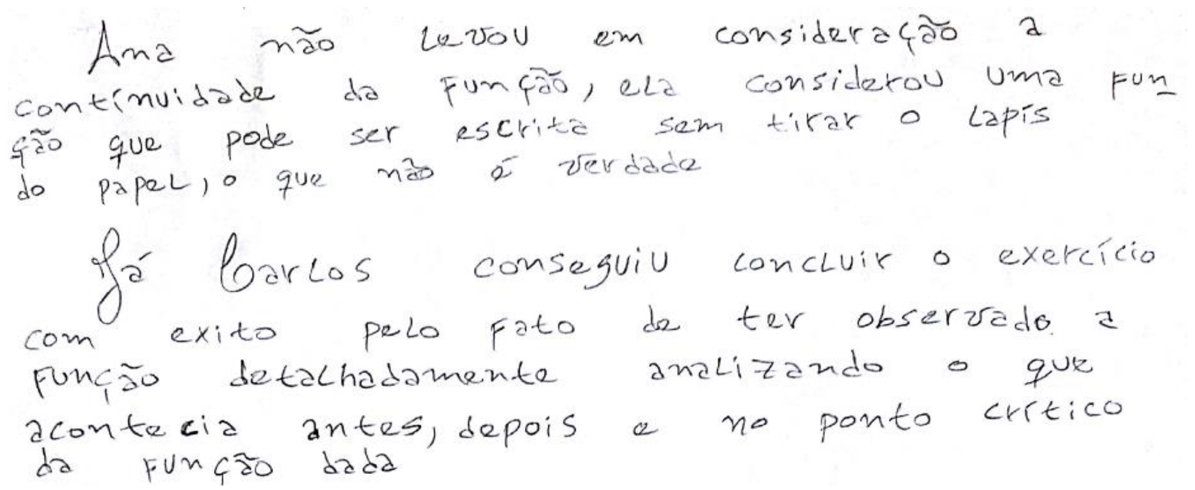
Candidatos a testar $\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$$F(-1) = 2\cdot(-1)^4 + 3\cdot(-1)^3 - 5(-1)^2 - 9(-1) - 3 = 2-3-5+9-3 = 0$$
$$F\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{16} - 3\cdot\frac{1}{8} - 5\frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 3 = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{5}{4} + \frac{9}{2} - 3 = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{18}{4} - \frac{12}{4} = \frac{0}{4} = 0$$
$$F\left(-\tfrac{3}{2}\right) = \frac{81}{8} - \frac{81}{8} - \frac{45}{4} + \frac{27}{2} - 3 = -\frac{45}{4} + \frac{54}{4} - \frac{12}{4} = -\frac{57}{4} + \frac{54}{4} = -\frac{3}{4}$$

Assim F possui exatamente dois zeros no intervalo de $]-2,0[$

Figura 13: Solução de Alexandre para o Exercício da Tarefa 1

Recordemos que a resposta da estudante fictícia Ana seguia uma abordagem gráfica que desconsiderava a descontinuidade da função, conforme visualizado no Anexo II. Em sua análise das soluções na primeira tarefa, Alexandre considerou a resposta de Ana incorreta e a de Carlos correta. Na entrevista, quando questionado pelo pesquisador se sua solução era suficiente para determinar todos os zeros da função, o participante reavalia sua resposta e admite a necessidade de considerar também os zeros irracionais. A partir disso, Alexandre apresenta uma nova análise para as soluções. Segundo ele, inicialmente, o uso do Teorema do Valor Intermediário sem considerar a descontinuidade da função quase o induziu ao erro e, nesse sentido, o mesmo pode ter ocorrido na solução de Ana. Já em relação a Carlos, o participante destaca que sua solução teve um cuidado que Ana não teve, seguindo uma estratégia mais trabalhosa. Entretanto, o entrevistado agora destaca que ele não foi cuidadoso o suficiente.


Ana não levou em consideração a continuidade da função, ela considerou uma função que pode ser escrita sem tirar o lapis do papel, o que não é verdade

Já Carlos conseguiu concluir o exercício com exito pelo fato de ter observado a função detalhadamente analizando o que acontecia antes, depois e no ponto critico da função dada

Figura 14: Análise de Alexandre para as Soluções dos Alunos na Tarefa 1

20:29	Pesquisador	Você seguiu, em sua resolução na questão da Tarefa 1, uma linha de raciocínio mais voltada à solução de Carlos a partir da pesquisa de zeros. Você acha que essa maneira de resolver de Carlos, que você acabou reproduzindo também na sua solução, é suficiente para encontrar todos os zeros da função?
20:52	Alexandre	(Pausa - Analisa a tarefa) Se eu não me engano, não. Porque aqui ele só iria encontrar os zeros racionais. Agora, depois que eu pensei nisso. Só ia encontrar os zeros racionais, não os irracionais.
21:29	Pesquisador	Você apontou que a solução de Ana estava equivocada e a solução de Carlos você apontou como correta. Então, de certa forma, você está reavaliando isso.
21:39	Alexandre	Sim. Sim. Talvez, ele teve mais cuidado que ela, mas não todo o cuidado necessário.
21:45	Pesquisador	Qual cuidado que ele teve a mais?
21:49	Alexandre	(Pausa - Analisa a tarefa) A começar pelo... até pelo que acabou vindo de mim também, a afobação de ver na questão a possibilidade de usar esse... eu esqueci o nome do teorema... acho que é Teorema do Valor Médio... Intermediário. Acho que é isso. Ao ver a questão, dá uma vontade de ver e usar, achando que vai resolver muito fácil. Talvez, ele pegou outros mecanismos que dariam mais trabalho para ele, mas não essa afobação que ela

		acabou seguindo muito rápido.

Quando questionado pelo pesquisador sobre as diferenças de abordagens nas duas soluções, Alexandre destaca que Carlos utilizou uma abordagem mais algébrica, enquanto Ana usou gráficos para expressar seu raciocínio. Segundo o participante, o erro no gráfico de Ana, que não considerou a descontinuidade da função, foi o aspecto que mais chamou sua atenção na análise das soluções.

22:37	Pesquisador	Quais são as diferenças que você identifica entre as abordagens das duas soluções?
22:40	Alexandre	(Pausa - Analisa a tarefa) A abordagem de Carlos usou mais álgebra do que a abordagem da Ana. Ele procurou usar um artifício, uma propriedade algébrica, para resolver a questão. Enquanto Ana foi mais direto ao estudo das funções no plano cartesiano, usando gráficos para representar o que ela estava querendo dizer.
23:50	Pesquisador	Você acha que essa diferença entre as abordagens influenciou sua análise das soluções?
23:57	Alexandre	Não... de certa forma sim, no sentido dos gráficos. Por exemplo, ela não verificou a descontinuidade da função, mas, na hora de botar o gráfico, ela botou um gráfico todo bonitinho, certinho, o que, na verdade, não era o que acontecia. Mas, na escrita em si, acho que não influenciou não.
24:22	Pesquisador	Então, o que te chamou mais a atenção foi o erro no gráfico...
24:26	Alexandre	Isso. Foi o que apareceu mais para mim.
24:29	Pesquisador	E por que você acha que apareceu mais para você a questão gráfica?
24:33	Alexandre	Primeiramente, por esse erro gráfico ter vindo de um erro que eu também havia cometido no decorrer da resolução. Então, já me chamou a atenção a continuidade no gráfico.

Na sequência desse episódio, ao ser questionado pelo pesquisador se as diferenças entre as abordagens (citadas por ele no trecho anterior) foram determinantes para sua análise das soluções, Alexandre destacou que se deixou levar pela apresentação da solução de Carlos, ao ponto de considerá-la correta em seus registros na Tarefa 1. Segundo ele, a estética da escrita de Carlos o induziu ao erro e aparentou que os argumentos apresentados estavam corretos, apesar de a solução de Ana lhe parecer mais familiar.

24:59	Pesquisador	Essas diferenças de abordagem contribuíram, por exemplo, para você considerar a solução de Carlos correta, mesmo você reavaliando agora, e a de Ana errada [conforme registrado em suas respostas na Tarefa 1]?
25:12	Alexandre	Talvez, pela minha falta de convencimento do entendimento total da abordagem de Carlos. Agora, eu vejo que ele deixou um furo. Ele deixou de verificar a parte que deveria verificar. Mas, talvez, na hora eu me deixei levar por achar que ele tinha verificado certinho e, na de Ana, eu consegui perceber mais a falha.
25:39	Pesquisador	Você acha que se deixou levar por qual aspecto da solução dele?
25:46	Alexandre	A escrita dele pareceu muito bacana. A escrita dele me mostrava que ele estava mais consciente do que estava colocando ali do que Ana. Além disso, talvez um pouco de.... falta de conhecimento na abordagem dele. A abordagem dela pareceu mais familiar, a princípio. Era a abordagem com a qual eu estava mais familiarizado. A abordagem para a solução do problema foi uma abordagem que, a princípio, não vinha na minha mente, na minha cabeça. Então, foi algo mais estranho para mim, até para investigar.

No prosseguimento da fala na qual o participante afirma ter sido influenciado pela estética da argumentação de Carlos, Alexandre ratifica, após a provocação do coorientador, que uma escrita com um aspecto mais formal traz mais segurança que esteja correta. De acordo com o participante, o professor fica mais propenso a buscar um erro em uma argumentação informal que não tenha rigor do que em uma solução mais formal. Por esse motivo, Alexandre considera que a escrita de Carlos interferiu em sua análise da solução e contribuiu para que não identificasse o erro cometido pelo aluno.

27:54	Coorientador	Você falou que a escrita do Carlos pareceu bacana. Você acha que uma escrita que tem um aspecto mais formal, mais algébrico, parece ter um rigor maior? Você acha que ela traz mais segurança que esteja correta?
28:16	Alexandre	Sim. Não que esteja certo. Mas, na hora, até por eu não ter percebido os furos que ele deu... a abordagem que eu encaminhei para a solução... me pareceu que ele estava bem seguro do que estava escrevendo e acabou que, por isso aí, eu acabei deixando passar.
28:38	Pesquisador	Você acha que isso teve consequência na hora de você avaliar a sua solução?
28:42	Alexandre	Sim. Porque o professor em si ia ficar mais atento. Se você vê uma linguagem muito informal assim, fugindo do rigor matemático, da linguagem, deve ficar muito mais atento ao erro do que perceber um erro em uma demonstração que parece que vem muito certa,

		mas, de repente, tem um ponto que ele não usou.

Em sua resposta sobre o objetivo do exercício da Tarefa 1, Alexandre destacou aspectos gráficos quando se referiu ao conceito de continuidade. Na entrevista, quando questionado pelo pesquisador se sua compreensão sobre a continuidade estava mais relacionada a estes aspectos ou à definição formal do conceito apresentada em Análise, o participante apresentou respostas conflitantes. Por um lado, ele declarou que os conceitos gráficos o ajudam a visualizar melhor o significado do conceito e contribuem mais para sua compreensão. Em contrapartida, o entrevistado afirmou que a definição formal é mais importante porque o ensino superior exige rigor do aluno.

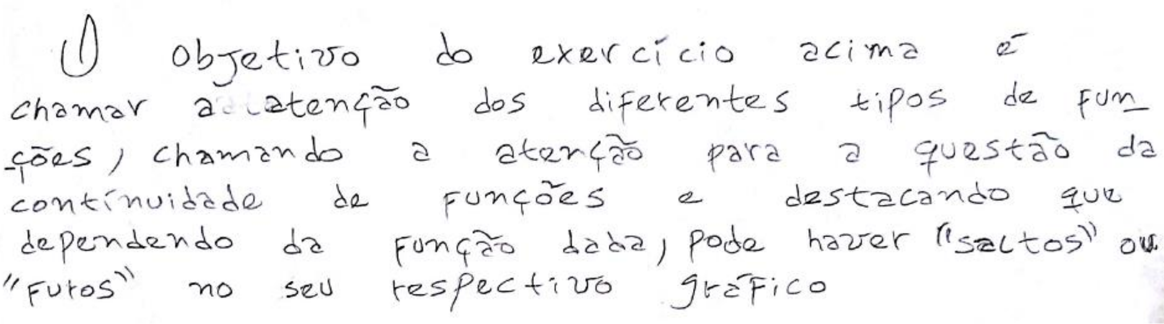

O objetivo do exercício acima é
chamar a atenção dos diferentes tipos de fun-
ções, chamando a atenção para a questão da
continuidade de funções e destacando que
dependendo da função dada, pode haver "saltos" ou
"furos" no seu respectivo gráfico

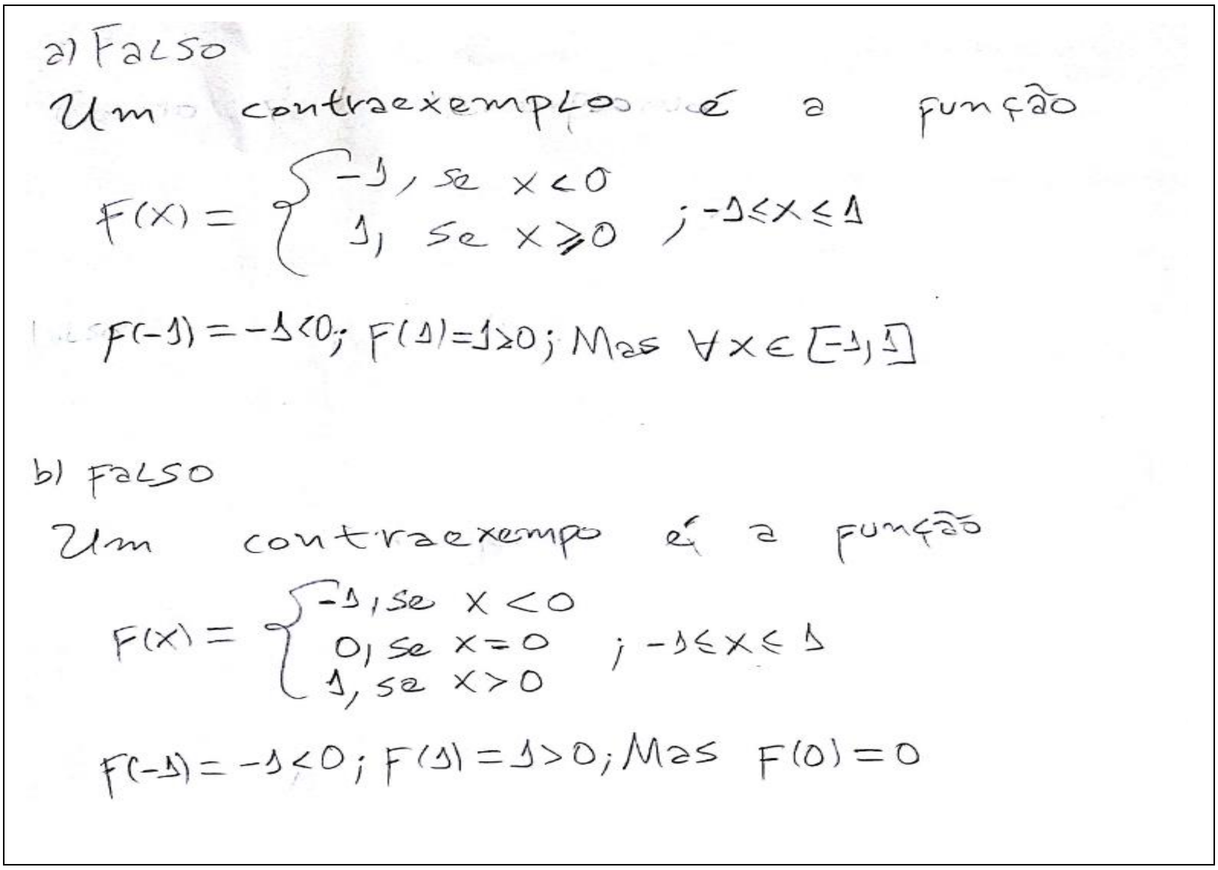
Figura 15: Comentário de Alexandre sobre o Objetivo do Exercício da Tarefa 1

39:32	Pesquisador	Em sua argumentação, e aqui, novamente, você trouxe muito o conceito de continuidade relacionado a aspectos gráficos, como traçar o gráfico sem tirar o lápis do papel, a presença de saltos ou furos no gráfico... Você acha que sua compreensão sobre o conceito de continuidade está mais relacionada a estes aspectos ou à definição formal do conceito que você conhece de Análise?
39:58	Alexandre	(Pausa) Talvez, os conceitos gráficos, de certa forma, me ajudem mais a visualizar o que para mim representa. Só que a definição formal é o que tem mais importância porque, é como eu estava falando, o ensino superior exige rigor da gente. E é ali que a gente encontra o rigor. Talvez, aquela outra abordagem deixe algum furo que não me vem à cabeça agora. Então, a maior importância está pautada na definição mais formal.
40:46	Pesquisador	Essa definição mais formal, com mais rigor, contribui para seu entendimento da definição? Ou não?
40:52	Alexandre	Contribui, contribui. Só que eu acho que o aspecto gráfico, no meu entendimento da definição, contribui mais, apesar da linguagem mais formal.

Em seguida, ao ser questionado se o formalismo e o rigor dificultam o entendimento de definições e teoremas, o participante declarou que uma abordagem mais informal auxilia a compreensão. Para ilustrar seu ponto de vista, Alexandre citou o Princípio da Casa dos Pombos estudado em Matemática Discreta. Segundo ele, o enunciado mais lúdico do teorema esclarece melhor seu significado ao aluno, contribuindo até para o entendimento formal do princípio. Neste caso, o participante considera que o formalismo na apresentação do princípio seria uma barreira para a compreensão do aluno.

41:10	Pesquisador	Agora, olhando por outro lado, em relação às dificuldades, você acha que em uma definição, em um teorema, o rigor e o formalismo dificultam o entendimento?
41:22	Alexandre	Sim.
41:26	Pesquisador	Por quê?
41:28	Alexandre	Eu parto do princípio que uma visão lúdica das coisas, numa visão inicial, principalmente, se você conseguir transformar aquilo em algo palpável, tende a ajudar mais na compreensão do que uma visão teórica. A visão teórica é importante, mas ela tem que estar lado a lado com outras coisas... visão lúdica. Porque, de certa forma, nem todo mundo tem um nível de abstração tão grande para conseguir assimilar aquela forma mais teórica. E, quando você consegue relacionar aquilo ali com algo mais palpável para a pessoa, ela tende a ter uma compreensão melhor até da parte teórica.
42:22	Pesquisador	Então, você acha que definições e afirmações com rigor, formalismo, não são palpáveis...
42:29	Alexandre	Por exemplo, em Matemática Discreta, o Princípio da Casa dos Pombos. Quando o cara ensina: “Se eu tenho mais pombos do que casas, então vai sobrar um pombo”, aquilo ali esclarece bastante para o aluno. Esclarece até para a visão formal do princípio em si. Essa visão mais palpável. Se eu tenho mais camisa do que gaveta, vai sobrar camisa ou uma gaveta vai ter mais de uma camisa. Isso ajuda muito o aluno a entender até o formalismo. Só o formalismo sozinho, às vezes, ia bloquear de certa forma muitos alunos porque muitos iriam parar e não iriam conseguir progredir. Quando você tem uma abordagem que parece natural a eles, você pode fazer todo mundo acompanhar.

Em suas soluções para a Tarefa 2 (Anexo X), Alexandre apresentou como contraexemplos funções definidas a partir de suas leis de formação, sem esboçar qualquer representação gráfica como apoio. Mesmo tendo afirmado, em trechos anteriores, que a abordagem informal auxiliava mais sua compreensão, o participante declara, agora, que se sente mais seguro ao argumentar de maneira mais formal. Segundo ele, embora a argumentação informal contribua para o entendimento, argumentar de maneira formal reduziria a margem de erro e seria o mais indicado no momento de escrever para alguém que vá avaliar aquela argumentação.



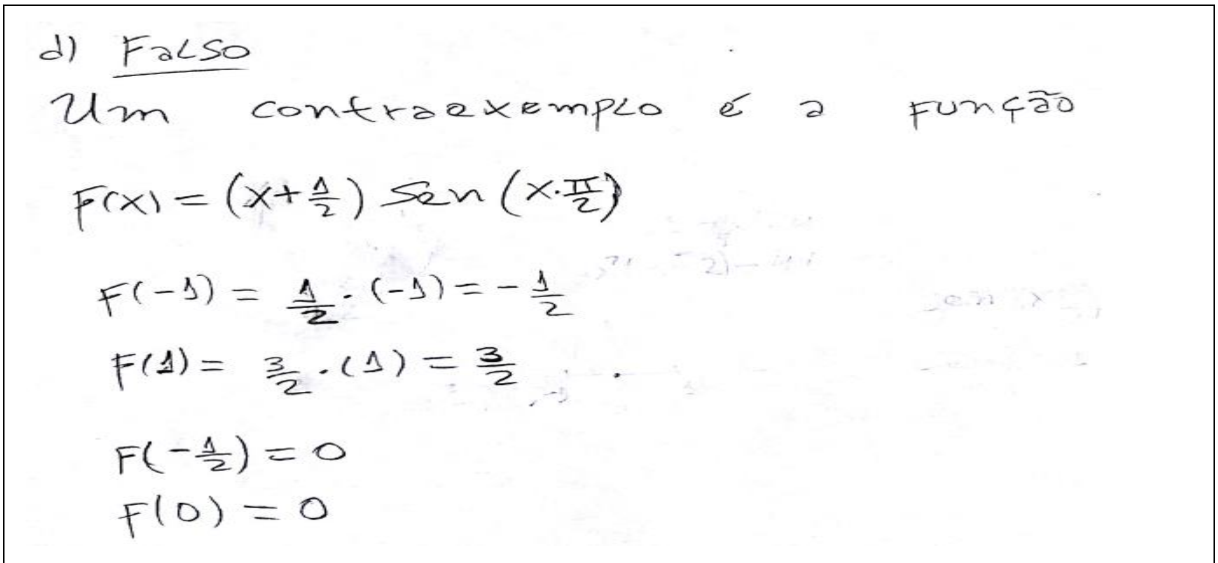


Figura 16: Solução de Alexandre para os itens *a*, *b*, *d* da Tarefa 2

50:01	Pesquisador	Como já comentamos, você remeteu muito a uma compreensão mais gráfica sobre a continuidade. Todos os itens da Tarefa 2 relacionavam a continuidade. Se você observar, em seus contraexemplos, você não utilizou gráficos. Por que você acha que sua compreensão sobre continuidade necessita tanto dos aspectos gráficos, embora você não tenha utilizado em sua solução?
50:30	Alexandre	(Pausa) Primeiramente, eu tenho um controle maior da parte algébrica do que da parte mais geométrica ou gráfica da Matemática. Eu me sinto mais seguro.
51:12	Pesquisador	Por que você se sente mais seguro dessa maneira?
51:16	Alexandre	Primeiro, porque foi a parte da Matemática que mais me interessou e foi onde eu vi melhor meu aprendizado. Onde eu ganhei retorno nas disciplinas. Então, eu me sinto mais seguro. Aqui, a gente não tem muitos conteúdos de Geometria. Desde o ensino fundamental e médio eu carrego uma dificuldade maior nessa parte geométrica. Nessa parte de como argumentar geometricamente, principalmente.
52:42	Coorientador	Você acredita que dar uma resposta matemática mais formal é algo mais correto?
52:54	Alexandre	Eu acredito que, quando a gente parte para uma resposta mais formal, a gente diminui a nossa margem de erro. É muito menos frequente a gente acabar caindo em um erro ou em uma particularização quando a gente vai para a linguagem formal na hora de resolver um problema. A parte informal é boa para o entendimento de um problema, mas, na hora de escrever para alguém avaliar o que você está escrevendo, é bom você procurar transmitir aquilo ali de uma forma mais formalizada. Não que o formal seja melhor do que o informal. Mas, o formal, pelo menos para mim, me dá a impressão de fugir da margem de erro.

Mais adiante, em meio ao seu discurso sobre o formalismo e sua compreensão, Alexandre relacionou a defasagem em sua formação na escola à existência de um grande salto vivenciado pelo aluno na transição da Educação Básica para o ensino superior. Ao ser questionado pelo coorientador se os alunos da Educação Básica e do ensino superior aprendem Matemática de forma diferente, Alexandre reiterou que, na graduação, o estudante é estimulado a desenvolver uma visão investigativa sobre a Matemática e a pensar mais. Já na Educação Básica, segundo o participante, o ensino de Matemática é apresentado de maneira mecânica. Ele acrescentou, ainda, que a forma como aprendeu a Matemática Elementar na graduação foi muito diferente da maneira como aprendeu no ensino básico.

1:16:35	Coorientador	A gente está querendo entender as contradições, o que converge e o que diverge, na verdade. Esse assunto pode não ser fechado para você, mas, na verdade, ele não é fechado para ninguém. Tanto é,

		que estamos aqui em discussão. Mas, quando você falou dos alunos de exatas que escolhem Matemática, você estaria nesse meio. Você está fazendo Bacharelado e Licenciatura em Matemática. Você é um aluno de graduação. Então, dentro dessa sua resposta, para esse aluno, a comunicação formal deve se fazer mais presente. Embora você tenha dito que para sua compreensão da Tarefa 2 e para sua compreensão do curso de Análise, talvez, o formal tenha sido uma barreira em alguns momentos....
1:17:40	Alexandre	A questão dessa grande barreira está relacionada lá no começo com o déficit no ensino básico. Talvez, o aluno não chega pronto aqui para essa linguagem mais formalizada. Há um grande salto do ensino básico para o ensino superior. Ninguém discute sobre a importância de ter um curso inteiro de Pré-Cálculo, por exemplo. Ou até outros cursos nessa linha para nivelar mais a base de todo mundo.
1:18:25	Coorientador	Você acha que as pessoas que estão na Educação Básica e na educação superior aprendem Matemática de forma diferente?
1:18:40	Alexandre	(Pausa) Em algumas disciplinas do ensino superior, você é obrigado, estimulado, a ter uma visão mais investigativa. A pensar mais matemática. No ensino básico, as coisas são muito mais decoradas... muito mais mecânica a forma em que é ensinada do que a gente espera que seja o ideal.

Na sequência deste trecho, quando questionado pelo pesquisador sobre os motivos que levam a este salto, Alexandre destacou que a maneira de entender e apresentar a Matemática dos professores é determinante para isso. Segundo ele, os próprios professores do ensino básico consideram que os alunos não são capazes de aprender Matemática de maneira mais investigativa, optando por reproduzirem o livro ao invés de ensinarem o estudante a pensar. Para ilustrar seu argumento, ele citou um exemplo de sua experiência docente.

1:21:10	Pesquisador	Por que você acha que há essa diferença, esse salto do ensino básico para o superior? Essa diferença entre as abordagens é justificada pela diferença de perfil dos alunos do ensino superior e da Educação Básica? Ou você acha que é devido à forma de entender matemática dos professores do ensino superior e do ensino básico?
1:21:35	Alexandre	Talvez, o principal aspecto seja a forma de entender matemática dos professores. Só que, outro aspecto que eu acho que dificulta esse tipo de interação é os próprios professores acharem que os alunos não seriam capazes de aprender a matemática de uma forma mais investigativa. Às vezes, é mais fácil para o professor reproduzir no quadro o livro do que ensinar a pensar. É mais cômodo no ensino básico. Eu vejo isso até em minha experiência de trabalho. Eu estou trabalhando na monitoria de um colégio particular. Outro dia desses, a gente ia ter uma prova de

		Geometria Espacial. Eu estava tentando, me esforçando muito para eles entenderem as questões e pensarem. Aí, eles ficavam me perguntando: "Não tem uma fórmula para isso?". Eu falava para eles assim: "A fórmula em si vocês tem elas anotadas em seus cadernos". E as questões, em geral, não dizem muita coisa além de: calcule o volume, calcule a altura. Se eles já tinham a fórmula anotada, a minha presença não fazia muito sentido ali. "Eu não tenho muito mais o que passar para vocês. Sabendo a fórmula, as questões são muito claras, elas não dão voltas no que elas querem, então o que eu posso acrescentar a vocês é ajuda-los a pensar. Entender a questão. Investigar a questão".

Ao descrever o retorno que daria aos alunos a partir das provas apresentadas na Tarefa 3 (Anexo XI), Alexandre fez uma ressalva sobre a argumentação de Júlia, destacando que ela deveria se preocupar também com o leitor e tornar sua solução mais compreensiva. Segundo ele, este seria um dos papéis do bom professor. Na entrevista, o participante apontou que fazer e ensinar Matemática são tarefas distintas e citou, como exemplo, a prática de seus professores no ensino superior. Para Alexandre, o saber sobre conteúdo é necessário, mas não suficiente para o ensino. Além do domínio sobre o conteúdo, Alexandre aponta que professor necessita ter didática para transmitir a teoria de forma clara aos seus alunos.

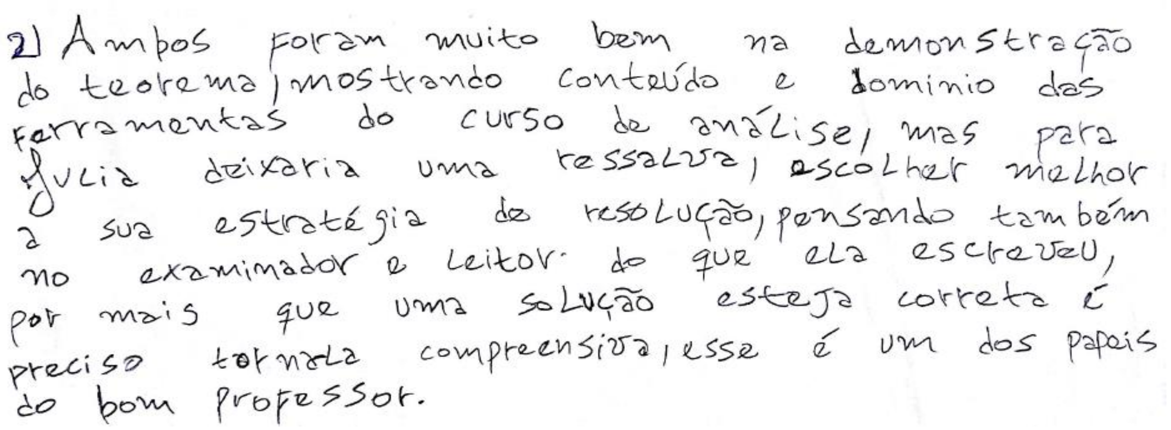

2) Ambos foram muito bem na demonstração do teorema, mostrando conteúdo e domínio das ferramentas do curso de análise, mas para Júlia deixaria uma ressalva, escolher melhor a sua estratégia de resolução, pensando também no examinador e leitor do que ela escreveu, por mais que uma solução esteja correta é preciso tornala compreensiva, esse é um dos papeis do bom professor.

Figura 17: Retorno de Alexandre às Soluções dos Alunos na Tarefa 3

1:28:10	Pesquisador	Você comentou sobre isso em sua resposta, em relação à preocupação com o leitor da demonstração. Você disse que isso era um aspecto importante inclusive para a formação do professor. Você destacou que esse era um dos papéis do bom professor. Por que você acha que essa preocupação com o leitor é importante para a formação docente?
1:28:32	Alexandre	Resolver um problema e ensinar a resolver um problema são duas coisas muito diferentes. Eu encontrei aqui na graduação excelentes doutores que eram professores muito ruins e doutores,

		talvez não tão bons, que eram grandes professores. Porque o saber resolver e o saber ensinar, o saber como passar aquilo ali para o outro, são coisas muito distintas. Não ajuda muito você ter o domínio da teoria, mas não conseguir transmitir aquilo de forma clara para quem está ouvindo. Quem está ouvindo normalmente não tem o mesmo entendimento dele. Então, é muito importante saber como expressar aquilo ali. Como dizer. Como deixar claro. Muitas vezes, ele pode estar correto, na abordagem correta, mas não muito claro para quem está ouvindo.
1:29:34	Pesquisador	Então, o saber do conteúdo que está sendo trabalhado nem sempre é o fundamental?
1:29:40	Alexandre	Isso influencia bastante, é necessário, mas não suficiente.
1:29:45	Pesquisador	Quais os outros saberes seriam necessários ao professor então?
1:29:49	Alexandre	Didática. Não a didática da forma que é ensinada aqui. Mas, meu entendimento sobre didática é como passar, como argumentar. Até a experiência dele em sala de aula vai fazer com que isso cresça. Talvez, no primeiro ano dele em sala de aula, ele vai estar inseguro e não vai saber como abordar. Mas, com o tempo, a tendência é que ele tenha uma experiência de como abordar o assunto.

Nos itens III e IV da Tarefa 3, Alexandre considerou que a abordagem de Pedro permitia compreender melhor o significado do enunciado do teorema e a argumentação da demonstração, uma vez que a argumentação apresentada lhe pareceu mais clara e natural. Segundo ele, a demonstração de Júlia não dá ênfase ao enunciado do teorema e aparenta ter deixado a questão inicial apresentada para trás. Na entrevista, o participante esclareceu que considerava a abordagem de Pedro mais usual e mais próxima à maneira como a Matemática é vista na graduação.

3) O argumento do Pedro me pareceu mais claro, apesar de ambos terem trabalhado bem as suas demonstrações, ambas as demonstrações se preocuparam com o leitor das resoluções, tornando compreencivel a visão dos alunos em suas respectivas provas dos teoremas, entretanto a demonstração de Pedro me pareceu mais natural.

4) A demonstração de Pedro ganha muito da de Júlia no que diz respeito a compreenção no significado do enunciado, a demonstração de Júlia (apesar de correta) não da a enfase necessaria ao enunciado do teorema e da a impressão de ter deixado a questão inicial para trás em um certo ponto, a abordagem de Pedro é muito mais efetiva

Figura 18: Respostas de Alexandre aos itens III e IV da Tarefa 3

1:31:07	Pesquisador	Já em relação à demonstração de Pedro, você disse que ela permite compreender melhor os argumentos da demonstração e citou que ela era mais clara e natural. O que você quis dizer com esses termos que utilizou?
1:31:39	Alexandre	(Pausa – Analisa a tarefa) Aqui são dois alunos do ensino superior, não são?
1:32:00	Pesquisador	São.
1:32:06	Alexandre	Talvez mais clara e natural foi no sentido de ser mais usual para mim. Tipo no primeiro exercício, calhou mais com o tipo de abordagem que eu buscaria de ter. Um estilo diferente, de forma diferente, mas um tipo de abordagem do problema que eu teria. Foi mais natural para mim do que a abordagem da Júlia.
1:32:37	Pesquisador	Quais aspectos você considerou mais naturais do que na demonstração de Júlia?
1:32:42	Alexandre	Usar a linguagem de conjuntos, de cota superior, de sequência para resolver o problema. Enquanto a Júlia, ela usou mais a abordagem mais gráfica.
1:33:05	Coorientador	É mais natural porque ele é um aluno do ensino superior e está sendo mais rigoroso?
1:33:10	Alexandre	(Pausa) Talvez. Não no sentido de rigor mesmo, mas vai mais ao encontro à forma como a gente costuma ver os assuntos aqui

		dentro.
1:33:54	Pesquisador	Então, a demonstração de Pedro parece mais natural porque te remete mais ao que você aprendeu no nível superior?
1:34:00	Alexandre	Sim. E, talvez, seja uma argumentação que me pareceu assim: “Ah... eu pensaria nisso”. Em argumentar assim. Ou pelo menos um começo.

No trecho final da entrevista, Alexandre afirmou que já havia refletido anteriormente sobre a articulação entre o curso de Análise e a Educação Básica. O participante destacou que tenta relacionar aspectos das disciplinas de conteúdo matemático com sua formação como educador e não somente como pesquisador.

1:42:11	Pesquisador	Tudo o que a gente fez aqui foi refletir um pouco sobre o papel da disciplina de Análise na formação do professor. Você já tinha refletido, anteriormente, sobre essa associação entre o curso de Análise e a Educação Básica?
1:42:24	Alexandre	De certa forma, sim. Os cursos que estão mais diretamente ligados com nossa formação como educadores, são os cursos da parte de educação: práticas, estágios. Só que eu sempre tentei relacionar e absorver algumas coisas das matérias mais teóricas, uma abordagem mais voltada ao bacharel, tipo as Álgebras, a Análise. Tento relacionar isso com o que pode me acrescentar na formação como professor em si. E não como pesquisador ou como um estudioso em Matemática. A Análise, por exemplo, é um estilo de pensamento, um estilo diferente de ver a Matemática, de abordar a Matemática. Com a Análise, eu aprendi como pensar, refletir mais. Primeiro, fazer um rascunho do problema, tentar entender o problema. Analisar o que a gente sabe. Esmiuçar o problema. Essa visão que eu não tinha tão forte, a Análise trouxe para mim. E isso não está relacionado só a Análise em si, mas vale para toda a minha vida acadêmica e como estudante em si. Analisar mais as questões, estudar mais o contexto daquilo ali antes de atacar o problema em si.

Para Alexandre, os cursos de conteúdo matemático na graduação trazem mais a visão do pesquisador. O entrevistado afirmou que poucas disciplinas na Licenciatura estão relacionadas ao ensino. Segundo ele, apenas as disciplinas de Educação fazem essa tentativa, entretanto, sem acrescentar muito à formação do professor, por tratarem a educação de maneira fantasiosa. Alexandre aponta que essas disciplinas não consideram a prática docente. Em seguida, ele destacou um conhecimento específico que vem da prática e da experiência do professor em sala de aula. Para o participante, poucas disciplinas na formação do professor preparam o licenciando para a futura prática. Em sua opinião, o curso de Licenciatura é voltado ao aluno que deseja seguir na pesquisa, mesmo que não pretenda optar por este caminho.

1:44:14	Pesquisador	Você citou a diferença entre a visão de um pesquisador e a visão de um professor. Os cursos de conteúdo matemático no nível superior trazem mais a visão do pesquisador ou do professor?
1:44:34	Alexandre	Mais do pesquisador. A gente tem poucas matérias na graduação que são ligadas mais à docência. Muitas matérias do 12° andar[14], na minha visão, não acrescentam muita coisa para a gente como acadêmico. Poderiam acrescentar mais, mas não acrescentam.
1:45:02	Coorientador	Quais são essas matérias?
1:45:04	Alexandre	Tipo Sociologia da Educação, Políticas Públicas da Educação... que tratam a educação de uma forma muito fantasiosa. Quando você vai ter a oportunidade de trabalhar realmente aquilo, você vê que o que se aprende nessas disciplinas de Educação é na prática. Você tira muito pouco do que você aprende aqui dentro. Na Didática em si, por exemplo, o que você mais aprende é o período que você faz estágio no colégio do que o período que você está aqui assistindo as aulas.
1:45:50	Coorientador	Mas, você comentou lá no começo do encontro, em sua experiência docente, que sua motivação na Licenciatura esteve ligada ao contato com uma realidade social e isso não estaria imerso em um curso de Sociologia da Educação?
1:46:19	Alexandre	Mas, isso eu não vi aqui dentro. Teoricamente, sim. Não é que o curso seja desnecessário. É um curso que não te prepara para o deveria te preparar. Talvez, a intenção desses cursos fosse preparar você para essa realidade, mas você só vai ter esse preparo com a experiência prática. São poucas as disciplinas que te preparam realmente para dar aula, como as Práticas Pedagógicas em Matemática, os Estágios. Mas, são poucas. O curso é totalmente voltado para quem vai seguir na pesquisa, mesmo que você não queira seguir na pesquisa. O ciclo básico todo é mais voltado para o bacharel.

4.4 Descrição com Transcrição de Dados – Sujeito: Rodrigo

No questionário (Anexo XII), ao responder sobre suas dificuldades em Análise, Rodrigo considerou a disciplina naturalmente difícil. Na entrevista, o participante justifica sua resposta apontando diferenças entre as metodologias de ensino adotadas na Educação Básica e em Análise. Segundo ele, no ensino básico, o aluno não está habituado a estudar Matemática a

[14] Andar no qual são ministradas as disciplinas de Educação na universidade onde a pesquisa foi realizada.

partir dos conceitos e, por essa razão, encontra dificuldades ao se deparar em Análise com uma disciplina que está baseada em conceitos. O participante enumera como aspectos do curso de Análise a formalização dos conceitos, as ideias, a organização do raciocínio e considera que esses elementos compõem, em suas palavras, a matemática de verdade.

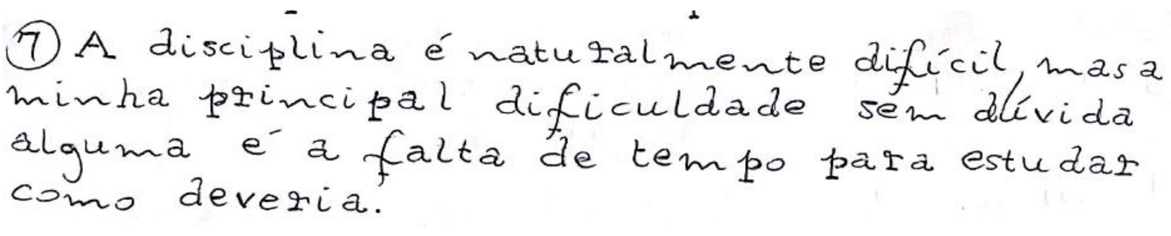

7 A disciplina é naturalmente difícil, mas a minha principal dificuldade sem dúvida alguma é a falta de tempo para estudar como deveria.

Figura 19: Resposta de Rodrigo à Pergunta 7 do Questionário

10:57	Pesquisador	Sobre as dificuldades encontradas no curso de Análise, você citou que a disciplina era naturalmente difícil e apontou como aspecto que dificultava sua aprendizagem a falta de tempo para estudar. Tirando a falta de tempo para estudar, quais outros aspectos que fizeram você considerar a disciplina difícil? O que te fez considerar a disciplina naturalmente difícil, como em suas palavras?
11:24	Rodrigo	Porque, para a maioria das pessoas, pela primeira vez na vida ela está vendo uma disciplina cem por cento conceitual. E a gente não é acostumado a estudar matemática dessa maneira. A gente vem desde criança decorando fórmula. [...] Aí, pela primeira vez, você tem contato com a matemática de verdade, que são conceitos, a formalização dos conceitos, as ideias, a organização do raciocínio... que é a matemática de verdade. Centrada na ideia. E aí, como geralmente as pessoas não estão acostumadas a fazer isso, pode gerar uma dificuldade. Certamente gera uma dificuldade.

Ainda no questionário, Rodrigo havia considerado a disciplina de Análise relevante para a formação docente por reunir as principais ideias matemáticas. Na entrevista, Rodrigo esclareceu que a principal ideia matemática a que se referia era a construção do corpo dos números reais, juntamente com sua aplicação em outros temas. Segundo o participante, esse conteúdo possibilita a formalização de outros conceitos matemáticos como derivada, continuidade, séries, destacados por ele como importantes e interessantes.

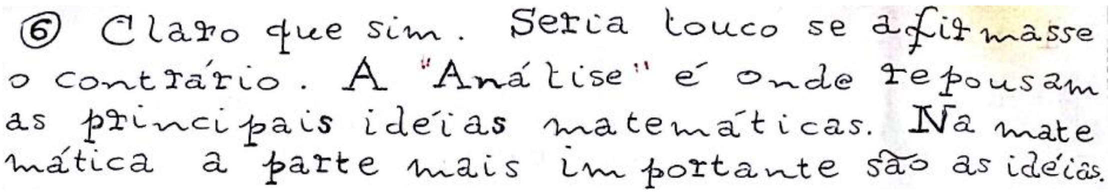

6 Claro que sim. Seria louco se afirmasse o contrário. A "Análise" é onde repousam as principais idéias matemáticas. Na matemática a parte mais importante são as idéias.

Figura 20: Resposta de Rodrigo à Pergunta 6 do Questionário

12:20	Pesquisador	Quando perguntado se Análise era relevante em sua formação como professor, você disse que era relevante porque a Análise era a disciplina onde repousam as principais ideias matemáticas. Quais seriam essas principais ideias matemáticas?
12:41	Rodrigo	A construção do corpo dos reais. Acho que, sem isso, você não tem nada na Matemática. A medida de uma temperatura é um número real, a probabilidade é um número real. Você vai fazer o que sem isso? Nada! Daí, depois da construção do corpo dos números reais, abre-se um leque de opções. A continuidade, diferenciabilidade... sem isso não existiria, por exemplo, o Cálculo. Será que existiria a Engenharia, por exemplo? Eu acho que ia ser bem mais difícil.
13:27	Pesquisador	Você destaca, então, como ideia matemática fundamental a construção dos números reais?
13:34	Rodrigo	Sim. Sim. Porque, a partir disso, você pode formalizar os conceitos do Cálculo, das derivadas, das funções contínuas, da aproximação polinomial, das funções de classe C^n, Séries de Taylor... são coisas bem importantes, bem interessantes.

Após Rodrigo enumerar conceitos aprendidos no ensino superior, o pesquisador questionou se ele considerava que as principais ideias matemáticas eram aquelas vistas na graduação. O participante hesitou ao responder a pergunta e destacou sua contundência. Em seguida, refletiu sobre as principais ideias da perspectiva de um indivíduo que não será necessariamente um matemático como, por exemplo, um aluno do ensino básico. Nesse sentido, Rodrigo destacou a Aritmética e a habilidade com as operações como requisitos importantes. Entretanto, ele ressaltou que para entender esses conceitos de maneira mais profunda, é necessário um curso de Análise.

14:18	Pesquisador	Então, para você, as principais ideias matemáticas são aquelas ideias que você vê mais no nível superior, uma vez que você citou diversos conteúdos do ensino superior: séries, derivada... Então, você acha que as principais ideias matemáticas são aquelas que você vê na graduação?
14:42	Rodrigo	Essa é uma pergunta bem contundente... olha... do ponto de vista matemático, eu acho que sim. Agora, do ponto de vista prático, de um bom matemático... talvez, não. Mas,... é uma pergunta bem

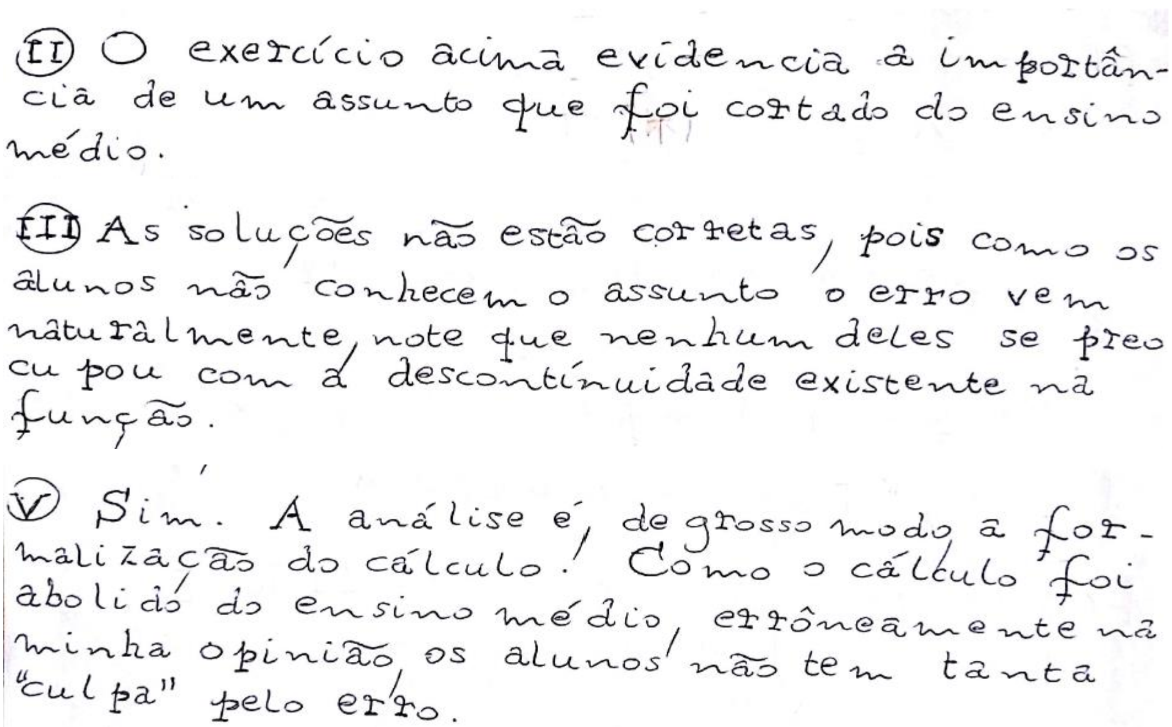
		contundente essa, cara. Eu acho que sim... da perspectiva de alguém que é estudante de Matemática.
15:16	Pesquisador	E se fosse da perspectiva de alguém que não seja estudante de Matemática? Por exemplo, um aluno do ensino básico? O que você consideraria como principal ideia matemática?
15:24	Rodrigo	Aritmética. Operações. Aritmética. Aritmética parece uma coisa fácil, mas não é. As operações, divisibilidade, mdc... isso aí você vai usar no seu cotidiano independentemente do que você for fazer. Uma soma, multiplicação, divisão, aritmética. Eu acho que para você entender de uma maneira mais profunda, é necessário um curso de Análise. A construção dos números reais... aí você vai compreender melhor a própria aritmética, no caso. Mas, quem tem necessidade dessa compreensão mais profunda, geralmente, é o matemático.

Na sequência deste trecho da entrevista, quando questionado sobre as principais ideias matemáticas do ponto de vista docente, Rodrigo considerou importante que o professor conheça com rigor a construção do corpo dos números reais, mesmo que ele não aborde isso efetivamente em sala de aula. O participante mostrou-se convicto sobre a relevância do curso de Análise na formação docente e revelou certa inquietação com opiniões contrárias a esse ponto de vista. Rodrigo afirmou que Análise representa o “filé mignon” da Matemática e acrescentou que, sem cursar a disciplina, o indivíduo não pode ser considerado matemático.

17:46	Pesquisador	E da perspectiva do professor de Matemática? Quais seriam as principais ideias matemáticas?
17:52	Rodrigo	O ideal para o bom professor é ele saber o que está fazendo. Eu acho que o bom professor teria que passar sim por um curso com certo rigor, pelo menos na construção do corpo dos reais. Mesmo que ele não vá abordar a construção, a axiomatização da construção do corpo reais com alunos do Ensino Médio. Nem sei se seria prático fazer isso no Ensino Médio. Mas, como profissional, certamente ele teria que passar por esse curso sim. Muitas pessoas não concordam comigo. Inclusive, a gente estava tendo uma discussão em uma aula exatamente sobre isso. Um rapaz, companheiro de classe, que quer ser professor e está na Licenciatura, falou que para ele Análise era inútil. Eu discordei. Isso é um absurdo... dizer que essa matéria é inútil.
18:55	Pesquisador	Por que você acha que não é inútil?
18:57	Rodrigo	Sem Análise a pessoa não pode dizer que é matemático. Análise é o filé mignon da Matemática. É onde estão as ideias. Tudo é um número real. Me diz uma grandeza que não seja um número real! (mostra inquietação)

19:15	Pesquisador	E por que você acha que ele pensa que a disciplina é inútil?
19:20	Rodrigo	Eu acho que ele pensa de uma maneira muito reducionista. Muito minimalista. Eu não concordo não. Eu acho que ele vai ser professor de Matemática, ele tem que ter uma cultura diferenciada. Já imaginou você dando uma aula de mandarim sem saber (inquietação)? Estranho não é?

Em suas considerações sobre a Tarefa 1 (Anexo XIII), Rodrigo afirmou que os alunos não tinham culpa pelos erros apresentados e colocou como atenuante a ausência de conteúdos de Cálculo no currículo do Ensino Médio. Na entrevista, ele reafirmou seu ponto de vista e defendeu a inclusão dos conceitos de limite, derivada e integral na Educação Básica. O participante justificou a importância da inserção desses conteúdos no ensino básico devido à presença dos mesmos em trabalhos científicos, chegando a relacionar o desenvolvimento de alguns países à inclusão desses conceitos na Educação Básica.



II O exercício acima evidencia a importância de um assunto que foi cortado do ensino médio.

III As soluções não estão corretas, pois como os alunos não conhecem o assunto o erro vem naturalmente, note que nenhum deles se preocupou com a descontinuidade existente na função.

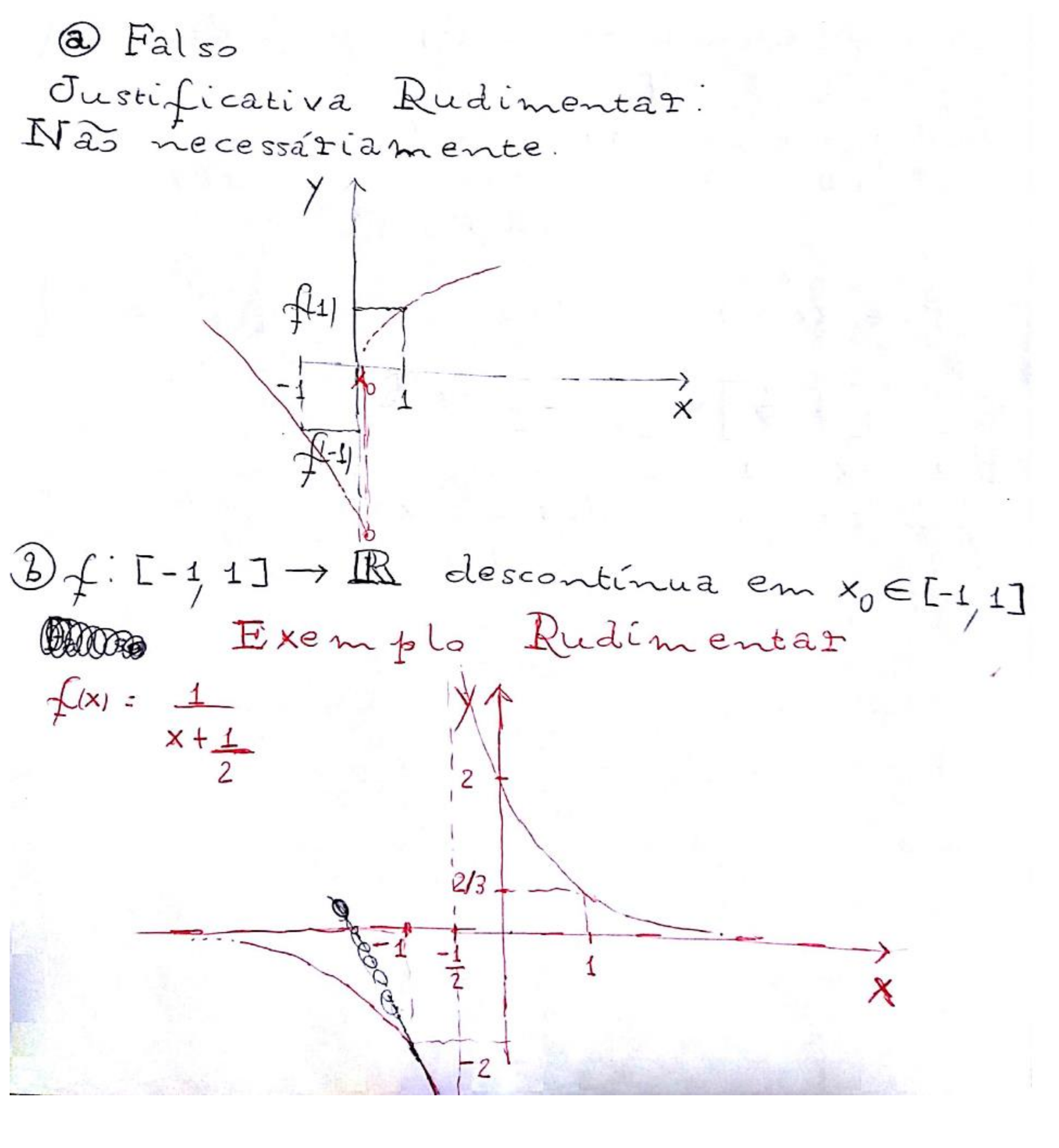
V Sim. A análise é, de grosso modo a formalização do cálculo. Como o cálculo foi abolido do ensino médio, erroneamente na minha opinião os alunos não tem tanta "culpa" pelo erro.

Figura 21: Resposta de Rodrigo aos itens II, III e V da Tarefa 1

21:54	Pesquisador	Então, os alunos não teriam tanta culpa pelo erro na Tarefa 1?
21:56	Rodrigo	Não, não. De maneira nenhuma.
21:58	Pesquisador	Você acha que o erro aparece naturalmente porque eles não conhecem o conceito de continuidade...

22:02	Rodrigo	Certamente. Eles aplicaram o que eles conheciam, que é o teorema de Bolzano, que é dado... era dado no 3º ano do Ensino Médio.
22:14	Pesquisador	Você acha que isso é consequência de um conteúdo que não está no ensino básico...
22:17	Rodrigo	Com certeza. Com certeza.
22:19	Pesquisador	E você acha que era importante que estivesse no currículo do ensino básico?
22:24	Rodrigo	Muitas pessoas discordam de mim, mas eu acho importante sim. Até por eu ter dado aula de Física. Por exemplo, como o professor vai explicar movimento, movimento harmônico simples, sem derivada?
22:41	Pesquisador	Ao comentar sobre o objetivo do exercício, você citou que a questão evidenciava a importância de um assunto que havia sido cortado do Ensino Médio. Que é um pouco do que você está dizendo. Quais eram os assuntos, especificamente, aos quais você estava se referindo?
22:53	Rodrigo	Geralmente, não é dado Geometria. Eu mesmo, particularmente, não tive Geometria nem no ensino fundamental, nem no médio. Não tive nada. E foram deletadas do Ensino Médio essas matérias de Cálculo: limite, derivada e integral. Eu tenho alguns livros bem antigos, da década de 60, que tinham questões de integral no vestibular. Boa parte do que era Cálculo foi abolido do Ensino Médio.
23:32	Pesquisador	E você acha importante que estivessem no currículo de ensino básico?
23:38	Rodrigo	Eu acho. Porque não tem nenhum trabalho científico... dificilmente tem um trabalho científico que não tem pelo menos uma derivada ou uma integral. Eu acho que você daria mais qualidade para o cidadão médio. Mesmo que ele vá ser um trabalhador comum, que não vá cursar uma universidade, mas ele vai ter uma nova compreensão. No Ensino Médio, acho que isso vai possibilitar um entendimento melhor da vida para ele. Eu acho importante. Muita gente não acha. Eu acho. Em alguns países de primeiro mundo, isso é matéria do Ensino Médio.

Já na resolução da Tarefa 2 (Anexo XIV), Rodrigo classificou como rudimentares suas justificativas gráficas. Podemos observar que quando não utilizou uma argumentação gráfica, o participante não fez o mesmo registro. Na entrevista, ao justificar o uso deste termo, ele afirmou que se espera de um aluno de Análise a utilização de uma linguagem simbólica, ao invés do uso de gráficos. O participante acrescentou que o ideal para um matemático seria utilizar somente a lógica e os símbolos em sua argumentação, pois tornaria a apresentação mais elegante. Para Rodrigo, a justificativa gráfica utilizada por ele, revela que tem pouco conhecimento sobre o conteúdo. O entrevistado deixa transparecer, neste episódio, que considera estar em um patamar inferior ao idealizado por ele enquanto aluno de Análise.



$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = +\infty$$

Se existe algum $x_0 \in [-1, 1]$ tal que $f(x)$ é descontínua em $x = x_0$, então certamente haverá assíntotas verticais nesse intervalo, mas não podemos necessariamente afirmar que não exista $c \in [-1, 1]$ tq $f(c) = 0$.

c) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ Falso

Justificativa: Uma afirmação não necessariamente ~~justifica~~ implica a outra.

d) Pode existir mais de um c tq $f(c) = 0$.

e) $f: \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \to \mathbb{R}$

Pode existir ou não, pois o domínio de f é um conjunto desconexo.

Figura 22: Solução de Rodrigo para a Tarefa 2

36:13	Pesquisador	Nas soluções que você apresentou na Tarefa 2, na grande parte delas, você utilizou uma justificativa gráfica. E até na sua primeira justificativa, você escreveu: justificativa rudimentar. Por que você usou o termo justificativa rudimentar? Por que você a considera rudimentar?
36:33	Rodrigo	Pouco conhecimento da matéria. Para alguém que tem uma certa familiaridade com a Análise, eu acho que já demonstra mais os teoremas e usa mais uma linguagem simbólica, ao invés de ficar fazendo os gráficos.
36:54	Pesquisador	Então, você acha que, de certa forma, a opção por não usar uma linguagem mais simbólica, mais formal...
36:59	Rodrigo	Foi por falta de habilidade minha mesmo.
37:04	Pesquisador	E isso enfraquecia um pouco tua solução?

37:12	Rodrigo	O ideal para um matemático seria a lógica pura. Os símbolos e a lógica pura. A ideia e a lógica pura. Para um matemático. Mas, no meu caso, eu ainda não cheguei nesse patamar.
37:24	Pesquisador	Então, o rudimentar estava associado a você não utilizar uma argumentação mais formal?
37:30	Rodrigo	Sim. E, também, não foi um gráfico super bem feito.
37:41	Pesquisador	Isso você olhando da perspectiva de um matemático, como você falou. Uma justificativa gráfica não seria uma boa justificativa?
37:49	Rodrigo	Depende. Onde você puder alcançar somente com a lógica pura e com os símbolos, no caso de um matemático puro, acho que fica mais elegante. Eu não tenho esse nível.

Na sequência, Rodrigo declara não considerar rudimentar uma justificativa gráfica quando a mesma está situada no contexto do ensino básico. Ao ser questionado por que não considerou rudimentar a justificativa gráfica na Tarefa 1, ele cita que o aluno da Educação Básica não precisaria ficar refém da formalização de conceitos, uma vez que não será matemático, necessariamente. Já em relação ao contexto da Tarefa 2, o participante destacou que o aluno de Análise deveria estar em um nível mais alto, onde seria esperado dele uma argumentação lógica e mais formal.

38:08	Pesquisador	Quando você resolveu a Tarefa 1, que era uma tarefa no contexto do ensino básico, você utilizou gráficos. Lá você considera uma justificativa rudimentar?
38:16	Rodrigo	Não, não. Porque os alunos são do ensino básico. Eles não necessariamente vão ser matemáticos, não precisam ficar reféns da formalização dos conceitos.
38:31	Pesquisador	Então, você acha que uma justificativa gráfica, no contexto do ensino básico, não é considerada rudimentar e, já no contexto de um matemático ou no contexto do ensino superior, você considera uma justificativa rudimentar...
38:45	Rodrigo	É ... nesse contexto aí, sim. Na disciplina de Análise, o ideal é que o cidadão que já está em um nível alto utilize a lógica pura e a formalização dos conceitos.

Antes de iniciar a resolução da Tarefa 2, Rodrigo identificou a continuidade como ponto de partida para a reflexão sobre as afirmações e exibiu uma definição formal para o conceito. Na entrevista, ele apresentou um discurso contraditório quando questionado sobre os aspectos da definição de continuidade que contribuem para sua compreensão do conceito.

Embora reconheça que o aspecto gráfico o ajuda a compreender melhor o conceito de continuidade, Rodrigo declarou preferir a definição formal.

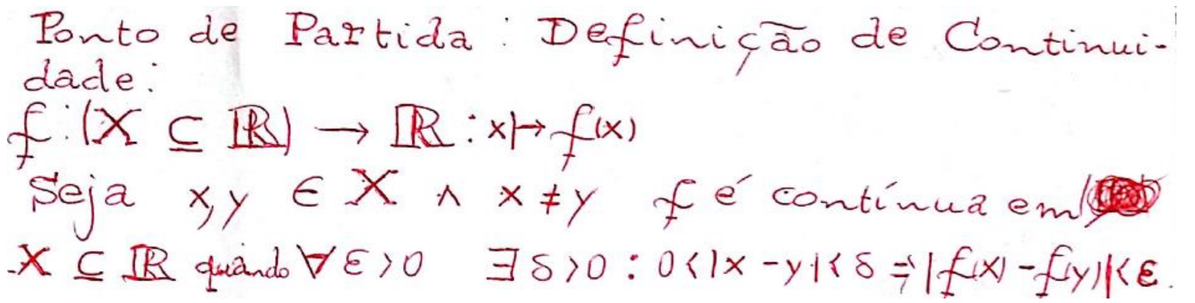


Figura 23: Definição de Continuidade Apresentada por Rodrigo na Tarefa 2

41:32	Pesquisador	Nessa relação entre formalismo e entendimento, por exemplo, no segundo item da Tarefa 2, você relacionou a continuidade a um aspecto gráfico. Citou a existência de assíntotas. E, logo no começo de sua justificativa, no primeiro item, você exibiu uma definição muito formal, daquelas que a gente vê em Análise. Uma definição até mais forte, que se aproxima de uma definição de continuidade uniforme até. Então, você exibiu uma definição muito formal de continuidade, mas quando foi justificar no segundo item, recorreu a um aspecto mais gráfico como a existência de assíntotas. Você acha que seu entendimento sobre o conceito de continuidade está mais associado àquela definição mais formal que você exibiu primeiramente ou a aspectos gráficos que te remetem à definição?
42:29	Rodrigo	Acho que um pouco dos dois. Num primeiro curso de Cálculo, você pode focar bastante no gráfico. Mas, em um curso de Análise... aí você fica mais na parte formal.
42:50	Pesquisador	Mas, em relação a sua compreensão sobre o conceito de continuidade, você acha que está associada a quais argumentos que você utilizou ali: definição formal ou aspectos gráficos?
43:04	Rodrigo	(Pausa) O aspecto gráfico é mais fácil de entender. Mas, particularmente, eu acho que prefiro o aspecto formal.
43:19	Pesquisador	Sua predileção pelo aspecto formal é para seu entendimento?
43:23	Rodrigo	Sim, sim. Não que eu não tenha conseguido... eu inclusive não passei na matéria porque tive pouco tempo para estudar... mas, eu tenho predileção pela parte formal. Se eu tivesse tido um pouco mais de tempo para trabalhar os conceitos, teria tido a possibilidade de demonstrar os teoremas a partir delas. Mas, eu acho... que dá para entender sim. Dá para entender o conceito formal, mas tem que vir com uma sequência. A Matemática é tipo uma escadinha. Se for direto para o conceito formal sem trabalhar antes coisas mais básicas, é tipo você querer subir uma escada botando o pé no décimo andar antes de botar no primeiro, segundo e terceiro. Mas, teoricamente, para um aluno de Análise, você

		espera que ele já esteja em um nível um pouquinho mais avançado. Teoricamente, teoricamente. Em um nível que ele já conhece, pelo menos, a linguagem simbólica.

Ao ser questionado se a apresentação formal dos enunciados da Tarefa 2 havia prejudicado sua compreensão em relação ao significado das afirmações, o participante deixa transparecer, novamente, um sentimento de incapacidade e se responsabiliza por não responder corretamente as questões. Em sua opinião, é esperado que um aluno de Análise esteja familiarizado com a linguagem formal que foi apresentada nos enunciados.

48:01	Pesquisador	A gente falou um pouco sobre rigor e formalismo, se pode dificultar o entendimento ou não. As afirmações da Tarefa 2 estão enunciadas de uma maneira bem rigorosa, bem formal. Você acha que isso, de certa forma, prejudicou seu entendimento sobre as afirmações ou facilitou?
48:26	Rodrigo	(Pausa) Na verdade, a Tarefa 2 eu acho que não fiz ela bem feita.
48:38	Pesquisador	Mas, por que você acha isso? Interferiu...
48:40	Rodrigo	(Interrupção) Não, não interferiu isso não. Foi ignorância minha mesmo. Para um aluno de Análise, teoricamente, eu acho que seria de se esperar que ele tivesse uma familiaridade com formalismo. Acho que esse é o objetivo da disciplina.

Mais adiante, ao esclarecer a dúvida do pesquisador sobre o traçado gráfico apresentado em uma de suas soluções na Tarefa 2, Rodrigo utilizou novamente o termo rudimentar para sua argumentação. O participante acrescentou que, para deixar sua resposta mais completa, seria necessária a apresentação de uma lei de formação para a função que define o gráfico. De acordo com Rodrigo, a maneira como a argumentação foi apresentada tornou a solução muito “chutada”.

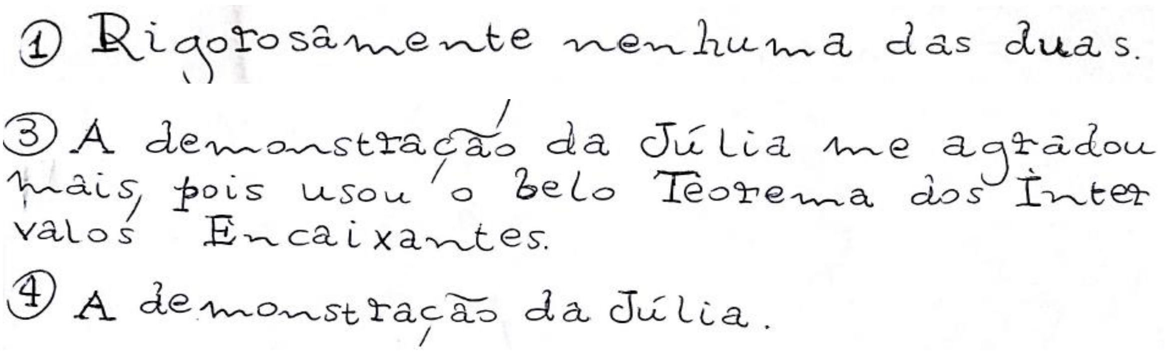
53:16	Pesquisador	No primeiro item da Tarefa 2, não ficou muito claro para mim o traçado do gráfico que você desenhou. Ficou juntinho demais. Poderia esclarecer qual foi sua ideia?
53:33	Rodrigo	(Pausa - Verifica sua solução) Ah... eu coloquei uma assíntota aqui, eu acho. Só que ficou rudimentar porque eu não defini uma lei de formação. Aqui embaixo eu já defini. Foi só o esboço gráfico. Bem informal.
54:40	Pesquisador	Você acha que só o esboço gráfico não serviria como contraexemplo. Você teria que definir a função formalmente a partir de uma lei de formação...

54:51	Rodrigo	Ficaria mais claro. Mais evidente. Um pouco mais... bem feito.
55:02	Pesquisador	Ficaria mais completo?
55:04	Rodrigo	Isso. Ficaria mais completo. Só assim ficou uma coisa muito “chutada”.

A seguir, Rodrigo afirmou que uma representação gráfica não serviria como contraexemplo no contexto do ensino superior, uma vez que se espera mais de um aluno de graduação. De acordo com o participante, espera-se que o aluno do ensino superior esteja familiarizado com o formalismo, diferentemente do aluno da Educação Básica.

55:10	Pesquisador	Só uma representação gráfica você acha que não seria suficiente para servir como contraexemplo?
55:13	Rodrigo	Não. Ainda mais, se esperando de um aluno de ensino superior, tinha que ser mais exigente.
55:20	Pesquisador	Precisava então de uma lei de formação?
55:24	Rodrigo	Sim.
56:00	Pesquisador	[...] Mas, no item b, você colocou uma lei de formação e mesmo assim escreveu exemplo rudimentar...
56:10	Rodrigo	É... porque também eu não coloquei definição nenhuma. Só usei um desenho tipo para justificar no Ensino Médio mesmo. Acho que se esperaria mais de um aluno de ensino superior.
56:24	Pesquisador	Então, você acha que, mesmo com uma lei de formação, seria insuficiente para um aluno do ensino superior apresentar uma justificativa só com gráfico e lei de formação? Você acha que precisaria de algo mais.
56:34	Rodrigo	Eu acho que o aluno de ensino superior tem que estar mais familiarizado com essa parte formal mesmo. No Ensino Médio, não é necessário.

Em sua análise das demonstrações do Teorema do Valor Intermediário na Tarefa 3 (Anexo XV), Rodrigo considerou que, rigorosamente, ambas estavam incorretas e observou diferenças entre as argumentações de Pedro e Júlia. Em relação a essas diferenças, ele destacou, na entrevista, a apresentação enxuta da prova de Pedro e a utilização de representações gráficas por parte de Júlia. Embora tenha identificado essas disparidades, o participante trouxe em seu discurso momentos em que se responsabiliza por, em sua visão, não analisar corretamente as demonstrações.



1 Rigorosamente nenhuma das duas.

3 A demonstração da Júlia me agradou mais, pois usou o belo Teorema dos Intervalos Encaixantes.

4 A demonstração da Júlia.

Figura 24: Respostas de Rodrigo aos itens I, III e IV da Tarefa 3

56:50	Pesquisador	Na Tarefa 3, haviam duas demonstrações de alunos de Análise sobre Teorema do Valor Intermediário. Você afirmou que, rigorosamente, nenhuma das duas demonstrações estava correta. Por que nenhuma das duas estava correta? O que você quis dizer com rigorosamente?
57:34	Rodrigo	(Pausa – Analisa a Tarefa) Eu acho que escrevi besteira.
57:52	Pesquisador	É só para entender. Não estou querendo dizer que está correto ou não. Eu só queria entender o que você quis dizer com rigorosamente?
58:10	Rodrigo	(Pausa – Analisa a Tarefa) Pedro usou supremo. É uma demonstração mais enxuta.
58:40	Pesquisador	Então, a demonstração de Pedro é mais enxuta?
58:45	Rodrigo	Mas, não necessariamente está errada. Tem pessoa que tem muita familiaridade.
58:53	Pesquisador	Uma habilidade em utilizar a representação mais simbólica, mais formal...
58:57	Rodrigo	Isso. Sim. Isso aí... eu fiz besteira nessa atividade.
59:03	Pesquisador	Não se preocupe. Não estou avaliando se está certo ou errado. Eu só estou querendo entender por que você considerou isso. Só isso. E quais diferenças você identifica entre as abordagens das demonstrações de Pedro e Júlia? Você identifica diferenças entre as abordagens das demonstrações?
59:26	Rodrigo	Sim. Pedro usou supremo, foi mais... lógico. Júlia usou gráficos.

Após ressaltar a utilização de gráficos na demonstração de Júlia, Rodrigo afirmou que esse recurso contribui para a compreensão, mas acrescentou que sua apresentação não seria adequada para o professor da disciplina que avaliaria sua prova. Em sua visão, o professor formador, a quem se refere como “professor doutor”, já está familiarizado com a argumentação simbólica, o que torna uma representação gráfica desnecessária para sua avaliação. Para o participante, espera-se que um matemático apresente uma argumentação puramente formal e utilize gráficos somente quando for inevitável.

59:52	Pesquisador	E você acha que essas diferenças influenciam na análise das demonstrações?
1:00:05	Rodrigo	Não que ela também não tivesse sido lógica. Ela foi mais assim... como vou poder dizer... usou gráfico, ela foi mais pictórica. Para o entendimento é bom, mas, por exemplo, para uma pessoa que está fazendo isso, para um professor doutor... o professor doutor que vai corrigir já está super familiarizado com a linguagem simbólica.
1:00:35	Pesquisador	Então, não seria útil apresentar os gráficos para o professor doutor analisar?
1:00:40	Rodrigo	Para explicar para um aluno seria bom. Mas, no caso do matemático puro, se esperaria dele que ele fosse cem por cento formal... utilização cem por cento da linguagem simbólica e o gráfico só quando fosse inevitável.
1:00:59	Pesquisador	Cem por cento formal é não utilizar gráfico?
1:01:02	Rodrigo	Não, não. Não necessariamente. Por exemplo, Geometria Diferencial, aí vai dar.
1:01:08	Pesquisador	De certa forma, como você tinha dito que, às vezes, uma representação gráfica tornava a argumentação um pouco rudimentar, você acha que aí ela torna a argumentação um pouco mais enfraquecida?
1:01:18	Rodrigo	Não, não. Não mais enfraquecida. Assim... para você explicar para um aluno que está tendo um primeiro contato, é bom. Mas, por exemplo, para você aprofundar o estudo de Matemática Pura, aí eu acho que não se trataria de você partir para outro caminho. Mas, pela lógica pura mesmo, acho que seria o ideal.

Em suas considerações sobre a Tarefa 3, Rodrigo não se considerou apto para propor um retorno aos alunos de Análise sobre as demonstrações apresentadas. Podemos destacar que o participante não adotou a mesma postura na Tarefa 1 que estava inserida no contexto da Educação Básica. Na entrevista, Rodrigo justificou que considerava necessário aprofundar o conteúdo para que tivesse mais segurança na apresentação de um retorno aos alunos. Em seguida, o participante comparou explicitamente sua aprendizagem em Análise a um jogo de xadrez. Em suas palavras, Rodrigo declara conhecer as regras do jogo, porém sem saber jogá-lo.

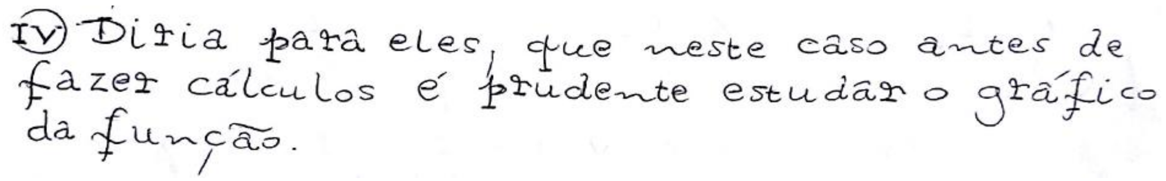

IV) Diria para eles, que neste caso antes de fazer cálculos é prudente estudar o gráfico da função.

Figura 25: Retorno de Rodrigo às Soluções dos Alunos na Tarefa 1

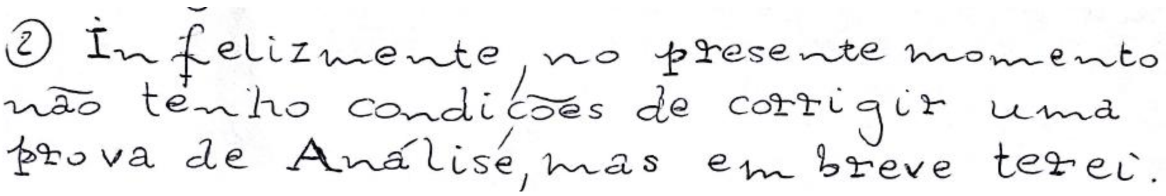

2) Infelizmente, no presente momento não tenho condições de corrigir uma prova de Análise, mas em breve terei.

Figura 26: Retorno de Rodrigo às Soluções dos Alunos na Tarefa 3

1:02:58	Pesquisador	Nesta Tarefa 3, tinha uma pergunta sobre qual retorno você daria a esses alunos a partir das demonstrações que foram apresentadas. Você afirmou que não tinha condições de corrigir uma prova de Análise, mas que em breve teria. Quais elementos faltariam para você dar esse retorno ao aluno? Por que você não se considerou apto para dar o retorno?
1:03:30	Rodrigo	Porque eu preciso aprofundar o conhecimento. Olha só... eu vou fazer uma analogia. Nesse caso aí, por exemplo, se uma pessoa vai jogar xadrez... você conhece as regras mas, não sabe jogar. No meu caso, é mais ou menos isso.
1:03:51	Pesquisador	Conhecer as regras você associaria a conhecer o quê? As definições, teoremas?
1:04:00	Rodrigo	As definições.
1:04:02	Pesquisador	E saber jogar seria saber utilizar essas definições e teoremas?
1:04:07	Rodrigo	Sim. Saber, a partir das definições, das formalizações, você desenvolver as demonstrações, coisa que por falta de tempo eu ainda não tive essa competência.

Em contrapartida, na Tarefa 1, que estava situada no contexto da Educação Básica, essa insegurança sobre o retorno dado aos alunos não foi apresentada. Na sequência do episódio anterior, Rodrigo justifica que nessas circunstâncias a tarefa se mostra mais simples. Segundo ele, o ensino básico não é tão formal e suas questões são menos aprofundadas.

1:04:19	Pesquisador	Nesse contexto do nível superior, você não se sentiu preparado para dar o retorno, mas, lá na Tarefa 1, foi feita uma pergunta semelhante. E lá, você apresentou o retorno. Por que você acha que lá se sentiu mais confortável?

1:04:49	Rodrigo	No caso do ensino básico, não é tão formal. É uma coisa menos formal. Menos aprofundado.
1:05:06	Pesquisador	E aí dá mais segurança para o professor na hora de dar o retorno para o aluno?
1:05:18	Rodrigo	É... dá mais segurança, mas... no caso, é uma tarefa mais simples. Um pouco mais simples do que demonstrar o Teorema do Valor Intermediário que é puramente intrínseco a um curso de Matemática.

No trecho final da entrevista, Rodrigo frisa a importância de um curso de Análise na formação do professor e declara já ter refletido anteriormente sobre suas contribuições. O participante considera a disciplina de Análise tão importante em sua formação ao ponto de não se considerar professor de Matemática enquanto não aprender seu conteúdo. Segundo Rodrigo, a formalização dos conceitos e o uso da lógica como fim, não somente como ferramenta, representa o que diferencia o matemático dos demais.

1:10:17	Pesquisador	Todas as tarefas abordavam um pouco da reflexão sobre o papel da disciplina de Análise na formação do professor e a relação dela com o ensino básico. Você já tinha refletido antes sobre essa relação entre a disciplina de Análise e o ensino básico?
1:10:36	Rodrigo	Sim. As pessoas dizem que é inútil, mas eu discordo totalmente. Eu acho que o professor de Matemática tem que saber uma demonstração, um teorema. Ele tem a lógica não só como ferramenta, mas como fim. Matemática é centrada nas ideias. Matemática é a maneira como você organiza o raciocínio. Acho que é de fundamental importância para o professor. Eu não me considero um professor de Matemática sem passar em Análise. É... sem passar não porque tem gente que passa sem entender.
1:11:25	Pesquisador	Então, vamos trocar a palavra "passar" por entender...
1:11:27	Rodrigo	Sim, sim. Compreensão. Compreender sim. Aí, você foi mais feliz.
1:11:32	Pesquisador	Você acha que não seria um bom professor de Matemática se não entendesse Análise?
1:11:45	Rodrigo	Pelo menos o básico de Análise, não. Talvez, lá no ensino fundamental, lá no comecinho, talvez. No Ensino Fundamental II e no Ensino Médio, para o professor de Ensino Médio, eu acho que é muito pertinente sim. Para mim, deveria ser obrigatório. Formalização dos conceitos. Você ter a lógica, como eu já falei, como fim e não somente como ferramenta, é muito importante. É o que diferencia o matemático do não matemático. Acho importantíssimo.

Após ser questionado pelo pesquisador, Rodrigo apontou que não costuma haver articulação entre a disciplina de Análise e a Educação Básica na graduação. Entretanto, ele não responsabiliza o professor universitário, mas sim a falta de tempo para promover essa discussão. Em seguida, o participante propõe uma nova estrutura curricular para a disciplina de Análise nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática.

1:13:20	Pesquisador	E sobre essas reflexões entre Análise e a Educação Básica que a gente está fazendo aqui? Você acha que os cursos de Análise na graduação ajudam a promover essa discussão da maneira que eles são dados?
1:13:33	Rodrigo	Não.
1:13:35	Pesquisador	Por quê? Não costuma ser abordado isso?
1:13:41	Rodrigo	Não. Não costuma ser abordado isso. Mas eu também não culpo o professor porque ele não tem tempo. Na minha opinião, se eu fosse doutor e pudesse organizar a estrutura do curso, eu faria Análise de uma Variável I, Análise de uma Variável II, Análise de Várias Variáveis I e Análise de Várias Variáveis II. Sendo que Análise de Várias Variáveis seria obrigatória só para o Bacharelado. E Análise de uma Variável seria obrigatório tanto para a Licenciatura, quanto para o Bacharelado. E aí, eu mudaria toda a estrutura do curso. Já entrando com Álgebra I no primeiro período. Para o aluno já ter uma familiaridade com demonstração, que é o que se espera de um matemático. Ao invés de ficar enrolando só com Cálculo, Cálculo, Cálculo. É importante, principalmente para suprir as deficiências do Ensino Médio. Mas, eu acho que deveria ter mais disciplinas de Análise porque é muito corrido.
1:14:54	Pesquisador	É por causa do tempo, então?
1:14:57	Rodrigo	Eu não culpo o professor, não. Ah... não abordou tal coisa. Ele não tem tempo.

Ao final deste episódio, Rodrigo afirmou que o objetivo da disciplina de Análise na formação do professor é o desenvolvimento da linguagem simbólica e a formalização de conceitos. Em sua opinião, o encadeamento lógico e a “higiene de raciocínio” seriam as principais contribuições para a atuação do docente na Educação Básica. Em sua última fala, o participante deixa claro que não identifica diferenças entre o papel do matemático e do professor porque, afinal, ele é professor de Matemática.

1:16:35	Pesquisador	Qual o papel do curso de Análise na formação do professor? Qual o objetivo do curso de Análise na Licenciatura?

1:16:42	Rodrigo	Desenvolvimento da linguagem simbólica e formalização dos conceitos, que é uma característica que só os matemáticos têm.
1:17:00	Pesquisador	Essas seriam as contribuições que um curso de Análise traria para a formação do professor, para a atuação dele na Educação Básica...
1:17:07	Rodrigo	Sim, sim. A lógica. O encadeamento lógico. A higiene de raciocínio. Acho que isso define melhor. Que é uma coisa típica do matemático. O cientista está mais interessado no resultado. O matemático está interessado na argumentação. Nada melhor para você refinar a argumentação matemática, lógica, simbólica do que estudar Análise.
1:17:42	Pesquisador	Você está citando muito o termo matemático. Você vê diferença entre o papel do matemático e o papel do professor nesse caso, então, de Análise?
1:17:49	Rodrigo	Não! Ele é professor de Matemática!

CAPÍTULO V – Análise de Dados

Neste capítulo, interpretaremos os dados apresentados anteriormente de maneira articulada ao referencial teórico desta investigação. Fundamentada na literatura de Educação Matemática exposta neste trabalho, a análise a seguir visa responder à questão principal desta pesquisa: *Quais aspectos emergem do discurso de licenciandos sobre suas percepções relacionadas à natureza da Matemática – especificamente no que tange às práticas sociais e culturais observadas no contexto de uma disciplina de Análise Real da Licenciatura em Matemática – e de que maneira tais aspectos se articulam com a construção de saberes matemáticos para o ensino?*

É importante destacar que o objeto de análise desta investigação é o discurso dos participantes durante e após a disciplina de Análise Real na qual a pesquisa foi realizada. Esclarecemos, portanto, que não temos a pretensão de analisar ou fazer juízo de valor sobre esse curso de Análise Real. Dessa maneira, objetivamos identificar as impressões particulares dos sujeitos desta pesquisa sobre a Matemática, do ponto de vista das práticas sociais e culturais observadas no contexto de realização da disciplina de Análise em questão. Com esse olhar, nossa análise será exposta em dois eixos distintos: (1) Observação de Aspectos Discursivos (hierarquias, critérios de legitimação e saberes docentes) e (2) Práticas Culturais e Meta-reflexões sobre Cultura Matemática. No primeiro eixo de análise, observaremos os aspectos do discurso dos participantes sobre suas percepções relacionadas à natureza da Matemática, além de verificar se existe relação entre essas crenças, a construção dos saberes docentes do licenciando e seu engajamento na atividade matemática. Por fim, no segundo eixo, a partir dos aspectos discursivos dos participantes apresentados anteriormente, observaremos as práticas de mobilização de cultura matemática – fundamentado em Miguel e Vilela (2008) – emergentes nas tarefas e nas entrevistas semiestruturadas, assim como as reflexões dos licenciandos sobre essa cultura no contexto de sua própria formação.

Consideramos que os aspectos apresentados na análise de dados estão interligados e se manifestam no contexto das práticas sociais e culturais mobilizadas, uma vez que, de acordo com a concepção adotada nesta pesquisa, a atividade matemática é desenvolvida mediante uma dimensão dinâmica e participativa. Por essa razão, esclarecemos que, em nosso ponto de vista, as categorias de análise apresentadas a seguir não são fixas ou disjuntas. Embora optemos por exibir essas categorias separadamente, devido à estrutura do texto, consideramos que um episódio retratado em determinada seção pode descrever diferentes aspectos discutidos em mais de uma categoria ou, até mesmo, apresentar reflexões que não serão debatidas nesta análise.

5.1 Observação de Aspectos Discursivos

Nesta seção, observaremos os aspectos do discurso dos participantes ao longo das entrevistas semiestruturadas e de suas soluções nas tarefas. Esses aspectos permitiram identificar a visão dos indivíduos sobre a natureza da Matemática no contexto do curso de Análise que estavam cursando. Em nossa análise, observamos que os licenciandos apresentaram uma percepção hierárquica sobre a Matemática, caracterizada pela valorização de sua perspectiva formal. Os resultados que emergem dos dados evidenciam a relação entre essa concepção formalista e os critérios de legitimação dos participantes ao avaliar soluções de alunos no contexto do ensino superior e da Educação Básica, além da influência desses aspectos na construção dos saberes docentes dos licenciandos com vistas ao ensino.

Dessa maneira, apresentaremos os aspectos discursivos dos sujeitos desta pesquisa em três subseções: percepção hierárquica sobre a Matemática, critérios de legitimação de uma argumentação matemática e construção de saberes docentes para o ensino.

5.1.1 *Percepção Hierárquica sobre a Matemática*

Observando o discurso dos participantes no questionário, nas tarefas e nas entrevistas semiestruturadas, identificamos a atribuição de uma hierarquia entre a Matemática apresentada na escola e na universidade, que tem paralelos com a percepção hierárquica entre Matemática Elementar e Matemática Superior descrita por Klein (2004) como um obstáculo a ser vencido na formação do professor de Matemática. Nesse cenário, os sujeitos desta pesquisa valorizaram a Matemática Acadêmica, situando-a no topo da hierarquia idealizada, em detrimento da Matemática Escolar. Ademais, destacamos que essa hierarquia não é atribuída exclusivamente ao conhecimento matemático, mas também é reproduzida na visão dos participantes sobre a figura do professor do ensino superior e da Educação Básica. Retrataremos, a seguir, episódios que tornam evidente essa percepção hierárquica e sua relação com a visão sobre a natureza da Matemática manifestada pelos participantes durante e após cursarem Análise.

No primeiro episódio que destacamos, ao justificar o motivo pelo qual considera a disciplina de Análise difícil, o participante Rodrigo afirma que, pela primeira vez, o aluno tem contato com a “matemática de verdade”, caracterizada por aspectos como “a formalização dos conceitos, as ideias, a organização do raciocínio”.

> *Pesquisador*: [...] O que te fez considerar a disciplina naturalmente difícil, como em suas palavras?
>
> *Rodrigo*: Porque, para a maioria das pessoas, <u>pela primeira vez na vida ela está vendo uma disciplina cem por cento conceitual</u>. E <u>a gente não é acostumado a estudar Matemática dessa maneira</u>. A gente vem desde criança decorando fórmula. [...] Aí, pela primeira vez, você tem contato com <u>a matemática de verdade, que são conceitos, a formalização dos conceitos, as ideias, a organização do raciocínio</u>... que é a matemática de verdade. Centrada na ideia. E aí, como geralmente as pessoas não estão acostumadas a fazer isso, pode gerar uma dificuldade. Certamente gera uma dificuldade.
>
> (RODRIGO; p. 120)

Neste trecho, fica evidente que a concepção formalista caracteriza a visão de Rodrigo sobre a natureza da Matemática, uma vez que ele enaltece a formalização dos conceitos como um aspecto da “matemática de verdade”. Ao afirmar que o aluno se depara com essa matemática “pela primeira vez na vida”, ele revela a ruptura existente na transição do ensino básico para o superior, denunciada por Klein (2004) em sua noção de dupla descontinuidade, dado que “a gente não é acostumado a estudar matemática dessa maneira”. Interpretamos que, de acordo com sua percepção sobre a Matemática, a fala de Rodrigo sugere que o mesmo está colocando, nesse momento, a Matemática Acadêmica em detrimento da Matemática Escolar.

Essa visão que identifica os conteúdos de Análise como os elementos da “matemática de verdade” impacta diretamente nas percepções de Rodrigo sobre o que é elementar em Matemática e sobre o que constitui a Matemática como ciência. O participante considera que a disciplina de Análise apresenta “as principais ideias matemáticas” como, por exemplo, a construção do corpo dos números reais.

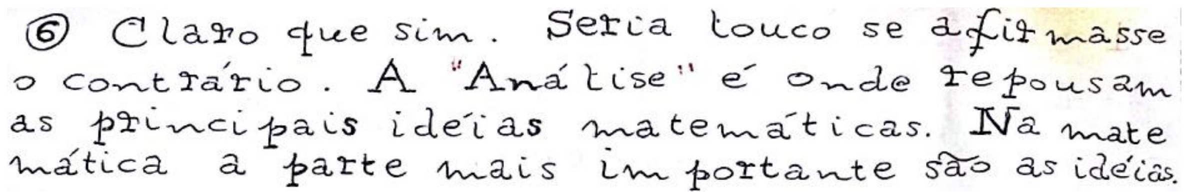

⑥ Claro que sim. Seria louco se afirmasse o contrário. A "Análise" é onde repousam as principais idéias matemáticas. Na matemática a parte mais importante são as idéias.

Figura 20: Resposta de Rodrigo à Pergunta 6 do Questionário

> *Pesquisador*: Quando perguntado se Análise era relevante em sua formação como professor, você disse que era relevante porque a Análise era a disciplina onde

> repousam as principais ideias matemáticas. Quais seriam essas principais ideias matemáticas?
>
> *Rodrigo*: A construção do corpo dos reais. Acho que, sem isso, você não tem nada na Matemática. A medida de uma temperatura é um número real, a probabilidade é um número real. Você vai fazer o que sem isso? Nada! Daí, depois da construção do corpo dos números reais, abre-se um leque de opções. A continuidade, diferenciabilidade... sem isso não existiria, por exemplo, o Cálculo. Será que existiria a Engenharia, por exemplo? Eu acho que ia ser bem mais difícil.
>
> *Pesquisador*: Você destaca, então, como ideia matemática fundamental a construção dos números reais?
>
> *Rodrigo*: Sim. Sim. Porque, a partir disso, você pode formalizar os conceitos do Cálculo, das derivadas, das funções contínuas, da aproximação polinomial, das funções de classe C^n, Séries de Taylor... são coisas bem importantes, bem interessantes.
>
> (RODRIGO; p. 121)

Em nossa análise, interpretamos que Rodrigo considera a construção do corpo dos números reais um conceito elementar em Matemática. Por um lado, tal ideia pode ser convergente ao sentido de Klein (2004) sobre o que é elementar, uma vez que ele aponta que "sem isso, você não tem nada na Matemática". É inegável que o conceito de número real faz parte dos elementos que estruturam a Matemática, podendo ser apontado de maneira pertinente pelo participante. Por outro lado, questionamos se esse conceito seria elementar apenas por permitir "formalizar os conceitos do Cálculo, das derivadas, das funções contínuas, da aproximação polinomial, das funções de classe C^n, Séries de Taylor". Em nosso entendimento, a visão de Rodrigo sobre a natureza da Matemática pode estar limitando as potencialidades de articulações do conteúdo elementar de números reais com pressupostos mais amplos da Matemática como ciência, restringindo-a apenas aos conceitos de Análise e sua formalização.

Nesse sentido, é importante analisar quais são as principais ideias matemáticas, segundo Rodrigo, na perspectiva de um professor de Matemática. Observando seu discurso, verificamos que o objetivo de um curso de Análise em sua formação como professor parece não estar claro. O participante afirma que "o bom professor teria que passar sim por um curso com certo rigor, pelo menos na construção do corpo dos reais", mas não consegue relacionar a importância desse rigor com a atuação docente na Educação Básica, uma vez que ele questiona "se seria prático fazer isso no ensino médio".

> *Pesquisador*: E da perspectiva do professor de Matemática? Quais seriam as principais ideias matemáticas?
>
> *Rodrigo*: O ideal para o bom professor é ele saber o que está fazendo. Eu acho que o bom professor teria que passar sim por um curso com certo rigor, pelo menos na

> construção do corpo dos reais. Mesmo que ele não vá abordar a construção, a axiomatização da construção do corpo reais com alunos do ensino médio. Nem sei se seria prático fazer isso no ensino médio. Mas, como profissional, certamente ele teria que passar por esse curso sim. Muitas pessoas não concordam comigo. Inclusive, a gente estava tendo uma discussão em uma aula exatamente sobre isso. Um rapaz, companheiro de classe, que quer ser professor e está na Licenciatura, falou que para ele Análise era inútil. Eu discordei. Isso é um absurdo... dizer que essa matéria é inútil.
>
> (RODRIGO; p. 122)

Rodrigo parece defender uma formação sólida em Matemática para o futuro professor, mas sem saber exatamente o que constitui essa solidez e de que maneira isso impacta na prática docente, conforme apontado por Moreira e Ferreira (2013). Já ao final da entrevista, ele expressa, de maneira mais explícita, sua opinião sobre o objetivo de um curso de Análise na formação do professor de Matemática: "desenvolvimento da linguagem simbólica e formalização dos conceitos, que é uma característica que só os matemáticos têm." (RODRIGO, p. 136), ou ainda, "O encadeamento lógico. A *higiene de raciocínio*. Acho que isso define melhor. Que é uma coisa típica do matemático." (RODRIGO, p. 136).

Fica evidente que Rodrigo descreve o objetivo do curso da perspectiva de um matemático, colocando-o em posição de destaque ao exaltar seu modo de pensar, caracterizado pela "*higiene de raciocínio"*. Ao utilizar o termo "matemático", Rodrigo aparenta, em determinados momentos, não se reconhecer como um professor de Matemática em formação ou conceber a profissão docente do ponto de vista de um matemático profissional. Dessa maneira, seu discurso sugere que, para o participante, a figura de um professor de Matemática se aproxima de um matemático que dá aulas.

Em outro momento, verificamos a percepção hierárquica atribuída ao conhecimento acadêmico em detrimento do conhecimento escolar. Analisando o discurso de Rodrigo ao comparar o retorno dado aos alunos fictícios na Tarefa 3 (que estava inserida no contexto do ensino superior) com o retorno apresentado na Tarefa 1 (situada no contexto do ensino básico), observamos que ele desqualifica o conteúdo da Educação Básica, considerando-o "mais simples" e "menos aprofundado" por não ser "tão formal".

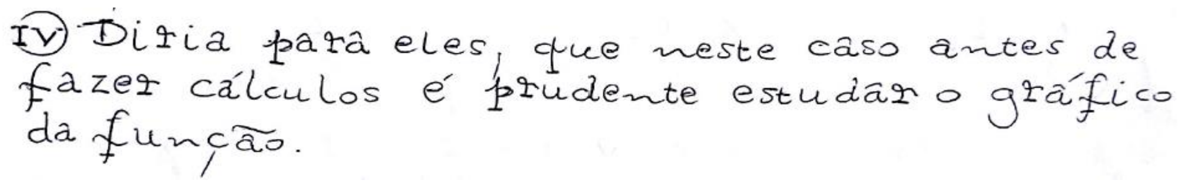

IV) Diria para eles, que neste caso antes de fazer cálculos é prudente estudar o gráfico da função.

Figura 25: Retorno de Rodrigo às Soluções dos Alunos na Tarefa 1

2 Infelizmente, no presente momento não tenho condições de corrigir uma prova de Análise, mas em breve terei.

Figura 26: Retorno de Rodrigo às Soluções dos Alunos na Tarefa 3

> *Pesquisador*: Nesse contexto do nível superior, você não se sentiu preparado para dar o retorno, mas, lá na Tarefa 1, foi feita uma pergunta semelhante. E lá, você apresentou o retorno. Por que você acha que lá se sentiu mais confortável?
>
> *Rodrigo*: <u>No caso do ensino básico, não é tão formal. É uma coisa menos formal. Menos aprofundado.</u>
>
> *Pesquisador*: E aí dá mais segurança para o professor na hora de dar o retorno para o aluno?
>
> *Rodrigo*: É... dá mais segurança, mas... no caso, <u>é uma tarefa mais simples.</u> Um pouco mais simples do que demonstrar o Teorema do Valor Intermediário que é puramente intrínseco a um curso de Matemática.
>
> (RODRIGO; p. 133, 134)

Neste episódio, interpretamos que Rodrigo relaciona a profundidade de um conteúdo matemático ao formalismo que o caracteriza. Fica evidente, neste caso, que sua visão sobre a natureza da Matemática se aproxima da concepção formalista, sendo determinante para fundamentar o que ele valoriza na Matemática. A valorização da concepção formalista em detrimento de outras formas de apresentação matemática é também compartilhada por Jorge. Em um desdobramento muito semelhante na Tarefa 3, este participante não se considerou apto a dar o retorno aos alunos fictícios e enumerou, basicamente, os mesmos motivos apontados por Rodrigo. Jorge afirmou que “no ensino superior, as questões são mais amplas, mais profundas”.

II) Não tenho elementos suficientes para responder.

Figura 9: Retorno de Jorge às Soluções dos Alunos na Tarefa 3

> *Pesquisador*: Você acha que uma demonstração é, às vezes, mais difícil de ser compreendida e, talvez, até traz uma insegurança maior na hora de dar um retorno para o aluno? Por que você acha que teve uma dificuldade maior em dar um retorno ao aluno no contexto de ensino superior do que no contexto do ensino básico, quando você deu o retorno para o aluno?
>
> *Jorge*: <u>No ensino superior, as questões são mais amplas, mais profundas</u>. Você trata de coisas que, muitas vezes, são muito difíceis. No ensino básico, já são temas que são mais solidificados. [...] Agora, a diferença para o ensino superior sempre é essa

> porque, mesmo o professor doutor, chefe da cadeira, diretor do departamento, ele olha para um assunto e diz: não entendi o que você fez. Isso se acontece no ensino médio, é por desconhecimento do professor sobre aquele assunto. Mas, é um assunto que ele recorre e pode aprender de um dia para o outro e trazer para o aluno. Acho que existe essa diferença.
>
> *Pesquisador*: Então, o professor no contexto do ensino superior poderia não ter completamente o domínio do conteúdo sobre o qual ele está falando e, já o professor do ensino básico, teria que ter o domínio do conteúdo?
>
> *Jorge*: Pelo menos ele é alcançável. Ele pode não ter o domínio, mas pode ser mais facilmente alcançado do que o professor de um curso de ensino superior, um curso de graduação. Ainda mais em um curso de Análise que está nos últimos períodos do curso.
>
> *Pesquisador*: Então, você acha que, no contexto do ensino superior, é factível que o professor se depare com uma situação em que não consiga dar um retorno ao aluno porque ele não compreendeu uma solução?
>
> *Jorge*: Sim.
>
> *Pesquisador*: Já no ensino básico, você acha que isso não deveria acontecer...
>
> *Jorge*: Sim. No ensino básico, eu acho que dificilmente tem questões que te levam para temas que são muito de ponta. Dificilmente. Agora, se o professor não tem domínio daquele assunto é porque falta preencher aquela lacuna do conhecimento. Isso pode acontecer no nível superior, mas pode ser, também, por serem questões muito mais difíceis.
>
> (JORGE; p. 100, 101)

Os episódios protagonizados por Rodrigo e Jorge revelam uma percepção hierárquica e estanque entre a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica, reforçando que essa separação representa um obstáculo a ser vencido, conforme paralelos com as ideias de Klein (2004) sobre a relação entre Matemática Elementar e Matemática Superior na formação do professor. De acordo com a percepção manifestada por Jorge, a Matemática Escolar está em patamar inferior nessa hierarquia, uma vez que, no ensino básico, “dificilmente tem questões que te levam para temas que são muito de ponta”. Já no ensino superior, “as questões são mais amplas, mais profundas” porque a Matemática na universidade “trata de coisas que, muitas vezes, são muito difíceis”. Por essa razão, a Matemática Acadêmica é colocada por Jorge no topo dessa hierarquia.

Em nossa análise, verificamos que Jorge reproduz essa hierarquia entre os professores da universidade e da Educação Básica. Em seu discurso, o participante desqualifica a figura do professor da escola e, em contrapartida, utiliza termos que enaltecem o professor universitário. Interpretamos que, na visão de Jorge, o professor da Educação Básica tem obrigação de ter o domínio do conteúdo que ensina e sequer teria direito a errar ao analisar a solução de um aluno em sala de aula. Caso contrário, isso ocorre “por desconhecimento do professor sobre aquele assunto”, evidenciando que “falta preencher aquela lacuna do conhecimento”.

Por outro lado, o professor do ensino superior é enaltecido e não tem sua competência questionada, uma vez que “mesmo o professor doutor, chefe da cadeira, diretor do departamento” – ou seja, a figura mais nobre na hierarquia do conhecimento matemático – pode não compreender determinado conteúdo. Isso é justificado pela profundidade das questões da universidade se comparadas com as do ensino básico, as quais o professor da escola “pode aprender de um dia para o outro”.

Portanto, consideramos que os episódios apresentados neste eixo de análise revelaram uma percepção hierárquica dos participantes sobre a Matemática, concebida a partir de sua perspectiva formal, na qual o conhecimento matemático apresentado na Licenciatura é colocado em detrimento do conhecimento matemático escolar. Entendemos que a visão sobre a natureza da Matemática observada no discurso dos participantes dificulta o desenvolvimento de um conhecimento especializado que permita ao professor observar a Matemática Elementar de um ponto de vista superior – no sentido de Klein (2004) – por apresentar uma perspectiva limitada da Matemática. Além disso, destacamos que essa percepção hierárquica pode interferir na avaliação do indivíduo sobre o que ele considera válido em Matemática, conforme discutiremos no eixo de análise a seguir.

5.1.2 *Critérios de Legitimação de uma Argumentação Matemática*

Neste eixo de análise, destacamos que a visão dos participantes sobre a Matemática, identificada na seção anterior, parece modificar seus critérios de legitimação sobre uma argumentação. Mesmo reconhecendo a importância, para a própria aprendizagem, de representações gráficas que fogem a escrita simbólica, os participantes, em muitas ocasiões, desqualificam essa forma de exposição e apontam a argumentação formal como a maneira correta de apresentar a Matemática. Os critérios de validade de uma argumentação apresentados pelos sujeitos desta pesquisa são caracterizados por uma percepção hierárquica da Matemática – que tem paralelos com a percepção hierárquica entre Matemática Elementar e Matemática Superior denunciada por Klein (2004) – na qual a apresentação formal dos conteúdos do ensino superior é enaltecida em detrimento de outras formas de apresentação matemática. Analisando o discurso dos participantes, identificamos que a cobrança pelo desenvolvimento de uma argumentação formal na Licenciatura e sua maior aceitação no ensino superior parecem contribuir para a valorização do formalismo matemático por parte do licenciando.

Nesse contexto, outra forma de exposição matemática, como uma argumentação gráfica, por exemplo, é considerada “*rudimentar”* e tem sua legitimidade contestada, conforme verificado na argumentação de Rodrigo na Tarefa 2 (Figura 22). Destacamos que, nessa tarefa, um contraexemplo gráfico era suficiente para justificar a invalidade das afirmações falsas, como no caso a seguir.

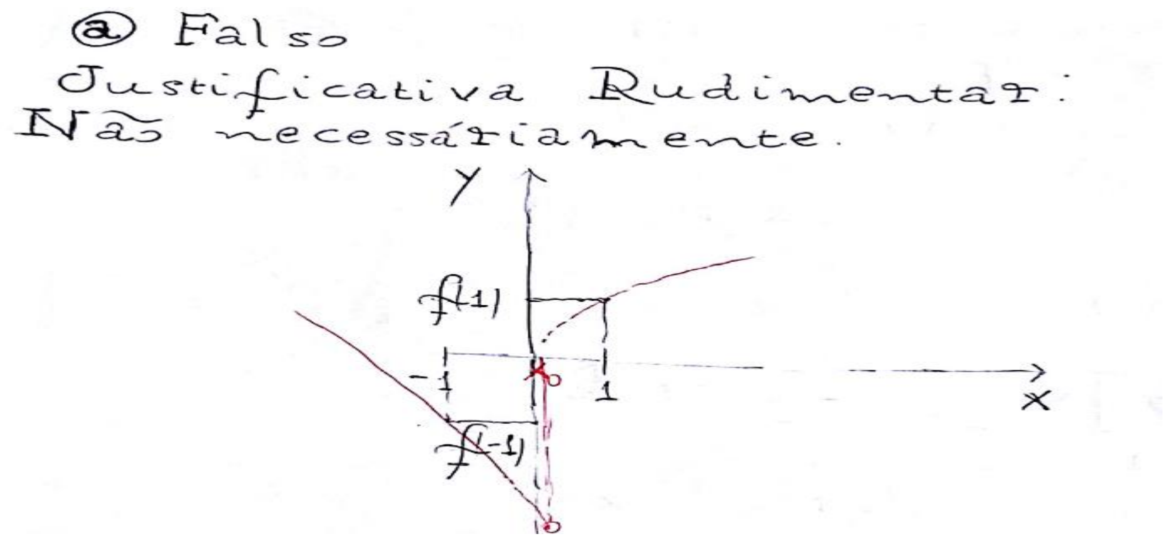


Figura 22: Solução de Rodrigo para a Tarefa 2

Embora sua argumentação esteja próxima da solução correta, Rodrigo desqualifica sua própria justificativa classificando-a como “rudimentar”. Na entrevista, ao justificar o uso do termo *rudimentar*, o participante afirma que se espera de um aluno de Análise a utilização de uma linguagem simbólica, ao invés do uso de gráficos.

> *Pesquisador*: Nas soluções que você apresentou na Tarefa 2, na grande parte delas, você utilizou uma justificativa gráfica. E até na sua primeira justificativa, você escreveu: justificativa rudimentar. Por que você usou o termo justificativa rudimentar? Por que você a considera rudimentar?
>
> *Rodrigo*: Pouco conhecimento da matéria. <u>Para alguém que tem uma certa familiaridade com a Análise, eu acho que já demonstra mais os teoremas e usa mais uma linguagem simbólica, ao invés de ficar fazendo os gráficos</u>.
>
> *Pesquisador*: Então, você acha que, de certa forma, a opção por não usar uma linguagem mais simbólica, mais formal...
>
> *Rodrigo*: Foi por falta de habilidade minha mesmo.

> *Pesquisador*: E isso enfraquecia um pouco tua solução?
>
> *Rodrigo*: O ideal para um matemático seria a lógica pura. Os símbolos e a lógica pura. A ideia e a lógica pura. Para um matemático. Mas, no meu caso, eu ainda não cheguei nesse patamar.
>
> *Pesquisador*: Então, o rudimentar estava associado a você não utilizar uma argumentação mais formal?
>
> *Rodrigo*: Sim. E, também, não foi um gráfico super bem feito.
>
> *Pesquisador*: Isso você olhando da perspectiva de um matemático, como você falou. Uma justificativa gráfica não seria uma boa justificativa?
>
> *Rodrigo*: Depende. Onde você puder alcançar somente com a lógica pura e com os símbolos, no caso de um matemático puro, acho que fica mais elegante. Eu não tenho esse nível.
>
> (RODRIGO; p. 126, 127)

Verificamos, neste episódio, que a concepção formalista de Rodrigo sobre a natureza da Matemática, caracterizada pela valorização de sua perspectiva formal em detrimento da reflexão sobre seus significados, o levou a desconsiderar uma ideia matemática importante simplesmente por ela não se adequar ao que considera a “matemática de verdade”, conforme apontado por ele na seção anterior. Interpretamos que a visão de Rodrigo sobre a Matemática, apresentada no primeiro eixo sobre hierarquia, teve implicações diretas no que ele considera legítimo em uma argumentação. A percepção hierárquica do participante sobre a Matemática revela-se muito presente, também neste trecho, em termos de seu discurso como “alcançar”, “ainda não cheguei nesse patamar”, “eu não tenho esse nível”. Dessa maneira, seus critérios de validade matemática são impactados pelas características que, segundo Rodrigo, são esperadas de um aluno de Análise.

Nesse sentido, o participante tende a considerar uma argumentação gráfica rudimentar porque, em sua visão, um aluno que tem familiaridade com Análise “já demonstra mais os teoremas e usa mais uma linguagem simbólica, ao invés de ficar fazendo os gráficos” ou ainda, de maneira mais ampla, porque “o ideal para um matemático seria a lógica pura”. Como consequência dessa visão sobre a Matemática, fica evidente que o participante valoriza o rigor lógico e a estética de uma argumentação, considerando que “onde você puder alcançar somente com a lógica pura e com os símbolos, no caso de um matemático puro, fica mais elegante”. Em nossa análise, essa valorização da forma de uma argumentação em detrimento de seu conteúdo foi determinante para ele desqualificar uma ideia matemática importante ao considerá-la rudimentar. Em um momento posterior, Rodrigo deixa claro que a ausência de uma escrita mais simbólica contribuiu para ele classificar sua argumentação como rudimentar.

Pesquisador: No primeiro item da Tarefa 2, não ficou muito claro para mim o traçado do gráfico que você desenhou. Ficou juntinho demais. Poderia esclarecer qual foi sua ideia?

Rodrigo: (Pausa - Verifica sua solução) Ah... eu coloquei uma assíntota aqui, eu acho. <u>Só que ficou rudimentar porque eu não defini uma lei de formação.</u> Aqui embaixo eu já defini. <u>Foi só o esboço gráfico. Bem informal.</u>

Pesquisador: Você acha que só o esboço gráfico não serviria como contraexemplo. Você teria que definir a função formalmente a partir de uma lei de formação...

Rodrigo: Ficaria mais claro. Mais evidente. Um pouco mais... bem feito.

Pesquisador: Ficaria mais completo?

Rodrigo: Isso. <u>Ficaria mais completo. Só assim ficou uma coisa muito "chutada".</u>
(RODRIGO; p. 129, 130)

Analisando este trecho, verificamos que, para Rodrigo, a ausência de uma escrita simbólica e formal em uma argumentação a torna rudimentar. Como consequência, observamos que a falta de uma lei de formação na função definida pelo participante o leva a desqualificar sua própria justificativa, referindo-se a ela como "uma coisa muito 'chutada'" e "bem informal".

Contrapondo o discurso de Rodrigo, apresentamos um episódio no qual Jorge declara preferir uma argumentação gráfica, pois, segundo ele, permite visualizar melhor a solução. Ao analisar as soluções dos alunos nas tarefas, Jorge apontou que a solução de Ana era mais fácil de ser compreendida na Tarefa 1 e afirmou que, na Tarefa 3, a demonstração de Júlia permitia compreender melhor o significado do enunciado do teorema e a argumentação apresentada. Lembramos que ambas as soluções apontadas pelo participante continham representações gráficas em suas argumentações. Quando questionado sobre os aspectos apontados por ele nessas soluções, Jorge destacou sua preferência por uma solução gráfica e a contribuição desses aspectos para a compreensão.

Pesquisador: Eu comentei isso porque, voltando lá na Tarefa 1, a solução de Ana também apresentava uma argumentação muito mais gráfica e você comentou que ela também era mais fácil de ser compreendida.

Jorge: <u>Eu sempre tenho uma inclinação maior para qualquer solução gráfica porque você visualiza melhor a solução</u>. Mas, eu acho que são dois momentos distintos. <u>O professor tem que entender as duas</u>. Ele tem que saber olhar uma, olhar a outra, e dizer se está certo ou se está errado. Ter o discernimento suficiente para entender uma e entender a outra. <u>Por uma questão pessoal, eu acho que, em uma solução gráfica, é mais fácil você ter uma compreensão geral sobre ela</u>. Não sei se em uma classe seria assim. Não sei o que os alunos preferem.

Pesquisador: Pensando no contexto da Educação Básica, você acha que o professor deveria optar por uma solução mais gráfica, uma mais analítica, ou ele não deveria fazer essa diferenciação?

> *Jorge*: Eu acho que ele tem que apresentar as duas. Eu acho que o aluno é quem escolhe.
>
> (JORGE; p. 99)

Embora o participante tenha destacado as contribuições de aspectos gráficos para a compreensão de uma solução, em detrimento de uma argumentação mais formal, destacamos que Jorge hesita em defender sua preferência quando reflete sobre a atuação docente na Educação Básica. Mesmo tendo "uma inclinação maior para qualquer solução gráfica porque você visualiza melhor a solução", ele apresenta um discurso institucional ao afirmar que o professor da escola básica tem que "apresentar as duas" e "o aluno é quem escolhe". Neste episódio, interpretamos que Jorge exibe um conflito entre reconhecer a contribuição – para sua própria compreensão – de argumentações que considere informais e legitimar sua utilização ao ensinar Matemática na escola. Consideramos que essa contradição faz com que o licenciando hesite ao sustentar, publicamente, sua preferência por uma argumentação gráfica.

A relação entre a compreensão intuitiva e o formalismo matemático de um conceito promoveu contradições no discurso dos sujeitos desta pesquisa. Por exemplo, ao abordar o conceito de continuidade, Alexandre o relaciona a aspectos gráficos que remetem ao conceito. Em contrapartida, apesar de reconhecer a importância desses aspectos para seu entendimento pessoal, o participante legitima e atribui maior valor à definição formal de continuidade apresentada em Análise.

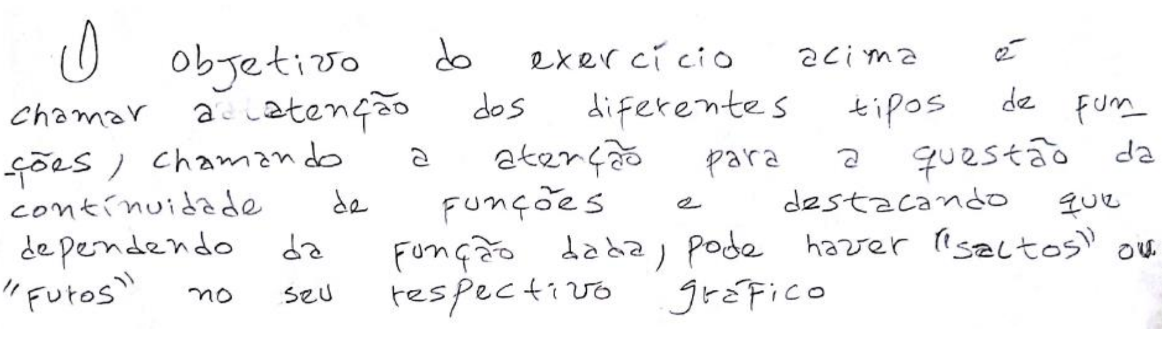

O objetivo do exercício acima é chamar a atenção dos diferentes tipos de funções, chamando a atenção para a questão da continuidade de funções e destacando que dependendo da função dada, pode haver "saltos" ou "furos" no seu respectivo gráfico

Figura 15: Comentário de Alexandre sobre o Objetivo do Exercício da Tarefa 1

> *Pesquisador*: Em sua argumentação, e aqui, novamente, você trouxe muito o conceito de continuidade relacionado a aspectos gráficos, como traçar o gráfico sem tirar o lápis do papel, a presença de saltos ou furos no gráfico... Você acha que sua compreensão sobre o conceito de continuidade está mais relacionada a estes aspectos ou à definição formal do conceito que você conhece de Análise?
>
> *Alexandre*: (Pausa) Talvez, os conceitos gráficos, de certa forma, me ajudem mais a visualizar o que para mim representa. Só que a definição formal é o que tem mais importância porque, é como eu estava falando, o ensino superior exige rigor da

> gente. E é ali que a gente encontra o rigor. Talvez, aquela outra abordagem deixe algum furo que não me vem à cabeça agora. Então, a maior importância está pautada na definição mais formal.
>
> *Pesquisador*: Essa definição mais formal, com mais rigor, contribui para seu entendimento da definição? Ou não?
>
> *Alexandre*: Contribui, contribui. Só que eu acho que o aspecto gráfico, no meu entendimento da definição, contribui mais, apesar da linguagem mais formal.
>
> (ALEXANDRE; p. 110)

Neste episódio, observamos, no discurso de Alexandre, o reconhecimento da importância de aspectos gráficos sobre o conceito de continuidade para o seu entendimento pessoal. Entretanto, o rigor presente na definição formal do conceito de continuidade parece representar um critério determinante para o participante legitimá-la em detrimento dos aspectos gráficos que foram destacados anteriormente. Em nossa análise, ao enfatizar em seu discurso que "[...] o ensino superior exige rigor da gente. E é ali que a gente encontra o rigor.", Alexandre evidencia que a valorização da Matemática Acadêmica, identificada na seção anterior, parece nortear seus critérios de validade sobre uma argumentação matemática. Consequentemente, essa percepção hierárquica promove implicações sobre o que o participante considera legítimo em Matemática, levando-o a atribuir uma importância maior à definição formal de continuidade apresentada em um curso de Análise, mesmo considerando que outros aspectos contribuem mais para seu entendimento da definição.

A valorização da definição formal de continuidade, em detrimento dos aspectos intuitivos que favorecem o entendimento pessoal, é compartilhada por Alexandre e Rodrigo. Em uma discussão semelhante, sobre seu entendimento pessoal da definição de continuidade, Rodrigo declara que "o aspecto gráfico é mais fácil de entender". Porém, de maneira contraditória, o participante afirma, em seguida, que prefere "o aspecto formal". De fato, essa preferência é verificada em sua resolução da Tarefa 2, na qual o participante estabelece como "ponto de partida" uma definição extremamente formal sobre o conceito, aproximando-se, inclusive, da definição de continuidade uniforme.

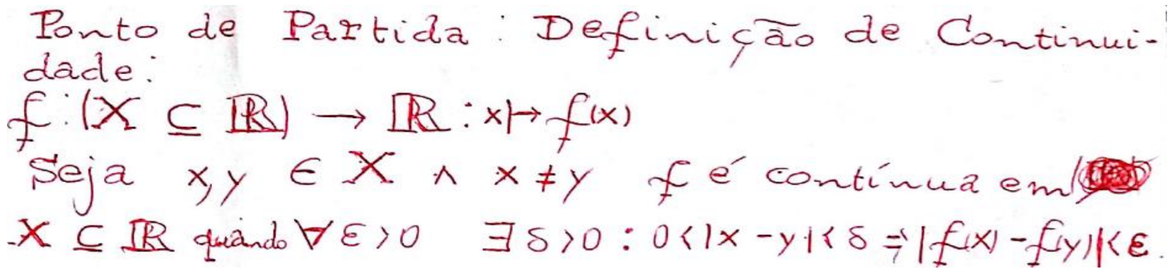


Figura 23: Definição de Continuidade Apresentada por Rodrigo na Tarefa 2

> *Pesquisador*: Nessa relação entre formalismo e entendimento, por exemplo, no segundo item da Tarefa 2, você relacionou a continuidade a um aspecto gráfico. Citou a existência de assíntotas. E, logo no começo de sua justificativa, no primeiro item, você exibiu uma definição muito formal, daquelas que a gente vê em Análise. Uma definição até mais forte, que se aproxima de uma definição de continuidade uniforme até. Então, você exibiu uma definição muito formal de continuidade, mas quando foi justificar no segundo item, recorreu a um aspecto mais gráfico como a existência de assíntotas. Você acha que seu entendimento sobre o conceito de continuidade está mais associado àquela definição mais formal que você exibiu primeiramente ou a aspectos gráficos que te remetem à definição?
>
> *Rodrigo*: Acho que um pouco dos dois. Num primeiro curso de Cálculo, você pode focar bastante no gráfico. Mas, em um curso de Análise... aí você fica mais na parte formal.
>
> *Pesquisador*: Mas, em relação a sua compreensão sobre o conceito de continuidade, você acha que está associada a quais argumentos que você utilizou ali: definição formal ou aspectos gráficos?
>
> *Rodrigo*: (Pausa) O aspecto gráfico é mais fácil de entender. Mas, particularmente, eu acho que prefiro o aspecto formal.
>
> *Pesquisador*: Sua predileção pelo aspecto formal é para seu entendimento?
>
> *Rodrigo*: Sim, sim. Não que eu não tenha conseguido... eu inclusive não passei na matéria porque tive pouco tempo para estudar... mas, eu tenho predileção pela parte formal. Se eu tivesse tido um pouco mais de tempo para trabalhar os conceitos, teria tido a possibilidade de demonstrar os teoremas a partir delas. Mas, eu acho... que dá para entender sim. Dá para entender o conceito formal, mas tem que vir com uma sequência. A matemática é tipo uma escadinha. Se for direto para o conceito formal sem trabalhar antes coisas mais básicas, é tipo você querer subir uma escada botando o pé no décimo andar antes de botar no primeiro, segundo e terceiro. Mas, teoricamente, para um aluno de Análise, você espera que ele já esteja em um nível um pouquinho mais avançado. Teoricamente, teoricamente. Em um nível que ele já conhece, pelo menos, a linguagem simbólica.
>
> (RODRIGO; p. 128, 129)

Consideramos que o discurso contraditório apresentado por Rodrigo pode ser explicado por sua concepção formalista sobre a natureza da Matemática, identificada na primeira seção. Dessa maneira, o participante apresenta, novamente, uma percepção hierárquica da Matemática, que reflete a maneira como ele busca compreender seus conceitos: "Dá para entender o conceito formal, mas tem que vir com uma sequência. A matemática é tipo uma escadinha. Se for direto para o conceito formal sem trabalhar antes coisas mais básicas, é tipo você querer subir uma escada botando o pé no décimo andar antes de botar no primeiro, segundo e terceiro". Podemos notar, neste trecho, que o participante apresenta uma perspectiva cartesiana sobre o fazer matemático, na qual a atividade matemática se desenvolve do mais simples ao mais complexo e tem como ponto de partida a apresentação formal. Nesse cenário, é esperado que Rodrigo considere que um aluno de Análise "esteja em um nível um pouquinho mais avançado", que suba essa escada em direção ao topo da hierarquia matemática estabelecida por ele. Os dados sugerem que essa visão sobre a

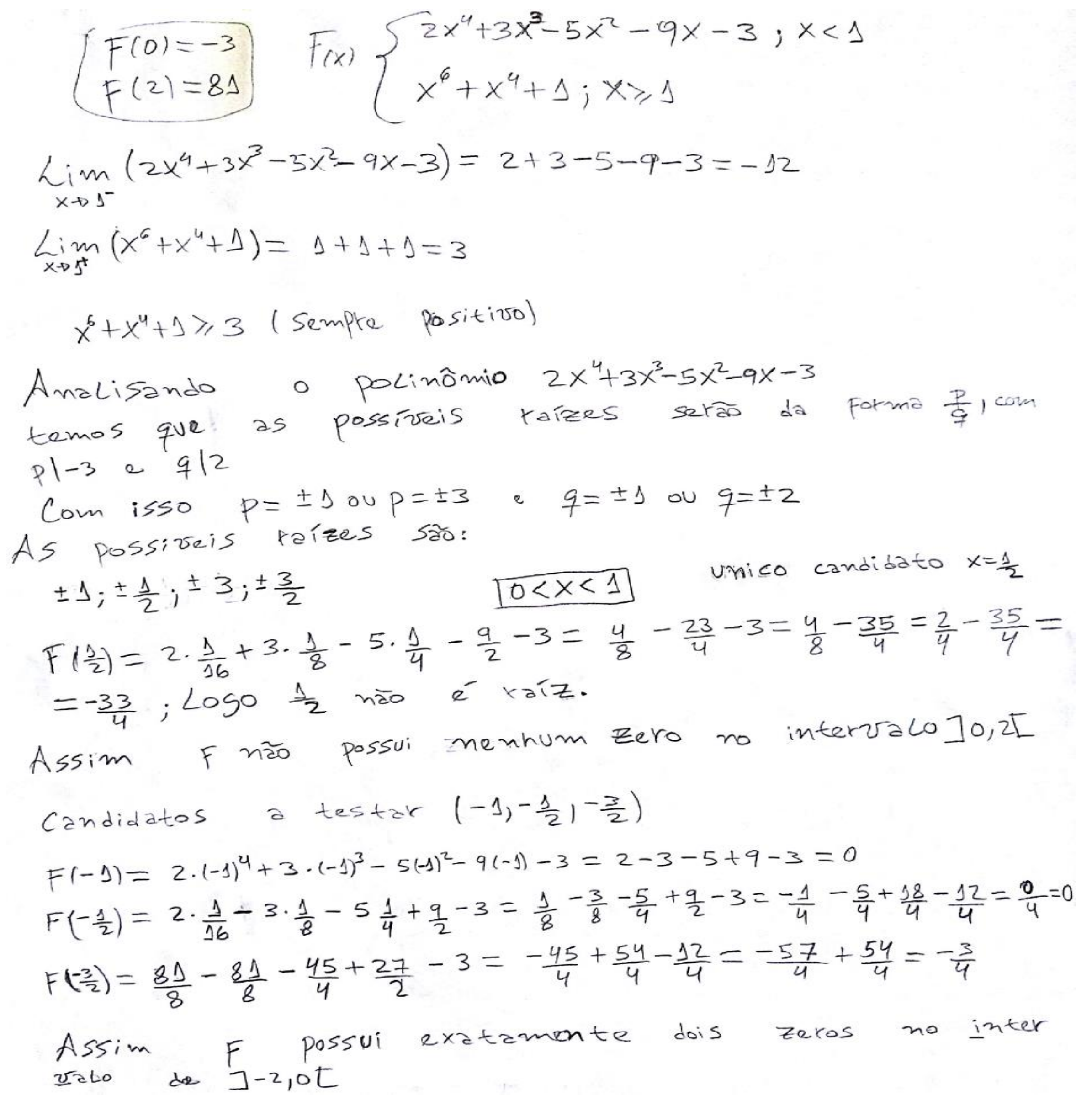
Matemática, norteada por sua perspectiva formal, provoca implicações nos critérios de validade utilizados por Rodrigo para legitimar a importância de uma definição ou a consistência de uma argumentação matemática.

Articulando os episódios anteriores sobre o conceito de continuidade com os resultados apresentados no início da seção, identificamos, em nossa análise, um conflito vivenciado pelos participantes que consiste em *reconhecer* a importância de aspectos intuitivos ou menos formais para o entendimento pessoal e, por outro lado, *desqualificar* uma argumentação que utilize esses aspectos. Como consequência desse embate, os sujeitos desta pesquisa relutam em legitimar argumentações que considerem informais, pouco rigorosas ou que fogem à escrita simbólica. Destacamos que alguns aspectos do discurso dos participantes como, por exemplo, a percepção hierárquica da Matemática – que tem paralelos com as ideias de Klein (2004) – e a cobrança pelo desenvolvimento de uma argumentação formal na Licenciatura, podem ter condicionado os critérios de validade dos sujeitos sobre uma argumentação matemática.

5.1.3 *Construção de Saberes Docentes para o Ensino*

Observamos, no eixo de análise anterior, que a valorização do rigor matemático e da escrita simbólica em uma argumentação influenciou os critérios de legitimação dos participantes sobre uma justificativa matemática. Nesse contexto, apesar de reconhecerem, por exemplo, a importância de uma argumentação gráfica para o entendimento pessoal, os participantes desqualificaram essa forma de apresentação matemática, considerando-a “rudimentar”. A seguir, iremos observar as possíveis relações entre essa concepção formalista sobre a natureza da Matemática e a construção dos saberes docentes do licenciando durante sua formação, articulando com as ideias teóricas de Shulman (1986) e Ball, Thames e Phelps (2008) sobre as especificidades do conhecimento de conteúdo do professor com vistas ao ensino. Neste eixo de análise, apresentaremos episódios onde os critérios de legitimação dos licenciandos sobre uma argumentação matemática norteiam a avaliação de uma solução de aluno do ensino básico e, até mesmo, influenciam a construção do conhecimento de conteúdo do futuro professor.

Inicialmente, destacamos a solução apresentada por Alexandre na Tarefa 1, que seguiu uma argumentação muito semelhante à resolução do aluno fictício Carlos. Em sua justificativa, o participante exibe uma escrita exclusivamente simbólica, utilizando o método algébrico de pesquisa de raízes racionais. Ressaltamos, porém, que a solução de Alexandre não considerou a existência de um zero irracional ($-\sqrt{3}$) na função apresentada na Tarefa 1, reproduzindo o erro presente na argumentação do aluno hipotético Carlos.



$\boxed{\begin{array}{l} F(0) = -3 \\ F(2) = 81 \end{array}}$ $\quad F(x) \begin{cases} 2x^4+3x^3-5x^2-9x-3 \ ; \ x<1 \\ x^6+x^4+1 \ ; \ x \geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x \to 1^-} (2x^4+3x^3-5x^2-9x-3) = 2+3-5-9-3 = -12$

$\lim_{x \to 1^+} (x^6+x^4+1) = 1+1+1 = 3$

$x^6+x^4+1 \geq 3$ (sempre positivo)

Analisando o polinômio $2x^4+3x^3-5x^2-9x-3$ temos que as possíveis raízes serão da forma $\frac{p}{q}$, com $p|-3$ e $q|2$

Com isso $p = \pm 1$ ou $p = \pm 3$ e $q = \pm 1$ ou $q = \pm 2$

As possíveis raízes são:

$\pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm 3; \pm \frac{3}{2}$ $\quad \boxed{0<x<1}$ $\quad$ único candidato $x = \frac{1}{2}$

$F(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{8} - 5 \cdot \frac{1}{4} - \frac{9}{2} - 3 = \frac{4}{8} - \frac{23}{4} - 3 = \frac{4}{8} - \frac{35}{4} = \frac{2}{4} - \frac{35}{4} =$

$= -\frac{33}{4}$; Logo $\frac{1}{2}$ não é raíz.

Assim F não possui nenhum zero no intervalo $]0,2[$

Candidatos a testar $(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

$F(-1) = 2 \cdot (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - 5(-1)^2 - 9(-1) - 3 = 2-3-5+9-3 = 0$

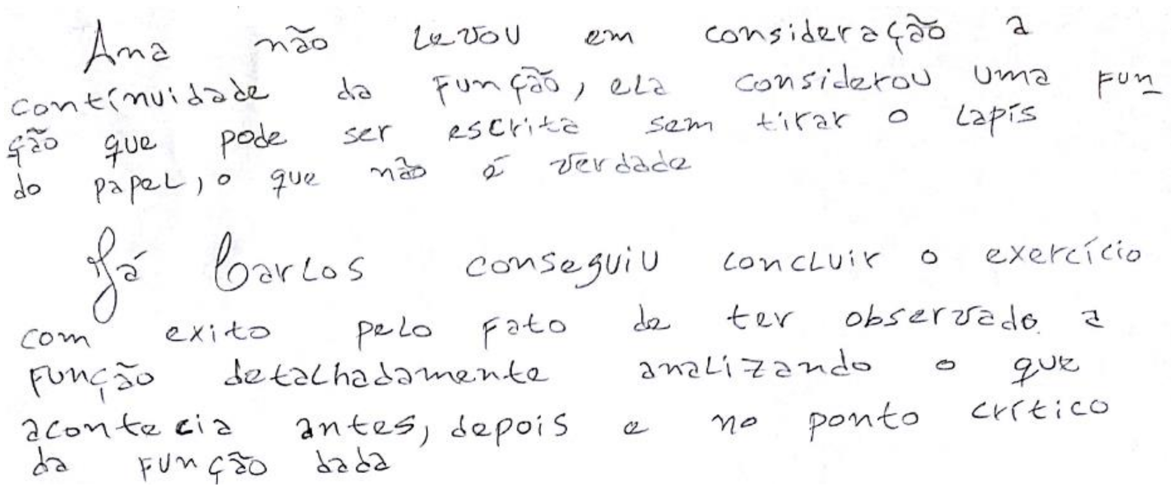
$F(-\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{16} - 3 \cdot \frac{1}{8} - 5 \frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 3 = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{5}{4} + \frac{9}{2} - 3 = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{18}{4} - \frac{12}{4} = \frac{0}{4} = 0$

$F(-\frac{3}{2}) = \frac{81}{8} - \frac{81}{8} - \frac{45}{4} + \frac{27}{2} - 3 = -\frac{45}{4} + \frac{54}{4} - \frac{12}{4} = -\frac{57}{4} + \frac{54}{4} = -\frac{3}{4}$

Assim F possui exatamente dois zeros no intervalo de $]-2,0[$

Figura 13: Solução de Alexandre para o Exercício da Tarefa 1

Na análise das soluções da Tarefa 1, Alexandre apontou corretamente que a solução gráfica da aluna Ana estava equivocada, enquanto a solução do aluno Carlos foi considerada correta pelo participante. Entretanto, na entrevista semiestruturada pós-tarefa, o participante reavalia sua resolução após ser questionado se a argumentação apresentada era suficiente para determinar todos os zeros da função. Nesse momento, após a provocação inicial, ele aponta que deveria considerar, também, a possibilidade de existência de zeros irracionais.


Ana não levou em consideração a continuidade da função, ela considerou uma função que pode ser escrita sem tirar o lapis do papel, o que não é verdade

Já Carlos conseguiu concluir o exercício com exito pelo fato de ter observado a função detalhadamente analizando o que acontecia antes, depois e no ponto critico da função dada

Figura 14: Análise de Alexandre para as Soluções dos Alunos na Tarefa 1

> *Pesquisador*: Você seguiu, em sua resolução na questão da Tarefa 1, uma linha de raciocínio mais voltada à solução de Carlos a partir da pesquisa de zeros. Você acha que essa maneira de resolver de Carlos, que você acabou reproduzindo também na sua solução, é suficiente para encontrar todos os zeros da função?
>
> *Alexandre*: (Pausa - Analisa a tarefa) Se eu não me engano, não. Porque aqui ele só iria encontrar os zeros racionais. Agora, depois que eu pensei nisso. Só ia encontrar os zeros racionais, não os irracionais.
>
> *Pesquisador*: Você apontou que a solução de Ana estava equivocada e a solução de Carlos você apontou como correta. Então, de certa forma, você está reavaliando isso.
>
> *Alexandre*: Sim. Sim. Talvez, ele teve mais cuidado que ela, mas não todo o cuidado necessário.
>
> (ALEXANDRE; p. 107)

Neste trecho, podemos observar que, embora tenha se equivocado em sua argumentação, fica evidente que Alexandre tem conhecimento sobre o conteúdo considerado, pois o participante reavalia sua solução e destaca que "só ia encontrar os zeros racionais, não os irracionais". Em seguida, Alexandre afirma que talvez tenha se "deixado levar" por algumas diferenças entre as abordagens das soluções apresentadas, apontadas anteriormente por ele ao responder as questões da Tarefa1. Nesse sentido, o participante destaca que a estética da argumentação de Carlos o induziu ao erro e influenciou sua análise da solução, uma vez que "a escrita dele pareceu muito bacana".

> *Pesquisador*: Essas diferenças de abordagem contribuíram, por exemplo, para você considerar a solução de Carlos correta, mesmo você reavaliando agora, e a de Ana errada [conforme registrado em suas respostas na Tarefa 1]?

> *Alexandre*: Talvez, pela minha falta de convencimento do entendimento total da abordagem de Carlos. Agora, eu vejo que ele deixou um furo. Ele deixou de verificar a parte que deveria verificar. <u>Mas, talvez, na hora eu me deixei levar por achar que ele tinha verificado certinho e, na de Ana, eu consegui perceber mais a falha.</u>
>
> *Pesquisador*: Você acha que se deixou levar por qual aspecto da solução dele?
>
> *Alexandre*: <u>A escrita dele pareceu muito bacana. A escrita dele me mostrava que ele estava mais consciente do que estava colocando ali do que Ana.</u> Além disso, talvez um pouco de.... falta de conhecimento na abordagem dele. <u>A abordagem dela pareceu mais familiar, a princípio. Era a abordagem com a qual eu estava mais familiarizado.</u> A abordagem para a solução do problema foi uma abordagem que, a princípio, não vinha na minha mente, na minha cabeça. Então, foi algo mais estranho para mim, até para investigar.
>
> (ALEXANDRE; p. 109)

No trecho acima, Alexandre deixa claro que a estética das argumentações influenciou a análise das soluções apresentadas pelos alunos. Embora destaque que a abordagem da aluna fictícia Ana lhe parecesse "mais familiar, a princípio", o participante afirma que a escrita da justificativa do aluno Carlos "mostrava que ele estava mais consciente do que estava colocando ali do que Ana". Dessa maneira, a escrita simbólica parece ser considerada como um aspecto que garante credibilidade à argumentação e ilustra melhor o conhecimento do aluno sobre o conteúdo abordado na questão. Em nossa interpretação, este episódio evidencia a valorização da forma de uma argumentação em detrimento de seu conteúdo.

Nesse cenário, aparentemente, a estética de uma argumentação serve como referência para legitimar o que é correto em Matemática, tanto no contexto do ensino superior, quanto na Educação Básica. Articulando este trecho com o episódio da seção anterior, no qual Alexandre afirma que "a definição formal é o que tem mais importância porque [...] o ensino superior exige rigor da gente", interpretamos que a maneira como a Matemática é apresentada em sua formação pode interferir na construção do conhecimento do licenciando sobre o conteúdo matemático com vistas ao ensino. No episódio da atual seção, por exemplo, o conhecimento *per se* do participante sobre o conteúdo abordado na Tarefa 1 – articulando com Shulman (1986) e Ball, Thames e Phelps (2008) – foi influenciado pela forma em que a solução foi apresentada, no momento que Alexandre deixa de considerar a existência de zeros irracionais em virtude da estética da apresentação.

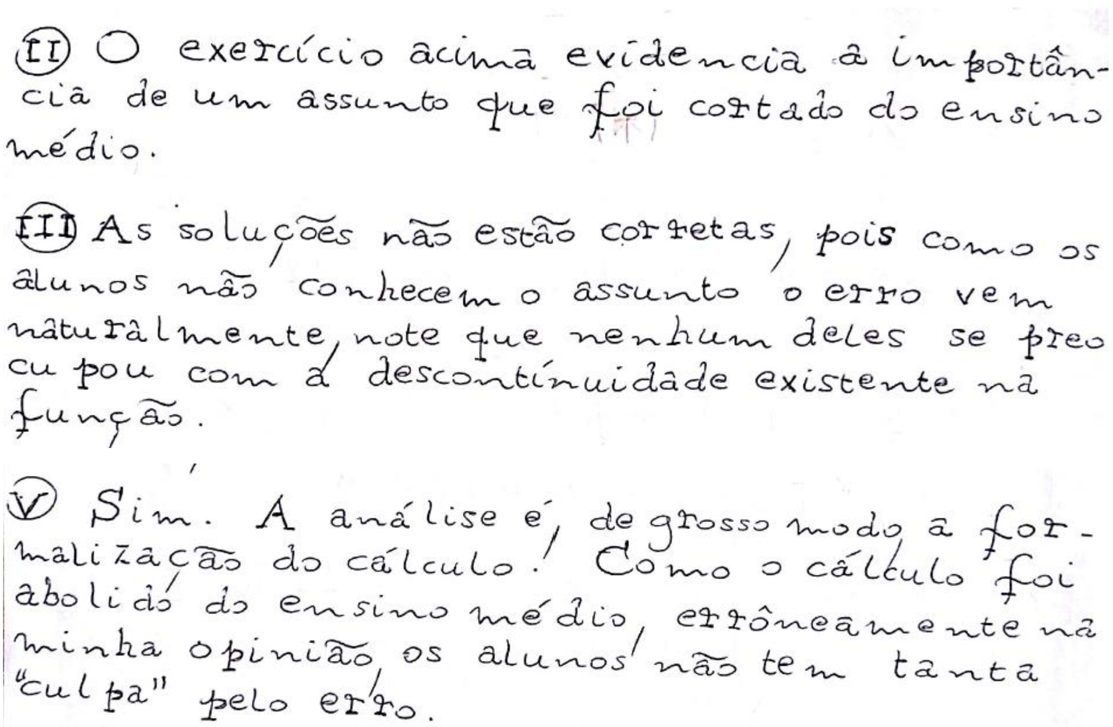
Considerando as especificidades dos saberes docentes e a necessidade de o professor desenvolver um saber especializado sobre o conteúdo para o ensino – conforme o aporte teórico de Ball, Thames e Phelps (2008) –, buscamos refletir, em nossa análise, sobre a relação entre a visão sobre a natureza da Matemática apresentada pelos participantes na primeira seção e a construção de seus saberes docentes para o ensino. Além da influência sobre o conhecimento de conteúdo *per se,* apontada anteriormente, notamos que saberes pedagógicos de conteúdo – destacados por Shulman (1986) e Ball, Thames e Phelps (2008) – também são mobilizados a partir dessa concepção formalista sobre a Matemática, no momento em que os participantes analisam as soluções de alunos da Educação Básica, tentam identificar erros nas argumentações ou refletem sobre articulações entre conceitos de Análise Real e o currículo do ensino básico. Nesse sentido, entendemos que alguns conhecimentos de conteúdo dos participantes – como o conhecimento especializado do conteúdo (SCK) e o conhecimento do conteúdo e dos alunos (KCS), apontados por Ball, Thames e Phelps (2008) – foram mobilizados a partir de suas percepções sobre a Matemática.

Em um desses momentos, Alexandre aponta o rigor matemático de uma argumentação como um aspecto determinante na avaliação do professor sobre a solução de um aluno do ensino básico.

> *Coorientador*: Você falou que a escrita do Carlos pareceu bacana. Você acha que uma escrita que tem um aspecto mais formal, mais algébrico, parece ter um rigor maior? Você acha que ela traz mais segurança que esteja correta?
>
> *Alexandre*: Sim. Não que esteja certo. Mas, na hora, até por eu não ter percebido os furos que ele deu... a abordagem que eu encaminhei para a solução... <u>me pareceu que ele estava bem seguro do que estava escrevendo e acabou que, por isso aí, eu acabei deixando passar</u>.
>
> *Pesquisador*: Você acha que isso teve consequência na hora de você avaliar a sua solução?
>
> *Alexandre*: Sim. <u>Porque o professor em si ia ficar mais atento. Se você vê uma linguagem muito informal assim, fugindo do rigor matemático, da linguagem, deve ficar muito mais atento ao erro do que perceber um erro em uma demonstração que parece que vem muito certa, mas, de repente, tem um ponto que ele não usou</u>.
>
> (ALEXANDRE; p. 109, 110)

Alexandre destaca o rigor e o formalismo matemático como aspectos que influenciam a avaliação de soluções de alunos por parte do professor. Em nossa análise, esses aspectos condicionam os critérios de validade matemática adotados pelo participante ao avaliar a solução de um aluno do ensino básico, uma vez que ele afirma que o professor em "uma linguagem muito informal assim, fugindo do rigor matemático, da linguagem, deve ficar muito mais atento ao erro do que perceber um erro em uma demonstração". Dessa maneira, uma argumentação informal é associada a uma solução que apresenta uma chance maior de conter erros e, por esse motivo, o professor deve estar mais atento em sua avaliação. Por outro lado, uma argumentação mais algébrica, leva Alexandre a considerar que o aluno "estava bem seguro do que estava escrevendo".

Em outro episódio, no discurso de Rodrigo, emergem reflexões referentes ao currículo do ensino básico, após ele relacionar o erro apresentado pelos alunos fictícios na Tarefa 1 à ausência de determinados conteúdos na escola como, por exemplo, conceitos de Cálculo. Assim, segundo ele, os alunos não teriam tanta “culpa” pelo erro porque, como “foram deletadas do ensino médio essas matérias de Cálculo: limite, derivada e integral”, o erro surge “naturalmente”.


(II) O exercício acima evidencia à importân-
cia de um assunto que foi cortado do ensino
médio.

(III) As soluções não estão corretas, pois como os
alunos não conhecem o assunto o erro vem
nâturâlmente, note que nenhum deles se preo
cupou com a descontínuidade existente na
função.

(V) Sim. A análise é, de grosso modo a for-
malização do cálculo! Como o cálculo foi
abolido do ensino médio, errôneamente na
minha opinião, os alunos não tem tanta
"culpa" pelo erro.

Figura 21: Resposta de Rodrigo aos itens II, III e V da Tarefa 1

> *Pesquisador*: Então, os alunos não teriam tanta culpa pelo erro na Tarefa 1?
>
> *Rodrigo*: Não, não. De maneira nenhuma.
>
> *Pesquisador*: Você acha que o erro aparece naturalmente porque eles não conhecem o conceito de continuidade...
>
> *Rodrigo*: Certamente. Eles aplicaram o que eles conheciam, que é o teorema de Bolzano, que é dado... era dado no 3º ano do Ensino Médio.
>
> *Pesquisador*: Você acha que isso é consequência de um conteúdo que não está no ensino básico...
>
> *Rodrigo*: Com certeza. Com certeza.
>
> *Pesquisador*: E você acha que era importante que estivesse no currículo do ensino básico?
>
> *Rodrigo*: Muitas pessoas discordam de mim, mas eu acho importante sim. Até por eu ter dado aula de Física. <u>Por exemplo, como o professor vai explicar movimento, movimento harmônico simples, sem derivada?</u>

> *Pesquisador*: Ao comentar sobre o objetivo do exercício, você citou que a questão evidenciava a importância de um assunto que havia sido cortado do ensino médio. Que é um pouco do que você está dizendo. Quais eram os assuntos, especificamente, aos quais você estava se referindo?
>
> *Rodrigo*: Geralmente, não é dado Geometria. Eu mesmo, particularmente, não tive Geometria nem no ensino fundamental, nem no médio. Não tive nada. E foram deletadas do ensino médio essas matérias de Cálculo: limite, derivada e integral. Eu tenho alguns livros bem antigos, da década de 60, que tinham questões de integral no vestibular. Boa parte do que era Cálculo foi abolido do Ensino Médio.
>
> *Pesquisador*: E você acha importante que estivessem no currículo de ensino básico?
>
> *Rodrigo*: Eu acho. Porque não tem nenhum trabalho científico... dificilmente tem um trabalho científico que não tem pelo menos uma derivada ou uma integral. Eu acho que você daria mais qualidade para o cidadão médio. Mesmo que ele vá ser um trabalhador comum, que não vá cursar uma universidade, mas ele vai ter uma nova compreensão. No Ensino Médio, acho que isso vai possibilitar um entendimento melhor da vida para ele. Eu acho importante. Muita gente não acha. Eu acho. Em alguns países de primeiro mundo, isso é matéria do Ensino Médio.
>
> (RODRIGO; p. 123, 124)

Destacamos, neste trecho, a relação entre a construção de um conhecimento curricular específico do professor e a visão de Rodrigo sobre a Matemática, identificada na primeira seção, que aponta a lógica e a formalização dos conceitos como aspectos da "matemática de verdade". A concepção formalista do participante sobre a Matemática o leva a defender a inclusão de conteúdos acadêmicos na Educação Básica, por considerar que "dificilmente tem um trabalho científico que não tem pelo menos uma derivada ou uma integral". Em nossa interpretação, o ponto de vista de Rodrigo descreve a segunda perspectiva apontada por Fiorentini e Oliveira (2013), na qual a prática docente é considerada um campo de aplicação do conhecimento produzido pela pesquisa acadêmica. Ou ainda, de maneira semelhante, essa visão do participante ilustra a segunda vertente de visões subjacentes sobre os saberes matemáticos do professor e o lugar da Matemática na sua formação inicial, apontada por Moreira e Ferreira (2013), onde valoriza-se preponderantemente o conhecimento do conteúdo acadêmico na prática docente na escola e na definição do lugar da Matemática na formação do professor.

Em nossa análise, no caso de Rodrigo, a construção do conhecimento de conteúdo e currículo – destacado nas pesquisas de Shulman (1986) e Ball, Thames e Phelps (2008) – é influenciada por sua percepção hierárquica sobre a Matemática, identificada na primeira seção. Nesse sentido, a inserção de conteúdos acadêmicos na escola – isto é, a "matemática de verdade" – possibilitaria "mais qualidade para o cidadão médio" e "um entendimento melhor da vida para ele". Em nossa interpretação, Rodrigo condiciona à qualidade do ensino básico, e até mesmo o desenvolvimento de um país, à presença, no currículo da escola, de conteúdos da Matemática Acadêmica. Isso fica evidente quando o participante afirma que, “em alguns países de primeiro mundo”, os conceitos de Cálculo estão presentes no Ensino Médio.

Neste eixo de análise, portanto, observamos que os sujeitos desta pesquisa consideram o conhecimento de conteúdo do professor como um subconjunto do conhecimento acadêmico, idealizando a matemática do professor como uma versão simplificada da matemática formal. Entendemos que a visão dos participantes sobre a natureza da Matemática, caracterizada pela concepção formalista e por uma percepção hierárquica da Matemática, modela a construção de seus conhecimentos matemáticos para o ensino e dificulta o reconhecimento das especificidades dos saberes do professor de Matemática, evidenciadas nos trabalhos de Shulman (1986) e Ball, Thames e Phelps (2008). Consideramos que a fixação dos participantes pelo rigor matemático em uma argumentação pode estar relacionada a uma prática cultural acadêmica observada na formação inicial desses licenciandos. Na próxima seção, a partir da análise dos aspectos discursivos dos participantes discutidos anteriormente, iremos identificar elementos da cultura matemática mobilizada pelos sujeitos desta pesquisa.

5.2 Práticas Culturais e Meta-reflexões sobre Cultura Matemática

A análise dos aspectos discursivos apresentados na seção anterior permitiu observarmos a cultura matemática mobilizada pelos sujeitos desta pesquisa, que se articula com uma percepção hierárquica que valoriza o rigor da Matemática Acadêmica e influencia os critérios de legitimação dos licenciandos sobre uma argumentação. Nesta seção, analisaremos as práticas de cultura matemática mobilizadas pelos participantes nas tarefas e nas entrevistas semiestruturadas, no que tange às práticas sociais e culturais observadas no contexto da disciplina de Análise Real no qual a pesquisa foi realizada. Ao final da seção, iremos propor uma discussão sobre as meta-reflexões dos licenciandos sobre essa cultura no contexto de sua própria formação.

Os resultados decorrentes da análise das práticas culturais emergentes dos dados e das meta-reflexões dos sujeitos desta pesquisa sobre cultura matemática estão estruturados em três subseções: identificação de uma cultura matemática, busca por uma identidade cultural e meta-reflexões sobre cultura matemática no contexto da própria formação.

5.2.1 *Identificação de uma Cultura Matemática*

A partir do discurso apresentado pelos participantes no questionário, nas tarefas e nas entrevistas semiestruturadas, identificamos práticas de mobilização de uma cultura matemática – baseado em Miguel e Vilela (2008) – manifestada pelos sujeitos desta pesquisa durante a formação docente na Licenciatura. A observação da Matemática como atividade humana em um conjunto de práticas sociais nas quais esses indivíduos estavam inseridos permitiu descrevermos determinadas características dessa cultura. Consideramos que os aspectos discursivos apontados nas seções anteriores, como a percepção hierárquica sobre a Matemática, os critérios de legitimação dos participantes sobre uma argumentação e sua relação com a construção dos saberes docentes, descrevem características emergentes de uma prática cultural mobilizada por esses licenciandos.

Destacamos que o reconhecimento de uma cultura matemática na formação docente emergiu, explicitamente, do discurso de um dos sujeitos desta pesquisa, após ele utilizar o termo "*cultura*" quando refletia sobre a importância de um curso de Análise na Licenciatura. Ao apresentar seu ponto de vista sobre a relevância da disciplina na formação inicial de professores de Matemática, o participante se refere ao curso de Análise como um elemento que condiciona a formação de uma "cultura diferenciada" por parte do professor.

> *Pesquisador*: Por que você acha que não é inútil?
>
> *Rodrigo*: Sem Análise a pessoa não pode dizer que é matemático. Análise é o filé mignon da Matemática. É onde estão as ideias. Tudo é um número real. Me diz uma grandeza que não seja um número real! (mostra inquietação)
>
> *Pesquisador*: E por que você acha que ele pensa que a disciplina é inútil?
>
> *Rodrigo*: Eu acho que ele pensa de uma maneira muito reducionista. Muito minimalista. Eu não concordo não. Eu acho que ele vai ser professor de Matemática, ele tem que ter uma *cultura* diferenciada. Já imaginou você dando uma aula de mandarim sem saber (inquietação)? Estranho não é?
>
> (RODRIGO; p. 122, 123)

Em nossa interpretação, a presença do termo "*cultura*" no discurso de Rodrigo evidencia o reconhecimento de que a disciplina de Análise contribui para a constituição de práticas de mobilização de uma cultura matemática – conforme destacado por Miguel e Vilela (2008) – na formação docente, mediante as interações sociais que envolvem essas práticas. Essa cultura está articulada à percepção hierárquica sobre a Matemática destacada nas seções anteriores, onde Análise é vista como algo nobre, uma vez que representa "o filé mignon da Matemática". Articulando com os aspectos discursivos apresentados pelo participante nas seções anteriores, onde Rodrigo considera que a "matemática de verdade" é caracterizada pela lógica e pela formalização dos conceitos, interpretamos que, em sua visão, a matemática formal é o elemento que torna essa "cultura diferenciada".

Em nosso entendimento, o episódio acima revela que o participante estabelece uma hierarquia a partir da cultura matemática destacada por ele, onde quem considera a disciplina de Análise inútil na formação do professor de Matemática estaria em uma posição inferior, pois "pensa de uma maneira muito reducionista", "muito minimalista". Nesse sentido, o curso de Análise identifica e condiciona quem está imerso nessa cultura, uma vez que, de acordo com o participante, "sem Análise a pessoa não pode dizer que é matemático". Sob essa ótica, cursar Análise na Licenciatura representaria um meio de o licenciando construir uma *identidade cultural* que o permitiria pertencer ao seleto grupo de matemáticos que compartilha essa "cultura diferenciada". Consideramos que a visão de Rodrigo sobre a Matemática pode estar relacionada às práticas acadêmicas de mobilização de cultura matemática que valorizam a concepção formalista da Matemática.

Os aspectos discursivos que permitiram identificar elementos da cultura matemática observada como, por exemplo, a percepção hierárquica da Matemática – no sentido criticado por Klein (2004) – e a cobrança pelo desenvolvimento de uma argumentação formal na Licenciatura, nos levaram a inferir que as práticas de mobilização da cultura matemática observada durante o curso de Análise considerado – de acordo com as ideias teóricas de Miguel e Vilela (2008) – podem ter condicionado os critérios de validade dos sujeitos sobre argumentações que envolvem os conceitos matemáticos da disciplina. Ampliamos a discussão questionando se essa cultura está contribuindo para a construção dos saberes matemáticos para o ensino no interior da hierarquia construída por esses licenciandos.

Uma das características que identificamos nessa cultura foi a relação entre os critérios de legitimação dos licenciandos sobre ideias matemáticas e a construção de seus saberes docentes. Verificamos, por exemplo, que o participante Rodrigo considerou uma argumentação gráfica "rudimentar", por considerá-la pouco rigorosa, enquanto que a escrita simbólica de uma solução de um aluno do ensino básico induziu Alexandre ao erro em sua avaliação. Consideramos que esses episódios ilustram práticas de mobilização de uma cultura matemática que modifica o critério de legitimação dos participantes sobre uma argumentação e modela a construção de seus saberes de conteúdo para o ensino ao avaliar a solução de um aluno, uma vez que estávamos considerando uma situação didática.

De acordo com nossa análise, essa prática cultural que desqualifica uma apresentação matemática informal e enaltece o rigor lógico-matemático, compartilhada por Rodrigo e Alexandre, está relacionada à percepção hierárquica que coloca a Matemática Acadêmica em um patamar superior à Matemática Escolar – que vai ao encontro da percepção hierárquica entre Matemática Elementar e Matemática Superior denunciada por Klein (2004). O episódio a seguir sugere que a concepção formalista dos participantes sobre a natureza da Matemática pode ser influenciada por práticas acadêmicas, observadas na formação do professor, que valorizam o rigor matemático. Dessa maneira, os critérios de legitimação de uma argumentação são flexibilizados, em contextos de ensino distintos, de acordo com a hierarquia que foi estabelecida.

> *Pesquisador*: Quando você resolveu a Tarefa 1, que era uma tarefa no contexto do ensino básico, você utilizou gráficos. Lá você considera uma justificativa rudimentar?
>
> *Rodrigo*: Não, não. Porque os alunos são do ensino básico. Eles não necessariamente vão ser matemáticos, não precisam ficar reféns da formalização dos conceitos.
>
> *Pesquisador*: Então, você acha que uma justificativa gráfica, no contexto do ensino básico, não é considerada rudimentar e, já no contexto de um matemático ou no contexto do ensino superior, você considera uma justificativa rudimentar...
>
> *Rodrigo*: É ... nesse contexto aí, sim. Na disciplina de Análise, o ideal é que o cidadão que já está em um nível alto utilize a lógica pura e a formalização dos conceitos.
>
> (RODRIGO; p. 127)

Ao contrário da resolução apresentada na Tarefa 2, referente a uma questão de ensino superior, Rodrigo afirma que uma argumentação gráfica no contexto da Educação Básica não é considerada rudimentar, uma vez que os alunos da escola "não necessariamente vão ser matemáticos, não precisam ficar reféns da formalização dos conceitos". Em nossa interpretação, o termo "refém" no discurso de Rodrigo sugere que ele é condicionado pelas práticas sociais de mobilização da cultura matemática observada no contexto da disciplina de Análise em questão, norteada pela exigência de formalização dos conceitos. A cultura matemática identificada nesta seção parece orientar seus critérios de validade sobre uma argumentação matemática. Entendemos que o fator condicionante dessa cultura – conforme destacado por Miguel e Vilela (2008) – pode ter influenciado, de certa forma, os critérios de legitimação do participante sobre sua argumentação na Tarefa 2, levando-o a considerá-la "rudimentar".

Na percepção hierárquica do participante sobre a Matemática – o objeto cultural mobilizado – em um curso de Análise, "o ideal é que o cidadão que já está em um nível alto utilize a lógica pura e a formalização dos conceitos". Em nossa interpretação, Rodrigo coloca a Matemática Acadêmica em um patamar superior, onde utilizar a lógica e a formalização dos conceitos representaria um meio de ascender na hierarquia estabelecida. Por outro lado, em um extremo oposto, a Matemática Escolar não teria obrigação de estimular a formalização dos conceitos na Educação Básica. Acreditamos que a argumentação lógico-matemática e o desenvolvimento do pensamento dedutivo representam aspectos importantes na atividade matemática, seja na escola ou na universidade. Em nosso entendimento, a flexibilização dos critérios de validade matemática em diferentes contextos é decorrente da visão hierárquica e estanque atribuída à Matemática Acadêmica e à Matemática Escolar apresentada pelo participante, e também criticada por Klein (2004).

Portanto, consideramos que os aspectos discursivos dos participantes, ilustrados nas primeiras seções da análise de dados, revelaram práticas de mobilização de uma cultura matemática – relacionando com Miguel e Vilela (2008) – articulada à visão hierárquica sobre a Matemática, concebida a partir de sua perspectiva formal, na qual o conhecimento matemático apresentado na Licenciatura é colocado em detrimento do conhecimento matemático escolar. O discurso dos sujeitos desta pesquisa sugere que essa cultura pode ter sido determinante para a formação de suas percepções sobre a natureza da Matemática e para a avaliação de soluções de alunos do ensino básico. Entendemos que a manifestação dessa cultura na Licenciatura não evidencia o reconhecimento das especificidades dos saberes matemáticos para o ensino – destacados na pesquisa Ball, Thames e Phelps (2008) – por apresentar uma perspectiva limitada da Matemática.

Consideramos que um dos objetivos da Licenciatura em Matemática – em particular de um curso de Análise – na formação docente não é apenas apresentar o rigor e o formalismo matemático ao licenciando, mas propor reflexões conceituais sobre seu conteúdo com um olhar específico voltado à futura prática do professor de Matemática. Questionamos se esses objetivos estão sendo atingidos na formação docente, ou ainda, se os licenciandos os reconhecem em meio à cultura matemática que identificamos. Por esse motivo, iremos observar, na seção seguinte, como os participantes refletem sobre essa cultura dentro de suas expectativas enquanto alunos do curso de Análise considerado. Verificaremos que emerge dessa meta-reflexão sobre cultura matemática a busca do licenciando por uma identidade cultural que lhe permita reconhecer seu pertencimento ao grupo de matemáticos imersos nessa cultura.

5.2.2 *Busca por uma Identidade Cultural*

Os episódios apresentados neste eixo de análise sugerem que os participantes procuram reproduzir o fazer matemático que caracteriza a cultura identificada na seção anterior. Como consequência, os sujeitos desta pesquisa tentam se adequar ao discurso difundido em sua formação, na tentativa de replicar uma argumentação baseada no rigor e no formalismo matemático. A cultura matemática observada parece nortear o licenciando em busca de uma *identidade cultural* que o permita reconhecer seu pertencimento ao grupo de matemáticos imersos nessa cultura, de acordo com sua percepção hierárquica sobre a Matemática – no sentido de Klein (2004) – apresentada nos eixos de análise anteriores. Identificamos que a cobrança pessoal dos estudantes por um bom desempenho acadêmico na disciplina de Análise, aliada à exigência de professores pela reprodução de uma argumentação rigorosa nesses cursos, representam aspectos emergentes no discurso dos participantes que podem condicionar a construção da identidade cultural destacada.

No eixo de análise anterior, identificamos que o participante Alexandre atribuía maior importância à definição formal de continuidade, mesmo reconhecendo a importância de aspectos gráficos que remetiam ao conceito para seu entendimento pessoal. Embora os aspectos gráficos emergissem frequentemente em seu discurso, o participante buscou reproduzir uma argumentação essencialmente simbólica em uma tarefa na qual a argumentação gráfica era suficiente para justificar a invalidade das afirmações. Em sua solução, Alexandre tentava encontrar, como contraexemplos, funções representadas a partir de suas leis de formação.

a) Falso

Um contraexemplo é a função

$$F(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x < 0 \\ 1, \text{ se } x \geq 0 \end{cases} ; -1 \leq x \leq 1$$

$F(-1) = -1 < 0$; $F(1) = 1 > 0$; Mas $\forall x \in [-1, 1]$

b) Falso

Um contraexempo é a função

$$F(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x < 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ 1, \text{ se } x > 0 \end{cases} ; -1 \leq x \leq 1$$

$F(-1) = -1 < 0$; $F(1) = 1 > 0$; Mas $F(0) = 0$

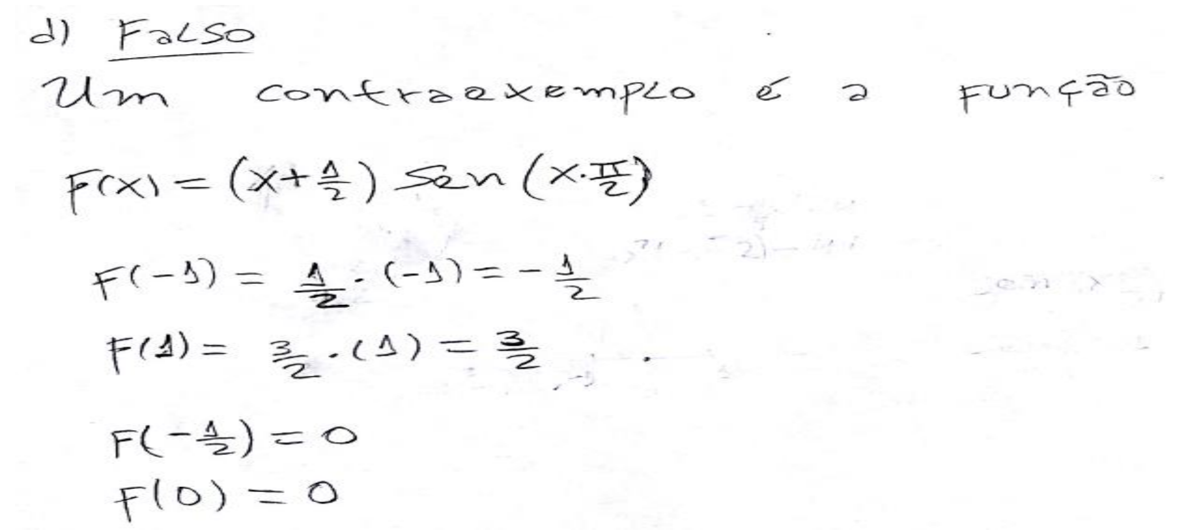


Figura 16: Solução de Alexandre para os itens *a*, *b*, *d* da Tarefa 2

Quando questionado sobre sua argumentação, Alexandre destacou que se sentia mais seguro dessa maneira, pois tinha "um controle maior da parte algébrica do que da parte mais geométrica ou gráfica da Matemática".

> *Pesquisador*: Como já comentamos, você remeteu muito a uma compreensão mais gráfica sobre a continuidade. Todos os itens da Tarefa 2 relacionavam a continuidade. Se você observar, em seus contraexemplos, você não utilizou gráficos. Por que você acha que sua compreensão sobre continuidade necessita tanto dos aspectos gráficos, embora você não tenha utilizado em sua solução?
>
> *Alexandre*: (Pausa) Primeiramente, eu tenho um controle maior da parte algébrica do que da parte mais geométrica ou gráfica da Matemática. Eu me sinto mais seguro.
>
> *Pesquisador*: Por que você se sente mais seguro dessa maneira?
>
> *Alexandre*: Primeiro, porque foi a parte da Matemática que mais me interessou e foi onde eu vi melhor meu aprendizado. Onde eu ganhei retorno nas disciplinas. Então, eu me sinto mais seguro. Aqui, a gente não tem muitos conteúdos de Geometria. Desde o ensino fundamental e médio eu carrego uma dificuldade maior nessa parte geométrica. Nessa parte de como argumentar geometricamente, principalmente.
>
> *Coorientador*: Você acredita que dar uma resposta matemática mais formal é algo mais correto?
>
> *Alexandre*: Eu acredito que, quando a gente parte para uma resposta mais formal, a gente diminui a nossa margem de erro. É muito menos frequente a gente acabar caindo em um erro ou em uma particularização quando a gente vai para a linguagem formal na hora de resolver um problema. A parte informal é boa para o entendimento de um problema, mas, na hora de escrever para alguém avaliar o que você está escrevendo, é bom você procurar transmitir aquilo ali de uma forma mais formalizada. Não que o formal seja melhor do que o informal. Mas, o formal, pelo menos para mim, me dá a impressão de fugir da margem de erro.
>
> (ALEXANDRE; p. 113)

Observamos, neste trecho, que o participante destaca o formalismo como um aspecto importante na atividade matemática para evitar particularizar determinadas conclusões. Nesse sentido, o formalismo matemático "dá a impressão de fugir da margem de erro". Consideramos que um dos objetivos de um curso de Análise é destacar a importância inequívoca do rigor para a Matemática e ressaltamos, neste episódio, que Alexandre identificou um dos papéis principais do rigor na atividade matemática.

Entretanto, destacamos que uma argumentação rigorosa em Matemática não se reduz à utilização de uma escrita simbólica e formal. Em nossa interpretação, para o participante, uma justificativa gráfica é sinônimo de justificativa pouco rigorosa. Na visão de Alexandre, os aspectos gráficos contribuem para o entendimento dos conceitos, mas não seriam a melhor maneira de apresentar a Matemática, uma vez que "a parte informal é boa para o entendimento de um problema, mas, na hora de escrever para alguém avaliar o que você está escrevendo, é bom você procurar transmitir aquilo ali de uma forma mais formalizada". Em nossa análise, este trecho pode apresentar uma interpretação subjacente que reflete a preocupação do participante em reproduzir uma argumentação formal para o professor que irá "avaliar o que você está escrevendo".

Acreditamos que essa preocupação com a estética da escrita matemática de uma argumentação pode estar atrelada a práticas de mobilização da cultura matemática – fundamentado em Miguel e Vilela (2008) – observadas na formação docente de Alexandre, articulada à valorização da concepção formalista da Matemática. Dessa maneira, interpretamos que o participante busca se adequar a essa cultura, ao tentar reproduzir uma argumentação rigorosa que considera ser mais aceita e que possibilita um bom desempenho acadêmico nas disciplinas cursadas na Licenciatura. Ao destacar que "essa foi a parte da Matemática onde viu melhor seu aprendizado" e "ganhou retorno nas disciplinas", Alexandre evidencia o fator condicionante da cultura matemática constituída em sua formação.

Em determinados momentos, a tentativa dos licenciandos em se moldarem a essa cultura matemática é realizada em detrimento da aprendizagem dos conceitos da disciplina de Análise na qual a pesquisa foi realizada. Por exemplo, no trecho que apresentamos a seguir, Jorge aponta a memorização como um recurso que contribui para sua aprendizagem em Análise, ao ponto de desenvolver um mecanismo de memorização de teoremas inspirado em um jogo de celular.

> *Pesquisador*: Lá no questionário, você disse que uma de suas dificuldades em Análise estava relacionada à memorização de teoremas. De que maneira memorizar teoremas contribui para a aprendizagem em Análise?
>
> *Jorge*: Se você tem uma boa capacidade de memorização, facilita porque a ideia vem mais rapidamente. É como se fosse um celular que você pudesse olhar: "Ah, é isso aqui". Você sabe que aquilo está certo. Quando você decora um teorema, não é qualquer ideia. O teorema é uma ideia que expressa uma forma correta de você encarar certo tópico. É uma forma de você recorrer a uma base para, a partir dali, você começar a fazer algumas coisas. Tem um patamar de onde posso iniciar. Mas, infelizmente, eu não tenho essa capacidade.
>
> *Pesquisador*: Todas essas tarefas estavam relacionadas ao Teorema do Valor Intermediário. Você acha que, de certa forma, se você tivesse lembrado, memorizado o teorema, isso te ajudaria?
>
> *Jorge*: Sim. Acho que sim.
>
> *Pesquisador*: Até para a primeira tarefa que está mais voltada para o ensino básico?
>
> *Jorge*: Sim. Tem um jogo de celular que é muito usado para você aprender uma língua. De um lado tem uma figura, ou você pode botar uma palavra, uma figura. Digamos que você quer aprender japonês ou coreano. Então, você tem a palavra na sua língua e aí você tem que saber a palavra na outra língua. Você vai e fala a palavra. Se você acerta, você marca lá. Se você erra, você marca lá: errei. Aí, ele volta até que o número de acertos daquele cartão seja abaixo de um certo número lá que você considere bom para você aprender. Eu tentei fazer isso com os teoremas de Análise, mas não dá muito certo. Eu botava lá Teorema de Weierstrass e aí colocava lá o que era. Teorema da convergência monótona limitada, o que era. Postulado de Dedekind... Mas, não deu muito certo. Você cansa e...
>
> (JORGE; p. 102)

Neste episódio, Jorge revela uma concepção formalista sobre a Matemática apresentada em um curso de Análise, na qual a atividade matemática é desenvolvida com o objetivo de demonstrar teoremas. Conforme destacado por Davis e Hersh (2013) no primeiro capítulo, para o formalista, um teorema é visto como uma ferramenta que permite a construção de um novo resultado matemático e o desenvolvimento da Matemática como ciência. Essa característica fica evidente no discurso de Jorge ao considerar que um "teorema é uma ideia que expressa uma forma correta de você encarar certo tópico". Nesse sentido, os conceitos da disciplina são entendidos como um conjunto de regras que devem ser memorizadas de maneira que o aluno tenha "um patamar de onde possa iniciar". Sob essa ótica, o fazer matemático é construído a partir de uma perspectiva cartesiana, desenvolvendo-se a partir das partes consideradas mais simples em direção aos conceitos mais complexos.

O discurso de Jorge revela que o participante tenta reproduzir esse fazer matemático a qualquer custo, ao ponto de tentar desenvolver um mecanismo de memorização de teoremas que, possivelmente, não contribui para sua aprendizagem. Em nossa interpretação, a tentativa de desenvolver um mecanismo de memorização inspirado em um jogo de celular evidencia que Jorge busca, obstinadamente, adequar-se à cultura matemática observada no curso de Análise investigado, em detrimento da reflexão conceitual sobre os significados dos conceitos estudados na disciplina. Destacamos que o próprio participante deixa transparecer que essa tentativa não contribuiu para sua aprendizagem: “Eu tentei fazer isso com os teoremas de Análise, mas não dá muito certo. Eu botava lá Teorema de Weierstrass e aí colocava lá o que era. Teorema da convergência monótona limitada, o que era. Postulado de Dedekind... Mas, não deu muito certo”.

A fala anterior sugere um sentimento de frustração em Jorge por não conseguir adequar-se a essa cultura matemática identificada no curso de Análise em questão. Esse sentimento é compartilhado por Rodrigo em outro episódio, após o participante apontar que não tinha condições de analisar a solução de um aluno de Análise na Tarefa 3.

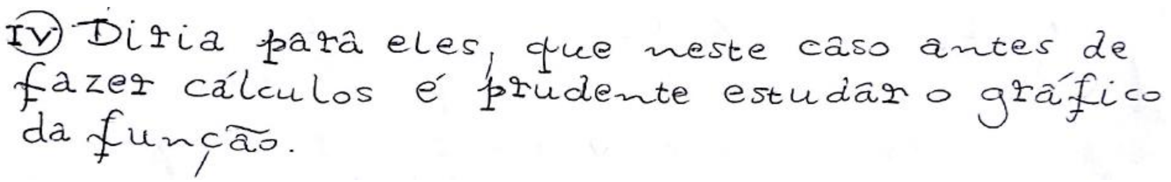


Figura 25: Retorno de Rodrigo às Soluções dos Alunos na Tarefa 1

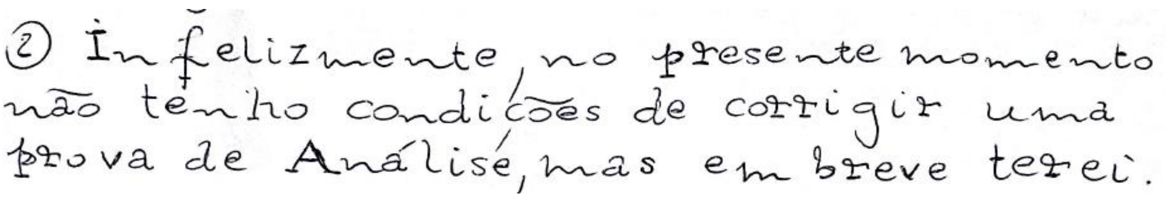


Figura 26: Retorno de Rodrigo às Soluções dos Alunos na Tarefa 3

> *Pesquisador*: Nesta Tarefa 3, tinha uma pergunta sobre qual retorno você daria a esses alunos a partir das demonstrações que foram apresentadas. Você afirmou que não tinha condições de corrigir uma prova de Análise, mas que em breve teria. Quais elementos faltariam para você dar esse retorno ao aluno? Por que você não se considerou apto para dar o retorno?
>
> *Rodrigo*: Porque eu preciso aprofundar o conhecimento. Olha só... eu vou fazer uma analogia. Nesse caso aí, por exemplo, se uma pessoa vai jogar xadrez... você conhece as regras, mas não sabe jogar. No meu caso, é mais ou menos isso.
>
> *Pesquisador*: Conhecer as regras você associaria a conhecer o quê? As definições, teoremas?
>
> *Rodrigo*: As definições.
>
> *Pesquisador*: E saber jogar seria saber utilizar essas definições e teoremas?
>
> *Rodrigo*: Sim. Saber, a partir das definições, das formalizações, você desenvolver as demonstrações, coisa que por falta de tempo eu ainda não tive essa competência.
>
> (RODRIGO; p. 133)

Neste trecho, Rodrigo compara, explicitamente, a atividade matemática em um curso de Análise com um jogo lógico: “Olha só... eu vou fazer uma analogia. Nesse caso aí, por exemplo, se uma pessoa vai jogar xadrez... você conhece as regras, mas não sabe jogar. No meu caso, é mais ou menos isso”. Em nossa interpretação, ao utilizar o jogo de xadrez como exemplo, o participante concebe o curso de Análise como um conjunto de regras, onde é preciso “saber, a partir das definições, das formalizações, desenvolver as demonstrações” para jogar esse jogo lógico. As características descritas no discurso de Rodrigo evidenciam uma visão formalista sobre a natureza da Matemática, conforme destacado por Davis e Hersh (2013), na qual a Matemática representaria uma ciência inventada pelo homem e construída dos axiomas e definições para os teoremas.

Motivados pelo de desejo de jogar esse jogo lógico, os participantes buscam adequar-se à cultura matemática que identificamos. Entretanto, quando o licenciando não consegue desenvolver a matemática rigorosa e formal desejada, ele carrega consigo sentimentos de incapacidade e frustração. Conforme observado no trecho anterior, o insucesso nessa tentativa é justificado como incompetência própria por Rodrigo ao declarar: “ainda não tive essa competência”. Esse sentimento transparece em diversos outros momentos da entrevista ao utilizar termos como, por exemplo, “foi ignorância minha” (RODRIGO, p. 129), “ainda não cheguei nesse patamar” (RODRIGO, p. 127), “eu não tenho esse nível” (RODRIGO, p. 127). No ponto de vista do participante, a responsabilidade por não conseguir reproduzir esse fazer matemático é exclusivamente dele, uma vez que, para um aluno de Análise, “seria de se esperar que ele tivesse uma familiaridade com formalismo” (RODRIGO, p. 129), que nas entrevistas, muitas vezes, foi traduzido como um jogo lógico.

Em nossa interpretação, Rodrigo sente-se frustrado por não conseguir alcançar o topo da hierarquia matemática idealizada por ele, discutida anteriormente na primeira seção. Nesse sentido, o professor formador, a quem os participantes se referem por diversas vezes através do título de doutor, raramente é questionado, uma vez que personifica a cultura matemática que norteia suas percepções. No episódio a seguir, por exemplo, ao comentar sobre as diferenças nas argumentações apresentadas pelos alunos na Tarefa 3, Rodrigo destaca que uma justificativa gráfica é importante para o entendimento, mas não seria adequada para o professor de Análise que avaliaria sua argumentação.

> *Pesquisador*: E você acha que essas diferenças influenciam na análise das demonstrações?

> *Rodrigo*: Não que ela também não tivesse sido lógica. Ela foi mais assim... como vou poder dizer... usou gráfico, ela foi mais pictórica. Para o entendimento é bom, mas, por exemplo, para uma pessoa que está fazendo isso, para um professor doutor... o professor doutor que vai corrigir já está super familiarizado com a linguagem simbólica.
>
> *Pesquisador*: Então, não seria útil apresentar os gráficos para o professor doutor analisar?
>
> *Rodrigo*: Para explicar para um aluno seria bom. Mas, no caso do matemático puro, se esperaria dele que ele fosse cem por cento formal... utilização cem por cento da linguagem simbólica e o gráfico só quando fosse inevitável.
>
> (RODRIGO; p. 132)

Embora destaque a contribuição de argumentação gráfica para o entendimento ou para o ensino de um conceito, Rodrigo desqualifica essa forma de apresentação matemática por considerar que se espera de um matemático que ele seja “cem por cento formal”, que ele utilize “cem por cento da linguagem simbólica e o gráfico só quando fosse inevitável”. Dessa maneira, identificamos, no discurso do participante, uma visão formalista sobre a Matemática que valoriza a linguagem simbólica em uma argumentação em detrimento de seus significados.

Além disso, fica evidente neste trecho, que a maneira como professor formador apresenta a Matemática e os aspectos valorizados por ele em sua avaliação contribuem para a constituição de uma cultura matemática que valoriza o rigor e o formalismo. De acordo com essa cultura, uma argumentação gráfica “para o entendimento é bom, mas, por exemplo, para uma pessoa que está fazendo isso, para um professor doutor... o professor doutor que vai corrigir já está super familiarizado com a linguagem simbólica”. Em nossa análise, o termo “doutor” evidencia o status do professor formador na hierarquia idealizada pelo participante na primeira seção, representando uma referência condicionante na constituição de práticas de mobilização dessa cultura matemática – fundamentado em Miguel e Vilela (2008) – entre os alunos da Licenciatura.

Interpretamos que, para Rodrigo, o professor “doutor” serve como referência na busca por uma *identidade cultural* que lhe permita reconhecer seu pertencimento ao topo da hierarquia idealizada. Nesse cenário, conforme destacado pelo participante no episódio abaixo, o curso de Análise é determinante na constituição de sua identidade.

> *Pesquisador*: Todas as tarefas abordavam um pouco da reflexão sobre o papel da disciplina de Análise na formação do professor e a relação dela com o ensino básico. Você já tinha refletido antes sobre essa relação entre a disciplina de Análise e o ensino básico?

> *Rodrigo*: Sim. As pessoas dizem que é inútil, mas eu discordo totalmente. <u>Eu acho que o professor de matemática tem que saber uma demonstração, um teorema. Ele tem a lógica não só como ferramenta, mas como fim</u>. Matemática é centrada nas ideias. Matemática é a maneira como você organiza o raciocínio. Acho que é de fundamental importância para o professor. <u>Eu não me considero um professor de Matemática sem passar em Análise.</u> É... sem passar não porque tem gente que passa sem entender.
>
> *Pesquisador*: Então, vamos trocar a palavra "passar" por entender...
>
> *Rodrigo*: Sim, sim. Compreensão. Compreender sim. Aí, você foi mais feliz.
>
> *Pesquisador*: Você acha que não seria um bom professor de matemática se não entendesse Análise?
>
> *Rodrigo*: Pelo menos o básico de Análise, não. Talvez, lá no ensino fundamental, lá no comecinho, talvez. No Ensino Fundamental II e no Ensino Médio, para o professor de ensino médio, eu acho que é muito pertinente sim. Para mim, deveria ser obrigatório. Formalização dos conceitos. <u>Você ter a lógica, como eu já falei, como fim e não somente como ferramenta, é muito importante. É o que diferencia o matemático do não matemático. Acho importantíssimo.</u>
>
> (RODRIGO; p. 134)

Analisando o discurso de Rodrigo neste trecho, podemos notar que, na visão do participante, o curso de Análise é o elemento que identifica um professor de Matemática, ao ponto dele declarar: "Eu não me considero um professor de Matemática sem passar em Análise. É... sem passar não porque tem gente que passa sem entender". Dessa maneira, entender Análise é o requisito essencial para um professor de Matemática, é o fator que determina essa *identidade cultural*. Usamos o termo identidade justamente por considerar que o participante tenta adequar-se à cultura matemática observada nesse curso de Análise em busca de um reconhecimento profissional que o define como professor de Matemática.

Em nosso entendimento, de acordo com a percepção hierárquica de Rodrigo sobre a Matemática, a disciplina de Análise é o meio de ascender ao topo dessa hierarquia e alcançar o mesmo patamar dos "professores doutores" que identificam, em sua visão, a figura de um professor de Matemática. Nesse cenário, só pode ser reconhecido como professor de Matemática aquele que está imerso nessa cultura, que utiliza o rigor e o formalismo em suas argumentações, que "tem a lógica não só como ferramenta, mas como fim". Esse é o ingrediente que determina a identidade de um representante dessa cultura matemática, isso "é o que diferencia o matemático do não matemático".

Neste eixo de análise, portanto, verificamos que os participantes buscam reproduzir o fazer matemático que caracteriza a cultura identificada na seção anterior e, também, discutida nesta categoria. Essa tentativa de adequar-se à cultura matemática observada é norteada pela busca de uma *identidade cultural* que permita ao licenciando ascender na hierarquia idealizada e reconhecer-se como integrante dessa cultura. Consideramos que a hierarquia imposta pelos sujeitos desta pesquisa extrapola a relação estabelecida por Klein (2004) sobre a percepção hierárquica entre Matemática Elementar e Matemática Superior, uma vez que a hierarquia observada neste trabalho não se referia, apenas, ao conhecimento matemático. De maneira mais ampla, essa hierarquia era, também, atribuída às figuras do professor da universidade e do professor da escola básica, além de ser idealizada pelos participantes enquanto alunos da Licenciatura ou em expectativas sobre a futura prática docente.

Nesse contexto, o professor formador – rotulado como doutor – e as práticas de mobilização de cultura matemática – de acordo com as ideias de Miguel e Vilela (2008) – são aspectos que condicionam a visão dos participantes sobre a Matemática e a busca por essa identidade. Na seção a seguir, entretanto, verificaremos que as meta-reflexões dos participantes sobre determinados aspectos dessa cultura matemática, no contexto de sua própria formação docente ou em expectativas sobre a futura prática, entram em conflito com o fazer matemático que valorizam e tentam reproduzir.

5.2.3 *Meta-reflexões sobre Cultura Matemática no Contexto da Própria Formação*

Os episódios apresentados neste eixo de análise ilustram a reflexão dos licenciandos sobre a cultura matemática identificada nesta pesquisa, no contexto da própria formação inicial e das expectativas sobre a futura prática docente. Nessas reflexões, os participantes apontam a falta de conexão entre a formação inicial do professor de Matemática e o ensino básico – refletindo a dupla descontinuidade denunciada por Klein (2004) – e destacam que a Licenciatura apresenta poucas articulações com o ensino de Matemática na escola, aproximando-se da formação de um bacharel – reforçando que heranças da lógica subjacente do 3+1 ainda permanecem de modo estruturante na Licenciatura em Matemática, conforme destacado por Moreira (2012). Ressaltamos, entretanto, que os questionamentos dos participantes sobre a maneira como a Matemática é apresentada na Licenciatura evidenciam um conflito entre a cultura matemática valorizada por eles enquanto alunos do ensino superior e suas meta-reflexões sobre essa cultura, no contexto de suas próprias formações e das expectativas sobre a futura prática docente.

No trecho a seguir, Alexandre faz um paralelo entre a formação na Educação Básica e as dificuldades encontradas ao lidar com a matemática formal presente em um curso de

Análise. Segundo ele, o aluno enfrenta dificuldades ao fazer a transição do ensino básico para o ensino superior por encontrar na universidade uma matemática distinta daquela vivenciada na escola.

> *Alexandre*: A questão dessa grande barreira está relacionada lá no começo com o déficit no ensino básico. Talvez, o aluno não chega pronto aqui para essa linguagem mais formalizada. Há um grande salto do ensino básico para o ensino superior. Ninguém discute sobre a importância de ter um curso inteiro de Pré-Cálculo, por exemplo. Ou até outros cursos nessa linha para nivelar mais a base de todo mundo.
>
> *Coorientador*: Você acha que as pessoas que estão na Educação Básica e na educação superior aprendem matemática de forma diferente?
>
> *Alexandre*: (Pausa) Em algumas disciplinas do ensino superior, você é obrigado, estimulado, a ter uma visão mais investigativa. A pensar mais matemática. No ensino básico, as coisas são muito mais decoradas... muito mais mecânica a forma em que é ensinada do que a gente espera que seja o ideal.
>
> (ALEXANDRE; p. 114)

Observamos, neste episódio, que o participante não identifica relação entre a matemática apresentada na universidade e a matemática aprendida na Educação Básica, ao iniciar a trajetória acadêmica na Licenciatura. O "grande salto do ensino básico para o ensino superior", apontado pelo licenciando, ilustra a dupla descontinuidade – denunciada por Felix Klein já em 1908 – existente na transição do professor de Matemática entre o ensino básico e o ensino superior. A falta de conexão entre escola e universidade é evidenciada pela percepção estanque e hierárquica de Alexandre sobre o ensino de Matemática nesses diferentes contextos. Por um lado, "no ensino básico, as coisas são muito mais decoradas... muito mais mecânica a forma em que é ensinada do que a gente espera que seja o ideal". Em contrapartida, "em algumas disciplinas do ensino superior, você é obrigado, estimulado, a ter uma visão mais investigativa. A pensar mais matemática". Em nossa análise, o discurso de Alexandre reflete essa percepção hierárquica, ao apontar defeitos e desqualificar o ensino de Matemática na escola e, por outro lado, enaltecer a matemática "investigativa" da universidade que leva o aluno "a pensar mais".

Por sua vez, em um momento posterior, Alexandre destaca que a formação docente na Licenciatura não reconhece as especificidades do conhecimento do professor de Matemática, apresentando "poucas matérias na graduação que são ligadas mais à docência". Segundo o participante, os cursos de conhecimento matemático da Licenciatura apresentam a Matemática a partir de uma perspectiva mais próxima de um pesquisador ou de um bacharel.

> *Pesquisador*: Você citou a diferença entre a visão de um pesquisador e a visão de um professor. Os cursos de conteúdo matemático no nível superior trazem mais a visão do pesquisador ou do professor?

> *Alexandre*: Mais do pesquisador. A gente tem poucas matérias na graduação que são ligadas mais à docência. Muitas matérias do 12° andar[15] , na minha visão, não acrescentam muita coisa para a gente como acadêmico. Poderiam acrescentar mais, mas não acrescentam.
>
> *Pesquisador*: Quais são essas matérias?
>
> *Alexandre*: Tipo Sociologia da Educação, Políticas Públicas da Educação... que tratam a educação de uma forma muito fantasiosa. Quando você vai ter a oportunidade de trabalhar realmente aquilo, você vê que o que se aprende nessas disciplinas de Educação é na prática. Você tira muito pouco do que você aprende aqui dentro. Na Didática em si, por exemplo, o que você mais aprende é o período que você faz estágio no colégio do que o período que você está aqui assistindo as aulas.
>
> *Coorientador*: Mas, você comentou lá no começo do encontro, em sua experiência docente, que sua motivação na licenciatura esteve ligada ao contato com uma realidade social e isso não estaria imerso em um curso de Sociologia da Educação?
>
> *Alexandre*: Mas, isso eu não vi aqui dentro. Teoricamente, sim. Não é que o curso seja desnecessário. É um curso que não te prepara para o deveria te preparar. Talvez, a intenção desses cursos fosse preparar você para essa realidade, mas você só vai ter esse preparo com a experiência prática. São poucas as disciplinas que te preparam realmente para dar aula, como as Práticas Pedagógicas em Matemática, os Estágios. Mas, são poucas. O curso é totalmente voltado para quem vai seguir na pesquisa, mesmo que você não queira seguir na pesquisa. O ciclo básico todo é mais voltado para o bacharel.
>
> (ALEXANDRE; p. 119)

De acordo com nossa interpretação, Alexandre ilustra, em seu discurso, a existência da tricotomia na formação do professor de Matemática, apontada por Fiorentini e Oliveira (2013). Observamos, neste trecho, que o participante descreve a formação do professor de Matemática a partir dos três grupos identificados pelos autores: a *formação matemática*, a *formação didático-pedagógica* e a *prática profissional*.

Para Alexandre, a *formação matemática* apresenta a visão de um pesquisador, direcionada à Matemática Acadêmica e estabelecendo poucas conexões com a futura prática docente. Tampouco, o participante identifica relação entre a *formação didático-pedagógica* e a atuação profissional do professor de Matemática, considerando as disciplinas de Educação distantes da realidade da sala de aula. Em seu ponto de vista, “muitas matérias [...] não acrescentam muita coisa para a gente como acadêmico”, pois “quando você vai ter a oportunidade de trabalhar realmente aquilo, você vê que o que se aprende nessas disciplinas de Educação é na prática. Você tira muito pouco do que você aprende aqui dentro”. Ele acrescenta, que apesar de as disciplinas didático-pedagógicas intencionarem preparar o aluno para a futura prática docente, o licenciando “só vai ter esse preparo com a experiência

[15] Andar no qual são ministradas as disciplinas de Educação na universidade onde a pesquisa foi realizada.

prática". Dessa maneira, em relação à *prática profissional*, no currículo da Licenciatura "são poucas as disciplinas que te preparam realmente para dar aula, como as Práticas Pedagógicas em Matemática, os Estágios".

Embora Alexandre tenha valorizado, em outros momentos, os aspectos da cultura matemática identificada nas seções anteriores, quando o participante reflete sobre essa cultura no contexto de sua formação docente, ele reconhece que "o curso é totalmente voltado para quem vai seguir na pesquisa, mesmo que você não queira seguir na pesquisa". Ao destacar que "o ciclo básico todo é mais voltado para o bacharel", Alexandre identifica que sua formação na Licenciatura é desenvolvida como um Bacharelado mutilado, explicitando a lógica subjacente ao modelo 3+1 destacado por Moreira (2012). Nesse sentido, fica evidente que, para o participante, sua formação não reconhece as especificidades do conhecimento do professor para o ensino, sendo concebido na Licenciatura como um subconjunto do conhecimento matemático do bacharel.

Em nossa interpretação, o fato de Alexandre ter considerado, no trecho anterior, que o conhecimento do professor de Matemática se desenvolve na *prática profissional* pode estar relacionado à ausência de conexões com sua futura prática docente, levando-o a buscar, ele mesmo, determinadas articulações ou, possivelmente, desconsiderar o conhecimento aprendido em sua formação inicial ao atuar como professor. No episódio a seguir, o participante declara que tenta articular o conteúdo de Análise com sua futura atuação professor da Educação Básica, destacando, principalmente, a contribuição do desenvolvimento do pensamento dedutivo em sua formação.

> *Pesquisador:* Tudo o que a gente fez aqui foi refletir um pouco sobre o papel da disciplina de Análise na formação do professor. Você já tinha refletido, anteriormente, sobre essa associação entre o curso de Análise e a Educação Básica?
>
> *Alexandre:* De certa forma, sim. Os cursos que estão mais diretamente ligados com nossa formação como educadores, são os cursos da parte de educação: práticas, estágios. <u>Só que eu sempre tentei relacionar e absorver algumas coisas das matérias mais teóricas, uma abordagem mais voltada ao bacharel, tipo as álgebras, a análise</u>. <u>Tento relacionar isso com o que pode me acrescentar na formação como professor em si. E não como pesquisador ou como um estudioso em Matemática.</u> A Análise, por exemplo, é um estilo de pensamento, um estilo diferente de ver a matemática, de abordar a matemática. <u>Com a Análise, eu aprendi como pensar, refletir mais. Primeiro, fazer um rascunho do problema, tentar entender o problema. Analisar o que a gente sabe. Esmiuçar o problema. Essa visão que eu não tinha tão forte, a Análise trouxe para mim.</u> E isso não está relacionado só a Análise em si, mas vale para toda a minha vida acadêmica e como estudante em si. Analisar mais as questões, estudar mais o contexto daquilo ali antes de atacar o problema em si.
>
> (ALEXANDRE; p. 118)

O discurso de Alexandre, neste episódio, evidencia que recai sobre o licenciando a tarefa de articular os conceitos da Matemática Acadêmica com a futura prática docente. Podemos notar o esforço do participante em estabelecer conexões com a Educação Básica em disciplinas que apesentam "uma abordagem mais voltada ao bacharel", na tentativa de "relacionar isso com o que pode me acrescentar na formação como professor em si. E não como pesquisador ou como um estudioso em Matemática". Entretanto, destacamos que os aspectos descritos por Alexandre evidenciam apenas características da cultura matemática identificada nas seções anteriores, como o desenvolvimento do pensamento dedutivo ou da escrita matemática. É inquestionável que esses aspectos são importantes para a formação do professor de Matemática, porém, questionamos a ausência de reflexões, no discurso de Alexandre, sobre as articulações existentes entre os conteúdos matemáticos de Análise e os conceitos da Educação Básica.

Em nosso entendimento, um curso de Análise na Licenciatura deve ser desenvolvido com um olhar específico voltado à futura prática docente dos licenciados, com o intuito de iluminar as relações existentes entre seu conteúdo e a Matemática Escolar. Essa especificidade de um curso de Análise na Licenciatura é reconhecida por Jorge no trecho a seguir. A reflexão sobre as dificuldades decorrentes da exigência de rigor em um curso de Análise leva o participante "a pensar que poderia existir um curso de Análise para quem vai fazer Bacharelado e outro para quem vai fazer Licenciatura".

> *Pesquisador*: Uma das dificuldades no curso de Análise que você citou no questionário estava relacionada ao rigor. De que maneira você acha que o rigor interfere na aprendizagem em Análise?
>
> *Jorge*: Rigor é necessário. Bastante necessário. Isso aí está parecendo mais um "chororô" de aluno que acha que o professor sempre é mais rigoroso do que você gostaria, de fato. Se você não passa, então ele é rigoroso. <u>Mas, eu acho que poderia se pensar... eu ainda não parei para pensar, mas, às vezes, eu sou tentado a pensar que poderia existir um curso de Análise para quem vai fazer Bacharelado e outro para quem vai fazer Licenciatura.</u>
>
> *Pesquisador*: Quais diferenças você identifica entre as duas formações que justificariam essa separação?
>
> *Jorge*: Em termos de conteúdo, eu acho que nenhuma. Deveria ser o mesmo. <u>Talvez, nesse aspecto de mostrar a parte que é mais sensível para o professor do Ensino Médio, de modo geral, esse curso seria voltado para a Licenciatura.</u> Eu acho até que algumas faculdades fazem isso. Tem um curso de Análise para a Licenciatura e outro para o Bacharelado. Acho que a diferença seria, talvez, só a parte de mostrar como determinados assuntos podem ser trabalhados com alunos de Ensino Médio. Talvez, fossem importantes para esse curso. <u>Em termos de rigor e conteúdo, sou obrigado a dizer que não pode fazer diferença. Não vai fazer concessões dentro da matéria</u>.
>
> (JORGE; p. 96, 97)

De acordo com a sugestão de Jorge, o curso de Análise para a Licenciatura levaria em conta as especificidades do conhecimento necessário ao professor, com o objetivo de "mostrar a parte que é mais sensível para o professor do ensino médio". Em nossa análise, o participante reconhece a necessidade de a formação do professor promover, nas disciplinas de conteúdo matemático, o desenvolvimento de um conhecimento especializado sobre o conteúdo que permita ao professor observar a Matemática Elementar de um ponto de superior, conforme destacado por Klein (2004). Jorge acrescenta, ainda, que essa proposta não implica em sugerir uma abordagem menos profunda do conteúdo ou com menos rigor matemático. Ao contrário, ele destaca que "em termos de rigor e conteúdo [...] não pode fazer diferença". Em nosso entendimento, essa reflexão do participante sobre sua própria formação reforça o ponto de vista de Fiorentini e Oliveira (2013) acerca da necessidade de "adotar posturas que apontem para uma visão mais integradora do curso, sem deixar de aprofundar, numa perspectiva multirrelacional, epistemológica e histórico-cultural, o conteúdo específico" (FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013, p. 935).

Concordamos que um dos objetivos de um curso de Análise é apresentar ao licenciando a importância do rigor como um dos fundamentos matemáticos, porém questionamos a cultura que concebe a Matemática exclusivamente a partir desse ponto de vista. Nesse sentido, conforme destacado por Jorge, por exemplo, na Licenciatura é necessário que um curso de Análise promova articulações com conteúdos do ensino básico sob uma ótica específica destinada à futura prática docente. Ou ainda, de maneira mais ampla, consideramos que o ensino de Matemática no nível superior não deve ser desenvolvido exclusivamente a partir de sua perspectiva lógica e formal, mas deve promover reflexões conceituais sobre os conteúdos apresentados, independente se o curso objetiva a formação de um futuro pesquisador matemático ou de um professor de Matemática da Educação Básica. Nessa direção, destacamos, a seguir, um episódio em que Alexandre ilustra esse ponto de vista após refletir sobre as dificuldades relacionadas ao rigor e ao formalismo matemático em um curso de Análise.

> *Pesquisador*: Agora, olhando por outro lado, em relação às dificuldades, você acha que em uma definição, em um teorema, o rigor e o formalismo dificultam o entendimento?
>
> *Alexandre*: Sim.
>
> *Pesquisador*: Por quê?

> *Alexandre*: Eu parto do princípio que uma visão lúdica das coisas, numa visão inicial, principalmente, se você conseguir transformar aquilo em algo palpável, tende a ajudar mais na compreensão do que uma visão teórica. <u>A visão teórica é importante, mas ela tem que estar lado a lado com outras coisas... visão lúdica.</u> Porque, de certa forma, nem todo mundo tem um nível de abstração tão grande para conseguir assimilar aquela forma mais teórica. <u>E, quando você consegue relacionar aquilo ali com algo mais palpável para a pessoa, ela tende a ter uma compreensão melhor até da parte teórica</u>.
>
> *Pesquisador*: Então, você acha que definições e afirmações com rigor, formalismo, não são palpáveis...
>
> *Alexandre*: <u>Por exemplo, em Matemática Discreta, o Princípio da Casa dos Pombos. Quando o cara ensina: “Se eu tenho mais pombos do que casas, então vai sobrar um pombo”, aquilo ali esclarece bastante para o aluno. Esclarece até para a visão formal do princípio em si.</u> Essa visão mais palpável. Se eu tenho mais camisa do que gaveta, vai sobrar camisa ou uma gaveta vai ter mais de uma camisa. <u>Isso ajuda muito o aluno a entender até o formalismo. Só o formalismo sozinho, às vezes, ia bloquear de certa forma muitos alunos porque muitos iriam parar e não iriam conseguir progredir.</u> Quando você tem uma abordagem que parece natural a eles, você pode fazer todo mundo acompanhar.
>
> (ALEXANDRE; p. 111)

Neste trecho, observamos que Alexandre reflete sobre a cultura matemática que valoriza exclusivamente o rigor e o formalismo na atividade e na apresentação matemática durante sua formação docente. Em nossa análise, consideramos que o participante utiliza o termo “visão teórica” para se referir a essa forma de apresentar a Matemática, enquanto o termo “visão lúdica” estaria relacionado a uma apresentação mais intuitiva e menos formal dos conceitos. Nesse sentido, para Alexandre, “a visão teórica é importante, mas ela tem que estar lado a lado com outras coisas... visão lúdica”. Ou seja, o licenciando reconhece que, no ensino de Matemática, além de apresentar os conceitos de maneira rigorosa e formal, é importante refletir intuitivamente sobre esses conceitos. Para ilustrar sua afirmação, Alexandre cita um exemplo vivido enquanto aluno na Licenciatura, evidenciando uma meta-reflexão sobre a cultura matemática que identificamos no contexto de sua própria formação.

Teorema (Princípio da Casa dos Pombos): Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ conjuntos não-vazios e finitos, tais que $\#\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n} + \mathbf{1}$ e $\#\boldsymbol{B} = \boldsymbol{n}$. Se $\boldsymbol{f}$ é uma função de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$, então $\boldsymbol{f}$ não pode ser injetiva.

Teorema (Princípio da Casa dos Pombos): Se tivermos $\boldsymbol{n} + \mathbf{1}$ pombos para serem colocados em $\boldsymbol{n}$ casas, então pelo menos uma casa deverá conter mais de um pombo.

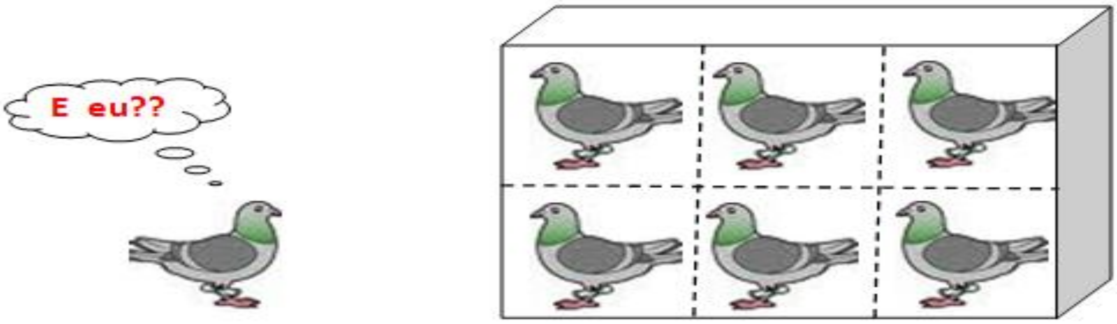


Figura 27: Princípio da Casa dos Pombos

Destacamos que, no discurso de Alexandre, emerge uma reflexão sobre cultura matemática em uma experiência vivida por ele enquanto aluno da disciplina de Matemática Discreta na Licenciatura. O participante destaca que a apresentação do Princípio da Casa dos Pombos de uma forma mais intuitiva contribui para o entendimento do aluno. Segundo ele, "quando o cara ensina: 'Se eu tenho mais pombos do que casas, então vai sobrar um pombo', aquilo ali esclarece bastante para o aluno", uma vez que "só o formalismo sozinho, às vezes, ia bloquear de certa forma muitos alunos [...]". O participante acrescenta que, além de possibilitar uma compreensão melhor sobre o princípio, essa apresentação mais intuitiva "ajuda muito o aluno a entender até o formalismo" presente nesse teorema.

É importante ressaltar que, neste episódio, Alexandre não desvaloriza o rigor matemático ou, tampouco, propões que ele deva ser flexibilizado no ensino de Matemática na Licenciatura. Seu discurso evidencia a necessidade de reflexão conceitual problematizada sobre os conteúdos apresentados no ensino superior, de maneira que possibilite um maior entendimento sobre os conceitos e amplie a compreensão do aluno sobre o próprio rigor. Acrescentamos, ainda, que o enunciado do Princípio da Casa dos Pombos descrito pelo licenciando é tão rigoroso quanto o primeiro enunciado que apresentamos na Figura 27. Em nosso entendimento, considerá-lo menos rigoroso por não apresentar uma escrita simbólica é reflexo de uma cultura matemática que valoriza, predominantemente, a perspectiva formal da Matemática e não evidencia a diversidade de seus processos de produção.

Ao observar as meta-reflexões dos licenciandos sobre a cultura matemática no contexto de suas formações, identificamos, em nossa análise, um conflito entre o discurso dos participantes nesta seção e as práticas de mobilização da cultura matemática identificadas nas seções anteriores. Embora apresentem reflexões sobre a maneira como a Matemática é apresentada na Licenciatura, ou até mesmo na Educação Básica, os sujeitos desta pesquisa, aparentemente, não conseguem desprender-se dessa cultura quando estão engajados na atividade matemática ou atuando como professores. No episódio a seguir, por exemplo, ao comentar sobre as soluções dos alunos na Tarefa 1, Jorge valoriza as soluções intuitivas ou, conforme suas palavras, as soluções "fora da caixa". Entretanto, ao descrever um episódio ocorrido em uma aula ministrada por ele durante o Estágio Supervisionado, identificamos que o participante não valoriza, inicialmente, a solução intuitiva exibida por um de seus alunos.

> *Pesquisador:* Quando você analisou as soluções dos alunos na Tarefa 1, você comentou que as soluções não estavam completamente corretas e que os alunos partiram de pontos de vista diferentes. O que chamou sua atenção de diferente nesses pontos de vista nas soluções?
>
> *Jorge:* Olha, Ana fez uma abordagem menos formal. Foi uma sacada que ela teve e eu achei isso interessante. O menino foi seguindo um passo a passo que, talvez, o professor dele tenha dado em sala. <u>Eu acho que essas soluções que são, meio assim, fora da caixa são interessantes e nós temos que valorizá-las.</u> Também, não é de menor valor o aluno que aprendeu de uma forma e segue aquele receituário. Acho que foi isso o que eu quis dizer.
>
> *Pesquisador:* Você acha que essas soluções que são mais passo a passo, que são as mais utilizadas e que a gente está mais habituado, não estimulam tanto o raciocínio do aluno como a primeira solução? Ou não?
>
> *Jorge:* Eu acho que estimula da mesma forma. <u>Eu acho que a pessoa que dá uma sacada assim, é uma coisa muito imprevisível. [...] Eu acho que, quando alguém dá uma solução dessas, eu acho que temos que valorizar o que o aluno fez.</u> Eu estava dando uma aula no estágio uma vez em que eu estava falando sobre áreas. <u>Deduzindo as fórmulas de áreas de figuras planas. Aí, teve uma hora em que um menino disse: "Professor, por que você não faz assim?"</u>. Eu disse que não estava entendendo o que ele estava dizendo, não estava conseguindo. Mas, é uma droga... porque é uma aula de estágio que você não pode parar, que você tem que chegar até o final da aula e tem que dar aquele conteúdo todo. <u>Aí, eu disse: "Vamos fazer o seguinte? Depois eu vou dar uma olhada com você". Ele não parou ali. Pegou uma tesoura e cortou lá uns papéis, fez umas figuras e disse: "Professor, posso mostrar uma coisa?". Aí, quando ele fez essa figura e me mostrou, eu entendi na hora. Eu disse: "Bacana essa sua solução. Vem cá. Mostra aqui." Aí ele mostrou, foi lá e todo mundo entendeu. Eu escrevi o que ele fez no quadro... Então, eu acho que o aluno que tem esses "insights", essas ideias assim, não é uma coisa muito sensível. Isso não dá para ensinar</u>. <u>Eu acho que você tem que valorizar para que o aluno se sinta estimulado a buscar.</u>
>
> (JORGE; p. 94)

Podemos identificar, no discurso de Jorge, um conflito entre suas expectativas sobre a futura prática e sua atuação, de fato, em sala de aula. De acordo com a descrição do participante sobre sua aula no estágio, inferimos que ele seguia uma abordagem mais formal "deduzindo as fórmulas de áreas de figuras planas". Ao ser interrompido por um aluno que tentava propor uma argumentação mais intuitiva, podemos observar que Jorge ignora, inicialmente, a solução apresentada: "Vamos fazer o seguinte? Depois eu vou dar uma olhada com você". Na sequência do episódio, fica evidente que o participante só passa a valorizar essa solução após a insistência do aluno, quando ele "Pegou uma tesoura e cortou lá uns papéis, fez umas figuras e disse: 'Professor, posso mostrar uma coisa?'". Somente após esse momento, Jorge chama o estudante ao quadro e pede para ele expor sua solução para a turma.

Embora declare que um professor de Matemática deve valorizar uma solução mais intuitiva, em sua prática, Jorge contradiz seu discurso ao ignorar a argumentação intuitiva de um aluno que difere da demonstração formal de área de figuras planas. Em nossa análise, apesar de reconhecer a importância da reflexão intuitiva sobre os conceitos no ensino de Matemática, o participante reproduz a maneira tradicional de ensino por não conseguir desprender-se da cultura matemática que valoriza sua perspectiva formal. Em nossa interpretação, esse episódio sugere que a cultura que identificamos na formação inicial de Jorge pode ter impacto em sua futura atuação docente. De acordo com essa conjectura, é possível que a cultura matemática identificada em sua formação possa determinar, em sua futura prática docente, a constituição de uma matemática cultural na escola – destacada por Davis e Renert (2014) – que evidencie aos alunos a concepção formalista sobre a natureza da Matemática.

Por essa razão, questionamos, ao longo desta investigação, de que maneira a cultura matemática identificada através do discurso dos participantes está contribuindo para a formação de futuros professores de Matemática e como ela pode estar relacionada à futura prática docente desses licenciandos. Nesta seção, observamos que as meta-reflexões dos participantes sobre essa cultura no contexto de suas formações sugerem que os próprios licenciandos reconhecem a necessidade de mudanças na formação inicial de professores de Matemática, de maneira articulada às especificidades do conhecimento do professor da Educação Básica. Entretanto, verificamos ao longo da análise de dados desta pesquisa que, em meio à falta de conexão entre a Licenciatura e o ensino básico e impactado diretamente pelas práticas de mobilização de cultura matemática observadas na formação docente, o licenciando acaba reproduzindo as mesmas práticas enquanto alunos da Licenciatura e, possivelmente, pode replicá-las em sua atuação futura como professor de Matemática.

CAPÍTULO VI – Considerações Finais

Neste capítulo, apresentaremos as conclusões obtidas após a realização da investigação destacando os principais resultados, bem como algumas de suas possíveis interpretações e desdobramentos para futuras pesquisas. O capítulo está subdividido em duas seções: resultados e perspectivas futuras. Na primeira seção, fazemos uma breve retomada da dinâmica de investigação e destacamos os resultados emergentes da análise dos dados. Na segunda seção, apresentamos uma discussão sobre alguns desdobramentos do trabalho que sugerem perspectivas futuras para novas investigações.

6.1 Resultados

Ao longo desta investigação, discutimos diferentes maneiras de conceber o conhecimento matemático na tentativa de observar, no contexto de uma disciplina de Análise Real no curso de Licenciatura, a relação entre a visão dos sujeitos desta pesquisa sobre a natureza da Matemática e a construção de seus saberes docentes para o ensino. Motivados por esse objetivo, procuramos observar as percepções de licenciandos sobre a Matemática, no contexto das práticas sociais e culturais mobilizadas durante sua formação inicial como professores de Matemática e considerando suas expectativas sobre a futura prática docente. Com esse olhar, as tarefas inspiradas no modelo de Biza, Nardi e Zachariades (2007) foram desenvolvidas com o objetivo de provocar a manifestação das percepções dos participantes sobre a natureza da Matemática, relacionadas, principalmente, à percepção sobre rigor no processo de validação matemática em questões do ensino básico e do ensino superior.

As inquietações que motivaram o desenvolvimento desta pesquisa convergiram à questão principal que sintetiza a investigação: *Quais aspectos emergem do discurso de licenciandos sobre suas percepções relacionadas à natureza da Matemática – especificamente no que tange às práticas sociais e culturais observadas no contexto de uma disciplina de Análise Real da Licenciatura em Matemática – e de que maneira tais aspectos se articulam com a construção de saberes matemáticos para o ensino?* Na tentativa de responder à questão proposta, desenvolvemos nossa investigação com o objetivo de (1) identificar, a partir do discurso dos participantes da pesquisa, aspectos da cultura matemática mobilizada por licenciandos que cursavam a disciplina de Análise Real; e (2) observar possíveis relações entre essa cultura e a construção dos saberes docentes do futuro professor de Matemática.

Frisamos que a proposta do trabalho era responder à questão principal desta pesquisa, exclusivamente, da perspectiva do discurso dos sujeitos da investigação durante e após cursarem a disciplina de Análise Real. Por esse motivo, ressaltamos que as interpretações apresentadas na análise de dados e as inferências apontadas em nossas conclusões não visam generalizar os resultados obtidos, mas propor reflexões sobre a formação inicial de professores de Matemática a partir desses resultados. Assim como destacado por Geertz (1989), o objetivo da análise cultural descrita neste trabalho "não é generalizar através dos casos, mas generalizar dentro deles" (GEERTZ, 1989, p. 18). Ou seja, não temos a pretensão de afirmar que essa cultura matemática percorre todos os cursos de Licenciatura em Matemática.

A análise dos dados emergentes nesta pesquisa fundamentou-se na observação da atividade matemática como um conjunto de práticas sociais e culturais que são determinantes para a constituição de uma cultura matemática mobilizada por uma comunidade. De acordo com nossa interpretação, a cultura matemática está relacionada à maneira como a Matemática – o objeto cultural mobilizado – é concebida e praticada em um determinado grupo. Ao considerarmos as práticas de mobilização de cultura matemática, a Matemática deixa de ser apenas um corpo homogêneo de conhecimento e atinge uma dimensão plural, que considera a atividade humana em um conjunto de práticas sociais nas quais estão inseridos diversos atores – alunos, professores, matemáticos e todos que estão envolvidos nessa atividade (MIGUEL, VILELA, 2008). Sob essa ótica, o conjunto de juízos de valor dos sujeitos desta pesquisa, mobilizados no contexto de realização da disciplina de Análise na qual a investigação foi desenvolvida, permitiu a observação de determinadas características da cultura matemática descrita pelos participantes.

Desse modo, conduzimos a análise de dados a partir de dois eixos: (1) observação de aspectos discursivos e (2) práticas culturais e meta-reflexões sobre cultura matemática. Os aspectos discursivos emergentes dos dados – hierarquia, critérios de legitimação e saberes docentes – fundaram a reflexão sobre as práticas culturais destacadas no segundo eixo de análise – cultura matemática, identidade cultural e meta-reflexões sobre cultura matemática. Destacamos, entretanto, que as categorias de análise apresentadas não são fixas ou disjuntas. Ao contrário, como concebemos que a atividade matemática é desenvolvida a partir de uma dimensão dinâmica e participativa, um mesmo episódio pode manifestar diferentes aspectos discutidos na análise dos dados. Embora tenhamos apresentado essas categorias separadamente, devido à estrutura do texto, consideramos que esses aspectos estão inerentemente imbricados e emergem da mobilização de uma cultura matemática na mesma medida que contribuem para formá-la.

A observação dos aspectos discursivos dos participantes revelou que eles apresentaram uma percepção hierárquica sobre a Matemática, concebida a partir de sua perspectiva formal, na qual a Matemática Acadêmica é enaltecida em detrimento da Matemática Escolar – que tem paralelos com a percepção hierárquica entre Matemática Elementar e Matemática Superior denunciada por Klein (2004). Os resultados que emergem dos dados revelam, ainda, que essa hierarquia, norteada pela concepção formalista da matemática, influencia diretamente os critérios estabelecidos pelos licenciandos para legitimar uma argumentação matemática. Identificamos, em nossa análise, que os participantes *reconhecem* a importância de aspectos intuitivos ou menos formais para o entendimento pessoal, porém, tendem a *desqualificar* uma argumentação que utilize esses aspectos. Os dados evidenciaram, portanto, que a visão formalista dos sujeitos desta pesquisa sobre a natureza da Matemática influencia os aspectos que eles valorizam em uma solução, levando-os a não legitimar argumentações que sejam, segundo seu julgamento, informais, pouco rigorosas ou que fogem à escrita simbólica e ao sequenciamento lógico.

Os resultados apontaram, também, que a construção de determinados saberes docentes dos participantes esteve articulada à percepção hierárquica identificada e aos critérios utilizados pelos licenciandos para legitimar uma argumentação matemática. Como exemplo, citamos o episódio no qual o participante Alexandre deixa de considerar a possibilidade de existência de zeros irracionais, na solução do aluno fictício Carlos, induzido pela escrita algébrica e simbólica de sua argumentação. Fica evidente, neste episódio, que a concepção formalista do participante sobre a Matemática, caracterizada pela valorização da forma de uma argumentação em detrimento de seu conteúdo, manifestou-se na construção de um saber específico do professor de Matemática ao avaliar a solução de um aluno da Educação Básica, reconhecido nos trabalhos de Shulman (1986) e Ball, Thames e Phelps (2008).

A identificação dos aspectos discursivos apontados anteriormente – percepção hierárquica sobre a Matemática, critérios de legitimação sobre uma argumentação matemática e construção dos saberes docentes para o ensino – permitiu descrevermos características emergentes de uma prática cultural mobilizada pelos sujeitos desta pesquisa, identificando uma cultura matemática articulada à percepção hierárquica que valoriza o rigor da

Matemática Acadêmica e influencia os critérios de legitimação dos licenciandos sobre uma argumentação matemática. Os resultados decorrentes da análise das práticas de mobilização da cultura matemática – baseado em Miguel e Vilela (2008) – emergente dos dados evidenciaram que os participantes procuram reproduzir o fazer matemático que caracteriza a cultura identificada, na tentativa de replicar uma argumentação baseada no rigor e no formalismo matemático. Em nossa análise, interpretamos esse resultado como um movimento do licenciando em busca de uma *identidade cultural* que o permita reconhecer seu pertencimento ao grupo de matemáticos imersos nessa cultura.

Em diversos momentos, os participantes idealizaram uma percepção hierárquica que tem paralelos com aquela identificada anteriormente e denunciada por Klein (2004). Por sua vez, a hierarquia imposta pelos sujeitos não se referia, apenas, ao conhecimento matemático, mas era, também, atribuída às figuras do professor da universidade – rotulado como "professor doutor" – e do professor da escola básica. No cenário idealizado, posicionar-se nessa hierarquia como aluno da Licenciatura ou futuro professor da Educação Básica passava por construir uma *identidade cultural* que possibilitasse ao licenciando reconhecer-se em meio a essa cultura matemática. Nesse contexto, os resultados indicaram que os participantes responsabilizavam-se quando não se reconheciam no topo da hierarquia idealizada como, por exemplo, quando não conseguiam concluir determinada tarefa ou ao declararem algum insucesso durante a disciplina de Análise. Por esses motivos, consideramos que a hierarquia idealizada esteve diretamente relacionada à percepção hierárquica destacada por Klein (2004), porém transcendia a percepção estanque entre Matemática Superior e Matemática Elementar.

Já ao observar as meta-reflexões dos participantes sobre essa cultura matemática, no contexto de sua própria formação docente ou em expectativas sobre a futura prática, verificamos um paradoxo entre as discussões promovidas pelos licenciandos e os aspectos que eles valorizam e tentam reproduzir quando engajados na atividade matemática. Por exemplo, apesar de criticarem a maneira procedimental como a Matemática é apresentada na Educação Básica, os sujeitos investigados reproduzem, na Licenciatura, uma Matemática que privilegia o sequenciamento lógico-matemático em detrimento da reflexão conceitual sobre os conteúdos. Nesse sentido, a cultura matemática que identificamos é tão latente que os licenciandos não percebem que valorizam, como alunos e em reflexões sobre a futura prática, aqueles mesmos aspectos da Matemática que estão criticando.

Os resultados emergentes dos dados permitiram, portanto, responder à questão que motivou esta pesquisa, ao observarmos, nos aspectos discursivos dos participantes, uma percepção hierárquica sobre a natureza da Matemática que influenciou seus critérios de validade sobre uma argumentação e esteve relacionada à construção de seus saberes docentes para o ensino. Além desses resultados, os aspectos discursivos dos participantes – hierarquia, critérios de legitimação e saberes docentes – revelaram uma cultura matemática, mobilizada pelos sujeitos desta pesquisa, que esteve articulada à percepção hierárquica identificada e que motivou meta-reflexões sobre essa cultura na formação inicial do professor de Matemática e em suas expectativas sobre a futura prática docente.

Entretanto, é preciso destacar determinadas variáveis da pesquisa que se colocam como possíveis limitações desta investigação. Em determinados momentos, não fica evidente se os participantes se reconhecem como professores em formação ou se seus discursos estão situados apenas no contexto de um aluno de uma disciplina de Análise que poderia estar inserida em outro curso de graduação. Por exemplo, algumas falas nas quais os licenciandos se referem ao professor de Matemática como "matemático" suscitam dúvidas sobre como eles percebem a figura do profissional docente. Esse termo estaria relacionado à compreensão da figura do professor de Matemática como um "matemático" que ministra aulas ou, na disciplina de Análise, eles visualizam-se como "matemáticos" em formação e sequer se recordam que estão sendo formados como professores de Matemática?

Nesse sentido, uma das limitações desta investigação está relacionada à consideração do discurso dos participantes Alexandre e Rodrigo, que cursavam, simultaneamente, Licenciatura e Bacharelado em Matemática. Temos clareza que determinadas respostas desses participantes são compreensíveis se interpretadas no contexto de suas formações como alunos de Bacharelado. Mesmo reconhecendo essa variável da pesquisa e uma possível limitação na análise de seus discursos, questionamos se as percepções desses sujeitos não deveriam também refletir o reconhecimento de suas formações como professores de Matemática, uma vez que a disciplina de Análise em questão era ministrada, ao mesmo tempo, para alunos de Licenciatura e Bacharelado. Dessa maneira, entendemos que a busca pela *identidade cultural* manifestada pelos participantes neste trabalho reflete, em determinados momentos, a desqualificação do professor como profissional, ao associarem a construção dessa identidade à figura de um "matemático" pesquisador e não reconhecerem-se como professores em formação.

6.2 Perspectivas Futuras

Consideramos que a cultura matemática observada no discurso dos sujeitos desta pesquisa e as meta-reflexões dos participantes sobre essa cultura, no contexto de suas formações docentes, nos fornecem excelentes subsídios para problematizarmos modelos e referências para a formação inicial de professores de Matemática e discutirmos o ensino de Matemática no ensino superior e na Educação Básica. Em nosso entendimento, os resultados emergentes dos dados ilustram que a valorização desviada do rigor matemático e da estética de uma argumentação leva o licenciando a desconsiderar ideias matemáticas potencialmente valiosas. De acordo com nosso ponto de vista, a visão sobre a natureza da Matemática identificada no discurso dos participantes apresenta uma perspectiva limitada da Matemática que pode interferir na construção de seus saberes docentes com vistas ao ensino, assim como na compreensão da própria Matemática como ciência.

Os desdobramentos dos resultados apresentados na seção anterior nos levam a questionar até que ponto a cultura matemática identificada está contribuindo para a formação de futuros professores de Matemática e como ela pode estar relacionada à futura prática docente desses licenciandos. Consideramos que o objetivo das disciplinas de conteúdo matemático na formação docente não é apenas apresentar o rigor e o formalismo matemático ao licenciando, mas propor reflexões conceituais sobre seu conteúdo com um olhar específico voltado à futura prática do professor de Matemática. Questionamos, entretanto, se esses objetivos estão sendo atingidos na Licenciatura em Matemática, ou ainda, se os licenciandos os reconhecem em meio à cultura matemática que identificamos.

No posicionamento adotado nesta pesquisa, o conhecimento matemático não se resume somente à concepção formalista. Consideramos que a valorização do formalismo matemático privilegia apenas um aspecto da natureza da Matemática e não a diversidade de seus processos de produção. Entendemos que produzir matemática envolve reflexão sobre os significados dos procedimentos adotados, engajamento em situações e contextos diversos e, sobretudo, troca de experiências com o mundo em sua volta. Por essa razão, concebemos que a atividade matemática se desenvolve a partir da dimensão participativa e transformadora dos sujeitos envolvidos, estando inserida em um contexto de interações sociais e culturais que dialogam com a formação de suas percepções sobre a Matemática. Nesse cenário, o conhecimento de conteúdo do professor de Matemática é dinâmico e emergente – conforme destacado por Davis e Renert (2012) – e também não pode ser dissociado do contexto das práticas sociais e culturais que se constituem ao longo da formação docente.

Dessa maneira, questionamos a predominância de uma concepção formalista nas disciplinas de conteúdo matemático na Licenciatura que privilegia, fundamentalmente, um modelo de exposição restrito à estrutura definição-teorema-demonstração. Em geral, essa forma de apresentação se opõe aos objetivos do ensino de Matemática ao não reconhecer o sujeito como protagonista na produção de seu conhecimento e ao ignorar a atividade matemática como uma prática social. Deixamos claro, porém, que nossa crítica não propõe a desvalorização do rigor matemático ou alguma simplificação do conteúdo apresentado no currículo da Licenciatura. Essa forma de exposição da Matemática não representa, necessariamente, o único modo de ensinar matemática e, tampouco, a melhor maneira de valorizar o próprio rigor.

Ao contrário, entendemos que a reflexão conceitual problematizada sobre os fundamentos da matemática formal representa uma maneira de colocar em evidência seu conteúdo e de valorizar o próprio rigor, seu papel e sua necessidade. Rigor, neste caso, não deve ser associado apenas à reprodução de uma argumentação lógica e simbólica, até mesmo porque, historicamente, os padrões de rigor matemático não são imutáveis. Pensar matematicamente não significa, somente, processar sequências lógicas ou entender o rigor matemático e, tampouco, fugir desse discurso significa enfraquecer a Matemática. Em muitos casos, a apresentação da Matemática, especialmente no ensino superior, se reduz à descrição da forma como sua estrutura lógica está constituída. Os resultados desta pesquisa sugerem que a predominância desse modelo de apresentação pode não ser tão produtiva para o ensino, para o desenvolvimento de ideias matemáticas, assim como para a construção de saberes docentes.

Nesse sentido, repensar o modelo de apresentação dos conteúdos no ensino superior de Matemática não representa seu enfraquecimento. Consideramos que a simples apresentação da matemática formal ao licenciando não contempla a diversidade necessária ao conhecimento do professor para o ensino. A formação docente em Matemática não deve contemplar a reprodução pura e simples do conteúdo acadêmico *per se*, em sua perspectiva formal, sem propor reflexões sobre como aquele conteúdo se articula com os saberes docentes. A construção dos saberes docentes na Licenciatura deve se desenvolver mediante um olhar específico sobre o conhecimento de conteúdo voltado, essencialmente, à prática docente. Sob essa perspectiva, o ensino de conceitos matemáticos acadêmicos deve objetivar o desenvolvimento de um saber especializado do professor que amplie sua visão sobre o conteúdo que ensina.

Os desdobramentos desta pesquisa nos levam a questionar se esses objetivos estão sendo atingidos em meio à cultura matemática que identificamos. A falta de articulação entre universidade e escola na Licenciatura, reforçada ainda pela percepção hierárquica que valoriza a Matemática Acadêmica em detrimento da Matemática Elementar – apontada por Klein (2004) como um obstáculo a ser vencido na formação do professor –, está contribuindo para a construção dos saberes matemáticos para o ensino? Quais as implicações dessa cultura matemática na futura prática docente dos sujeitos desta pesquisa? A maneira como esses participantes irão apresentar a Matemática aos alunos da Educação Básica, na futura atividade docente, será influenciada por suas percepções sobre a natureza da Matemática?

Consideramos que os desdobramentos dos resultados deste trabalho apontam para novas investigações que visem responder estas perguntas ou outras possíveis questões de pesquisa. Embora não tenhamos observado a prática docente dos sujeitos desta investigação, sugerimos, como perspectivas futuras para outras pesquisas, observar os aspectos da cultura matemática mobilizada na Educação Básica e investigar a relação entre os resultados obtidos nesta investigação e o modo como os professores apresentam a Matemática aos alunos do ensino básico. Considerando que no curso de Licenciatura, além da exposição do conteúdo que compõem o currículo, é apresentada também ao aluno uma visão sobre a natureza da Matemática, inferimos que a cultura matemática identificada nesta pesquisa pode também influenciar a futura atuação docente desses licenciandos. Algumas reflexões dos participantes relacionadas a suas expectativas sobre a futura prática docente sugerem que sua percepção hierárquica sobre a Matemática pode servir de referência para um prática intencionada como professores de Matemática na escola.

Portanto, como os resultados desta pesquisa evidenciaram que as práticas de mobilização da cultura matemática identificada – fundamentado em Miguel e Vilela (2008) – podem interferir na construção dos saberes matemáticos dos licenciandos para o ensino, inferimos que essa cultura matemática pode determinar a produção de uma matemática cultural na escola – no sentido apontado com Davis e Renert (2014) –, associada ao modo como o professor vai estabelecer esse paradigma sobre a natureza da Matemática na Educação Básica. Ressaltamos, porém, que este trabalho permite apenas apontar essa conjectura. Para comprovar tal afirmação, são necessárias outras investigações que observem a prática do professor de Matemática da Educação Básica e a visão sobre a natureza da Matemática mobilizada por alunos e professores na escola.

Destacamos ainda que, a partir de seu caráter formativo, a escola contribui para tornar os conceitos matemáticos mais bem compreendidos, isto é, colabora para torná-los elementares, no sentido de Klein (2004). Reconhecendo a escola como espaço de produção de conhecimento, a partir do processo de elementarização da Matemática descrito por Klein (2004), a reprodução dessa cultura matemática na Educação Básica pode direcionar, de certa forma, os rumos da Matemática como ciência. Por esse motivo, consideramos que este trabalho aponta para uma discussão crucial sobre o atual modelo de formação inicial de professores de Matemática na Licenciatura, a relação entre a cultura matemática da escola e da universidade e o reconhecimento da escola como espaço de produção de conhecimento. As reflexões apresentadas nesta pesquisa, portanto, evidenciam a necessidade de um debate sobre qual matemática deve estar presente na formação inicial do professor de Matemática e como ela se articula com sua futura prática, na tentativa de promover a integração dos saberes docentes de conteúdo na Licenciatura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALL, D; THAMES, M. H.; PHELPS, G. *Content knowledge for teaching: What makes it special?* Journal of Teacher Education, 59 (5), 389-407, 2008.

BICUDO, I. *Análise não-standard*. Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), n. 8, p. 60-67, 1992.

BIZA, I., NARDI, E., ZACHARIADES, T. *Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts*. Journal of Mathematics Teacher Education, 10(4-6), 301-309, 2007.

BIZA, I., NARDI, E., ZACHARIADES, T. *Teacher beliefs and the didactic contract on visualisation*. For the Learning of Mathematics, 29(3), 31–36, 2009.

DAVIS, B.; RENERT, M. *Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teacher's disciplinary knowledge. Educational Studies in Mathematics*, 29(3), 37-43, 2012.

DAVIS, B; RENERT, M. *Mathematics for teaching as shared, dynamics participation. For the Learning of Mathematics*, 29(3), 37-43 (Special Issue, guest edited by J. Adler & D. Ball), 2009.

DAVIS, B; RENERT, M. *The Math Teachers Know: Profound Understanding of Emergent Mathematics*. USA: Routledge, 2014.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A experiência matemática*. 2ª edição. Tradução: Fernando Miguel Louro e Ruy Miguel Ribeiro. Lisboa: Gradiva, 2013.

DESCARTES, R. *Discurso do método*. Tradução Maria E. G. Pereira, São Paulo: Martins Fontes, 2001.

FIORENTINI, D. *Alguns Modos e ver e conceber o ensino da matemática no Brasil*. In: Zetetiké, ano 3, nº. 4, p.1-37, 1995.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. *O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?* Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 917-938, dez, 2013.

GEERTZ, C. *A interpretação das culturas*. Rio de Janeiro: LTC, 323 p, 1989.

KILPATRICK, J. *A Higher Standpoint*. Proceedings ICME 11, Disponível em: http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/About_ICMI/Publications_about_ICMI/ICME_11/Kilpatrick.pdf – Acesso em janeiro de 2016, 2008.

KILPATRICK, J. *Fincando estacas: Uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico*. Tradução de Rosana G. S. Miskulin, Cármen Lúcia B. Passos, Regina C. Grando e Elisabeth A. Araújo. Zetetiké, Campinas, v.4, n.5, p. 99-120, jan./ jun. 1996.

KLEIN, F. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Aritmetics, Algebra, Analysis*. USA: Dover, 2004.

MELGAREJO, L.M.V. *Sobre el concepto de percepción*. Alteridades 4(8): p. 47- 53. México, 1994.

MIGUEL, A.; VILELA, D. S. *Práticas escolares de mobilização de cultura matemática*. Cadernos CEDES, Campinas, v. 28, n. 74, p. 97-120, abr. 2008.

MOMETTI, A. L. *Reflexão sobre a Prática: Argumento e Metáforas no Discurso de um Grupo de Professores de Cálculo*. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

MOREIRA, P. C. *3+1 e suas (In)Variantes: Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática*. Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, pp. 1137-1150, dez, 2012.

MOREIRA, P. C. M.; CURY, H. N. ; VIANNA, C. R. *Por que análise real na Licenciatura?* Zetetiké, v.13, n.23, p.11-42, jan./jun. 2005.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, A. C. *O Lugar da Matemática na Licenciatura em Matemática. Bolema*, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, pp. 981-1005, dez, 2013.

NARDI, E., BIZA, I. ZACHARIADES, T. *'Warrant' revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation*. Educational Studies in Mathematics, 79(2), 157–173, 2012.

PINTO, M.; TALL, D. '*Student construction of formal theories: Giving and extracting meaning*', in O. Zaslavsky (ed.) Proceedings of the 23rd Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, 281–288, Haifa, 1999.

PONTE, J. P. *Tarefas no Ensino e na Aprendizagem da Matemática*. In PONTE, J. P. (Org.), Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. pp. 13–27. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014

POWELL, A. B; FRANCISCO, J.M; MAHER, C. A. *Uma abordagem à Análise dos Dados de Vídeo para investigar o Desenvolvimento de Idéias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes*, Bolema, Ano 17, n. 21, p. 81 a 140, 2004.

RANGEL, L. *Teoria de Sistemas – Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo – Estabelecendo Relações em um Estudo Colaborativo*. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

REIS, F. S.. *A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise*. 2001. 302f. Tese (Doutorado), UNICAMP, Campinas, 2001.

RIPOLI, C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V. *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica*. Vol. 2 Números Inteiros. SBM. Rio de Janeiro, 2016.

ROSCH, E. A. *Reclaiming concepts*. Journal of Consciouness Studies, v.6, n.11/12, p.61-77, 1999.

SCHUBRING, G. *A Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Felix Klein e a sua Atualidade*. In ROQUE, T; GIRALDO, V. (Eds.), O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Cap.2 – pp. 39–54. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

SHULMAN, L. *Knowledge and teaching: foundations of the new reform*. Havard Educational Review, 1997, v. 57, pp. 1–22, 1986.

SHULMAN, L. *Those who understand: Knowledge growth in teaching*. Educational Researcher, Vol.15, pp. 4-14, 1986.

TALL, D.; VINNER, S. *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity*, *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, vol. 3, n. 12, p. 151-169, 1981.

WEBER, K. *Traditional Instruction in Advanced Mathematics Courses : a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course*. The Journal of Mathematical Behavior, Amsterdã, v. 23, n. 2, p. 115 - 133, Apr. 2004.

WEBER, K.; ALCOCK, L.J. *Semantic and Syntatic Proof Productions*. Educational Studies in Mathematical, Dordrecht, v. 56, n. 2-3, p. 209 - 234, July. 2004.

ANEXOS

ANEXO I - Questionário

Questionário

1. Você está cursando Licenciatura ou Bacharelado?

2. Em qual ano/período você ingressou na graduação?

3. Você está cursando a disciplina de Análise pela primeira vez? Caso não seja a primeira vez, quantas vezes já cursou a disciplina?

4. Você já exerce (ou exerceu) algum trabalho como professor dando aulas no ensino básico (Fundamental ou Médio)? Em caso afirmativo, detalhe por quanto tempo exerce (ou exerceu) essa experiência.

5. Pretende seguir carreira docente? Quais motivos te levam a tomar essa decisão?

6. Você considera a disciplina de Análise relevante para a sua formação como professor? Desenvolva seu ponto de vista.

7. Quais dificuldades você tem encontrado na disciplina de Análise?

ANEXO II - Tarefas

<u>Tarefa 1</u> – Em uma avaliação aplicada no Ensino Médio, o aluno deveria resolver a seguinte questão:

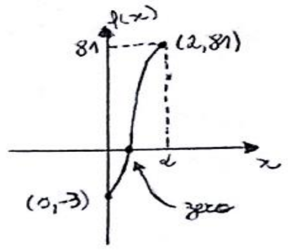
Dada a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 9x - 3; & x < 1 \\ x^6 + x^4 + 1; & x \geq 1 \end{cases}$, é correto afirmar que:

a) f possui pelo menos um zero no intervalo $]0, 2[$?
b) f possui exatamente um zero no intervalo $]-2, 0[$?

Dois alunos responderam da seguinte maneira:

Solução de Ana

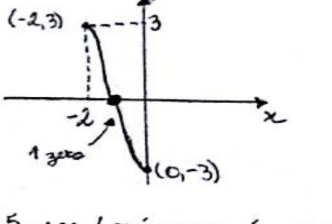
a) $f(0) = -3$
$f(2) = 2^6 + 2^4 + 1 = 81$
Como $f(0) = -3$ é negativo e $f(2) = 81$ é positivo, o gráfico da função f irá cortar o eixo x para ligar os pontos $(0, -3)$ e $(2, 81)$.



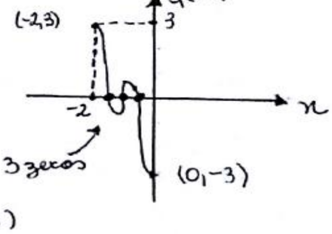
Assim, f terá pelo menos um zero em $]0, 2[$

b) Assim, como foi feito no item anterior, temos
$f(0) = -3$
$f(-2) = 2.(-2)^4 + 3.(-2)^3 - 5.(-2)^2 - 9.(-2) - 3 = 3$

Como $f(0) = -3$ é negativo e $f(-2) = 3$ é positivo, o gráfico de f irá cortar o eixo x para ligar os pontos $(0, -3)$ e $(-2, 3)$.
Mas, não podemos afirmar que f, possui exatamente um zero em $]-2, 0[$, pois o gráfico da função pode cortar o eixo x mais de uma vez para ligar os pontos $(0, -3)$ e $(-2, 3)$.
Só podemos afirmar, com certeza, que o gráfico corta o eixo x em uma quantidade ímpar de vezes para ligar estes pontos.



ou



ou . . .

1, 3, 5, . . . (número ímpar de zeros)

Então, f possui pelo menos um zero em $]-2, 0[$ e a quantidade de zeros é ímpar nesse intervalo

Solução de Carlos

a) • caso $x \geq 1$, temos que $x^6, x^4 \geq 1$. Logo, $f(x) \geq 3a$, portanto, f não possui zero em $[1,2[$.

• caso $0 < x < 1$, temos que encontrar as raízes do polinômio $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 9x - 3$.

$a = \pm 1; \pm 3$ são os divisores de $a_0 = -3$

$b = \pm 1; \pm 2$ são os divisores de $a_4 = 2$

As possíveis raízes reais do polinômio são da forma $\frac{a}{b}$.

Candidatos a raízes: $\pm 1; \pm 3; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}$.

De todos os candidatos, apenas -1 e $-\frac{1}{2}$ são raízes do polinômio, pois $p(-1) = p(-\frac{1}{2}) = 0$. Logo, f também não possui zero em $]0,1[$.

Assim, f não possui zero em $]0,2[$.

b) como vimos no item a), -1 e $-\frac{1}{2}$ são os zeros da função para $x < 1$.

Assim, f possui exatamente dois zeros em $]-2,0[$.

<u>**Questões**</u>

I) Resolva o exercício que foi proposto.

II) Em sua opinião, qual o objetivo do exercício acima?

III) Analise as soluções dos alunos, fazendo comentários sobre os argumentos apresentados por eles em suas respostas.

IV) Qual o retorno que você daria aos alunos de acordo com as soluções apresentadas para o exercício?

V) Você identifica alguma relação entre esta tarefa (incluindo as soluções apresentadas) e o conteúdo de Análise? Em caso afirmativo, cite exemplos de associações que podem ser feitas.

Tarefa 2

Classifique em Verdadeiro (V) ou Falso (F) as afirmações abaixo, justificando suas respostas.

a) Seja $f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função descontínua em algum $x_0 \in [-1, 1]$. Se $f(-1) < 0 < f(1)$, então existe $c \in]-1, 1[$ tal que $f(c) = 0$.

b) Seja $f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função descontínua em algum $x_0 \in [-1, 1]$. Se $f(-1) < 0 < f(1)$, então não existe $c \in]-1, 1[$ tal que $f(c) = 0$.

c) Seja $f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(-1) < 0 < f(1)$, então existe $c \in]-1, 1[$ tal que $f(c) = 0$.

d) Seja $f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(-1) < 0 < f(1)$, então existe um único $c \in]-1, 1[$ tal que $f(c) = 0$.

e) Seja $f: \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(-1) < 0 < f(1)$, então existe $c \in \left]-1, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right[$ tal que $f(c) = 0$.

<u>Tarefa 3</u> – (Teorema do Valor Intermediário) Seja $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < k < f(b)$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = k$.

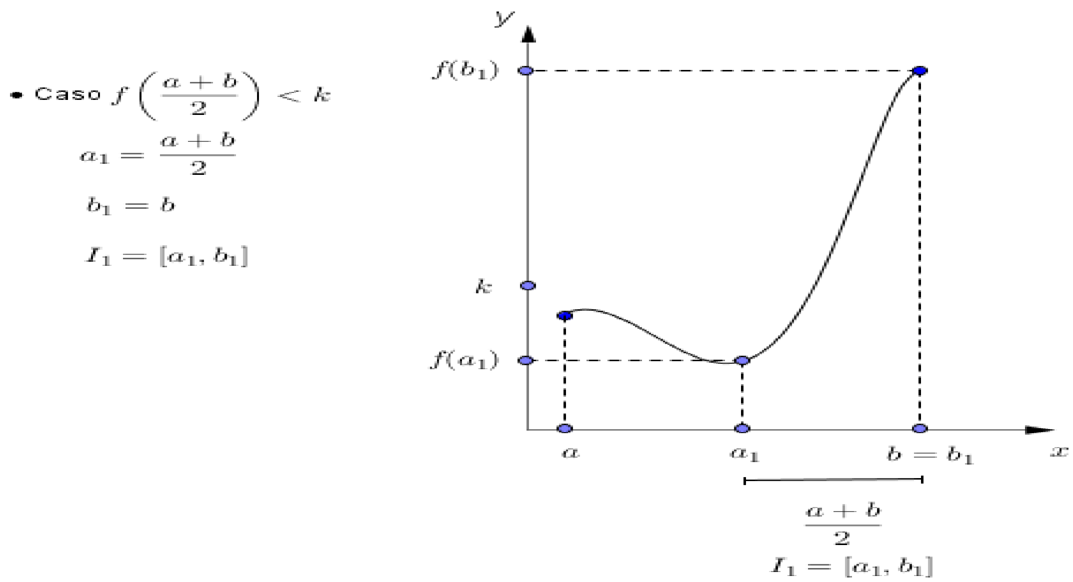
Dois alunos de um curso de Análise demonstraram o teorema da seguinte maneira:

Demonstração de Pedro: Seja $A = \{x \in [a,b]; f(x) \leq k\}$. O conjunto A é não vazio (pois $a \in A$) e limitado superiormente (b é cota superior de A, uma vez que $b \notin A$). Logo, existe $c = \sup A$.

Assim, existe uma sequencia $(x_n) \subset A$ tal que $\lim x_n = c$. Como f é contínua, temos que $\lim f(x_n) = f(c)$. Segue, também, que $f(x_n) \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que $(x_n) \subset A$. Portanto, $f(c) \leq k$ e, consequentemente, $c < b$.

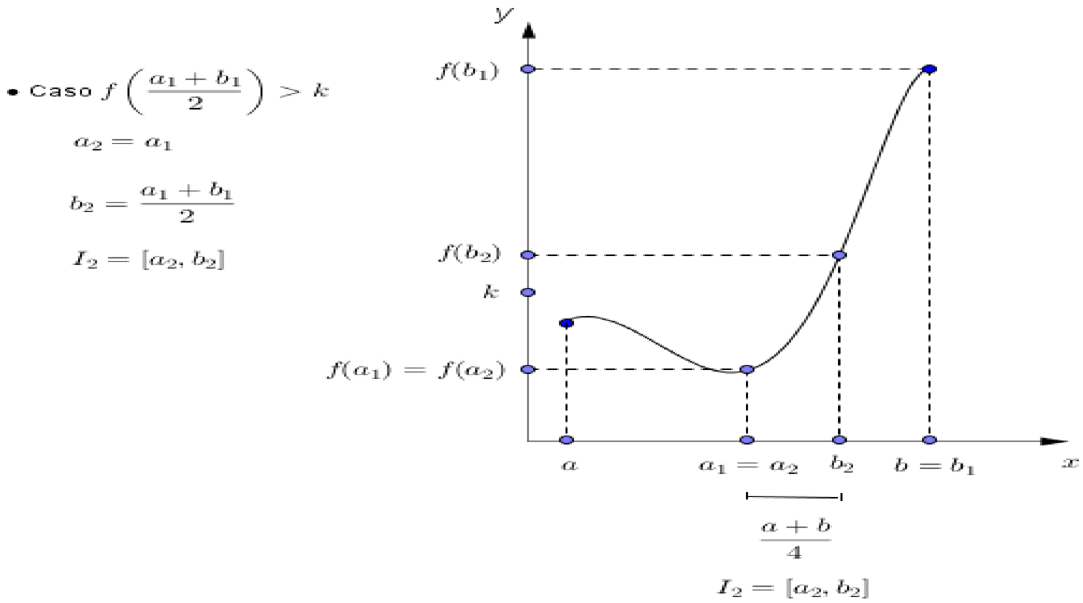
Provemos, agora, que $f(c) = k$. Suponha, por absurdo, que $f(c) < k$. Como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in [a,b]$ e $|x - c| < \delta$ temos $f(x) < k$. Logo, existe $x \in [a,b]$ com $c < x < c + \delta$ tal que $f(x) < k$. Portanto, $x \in A$ e $x > c = \sup A$. Porém, isso representaria uma contradição, pois existiria um elemento do conjunto A maior que o supremo. Então, $f(c) = k$.

Demonstração de Júlia: Dividimos o intervalo $[a,b]$ ao meio, obtendo dois novos intervalos da seguinte maneira: caso $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = k$, o teorema está provado; caso $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < k$, então tome $a_1 = \frac{a+b}{2}$ e $b_1 = b$; caso $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > k$, considere $a_1 = a$ e $b_1 = \frac{a+b}{2}$.



Logo, obtemos um novo intervalo $I_1 = [a_1, b_1] \subset [a,b]$ de comprimento $\frac{a+b}{2}$ tal que $f(a_1) \leq k \leq f(b_1)$.

Novamente, dividimos I_1 ao meio e repetimos o processo analisando $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$. Desta forma, determinamos um intervalo $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1 \subset [a, b]$ com comprimento $\frac{a+b}{4}$.



Prosseguindo desta maneira sucessivamente, obtemos uma sequência de intervalos encaixados $[a, b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, onde $I_n = [a_n, b_n]$ tem comprimento $\frac{a+b}{2^n}$.

Portanto, pelo teorema dos intervalos encaixados, existe $c \in \bigcap I_n$. Como o comprimento dos intervalos tende à zero, esta intersecção se reduz exclusivamente ao valor c. Temos ainda que $c = \lim a_n = \lim b_n$.

Assim, como f é contínua em c e $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$, temos que $f(c) = \lim f(a_n) \leq k \leq \lim f(b_n) = f(c)$. Logo, $f(c) = k$.

<u>Questões</u>

I) Você considera corretas as duas demonstrações apresentadas? Discuta a validade das demonstrações analisando os argumentos apresentados.

II) Qual o retorno que você daria aos alunos de acordo com as demonstrações apresentadas para o Teorema do Valor Intermediário?

III) Em sua opinião, qual das duas demonstrações permite compreender melhor os argumentos utilizados? Justifique sua resposta.

IV) Em sua opinião, qual das duas demonstrações permite compreender melhor o significado do enunciado do teorema? Justifique sua resposta.

ANEXO III – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Pesquisa: A Articulação entre Intuição, Formalização e Rigor na Formação do Professor: um Estudo a partir de Provas Sintáticas e Semânticas em um Curso de Análise Real.

Prezado(a)____,

Este termo de consentimento livre e esclarecido tem o objetivo de apresentar todos os procedimentos que serão realizados durante a pesquisa "A Articulação entre Intuição, Formalização e Rigor na Formação do Professor: um Estudo a partir de Provas Sintáticas e Semânticas em um Curso de Análise Real"

(1) Investigar como o licenciando relaciona um teorema de Análise com a Educação Básica, a partir da interação de aspectos que emergem em suas argumentações e provas, durante o curso de Análise, com questões presentes no ensino básico;

(2) Verificar se a articulação (ou ausência dela) entre o conteúdo de Análise e o conteúdo de ensino básico está relacionada com seu entendimento sobre o enunciado do teorema;

(3) Verificar se alguns aspectos presentes em um curso de Análise como, por exemplo, intuição e rigor, influenciam a aprendizagem do licenciando na disciplina e, também, a maneira como refletem sobre questões relacionadas à Educação Básica.

Para a consolidação dos objetivos da pesquisa, será necessário visitar as instituições selecionadas, aplicar atividades para análise da solução escrita dos participantes e realizar uma entrevista com alguns dos licenciandos. É necessário esclarecer que:

1) Sua participação é voluntária.

2) Este termo de consentimento livre e esclarecido não tem prazo de validade estabelecido. Ele pode ser revogado por ambas as partes a qualquer momento.

3) A pesquisa não prevê nenhuma compensação financeira para os voluntários.

4) As informações prestadas nunca serão divulgadas em associação ao seu nome ou de sua família. Todas as análises levarão em consideração os dados agregados.

5) Os alunos menores de idade serão entrevistados caso concordem e sejam autorizados por seus pais.

6) Os alunos maiores de idade só serão entrevistados caso concordem.

7) Seu nome ou o nome de sua instituição nunca será apresentado em nenhuma publicação realizada pela equipe de pesquisa.

8) Seu endereço ou o de sua família nunca será apresentado em nenhuma publicação realizada pela equipe de pesquisa.

9)) Seu telefone ou o de sua família nunca será apresentado em nenhuma publicação realizada pela equipe de pesquisa.

10) Você pode, a qualquer momento, solicitar aos coordenadores quaisquer informações sobre o andamento do projeto.

11) O sigilo com relação aos dados é garantido. Nenhum dado pessoal será divulgado.

12) Sua participação não envolve riscos significativos. O único risco seria de divulgação indevida de dados, mas nossa equipe está preparada para armazenar os dados mantendo total sigilo.

Procedimentos de pesquisa:

Caso concorde em participar, uma pesquisadora que realizará atividades com você. As atividades poderão ser gravadas em mídia digital, caso você concorde. O pesquisador levará, no dia do encontro, todos os documentos que comprovem sua filiação ao projeto de pesquisa.

Formalização:

Eu, ______________________________________, declaro que fui devidamente informado de todos os procedimentos da pesquisa "A Articulação entre Intuição, Formalização e Rigor na Formação do Professor: um Estudo a partir de Provas Sintáticas e Semânticas em um Curso de Análise Real" e concordo em participar. Também informo que

(   ) permito (   ) não permito a utilização do gravador durante o encontro de pesquisa.

Rio de Janeiro___/________________/_____

____
Assinatura do voluntário

Eu Diego Matos Pinto, pesquisador associado ao projeto Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática - PEMAT**,** declaro que obtive este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido sem exercer qualquer forma de coerção sobre o voluntário.

Rio de Janeiro_____/________________/_____.

____
Assinatura do pesquisador

Victor Augusto Giraldo – Orientador
victor.giraldo@ufrj.br

Wellerson Quintaneiro da Silva – Coorientador
profmatwellerson@gmail.com

Diego Matos Pinto – Aluno pesquisador
diego_matos_p@hotmail.com

ANEXO IV – Respostas de Jorge para o Questionário

(1) Licenciatura

(2) 2010.1

(3) Não. 3º (3 vezes).

(4) Não.

(5) Sim. Porque a atividade de professor me atrai positivamente, também penso que é uma forma agradável de desenvolver alguma atividade após me aposentar.

(6) Sim. Acho que todo o professor precisa de segurança para fazer afirmações para seus alunos. Análise dá uma boa noção sobre a formação do conjunto dos reais, por exemplo. Isso permite que o professor não tenha dúvidas quando for ensinar sobre os inteiros, racionais e irracionais.

(7) Em "memorizar" todos os teoremas necessários em cada etapa e aplicá-los com o rigor exigido.

ANEXO V – Respostas de Jorge para a Tarefa 1

II) Que o aluno demonstre seus conhecimentos sobre polinômios.

III) Os alunos partiram de pontos de vista diferentes, fazendo abordagens não totalmente corretas.

Por exemplo, Carlos afirma que

"$x^6, x^4 \geqslant 1$, Logo, $f(x) \geqslant 3$", mas $x \in \mathbb{R}$, logo, pode assumir valores entre $]0, 1]$.

A solução de Ana me parece mais analítica, portanto, de mais fácil compreensão.

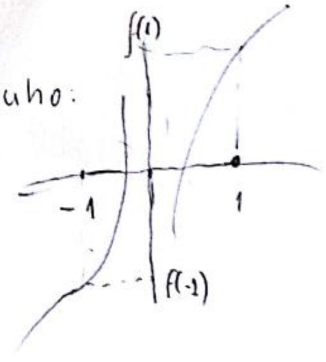
IV) Aproveitaria da melhor forma TUDO que os alunos escreveram, pois assim seria traçada uma linha de fronteira entre o conhecimento e o ñ conhecimento

V) O estudo de funções, também alguma coisa do estudo de números inteiros

ANEXO VI – Respostas de Jorge para a Tarefa 2

Tarefa 2

a) Rascunho:



$|f(x) - f(a)|$

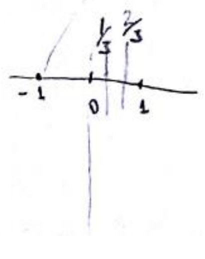
Falso se f é contínua, precisa ser contínua em todo o intervalo $[-1, 1]$, ocorre que pode existir um c tal que $f(c) = 0$.

b) Pelos mesmos motivos de a: se a função for definida para $f(c) = 0$, então ela seria contínua neste ponto

Falso

c) Verdadeiro A função é definida no intervalo $]-1, 1[$

d) Verdadeiro (definição de função)

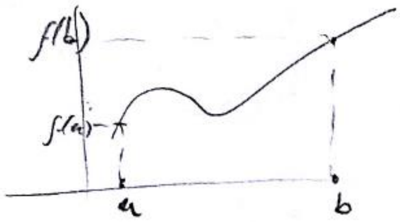
e) 

Verdadeiro

ANEXO VII – Respostas de Jorge para a Tarefa 3

TAREFA 3

I) demonstração Pedro



$c = b = \sup A$, pois $x \in [a, b]$

logo, c não é menor que b.

Demonstr. Júlia – correta.

II) Não tenho elementos suficientes para responder.

III) A segunda, pois visualmente (ou graficamente) explana melhor o teorema

IV) A segunda (Júlia) pelos motivos explicados no item III

ANEXO VIII – Respostas de Alexandre para o Questionário

Questionário

1. Você está cursando Licenciatura ou Bacharelado? ambas as graduações (Durinte)

2. Em qual ano/período você ingressou na graduação? 2012/2

3. Você está cursando a disciplina de Análise pela primeira vez? Caso não seja a primeira vez, quantas vezes já cursou a disciplina? Sim

4. Você já exerce (ou exerceu) algum trabalho como professor dando aulas no ensino básico (Fundamental ou Médio)? Em caso afirmativo, detalhe por quanto tempo exerce (ou exerceu) essa experiência. Tive o período de um ano no município, estava dentro de um projeto de reforço escolar.

5. Pretende seguir carreira docente? Quais motivos te levam a tomar essa decisão? Sim, a paixão pela disciplina, o querer propagar essa paixão. Escolhi ser professor de matemática por gostar da disciplina e por ter prazer em lecionar.

6. Você considera a disciplina de Análise relevante para a sua formação como professor? Desenvolva seu ponto de vista. Sim, ela nos leva a um senso crítico da disciplina, a um aprofundamento do conteúdo. É uma disciplina rigorosa, mas nos traz o entendimento da necessidade de estarmos um passo a frente de nossos alunos.

7. Quais dificuldades você tem encontrado na disciplina de Análise? O rigor da disciplina, com demonstrações por muitas das vezes extenças, muitas das vezes se torna uma grande dificuldade. Isso somado a defíces que são tragos do ensino básico, os quais aparecem frequêntemente como barreiras para a melhor aximilação do conteúdo.

ANEXO IX – Respostas de Alexandre para a Tarefa 1

$\boxed{\begin{array}{l} F(0)=-3 \\ F(2)=81 \end{array}}$ $F(x)\begin{cases} 2x^4+3x^3-5x^2-9x-3 \ ; \ x<1 \\ x^6+x^4+1 \ ; \ x\geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-}(2x^4+3x^3-5x^2-9x-3) = 2+3-5-9-3=-12$

$\lim_{x\to 1^+}(x^6+x^4+1) = 1+1+1=3$

$x^6+x^4+1 \geq 3$ (Sempre positivo)

Analisando o polinômio $2x^4+3x^3-5x^2-9x-3$ temos que as possíveis raízes serão da forma $\frac{p}{q}$, com $p|-3$ e $q|2$

Com isso $p=\pm 1$ ou $p=\pm 3$ e $q=\pm 1$ ou $q=\pm 2$

As possíveis raízes são:

$\pm 1 ; \pm \frac{1}{2} ; \pm 3 ; \pm \frac{3}{2}$ $\boxed{0<x<1}$ unico candidato $x=\frac{1}{2}$

$F(\frac{1}{2}) = 2\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{1}{8}-5\cdot\frac{1}{4}-\frac{9}{2}-3 = \frac{4}{8}-\frac{23}{4}-3 = \frac{4}{8}-\frac{35}{4} = \frac{2}{4}-\frac{35}{4} =$

$= -\frac{33}{4}$; Logo $\frac{1}{2}$ não é raiz.

Assim F não possui nenhum zero no intervalo $]0,2[$

Candidatos a testar $(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

$F(-1) = 2\cdot(-1)^4+3\cdot(-1)^3-5(-1)^2-9(-1)-3 = 2-3-5+9-3=0$

$F(-\frac{1}{2}) = 2\cdot\frac{1}{16}-3\cdot\frac{1}{8}-5\frac{1}{4}+\frac{9}{2}-3 = \frac{1}{8}-\frac{3}{8}-\frac{5}{4}+\frac{9}{2}-3 = -\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+\frac{18}{4}-\frac{12}{4} = \frac{0}{4} = 0$

$F(-\frac{3}{2}) = \frac{81}{8}-\frac{81}{8}-\frac{45}{4}+\frac{27}{2}-3 = -\frac{45}{4}+\frac{54}{4}-\frac{12}{4} = -\frac{57}{4}+\frac{54}{4} = -\frac{3}{4}$

Assim F possui exatamente dois zeros no intervalo de $]-2,0[$

Ana não levou em consideração a continuidade da função, ela considerou uma função que pode ser escrita sem tirar o lapis do papel, o que não é verdade

Já Carlos conseguiu concluir o exercício com exito pelo fato de ter observado a função detalhadamente analizando o que acontecia antes, depois e no ponto crítico da função dada

O objetivo do exercício acima é chamar a atenção dos diferentes tipos de funções, chamando a atenção para a questão da continuidade de funções e destacando que dependendo da função dada, pode haver "saltos" ou "furos" no seu respectivo gráfico

Após esse exercício é preciso chamar a atenção do aluno para um estudo mais detalhado do problema, antes de ataca-lo.
É preciso frisar também que em certas funções o estudo dos extremos pode não dizer muita coisa.

Existe muita relação entre essa questão e o curso de análise, a começar pelo fato de que o estudo de funções ser um dos carros chefes do curso, além disso, essa questão nos leva a pensar um pouco mais, a ter um senso crítico prévio antes de atacar o problema, método muito usado na resolução de exercícios do curso de análise.

ANEXO X – Respostas de Alexandre para a Tarefa 2

a) Falso

Um contraexemplo é a função

$$F(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x < 0 \\ 1, \text{ se } x \geq 0 \end{cases} ; -1 \leq x \leq 1$$

$F(-1) = -1 < 0$; $F(1) = 1 > 0$; Mas $\forall x \in [-1, 1]$

b) Falso

Um contraexempo é a função

$$F(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x < 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ 1, \text{ se } x > 0 \end{cases} ; -1 \leq x \leq 1$$

$F(-1) = -1 < 0$; $F(1) = 1 > 0$; Mas $F(0) = 0$

c) Verdadeiro

Seja $f(-1)=A; A<0$; $f(1)=B; B>0$ e f contínua

Dada f contínua, como $f(-1)=-A$, e $f(1)=B$; com $A, B>0$ temos que f cresce durante um intervalo sem "saltos" ou "furos" em seu gráfico, assim existe um valor c tal que $f(c)=0$

d) Falso

Um contraexemplo é a função

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}\left(x\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}$$

$$f(1)=\frac{3}{2}\cdot(1)=\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$f(0)=0$$

ANEXO XI – Respostas de Alexandre para a Tarefa 3

1) Sim, cada um dos alunos resolveu o teorema o abordando de maneira distinta o primeiro ultilizou o teorema de Bozano Weiertrss para provar que existia $c \in [a,b]$ tal que $f(c) \leq k$ e depois provou que $f(c) = k$ supondo $f(c) < k$ por absurdo. A aluna Júlia ultilizou um artificil de reduzir o intervalo de forma inteligente e com isso pode usar o teorema dos intervalos encaixados para resolver a questão.

2) Ambos foram muito bem na demonstração do teorema, mostrando conteúdo e dominio das ferramentas do curso de análise, mas para Julia deixaria uma ressalva, escolher melhor a sua estratégia de resolução, pensando também no examinador e leitor do que ela escreveu, por mais que uma solução esteja correta é preciso tornala compreensiva, esse é um dos papeis do bom professor.

3) O argumento do Pedro me pareceu mais claro, apesar de ambos terem trabalhado bem as suas demonstrações, ambas as demonstrações se preocuparam com o leitor das resoluções, tornando compreencivel a visão dos alunos em suas respectivas provas dos teoremas, entretanto a demonstração de Pedro me pareceu mais natural.

4) A demonstração de Pedro ganha muito da de Julia no que diz respeito a compreenção no significado do enunciado, a demonstração de Julia (apesar de correta) não da a enfase necessária ao enunciado do teorema e da a impressão de ter deixado a questão inicial para trás em um certo ponto, a abordagem de Pedro é muito mais efetiva

ANEXO XII – Respostas de Rodrigo para o Questionário

Respostas:

① Inicialmente os dois, porém agora abri a ramificação licenciatura.

② Primeiro semestre de 2012.

③ Não. Legalmente é a terceira, provavelmente não será a última.

④ Sim. Quando estudante universitário, Física Médica, dei aulas de Física e Matemática nos cursinhos pré vestibulares comunitários da Universidade durante os anos de 2005 e 2007. Em 2008 fui professor substituto na rede estadual de São Paulo, lecionando Matemática, Física, Química, Biologia, Filosofia, Língua Portuguesa e Desenho, além de eventualmente trocar lâmpadas, fazer café, etc... A jornada de trabalho era muito estressante na época. No ano de 2011 trabalhei numa agência de reforço escolar em Ipanema. A partir de 2013, comecei a trabalhar na agência de aulas particulares denominada Tutores onde me concentro nas disciplinas de Física e Matemática. Trabalho até hoje nessa agência.

⑤ Por ideal sim, mas não sei se pretendo ficar o resto da vida nesta área, pois infelizmente nem só de ideal vive o homem. Particularmente me interesso pela educação, pois a mesma é a base de todas as profissões.

ANEXO XIII – Respostas de Rodrigo para a Tarefa 1

(6) Claro que sim. Seria louco se afirmasse o contrário. A "Análise" é onde repousam as principais idéias matemáticas. Na matemática a parte mais importante são as idéias.

(7) A disciplina é naturalmente difícil, mas a minha principal dificuldade sem dúvida alguma é a falta de tempo para estudar como deveria.

(I) $f(x) = \begin{cases} 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 9x - 3, & se\ x < 1 \\ x^6 + x^4 + 1, & se\ x \geq 1 \end{cases}$

(a) $\dot{I}_1 =]0, 2[\qquad 1 \in \dot{I}$

$f(0) = -3 < 0 \quad \wedge \quad f(2) = 81 > 0$

$f(0) < 0 \wedge f(2) > 0$ (✱) "Devemos analisar a continuidade da função no ponto $x=1$."

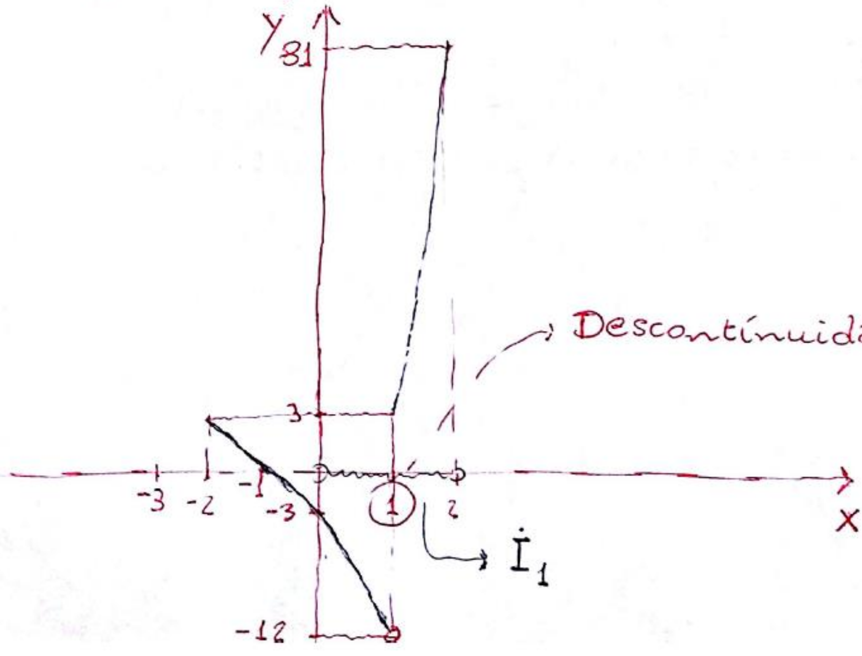
$\lim_{x \to 1_+} f(x) = 3 \quad \wedge \quad \lim_{x \to 1_-} f(x) = -12$

$\lim_{x \to 1_+} f(x) \neq \lim_{x \to 1_-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x)$, logo

$f(x)$ não é contínua no ponto $x = 1$, então não podemos desenvolver o raciocínio inicial, "Teorema de Bolzano", aplicado no início.

$f(x)$ não tem raíz no intervalo $\dot{I} =]0, 2[$.

O Gráfico de f é mais ou menos assim:



b) $I_2 =]-2; 0[$. A função f(x) possui exatamente 1 zero no intervalo I_2 e é $x = -1$.

(II) O exercício acima evidencia à importância de um assunto que foi cortado do ensino médio.

(III) As soluções não estão corretas, pois como os alunos não conhecem o assunto o erro vem naturalmente, note que nenhum deles se preocupou com a descontinuidade existente na função.

(IV) Diria para eles, que neste caso antes de fazer cálculos é prudente estudar o gráfico da função.

(V) Sim. A análise é, de grosso modo a formalização do cálculo! Como o cálculo foi abolido do ensino médio, erroneamente na minha opinião os alunos não tem tanta "culpa" pelo erro.

ANEXO XIV – Respostas de Rodrigo para a Tarefa 2

Ponto de Partida: Definição de Continuidade:

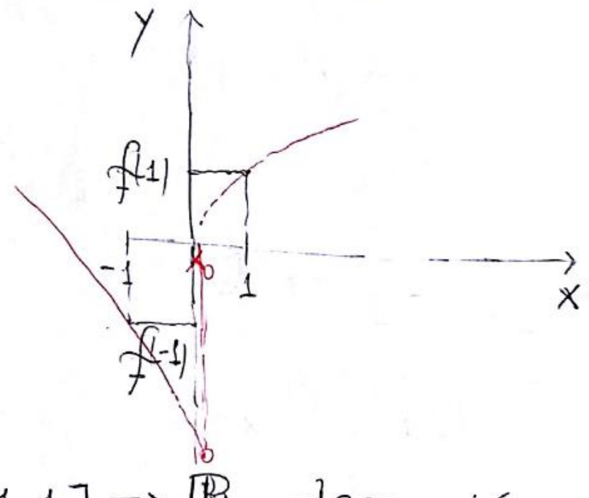
$f:(X \subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}: x \mapsto f(x)$

Seja $x, y \in X \wedge x \neq y$ f é contínua em $X \subseteq \mathbb{R}$ quando $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

ⓐ Falso

Justificativa Rudimentar:

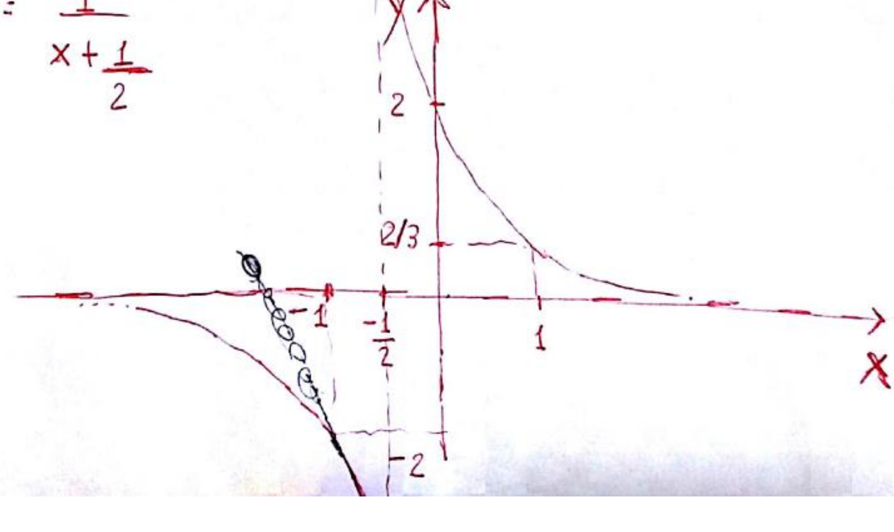
Não necessáriamente.



ⓑ $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ descontínua em $x_0 \in [-1, 1]$

Exemplo Rudimentar

$f(x) = \dfrac{1}{x + \frac{1}{2}}$



$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = -\infty \wedge \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = +\infty$

Se existe algum $x_0 \in [-1, 1]$ tal que $f(x)$ é descontínua em $x = x_0$, então certamente haverá assíntotas verticais nesse intervalo, mas não podemos necessáriamente afirmar que não exista $c \in [-1, 1]$ tq $f(c) = 0$.

ⓒ $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ Falso

Justificativa: Uma afirmação não necessáriamente ~~justifica~~ implica a outra.

ⓓ Pode existir mais de um c tq $f(c) = 0$.

ⓔ $f: \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \to \mathbb{R}$

Pode existir ou não, pois o domínio de f é um conjunto desconexo.

ANEXO XV – Respostas de Rodrigo para a Tarefa 3

① Rigorosâmente nenhuma das duas.

② Infelizmente, no presente momento não tenho condições de corrigir uma prova de Análise, mas em breve terei.

③ A demonstração da Júlia me agradou mais, pois usou o belo Teorema dos Intervalos Encaixantes.

④ A demonstração da Júlia.