Mauricio Alfredo Ayala de Carvalho

Um estudo do processo de argumentação por alunos cegos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MAURICIO ALFREDO AYALA DE CARVALHO

UM ESTUDO DO PROCESSO DE ARGUMENTAÇÃO POR ALUNOS CEGOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em ENSINO DE MATEMÁTICA.

Orientação: Claudia Coelho de Segadas Vianna

Rio de Janeiro
2016

CIP - Catalogação na Publicação

A973e

Ayala de Carvalho, Mauricio Alfredo
Um estudo do processo de argumentação por alunos cegos / Mauricio Alfredo Ayala de Carvalho. -- Rio de Janeiro, 2016.
108 f.

Orientador: Claudia Coelho de Segadas Vianna.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2016.

1. Ensino de matemática. 2. Ensino de cegos. 3. Esquemas de prova. I. Coelho de Segadas Vianna, Claudia, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Um estudo do processo de argumentação por alunos cegos

Mauricio Alfredo Ayala de Carvalho

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – IM/UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovado por:

Claudia Segadas Vianna

Professora Doutora Claudia Coelho de Segadas Vianna
Instituto de Matemática – UFRJ
Orientadora / Presidente da Banca

Solange HAAli

Professora Doutora Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes
Universidade Anhanguera de São Paulo

Lilian Nasser

Professora Doutora Lilian Nasser
Instituto de Matemática – UFRJ

Ana Teresa de C. C. de Oliveira

Professora Doutora Ana Teresa de Carvalho Correa de Oliveira
Faculdade de Educação - UFRJ

Agradecimentos

A Deus, por tudo.

Aos meus pais.

À minha orientadora Claudia Segadas, por toda paciência e orientação.

Aos membros da banca examinadora, por todas as contribuições.

Ao meu amigo Rodrigo Cardoso, com quem pude com a ajuda na pesquisa.

Ao professor Wagner Garcez, que em muito ajudou no IBC.

A todos os professores com quem tive aula, por toda formação que me deram.

Resumo

Estudos acerca de argumentação e prova ao redor do mundo mostram que a grande maioria dos estudantes, em variados graus de escolaridade, se utilizam muito de argumentos concretos e visuais na justificativa de suas afirmações em problemas de matemática. Este trabalho tem como objetivo analisar respostas dadas por alunos cegos em problemas matemáticos que normalmente evocam referências visuais, visto que o fator visual é de grande peso na argumentação dos videntes. Todos os alunos cegos tomados como sujeitos da pesquisa perderam a visão nos primeiros anos da infância e não possuem um referencial visual que influencie na fala, como no caso dos alunos videntes ou de baixa visão. Um estudo piloto foi realizado no final de 2015 com alunos cursando o nono ano do ensino fundamental, enquanto que o estudo principal foi realizado no início de 2016 com alunos cursando o oitavo ano. A pesquisa foi realizada em entrevistas semiestruturadas, com áudio gravado, nas quais são trabalhados problemas matemáticos envolvendo geometria. O principal referencial teórico são os trabalhos de Harel e Sowder (1998, 2007), com suas pesquisas acerca de argumentação e prova, bem como Vygotski (1993), que em muito contribuiu para o desenvolvimento da psicologia de alunos cegos, mas muitos outros contribuem. Esta pesquisa mostra que os alunos cegos fazem uso dos mesmos esquemas concretos dos videntes em suas argumentações, sendo a percepção tátil a característica prevalente.

Palavras-chave: matemática, argumentação, alunos cegos

Abstract

Studies about argumentation and proof around the world show that the major part of the students, in many scholar degrees, use a lot of concrete and visual arguments to justify their assertions in mathematical problems. This work aims to analyze responses of blind students in mathematical problems that usually evoke visual references, since the visual factor is of great weight in the argument of the sighted. All students taken as research subjects were blind since birth or lost their sight in the early childhood and do not have a visual reference that influence their speech, as in the case of sighted or low vision students. A pilot study was conducted at the end of 2015 with students in the ninth grade of elementary school, while the main study was carried out in early 2016 with students in the eighth grade. The research was realized using semi-structured interviews with recorded audio, in which mathematical problems involving geometry were worked out. The main theoretical framework are the works of Harel and Sowder (1998, 2007), with their research on argumentation and proof, as well as Vygotsky (1993), who greatly contributed to the development of the psychology of blind students, but many other authors contribute. This research shows that blind students use the same concrete schemes as the sighted ones use in their arguments, and the prevailing characteristic is the haptic perception.

Key-words: mathematics, argumentation, blind students

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Esta pesquisa tem como objetivo geral investigar a resolução por alunos cegos de problemas matemáticos que usualmente envolvem argumentos visuais. É realizada com alunos cegos congênitos cursando os anos finais do ensino fundamental.

Mais do que desenvolver o conhecimento matemático para a própria matemática, a habilidade de prova e argumentação é essencial para a formação de um cidadão crítico.

Quando aqui se fala de "cidadão crítico", entende-se como aquele com as virtudes descritas por Aleksei Pogorelov em seu livro de geometria, Элементарная геометрия (Geometria Elementar):

> Ao oferecer o curso presente, partimos de que a tarefa essencial de se ensinar a Geometria na escola consiste em ensinar o aluno a raciocinar logicamente, argumentar suas afirmações e demonstrá-las. Muitos poucos dos que se formam na escola serão matemáticos e muito menos geômetras. Também haverá os que não utilizem sequer uma vez o teorema de Pitágoras em suas atividades práticas. Entretanto, dificilmente haverá um sequer que não deverá raciocinar, analisar e demonstrar. (POGORELOV, 1974, p. 9, tradução nossa)

Analisando um amplo mapeamento de estratégias de prova feito por Harel e Sowder (1998), nota-se que o desenvolvimento de grande parte das estratégias de prova se utilizam de uma visualização e/ou de uma percepção visual do problema,. Os mesmos autores realizaram posteriormente outro trabalho (HAREL e SOWDER, 2007) em que analisam diversas pesquisas ao redor do mundo, com alunos de ensino médio e cursos superiores de matemática e engenharia, concluindo que poucos alunos argumentam de forma lógico-dedutiva em provas e muitos usam desenhos como base de suas argumentações.

Vendo que referências visuais possuem grande influência na argumentação dos videntes, torna-se pertinente analisar as estratégias desenvolvidas por alunos com deficiência visual, bem como as consequências que a retirada do fator visual acarreta na formação de tais estratégias. Espera-se que, através desta pesquisa, um melhor entendimento da maneira de argumentar de um cego venha a contribuir para uma reflexão e planejamento mais eficaz do ensino para os mesmos, potencializando o desenvolvimento de suas habilidades e contribuindo para uma educação inclusiva.

Tendo em vista o objetivo geral de analisar a resolução por alunos cegos de problemas matemáticos que usualmente envolvem argumentos visuais, fixam-se os seguintes objetivos específicos:

- Identificar estratégias de argumentação e prova segundo taxonomias de Balacheff (1988) e Harel e Sowder (1998).
- Entender como os alunos cegos concebem os conceitos geométricos básicos, como “quadrado”, “triângulo”, “losango”, dentre outros.
- Identificar influências de recursos didáticos entendendo como eles são incorporados na fala do aluno cego.

No primeiro capítulo são abordados assuntos referentes ao cego, mostrando um pouco da história de como ele é visto na sociedade, como são as concepções acerca do cego hoje em dia e como se dá a educação do cego, tendo como principal referencial os trabalhos de *Defectologia* de Vygotski. Também são abordados estudos mais recentes acerca da formação de conceitos por pessoas cegas, o que é pertinente para entender melhor a forma de pensar do cego e como essa forma de pensar influencia a forma de argumentar.

No segundo capítulo são abordados trabalhos acerca de argumentação e prova, discutindo-se primeiramente que conceito de “prova” é utilizado na pesquisa. Em seguida, são vistas algumas taxonomias de estratégias de prova por alunos videntes, começando pela categorização de Balacheff (1988), mais simples, porém mais precisa para determinados casos, seguida de uma categorização mais ampla de Harel e Sowder (1998) e, por fim, um estudo realizado pelos mesmos em 2007, já citado anteriormente.

O terceiro capítulo aborda as escolhas e procedimentos metodológicos desta pesquisa, enquanto o quarto capítulo aborda a pesquisa prática em si, expondo e analisando os dados coletados e organizados. Por fim, seguem as considerações finais indicando uma possível resposta para as questões desta pesquisa:

- Como os cegos argumentam frente a problemas que envolvem referenciais visuais?

- Como são concebidos e utilizados os conceitos geométricos abordados?

1. Referenciais em educação especial

Neste capítulo são abordados os referenciais teóricos da psicologia utilizados para estudo do indivíduo cego nesta pesquisa.

1.1. Breve histórico do cego na sociedade

Ao longo da história, as visões científicas acerca do cego e sua psicologia foram mudando de tal forma que, em algumas épocas, tais visões desapareceriam em uma neblina de falsas ideias (VYGOTSKI, 1993). Entretanto, uma ideia que foi evoluindo com o tempo e, de acordo com Vygotski, é o centro de todo o conhecimento acerca do cego é que “A cegueira não é uma simples ausência de visão, ela provoca uma profunda reestruturação das forças do corpo e personalidade” (VYGOTSKI, 1993, p. 97).

Na Idade Média, a cegueira era vista como um grande infortúnio, ao qual as pessoas tratavam com superstição, medo e respeito. O cego era visto como uma pessoa iluminada, que possuía poderes místicos da alma e maior conhecimento espiritual ganhos em troca da visão, apesar de também serem vistos como frágeis e indefesos por conta da cegueira. Lendas dizem que o filósofo Demócrito haveria tirado a própria visão para se dedicar à filosofia e, mesmo que tal lenda seja um mito, não era uma ideia estranha a ninguém, por se acreditar que um dom filosófico se fortalecesse com a perda da visão. Basicamente, a sociedade via a ausência de visão como algo que acarretasse um desenvolvimento superior da mente. À luz do cristianismo, o cego era visto como aquele mais próximo de Deus, sendo associado ao plano espiritual de diversas maneiras (ibid, p. 98).

No século XVIII, a cegueira deixa de ser abordada através dessa perspectiva espiritual e passa a ser tratada pela perspectiva científica. Esse novo entendimento sobre o cego é expresso pela doutrina *vicarious* (substituição), na qual a ausência de um sentido é compensada com um aumento no desenvolvimento de outros, o que se exemplifica na ideia da época de que uma pessoa cega era um bom músico. De acordo com o pensamento da época, a falha de um órgão sensorial acarretava em um maior desenvolvimento de outros órgãos sensoriais (ibid. pp. 99-100).

Já no século XX, esse conceito é quebrado e, passa-se a entender que pela ausência da visão, o cego tenha que utilizar mais os outros sentidos em seu dia a dia.

A falta de visão não faz com que os outros sentidos se desenvolvam mais, como compensação biológica, mas sim com que fiquem mais aguçados por serem mais utilizados (ibid. pp. 100-101).

No que diz respeito à educação de deficientes em geral, a primeira obra voltada para tal foi, segundo Mazzotta[1] (1996, p. 18 apud SERINO, 2011, p. 19), em 1620, por autoria de Juan Pablo Bonet, chamada "*Reducción de las letras y arte para enseñar a hablar a los mudos*" e se utilizava de linguagem de sinais.

No caso dos deficientes visuais, foi em 1784 que *Valentin Haüy* fudou em Paris o *Institut National des Jeunes Aveugles* (Instituto Nacional dos Jovens Cegos), utilizando-se de letras em relevo para ensinar os cegos. Segundo Vygotski, as seguintes palavras são direcionadas às crianças cegas, em homenagem a Haüey: "*você encontrará luz na educação e trabalho*" (VYGOTSKI, 1993, p. 100). Nas palavras de Vygotski, Haüey haveria encontrado uma solução para o que consideraria a "tragédia da cegueira" e apontou um caminho pelo qual caminhamos hoje, dizendo ainda que a era de Haüey deu ao cego a educação e que sua era deveria dá-los o trabalho (ibid, p. 100).

Por volta dos anos 20 do século XIX, um capitão do exército francês, *Charles Barbier*, é convidado a ir no Instituto Nacional dos Jovens Cegos e propõe o uso de uma escrita composta por pontos em relevo, utilizada pelo exército para comunicação noturna.

Em 1829 então, Louis Braille, jovem estudante do Instituto, fez uma adaptação do código proposto por Barbier. Inicialmente o novo sistema foi chamado de sonografia, posteriormente de braile, que segundo Mazzotta (1996, p. 19 apud SERINO, 2011, p.20), é o método de leitura mais eficaz até hoje para pessoas cegas.

Já no Brasil, foi em 12 de setembro de 1854 que D. Pedro II fundou no Rio de Janeiro o *Imperial Instituto dos Meninos Cegos*, que em 1891 passou a se chamar Instituto Benjamin Constant (MAZZOTTA, 1996, p.23 apud SERINO, 2011, p.20). Sendo o local de aplicação desta pesquisa, o IBC é abordado nas considerações metodológicas.

---

[1] MAZZOTTA, M. J. S. **Educação especial no Brasil: história e políticas públicas**, São Paulo, pp. 18-23, 1996.

1.2. Concepções sobre "conceito"

Um elemento importante nesta pesquisa é entender quais conceitos, no caso, matemáticos, o cego possui e como tais conceitos são trabalhados e utilizados em sua fala. Torna-se relevante então entender como se originam e como são organizados os conceitos.

O *Dicionário UNESP do Português Contemporâneo (BORBA, 2004)*, apresenta sete itens para a palavra "conceito", o primeiro deles é, "formulação de uma ideia sobre um objeto ou um tema por meio de palavras; caracterização; definição".

A psicologia, segundo Batista (2005) vem se dedicando ao estudo da formação dos conceitos e Lomônaco et al[2] (1996 apud BATISTA, 2005) apresentam em um artigo de 1996 quatro concepções de conceito: *clássica*, *prototípica*, dos *exemplares* e *teórica*.

A concepção clássica de conceito, segundo Batista (2005) é considerada hegemônica, condizente com a encontrada no dicionário. Na concepção clássica, pressupõe-se a existência de atributos comuns a todos os elementos de um conjunto. A representação mental que sumariza esses atributos comuns a todos os elementos recebe o nome de conceito (LOMÔNACO et al, 2001).

A concepção prototípica, ao contrário da clássica, nega a existência de atributos definidores e supõe que o conceito é formado pela abstração dos atributos que ocorrem com maior frequência, a partir dos quais um indivíduo forma uma representação mental chamada *protótipo.* Se um elemento for suficientemente similar ao protótipo ele é incluído no conjunto, se não, é excluído. (LOMÔNACO et al. 2001).

Na concepção dos exemplares, ao invés de protótipos, os conjuntos são representados por um ou alguns exemplos individuais representativos. Lomônaco et al. (2001) dão como exemplo um professor que ao longo de sua vida profissional entrou em contato com muitos alunos estudiosos e acabou por tomar um ou alguns deles como exemplo de "bom aluno".

---

[2] LOMÔNACO, J.F.B. et al. Do característico ao definidor: um estudo exploratório sobre o desenvolvimento de conceitos. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, v.12, n.1, p.51-60, 1996.

A concepção teórica é apontada por Lomônaco et al. (1996 apud BATISTA, 2005) como uma alternativa para superar as limitações das outras três concepções. Pela concepção teórica, os conceitos fazem parte de uma rede de relações com outros conceitos, da qual deriva seu significado; assim, cada conceito é formado a partir de conceitos previamente conhecidos. Essa rede é chamada *teoria* e os conceitos são os elementos interligados da teoria. Keil[3] (1989 apud NUNES e LOMÔNACO, 2008, p. 6) foi quem sistematizou a concepção teórica; de acordo com ele, os conceitos estão intrinsicamente relacionados, de forma que são impossíveis de se entender isoladamente, pois o significado de um conceito é dado pelos conceitos aos quais está relacionado.

A concepção teórica é usada na pesquisa de Nunes e Lomônaco (2008), realizada com cegos congênitos entre 8 e 13 anos. A eles é pedido a definir quinze conceitos apresentados, de diversos tipos. Nos resultados, vê-se os conceitos sendo relacionados a outros conceitos dentro de uma rede relacional, por exemplo, dentre os resultados, o conceito de “casa” sendo relacionado a cimento e tijolo, “montanha” sendo relacionado a ações como escalar ou subir, “música” sendo relacionado a instrumentos musicais etc.

Nunes e Lomônaco (2008), tendo como base a concepção teórica de conceito, afirmam que a linguagem da criança cega não é um mero reflexo do conhecimento e da fala dos videntes à sua volta, mas é representativa dos conceitos desenvolvidos a partir das informações que chegam pelos sentidos que não a visão, sendo então importante estudar o cego a partir de seu próprio referencial, bem como discutido na sessão anterior. Eles ainda alertam que a crença de que um aluno cego tem pouca capacidade de aprendizagem o prejudica muito já que esse pensamento tende a minimizar as propostas pedagógicas do professor, caminho completamente contrário às orientações de Barbosa (2003), de justamente buscar e pesquisar novas propostas de educação para o cego. Sem acreditar na capacidade cognitiva do aluno cego e usando procedimentos voltados para videntes, o professor está restringindo a aprendizagem do mesmo.

No presente trabalho, ao se referir a conceito, é pressuposta a concepção teórica, que diferente da concepção do dicionário, é condizente com teorias

[3] KEIL, F. C. *Concepts, kinds and cognitive development*. Cambridge, MA: MIT Press, 1989.

vygotskianas abordadas posteriormente, sendo a concepção adotada retomada ao se tratar os ditos pseudoconceitos.

1.3. O desenvolvimento do cego segundo Vygotski

Lev Semenovich Vygotski (1896-1934), bacharel em direito pela Universidade de Moscou, é mais conhecido no ocidente como um teórico, psicolinguista e fundador da psicologia do desenvolvimento cognitivo soviético. Escreveu entre os anos de 1924 e 1931 trabalhos sobre a chamada *Defectologia*, termo que apareceu no idioma russo pela primeira vez em 1912, sendo usado para se referir ao estudo de pessoas que possuem alguma deficiência, sua educação e desenvolvimento. Seus trabalhos nessa área o fizeram ser visto como um psicólogo brilhante e criativo, bem como um "defectólogo" [4] na então nova Rússia Soviética (VYGOTSKI, 1993).

A Defectologia de Vygotski tratou de crianças surdas, cegas, com deficiência mental, com dificuldade de aprendizado, deficientes físicos, dentre outros aspectos fora do padrão considerado de normalidade. Vygotski defende que o desenvolvimento de uma criança deficiente é possível através de caminhos indiretos em uma realidade em que a ênfase no desenvolvimento se dá pelo caminho direto, que supõe uma criança sem deficiências. Isso significa que é possível compensar uma deficiência para desenvolver socialmente a criança deficiente, através de caminhos alternativos (VYGOTSKI, 1993).

Vygotski supõe que o aluno cego não é simplesmente um aluno normal subtraído do elemento visual. O processo de aprendizagem não se dá da mesma forma que o de um aluno normal, retirando o que se aprende com a visão. A estrutura psicológica é bem diferente e deve ser estudada dentro de seu próprio contexto. David H. Warren (1994) descreve duas abordagens para o estudo de pessoas cegas: *comparativa* e *diferencial*. Na abordagem comparativa, utilizada pelo mesmo em uma obra anterior, são realizados estudos com cegos e videntes e é tirada uma média do desempenho. Na abordagem diferencial, o cego é estudado dentro de seu próprio contexto, sem comparação com videntes; é uma abordagem que condiz com a visão Vygotskiana e,

[4] "Defectologist" foi o termo utilizado na tradução do russo para a língua inglesa que consta em The Fundamentals of Defectology (1993), volume 2 da coletânea "The Collected Works of Lev Semenovich Vygotsky", sendo esta uma compilação das obras de Vygotski dos anos 20 e 30 no séc. XX

de acordo com Warren, é a abordagem mais adequada para gerar conhecimento que possa intervir na educação da criança cega e otimizar seu desenvolvimento (WARREN, 1994).

Dentro da abordagem diferencial, se algum cego alcança um determinado nível de desenvolvimento e outro não, significa que o fato de não alcançar de não alcançar tal nível não se dá por conta da cegueira, pois algum cego já o alcançou. O que mostra que assim como os videntes, os cegos também são multideterminados: os aspectos sociais, pessoais, orgânicos, familiares, dentre outros, influenciam diretamente seu desenvolvimento (NUNES e BITENCOURT, 2003).

Os trabalhos de Vygotski influenciaram para que a psicologia passasse a considerar que a falha de um dos órgãos sensoriais faz com que se crie uma espécie de superestrutura psicológica. Contato com o ambiente externo gera conflitos, que dão espaço para estímulos que podem criar processos compensatórios para o desenvolvimento psicológico, que seria o caminho alternativo pelo qual a criança cega segue, uma vez que a cegueira a impede de seguir o mesmo caminho que uma criança vidente. Esse conflito pode terminar em sucesso, tornando a deficiência em competência, desvantagem em habilidade, fraqueza em força, inferioridade em superioridade. No caso de insucesso, Vygotski diz que pode até mesmo levar o cego a um estado de neurose. Um caso de sucesso citado por ele é o de N. Saunderson, um cego congênito que compilou um livro de geometria (VYGOTSKI, 1993). Existem vários graus de desenvolvimento e, segundo Vygotski, "infelizmente, um desenvolvimento positivo não é sempre a maioria dos casos" (VYGOTSKI, 1993, p.101).

O cego não vivencia sua cegueira do modo como o senso comum diz, de se sentir imerso em trevas. Pelas palavras do cego A. V. Birilev, citadas por Vygotski (1993), "a forma como uma pessoa cega falha em ver a luz não é da mesma forma que um vidente vendado". Vygotski afirma ainda que "uma pessoa cega vê através da mão, isto é, não sente diretamente que está privado da visão" (ibid, p.102). Não se pode achar que a mente de um cego está cheia da cegueira ou sua sombra psicológica. Vygotski ainda diz que na mente do cego "não há nada além de uma vontade de superar a cegueira (tendendo aos processos compensatórios) e o desejo de atingir uma posição social" (ibid, p. 102, tradução nossa).

De acordo com Vygotski (1993), todos os pesquisadores de sua época concordam que se encontra uma memória mais desenvolvida no cego em relação ao vidente. Kretschmer[5] (1928 apud VYGOTSKI, 1993, p. 102) mostra em uma pesquisa comparativa de 1928 que o cego possui uma melhor memória verbal, mecânica e racional. Afim de alcançar uma posição na sociedade, o cego é forçado a desenvolver todas as suas funções compensatórias e desenvolve a memória sob essa pressão para compensar as desvantagens causadas pela cegueira. A característica mais notável da personalidade de um cego é, segundo A. Petzeld[6], "seu potencial para completa e adequada comunicação e entendimento recíproco com o vidente, por meio da fala" (PETZELD, 1925 apud VYGOTSKI, 1993, p. 103).

Para o desenvolvimento da criança cega, Vygotski reconhece o importante papel da fala e, nesta pesquisa, através da interação interpessoal entre o aluno e o pesquisador, espera-se melhor entender os elementos do cotidiano do aluno, seus conceitos e os chamados *pseudoconceitos*, que são um ponto importante para o desenvolvimento de qualquer aluno, independentemente de ser cego. Os pseudoconceitos são entendidos como conceitos imaturos sobre um assunto, produzidos muitas vezes como reflexo da "voz matemática" de antigos professores. Espera-se que, com um melhor conhecimento dos pseudoconceitos dos alunos, seja possível pensar em estratégias de ensino mais eficazes para um desenvolvimento de conceitos. A teoria vygotskiana que trata de pseudoconceitos é abordada mais à frente (1.5), bem como o método da dupla estimulação (1.6), pensado por Vygotski visando o desenvolvimento do aluno através de atividades acompanhadas por estímulos subsequentes, em contraposição aos métodos de seus contemporâneos.

1.4. Recursos didáticos

Valendo-se dos processos compensatórios da criança cega, torna-se necessário buscar os devidos estímulos. De acordo com Cerqueira e Ferreira (2000), a formação de conceitos depende do íntimo contato da criança com as coisas do mundo e para

[5] KRETSCHMER, E. **Ob islerii** (On hysteria). Moscou e São Petersburgo, 1928.
[6] PETZELD, A. **Konzentration be! Blinden. Eine psychologisch-paedagogische Studie**. Leipzig, 1925.

suprir pedagogicamente as lacunas presentes por conta da falta da visão, podem ser utilizados recursos didáticos, definidos pelos mesmos como:

> ... todos os recursos físicos, utilizados com maior ou menor frequência em todas as disciplinas, áreas de estudo ou atividades, sejam quais forem as técnicas ou métodos empregados, visando auxiliar o educando a realizar sua aprendizagem mais eficientemente, constituindo-se num meio para facilitar, incentivar ou possibilitar o processo ensino-aprendizagem. (CERQUEIRA E FERREIRA, 2000, p. 1).

Cerqueira e Ferreira (2000, p. 3) expõem diversos recursos didáticos já utilizados na educação de cegos, indicando que devem: “possuir um tamanho adequado às condições do aluno”; “possuir relevo perceptível quando se tratar de um recurso háptico”; “não ser algo que machuque ou gere desconforto ao toque”; “ter cores fortes e contrastantes no caso de ser para um aluno de baixa visão”; “ser tão fieis quanto o possível quando forem representações de outros modelos”; “serem fáceis de manusear, assim como duráveis e seguros”.

Barbosa (2003) alerta para a importância da criação de novas ideias e recursos, em especial em geometria, buscando sempre melhorar a prática em sala de aula e dando melhor suporte ao desenvolvimento de conceitos por alunos cegos. Tal necessidade é reforçada ao fim deste trabalho, uma vez que recursos didáticos são utilizados aqui, principalmente o geoplano, como visto mais à frente (Figuras 12 a 17). Barbosa (2003) ainda expõe algumas sugestões para desenvolvimento de novos recursos, como a criação de laboratórios de geometria e projetos de construção de modelos geométricos, apontando a obrigação do professor de ser comprometido com tal prática didática, visando à formação de um cidadão.

Tanto Batista (2005) quanto Nunes e Lomônaco (2008) concordam e apontam para a dificuldade no ensino de crianças cegas quando se pensa em estímulos que desenvolvam representações para os conceitos. Tais estímulos devem ser proporcionados de forma a guiar o aluno cego pelos caminhos alternativos defendidos por Vygotski (1993), podendo isso ser feito através dos recursos didáticos, conforme apontado por Cerqueira e Ferreira (2000).

1.5. Pseudoconceitos

Vygotski identifica três etapas na evolução dos conceitos ao longo do desenvolvimento da criança: sincretismo; formação por complexos; e formação do conceito em potencial (VYGOTSKY, 1935, p. 62; VEER e VALSINER, 1991, p. 263). Entretanto, o foco aqui está um subestágio da formação por complexos que possui tanto características de complexos quanto de conceitos formais (que Vygotski chama de conceito “real”): os pseudoconceitos, que são o ponto crucial no desenvolvimento dos conceitos “ingênuos” por meio de complexos em conceitos mais abstratos, que são o último estágio da linha evolutiva dos conceitos vygotskianos.

A primeira etapa, cujo nome foi herdado de Claparède e Piaget, começa ainda nos bebês. Nela, os objetos são agrupados com base em fatores perceptuais irrelevantes, como proximidade espacial, podendo não haver nenhuma característica comum entre eles (VEER e VALSINER, 1991, p. 263). Tal concepção não condiz com a concepção teórica, entretanto, como esta pesquisa não lida com crianças nesta etapa, isso não será problematizado ou aprofundado.

A segunda etapa trata da formação dos conceitos via complexos. Em um complexo, os objetos são organizados pelas características percebidas pela criança e pelas relações que os objetos possuem entre si. Entretanto, tais ligações são mais concretas que abstratas. Vygotski sintetiza a ideia de complexo dizendo que “um complexo é, acima de tudo, e principalmente, um agrupamento concreto de objetos ligados por nexos factuais” (VYGOTSKI, 1935, p. 64).

Existem cinco subestágios no estágio de formação de conceitos por complexos: Complexos associativos; Coleções; Complexos em cadeia; Complexos difusos; e pseudoconceitos. Nos complexos associativos, a criança adiciona objetos a um primeiro objeto tomado de referência, caso compartilhem de alguma característica. Nas Coleções, como o nome diz, os objetos são agrupados como se fossem colecionados, de forma a se complementarem; a um objeto de uma determinada forma e uma determinada cor, por exemplo, pode-se adicionar objetos de outras formas e outras cores até que todas as formas e cores sejam representadas. Nos complexos em cadeia, partindo-se de um objeto, a criança toma uma característica para associar outros, mas essa característica vai mudando a ponto de não se considerar mais o primeiro objeto. Veer e Valsiner (1991, p. 264) exemplificam os complexos em cadeia com uma criança que, partindo de um triângulo amarelo, associa todos os outros triângulos e, se o último triângulo for azul, a criança segue associando outras formas que sejam da cor azul. Nos complexos difusos, o critério de ligação entre os objetos é difuso, sendo a relação entre eles uma semelhança bem vaga, por exemplo, quando um triângulo é associado a um trapézio por ser vagamente parecido e, em seguida, o trapézio ser associado a um quadrado e assim em diante. (VYGOTSKY, 1935, pp. 62-69; VEER e VALSINER, 1991, pp. 262-265)

Por fim, os pseudoconceitos, apesar de designarem os mesmos objetos que os conceitos considerados por Vygotski como "reais", são entendidos como conceitos potenciais a serem desenvolvidos, sendo os casos em que as palavras de uma criança e de um adulto carregam o mesmo significado, mas são entendidos de maneiras bem diferentes. Segundo Veer e Valsiner (1991), Vygotski não deixa clara a diferença entre um conceito real e um pseudoconceito, mas deixa a entender que enquanto o pseudoconceito abrange apenas informações perceptuais sem definições formadas, seu desenvolvimento em um conceito real (que ocorre a partir da adolescência) se dá quando o indivíduo passa a trabalhar com as definições e propriedades do objeto em questão.

Vygotski (1935) exemplifica os pseudoconceitos da seguinte forma:

> “... quando a amostra é constituída por um triângulo amarelo e a criança pega em todos os triângulos do material experimental, poderia estar a ser orientada pela ideia geral ou conceito de triângulo. No entanto, a análise experimental mostra que na realidade a criança é orientada pela semelhança concreta visível e se limita a formar um complexo associativo confinado a um certo número de ligações, um certo tipo de conexões sensoriais. Embora os resultados sejam idênticos, o processo pelo qual são atingidos não é de maneira nenhuma o mesmo que no pensamento conceptual.” (VYGOTSKI, 1935, p. 69)

O uso de palavras que remetem a um mesmo conjunto de objetos possibilita a comunicação entre a criança e o adulto, mas o conceito primitivo trazido pela criança, o pseudoconceito, ainda deve evoluir até coincidir com o conceito utilizado pelo adulto.

Vygotski julgou que é através da interação verbal com o adulto que os pseudoconceitos da criança se desenvolverão em conceitos “reais” (VEER e VALSINER, 1991). Essa visão vygotskiana acerca de conceitos pode ser vista à luz da concepção teórica (rede de conceitos), visto que um conceito “real” para Vygotski, estaria relacionado a outros conceitos abstratos, os quais estariam, pela concepção teória, formando uma rede de conceitos. Já o pseudoconceito pode ser entendido como um conceito ingênuo, que ao invés de estar associado a outros conceitos abstratos, está associado a conceitos mais concretos. Por exemplo, tomando um conceito formal de “triângulo”, ele estaria associado em uma rede aos conceitos de “três”, “lados”, “vértices”, onde se trabalha com tais elementos sem se considerar natureza ou aparência. Já um possível pseudoconceito de “triângulo”, poderia estar ligado a elementos perceptuais, como “tem essas três linhas aqui, iguais ao que vi antes”, “tem esses três cantinhos aqui, iguais ao que vi antes” ou até mesmo “tem a mesma cor de um outro que vi antes”.

1.6. Método da dupla estimulação

Em contraposição aos métodos de seus contemporâneos, Vygotski se baseia no trabalho de Köhler para criar o que chamou de “método funcional da dupla estimulação” (VYGOTSKI[7], 1929, p.430 apud VEER e VALSINER, 1991, p. 176). Köhler realizava pesquisa sobre o uso de instrumentos por chimpanzés, o que deu início a uma tradição totalmente nova de pesquisa em psicologia infantil com comparações do pensamento das crianças aos de primatas. Tais investigações foram de grande importância para Vygotski, uma vez que sugeriam respostas sobre diferenças cruciais entre o pensamento animal e humano.

Nos experimentos de Köhler, o sujeito (chimpanzé) era situado em uma condição estruturada com diferentes objetos a seu dispor para a realização de uma tarefa, cuja meta era inacessível por meios padrões por conta da estrutura física do ambiente. O sujeito podia contornar ou superar o bloqueio do ambiente (por exemplo, tomando rotas alternativas para alcançar a meta da tarefa) ou se utilizar dos objetos disponíveis (instrumentos) para realizar a tarefa.

[7] VYGOTSKI, L. S. **The problem of the cultural development of the child II. Journal of Genetic Psychology**, 36, pp. 415-434, 1929.

Shapiro e Gerke[8] (1930 apud VEER e VALSINER, 1991, p. 167) estenderam a ideia metodológica de Köhler ao estudo de resolução de problemas em crianças. Uma criança que encontra uma situação similar à dos primatas de Köhler, traz consigo um conjunto de “roteiros” estabelecidos através da fala. Vygotski acompanha um grupo de pesquisa na antiga União Soviética, o qual aponta que as crianças usam seu “nível de comportamento” qualitativamente superior (em relação aos primatas) em tais situações de experimento köhleriano (VEER e VALSINER, 1991).

Nessa nova metodologia de Vyotsky, baseada em Köhler, o papel do investigador não é meramente traçar um “perfil diagnóstico” das funções psicológicas, mas promover a transição do estado atual para um novo e ainda não existente estado. Assim se dá o método da dupla estimulação: o sujeito é colocado em uma situação estruturada em que há um problema que excede seu conhecimento e capacidade e recebe uma orientação ativa no sentido da construção de um novo meio de solucionar o problema inicial (VEER e VALSINER, 1991; FERNANDES, 2004).

[8] SHAPIRO, S. A. AND GERKE, E. D. **Process prisposoblenija k uslovijam sredy v povedenija rebenka**. In: M. Ja. Basov (ed.), **Ocherednye problemy pedologii**, Moscou e São Petesburgo, Gosudarstvennoe Izdatel'stvo, pp. 73—111, 1930.

2. Referenciais em argumentação e prova

Neste capítulo são abordados os referenciais matemáticos acerca de argumentação e prova utilizados nesta pesquisa.

2.1. Concepções adotadas nesta pesquisa

Antes de apresentar os referenciais acerca de argumentação e prova, é importante deixar claro o que se entende por esses termos.

Harel e Sowder (1998, 2007) mostram uma preocupação em não associar “prova” unicamente a um contexto matemático. Os autores utilizam uma concepção mais abrangente de prova: aquilo que estabelece a verdade para uma pessoa ou comunidade. Já quando tratam de uma noção matemática de prova, se referem a “prova matemática”.

Já uma “argumentação” seria o processo da prova em si. Harel e Sowder (1998) afirmam que o processo de prova inclui dois sub-processos: averiguação e persuasão. Averiguação, segundo eles, é o processo e que um indivíduo se ocupa de remover suas dúvidas acerca da veracidade de algo. Persuasão é o processo em que um indivíduo se ocupa de remover as dúvidas de outro indivíduo acerca da veracidade de algo. Neste trabalho, o ato de argumentar é entendido como sinônimo de justificar.

Essas concepções de averiguação e persuasão são um tanto diferentes do exposto no Dicionário UNESP do Português Contemporâneo (BORBA, 2004). Segundo o dicionário, “averiguação” é “***1** verificação; exame.* ***2** investigação; apuração*” e “persuasão” é “*indução baseada em argumentação; conhecimento*”. Mas pode-se ainda perceber um sentido de “remover dúvidas” de si mesmo e de outro, com a finalidade de dar o status de verdade a uma afirmação.

Harel e Sowder (1998) ainda afirmam que os esquemas de prova adotados por um indivíduo, entendidos como o que se constitui como averiguação e persuasão por um indivíduo ou comunidade, estão relacionados à visão do indivíduo acerca da matemática. Por exemplo, se um aluno vê a matemática como uma coleção de verdades, ele tenderá a averiguar para si ou persuadir outros apelando para autoridades, como o que um professor falou ou o que está em um livro. Os significados de averiguação e persuasão variam de pessoa para pessoa, civilização para civilização e geração para geração dentro de uma civilização. Essas diferentes interpretações podem ser exemplificadas ao se comparar, por exemplo, os esquemas de prova da matemática indiana com a grega no período de 1820 a 1920. Na matemática indiana nesse período, havia provas aceitas pela comunidade do tipo "veja a figura!", enquanto que a matemática grega seguia o rigor lógico-dedutivo (CHARETTE, 2012). Padrões de averiguação e persuasão diferentes – esquemas de prova diferentes.

Em suma, as concepções tomadas para esta pesquisa seguem o referencial de Harel e Sowder (1998, 2007), sendo uma visão mais abrangente, não apenas matemática. As definições a seguir foram retiradas do artigo desses autores de 2007:

- **Prova:** "Aquilo que estabelece a veracidade de uma afirmação para um indivíduo ou comunidade. " (p. 3)
- **Argumentação:** "Processo de prova, no qual um indivíduo se dedica a remover as dúvidas acerca de uma afirmação. Sinônimo de "justificação". É dividido em dois sub-processos: averiguação e persuasão. " (p. 6)
    - **Averiguação:** "Processo no qual um indivíduo se dedica a remover suas próprias dúvidas acerca de uma afirmação. " (p. 6)
    - **Persuasão:** "Processo no qual um indivíduo se dedica a remover as dúvidas de outro indivíduo ou comunidade. Sinônimo de "convencer". " (p. 6)
- **Esquema de prova:** "O que se constitui como processo de averiguação e persuasão para um indivíduo ou comunidade. Está relacionado ao tipo de rigor necessário para se aceitar uma verdade. " (p. 7)

2.2. A taxonomia de Balacheff

Nicolas Balacheff realizou em 1988 uma pesquisa com alunos de escola secundária, entre 13 e 14 anos, organizando-os em duplas que deveriam fornecer um meio de encontrar o número de diagonais em um polígono sabendo o número de vértices. Analisando os resultados apresentados, Balacheff os dividiu em quatro categorias de prova, organizadas por níveis de sofisticação: empirismo ingênuo, experimento crucial, exemplo genérico e experimento mental[9] , sendo vistas do ponto de vista do aluno e, portanto, chamadas de “prova” por assim serem consideradas pelos sujeitos que as produziram (BALACHEFF, 1988).

Essas quatro categorias são divididas em duas categorias mais amplas, que ele chama de justificações pragmáticas e justificações conceituais. Enquanto as pragmáticas são esquemas de prova baseados em exemplos, as conceituais são mais abstratas e se utilizam das propriedades e relações conhecidas. As raízes da taxonomia de Balacheff são notadas em *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery* (LAKATOS, 1976), que narra um extenso diálogo sobre alunos tentando provar uma relação geométrica.

As três primeiras categorias se enquadram dentro de esquemas pragmáticos, enquanto apenas o último nível de argumentação, o experimento mental, se enquadra em justificações conceituais.

No nível do empirismo ingênuo, os alunos argumentam usando poucos exemplos em que a conjectura a qual chegaram está correta e afirmando assim que a afirmação é válida sempre.

No nível do experimento crucial, os alunos tentam generalizar os poucos exemplos testados, mas utilizando-se de um exemplo específico. No exemplo relatado no artigo, para mostrar uma maneira de se calcular o número de diagonais de um polígono, conhecida a quantidade de seus vértices, um aluno que se mostre no nível de experimento crucial justifica sua resposta utilizando-se de um polígono com muitos vértices, pois para ele, se dá certo em um caso não trivial, então dá certo sempre.

No nível do exemplo genérico, os alunos tentam generalizar também com um exemplo. Não um exemplo isolado, mas sim um exemplo selecionado para representar uma classe de exemplos, na qual são realizadas transformações que se manteriam verdadeiras independente dos valores do exemplo. Já no último nível, de experimento mental, o aluno é capaz de abstrair o problema e realizar deduções lógicas com base nas propriedades e relações conhecidas.

Essas quatro categorias trazem uma ideia de desenvolvimento. Implícito na hierarquia proposta por Balacheff está a noção de que os alunos evoluem de um nível

[9] “thought experiment” no original (BALACHEFF, 1988).

para o outro, amadurecendo enquanto absorvem os níveis pelos quais já passaram. O papel do professor é guiar esse desenvolvimento e isso carece de um grande conteúdo matemático e pedagógico (VARGHESE, 2010).

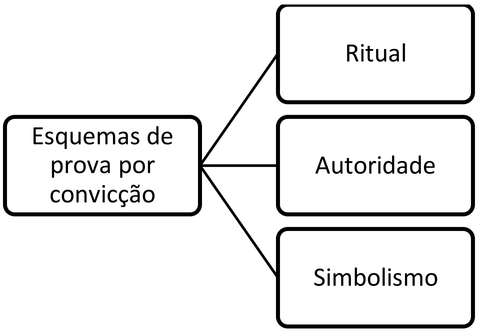
A taxonomia de Balacheff foi usada como referencial para diversos estudos posteriores, mas segundo Varghese (2010), era difícil categorizar certas provas seguindo a mesma, pois uma demonstração poderia atender a um alto nível na taxonomia de Balacheff e mostrar um baixo nível de pensamento, como por exemplo, um aluno apresentar uma prova que se enquadre em "experimento mental", mas como uma simples reprodução, sem reflexão acerca. Varghese destaca isso em sua pesquisa, aplicando a alunos de licenciatura que já dão aula, a mesma tarefa que Balacheff aplicou aos alunos e 13 e 14 anos, notando que todas as provas possuíam traços de experimento mental, mas nem todas alcançavam tal patamar na taxonomia.

2.3. A taxonomia de Harel e Sowder

A taxonomia de Harel e Sowder (1998) é uma das que se desenvolveram após o estudo de Balacheff (1988). Guershon Harel e Larry Sowder realizaram uma pesquisa com alunos cursando ensino superior de matemática nos Estados Unidos, com o objetivo inicial de mapear suas estratégias de prova. Realizando a pesquisa com cinco grupos, sendo um dos grupos um estudo de caso de um aluno precoce de ensino médio estudando geometria euclidiana e cálculo, eles classificam os esquemas de provas em três grandes categorias: esquemas de provas baseados em convicções externas, esquemas de provas empíricas e esquemas analíticos de prova, cada uma se subdividindo em determinados casos, devidamente exemplificados.

Os **esquemas de prova por convicção** são divididos entre: *ritual*, *autoridade* e *simbolismo*. A categoria ritual descreve os esquemas de prova nos quais a convicção da validade do argumento se dá através da aparência do argumento, em que o aluno, por exemplo, acredita que a prova está certa porque tem aparência de uma prova, sem avaliar o raciocínio.

A categoria de autoridade descreve os esquemas nos quais o aluno se convence da validade de um argumento pela autoridade de quem argumentou, por exemplo, quando se acredita que uma afirmação é verdadeira simplesmente “porque o professor falou” ou “porque está escrito em tal livro”. A categoria de simbolismo descreve os esquemas de prova nos quais as demonstrações são feitas aplicando manipulações algébricas sem que haja uma reflexão no significado do que se está fazendo, podendo haver indução ao erro, como por exemplo, quando se prova que 1 e -1 são solução da equação $x^2 = -1$, multiplicando-se pelo termo $(x^2 - 1)$ de ambos os lados e desenvolvendo a expressão.

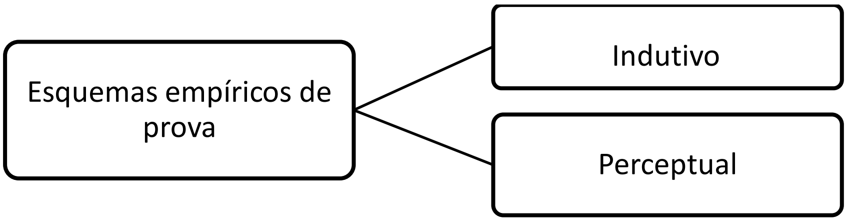


Organograma 1

Os **esquemas empíricos de prova** são divididos entre: *indutivos* e *perceptuais*. Os esquemas de provas aqui chamados por indutivos não se referem à indução matemática, mas sim dos discursos de prova nos quais o convencimento da validade do argumento se dá através da exposição de um número satisfatório de exemplos, sem que haja generalização.

A pesquisa (ibid) relata que para mostrar aos alunos que os esquemas indutivos de prova não funcionam sempre, os instrutores davam exemplos de proposições matemáticas que eram verdade para alguns casos, mas não para todos. Apesar dos alunos aparentarem entender as limitações dos esquemas indutivos, comportavam-se de modo contrário, por vezes usando-os até com apenas um exemplo e encarando os contraexemplos apenas como exceção. Outro problema identificado foi o fato de que eles não entendiam a razão de não poderem usar exemplos para provar, mas poderem usar um contraexemplo para refutar uma afirmação.

Os esquemas de prova por percepção envolvem, como o nome diz, o convencimento de ser verdade pela percepção, envolvendo imagens, mas sem a habilidade de realizar transformações, como por exemplo, “É obvio que é um quadrado! Não está vendo que os quatro lados são iguais? ”.



Organograma 2

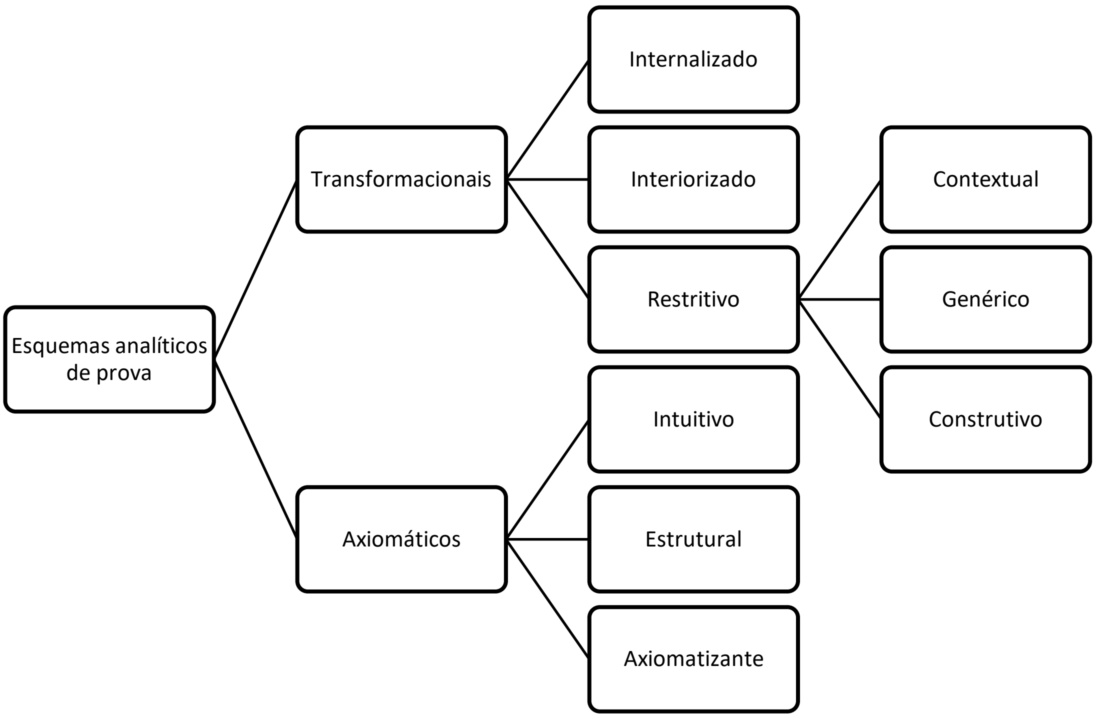
Os **esquemas analíticos de prova**, que envolvem uso de dedução lógica, são divididos entre *transformacionais* e *axiomáticos*. Os esquemas transformacionais envolvem operações sobre imagens, envolvendo dois níveis de profundidade cognitiva: internalizada, na qual o aluno segue caminhos tradicionais que já sabe que deve seguir e, interiorizada, na qual o aluno reflete sobre o problema ao realizar transformações. Por definição, o processo de interiorização não pode ocorrer sem antes já haver um processo de internalização[10]. Pode também haver um caráter restritivo no processo de internalização ou interiorização, tornando-se em esquemas restritivos, quando o problema impõe restrições. Tais restrições podem ser contextuais, genéricas ou construtivas.

Um esquema de prova contextual é um esquema restritivo em que uma afirmação deve ser provada dentro de um determinado contexto. Por exemplo, mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, mas isso pressupõe que se esteja em contexto de geometria euclidiana, então a prova se restringe a um contexto em que vale o axioma das paralelas. Caso não valesse, poderia se provar que a soma é menor ou igual. Um esquema de prova genérico é quando uma conjectura é interpretada em termos gerais, mas a prova e apresentada em um contexto específico, mostrando uma incapacidade por conta do aluno de se expressar em termos gerais, como no caso do experimento crucial de Balacheff (1988). Um esquema de prova por construção se dá quando o objeto matemático do problema é

[10] Não se trata da ideia de internalização descrita por Vygotski, a qual se assemelha mais ao processo de interiorização de Harel e Sowder.

um produto de construção. O raciocínio por trás deste tipo de prova lembra as ideias da corrente filosófica da matemática intuicionista[11].

Por fim, os esquemas de prova axiomáticos, nos quais o aluno está ciente de que o resultado deve provir de objetos já definidos e axiomas-base. Um esquema axiomático é intuitivo, quando o aluno só consegue lidar com axiomas que correspondem à sua intuição, como por exemplo, “para quaisquer a e b números reais, tem-se que $a + b = b + a$” por ser uma propriedade aparentemente óbvia e intuitiva. Pode também ser estrutural, quando o aluno reconhece que há um conjunto axiomático que define uma estrutura, mas trabalha sobre a estrutura apenas, como por exemplo, quando estuda geometria euclidiana, reconhecendo a presença de seus axiomas, mas sem necessariamente refletir sobre as implicações de cada um em particular. Harel e Sowder (1998) especulam que um esquema de prova estrutural é base para o chamado esquema axiomatizante, em que o aluno é capaz de investigar as implicações que uma variação nos axiomas gera em um dado problema.

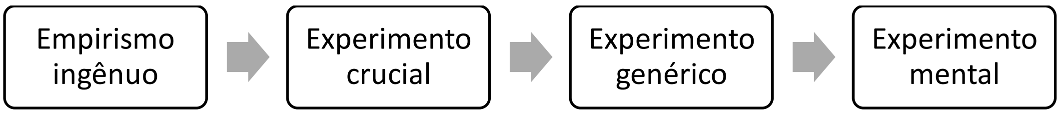


Organograma 3

[11] Segundo Japiassú e Marcondes (2001, p.107), “trata-se de uma forma de construtivismo, que considera os objetos matemáticos, tais como números, como construções mentais”.

2.4. Considerações acerca das taxonomias

Como visto, as categorias de prova de Balacheff (1988) possuem um caráter hierárquico, com uma ideia de desenvolvimento. Os alunos amadureceriam dos níveis de prova mais baixo ao mais alto.



Organograma 4

Entretanto, Balacheff não deixou clara uma visão subjetiva de “prova” como Harel e Sowder (1998), ou seja, não diferencia “prova” de “prova matemática”. Mesmo à luz de Harel e Sowder (1998, 2007), é difícil afirmar que se aplique o conceito de esquema de prova, mas a possibilidade de evolução é importante. Mesmo que um alto nível na taxonomia de Balacheff possa representar um baixo nível de pensamento (Varghese, 2010), sua pesquisa de 1988, bem como a de Lakatos (1976) evidenciam a importância do estímulo por parte do professor para a evolução do nível de argumentação e prova.

A taxonomia de Harel e Sowder é bastante abrangente, o que acarreta em uma prova se adequar a mais de um esquema, como é o caso do esquema interiorizado de prova, que pressupõe já presente o esquema internalizado de prova; e ambos podem ser esquemas restritivos também.

O empirismo ingênuo e o experimento crucial de Balacheff (1988) correspondem a esquemas indutivos de prova na taxonomia de Harel e Sowder (1998). O experimento genérico satisfaz as três características do esquema de prova transformacional, enquanto que o experimento mental pode abranger todos os esquemas analíticos de prova.

Pesquisas mais recentes ao redor do mundo (HAREL e SOWDER, 2007) mostram uma falta de esquemas dedutivos de prova e uma abundância de esquemas empíricos de prova em todos os níveis escolares. Alunos baseiam suas provas na aparência da figura ou argumentam dando exemplos. Também tendem a não entender o papel do contraexemplo. Os estudos analisados por essa pesquisa mostram a falta do entendimento da função da prova em matemática, o que contribui para que em um contexto matemático, uma argumentação muitas vezes não possa ser considerada uma prova, no caso, prova matemática. Os alunos tendem a acreditar que as provas servem apenas para verificar o que eles já sabem. O resultado de pesquisas com professores a respeito da concepção de prova não é muito melhor, o que se nota em Aguilar Junior (2012), onde se vê que os professores não costumam dar muita importância à argumentação e prova em suas aulas.

3. Considerações metodológicas

Neste capítulo é descrita a metodologia, bem como o local e os sujeitos de pesquisa e o roteiro de questões trabalhadas com os alunos, os quais foram separados em dois grupos: alunos do estudo piloto e alunos do estudo principal, que são abordados nos capítulos seguintes.

3.1. Introdução

Com base nas ideias de Vygotski, já discutidas anteriormente e por outros autores mencionados, esta pesquisa possui caráter qualitativo para melhor entender o cego congênito em seu próprio referencial, sendo realizada através de entrevistas semi-estruturadas. Nessas entrevistas, foi aplicada uma sequência de problemas para que o aluno justifique sua resposta após resolver um determinado problema de matemática no qual um aluno vidente provavelmente evocaria um referencial visual.

A pesquisa foi realizada em dois momentos: um estudo piloto com alunos do nono ano do ensino fundamental em 2015 e um estudo principal em 2016, com alunos no oitavo ano. A análise se concentra na fala e gestos do aluno em suas argumentações, buscando entender as particularidades de um aluno que não possui referências visuais em situações nas quais os videntes tenderiam a se apegar ao visual. Todas as conversas foram gravadas em áudio e transcritas por completo, mas sendo expostas na análise apenas trechos que ilustram momentos mais relevantes. As entrevistas do estudo principal, além de gravadas em áudio, contaram com gravação em vídeo para contribuir na análise de gestos.

Harel e Sowder (2007) defendem uma perspectiva de pesquisa em ensino e aprendizagem acerca de argumentação e prova abrangendo tanto a perspectiva matemática quanto a cognitiva, social e a que leva em conta fatores instrucionais. Essa perspectiva, de acordo com os autores, se faz necessária para entender as raízes das dificuldades dos estudantes para que medidas adequadas de ensino possam ser produzidas. Apesar de se tratar de uma pesquisa com videntes, essa ideia condiz com as ideias de Vygotski (1993), sendo aqui utilizada uma abordagem com recursos didáticos adequados às necessidades dos alunos e com estímulos dados em etapas, planejando-se assim seguir o método da dupla estimulação. Em todas as entrevistas havia um geoplano para desenhar as formas geométricas, sendo que ao longo das entrevistas, outros recursos foram sendo usados improvisadamente.

A pesquisa foi realizada no Instituto Benjamin Constant. Em um momento inicial da pesquisa, o pesquisador acompanhou aulas na turma dos alunos selecionados a participar para melhor entender seus contextos e melhor guiar as entrevistas, inspirado em Velho (1978) no que diz respeito a evitar que a subjetividade do pesquisador interfira na observação do ambiente, correndo o risco de que conceitos prévios distorçam o entendimento do ambiente.

3.2. Aplicando o método da dupla estimulação

Nas entrevistas desta pesquisa, os sujeitos foram expostos a problemas que podem ou não exceder seus conhecimentos ou capacidades, logo, dentro das entrevistas, o tratamento de cada problema é dividido em dois momentos. Em um primeiro momento, o aluno não recebe orientação e é deixado a pensar no problema e justificar sua resposta, tendo à disposição ferramentas que sirvam de suporte (por exemplo, geoplano).

Os momentos iniciais de cada tarefa têm o fim de identificar como eles concebem os conceitos utilizados e quais são os pseudoconceitos. Em um segundo momento, há novos estímulos por parte do pesquisador no que diz respeito aos conceitos abordados e/ou uma orientação, que levem à criação de uma nova estratégia.

Os estímulos podem ser vários, sendo a atividade então dividida na análise em vários momentos referentes a graus de intervenção do pesquisador.

3.3. O local de pesquisa

A instituição foi criada em 12 de setembro de 1854 pelo imperador D. Pedro II, com a finalidade de atender a crianças cegas, possuiu o nome de Imperial Instituto dos Meninos Cegos até 1891, quando recebeu o nome que tem até hoje: Instituto Benjamin Constant (IBC). As informações a seguir são em parte de observação e em maioria extraídas do website do Benjamin Constant[12].

[12] http://ibc.gov.br/

O IBC possui um imenso campus com seu prédio principal possuindo arquitetura imperial, cercando um grande pátio central com gramado e parquinho. Seu prédio principal se divide para um lado em uma ala com salas de aula do ensino infantil e para outro lado com salas de aula do ensino fundamental. As salas de aula costumam possuir poucos alunos e não possuem quadros negros ou brancos, visto que os alunos que atende são deficientes visuais. Durante a pesquisa, em 2015, o pesquisador percebeu em torno de 6~7 alunos por sala, chegando a haver uma turma com 4 alunos e uma com 12 alunos no ano de 2015.

Nem todos os alunos do IBC são cegos. Alguns são e outros possuem baixa visão. Com os cegos, são usadas apostilas em braile e, com os alunos de baixa visão, são usadas apostilas com letra aumentada que equivalem à apostila em braile. A alfabetização dos alunos cegos é feita inteiramente em braile. O Instituto possui também um programa de reabilitação para pessoas que perderam a visão (todas as idades) e o Núcleo De Capacitação e Empregabilidade (NUCAPE), que tem como objetivo inserir pessoas cegas, de baixa visão e surdocegas no mercado de trabalho e na sociedade.

O Instituto conta com um setor de estimulação precoce que trabalha com crianças cegas e de baixa visão de 0 a 3 anos e 11 meses de vida, buscando desenvolver os sentidos remanescentes (audição, tato, olfato e paladar), priorizando as ações e funções motoras. Para tal, conta com especialistas em deficiência visual e motricidade. O IBC também conta com serviços de oftalmologia, clínica médica, psicologia, fonoaudiologia e assistência social que dão suporte à estimulação precoce.

O instituto também envia profissionais para outras instituições para ministrar cursos de aperfeiçoamento para professores.

3.4. Os sujeitos

Os sujeitos desta pesquisa foram selecionados dentre alunos cursando o oitavo e nono ano do ensino fundamental no Instituto Benjamin Constant. O principal fator de seleção foi a perda da visão cedo o bastante para que não houvesse referências visuais que pesassem na fala, embora seja normal encontrar conjugações do verbo "ver" na fala dos cegos em geral, como reflexo da interação com videntes. Foram selecionados cinco alunos cegos, chamados aqui de "Aluna A", "Aluno B", "Aluno C", “Aluno D” e “Aluna E”. Entretanto, o Aluno C não apresentou resultados relevantes a serem analisados, sendo sua fala repleta de “não sei” ou “não lembro”, logo, foi cortado desta pesquisa. Nenhum deles é interno do IBC durante a semana e todos leem apenas em braile.

As entrevistas dos alunos A e B foram pensadas como estudo piloto e feitas em época de provas, sendo a Aluna A entrevistada ao longo de dois intervalos e o Aluno B após a realização de uma prova bimestral. Ambos cursavam o nono ano do ensino fundamental quando entrevistados em 2015 e eram da mesma classe.

O Aluno D e a Aluna E foram entrevistados tendo em mente diversos detalhes falhos nas entrevistas anteriores, havendo um maior cuidado na fala do pesquisador e na abordagem dos problemas. O Aluno D foi entrevistado após uma prova bimestral e a Aluna E durante horário de aula, com autorização da respectiva professora. Os dois cursavam oitavo ano do ensino fundamental quando entrevistados em 2016, sendo ambos da mesma turma.

Durante as aulas do nono ano (2015), o conteúdo que estava sendo estudado pelos alunos do nono ano era relações trigonométricas no triangulo retângulo e funções. Uma habilidade que todos os alunos, inclusive os sujeitos da pesquisa, demonstraram foi um bom cálculo mental. Em geral, eles só escreviam no papel o resultado final dos problemas. Os alunos do oitavo ano (2016) estavam estudando números decimais e relações entre retas (paralelas, concorrentes e coincidentes).

3.4.1. Os sujeitos do estudo piloto

A Aluna A possuiu visão subnormal até os 3, quando piorou a ponto de não ser capaz de enxergar letras e aos 6 anos já estava cega por completo. Aos 7 anos foi para o IBC e tinha 16 anos quando foi entrevistada. Antes de ir para o IBC, frequentou várias escolas perto de casa. Ela costuma estudar por conta própria, mas disse que sua mãe e a mãe de outros alunos ajudam na leitura de textos que não estão em braile e que inclusive, os alunos se ajudam muito entre si. Ela relatou que em sala é utilizado o geoplano para mostrar figuras, considera esse recurso bom para entender o conteúdo e demonstra familiaridade ao manuseá-lo. Durante as aulas, o pesquisador observou que ela está sempre o mais próximo possível da mesa do professor se empenhando em resolver os problemas passados em sala. Embora tendo terminado o ensino fundamental em 2015, o pesquisador notou que em 2016 ela ainda ia ao IBC quando tinha alguma dúvida e precisava da ajuda dos professores.

O Aluno B é cego desde os 11 meses e tinha 14 anos quando foi entrevistado. Ele mora no Centro do Rio e após o Jardim I veio para o IBC, onde fez a estimulação precoce. Mora apenas com o pai e estuda por conta própria, relatando que não costuma estudar matemática lendo, mas prefere ouvir e entender os exemplos. Durante as aulas ele praticamente não interage, mas quando é questionado sobre um problema passado pelo professor, ele responde devidamente, mostrando que está sempre prestando atenção e resolvendo mentalmente os problemas. Em geral, ele prefere resolver os problemas dessa forma. Ele relatou que tem dificuldades com algumas fórmulas de geometria e, como diz, se "embola" com algumas aplicações de Pitágoras, mas tem facilidade com funções. Também está familiarizado com o geoplano e o considera bastante interessante por "concretizar" a ideia da forma. Também contou como entende as funções, e ao ser questionado sobre como estuda em braile, ele respondeu o seguinte:

> *Aham* (Sobre estudar em braile). *Apesar de que eu não costumo aprender muita matemática lendo.... Eu gosto mais de ouvir aplicação, pegar fórmula, aí tendo aprendido a fórmula eu vou lá e olho o problema. E aí eu acho um sentido na fórmula. Tipo.... Sei lá... deixa eu achar uma formula aqui pra te falar.... Fazer uma função, porque é o que tá na minha cabeça agora, que é o que tá dando em álgebra. Vamo lá... f(x)=10x. Então, sendo função de x em x... Não, mentira... Sendo f(x), calculo f(2). Eu não gosto de fazer o que as pessoas geralmente fazem de substituir, depois fazer no papel, multiplicar.... Eu pego e eu raciocino. Por exemplo, se f(x) é 4x, f(2) é 8. Pegar outro exemplo.... Ah, várias fórmulas de geometria, de física... Não, de física eu não entendo, porque física as fórmulas não têm muita lógica não.*

Trecho 1

Embora o que o Aluno B tenha feito em seu exemplo tenha sido de fato substituir o 2, nota-se que ele faz o processo sem ser decorando uma "receita".

O Aluno C relatou que tende a esquecer conteúdos antigos e não sabe dizer no que tem dificuldade em matemática. Foi difícil conseguir diálogos satisfatórios com ele, pois costuma ser vago em algumas respostas, dizendo "não sei" ou "não lembro" e tampouco domina conteúdos aprendidos em anos anteriores. Foi então retirado da análise de dados por não apresentar respostas relevantes. Na época em que foi entrevistado, tinha 19 anos.

3.4.2. Os sujeitos do estudo principal

O Aluno D é cego de nascença, tendo havido uma má formação da retina durante a gestação que, segundo ele, os médicos não conseguem explicar, mas possui um globo ocular normal. Tem 16 anos durante a pesquisa e mora em São Cristóvão, na Zona Norte do Rio. Frequenta o IBC desde os 4 meses, havendo passado pela estimulação precoce. Costuma estudar sozinho e evita pedir ajuda para os outros, mas quando precisa, conta com a ajuda da mãe, da avó ou da namorada. Começou recentemente a estudar linguagens de programação e costuma usar um notebook com leitor de tela durante as aulas, estando já habituado com a posição das teclas no teclado, uma vez que estuda informática desde os 7 anos. Ele relatou que tem dificuldade com a parte de álgebra em matemática, dando destaque à transformação de fração em número decimal e vice-versa, a qual ele não consegue entender. Por outro lado, gosta de geometria e se sente bastante incentivado nessa área por conta de sua professora.

A Aluna E é cega de nascença, tendo havido descolamento de retina por conta de um problema na incubadora. Ela tem 16 anos e mora em Bangu, na Zona Oeste do Rio. Frequentou o IBC e outro colégio ao mesmo tempo na infância (em horários separados). Costuma estudar sozinha, mas às vezes estuda com as amigas, tendo ajuda da irmã mais velha quando necessário. Odeia matemática, dizendo que sua maior dificuldade é com equação. Segundo ela "*esse negócio de álgebra aí não é comigo não*".

3.5. Roteiro das entrevistas

A pesquisa foi organizada em dois grupos de perguntas: um grupo de perguntas pessoais acerca do contexto escolar e familiar do aluno; e um grupo dos problemas matemáticos.

As perguntas de contexto escolar e familiar não possuiam um momento específico para serem realizadas. Elas foram feitas ao longo da pesquisa em meio aos diálogos e já foram expostas no capítulo anterior ao se apresentar os sujeitos da pesquisa.

Durante as entrevistas, os alunos possuíam à disposição, caso quisessem, um geoplano e, em determinados problemas, um material específico para tal.

Os problemas matemáticos foram abordados de forma a evitar o termo “prova”, pois o pesquisador receia que tal termo possa assustar os alunos ou fazê-los imaginar de que está sendo cobrado algo além de sua capacidade.

Problema 1: Dados dois pontos em uma reta, quantos pontos existem entre eles? Por quê?

- **Primeiro momento**: Procurou-se averiguar com este primeiro problema como são concebidos ponto e reta no pensamento do aluno, suas representações e como essas são manipuladas (se manipuladas) pelo aluno, sendo observado também como é a relação entre reta e ponto. Não se esperou necessariamente respostas corretas do ponto de vista formal ou com rigor para o problema 1, mas ainda é pertinente para analisar a fala do aluno.
- **Segundo momento**: Em seguida, os objetos matemáticos foram trabalhados em cima das representações trazidas pelo aluno. Se um aluno insiste em dar exemplos para justificar respostas erradas, lhe é perguntado se não existem mais pontos do que o respondido, escolhendo para isso uma forma diferente de representar a reta.

Problema 2: Ao se multiplicar o lado de um quadrado por 2, o que acontece com a medida da área dele?

- **Primeiro momento:** O aluno pode solicitar o uso de material concreto, como o geoplano, por exemplo. Após a resposta inicial, é perguntado ao aluno quais são as definições de quadrado e área.
- **Segundo momento:** No caso de as definições não estarem bem formuladas, elas são corrigidas (isso se repete em todos os problemas). No caso de a resposta ser errada ou não ser genérica, é perguntado de um caso com lado consideravelmente maior ou lado genérico.

Problema 3: Dado um quadrado, tomando os pontos médios de cada lado e ligando-os dois a dois, que nova figura é formada? Por quê?

- **Primeiro momento:** Objetivou-se averiguar qual a estratégia adotada para justificar a resposta dada, quais conceitos/definições usados em tal estratégia, como os conceitos/definições são manipulados e como os alunos ligam os pontos médios. Um geoplano foi oferecido e, caso usado, é perguntado após formar um quadrado, onde ficam os pontos médio na figura formada.
- **Segundo momento:** Caso o aluno ligasse os pontos no geoplano em forma de cruz, pergunta-se em que tipo de formas menores o quadrado grande foi dividido. Respondendo corretamente que são 4 quadradinhos, é perguntado o porquê de serem quadrados. No caso de ligar os pontos médios formando um único quadrado interno ao quadrado original, é perguntado novamente que forma é aquela no centro. Caso responda corretamente, mas não consiga mostrar que é um quadrado, é perguntado novamente qual a definição de quadrado, como estímulo a usar elementos da definição, como ângulos e lados, para buscar uma justificativa. Em ambos os casos, quando a resposta não é um quadrado, é interessante ouvir as justificativas dos alunos para entender falhas conceituais trazidas por eles ou ideias alternativas não pensadas aqui.

Problema 4: Qual a soma dos ângulos internos de um triângulo? Por quê?

- **Primeiro momento:** Objetivou-se averiguar a manipulação de propriedades conhecidas, como em problemas anteriores.
- **Segundo momento:** Havendo poucos conceitos a serem manipulados, é dada uma ideia de como proceder pensando em uma reta paralela a uma base determinada para que o aluno trabalhe em cima de propriedades recorrentes do axioma das paralelas. Havendo dificuldade com a utilização de propriedades ligadas a retas paralelas cortadas por uma transversal, é sugerido pensar em completar um quadrilátero cuja metade é o triângulo.

Problema 5: Qual a maior fração? 3/4 ou 9/10? Por quê? (Não vale igualar os denominadores)

- **Primeiro momento:** Ao restringir o método de solução, espera-se averiguar que tipo de objetos os alunos associam às frações e como isso é usado/manipulado para argumentar e justificar a resposta dada. O aluno pôde solicitar o uso de qualquer material concreto disponível, como o soroban. Embora não seja um problema de geometria, comparar frações é algo que costuma levar o vidente a pensar em uma representação visual das mesmas, sendo então interessante investigar a fala dos cegos neste caso.
- **Segundo momento:** Dependendo da primeira resposta, pode ser sugerido que se pense com o que falta para o todo ou a utilização de um objeto concreto diferente.

Problema 6: *(Após apresentar o material específico para o problema 6 ao aluno).* Quantos palitos são necessários para montar 3 triângulos? E uma quantidade genérica?

- **Primeiro momento:** Para o problema 6, foi disponibilizado ao aluno um material concreto organizado com a atividade. Consiste de uma sequência de palitos, inicialmente formando um triângulo e então adicionando-se dois para formar um segundo triângulo e assim sucessivamente. Esperou-se ver tentativas de generalização e os argumentos por trás dela.
- **Segundo momento:** O máximo de intervenção planejada para um segundo momento foi mostrar mais triângulos formados e ir contando o total de palitos para cada quantidade de triângulo, esperando que o aluno perceba uma sequência.

4. O estudo piloto

Neste capítulo é abordado o estudo piloto, realizado em novembro de 2015 com os alunos cursando o nono ano do ensino fundamental: Aluna A e Aluno B.

Apesar de se tratar de um estudo piloto, foi incluído por ter apresentado resultados bastante relevantes, que são abordados no próximo capítulo.

4.1. Problema 1: Concepções acerca de reta e ponto

Inicialmente, foi perguntado aos alunos como eles pensam em uma reta, com exceção da Aluna A. Não se esperou definição formal, mas ainda assim é interessante notar como cada um faz referência a esta.

No caso da Aluna A, foi realizada a pergunta 1 sem questioná-la sobre "reta" antes, mas ao responder a pergunta, ela apresentou uma representação interessante. Após a pergunta "*Dados dois pontos numa reta, quantos pontos tem entre eles?* ", ela se utilizou de uma resma de folhas que estava ao seu lado. "*Hmm... Dois pontos de uma reta... Um exemplo aqui: Uma reta, daqui até aqui.* " disse ela, pegando então a resma de folhas que estava ao lado e usando um dos lados da folha para representar a reta, sendo os vértices desse lado da folha os dois pontos dados. De início ela não entendeu a parte de "quantos pontos existem entre dois pontos da reta", mas o pesquisador seguiu utilizando-se do exemplo que ela formou da reta.

> ***Pesquisador***: *Você tem uma reta aqui né? Que é esse canto* (lado) *que você usou da folha.*
> ***Aluna A***: *Sim. Ok.*
> ***Pesquisador***: *Você tem esses dois pontos* (dois vértices da folha)*. No meio desses dois pontos, tem quantos pontos?*
> ***Aluna A***: *Hmmm.... Um só. Que é esse aqui né, que é o meio.... Não?!*
> (Ela aponta para o lado da folha se referindo ao segmento entre os dois pontos)
> ***Pesquisador***: *O meio é um ponto?*
> ***Aluna A***: *Não! Acho que nenhum!*
> ***Pesquisador***: *Nenhum ponto?*
> ***Aluna A***: *Ééé.... Eu acho que nenhum, professor.*

Trecho 2

Após isso, o pesquisador a lembrou de que as respostas não precisam estar necessariamente corretas, mas que o importante era entender a argumentação dada por ela, perguntando então o porquê de não ter nenhum:

Pesquisador: *Por que que não tem nenhum? É.... porque você acha que a reta é assim?*
Aluna A: *Olha professor.... Usando isso daqui* (apontando para o canto da folha), *eu acho que não tem nenhum porque, porqueee... Se esse vértice aqui é um quadradinho e ele é um ponto e aqui é outro e é um ponto* (apontando para o outro canto), *eu não tenho o mesmo canto aqui... aqui no meio!*

Trecho 3

Nota-se pela concepção de reta da Aluna A, que os pontos remetem a quadradinhos, possivelmente por conta do formato do canto da folha, cuja borda foi tomada como exemplo. Segundo professores de matemática do IBC, em séries anteriores retas e pontos são trabalhados com barbantes com nós e arestas de sólidos geométricos, onde os vértices seriam os pontos. Para a aluna, como não há vértices no interior do segmento representado pelo lado da folha, não há "quadradinhos" ali dentro, logo não há pontos. Sendo assim, o pesquisador decidiu começar a intervir, apresentando novos estímulos gradualmente. Ele moveu a ponta do dedo indicador da Aluna A para um local da borda da folha e perguntou quantos pontos havia então entre esses dois. Dessa vez a Aluna A respondeu imediatamente 2, então o pesquisador supôs que ela ainda estava usando os vértices da folha como referência:

Pesquisador: *Não, se os dois pontos iniciais forem onde eu falei agora.*
(Referindo-se a dois pontos aleatórios na borda da folha, que não são os vértices).
Aluna A: *Se esses pontos ao invés de ser aqui* (Aponta para os cantos) *fossem aqui* (aponta para locais aleatórios na região central do lado da folha).
Pesquisador: *Isso.*
Aluna A: *E formando assim, um triângulo?* (Ela aponta para uma posição fora da folha)
Pesquisador: *Não, não. Tudo na reta. O seu universo aí é a reta.*
Aluna A: *Teria dois.*
Pesquisador: *Dois pontos entre eles?*
Aluna A: *Ééé... eu acho que é.*

Trecho 4

Vendo que a intervenção não resultou em uma mudança no raciocínio, o pesquisador resolveu seguir com as perguntas, mas logo retornando ao problema 1, tendo agora na mesa um geoplano. A ideia agora foi sugerir uma diferente representação da reta à Aluna A e ver como ela raciocina num outro contexto. É então sugerido à Aluna A que use uma das linhas do geoplano para representar a reta. Claramente se trata de um segmento de reta, mas visto que ela já estava se utilizando de um segmento antes, resolveu-se focar no problema mais urgente para a questão: a representação de um "ponto" que estava sendo utilizada.

Com a primeira resposta, viu-se que para a Aluna A, para haver pontos entre dados dois pontos, o objeto que representa o ponto deve se repetir no interior desses dois pontos dados, o que só se mostra um problema quando se toma como ponto um objeto concreto sem abstrai-lo. No caso em que o indicador foi levado a locais no meio da borda da folha, fica a dúvida de quais "dois pontos" ela contou. A princípio se imagina que ela usou a ponta dos seus próprios dedos indicadores como "ponto" para contagem. Isso se torna evidente quando o problema volta a ser trabalhado no geoplano. Ela inicialmente escolhe dois pontos adjacentes:

Aluna A*: Um, dois...* (ela inclui na contagem os que escolheu)
Pesquisador*: Não, mas esse tá entre esses aqui?*
Aluna A*: Não... Entre esses dois aqui que o senhor quer?*
Pesquisador*: É, entre os que você escolheu.*
Aluna A*: Tem zero.*

Trecho 5

Vendo que o raciocínio voltou ao do primeiro caso, o pesquisador então pede para escolher outros dois pontos quaisquer na reta, aqui representada por uma linha do geoplano. Ela escolhe como dois pontos, dois pinos do geoplano que possuem um pino entre eles. A resposta agora para quantos pontos há entre os dois pontos dados foi 1.

O raciocínio da Aluna A segue um esquema de prova empírico perceptual. É difícil classificar dentro da hierarquia de Balacheff, visto que não há generalização. Cada caso é simplesmente observado e contado. Após confirmar o raciocínio da Aluna A, o pesquisador entrega uma caneta para ela:

***Pesquisador**: Imagina que as extremidades dela* (a caneta) *são os pontos... Er... não encosta na extremidade que você vai manchar sua mão... Mas... Quantos pontos tem entre esses dois pontos?*
***Aluna A**: Zero.*
***Pesquisador**: Zero. Tem nenhum ponto aí...*
***Aluna A**: Não. Aqui que eu tô vendo não...*
***Pesquisador**: Mas então a reta tá furada?*
***Aluna A**: Ah... AHHH! Entendi. Entendi. Tem vários pontos aqui, pra não deixar uma falha.*
***Pesquisador**: Aham. E quantos são esses pontos?*
***Aluna A**: Quantos são esses pontos.... Não sei.*
***Pesquisador**: Só sabe que são muitos?*
***Aluna A**: É. Pelo jeito que o senhor falou, devem ser muitos, porque...*
***Pesquisador**: Não, você que falou que tem muitos.* ("vários" na verdade)
***Aluna A**: Porque o senhor falou o seguinte... Se você tem uma reta e... entre essas retas... Você tem uma reta...* (Aparentemente aqui ela confundiu os nomes) *aí você perguntou quantos pontos tem, aí eu disse zero, aí o senhor falou "então ela tá furada!". Se uma reta... a gente sabe que não é furada, então, se ela não tá furada, significa que ela tem vários pontos, mas eu não sei como fazer pra ver quem são esses pontos.*

Trecho 6

Nota-se que a pergunta sobre os furos na reta foi crucial para uma mudança de discurso por parte da Aluna A. Antes ela simplesmente contava quantos elementos caracterizados como "ponto" havia entre os dados dois pontos. Com o questionamento dos furos, ela desenvolveu um simples e correto argumento para haver vários pontos entre dados dois pontos na reta. Partindo das premissas que "se zero for a resposta então a reta é furada" (premissa estabelecida pelo pesquisador e com a qual a aluna concordou) e que "a reta não é furada", a aluna concluiu que tem a reta tem vários pontos (o que seria para ela a negação de ter zero pontos). Ela não soube inferir depois que há infinitos pontos, mas já mostrou um avanço em relação à resposta anterior, embora não consiga imaginar tais pontos, como consequência de possivelmente estar presa à representação concreta dos pontos.

A partir daí o pesquisador deliberadamente aumentou a intervenção com o intuito de aprimorar o esquema de prova, caso possível:

***Pesquisador**: Então você sabe que entre esses dois pontos tem pelo menos um ponto, certo?*
***Aluna A**: Ok.*

***Pesquisador**: Agora eu vou dar uma dica para você tentar desenvolver a resposta. Se tem entre esses dois pontos, dá um nome pra esses dois pontos quaisquer, A e B, se entre esse A e esse B tem um C, o que você pode dizer a partir daí, seguindo essa lógica?*
***Aluna A**: Que tem um ponto, entre A e B.*
***Pesquisador**: Tá, você tem um ponto entre A e B. Mas aí quantos mais pontos você pode encontrar?*
***Aluna A**: Posso encontrar mais dois.*
***Pesquisador**: Como?*
***Aluna A**: Porque.... Aqui professor.... Um exemplo assim... Se eu tenho aqui.... Peguei aqui, tá? A e B. Aqui eu tenho C no meio. Sobrou dois aqui. Pode ser... Sei lá, F e G, não sei.*
***Pesquisador**: Aonde tem F e G?*
***Aluna A**: É um exemplo, tá? De nome. Esses dois aqui, que ficaram sobrando aqui.... Pode ser os outros dois pontos.*
***Pesquisador**: E acabou por ai?*
***Aluna A**: Não, poderia ter mas um aqui, pra preencher, ou mais dois. Pra preencher o espaço.*
***Pesquisador**: E quantas vezes você pode ir preenchendo?*
***Aluna A**: Deixa eu ver... Não sei.*
***Pesquisador**: Hm.... Você foi aí várias vezes preenchendo, certo?*
***Aluna A**: OK.*
***Pesquisador**: Você pode fazer isso até quando? Pra sempre?* (*)
***Aluna A**: Infinito.*
***Pesquisador**: Ah, você pode preencher com novos pontos... infinito.*
***Aluna A**: É, eu acho que é.*
***Pesquisador**: Então tem quantos pontos?*
***Aluna A**: Infinito. Muitos.*
***Pesquisador**: Infinito e muito é a mesma coisa pra você?*
***Aluna A**: Ah.... Infinito é uma coisa que é pra sempre... Muitos você ainda pode calcular quantos são.... Eu acho que é isso.*

Trecho 7

Aqui nota-se que a Aluna A desenvolveu bem o raciocínio indutivo ao ir preenchendo os espaços vazios que sobravam com pontos que deveriam necessariamente existir ali. Constatou-se que com um estímulo inicial, ela é capaz de desenvolver um raciocínio com lógica. Entretanto, o "*Pra sempre?*" do pesquisador pode ter impedido um maior desenvolvimento, visto que ela associa "infinito" a algo que é "pra sempre", ou seja, essa linha de pergunta (*) induziu a resposta final, o que não foi de todo ruim, visto que deu espaço para entender o conceito utilizado por ela de infinito e a diferença de "muitos", onde "infinito" seria uma versão de "muitos" na qual não há como calcular quantos (elementos) há.

Partindo para o Aluno B, teve-se inicialmente uma concepção mais flexível em relação à Aluna A acerca dos pontos na reta. Ele exemplificou uma reta colocando sobre a mesa a ponta de seus indicadores e dezendo "*Assim. Uma linha reta, entre dois pontos*":

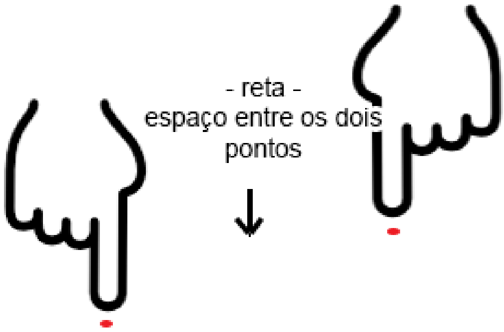


Figura 1: Exemplificação de reta pelo Aluno B

Ao ser questionado sobre o que está fora desses dois pontos, disse que "*é bastante relativo. Porque assim, se tiver falando de uma linha reta, eu vou estar me restringindo só aos pontos que ela abrange. Vamos colocar.... Uns três marcos. Mas pode ser uma reta larga também*". Ou seja, assim como no caso da Aluna A, ele considera que retas são segmentos. Eles não pensam nelas se estendendo infinitamente, embora esse problema seja, a princípio, possível de se trabalhar com a Aluna A, visto que ao menos entre dois pontos ela conseguiu entender a presença de uma "infinidade" (de pontos). Prosseguindo para a pergunta 1 com o Aluno B, o pesquisador obteve uma resposta interessante:

Pesquisador: *E entre dois pontos dessa reta, tem quantos pontos?*
Aluno B: *Depende da reta, depende da extensão dela.*
Pesquisador: *Da extensão?*
Aluno B: *Depende de como eu vá marcar essa reta. De quanto em quanto no intervalo em que eu vá marcar os pontos.*
Pesquisador: *Mas, por exemplo.... Define uma reta aí* (referindo-se aos dedos que ele usou para expressar os pontos de uma reta) *com dois pontos.... Essa que você indicou aí. Entre esses dois pontos que estão aí. Entre esses dois pontos, tem quantos pontos?*
Aluno B: *Vamos colocar assim... O ponto A e…*
Pesquisador: *... o ponto B.*
Aluno B: *E entre os dois eu posso colocar vários marcos intercalados na reta.*
Pesquisador: *Vários? Quantos?*
Aluno B: *Depende do intervalo. Vamo lá.... Um.... Dois.... .... Quatro. Posso colocar quatro* (ele contou quantas pontas de dedo cabiam entre os dedos que representavam

os pontos A e B)*. Mas se eu decidir colocar um intervalo mais pequeno... menor. Posso colocar um, dois...*
***Pesquisador**: Você pode ir diminuindo esse intervalo?*
***Aluno B**: Aham.*
***Pesquisador**: O quanto você pode ir diminuindo?*
***Aluno B**: Ah, vamo la.... Nesse caso aqui, até catorze pontos... Quinze...* (ele contou quantos pontos cabiam entre A e B, agora num intervalo maior)*.*
***Pesquisador**: Ah, o que seria o tamanho do seu dedo, pela conta?*
***Aluno B**: É!*
***Pesquisador**: Entendi.... Mas.... Só pode usar o tamanho do seu dedo para os pontos na reta?*
***Aluno B**: Não. Pode usar o tamanho que quiser.*
***Pesquisador**: E aí eu posso diminuir esse tamanho o quanto?*
***Aluno B**: O máximo possível. Posso colocar o tamanho do meu dedo, posso colocar o tamanho d'uma agulha.*
***Pesquisador**: Entendi.... Mas se nesse caso aí, se tiver só 14 pontos como você falou. Vai preencher a reta toda? Não vai deixar nenhum buraco na reta?*
***Aluno B**: Vai.*
***Pesquisador**: Vai preencher ou...*
***Aluno B**: Preencher* (Ele volta a contar quantos pontos cabem batendo com a ponta do dedo no espaço entre A e B). Dezesseis*, dá até pra botar mais!*

Trecho 8

Nota-se que a estratégia adotada pelo Aluno B consistiu em verificar empiricamente quantas vezes o objeto que considera como ponto cabe no intervalo desejado, diferente da Aluna A, que inicialmente verificou empiricamente quantas vezes o objeto que considera como ponto aparece de fato no intervalo desejado, no sentido de ser percebido de forma concreta. Enquanto a Aluna A contou quantas vezes o ponto "aparece", o Aluno B quantas vezes o ponto "cabe". Além do mais, o "ponto" do Aluno B é flexível em tamanho, então ele pode considerar pontos de tamanhos suficientemente pequenos para que caibam tantos pontos quanto se queira. Um problema a se destacar no caso do Aluno B é que independentemente do "tamanho" escolhido para os pontos, não ficam buracos na reta (ou no segmento, no caso), logo, faltaram estratégias por parte do pesquisador para guiar o aluno a um desenvolvimento dos conceitos trabalhados, não havendo assim uma continuidade nos estímulos a serem apresentados. No caso da Aluna A, embora ainda não consiga imaginar os pontos alocados na reta, ela conseguiu abstrair a nível de reconhecer uma quantidade infinita do ente chamado "ponto". Ambos seguem esquemas de prova perceptuais.

Mudando para um novo momento de intervenção, o pesquisador tentou sem sucesso desenvolver um raciocínio indutivo:

***Pesquisador**: Mas entre esses dois pontos você consegue pelo menos um ponto, certo? Antes você tinha A e B.*
***Aluno B**: Certo.*
***Pesquisador**: Agora você consegue botar um ponto C aí dentro, certo?*
***Aluno B**: Aham.*
***Pesquisador**: Entre esse ponto A e o C, você consegue colocar outro ponto ou depende?*
***Aluno B**: Entre A e C... Tá no meio exato dos dois? Tipo, eu coloco exatamente no centro?*
***Pesquisador**: Não, em qualquer lugar. Não necessariamente no centro.*
***Aluno B**: Bom... Dá! Dá pra colocar mais pontos. Apesar de que depende também... Porque se você colocar o C muito colado em qualquer um dos dois... Não vai ter espaço.*

Trecho 9

Mesmo assumindo que os pontos podem ser muito pequenos, o Aluno B assumiu que sempre há uma quantidade finita de pontos que cobre o segmento, sendo então a problemática a forma como um ponto é concebido, como percebido anteriormente.

4.2. Problema 2: Concepções acerca de quadriláteros e área

A Aluna A só foi questionada sobre a definição do quadrado no problema 3, mas adiantando aqui para se analisar sua concepção juntamente com a do seu colega, ela o definiu da mesma forma que o Aluno B: “Um polígono com quatro lados iguais e quatro ângulos iguais”.

Inicialmente no problema 2, houve uma confusão no uso da palavra “dobrar” em “dobrar o lado”. A Aluna A entendeu que fosse dobrar o quadrado e virar um triângulo. Após resolver o mal-entendido, ela seguiu raciocinando com exemplos:

***Aluna A**: Hmm... Dá um exemplo de uma área...* (antes que o pesquisador continuasse a falar, ela prossegue) *Se você tem uma área 25. É isso?*
***Pesquisador**: É... O quadrado de área 25 tem quanto de lado?*
***Aluna A**: De área 25 vai ter... Eu acho que vai ter 5 de lado*
***Pesquisador**: Isso. E se eu agora do- multiplicar por 2. Ao invés de 5, agora é 10.*

***Aluna A**: Aí a área vai dobrar. A área ao invés de 25 vai ser 50.... Não. Não, não, não... ... . Eu acho que vai ser 100.*

Trecho 10

Apesar dela ter conseguido perceber o próprio erro e ainda justificar em seguida o porquê de a área ser 100 quando se dobra o lado, ela não notou de imediato o que acontece no caso geral:

***Pesquisador**: Então quando eu tenho um quadrado qualquer, se eu multiplico o lado por 2, a área... acontece o que com ela?*
***Aluna A**: Dobra. Vai ser maior.*
***Pesquisador**: É, vai ser maior, mas... quanto maior? Tipo, a de 25 pulou pra 100 quando você multiplicou por 2 o lado. E um lado qualquer?*
***Aluna A**: Hmm... Deixa eu ver... De 25 foi pra... hmm.... um... dois... três... Acho que foi três vezes maior.*
***Pesquisador**: Três vezes maior?*
***Aluna A**: Sim.*
(...)
***Pesquisador**: E você acha que isso acontece em todo quadrado quando você dobra o lado?*
***Aluna A**: É, eu acho que sim!*

Trecho 11

Como visto, ela parece ter se convencido até certo ponto, por apenas esse exemplo, de que o mesmo padrão ocorrerá sempre. Tal fato indica um esquema de prova empírico na hierarquia de Balacheff, uma vez que ela reconhece como aceitável um exemplo para justificar a que “sim”, mas também não tenta refletir sobre. Infelizmente não houve um segundo estímulo para desenvolvimento do problema, mas no caso do Aluno B isso foi possível.

Assim como a Aluna A, o Aluno B definiu um quadrado como “Um polígono com quatro lados iguais e quatro ângulos iguais”. Ao começar o problema 2, ele inicialmente perguntou se deve multiplicar todos os lados por 2. O pesquisador então perguntou o que aconteceria se multiplicasse apenas um dos lados e ele respondeu corretamente que viraria um trapézio. Aparentemente ele consegue imaginar e trabalhar bem com as formas geométricas.

Voltando ao problema, o Aluno B respondeu que a área aumenta em função dos lados. Em seguida, ele começou a tatear o geoplano para auxiliá-lo a refletir sobre o problema, mas logo o ignora e começa a pensar em exemplos por conta própria:

***Aluno B**: Colocar uns valores aqui hipotéticos.... Se eu tinha 10, a área vai ser 100. Agora vai ser 20, a área vai ser 400.*
***Pesquisador**: Certo.*
***Aluno B**: A área.... Multiplicando lado por 2, a área é 4 vezes a outra.*

Trecho 12

Ao ser questionado, o Aluno B disse que usou o exemplo de base para afirmar isso. O pesquisador então perguntou se isso é verdade sempre: se todo lado de um quadrado for multiplicado por 2, a área será multiplicada por 4. O Aluno B então tentou pensar em outro exemplo:

***Aluno B**: Bom.... Não necessariamente.... Pegar outros valores aqui pra ver... 40... 40 vezes 40 dá 1200... 80 vezes 80 vai dar... 6400.... É, não necessariamente.*
***Pesquisador**: Qual exemplo que você pensou?*
***Aluno B**: Eu peguei 40 e 80.*
***Pesquisador**: 40 vezes 40 dá...?*
***Aluno B**: 40 vezes 40 é 1200. Então no caso da área de um quadrado de lado 40 é 1200. Agora...*
***Pesquisador**: 40 vezes 40 dá...*
***Aluno B**: 1600! Foi mal. A área do quadrado dá 1600. Agora eu pego 80. 80 vezes 80 seria... 6400 né. Porque 8 vezes 8 é 64.*
***Pesquisador**: Isso.*
***Aluno B**: Então não necessariamente, a área é 4 vezes a anterior.*
***Pesquisador**: Mas... 1600 vezes 4 dá quanto?*
***Aluno B**: Ih é mesmo! Ah sim, então é quatro vezes sim. Então é regra. Perai.... Pegar um número menos exato pra ver se dá certo... 57...* (Falando baixinho as contas) *... É, me perdi. Mas enfim, é necessariamente sim.*

Trecho 13

Como se nota, ele afirmou que será 4 vezes o valor da área inicial por ter testado dois exemplos e visto que dá certo. Sua estratégia de prova se enquadra em um esquema de prova empírico indutivo. Não chega, entretanto, a ser um empirismo ingênuo, visto que resolveu testar valores específicos que levam a resultados de maior magnitude, pode-se considerar um experimento crucial e, embora tenha citado o número 57, não fez uso dele.

Em seguida, o pesquisador estimulou o aluno propondo que usasse um valor genérico ‘x’:

***Pesquisador**: Pensa com letra agora. Se você tem um lado x, a área vai ser quanto?*
***Aluno B**: 4x*
***Pesquisador**: Não, o quadrado tem lado x. A área desse quadrado é quanto?*
***Aluno B**: x^2*

Trecho 14

O pesquisador talvez devesse ter perguntado o porquê do *4x* antes de negar a resposta, mas o fato do aluno ter se corrigido de forma certa adiantou o diálogo:

***Pesquisador**: x^2. Agora eu multiplico esse lado por 2. Agora é 2x o lado. A área vai ser quanto?*
***Aluno B**: $2x^2$*
***Pesquisador**: O quadrado tá só no x?*
***Aluno B**: Calma aí... Sim, porque o que vai modificar é o resultado do quadrado, não é a conta.*
***Pesquisador**: É, mas o que você eleva ao quadrado é o lado do quadrado, certo?*
***Aluno B**: Certo.*
***Pesquisador**: O lado do quadrado é 2x. 2x vezes 2x...*
***Aluno B**: Ah sim. $4x^2$.*
***Pesquisador**: Aì você consegue ver que vai multiplicar por 4 independente do valor que você escolher?*
(Ele fica pensativo)
***Aluno B**: É.. Não necessariamente...*
***Pesquisador**: Por quê?*
***Aluno B**: Por que nem todo número.... Não, se bem que “x” sozinho conta como 1... Ah não, mas 1 ao quadrado é 1...* (Ele fica pensativo). *Ah, mas a gente não especificou quanto daria né, então podia ser 1 ao quadrado sim... Multiplicando por 2, daria dois ao quadrado e daria 4... É! A possibilidade de ser 4 vezes o valor original é grande.*
***Pesquisador**: Ah... Mas você acha que pode acontecer algum caso que você não previu que não vai dar.*
***Aluno B**: Sim. Eu posso pegar um número muito exato. Muito quebradinho que não vai dar.*

Trecho 15

Percebe-se que o Aluno B entende bem o algebrismo realizado, embora o pesquisador tenha se precipitado em perguntar se o 4 aparecerá em todos os casos. Uma característica que se nota não apenas aqui, mas em outros problemas, é que ele está sempre desconfiado, mesmo quando se convence de algo, ele manteve o posicionamento de “acho que é, mas posso estar enganado”. Convenceu-se das justificativas, mas pressupôs que pode haver um número específico que não siga a regra (“muito exato” nas palavras dele).

4.3. Problema 3: O quadrado e seus elementos

No problema 3, utilizou-se o geoplano desde o início. No caso da Aluna A, manteve-se o quadrado cujo lado media 3 (4 pinos) no geoplano, construído no problema 3 apenas como referência. O Aluno B soube lidar facilmente com o conceito de ponto médio. A Aluna A precisou que o pesquisador a lembrasse de que é o ponto que fica no meio.

No caso da Aluna A, quando foi pedido para ligar os pontos médios, houve um problema em relação ao recurso utilizado. Como o geoplano só possui pontos isolados, não havia ponto a ser pego que seria o ponto médio de um dos lados do quadrado de 4 pinos por 4 pinos. Então o pesquisador pediu para aumentar o quadrado e a Aluna A formou um quadrado de 5 pinos por 5 pinos. Entretanto, quando ela foi ligar os pontos, se deparou com outro problema: não havia elásticos suficientes para fazer o que queria. Tal problema foi resolvido para a entrevista do Aluno B, mas no caso da Aluna A, foi mais complicado, tendo-se que trabalhar apenas com a fala:

> ***Pesquisador****: Não... tem mais não... Mas dava pra usar um só né* (Elástico)*?*
> ***Aluna A****: Um... Não... Acho que não, professor... Porque aí eu liguei esse daqui com desse lado de cá* (indicando dois pontos médios adjacentes)*. Ai faltou transpassar e ligar aqui.*
> (...)
> ***Aluna A****: Tem um triângulo aqui, aí tem outro triângulo aqui*
> ***Pesquisador****: Certo.*
> ***Aluna A****: (...) Eu liguei esse lado com esse, formou um triângulo. Ai eu liguei esse lado com esse daqui. Formou o segundo triângulo. E se eu ligar esse lado com esse daqui vai formar... Um triângulo aqui e outro triângulo aqui, vão ser quatro.*
> ***Pesquisador****: Hmm... Então vão ser quatro triângulos?*
> ***Aluna A****: É professor, eu acho que sim. Esse lado aqui vai ficar um triângulo mais estranho, mas vai ficar um triângulo. Vai ficar uma coisa esquisita.*

***Pesquisador**: Ah, você tá querendo ligar esse ponto a esse ponto aqui?* (Pesquisador indica um ponto médio a outro ponto médio oposto)
***Aluna A**: É.*
***Pesquisador**: Tá, mas aí....*
***Aluna A**: Vai ficar uma coisa meio estranha, mas tudo bem.*

Trecho 16

Por falta de elásticos ficou complicado entender o que a Aluna A imaginou, mas uma possibilidade é de que tenha ligado um ponto médio a todos os outros três, formando dois triângulos e dois quadriláteros que “parecem” triângulos. Mas infelizmente, não será possível confirmar isso.

Após esse início de problema, o pesquisador usou um elástico para ligar os pontos médios da seguinte forma para a Aluna A:

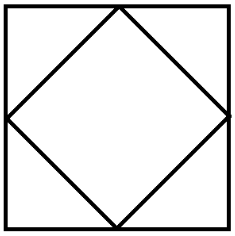


Figura 2: Figura formada ao ligar os pontos médios

A Aluna A então tateia o geoplano, expondo um pseudoconceito de losango:

***Aluna A**: (...) Um.. Dois... Aí ficou bom! E um losango no meio.*
***Pesquisador**: Um losango?*
***Aluna A**: Não.. É... Um pentágono...*
***Pesquisador**: Não é um losango?!*
***Aluna A**: Ih professor, eu esqueci o nome dessa figura... Ficou quatro triângulos...*
***Pesquisador**: Aham...*
***Aluna A**: E uma figura aqui no meio.*
***Pesquisador**: Mas que figura é essa?*
***Aluna A**: Losango... Eu acho que é um losango... Eu acho que é.*
***Pesquisador**: Por quê?*
***Aluna A**: Porque... apesar de ter quatro lados, tá dessa maneira aqui... Esse ponto fazendo ponto aqui em cima, fazendo assim...* (Ela fica apontando para cada vértice do quadrado, que são os pontos médios do quadrado anterior) *e assim.*
***Pesquisador**: Sim, mas o que tem de especial nesses lados?*

***Aluna A**: O ângulo dele, ao invés de estar retinho assim igual um quadrado, o ângulo tá... ah, não sei como explicar professor, mas tá num lugar que... (risos)*
***Pesquisador**: Vamos lá, qual a definição de um losango pra você? O que é um losango?*
***Aluna A**: É um polígono de quatro lados que fica mais ou menos dessa maneira que tá aqui. Dessa maneira que tá aqui. Com esse ângulo aqui ao invés de estar aqui, ele tá aqui no meio, tinha que tá aqui, esse ângulo tinha que tá aqui e esse ângulo tinha que tá aqui. Mas não tá, tá aqui no meio* (Ela fica tocando nos vértices e mostrando onde deveriam estar, indicando uma rotação de um quadrado com a base horizontal para deixá-lo com os lados oblíquos).

Trecho 17

Nota-se um um esquema de prova empírico perceptual, pois sua justificativa para a figura ser um losango teve como base a percepção tátil sobre a mesma, uma vez que sua concepção de losango se dá pelas suas características concretas.

No caso do Aluno B, apesar de já haver mais elásticos, poucos foram usados, pois ele preferiu fazer a maioria das coisas mentalmente. Mesmo assim, usou o geoplano e contou os pinos em um quadrado para ter uma base. Após imaginar os pontos médios ligados, disse que se forma uma cruz. A figura abaixo, feita pelo pesquisador, ilustra a descrição realizada pelo Aluno B:

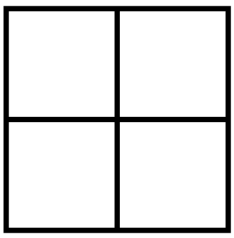


Figura 3: Figura descrita pelo Aluno B

Um detalhe é que ele usou como base um quadrado com lados de quantidades pares de pinos, ou seja, não havia um pino no meio para ajudar, ele usou apenas o formato quadrado no geoplano para ter uma ideia e fez o resto mentalmente. O pesquisador então perguntou o porquê das figuras menores serem quadrados também:

Pesquisador: Você falou que divide em quadrados né? Por que esses quadrados menores são de fato quadrados?
Aluno B*:* Porque eles têm todas as características do maior. Eles são todos iguais... Bom, serem iguais não afeta muita coisa.... Têm ângulos de 90, lado igual...
Pesquisador*:* Ah.... Então tem todos os lados iguais e ângulos iguais?
Aluno B*:* Aham.

Trecho 18

A argumentação do Aluno B consiste em um esquema perceptual de prova, visto que se baseou na percepção de os elementos do quadrado interno possuem as mesmas características do quadrado original.

No caso do Aluno B, como havia elásticos de sobra, ele montou a mesma figura, porém, usou um elástico para cada ligação. Com isso foi possível perceber um conceito que se repete em ambos os Alunos A e B: Dependendo da posição, a figura tem um nome diferente.

Antes de falar da figura no meio, a primeira coisa que o Aluno B nota são os quatro triângulos retângulos:

Aluno B*: Eu vou fazer triângulos retângulos.*
Pesquisador*: Triângulos retângulos?*
Aluno B*: Aham. E daqui pra cá seria uma hipotenusa* (ele indica na figura).
Pesquisador*: E o que mais?*
Aluno B*: Se eu ligar de dois a dois...*

Trecho 19

Embora o pesquisador não tenha perguntado para confirmar, fica claro que ele reconhecia que os ângulos eram retos, mas não é possível afirmar se ele sabia provar isso.

Ao ser questionado sobre a figura do meio (ver Figura 4), o Aluno B, assim como a Aluna A, respondeu que era um losango:

Aluno B*: Sim. Mas aqui no meio eu fiz um losango.*
Pesquisador*: Losango? Por que que é um losango?*

Aluno B*: Cara, agora eu não me lembro as características geométricas do losango, mas ele tem o formato de um losango. Ele é tipo um quadrado.*

Trecho 20

Assim como no caso da Aluna A, o Aluno B não soube definir um losango de forma abstrata, mas reconheceu a figura do centro como sendo um pela posição em que é apresentada. Ao notar isso, o pesquisador girou o geoplano, deixando a figura da seguinte maneira:

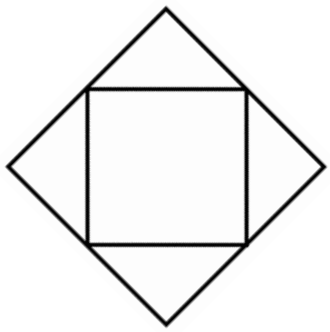


Figura 4: Figura rotacionada ao ligar os pontos médios

A reação da Aluna A foi:

Aluna A*: Aí fica um quadrado.*
Pesquisador*: Porque virou um quadrado?*
Aluna A*: Por que você virou a posição.*
Pesquisador*: Mas se eu viro uma forma geométrica ela passa a ser outra forma?*
Aluna A*: Nesse caso aqui sim (rsrs). O de fora ficou como se fosse um losango, o de dentro virou um quadrado.*

Trecho 21

No caso do Aluno B, o mesmo se repete:

Aluno B*: Se girar assim, o losango vira um quadrado e o quadrado de fora vira um losango.*
Pesquisador*: Ah... Mas se uma figura é uma coisa e você gira ela, ela vira outra?*

***Aluno B**: Na verdade... Dependendo do ponto de vista... É porque to avaliando esteticamente.*
***Pesquisador**: Aham.*
(O pesquisador sai rapidamente para fechar a porta e evitar barulho)
***Aluno B**: É, sim, sim. Vira outra sim!*
***Pesquisador**: Vira outra figura quando você gira?!*
***Aluno B**: Aham!*

Trecho 22

Isso indica que os conceitos dos polígonos utilizados pelos alunos, estão presos a modelos apresentados sem criar categorias de quadriláteros baseados em suas características, o que ocorre também com alunos videntes, que como constatado em De Villiers (2010), costumam não reconhecer quadrados como retângulos, paralelogramos e losangos.

Após os alunos reconhecerem a forma do meio como um quadrado, o pesquisador questionou o porquê de ser um quadrado. No caso da Aluna A, as respostas foram redundantes. Primeiro falou que é um quadrado pois o pesquisador girou a figura. Após conferir as propriedades do quadrado – quatro lados iguais e quatro ângulos iguais – ela foi questionada do porquê de se ter essas características na figura formada. "*Porque é um quadrado!* " foi sua resposta. Mesmo que (possivelmente) brincando, sua fala permaneceu seguindo um esquema de prova perceptual.

Já o Aluno B, desenvolveu bem um diálogo, onde através da fala, os erros do aluno foram sendo trabalhados, levando-o a um desenvolvimento ao longo do problema 3:

***Aluno B**: Agora... Os quatro lados, eles já eram iguais, agora estão iguais e agora... E criei... Eu criei não, eu vejo aqui, por causa do meu ponto de vista, quatro ângulos de 90°. Enquanto do lado de fora, que tinha as características de um quadrado, virou as características de um losango. Porque a ponta... o vértice tá virado pra mim e os lados tão oblíquos.*
***Pesquisador**: Entendo.. E você saberia dizer por que que esses lados aí do quadrado são iguais? Esses que você ligou agora.*
***Aluno B**: Porque eles foram feitos de ponto médio a ponto médio de um quadrado. Um quadrado tem todos os lados com a mesma medida.*
***Pesquisador**: Sim.*

***Aluno B**: Então se eu ligo os pontos médios deles... Aliás, se eu ligo qualquer ponto deles, as ligações vão ser todas iguais.*

Trecho 23

Neste momento, o pesquisador questionou o “qualquer pontos” mudando a posição de um elástico na figura. O Aluno B então percebeu que não é verdade que as linhas se mantêm iguais ligando-se quaisquer pontos. A seguir, sua estratégia para justificar que as linhas são iguais foi por terem sido traçadas a partir do ponto médio de lados que são iguais e têm os pontos médios no mesmo lugar. Esse seria mais um esquema de prova perceptual.

A seguir o Aluno B tentou explicar de outra forma, dando um exemplo:

***Aluno B**: Se você calcular... Não sei, um quadrado que tem 5cm... Ah, o ponto médio vai estar no 3. Aí o ponto médio vai estar no 3 em todos os lados.*
***Pesquisador**: Peraí. O quadrado tem lado 5, que você falou?*
***Aluno B**: É.*
***Pesquisador**: O ponto médio vai estar no 3?!*
***Aluno B**: É, eu to colocando uma situação hipotética... Tipo, um quadrado de lado 5cm.*
***Pesquisador**: Aham...*
***Aluno B**: Eu estabeleço o ponto médio dele no centímetro 3. Se eu ligar centímetro 3 com centímetro 3...*

Trecho 24

Percebendo que esse foi claramente um engano consequente do recurso utilizado – o geoplano – o pesquisador questionou os valores:

***Pesquisador**: Mas aqui, nesse quadrado maior, ele tinha lado 5. E você... Quer dizer... Ah... É que aí tá no terceiro pino né? No geoplano... Mas a distância desse ponto médio até a borda é quanto?*
***Aluno B**: Bom, vamo colocar... 2cm... contando...*
***Pesquisador**: Dois?*
***Aluno B**: É. Ainda contando com o quadrado do lado de cima.*
***Pesquisador**: Aham. Então... Se tem 2cm pra um lado, vai ter que ter 2cm pro outro né? Porque é ponto médio. E ponto é tá no meio.*
***Aluno B**: Aham. Isso.*
***Pesquisador**: Mas se tem 2 pra um lado e 2 pro outro, ele vai ter quanto no total de lado?*
***Aluno B**: Se 2 pra um lado e 2 pro outro e o que?*
***Pesquisador**: Vai ter quanto no total?*
***Aluno B**:* (Pensativo) *Contando com o ponto médio...... 4, mais o ponto médio, 5.*

***Pesquisador**: Mas o ponto... ele tem medida de comprimento?*
***Aluno B**: Não.. o ponto não.... Ahh sim!! Entendi o que você quer dizer.*
***Pesquisador**: É porque o ponto médio de um lado 5 tem que ficar no 2,5.*
***Aluno B**: Aham.*
***Pesquisador**: E você falou 3...*
***Aluno B**: Falei...*
***Pesquisador**: Mas... Continua aí o exemplo que você tava falando.*
***Aluno B**: Ficaria 4... Ao todo... Ou 5... Porque poderia ficar 2 e meio pra cada lado.*
***Pesquisador**: Sim. Mas você estava num raciocínio aí para explicar porque que esses lados são iguais. Do quadrado do meio.*
***Aluno B**:* (Pensativo) *Se eu tinha um quadrado de 5cm... E eu liguei 2,5 a 2,5... Eu no total tenho uma diagonal de 5cm... Então, dentro desse quadrado eu faço outro quadrado igual a ele. Vamos supor: O ponto médio, ele fica no 2 e meio. E eu ligo ele com o ponto médio de algum outro lado. Ele vai ficar 2 e meio também. Somando 2 e meio do lado que ele parte com 2 e meio que sobra do vértice até o ponto que ele chega, eu tenho mais 5cm.*
***Pesquisador**: Mais 5cm onde?*
***Aluno B**: De... Da reta que eu tracei.*
***Pesquisador**: Mas essa nova que você traçou aqui entre os pontos médios, o tamanho dela é esse tamanho mais esse tamanho?* (Indiquei os catetos do triângulo retângulo formado)
***Aluno B**: Não.. Calma.. É um pouco menor... Só quero entender o porquê...*

Trecho 25

Após isso, o pesquisador o lembrou do Teorema de Pitágoras e imediatamente o Aluno B percebeu sua aplicabilidade, entendendo assim o porquê das linhas serem iguais. Já sobre os ângulos, ele argumentou que são de 90° pois se medir com um compasso (termo utilizado pelo Aluno B), verá que são retos. Aqui ele mantém um esquema perceptual.

No caso da Aluna A, o pesquisador perguntou o que ela sabe sobre os quatro triângulos formados. Ela percebeu que são todos congruentes, o que a leva a entender que, por congruência, os lados do quadrado menor são iguais. No caso dos ângulos, o pesquisador também teve de guiá-la a entender através de congruência, perguntando sobre os ângulos agudos que apareciam nos triângulos, fazendo-a perceber que eram iguais. Logo, os ângulos que faltavam para formar os ângulos rasos deveriam ser iguais, vendo assim que o quadrilátero formado era de fato um quadrado.

Nesta parte, apesar do pesquisador ter guiado as ideias, perguntando sobre os elementos principais para se ter as congruências, a Aluna A conseguiu acompanhar e entender sem problemas a maior parte da solução, mostrando dificuldade em perceber os ângulos rasos para entender que a soma de dois ângulos “pequenos” e um “grande” de um lado é igual à de outros lados. Nota-se também que ela entende os termos “equivalentes”, “congruentes” e “iguais” como sinônimos, apesar de não serem.

4.4. Problema 4: Concepções acerca de ângulos e triângulos

No problema 4, o pesquisador começou indo direto ao ponto perguntando qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo. A Aluna A respondeu ao problema 4 corretamente de imediato, mas sua prova não apresentou muito rigor:

> ***Aluna A**: 180.*
> ***Pesquisador**: Por quê?*
> ***Aluna A**: Porque.... Por que um quadrado, a soma dos ângulos internos de um quadrado é 360, e aí se você dobra, como se você, corta esse quadrado ao meio.... Se você passa uma linha aqui cortando* (Ela se referenciando ao quadrado já formado no geoplano), *vai formar dois triângulos. Aqui um triângulo e aqui outro triângulo. Se a soma dos ângulos internos de um quadrado é 360, é obvio que a soma dos ângulos internos de um triangulo vai ser 180. Por que é metade.*

Trecho 26

Ao ser questionada se o professor provou dessa forma, ela disse que não lembrava exatamente como ele fez, mas que o que ela entendeu foi isso, o que indica que seja um esquema de prova interiorizado, no qual ela seguiu um caminho que já sabe, manipulando os objetos e refletindo sobre.

O Aluno B também respondeu corretamente 180°, entretanto sua justificativa foi um tanto peculiar:

> ***Aluno B**: Porque se eu traço uma linha.... Eu escolho qualquer ponto do triângulo e traço uma linha envolvendo o triangulo, eu tenho 180 graus.*
> ***Pesquisador**: Como?! Se você tem um triângulo... e você traça uma linha.... Onde?*
> ***Aluno B**: De qualquer ponto aleatório a qualquer ponto aleatório.... Não, qualquer ponto aleatório não...Partindo de qualquer ponto aleatório do triângulo e fazendo a volta no triângulo até próximo desse ponto, eu tenho 180 graus. Internamente, é claro.*
> ***Pesquisador**: Sim, mas... O porquê de ser 180, você sabe justificar?*
> ***Aluno B**: Não.... Na verdade, até aprendi que era 180, nunca tinha parado pra pensar.*

Trecho 27

Mesmo sabendo que é 180° a resposta, por ter aprendido assim, ele deixou a entender que não é válido um esquema de prova por autoridade e se esforçou tentando desenvolver uma estratégia de prova, embora não tenha conseguido. A seguir, o pesquisador começa a intervir:

***Pesquisador**: Se você completar esse triângulo com outro triângulo igual pra formar um quadrilátero, você vai ter quanto de ângulo interno no quadrilátero?*
***Aluno B**: 360.*
***Pesquisador**: E você saberia explicar o porquê de ser 360 num quadrilátero?*
***Aluno B**: Porque você faz a volta e volta pro mesmo lugar.*
***Pesquisador**: Faz a volta e volta pro mesmo lugar?!*
***Aluno B**: É, se eu pegar esse quadrado aqui. Eu pego e dou a volta nele. Eu voltei pra cá. Então são 360 graus.*
***Pesquisador**: Ah... E no triângulo seria como?*
***Aluno B**: 180... Mas deu uma meia-volta...*
***Pesquisador**: O que seria uma volta inteira? Seria um quadrado?*
(Ele fica pensativo)
***Aluno B**: Uma volta inteira na verdade é um círculo... O que a gente faz quando tenta traçar os graus de um polígono é tentar encaixar um círculo ali dentro e ver quanto o círculo encaixa. Se eu sobrepuser um círculo e um triângulo, o triângulo só vai ocupar metade do círculo, teoricamente, então metade do círculo significa 180 graus. O quadrado por sua vez, vai ocupar o círculo praticamente todo, então, dá pra traçar 360 nele.*

Trecho 28

A explicação do Aluno B mostra que ele de fato possui internalizado um método para calcular ângulos de um polígono, entretanto, não ficou claro para o pesquisador como é esse processo. Mesmo o método estando provavelmente errado, o Aluno B tentou seguir um raciocínio dedutivo (esquema de prova analítico), deixando implicitamente claro que concorda que deve haver uma justificativa para a resposta dada que não seja apenas “porque aprendi assim” ou algo do gênero.

4.5. Problema 5: Representações de frações

No problema 5, a Aluna A, apesar de responder corretamente, teve dificuldades para justificar. Após falar que 9/10 é a maior fração, ela seguiu realizando uma conta multiplicando cruzado as duas frações:

***Aluna A**: Nove vezes... Quatro vai dar...* (sussurra contas) *Olha, fiz uma coisa meia louca aqui mas eu não sei se tem muito a ver...*

Pesquisador: *Fala..*
Aluna A: *Ficou três sobre quatro e nove sobre dez. Eu cruzei, eu fiz meio com meio ee..... ponta com ponta. Aí ficou trinta... trinta trinta e seis avos, deu uma coisa assim meia louca... trinta trinta e seis* (30/36)

Trecho 29

Após ser questionada sobre o que foi feito, ela iniciou um raciocínio indicando que tentou fazer uma comparação entre os termos para ver qual denominador fica maior quando se iguala os numeradores, entretanto não foi até o final e mudou sua fala buscando um novo raciocínio:

Aluna A: *Porquee... O três é o triplo... O nove é o triplo do três, só que... o quatro... é menor que o dez, mas não é o triplo nem o dobro de... não... o dez... o quatro é menor que dez*
Pesquisador: *.... Certo.*
Aluna A: *Só que, o dez não é nem o triplo nem o dobro de quatro. Vai ficar meio que sobrado se for o dobro e se for o triplo vai passar. Entendeu?*
Pesquisador: *Aham... Mas por que isso... Eu to entendendo o que você ta falando, mas por que que isso justifica o nove sobre dez ser maior que o três sobre quatro?*
Aluna A: *Por que que justifica... Hmm... Deixa eu ver...* (Pensativa) *Não, to fazendo outra coisa louca aqui, nada a ver. Lógica. Porque o nove é maior que dez e... Não, porque o nove é maior que o três e o dez é maior que o quatro. Porque são número maiores.*

Trecho 30

Nota-se ao final um esquema de prova perceptual quando ela justifica a resposta comparando os termos das frações de forma direta, afirmando que 9/10 é maior que 3/4 pois o numerador 9 é maior que o 3 e o denominador 10 é maior que o 4, como ambos são maiores, segue-se que 9/10 é maior. Em seguida, o pesquisador insere um exemplo que contraria o raciocínio dela:

Pesquisador: *Ué, mas... se tivesse por exemplo, cinco sobre quatro, isso dá mais que 1. E nove sobre dez, dá menos que 1. Então...*
Aluna A: *Peraí. Se você tivesse... cinco sobre quatro e... Qual o outro que você falou?*
Pesquisador: *Nove sobre dez ainda.*
Aluna A: *Nove sobre dez. Ainda o cinco sobre quatro seria menor que o nove sobre dez.*
Pesquisador: *Ué, por que?*
Aluna A: *Porque é uma fração menor.*
Pesquisador: *Mas se você divide cinco por quatro, não vai dar uma virgula alguma coisa?*
Aluna A: *Vai.*
Pesquisador: *E se você divide nove por dez, não vai dar zero virgula alguma coisa?*

***Aluna A**: É, vai dar sim.*
***Pesquisador**: Então...*
***Aluna A**: Então o cinco sobre quatro é maior. Acho que entendi.*

Trecho 31

Apesar de a Aluna A ter entendido bem o exemplo, após a transcrição da entrevista o pesquisador percebeu que perguntar sobre a "vírgula alguma coisa" foi uma informação que acabou influenciando a estratégia adotada pela Aluna A. Após ver um método direto de resolução, ela pede o auxílio de um soroban (ábaco japonês) para a resolução e encontra 0,75 e 0,9. Entretanto, ao comparar, afirmou que 0,75 é maior que 0,9. O pesquisador então perguntou se é porque 75 é maior que 9 e ela concorda. Ao rever a entrevista, o pesquisador percebeu que essa não foi uma boa pergunta a se fazer, pois acabou expondo a justificativa pronta para ela, deixando-a apenas concordar sem garantia de ter sido franca. Após o pesquisador falar que 0,75 é um valor entre 0,7 e 0,8, a Aluna A lembra das contas feitas com as notas das provas, reforçando que de fato, 0,75 é menor que 0,9. Entretanto, permanece a dúvida se entendeu tal fato, que requer compreensão do sistema de numeração decimal, ou se sabe decidir somente num contexto familiar.

Já o Aluno B, reparou que os valores dos numeradores eram bem próximos aos dos denominadores, então achou que as duas frações se equivalem, mas ao ser questionado, falou que são "mais ou menos" iguais e tentou se justificar:

***Aluno B**: É porque assim... Três quartos é a divisão... É a fração quase inteira. Tipo, é quase o número que eu dividi inteiro de novo. Nove décimo também.*
***Pesquisador**: Ahh sim.. Mas então, em ambos falta pouco pra chegar no inteiro, né?*
***Aluno B**: Aham.*
***Pesquisador**: Mas qual que falta mais e qual que falta menos?*
***Aluno B**:* (Pensativo) *O três quartos, eu acho...*
***Pesquisador**: O três quartos falta mais ou falta menos?*
***Aluno B**: Falta mais, porque se você divide uma coisa em quatro e outra coisa em dez, a que tá dividida em dez vai ficar em fragmentos menores, contanto que sejam do mesmo tamanho.*
***Pesquisador**: Então qual que é maior? Três quartos ou nove décimos no total?*
***Aluno B**: Três quartos.*
***Pesquisador**: Três quartos é o maior? Mas você não falou agora que três quartos é o que falta mais?*
***Aluno B**: Ah sim! Tô me embolando. Nove décimos então.*
***Pesquisador**: Por que?*
***Aluno B**: Porque ele é o que falta menos para chegar no todo.*

Trecho 32

A resposta do Aluno B foi interessante, sendo um raciocínio que o pesquisador, como vidente, não foge, imaginando figuras. Na fala do Aluno B não há referência a objetos concretos, sendo difícil inferir o que ele pensou e consequentemente de classificar a estratégia de prova em sua argumentação. O pesquisador aqui então considera como sendo um esquema empírico perceptual. As razões são: claramente não é um esquema de convicção; não é também analítico axiomático, pois não há tal sofisticação axiomática envolvida; não pode ser analítico transformacional internalizada pois houve uma reflexão; não pode ser analítico transformacional interiorizada pois ele não deixa a entender que está seguindo um procedimento de transformações em figuras que possa ser generalizado para qualquer fração. Basicamente, ele está comparando objetos cuja natureza não foi externada através da fala, objetos esses que no caso do vidente poderiam ser figuras como retângulos particionados, ou objetos concretos como pizzas fatiadas, ou ainda a reta numérica, mas que no caso do Aluno B permanecerá uma incógnita.

4.6. Problema 6: Reconhecimento de padrão em sequência de triângulos

Para o problema 6, é apresentado para os alunos um triângulo de palitos colados em um pano:

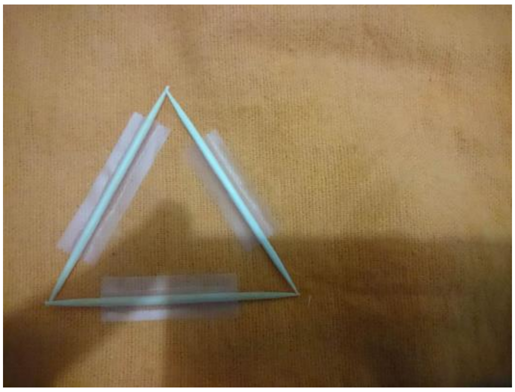


Figura 5: Primeiro elemento da sequência de triângulos

Após os alunos identificarem com sucesso que há um triângulo formado por 3 palitos, o pesquisador adiciona mais palitos a partir do triângulo inicial, formando uma sequência:

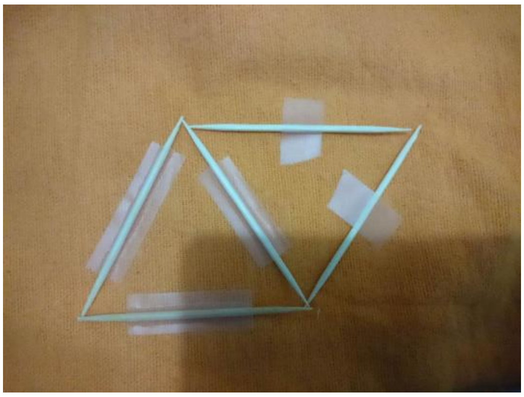


Figura 6: Segundo elemento da sequência de triângulos

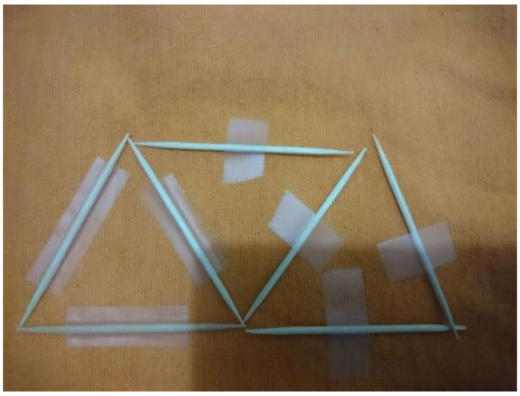


Figura 7: Terceiro elemento da sequência de triângulos

Todos os alunos identificaram sem problemas a quantidade de triângulos e de palitos. Embora não tenha se falado de sequência em momento algum, Aluna A e Aluno B perceberam que havia um padrão de adicionar 2 palitos para cada triângulo novo adicionado.

Ao ser questionada de quantos palitos seriam necessários para formar 6 triângulos, a Aluna A foi montando os triângulos com os palitos para contar, mas por falta de orientação do pesquisador, ela não seguiu a sequência para a direita:

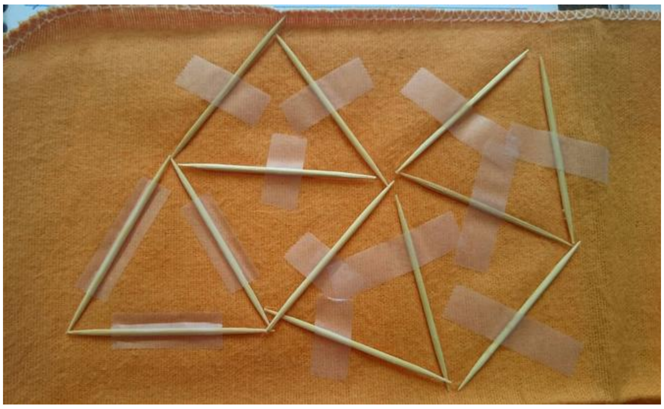


Figura 8: Figura formada pela Aluna A para contar palitos

A Aluna A não percebeu que montando os triângulos dessa forma, poderia ocorrer o caso de precisar de 1 palito para adicionar 1 triângulo, o que fez com que não fizesse diferença de se seguir a sequência correta, na qual os triângulos são formados em uma só direção. A direção correta da sequência foi deixada clara nas entrevistas com os Aluno B.

O Aluno B tateou apenas os modelos originais montados pelo pesquisador. O resto do problema ele trabalhou mentalmente. Ao ser questionado sobre o que faria para descobrir quantos palitos seriam necessários para formar 9 triângulos, ele respondeu "*Eu iria testando, porque eu até consigo pensar, mas eu não consigo ter certeza*". Entretanto, o aluno não respondeu o caso para 9 triângulos, pois não chegou efetivamente a testar.

Tanto a Aluna A quanto o Aluno B foram questionados sobre quantos palitos seriam necessários para formar 10 triângulos. Ambos realizaram a mesma estratégia de contar quantos eram necessários para 5. No caso da Aluna A, contando no modelo formado por ela mesma. No caso do Aluno B, imaginando a figura. Após verificar que eram necessários 11 palitos para formar 5 triângulos, afirmaram que para 10, seriam necessários 22 palitos. Com isso, o pesquisador perguntou dos casos de 2 e 4 triângulos e imediatamente a Aluna A e o Aluno B perceberam que o raciocínio de proporcionalidade estava errado, mas apenas o Aluno B conseguiu corrigir o erro levando em conta o palito "adicional" do primeiro triângulo. O pesquisador tentou guiar a Aluna A a uma generalização para que expressasse a quantidade de palitos em função da quantidade de triângulos, mas ela não conseguiu criar uma relação mais abstrata. O Aluno B, mesmo depois de perceber o problema da proporção de 5 para 10, voltou ao mesmo erro de fazer uma regra de três simples, afirmando que se para 10 triângulos são necessários 21 palitos, então para 100 triângulos são necessários 210 palitos.

4.7. Indicações para o estudo principal com base no piloto

Além de ser fonte importante de dados, o estudo piloto apontou diversas falhas por parte do pesquisador em relação ao planejamento e foco do estudo, fornecendo assim bases para algumas mudanças:

- Maior cuidado com os estímulos de forma a não induzir raciocínios que possam impedir o desenvolvimento de raciocínio próprio do aluno.
- Auxílio de outro aluno do programa de mestrado para que este realize gravação em vídeo, sendo assim possível um maior detalhamento de imagens, que registrem momentos de manuseio de recurso ou gestos por parte dos alunos entrevistados.
- Definição mais precisa de objetivos específicos norteadores da fala do pesquisador, bem como uma maior clareza de quais são os estímulos dados, tendo em mente o método da dupla estimulação.

5. O estudo principal

Neste capítulo é abordado o estudo principal, realizado em abril de 2016 com dois alunos cursando o oitavo ano do ensino fundamental: Aluno D e Aluna E.

As entrevistas com esses alunos foram mais cuidadosas, levando em consideração detalhes apontados na qualificação, além de terem sido gravadas em vídeo para melhor descrição. Houve o cuidado de ilustrar mais os gestos dos alunos e expor uma quantidade maior de fotos que exibam a utilização do geoplano.

5.1. Problema 1: Concepções acerca de reta e ponto

Tanto com o Aluno D quanto com a Aluna E, o pesquisador começou perguntando como eles imaginam uma reta, tentando explorar os pontos e como se relacionam com a reta.

Quando o pesquisador perguntou ao Aluno D como ele imagina uma reta, ele respondeu que é uma linha. Ao ser questionado de como é uma linha, o Aluno D disse *"Tipo, fazendo assim, reto, infinito"*, fazendo um gesto na mesa com a mão, como se desenhasse uma linha reta com um lápis imaginário:

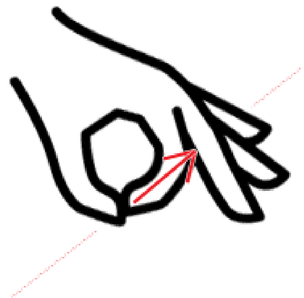


Figura 9: Representação da reta elo Aluno D

O pesquisador então perguntou o que há nessa reta e o aluno foi expondo os conceitos que associa à reta:

Aluno D: *Ponto... É infinita, se fosse mais de uma reta teria um ponto...*
Pesquisador: *Se fosse mais de uma reta?! Como assim?*

Aluno D: *Tipo, tem as retas... As paralelas, as concorrentes e... É uma que tem um ponto em comum...*

Trecho 33

Sendo “Ponto” a primeira palavra externada pelo Aluno D em sua fala, o pesquisador interpreta como um reconhecimento de que há pontos na reta, embora a palavra tenha sido dita no singular. Entretanto, essa fala muito provavelmente é uma consequência de ele ter pensado no conteúdo que estudou recentemente em geometria, de retas concorrentes, não sendo afinal um indicativo de que ele reconheça a presença prévia de pontos em uma reta. Diferente dos alunos do estudo piloto, que inicialmente se limitavam a um intervalo, aqui já se nota uma menção de que a reta é infinita. O pesquisador começa então a tratar de como ele concebe os pontos na reta:

Pesquisador: *Mas em uma reta só, você falou que ela tem pontos, certo?*
Aluno D: *Sim.*
Pesquisador: *E quantos pontos teria essa reta?*
Aluno D: *Ah, aí não sei, porque é infinita, a reta é infinita, não tem um lugar pra ela terminar, então é quantos pontos você colocar lá.*
Pesquisador: *E eu tenho pelo menos quantos pontos? Eu consigo uma reta só com um ponto?*
Aluno D: *Sim.*
Pesquisador: *Uma reta só com um ponto?*
Aluno D: *Fazer uma reta só com um ponto? É isso?*
Pesquisador: *É*
Aluno D: *Não.*
Pesquisador: *Por quê?*
Aluno D: *Porque se você colocar um ponto só não vai dar uma reta.*
Pesquisador: *E dois pontos?*
Aluno D: *É, aí pode ser.*
Pesquisador: *Com dois pontos você pode ter uma reta?*
Aluno D: *Sim.*

Trecho 34

A princípio parece que não há problemas na forma como o Aluno D concebe a reta, relevando a primeira resposta sobre ter uma reta com apenas um ponto, que após o questionamento do pesquisador ele percebeu que não faz sentido. Entretanto, após isso o pesquisador abordou o problema 1 em si, se deparando com um primeiro obstáculo:

Pesquisador: *E aí se você pega esses dois pontos dessa reta, entre eles tem quantos pontos?*
Aluno D: *Pegar os dois pontos e... Entre eles?! Não tem.*

Trecho 35

O pesquisador então tentou usar o mesmo estímulo utilizado com a Aluna A, perguntando se assim a reta não está furada. Antes do Aluno D responder, o pesquisador perguntou também como ele imagina a reta, citando os termos “barbante” e “linha” na interrogação, mas o aluno fica confuso quanto ao questionamento da reta ser furada:

Aluno D: *Ah, uma reta... uma linha.*
Pesquisador: *Você só pensa na “linha”, e se você tem dois pontos ali, se você não tiver nada entre os dois pontos, como fica essa linha?*
Aluno D: *Não entendi... Porque você já tem a linha, e ai você tem dois pontos. Se você não tem... Entre esses dois pontos vai continuar a linha normal. A não ser que você bote um ponto de um lado e um ponto de outro, delimitando um começo e um fim. Aí não vai mais ser uma reta, vai ser*... (Pensativo tentando lembrar do nome) *Semi-reta não é, porque semi-reta tem começo, mas não tem fim... Não lembro, mas se você colocar dois pontos, um de um lado e um do outro, ela vai continuar no meio, ela só vai ter um ponto de cada lado.*

Trecho 36

A fala do Aluno D deixa a entender que uma reta pode existir em um intervalo sem que haja pontos nesse intervalo, sendo os pontos então apenas marcadores para referência. Seguindo o diálogo, o pesquisador dá um exemplo em que há 10 pontos entre dados 2 pontos em uma reta, perguntando se tais 10 pontos cobrem todo o espaço entre os 2 pontos. Em resposta, o Aluno D disse que depende de como são e onde estão localizados. Ao ser questionado sobre como ele imagina os pontos, o Aluno D respondeu que podem ser qualquer coisa:

Pesquisador: *Qualquer coisa? Então dependendo do que for, eles podem ou não ocupar todo o espaço?*

Aluno D: *É, porque se eu colocar dez pontos entre dois pontos, pra poder ele ocupar todo o espaço entre os dois pontos tem que ver até onde vai os dois pontos, tipo, um de cada lado, vamos supor assim, aí você vai pôr um aqui, aí coloca um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, só que o outro tá pra lá, então tem que colocar mais pra chegar até o outro, tendeu? Então se você colocar um aqui e um aqui, um, dois, três, (...), dez e aqui tivesse o segundo, ele cobriu todo o espaço...* (Ver Figura 10)

Trecho 37

Ao gesticular os pontos, o Aluno D seguiu contando quantas vezes a ponta do dedo cabe entre dois pontos fixados:

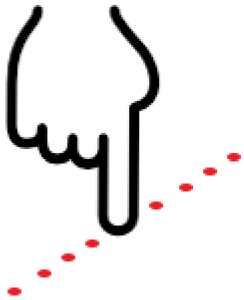


Figura 10: Contagem de pontos pelo Aluno D

O pesquisador então usa o estímulo de questionar sobre a variação da distância dos pontos, já que a única variação que o Aluno D pensava era no posicionamento dos dois pontos iniciais, segundo o qual, poderia caber mais ou menos pontos no intervalo.

Pesquisador: *Aí no caso você tá usando a ponta do dedo como ponto. Então se entre esses dois pontos cabe esses dez dedos seus, então ele cobriu o espaço?*
Aluno D: *Então, depende de onde o ponto tá.*
Pesquisador: *Sim, vamos supor uma distância onde caibam dez dedos...*
Aluno D: *Sim, aí cobriu.*
Pesquisador: *E aí se estiver mais longe o outro ponto, ele pode não cobrir?*
Aluno D: *Se estiver mais longe ele pode não cobrir.*
Pesquisador: *Ah... Entendi... Mas esses pontos que você usa, eles não podem ser menores ou maiores?*
Aluno D: *Não tem definição.*
Pesquisador: *É, não tem definição de ponto. Mas você tá imaginando a ponta dos dedos agora, usando como referencial.*

Aluno D: *É, pode ser qualquer, tipo, se eu pego um pedaço de papel e faço um risco com a caneta, é um ponto.*
Pesquisador: *E aí você precisaria de quantos pontos desse pra cobrir um espaço, por exemplo, igual ao que você pensou inicialmente entre os dois pontos?*
Aluno D: *Hmm... Acho que o que eu fiz aqui na mesa, uns seis dá.*
Pesquisador: *Seis traços de caneta?*
Aluno D: *Não é exatamente traço. Só de fazer assim já é um ponto* (ele faz um gesto de como se estivesse fazendo um pequeno risco com um lápis imaginário)*, porque traço é você pegar e fazer assim* (ele faz gesto de como se desenhasse um trecho de linha)*.*
Pesquisador: *Ah tá! É que eu tava pensando no risco.*
Aluno D: *Um risco é um ponto.*
Pesquisador: *Entendi.*

Trecho 38

O Aluno D deixou claro previamente que podia haver um segmento entre dois pontos sem que houvesse pontos no interior. Os estímulos do pesquisador levaram o Aluno D a discutir o caso em que pontos são deliberadamente inseridos no segmento, mostrando a flexibilidade na forma como ele concebe os pontos, sendo possível variar a natureza e tamanho de suas representações como se queira. Entretanto, o pesquisador não obteve sucesso, através de estímulos sucessivos, de desenvolver o pensamento de que há infinitos pontos entre dados dois pontos na reta.

Quando o pesquisador perguntou à Aluna E como ela pensa em uma reta, ela enfrentou problemas em se expressar:

Pesquisador: *Como é que você pensa numa reta?*
Aluna E: *Tem um negócio de 0 a 10... Tipo assim... Ah, sei lá, eu não sei te explicar assim...*
Pesquisador: *Mas você, quando pensa numa reta...*
Aluna E: *Reta numérica? Tipo, é...*
Pesquisador: *Uma reta... reta*
Aluna E: *Reta, assim, normal, sei lá.*
Pesquisador: *Você costuma trabalhar mais reta numérica?*
Aluna E: *Sim.*
Pesquisador: *E reta em geometria?*
Aluna E: *É... Mais ou menos, a professora começou a dar isso agora, mas... Não aprofundou muito. A gente usa, mas não muito.*

Trecho 39

Retas e pontos são ensinados em geometria em anos anteriores, então o pesquisador pressupôs que ela estivesse se referindo ao conteúdo sendo dado atualmente sobre retas paralelas, concorrentes e coincidentes, como aconteceu no caso do Aluno D. Nota-se também uma referência à reta numérica, talvez pelo fato da "reta da geometria" ainda não ser um conteúdo de peso para ela, como é a reta numérica, visto que tal assunto foi visto muito recentemente em suas aulas de geometria. Assim, o pesquisador seguiu tentando extrair falas referentes aos elementos de ponto e reta e como são relacionados:

Pesquisador: *E na reta, o que você tem na reta?*
Aluna E: *Como assim?*
Pesquisador: *Tem elementos naquela reta? Na geometria*
Aluna E: *Não, é uma coisa só.*
Pesquisador: *Uma coisa só?*
Aluna E: *É, só uma reta. Não tem elemento e tal...*
Pesquisador: *Ela não tem pontos?*
Aluna E: *É, ponto, plano, é...*
Pesquisador: *O plano tá na reta?!*
Aluna E: *Não, é, aí... Tem só o ponto, mas uma reta é só uma reta, pronto, não tem elemento, aí já o ponto, plano, já classifico como outra coisa...*

Trecho 40

Mesmo questionando sobre a existência de elementos na reta e perguntando se ela não tem pontos, a Aluna E é convicta de que ponto, reta e plano são entes independentes uns dos outros, o que foi percebido de forma mais sutil em seu colega de classe, Aluno D. Assim, o pesquisador tentou explorar o caso de "colocar pontos na reta", como no caso do Aluno D, começando com a reta toda:

Pesquisador: *(...) Mas você consegue colocar pontos numa reta?*
Aluna E: *Sim!*
Pesquisador: *Quantos?*
Aluna E: *Pingos de chuva... Hum... Sei lá, deixa eu ver... Acho que é só isso que eu lembrei.*
Pesquisador: *É, você tá tomando pingos de chuva como pontos, certo?*
Aluna E: *Sim.*
Pesquisador: *Aí quantos pingos de chuva caberiam em uma reta?*
Aluna E: *Vários, porque a reta é infinita.*
Pesquisador: *Hmm... Mas aí vários seria...*

Aluna E: *Uma coisa infinita, não tem um número específico.*

Trecho 41

Nota-se que considerando a reta toda, a Aluna E reconheceu a presença de uma infinidade de pontos, em vista de reconhecer o fato da reta ser infinita. Em se tratando do interior de um intervalo, ela demonstrou o mesmo raciocínio do Aluno D quanto a "ver quantos cabem":

Pesquisador: *Ah sim. Mas então pelo menos dois você sabe que cabe lá?*
Aluna E: *Sim!*
Pesquisador: *Entre esses dois, cabe quantos?*
Aluna E: *Dois.*
Pesquisador: *Entre dois, vão caber só dois?*
Aluna E: *Não, como assim?*
Pesquisador: *Você tem dois pontos na reta. No meio deles, você vai ter um espaço né?*
Aluna E: *Um.*
Pesquisador: *Vai caber "um" ponto dentro de dois?*
Aluna E: *É... Eu acho que sim.*
Pesquisador: *Não cabe mais? Cabe menos?* (No sentido de não caber. Embora possa não ter ficado claro, não fez diferença na fala da Aluna E)
Aluna E: *Caberia mais, mas não saberia te falar o número exatamente que vai caber.*
Pesquisador: *Mas um cabe? Ou não cabe?*
Aluna E: *Cabe.*
Pesquisador: *E... Aí entre esses dois você já sabe que cabe um. Aí entre esse um que tá no meio e entre algum dos outros dois... Tá acompanhando?*
Aluna E: *Sim.*
Pesquisador: *Entre esse do meio e algum dos outros dois, cabe mais algum?*
Aluna E: *Não, porque já tá meio completo.*
Pesquisador: *Ah, já tá meio completo...*
Aluna E: *Sim.*
Pesquisador: *Ele... Como? Ele preencheu? Ele não deu mais espaço?*
Aluna E: *Preencheu completamente. Esse um entre os dois preencheu o espaço que tava vazio.*

Trecho 42

Assim como seu colega de classe, ela precisa saber quão grande é o espaço entre os dois pontos para saber quantos pontos cabem, mas uma vez que o espaço é "preenchido" (na concepção dela), tem-se uma quantidade finita invariável de pontos. Posteriormente foi perguntado sobre o que ela imagina quando pensa em pontos, mas novamente só falou da gota de chuva, não demonstrando muita flexibilidade como no caso dos outros alunos.

É interessante notar que, para ela, um mesmo objeto concreto pode ser visto como entes geométricos diferentes, dependendo de suas características. Ao perguntar à Aluna E que objetos ela identifica como sendo uma reta, ela citou um barbante e uma parede. No caso da parede, afirmou que também pode ser um plano, no qual há retas (mas sem detalhar o que seriam retas em uma parede) mas em que não há pontos. Os pontos ela reconhece em pingos de chuva e gotas d'água. Ao questionar a relação entre plano, retas e pontos, a Aluna E expõe o porquê de uma parede poder ser considerada uma reta:

Pesquisador: *Você tinha dito que a princípio não tem pontos na reta, né?*
Aluna E: *Sim, você teria de botar.*
Pesquisador: *Só tem lá se você colocar...*
Aluna E: *Sim.*
Pesquisador: *Certo... E retas no plano? Aí também?*
Aluna E: *Não, aí já aparece. Sem precisar botar. A parede, a parede é um plano, mas também é uma reta.*
Pesquisador: *A parede é um plano mas também é uma reta...*
Aluna E: *É.*
Pesquisador: *A reta tá na parede?*
Aluna E: *Não, a parede é um plano. Mas se a parede for infinita, ela vai ser uma reta.*
Pesquisador: *Aaahh taaaa! ... Mas infinita pra todos os lados ou um lado só?*
Aluna E: *Pra um lado só, tipo, daqui pra cá* (ela estava com a mão abaixada e a levanta alto no "pra cá", indicando que está se referindo a um sentido que vai de baixo pra cima), *tipo se fosse pra cima.*
Pesquisador: *Ah, aí ela vira uma reta...*
Aluna E: *Sim.*
Pesquisador: *Entendi... E se a parede fosse infinita pra todos os lados?*
Aluna E: *Também seria uma re- Não, seria um plano.*

Trecho 43

Tanto o Aluno D quanto a Aluna E veem reta e pontos como entes independentes, onde só existem pontos na reta se forem colocados. Ambos precisam verificar "quantos cabem" para responder ao problema 1, sendo assim esquemas empíricos de argumentação.

5.2. Problema 2: Concepções acerca de quadriláteros e área

Antes de abordar o problema 2, o pesquisador procurou saber como os alunos definem um quadrado, além de apresentar o geoplano. Nenhum dos dois alunos conhecia o geoplano, então o pesquisador se aproveitou do momento para explicar e mostrar quadrados formados com elásticos em conjunto à abordagem feita do conceito e cálculo de área, que também eram coisas novas para eles.

Neste problema, o Aluno D e da Aluna E disseram que não sabem sobre os conteúdos de área e perímetro, então o pesquisador precisou explicar antes de tentar trabalhar o problema.

O Aluno D definiu um quadrado como “uma forma com quatro lados iguais”. O pesquisador então o questionou sobre tal definição:

> ***Pesquisador**: (...) Então toda forma que tiver quatro lados iguais, é sempre um quadrado?*
> ***Aluno D:** Sim. Tipo, um triângulo, ele não tem nem quatro lados, ele só tem três, e além disso os três lados que ele tem são diferentes um dos outros. O retângulo, ele tem quatro lados, só que dois lados são maiores que os dois de cima, eles são maiores que o quadrado. O círculo não tem lado...*

Trecho 44

Infelizmente o pesquisador não possuía nenhum material que pudesse representar uma figura de quatro lados iguais que não é um quadrado, mas tal falha conceitual alerta para a importância de contra-exemplos. Uma figura que poderia ser usada para contrariar a definição dada seria, por exemplo:

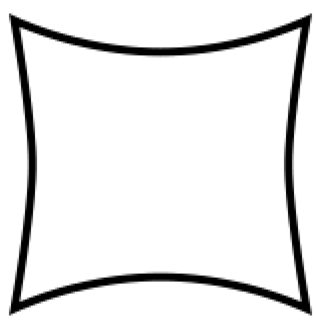


Figura 11: Figura de 4 lados iguais que não é um quadrado

Após isso, o pesquisador explicou sobre área para o Aluno D da seguinte forma:

> ***Pesquisador:*** *A área de qualquer figura é quantas vezes uma certa unidade que você toma, cabe naquela figura. É uma forma da gente medir a superfície dela. Por exemplo, um quadrado de lado dois por dois. Imagina um quadrado de lado dois por dois. Quantos quadradinhos de lado um por um cabem dentro dele?*

Trecho 45

O Aluno D inicialmente teve dificuldade de entender a nomenclatura "lado dois por dois", mas após o pesquisador explicar com o exemplo do quadrado de lado de medida 2, o Aluno D passou a entender o que estava sendo dito e, após a pergunta ser repetida, respondeu corretamente que cabem 4 quadradinhos de lado 1 dentro do de lado 2. Em seguida o pesquisador perguntou quantos cabem em um de lado que mede 3 (O Aluno D não apresentou problemas com falta de unidades), entretanto, após pensar um pouco, o aluno disse que cabem 5 quadradinhos. Perplexo, o pesquisador perguntou se ele saberia justificar o porquê:

> ***Aluno D:*** *Deixa eu ver... Acho que o de dois, se são quadrados que medem dois, você coloca dois de cada lado. Então ficariam quatro quadradinhos. O de cinco é só você colocar mais um.*
> ***Pesquisador:*** *O de cinco?*
> ***Aluno D:*** *Não, o de três. É só ir colocando mais um em cada lado.*

Trecho 46

Logo, o Aluno D tentou calcular a área do quadrado de lado 3 expandindo erroneamente o resultado que já tinha. O pesquisador então seguiu com o próximo estímulo: o geoplano.

Tanto o Aluno D quanto a Aluna E nunca trabalharam com o geoplano, então o pesquisador explica brevemente do que se trata e forma um quadrado de lado medindo 2 intervalos:

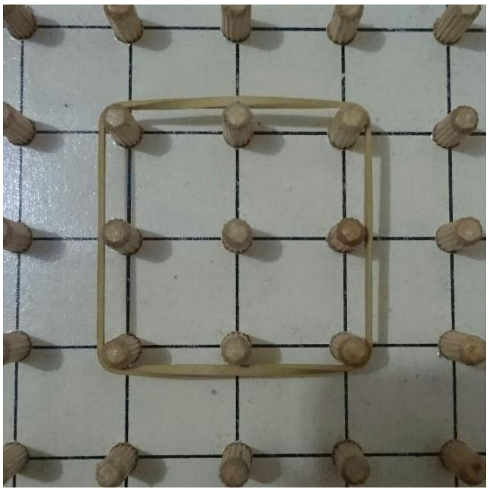


Figura 12: Quadrado 2x2 no geoplano

Pela fala, ainda, ele deixa a entender que ao invés de contar os espaços a serem preenchidos no interior do quadrado, contou as distâncias entre os pinos nos lados do quadrado, o que se confirma nas próximas falas, após o quadrado da Figura 12 ser apresentado:

> ***Pesquisador:*** *(...) E aí dentro desse quadrado caberiam, como você falou, quatro quadradinhos de lado um, certo?*
> ***Aluno D:*** *Aham... Não, peraí, dentro dele?*
> ***Pesquisador:*** *É, dentro dele.*
> ***Aluno D:*** (Ele então tateia mais o geoplano) *Aí, tipo, se contar por dentro, conta esses aqui?* (Indicando os pinos no interior)
> ***Pesquisador:*** *Esses pontos são só de referência. Só pra ajudar a perceber.*
> ***Aluno D:*** *Tá, então, quatro.*

Trecho 47

Tendo havido entendimento por parte do Aluno D, o pesquisador partiu para o estímulo seguinte e aumenta o quadrado no geoplano conforme a figura:

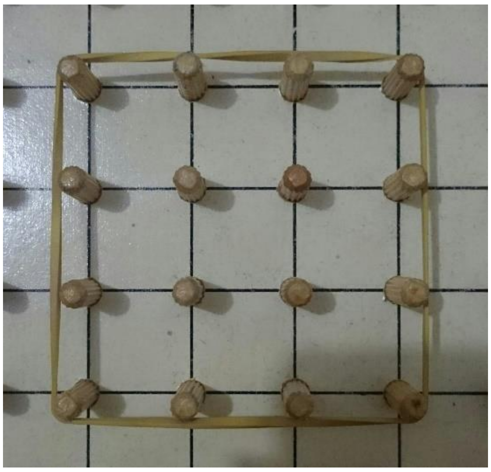


Figura 13: Quadrado 3x3 no geoplano

O Aluno D então disse que cabem 15 quadradinhos dentro dele. Logo, o pesquisador divide o quadrado com mais elásticos para tornar palpáveis os quadradinhos de lado 1:

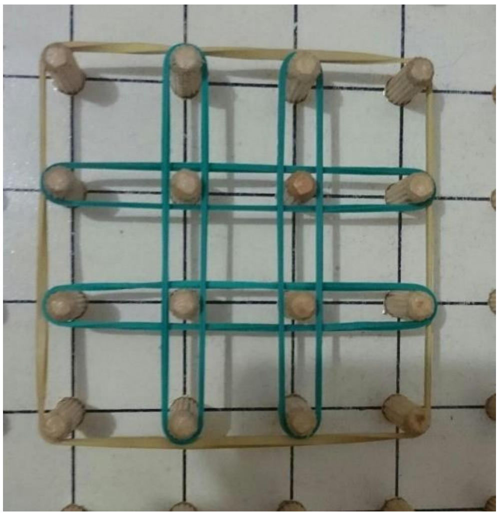


Figura 14: Quadrado 3x3 com divisórias no geoplano

Após contar um a um, ele percebeu que de fato há 9 quadradinhos e então, a área é 9. Assim, o pesquisador perguntou se ele conseguiria imaginar isso para um quadrado de lado 4. O Aluno D respondeu que não e então o pesquisador adicionou um novo estímulo na tentativa de partir para uma generalização:

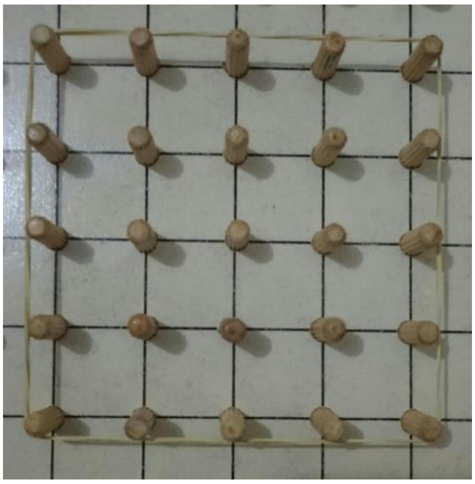


Figura 15: Quadrado 4x4 no geoplano

Após o Aluno D tatear:

Pesquisador: *Percebe que a cada... A primeira fileira aqui você vai preencher com quatro quadradinhos, certo?*
Aluno D: *Qual? Essa daqui?* (Ele aponta para um lado específico do quadrado)
Pesquisador: *Pode começar por qualquer um. Escolhe uma fileira aí pra começar.*
Aluno D: *Tá, essa daqui.* (Ele indica um dos lados do quadrado)
Pesquisador: *Nessa fileira você vai ter quatro quadradinhos. Aí na próxima, vai ter quantos?*
Aluno D: *Quatro também.*
Pesquisador: *E são quantas fileiras pra preencher?*
Aluno D: *São... Quatro.*
Pesquisador: *Ah, então pra saber quantos quadradinhos tem no total, você tem que fazer o quê? Qual conta?*
Aluno D: *Quatro vezes quatro?*
Pesquisador: *Exatamente.*
Aluno D: *Ahh!*
Pesquisador: *É assim que você calcula uma área de qualquer...* (Pesquisador percebe que quase fala algo errado e muda sua fala) *Não qualquer figura, a área de uma figura é ver quantas vezes essa unidade cabe lá dentro...*
Aluno D: *Que são dezesseis quadrados.*
Pesquisador: *Exatamente. A área desse quadrado vai ser dezesseis, porque cabem dezesseis unidades ali na superfície.*
Aluno D: *Entendi.*
Pesquisador: *E no de lado dois cabiam quatro. Então, nesse caso dos quadriláteros, no quadrado e no retângulo, não nos quadriláteros em geral, mas no quadrado e no retângulo, se você quiser saber a área você vai multiplicar um lado pelo outro.*
Aluno D: *Entendi.*

Trecho 48

Em seguida, o pesquisador tentou explorar o caso genérico de um quadrado de lado “*l*”. Entretanto, ele tem dificuldade em operar com letras, respondendo coisas como “*l vezes l é l elevado a l*”. O pesquisador então seguiu aumentando a intervenção e dizendo que *l* vezes *l* é l^2, logo, a área do quadrado de lado *l* é l^2. Partindo para o problema de multiplicar o lado por 2, o pesquisador se deparou com outro obstáculo algébrico:

Pesquisador: *E quanto dá “2l” vezes “2l”?*
Aluno D: *“4l”... Peraí, é pra fazer o “l” separado do 2?*
Pesquisador: *Não, os dois juntos.*
Aluno D: *Então “4l”.*
Pesquisador: *Mas o “l” quando multiplica pelo “l”, ele continua “l”?*
Aluno D: *É, ele multiplicou por ele mesmo...*
Pesquisador: *Mas “l” vezes “l” não era “*l^2*”?!*
Aluno D: *Ué professor, então o “l” vezes “l” é duas vezes... É “*l^2*”, “l” vezes “l”.*
Pesquisador: *“l” vezes “l” é “*l^2*”...*
Aluno D: *Sim!*
Pesquisador: *E “2l” vezes “2l”?*
Aluno D: *“4l”!* (Com muita convicção)

Trecho 49

Vendo que o problema de operar com monômios carecia de um trabalho mais profundo, o pesquisador optou por seguir para a parte de perímetro, entretanto, o Aluno D não soube somar “*l*+*l*+*l*+*l*” na generalização do lado do quadrado.

No caso da Aluna E, o pesquisador começou apresentando o geoplano, pois ela nunca o havia usado. Ao ser questionada sobre a definição de um quadrado, sua resposta foi: “*Quatro pontas... E... Entre essas pontas tem um espaço*”.

Ao ser questionada sobre o “espaço”, a Aluna E explicou que se referia às divisórias (na palavra dela), indicando em um quadrado montado no geoplano, as linhas que o formam. Logo, para ela, basta ter quatro pontas e quatro lados para ser um quadrado. Definição essa que abrange basicamente todos os quadriláteros.

Para começar a trabalhar área, o pesquisador usou um quadrado no geoplano com lados de 3 espaços (4 pinos), como na Figura 13.

A Aluna E teve muita dificuldade em perceber os elementos no quadrado. Quase todas as vezes em que tentou contar os espaços nos lados, ela contava indo para fora do quadrado, dizendo que o lado tinha 4 espaços, por exemplo. O pesquisador notou isso claramente ao ver que os dedos usados para tatear iam para fora do quadrado diversas vezes. Após algumas intervenções, ela conseguiu com sucesso contar 3 espaços em um lado. Assim, o pesquisador começa a trabalhar com a ideia de área do quadrado:

> ***Pesquisador:*** *Três espacinhos, certo? E aí dentro desse quadrado todo, vai caber quantos quadradinhos que mede só um espaço de lado?*
> ***Aluna E:*** *Oi?!*
> ***Pesquisador:*** *Tem essa região toda aí dentro do quadrado, se eu fosse pegar quadradinhos de lado 1 de espaço, quantos iam caber aí dentro?*
> ***Aluna E:*** *Dois.*
> ***Pesquisador:*** *Dois?*
> ***Aluna E:*** *É...*
> ***Pesquisador:*** *Onde eles ficariam?*
> ***Aluna E:*** *Aqui e aqui.* (Ela aponta para dois lados opostos)
> ***Pesquisador:*** *De lado 1?!*
> ***Aluna E:*** *Hã?! Não tô entendendo esse troço...*
> ***Pesquisador:*** *Peraí, deixa eu pegar outro elástico aqui pra fazer um de lado 1.*

Trecho 50

O pesquisador então formou um quadrado de lado 1 próximo ao quadrado já formado:

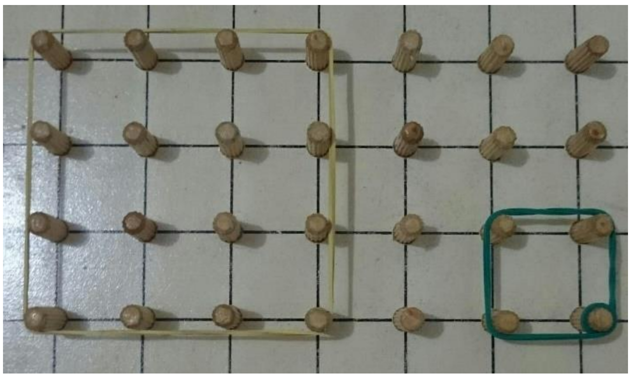


Figura 16: Quadrado 3x3 com quadrado 1x1 no geoplano

Novamente ela teve dificuldade de responder quantos lados tem, concordando que o lado é 1 apenas porque o pesquisador falou. Quando o pesquisador perguntou quantos quadrados pequenos cabem dentro do quadrado grande, ela respondeu que cabem quatro. Sua justificativa foi com um gesto circular sobre a figura do quadrado maior. Abaixo a imagem do geoplano nessa situação com dois círculos desenhados nesta figura pelo pesquisador, ilustrando o gesto realizado pela aluna:

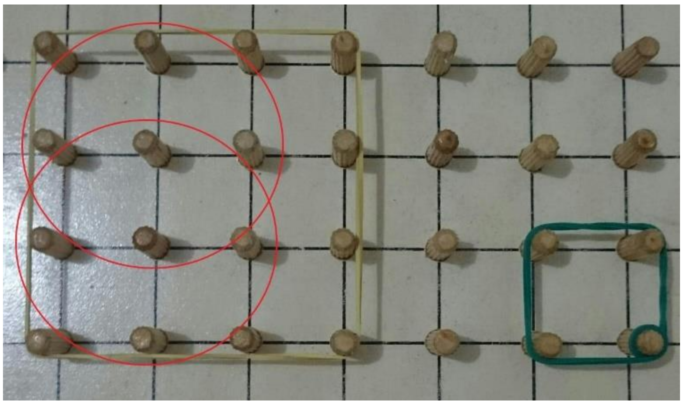


Figura 17: Gestos circulares do dedo da Aluna E no geoplano

Ela disse "Dois aqui e dois aqui", dois para cada círculo gesticulado sobre o quadrado. Como dito antes, a Aluna E nunca havia usado um geoplano, sendo essa possivelmente a razão de não conseguir acompanhar a atividade com o recurso disponível. Infelizmente não havia outro recurso ou ideia para se trabalhar área no momento. Entretanto, dentro do que entende e percebe, ela apresentou e justificou suas respostas, fazendo-se notar um esquema de prova empírico perceptual, mas não havendo generalização, uma vez que abordar o problema 2 carece de uma certa abstração e, no entanto, o conceito de área mal começou a ser trabalhado.

Ao se trabalhar perímetro, a Aluna E conseguiu entender e calcular os casos dos quadrados de lado 1 e lado 4, mas ao generalizar para lado "*l*", houve o mesmo problema que o Aluno D. Ela disse que só é possível realizar a soma se houverem valores numéricos.

5.3. Problema 3: O quadrado e seus elementos

O problema 3 começa com o pesquisador perguntando aos alunos o que é um ponto médio, entretanto, nenhum dos dois sabia. Em seguida, o pesquisador explicou em cada uma das duas entrevistas da mesma forma, dizendo que o ponto médio de um lado é o ponto que fica exatamente no meio dele. A Aluna E ficou em dúvida se isso era referente a um, dois ou todos os quatro lados do quadrado sendo estudado, então o pesquisador disse que pode ser qualquer lado, formando um quadrado com 5 pinos de cada lado, como na Figura 17.

Após ter o quadrado formado, o pesquisador confirmou o que havia falado antes de o ponto médio ser um ponto que fica bem no meio, mas antes que ele escolhesse um lado para perguntar onde seria o ponto médio, a Aluna E apontou para um local próximo ao meio da região do quadrado perguntando se o ponto é ali. O pesquisador então perguntou se ali é um lado e ela perguntou se tanto faz o lado. Após confirmação positiva do pesquisador, ela começou a apontar corretamente os pontos médios de cada um dos quatro lados.

O Aluno D teve mais dificuldade de entender o que são os pontos médios. No caso dele, o pesquisador ao invés de perguntar onde ficavam os pontos médios (no quadrado de 5 pinos de lado, Figura 17), foi mostrando um a um, sendo dito que as distâncias dele até as extremidades eram as mesmas. Apesar do aluno ter confirmado que entendeu, seu tom não demonstrava convicção. Como a entrevista com o Aluno D foi a primeira do estudo principal, por ver que a abordagem neste caso foi ruim, o pesquisador resolveu que não revelaria de início a posição dos pontos médios para a Aluna E, cuja entrevista ocorreria posteriormente.

Após os pontos médios identificados no quadrado, o pesquisador perguntou que figura que é formada ligando-os. No caso do Aluno D, o pesquisador usou um elástico para ligar os pontos, entretanto, o Aluno D teve dificuldade em distinguir no tato o elástico da figura interna e o elástico da figura externa:

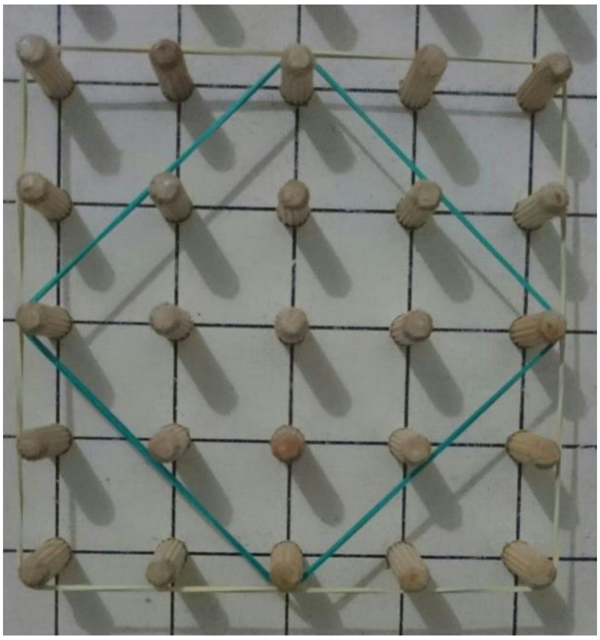


Figura 18: Quadrado 4x4 no geoplano com pontos médios ligados

O pesquisador então ajeitou os elásticos de forma a ficarem em alturas diferentes, facilitando a distinção e o Aluno D volta a analisar:

Aluno D: *Um losango?!*
Pesquisador: *Um losango? Por que?*
Aluno D: *Porque isso não é um retângulo. Também não é um triângulo. Círculo não dá pra fazer. Isso não é um quadrado de forma nenhuma.*
Pesquisador: *Não é um quadrado de forma nenhuma... E...* (Pesquisador gira o geoplano de forma que a base do quadrado menor fique de frente para o Aluno D) *E agora?*
Aluno D: (Após tatear) *... Um retângulo.*
Pesquisador: *Um retângulo? Por quê?*
Aluno D: *Porque parece que um lado é maior que o outro.*
Pesquisador: *Ok, então, antes era um losango e agora é um retângulo, mas ele pode ser as duas coisas ao mesmo tempo?!*
Aluno D: *Não, ele é um retângulo.*
Pesquisador: *Mas se eu giro uma figura, ela deixa de ser uma figura pra passar a ser outra?*
Aluno D: *Não.*
Pesquisador: *Então ela é um retângulo ou é um losango?*
Aluno D: *Retângulo.*
Pesquisador: (Após girar novamente para a configuração inicial) *Mas essa forma que você tá vendo, mexendo agora, ela ainda é um retângulo?*
Aluno D: *Sim.*
Pesquisador: *Tá, e por que que ela é um retângulo?*
Aluno D: *Porque um lado é maior que o outro.*
Pesquisador: *Mas são quantos lados?*

Aluno D: *Quatro.*

Trecho 51

Assim como os alunos do estudo piloto, o Aluno D disse que a figura formada é um losango. O pesquisador então seguiu com o próximo estímulo, girando o geoplano. O aluno então mudou de ideia, se convencendo que a figura é um retângulo independentemente de estar girada, mas seu convencimento se dá através das características concretas percebidas pelo tato, mostrando que características abstratas não possuem peso em suas concepções de quadriláteros, onde o pseudoconceito de retângulo envolve a percepção tátil de um lado ser maior que o outro.

No caso da Aluna E, o problema começou a ser trabalhado sem elásticos ligando os pontos, tendo ela preferido inicialmente imaginar a figura. Quando o pesquisador perguntou qual é a figura formada ao ligar os pontos médios, ela respondeu que é um quadrado, justificando que é porque os pontos estão sendo ligados, sem citar a quantidade de pontos. O pesquisador então perguntou se apenas ligar os pontos é suficiente para ser um quadrado e se ligando 3 pontos é possível ter um quadrado, fazendo ela perceber que faltava mais a ser dito.

Pesquisador: *Então, o que você pensou que te convenceu que isso é um quadrado?*
Aluna E: *Por causa dos pontos, porque já tinha um quadrado aqui, aí você juntou, parecia que ia ficar um quadrado também, só que... não ficou...*
Pesquisador: *Ué, não ficou um quadrado aqui?*
Aluna E: *Não! Porque quinem você falou, como é que vai ser um quadrado sem o espaço, aquela linha?* (Ela tendia a usar o termo "espaço" para se referir às linhas e agora começa a usar o termo "linha")
(Pesquisador liga os pontos médios no geoplano com outro elástico, conforme figura 18)
Pesquisador: *Eu coloquei aí um elástico ligando eles de fato. Essa figura aí, seria o que?*
Aluna E: *Aqui?* (Tateando procurando)
Pesquisador: *Esse elástico mais firme...*
Aluna E: *Eu sei, achei...* (Analisando) *É um quadrado também.*
Pesquisador: *É um quadrado?*
Aluna E: *Porque tem os lados, os pontos... Tá na forma de um quadrado.*
Pesquisador: *Tá... Só porque ele tem aparência de quadrado então?*
Aluna E: *Sim. É mais pela aparência.*

Trecho 52

Como se nota, a Aluna E se convenceu inicialmente de que é formado um quadrado por haver 4 pontas, mas depois sente a falta dos lados, mostrando que não entende que eles são formados no ato de ligar os pontos. Após ligar os pontos, novamente o pseudoconceito de quadrado (abordado no capítulo 6), envolvendo as características concretas de lado e ponta, é a base para uma argumentação empírica perceptual.

5.4. Problema 4: Concepções acerca de ângulos e triângulos

No problema 4, o pesquisador se deparou com um grande obstáculo. Infelizmente os alunos de oitavo ano não haviam estudado ângulos internos de triângulo. Segundo a Aluna E, o máximo que eles já estudaram foram os ângulos de 90°, 180° e 360° para calcular o complementar, suplementar e replementar de outros ângulos, mas nunca viram ângulos dentro de um triângulo. O Aluno D inclusive disse que não reconhece um ângulo reto em um retângulo. Abordar o assunto implicaria em preparar uma aula de fato, o que não foi planejado (mas no caso do problema 2, foi possível de ser improvisado).

Entretanto, antes do Aluno D confirmar que não reconhecia sequer um ângulo reto em um retângulo, o pesquisador havia perguntado sobre retas paralelas, para que essa fosse uma possível estratégia neste problema, caso possível. Embora nem mesmo um trabalho com retas paralelas fosse ajudar neste caso, o aluno descreveu que havia visto esse conteúdo recentemente e descreveu um material usado pela professora para trabalhar retas paralelas, concorrentes e coincidentes. Posteriormente o pesquisador consultou a professora dos dois e confere o material usado para que os alunos entendessem o que eram retas paralelas, concorrentes e coincidentes, cuja figura está a seguir:

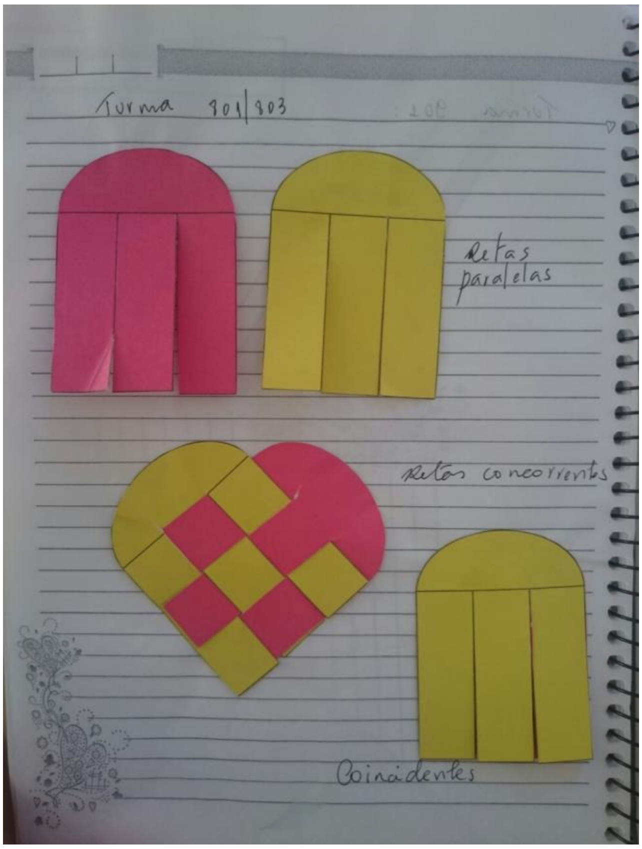


Figura 19: Material usado em classe para estudar relações entre retas

Embora não esteja diretamente relacionado ao problema 4, perguntar sobre retas paralelas levou o pesquisador a descobrir o material que vinha à mente do Aluno D no problema 1 (Trecho 33), quando fala "... *tem as retas... As paralelas, as concorrentes e... É uma que tem um ponto em comum*". Tal material pode prejudicar a compreensão dos conceitos de retas paralelas e retas concorrentes.

5.5. Problema 5: Representações de frações

Antes de começar o problema 5, o pesquisador confirmou com os alunos se eles já haviam estudado frações. Ambos já haviam, mas o Aluno D relatou que não sabe passar de forma fracionária para decimal e vice-versa. A Aluna E simplesmente não gosta do assunto.

Após a pergunta de qual das duas frações é maior, a três quartos ou nove décimos, o Aluno D respondeu que a maior é a três quartos, justificando com um exemplo de fatias de pizza:

Aluno D: (pensativo) *... três quartos!*
Pesquisador: *Por quê?*
Aluno D: *Porque são pedaços maiores.*
Pesquisador: *Como?!*
Aluno D: *Tipo, você pega... Sei lá, você pega... Sei lá, uma pizza. Se você pegar uma pizza e dividir ela em nove pedaços, eles vão ser menores. A pizza tem 10, se eu dividir em nove pedaços, vão ser menores, se você dividir em 3...*
Pesquisador: *Pera aí... Você tem uma pizza com...*
Aluno D: *Dez pedaços, aí dividi nove, tipo, vai dividir nove, vai ter nove décimos, aí ela vai ser menor, os pedaços vão ser menores, agora, se você pegar a pizza e cortar ao meio, a diferença de você pegar a pizza e dividir em, sei lá, cinco quintos, e cortar a pizza em duas metades, o que que é maior, é o meio da pizza, então é três quartos o maior.*
Pesquisador: *Então se você dividir em quatro e pega três pedaços, você tem mais do que...*
Aluno D: *Sim.*
Pesquisador: *... se você tivesse dez e pegasse nove...*
Aluno D: *Nove décimos.... é, é maior os pedaços.*
Pesquisador: *Pera aí, você agora falou diferente...*
Aluno D: *Não, seria maior, foi o que eu disse, porque se você corta, divide em nove, eles são menores, se você divide em três, eles são maiores.*
Pesquisador: *Ah, então quando você pega três pedaços, você comeu mais do que se tivesse pego nove dos dez pedaços que são pequenininhos...*
Aluno D: *Sim.*

Trecho 53

Embora o Aluno D estivesse certo em dizer que os pedaços da pizza dividida em quatro são maiores, o pesquisador viu a necessidade de algum estímulo que mostre que a os três pedaços maiores não valem mais que nove dos pedaços pequenos. Primeiramente, ele confirma com o Aluno D novamente sobre conversão de fração para números decimais, na tentativa de fazer uma comparação, como no caso da Aluna A no estudo piloto (Trecho 31), mas como ele não sabe fazer isso, tal estímulo foi inviável.

O pesquisador então improvisou um material para realização de um novo estímulo: rasgando duas tiras de mesma largura em uma folha de papel, ele dobrou uma em dez pedaços iguais e outra em quatro. Após isso, o Aluno D tateou as tiras para compará-las. Abaixo, imagens do momento em que o Aluno D as analisa:

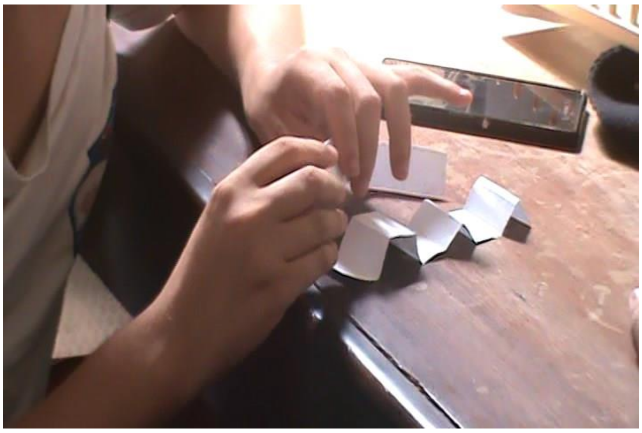


Figura 20: Aluno D tateando a primeira tira de papel

Figura 21: Aluno D tateando a segunda tira de papel

Figura 22: Aluno D comparando as tiras de papel

Neste momento houve apenas dois problemas: o Aluno D teve dificuldade em identificar as divisórias, visto que tais dobras no papel precisam de fato de uma maior atenção e, além disso, não alinhou as tiras lado a lado para comparar, permanecendo com a resposta de que três quartos é maior, pois de fato, do modo como estavam alinhadas, a terceira posição da tira dividida em quatro ultrapassava a nona posição da tira dividida em dez.

Após o pesquisador alinhar as tiras lado a lado, dando suporte na contagem das partes, o Aluno D percebeu que, de fato, nove décimos é maior que três quartos:

Aluno D: *Ah ta! Então o outro é maior!*
Pesquisador: *O outro é maior? Mas você conseguiria pensar numa justificativa além disso?*
Aluno D: *Ah, os três pedaços do de quatro ocupa menos espaço.*
Pesquisador: *Aham...*
Aluno D: *O de dez ocupa mais espaço.*

Trecho 54

Tanto no momento em que dá uma resposta errada quanto quando dá uma resposta certa, o argumento do Aluno D é totalmente palpado no perceptível, mesmo o exemplo podendo ser um reflexo da fala anterior de outra pessoa. Entretanto, no caso da resposta errada, ele usa um exemplo que não está presente no momento para ser percebido. Houve uma certa demora enquanto ele pensava no exemplo da pizza, mas em sua fala, fica claro que apesar de não haver uma pizza sendo tateada, ele “percebe” ou “imagina” que em uma mesma pizza, o pedaço de 1/4 é maior que o pedaço de 1/10.

Mesmo as divisórias das tiras de papel terem sido difíceis de ser percebidas, o Aluno D superou isso tateando com maior atenção. Entretanto, para evitar tal dificuldade posteriormente com a Aluna E, o pesquisador montou uma versão das tiras com bloquinhos cortados de caixa de ovo e juntados com fita adesiva, deixando um pequeno espaço entre cada bloquinho para que fossem fáceis de ser identificados no tato:

Figura 23: Material planejado para trabalhar frações

Entretanto, no desenvolver do problema 5 com a Aluna E, não houve espaço para tal estímulo, sendo deixado aqui apenas como referência para futuras atividades.

No caso da Aluna E, a resposta inicial ao problema 5 foi simples e direta:

Aluna E: *Nove décimos.* (Resposta muito rápida e com convicção)
Pesquisador: *Por que?*
Aluna E: *É maior! Por causa dos... A outra é só três quartos, tá na cara que é menor.*

Trecho 55

Vendo que a Aluna E estava julgando pelo tamanho dos números que aparecem, o pesquisador perguntou da fração 2/2 em comparação com a 9/10:

Aluna E: *Sim, o resultado ainda é menor. Dois sobre dois é um. Nove sobre dez... Continua sendo um... Calma aí... É... Continua sendo menor.* (Resposta sem convicção)
Pesquisador: *Qual? O Dois sobre dois é menor?*
Aluna E: *É, que o nove décimos.*
Pesquisador: *Mas você acabou de falar que 2 sobre 2 é 1 né?*
Aluna E: *Sim.*
Pesquisador: *E nove décimos... Nove sobre dez, daria quanto?*
Aluna E: *Ah, daria 1 também.*
Pesquisador: *Nove dividido por 10 dá 1?!*
Aluna E: (Pensativa) *... Dá um resto um.*
Pesquisador: *Oi?*
Aluna E: *Dá 1 mas sobra um resto.*
Pesquisador: *Um resto?*
Aluna E: *É, você vai dividir 10 coisas pra 9 pessoas, vai dar 1 pra cada um, mas vai sobrar 1.*
Pesquisador: *Nove sobre dez é dividir 10 por nove?!*
Aluna E: *Sim.*

Pesquisador: *Não seria o contrário? Dividir...*
Aluna E: *Mas como é que você vai dividir uma coisa que é menor por uma coisa maior?*

Trecho 56

O trecho acima mostra a dificuldade que a Aluna E tem com divisão. Vendo a confusão feita por ela, o pesquisador tentou usar o referencial da pizza do Aluno D como estímulo para desenvolver seu raciocínio, esperando que com o estímulo de dividir uma pizza em duas pessoas, ela percebesse que é possível dividir um número por outro maior. Entretanto, apesar de responder corretamente que haverá “meio” pedaço para cada pessoa ao se dividir 1 por 2, ela tentou transportar isso para o 9/10 apenas mudando o resultado para “um e meio”:

Pesquisador: *Ah, então você conseguiu dividir um entre dois.*
Aluna E: *Sim... Ah! Então seria... O resultado 1... 1 e meio... De nove sobre dez.*
Pesquisador: *Nove sobre dez daria quanto?*
Aluna E: *Um e meio.... Eu acho... Pelo que consegui entender...*
Pesquisador: *Hmm... Mas um e meio vezes 10 daria nove?*
Aluna E: *Não sei...*

Trecho 57

Em uma última tentativa de estimular a Aluna E, o pesquisador tentou mudar a referência e voltar às frações iniciais, perguntando à aluna o que vem à mente quando ela pensa em dividir algo, comentando que seu colega Aluno D havia citado uma pizza. Ela disse que também pensa em pizza e ainda em bolo, sendo o bolo então o exemplo que o pesquisador usa, narrando o cenário em que, tendo dois bolos de mesmo tamanho, um repartido em 4 pedaços e o outro em 10, pega 3 pedaços do que foi repartido em 4, 9 pedaços do que foi repartido em 10. Ao final e quer saber em qual dos dois casos se comeu mais bolo:

Aluna E: *Dez, porque pegou nove. O bolo tinha dez pedaços e pegou nove, o outro só pegou três.*
Pesquisador: *Mas nesses nove pedaços tem mais bolo que naqueles três pedaços?*
Aluna E: *Sim.*
Pesquisador: *Por quê?*

Aluna E: *Porque... No outro só tinha quatro pedaços, tirou três. No outro tinha dez, tirou nove... Se bem que sobrou igualmente, sobrou um pedaço nos dois bolos. Mas no outro tirou mais, porque tinha dez pedaços. De dez pra quatro, é óbvio que o dez é maior. O de dez é maior.*
Pesquisador: *Entendi... Ok. Agora... Vo pensar em outro exemplo aqui... Ah! O dois sobre dois, a fração dois sobre dois. Pensando no bolo seria o que, dividir o bolo em dois e pegar os dois pedaços.*
Aluna E: *Vai ficar nada.*
Pesquisador: *Então, qual fração que é maior nesse caso? Nove sobre dez ou dois sobre dois?*
Aluna E: *Maior?*
Pesquisador: *Isso.*
Aluna E: *Nove sobre dez. Porque o número continua sendo maior.*
Pesquisador: *Mas se você pegar nove pedaços dos dez, você pegou mais do que pegando dois dos dois pedaços?*
Aluna E: *Não, pegou menos, porque dos dois você pegou tudo. E do outro sobrou um. Nove sobre dez sobrou um.*
Pesquisador: *Mas isso faz sentido se nove sobre dez é maior que dois sobre dois?*
Aluna E: *Não, então dois sobre dois é maior.*

Trecho 58

O diálogo do trecho acima reforça o peso que a magnitude dos valores expostos tem no convencimento da Aluna E. Mesmo depois de abordar novamente a fração 2/2 com o bolo, ela só mudou de ideia por ter sido questionada pelo pesquisador. Embora possa parecer que nesse final do Trecho 58 ela tenha de fato entendido a fala do pesquisador, o diálogo nesse ponto já estava entediante com tantas intervenções seguidas, sendo muito possível que ela tenha concordado apenas para terminar o assunto.

5.6. Problema 6: Reconhecimento de padrão em sequência de triângulos

No problema 6 o Aluno D e a Aluna E já se mostravam mais cansados. Com o Aluno D o pesquisador começa da mesma forma que com os alunos do estudo piloto, apresentando um triângulo como na Figura 5, em seguida modificando-o conforme a Figura 6 e por último a Figura 7.

No caso da Aluna E, o pesquisador começou a sequência com os três triângulos da Figura 7, modificando-o em seguida para quatro triângulos:

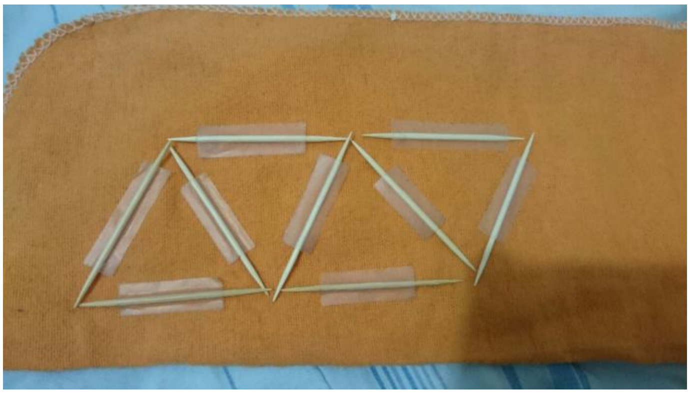


Figura 24: Quarto elemento da sequência de triângulos

E em seguida para cinco triângulos:

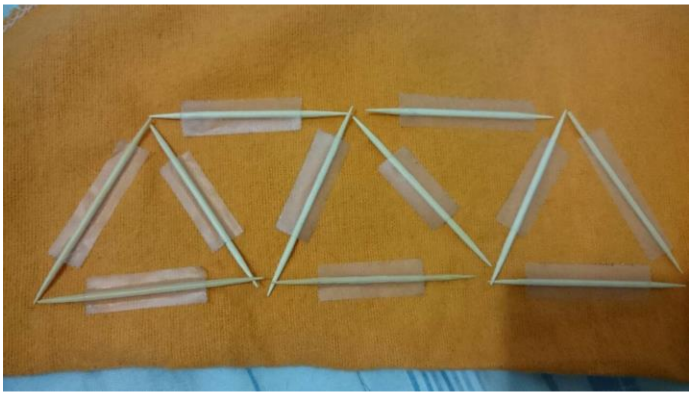


Figura 25: Quinto elemento da sequência de triângulos

Somente após a transcrição, que o pesquisador percebeu que havia começado de forma diferente com a Aluna E, mas isso não tornou os discursos muito diferentes após as contagens de palitos.

As contagens foram normais com o Aluno D. Ele conseguiu identificar precisamente as quantidades de triângulos e palitos. Entretanto, no caso da Aluna E, apesar de identificar corretamente a quantidade de triângulos, ela teve dificuldades em contar os palitos. Em algumas tentativas ela contou duas vezes um palito e em outras ela deixa de contar algum, sendo necessário a ajuda do pesquisador para contarem juntos palito a palito:

Pesquisador/Aluna E: (Contando o caso de 4 triângulos) *Um, dois, três. Quatro, cinco...*
Aluna E: *Seis...* (Aluna E conta um palito que já foi contado antes)
Pesquisador: *Não, você já contou esse.*
Pesquisador/Aluna E: *Seis... Sete... Oito...*
Pesquisador: *Tem um que você esqueceu de contar.*
(Aluna E conta de novo e acerta todos os nove palitos)
Aluna E: *Agora tá certo. Nove palitos.*

Trecho 59

Essa etapa foi mais demorada com a Aluna E, mas após os três casos (3, 4 e 5 triângulos), ela conseguiu identificar o padrão, mas não soube generalizar. Entretanto, ela pensou em contar de dois em dois triângulos para realizar de forma mais rápida:

Pesquisador: *Então, cada triângulo que eu vou adicionando, eu vou adicionando quantos palitos?*
Aluna E: *Dois.*
Pesquisador: *Dois. E se eu quisesse formar... Sei lá... Seis triângulos?*
Aluna E: *Ah... Aqui tem quatro...*
Pesquisador: *Seguindo essa lógica...*
Aluna E: *Teria que botar mais 4 palitos. Ficaria... 15 palitos.*
Pesquisador: *Pra 6 triângulos?*
Aluna E: *Sim.*
Pesquisador: *Mas não tem adicionado só 2 pra cada um?*
Aluna E: *Sim.*
Pesquisador: *Então por que você adicionou 4?*
Aluna E: *Porque tinha 4 triângulos... Ah não, tem cinco triângulos. Ah, então teria de adicionar só mais dois.*
Pesquisador: *Ah, você somou 4 já pensando que tinha 4 aí.*
Aluna E: *É, isso.*

Trecho 60

Para 10 triângulos, a Aluna E conseguiu calcular corretamente, mas ainda foi contando de triângulo em triângulo, sem conseguir uma generalização e afirmando que para outros exemplos teria que fazer a conta.

No caso do Aluno D, ele calculou corretamente a quantidade para 5 triângulos, mas disse que não consegue generalizar a ideia, mesmo reconhecendo que a cada triângulo somado se adiciona 2 palitos. Entretanto, ele tentou pensar em uma forma mais eficaz de fazer a conta para uma grande quantidade de triângulos:

Aluno D: *(...) cada triângulo tem dois, então se eu fosse fazer tipo, de dois em dois triângulos seriam 4.*
Pesquisador: *Peraí, 4... Eu não entendi esse aí.*
Aluno D: *Porque tipo, fazendo de dois em dois palitos, dá um triângulo, então um triângulo de cada vez.*
Pesquisador: *Somando de dois em dois palitos...*
Aluno D: *Tipo, três palitos é um triângulo. Cinco palitos é dois triângulos, sete são três, então, três é um triângulo, três palitos seria... sete, não! Três triângulos seriam sete palitos. A única forma que eu vi aqui de ir um pouco mais rápido é isso, é colocando mais triângulos. Ao invés de fazer um por um, ir fazendo dois.*
Pesquisador: *Ah sim, de ir fazendo dois por dois que vai somando 4 né.*
Aluno D: *Aham.*

Trecho 61

Tanto o Aluno D (Trecho 59) quanto a Aluna E (Trecho 60) tentam “facilitar” o processo mecânico somando de 4 em 4 palitos, mas nenhum pensa em uma forma de generalizar. O pesquisador então tentou passar para um segundo momento da atividade, estimulando-os a pensar em uma generalização. No caso do Aluno D, o pesquisador tentou fazê-lo notar que os “2” dos palitos adicionados é somado ao 3 inicial em uma certa quantidade de vezes. Entretanto, o pesquisador se utilizou da terminologia “*n*”, esquecendo do problema de poucos instantes atrás com o cálculo de perímetro:

Pesquisador: *Agora... (...) Eu quero poder trabalhar so com o “mais dois mais dois...”. Só que o primeiro é o que? “1+2”. Então, vou fazer o que... Pensa em “n” triângulos. Eu tenho já o primeiro que é 1+2* (palitos) *e depois eu vou somando 2 a quantidade que eu fui adicionando de triângulos... Eu vou ter quantos triângulos no total... “n”. Não sei se vai ficar claro, mas seria “1+2n”. (...)*
(Aluno D não entende)
Pesquisador: *Pensa assim, se eu tenho “n” triângulos, é porquê eu adicionei quantos triângulos?*
Aluno D: *Não sei... “n”.*
Pesquisador: *“n-1”. Por exemplo, se eu tenho 5 é porque eu adicionei 4, se eu tenho 10 é porquê eu adicionei 9, então se eu tenho “n” é porque eu adicionei “n-1”, tendeu?*
Aluno D: *Sim.*
Pesquisador: *Tá, então, cada um eu vou adicionando 2 palitos. Então eu vou somar o 3 inicial a 2 vezes “n-1” que é o que eu adicionei.*
Aluno D: *Ai...*

Trecho 62

Claramente o estímulo do pesquisador foi ineficaz e gerou confusão ao Aluno D. O pesquisador então partiu para um terceiro momento e tentou explicar já com valores, mesmo que, claramente, guiando-o pelo caminho da resposta. Neste ponto o pesquisador já havia praticamente dado a resposta, tentando agora fazer com que o aluno a entendesse, uma vez que ele não conseguiu desenvolver por conta própria uma generalização e o estímulo do pesquisador não contribuiu de forma eficaz para tal. Entretanto, o Aluno D basicamente pegou os valores dados e fez as contas guiado pelo pesquisador, que não percebeu que passou a interferir além do necessário após começar a tomar exemplos numéricos.

No caso da Aluna E, o pesquisador evitou usar letras e pensou que estimular a pensar no dobro da quantidade de triângulos mais 1 poderia ser mais fácil de entender, porém, mais do que realizar as contas, ela demonstrou grande dificuldade em entendê-las. Mostra que não sabe transformar soma em multiplicação em, por exemplo, “4+4+4” ser igual a “3x4” e em certo momento começa a confundir ainda mais, dizendo que para 100 triângulos você tem que ter “10 vezes 10”, ignorando os triângulos e pensando apenas em “o que precisa para aparecer um 100”:

> ***Pesquisador:*** (...) *E agora se eu vou somando 2, desses palitos, 2+2+2... Isso até 100 palitos, não, até 100 triângulos, isso seria fazer o que?*
> ***Aluna E:*** *10 vezes 10. Não, peraí... É... 10 vezes 10.*
> ***Pesquisador:*** *10 vezes 10?!*
> ***Aluna E:*** *É.*
> ***Pesquisador:*** *Mas de onde veio esse 10?*
> ***Aluna E:*** *Sei lá... Pra dar 100 teria de fazer isso.*
> ***Pesquisador:*** *Não, 100 triângulos.*
> ***Aluna E:*** *Ah, não sei...*
> ***Pesquisador:*** *Então 100 triângulos não tem como saber quantos palitos tem?*
> ***Aluna E:*** *Tem, tem, mas não sei a forma como faz isso. Mas deve ter, pra descobrir isso.*

Trecho 63

Visto que a Aluna E também não sabe operar com letras, o pesquisador não teve mais ideias de como fazê-la entender uma generalização. Novamente se nota também que não há uma reflexão acerca das contas feitas, quando ela disse “10 vezes 10” pois tinha de haver algo para aparecer o 100.

Apesar do pesquisador ter evitado que problemas ocorridos com o Aluno D se repetissem na entrevista da Aluna E, como uso de letras em tentativa de generalização ou descuido em guiar em excesso, o resultado obtido em relação ao critério para validade da resposta não foi diferente. Tanto o Aluno D quanto a Aluna E só reconhecem a possibilidade de cálculo através de várias iterações, sem conseguir entender uma possível generalização. Ambos seguiram um esquema empírico indutivo em suas falas.

Nesta pesquisa não foi visto nenhum referencial acerca de maturidade de raciocínio matemático em relação à aritmética e álgebra, contudo, agora se vê que tal estudo em anos intermediários do ensino fundamental se faz relevante, sem assumir que isso seja um problema específico dos cegos.

6. Síntese da pesquisa

Este capítulo visa sintetizar e apontar principais pontos expostos nos capítulos 4 e 5, abordando-os com um maior foco nos referenciais dos capítulos 1 e 2. Os resultados do estudo piloto são levados em conta por serem considerados relevantes para o estudo como um todo, dado que os alunos, por estarem no final do nono ano, possuiam um maior conteúdo matemático visto.

6.1. Síntese do problema 1

Primeiramente, da dupla de nono ano (A, B) e da dupla de oitavo ano (D e E), existe uma clara diferença na concepção de reta: enquanto a Aluna A e o Aluno B pensam na reta restringindo-a apenas a um intervalo, o Aluno D e a Aluna E reconhecem que ela é infinita, identificando logo que, independente do que for tomado como ponto, haverá "vários", mesmo não sendo possíveis de contar.

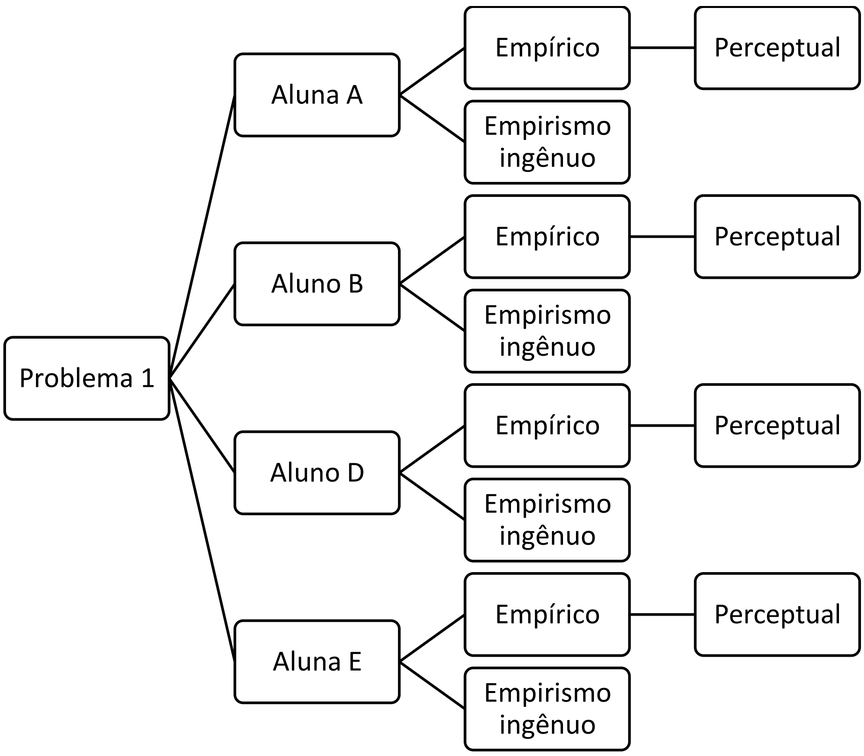
Quanto à relação entre ponto e reta, a Aluna A e o Aluno B reconhecem a existência prévia de pontos na reta, mesmo em casos nos quais não haja uma forma concreta perceptível. Um exemplo é quando o Aluno B, que utilizou a ponta do seu dedo para verificar quantas vezes ela cabe em um intervalo, identifica que há pontos nos locais indicados mesmo após tirar o dedo. Já o Aluno D e a Aluna E os veem como entes independentes, fazendo sentido haver um ponto na reta apenas se ele for colocado propositalmente.

Os Alunos B e D utilizam a ponta dos dedos como uma representação concreta de ponto. A Aluna E pensa em gota d'água e pingo de chuva, seguindo o mesmo raciocínio dos Alunos B e D, de verificar empiricamente quantas vezes o objeto adotado para representar um ponto "cabe" entre os dois pontos dados, embora ela não fique fazendo referências ao concreto. Já a Aluna A, a partir do momento que identifica uma representação de ponto em uma situação, verifica quantas vezes o ponto "aparece" entre os dois pontos dados, no caso inicial, foram os vértices da folha de papel. Como não aparecem vértices no meio do lado da folha, não haveria pontos ali.

No caso da Aluna A, utilizando o método da dupla estimulação, o pesquisador obteve sucesso em, através de estímulos sucessivos, identificar como ela pensava e trabalhava pontos e retas e ainda, a desenvolver sua fala de forma a entender que entre dados dois pontos, existem infinitos pontos.

No caso dos Alunos B, D e E, utilizando o método da dupla estimulação, o pesquisador obteve sucesso apenas em identificar como eles concebiam e trabalhavam os objetos geométricos, mas não houve sucesso em desenvolver o raciocínio deles de forma a entenderem que, entre dados dois pontos na reta, existem infinitos pontos.

Em síntese, os esquemas de prova obtidos no problema 1 foram em peso, empíricos, sendo todas na base da percepção do que é manipulado. Abaixo, foram organizados os esquemas de prova segundo as duas taxonomias abordadas nesta pesquisa:



Organograma 5

6.2. Síntese do problema 2

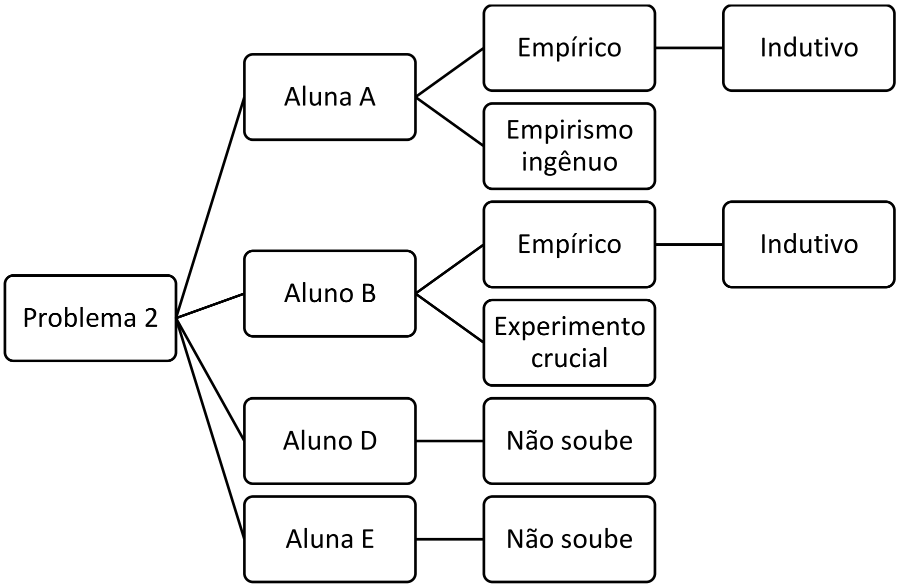
Em relação à definição de quadrado, a Aluna A e o Aluno B apresentaram definições formais corretas. O Aluno D, apesar de ter apresentado uma definição abstrata, não foi uma definição precisa. A Aluna E apresentou apenas características concretas ao invés de uma definição formal, revelando assim seus pseudoconceitos de quadrado, onde as características concretas de “lado” e “ponta” são os elementos que definem o objeto. Isso se nota quando a Aluna E ao invés de dizer o que um quadrado é, apenas cita as suas características, que poderiam ser abstratas, mas que ao longo da entrevista nota-se o quão concretas são, como no problema 4, no qual disse que não há um quadrado no interior do outro porque não há as linhas (seus lados).

No caso dos Alunos D e E, apesar do pesquisador ter trabalhado o conceito de área com eles, o maior problema foi não saberem operar com letras. A resistência do Aluno D em fazer a multiplicação de “*l*” por “*l*” e sua fala de que não se pode somar sem que sejam números, o que se repetiu com a Aluna E, foram empecilhos para a generalização da área do quadrado.

Originalmente o problema 2 envolvia perímetro desde o estudo piloto, mas isso foi esquecido de ser trabalhado com os alunos do nono ano. Já com os alunos do oitavo ano, apesar de terem entendido como se calcula perímetro, não souberam generalizar, pela razão mencionada de não operarem com letras, tendo sido essa a única estratégia planejada pelo pesquisador para generalizar.

O pesquisador obteve sucesso em identificar conceitos e pseudoconceitos em todos os alunos e, através do método da dupla estimulação, desenvolver a atividade com os Alunos A, B. Os sucessivos estímulos através do geoplano funcionaram para introduzir os conceitos de área e perímetro para os Alunos D e E, mas a Aluna E, apesar de entender, continuou com dificuldades em reconhecer os elementos no ambiente do geoplano, o que pode ser normal para uma primeira vez utilizando o recurso.

Em síntese, os esquemas observados no problema 2 foram organizados da seguinte forma:



Organograma 6

No problema 2, como a Aluna A só resolveu um exemplo, é um caso de esquema de prova empírico indutivo. Como Harel e Sowder não se aprofundam neste esquema, foi pertinente utilizar a escala hierárquica de Balacheff, que mostra a diferença no rigor empírico entre Aluna A e Aluno B.

Nos casos do Aluno D e da Aluna E, não houve generalização. Apesar de conseguirem entender o conceito de área, não se conseguiu desenvolver mais além a atividade.

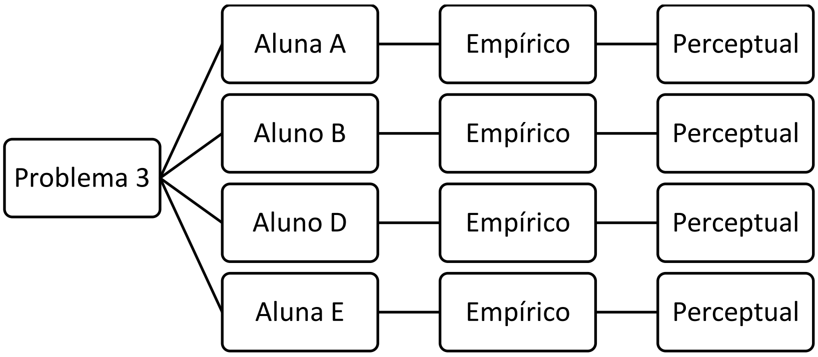
6.3. Síntese do problema 3

No problema 3, nos casos da Aluna A e do Aluno B, verificou-se que foram capazes de absorver ideias para argumentar que a figura formada é um quadrado e fortalecer conceitos acerca de quadrados e triângulos. Houve a confusão acerca do losango, pois acharam que se o quadrado mudasse de posição deixaria de ser um quadrado e se tornaria um losango (não reconhecendo a inclusão de classes), mas este ponto não foi explorado.

O caso de reconhecerem o quadrado como losango ao girá-lo é algo que ocorre também nos alunos videntes e é comum em alunos com pensamento geométrico de visualização/reconhecimento. Dependendo da posição da figura, o aluno a identifica de uma maneira diferente. Isso só foi percebido por conta do estímulo de girar o geoplano. Embora tal estímulo também tenha sido dado na entrevista com o Aluno D, o resultado foi diferente. O aluno mencionou o losango, mas não acha que a figura tenha outra classificação dependendo de como é apresentada. Ele mudou de ideia ao tatear novamente a figura e argumentou que é um retângulo pelas suas características concretas percebidas, as quais constituem o pseudoconceito de retângulo dele.

No caso da Aluna E, ela inicialmente disse que não há um quadrado no interior, pois não percebeu seus lados, mas após os pontos serem ligados, afirmou que a figura formada no interior é um quadrado por conta de suas características concretas condizentes com o pseudoconceito abordado de "quadrado", cujas características concretas são referentes às "pontas" (vértices) e "espaços" (lados).

Em síntese, os esquemas de prova observados foram todos empíricos perceptuais, organizados da seguinte forma:



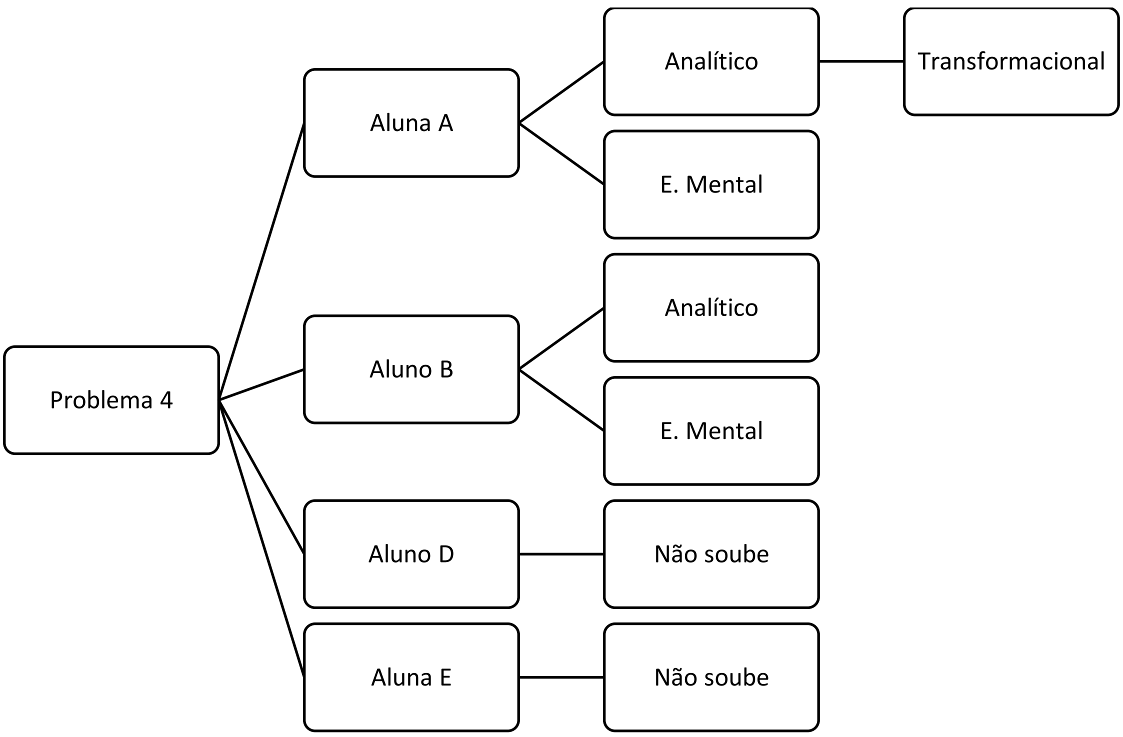
Organograma 7

Embora tenha se trabalhado casos específicos no geoplano, as dimensões dos quadrados utilizados nas entrevistas não tiveram influência no raciocínio dos alunos em suas falas. Com isso, seria plausível afirmar que o argumento, apesar de empírico, fosse aplicável a qualquer caso, podendo então se afirmar que há um empirismo ingênuo, segundo a taxonomia de Balacheff. Entretanto, o baixo nível de pensamento geométrico de visualização/reconhecimento (DE VILLERS, 2010), deixa o pesquisador receoso de fazer tal afirmação.

6.4. Síntese do problema 4

No caso dos alunos A e B, mesmo o professor já tendo ensinado a eles que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180° e justificado, ambos não recorreram a um esquema de prova por autoridade. A Aluna A obteve sucesso em interiorizar a justificativa, sendo capaz de refletir nos objetos trabalhados mesmo sem lembrar exatamente como o professor explicou. O Aluno B tentou argumentar usando um determinado método e, embora não tenha dado uma justificativa correta, expôs um esquema de prova aparentemente internalizado, tentando traçar linhas que dessem a volta nos polígonos, mas sem aparentemente refletir no sentido disso.

Neste problema, não houve a necessidade de uma sequência de estímulos conforme o método da dupla estimulação, visto que os casos foram a dois extremos: ou sabiam e tinham uma justificativa a dar ou de fato não sabiam nada, sendo necessário o planejamento de uma aula completa. Em síntese, os esquemas de prova do problema 4 foram organizados da seguinte forma:



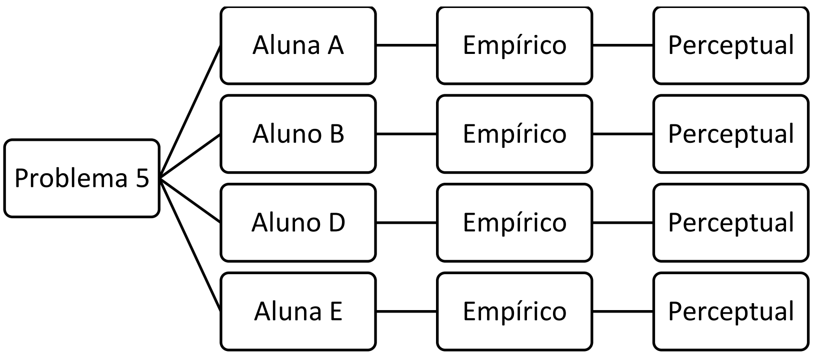
Organograma 8

6.5. Síntese do problema 5

O problema 5 mostra que, mesmo sem referenciais visuais, os alunos cegos investigados conseguem trabalhar com frações e inclusive pensar em objetos particionados, como nos casos dos alunos B, D e E, o que é uma estratégia visual muito usada por videntes (que optem por pensar em objetos inteiros e reparti-los).

Através do método da dupla estimulação, o pesquisador obteve êxito em identificar os principais problemas ao trabalhar com frações, sendo a magnitude dos valores expostos a característica crucial em algumas falas, sem haver uma reflexão acerca dos valores abordados. Como exemplos, há os casos em que nove décimos foi a resposta por ter números maiores, ou a percepção errônea do Aluno D, que imaginou que 3 pedaços grandes de pizza (3/4) são mais pizza que 9 pedaços pequenos (9/10). Com exceção da Aluna E, foi possível através de estímulos sucessivos, corrigir essas falsas percepções, mas ainda através de uma argumentação empírica.

Em síntese, os esquemas de prova observados no problema 5 foram organizados da seguinte forma:



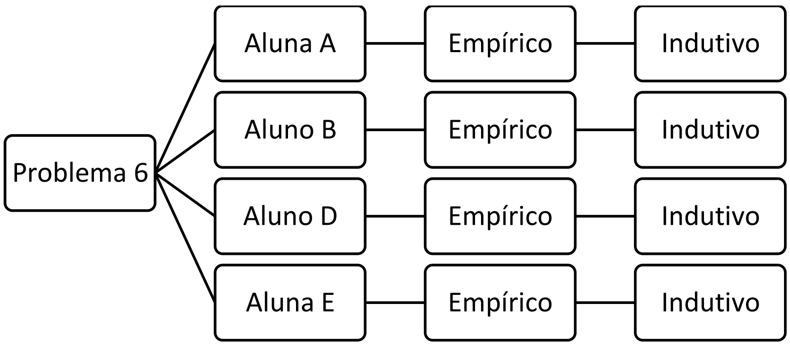
Organograma 9

6.6. Síntese do problema 6

Em geral, as estratégias para este problema consistem claramente em esquemas indutivos de prova, tanto no estudo piloto quanto no estudo principal. A principal diferença entre os dois grupos foi a operação com letras. Apesar de todos terem certos níveis de dificuldade em entender as contas feitas, os alunos de oitavo ano demonstraram uma maior dificuldade, sendo os estímulos apresentados praticamente ineficazes. Claro que, isso não indica nenhuma inaptidão ou algo do tipo, mas para um trabalho matemático mais produtivo, diferentes estímulos devem ser pensados de forma a levar em consideração a necessidade de se desenvolver contas com letras e interpretação.

Apesar da Aluna E reconhecer um padrão, ela não conseguiu desenvolver um raciocínio além, chegando ao ponto de, quando lhe foi perguntado quantos palitos seriam necessários para construir 100 triângulos, responder "10 vezes 10", pois tinha de responder algo relacionado a 100, mas não estava mais acompanhando o contexto.

Em síntese, os esquemas de prova observados no problema 6 foram organizados da seguinte forma:



Organograma 10

Reflexões finais

Esta pesquisa analisou esquemas de prova de dois alunos cegos cursando o nono ano do ensino fundamental em 2015 e dois alunos cegos cursando o oitavo ano do ensino fundamental em 2016, aplicando um conjunto de problemas pensados de forma a evocar uma imagem visual por parte de videntes, com o objetivo de analisar como seriam as respostas de alunos cegos. Através de pesquisas com alunos videntes em vários graus de escolaridade ao redor do mundo (HAREL e SOWDER, 2007), constatou-se que estes tendem a se utilizar de um tipo de prova que foge dos esquemas de prova analíticos (que envolvem dedução a partir de uma base de verdades), chamados de dedutivos em Harel e Sowder (2007). Segundo eles, “alunos baseiam suas respostas na aparência dos desenhos, e imagens mentais por si só denotam os termos geométricos” (HAREL e SOWDER, 2007, p. 48). Uma questão inicial da pesquisa consistia em verificar qual seria a tendência de um grupo de indivíduos cegos em seus esquemas de prova, visto que não possuem o principal fator que leva os videntes a tenderem aos esquemas empíricos em contextos que envolvem entes visuais. Constatou-se que, assim como no caso dos videntes, a maioria dos esquemas de prova seguidos são empíricos, sendo a percepção tátil a referência de maior peso.

Para entender isso, deve-se ter em mente que o cego tem sua própria “visão” do mundo. Embora essa palavra remeta a informações captadas pelo olho, ela se reflete na fala do cego, referenciando ao que ele percebe à sua frente. Isso se mostra claro no Trecho 6, quando a Aluna A disse que não vê nenhum ponto no segmento, no Trecho 22, quando Aluno B disse que está avaliando esteticamente e no Trecho 23 quando o Aluno B disse que vê os ângulos, pelo ponto de vista dele. Como citado anteriormente, pelas palavras de A. V. Birilev, um homem cego altamente educado, “a forma como uma pessoa cega falha em ver a luz não é da mesma forma que um vidente vendado” (VYGOTSKI, 1993, p. 102). De fato, os cegos nesta pesquisa “veem” com o tato. Assim como informações visuais foram um fator de peso em pesquisas ao redor do mundo com videntes, informações táteis foram um fator de peso com os cegos em suas estratégias de prova. Mesmo no caso do Aluno B, que utiliza pouco os recursos didáticos, se utilizou do tátil como base para desenvolver mentalmente, como quando contou quantas vezes a ponta do dedo cabe em um intervalo ou quando liga os pontos médios com os elásticos para entender a figura e então refletir. Isso só reforça a importância que os recursos didáticos possuem no ensino de alunos cegos, ajudando-os a seguir caminhos alternativos no aprendizado para contornar a falta da visão.

Outra questão da pesquisa era descobrir como são concebidos e utilizados pelos alunos os conceitos geométricos abordados, identificando pseudoconceitos. Evidentemente que, no caso de reta e ponto, não se esperou uma definição formal, visto que não existem, sendo assim interessante ver como tais objetos são representados e como tais representações são manipuladas. Todos os alunos mostraram que são capazes de associar diversos objetos concretos a pontos e retas, apresentando uma grande flexibilidade em relação a representações. No caso dos alunos B e D, a representação marcante é a ponta do dedo. No caso da Aluna E, foi o pingo de chuva e gota d’água. No caso da Aluna A, não se notou uma preferência, visto que ela improvisou usando uma resma de folhas que por coincidência estava na mesa durante a entrevista, sendo a única que, com estímulos do pesquisador, conseguiu abstrair mais que os outros, no sentido de reconhecer a presença de pontos que não estão ali de forma concreta e, logo, não podendo ser percebidos pelo tato.

No caso de quadrado, a Aluna A e o Aluno B apresentaram definições corretas, mas trabalharam apenas sobre o concreto. Como eles possuíam conceitos bem formados, foi possível através de estímulos sucessivos desenvolver um raciocínio mais avançado, como no Problema 3, em que a Aluna A conseguiu entender os argumentos de congruência e o Aluno B igualmente compreendeu a utilização de Pitágoras. No caso do Aluno D, apesar da definição que apresentou não estar correta, passou a impressão de ser abstrata. Entretanto, ao se trabalhar os problemas 2 e 3, nota-se que sua concepção de quadrado é totalmente baseada no concreto, identificando-se o pseudoconceito que relaciona “quadrado” a toda figura à qual se percebe de forma tátil que possui quatro lados iguais. Com a Aluna E se repete o mesmo que com o Aluno D, havendo, porém, uma definição bem vaga e informal ao apenas apontar características concretas.

Em relação ao triângulo, embora não tenha havido uma definição formal no estudo principal, é reconhecido por todos como uma figura de três lados através do tato, como no problema 5 e, no caso do estudo piloto, no problema 3.

Em relação à questão envolvendo frações, apesar de não se tratar de um problema de geometria, elas são normalmente associadas a representações visuais pelos videntes e, mesmo quando se é possível trabalhar de forma abstrata apenas com números, é normal evocar uma imagem de algo concreto em seus pensamentos. Nos alunos cegos, isso não se mostrou diferente. Apesar de não terem uma referência visual, se referem a objetos como fatias de pizza e bolo, como qualquer vidente pensaria.

Durante a pesquisa, os recursos didáticos se mostraram de grande importância para o desenvolvimento do cego, oferecendo a ele uma via alternativa, o que condiz com as ideias de Vygotsky (1993) ao refletir sobre a possibilidade do cego trilhar outros caminhos no seu processo de aprendizado. Observou-se também que, ao mesmo tempo que recursos visuais são muitas vezes uma base para os pseudoconceitos dos videntes, os recursos táteis também são base para pseudoconceitos a serem trabalhados com cegos. Começando com o problema dos pontos na reta, percebe-se que nenhum dos alunos possui uma noção de reta que envolva sua continuidade – eles trabalham com quantidades contáveis de pontos, o que talvez seja reflexo do uso de certos materiais utilizados para se trabalhar com os conceitos de reta e ponto. No caso do geoplano, houve um mal-entendido ao se trabalhar os pontos médios com o Aluno B: o material possui um conjunto de pontos isolados. Não havendo um contínuo de pontos, trabalha-se em um conjunto discreto, o que pode gerar confusão ao se trabalhar medida. Isso se nota quando o aluno trabalhou com um lado que abrange 5 pinos como se a medida fosse 5cm, e tomando o terceiro pino, localizado no meio, como sendo o “centímetro 3”.

O pesquisador aqui está longe de condenar os recursos utilizados. Os recursos atuais contribuem imensamente para o ensino de matemática aos alunos cegos. Entretanto, questões envolvendo recursos didáticos devem ser exploradas para que novos recursos surjam, facilitando o entendimento e evitando que na formação de novos conceitos sejam erroneamente associados a conceitos anteriores que possam gerar mal-entendidos posteriores. Barbosa (2003) já apontava a necessidade da criação de novos recursos didáticos, especialmente em geometria.

Neste estudo pôde-se notar uma tendência por parte dos cegos de seguir esquemas mais empíricos e a fazer referência a fatos observados através de experiências concretas. Embora por si estes não sejam fatores negativos, fica uma preocupação que já existe no caso dos alunos videntes, de como evoluir a partir de tal estado para melhor desenvolver habilidades de argumentação. Para futuros trabalhos, fica a sugestão de um estudo mais profundo acerca de pseudoconceitos, pois uma vez que os esquemas notados são em maioria empíricos, nota-se o peso da concretude dos conceitos trabalhados, logo, imagina-se que evoluir os pseudoconceitos a conceitos abstratos possa contribuir para um desenvolvimento nos esquemas de prova. É também relevante uma pesquisa com séries mais avançadas, uma vez que o grau de escolaridade pode ter influenciado na maturidade dos conceitos abordados.

Referências bibliográficas

AGUILAR JUNIOR, C. A. **Postura de Docentes Quanto aos Tipos de Argumentação e Prova Matemática apresentados por alunos do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.

BALACHEFF, N. **Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics**. Mathematics, teachers and children, pp. 216-235, London: Hodder and Stoughton, 1988.

BARBOSA, P. O estudo da geometria. **Revista Benjamim Constant**, edição 25, agosto de 2003, Artigo 3.

BATISTA, C. G. Formação de Conceitos em Crianças Cegas: Questões Teóricas e Implicações Educacionais. **Revista Psicologia: Teoria e Pesquisa**, volume 21, 2005.

BORBA, F. S. **Dicionário UNESP do Português Contemporâneo**. Editora UNESP, São Paulo, 2004.

CERQUEIRA, J. & FERREIRA, E. Recursos didáticos na educação especial. **Revista Benjamim Constant**, edição 15, abril de 2000, Artigo 3.

CHARETTE, F. The logical Greek versus the imaginative Oriental: on the historiography of 'non-Western mathematics during the period 1820-1920*.* Publicado em **The History of Mathematical Proof In Ancient Traditions***,* pp. 274-293*.* Cambridge University Press, 2012.

DE VILLIERS, M. **Some Reflections on the Van Hiele Theory**. Plenária convocada no 4º Congresso de professores de matemática, 2010, Zagreb.

FERNANDES, S. H. A. A. & HEALY, L. A Inclusão de Alunos Cegos nas Aulas de Matemática: explorando Área, Perímetro e Volume através do Tato. **Revista Bolema**, nº 37, pp. 1111-1135, v. 23, Rio Claro, São Paulo, 2010.

FERNANDES, S. H. A. A. **Uma análise vygostkiana da apropriação do conceito de simetria por aprendizes sem acuidade visual**. Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 2004.

HAREL, G. & SOWDER L. Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. **CBMS Issues in Mathematics Education**, volume 7, pp. 234-283, San Diego, 1998.

HAREL, G. & SOWDER L. Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. In: F. Lester (Ed.), **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, National Council of Teachers of Mathematics.

JAPIASSÚ, H. & MARCONDES, D. **Dicionário básico de filosofia**. Terceira edição, Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro, 2001.

LOMÔNACO, J. F. B. et al. Desenvolvimento de Conceitos: O Paradigma das Transformações, **Revista Psicologia: Teoria e Pesquisa**, Volume 17, 2001.

NUNES, S. S. & LOMÔNACO, J. F. B. Desenvolvimento de conceitos em cegos congênitos: caminhos de aquisição do conhecimento. **Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional (ABRAPEE)**, Volume 12, pp. 119-138, 2008.

POGORELOV, A. V. **Geometría elemental**. Tradução do russo para espanhol por Carlos Veja, Editora M. Impresso originalmente em Moscou, Editora Mir, 1974.

SERINO, A. P. A. **Uma abordagem inclusiva para transformações geométricas: O caso de alunos cegos**. Dissertação de mestrado, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

VAN DER VEER, R. & VALSINER, J. **Understanding Vygotsky: A Quest for Synthesis**, Basil Blackwell, Cambridge, USA e Oxford, UK, 1991.

VARGHESE, T. Considerations Concerning Balacheff's 1988 Taxonomy of Mathematical Proofs. **Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education**, 7(3), pp. 181-192, Northern Alberta Institute of Technology, Edmonton, Canadá, 2010.

VELHO, G. Observando o Familiar. In: **A Aventura sociológica: objetividade, paixão, improviso e método na pesquisa social**, pp. 36-46, Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1978.

VYGOTSKI, L. S. **Pensamento e linguagem**, publicado originalmente em 1935 em russo. Edição em português por Ridendo Castigat Mores, 2001.

VYGOTSKI, L. S. **A defectologia e o estudo do desenvolvimento e da educação da criança anormal**, publicado originalmente em 1983 em Moscou, Tradução do russo para o português por Denise Regina Sales, Marta Kohl de Oliveira e Priscila Nascimento Marques, São Paulo, 2011.

VYGOTSKI, L. S. **Fundamentals of Defectology**, Springer Science+Business Media, Nova Iorque, 1993.

WARREN, D. H. **Blindness and children: an individual differences approach**. Cambridge University Press, 1994.

200 Years: The Life and Legacy of Louis Braille. American Foundation for the Blind. Disponível em: <http://www.afb.org/LouisBrailleMuseum/braillegallery.asp?GalleryID=47>. Acessado em 16 de agosto de 2015.

Site do Benjamin Constant. Disponível em: <http://www.ibc.gov.br/>. Acessado em 17 de novembro de 2015.