UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CAROLINA MOURA BRASIL CARNEIRO DA SILVA

Além Da Zona De Conforto: Investigando Aspectos do Conhecimento Matemático para o Ensino.

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Rio de Janeiro
Março de 2016.

Carolina Moura Brasil Carneiro Da Silva

ALÉM DA ZONA DE CONFORTO: investigando aspectos do conhecimento matemático para o ensino.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PEMAT), da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.
Orientador: Victor Giraldo
Coorientadora: Letícia Rangel

Rio de Janeiro
Março de 2016.

Carolina Moura Brasil Carneiro da Silva

ALÉM DA ZONA DE CONFORTO: investigando aspectos do conhecimento matemático para o ensino.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PEMAT), da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de

Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovado por:

Dr. Victor Augusto Giraldo
Instituto de Matemática – UFRJ
Orientador

Dra. Leticia Guimarães Rangel
Colégio de Aplicação – UFRJ
Coorientadora

Dr. Dario Fiorentini
Unicamp

Dr. Maurício Rosa
UFRGS

Dra. Walcy Santos
Instituto de Matemática – UFRJ

Dra. Ana Teresa de Carvalho Correa de Oliveira
Faculdade de Educação - UFRJ

Dr. Wellerson Quintaneiro da Silva
CEFET-RJ

Rio de Janeiro
Março de 2016

Dedico este trabalho aos meus familiares, principalmente, minha mãe, meu pai e meus irmãos, que tanto me apoiaram e me deram a oportunidade e o privilégio de seguir meus estudos acadêmicos. Gostaria, também, de fazer uma dedicatória especial ao meu avô Joaquim Cordeiro de Moura Brasil Neto, que acompanhou o início dessa trajetória com grande orgulho, mas, infelizmente, não esteve ao meu lado para mais uma grande conquista. Que, onde ele estiver, possa estar sorrindo e iluminando meus passos até o fim.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente, a meus pais, Cesar e Yone, e irmãos, Igor e José Eduardo, que, em todos os momentos, acreditaram no meu potencial. Agradeço também minhas avós e avôs que tanto me deram de bagagem e estrutura para que eu tivesse acesso à educação de qualidade e a meu primo Vinícius, que muito me ajudou na reta final desse trabalho. Além desses, gostaria de agradecer aos professores que me incentivaram e guiaram em todos os momentos - Victor Giraldo e Leticia Rangel - e colegas do LaPraMe que me deram a oportunidade de discutir sobre o assunto em algumas reuniões, principalmente o professor Wellerson Quintaneiro que estava sempre disposto a ajudar. Também agradeço aos demais professores do PEMAT-UFRJ que estiveram sempre à disposição para me auxiliar quando eram procurados.

Outras pessoas muito importantes me auxiliaram a certa distância e eu não poderia deixar de registrar meu agradecimento. Agradeço à professora Mônica Mandarino, que foi uma das primeiras a me mostrar o caminho da pesquisa em Educação Matemática. Aos meus amigos mais próximos - dentre eles Andréa, Bárbara, Brunna, Caio, Caroline, José, Louise e Luiza -, que foram compreensivos e estiveram ao meu lado sempre que precisei ao longo do processo, também não posso deixar de agradecer. Além desses, agradeço a todos aqueles que fizeram parte desta caminhada direta ou indiretamente.

“As consciências não se encontram no vazio de si mesmas, pois a consciência é sempre, radicalmente, consciência do mundo”

Paulo Freire

RESUMO

SILVA, Carolina Moura Brasil Carneiro da. **Além da zona de conforto**: investigando aspectos do conhecimento matemático para o ensino. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

O presente trabalho tem por objetivo investigar o processo que emerge de uma atividade aplicada com o intuito de explorar o conhecimento matemático para o ensino de professores em formação continuada. A pesquisa foi baseada na análise das reflexões que professores e futuros professores expressavam sobre conteúdos chave do ensino básico como, por exemplo, a determinação da representação posicional de um número racional, o que leva a uma reflexão sobre o algoritmo da divisão de números naturais. Para a motivação dessas reflexões os conteúdos são abordados em uma base não decimal buscando promover um deslocamento para fora da zona de conforto do professor, ou seja, provocar uma situação em que os conteúdos básicos e comumente utilizados por eles não sejam automaticamente efetuados. Os participantes da pesquisa formavam um grupo de professores cursando um mestrado em ensino de matemática. A pesquisa foi realizada sob uma perspectiva qualitativa, através da análise da transcrição do áudio gravado na aplicação da atividade, que contou com a associação de categorias de análise baseadas nas categorias do Conhecimento Matemático para o Ensino. Os resultados sugerem a possibilidade de investigar conhecimentos que se desenvolvem a partir da reflexão sobre a prática docente. Neste caso, um dos resultados apontados foi que a atividade levou os professores participantes a buscarem, em sua própria prática, estratégias para solucionar questões que os desafiam matematicamente.

Palavras-chave: formação de professores, atividade investigativas, conhecimento matemático para o ensino, representação posicional.

ABSTRACT

SILVA, Carolina Moura Brasil Carneiro da. **Além da zona de conforto**: investigando aspectos do conhecimento matemático para o ensino. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

The present work aims to investigate the process that emerges from an activity applied in order to explore mathematical knowledge teaching not only of inservice teachers but also of preservice teacher education. The research was based on the analysis of the reflections that teachers and future teachers expressed about key contents of elementary school, such as the determination of the positional representation of a rational number, which produce a reflection on the algorithm of the division of natural numbers. In order to motivate these reflections the approach of the contents is made in a non-decimal base, looking for a shift out of teacher's comfort zone, that is, to provoke a situation in which the elementary contents, commonly used by them, are not automatically solved. The sample of the research was composed of inservice and preservice teachers pursuing a master's degree in mathematics education. The research was carried out under a qualitative perspective, through the analysis of the transcription of audio recorded of the activity. The analysis categories was based on an association with the categories of Mathematical Knowledge for Teaching. The results suggest the possibility of investigating knowledge that develops from the reflection on teaching practice. One of the results is that in the activity teachers looked for their own practice to find strategies to solve questions that mathematically challenge them.
Key words: teacher educatio, investigative activity, mathematical knowledge for teaching, positional representation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, a literatura de pesquisa em Educação Matemática tem debatido intensamente os conhecimentos próprios do professor de matemática. Por exemplo, Ball et al. (2009), inspirados nas ideias de Shulman (1986), propõem a noção de conhecimento matemático para o ensino. Fiorentini e Oliveira (2013) defendem que os saberes próprios do professor de matemática se diferenciam epistemológica e metodologicamente daqueles do matemático profissional. Um aspecto importante desse debate é a complexa relação entre conteúdo matemático e prática docente, e como esses podem se complementar na construção do conhecimento de matemática para o ensino.

Biza, Nardi e Zachariades (2007) sugerem que o envolvimento de professores com Tarefas baseadas na análise e na discussão da produção de alunos, como proposto por Ainley, J., Pratt, D. e Hansen, A. (2006), possibilita a reflexão sobre o conteúdo a ser ensinado em sala de aula, proporcionando um ambiente favorável ao desenvolvimento de conhecimentos necessários para sua prática profissional.

Neste trabalho, aplicamos uma atividade especialmente desenhada para investigar o conhecimento de conteúdo matemático na formação de professores a partir de uma questão de conteúdo matemático, objetivando promover uma reflexão sobre seus próprios conhecimentos e sobre a matemática escolar.

Uma questão central apontada pela literatura recente é a necessidade de reconhecer que a identidade do professor de matemática é constituída por características próprias do seu perfil profissional e, por isso, é preciso considerar aspectos da prática ao longo de sua formação. Como consequência dessa reflexão, diversas questões emergem. Por exemplo, como a formação do professor deve ser concebida para auxiliar na sua atuação profissional? Que tipo de tarefas podem contribuir para a construção de um conhecimento de conteúdo que é específico do professor de matemática? De que maneira é possível aproximar as disciplinas de conteúdo matemático dos cursos de formação de professores com a sua prática?

Motivados por essas questões, apresentamos atividades baseadas no modelo de tarefas[1] – que chamamos de *atividades investigativas* – especialmente desenhadas com o objetivo de explorar e provocar a reflexão sobre o conhecimento

[1] Assim como Aynley e Pratt (2002), utilizamos o termo tarefa para aquilo que foi desenhado por nós e o termo atividade para nos referir ao que de fato aconteceu na sua aplicação.

matemático para o ensino de professores em exercício a partir de situações que põem em xeque o conhecimento sobre o conteúdo, isto é, fazem com que algoritmos simples e realizados sistematicamente pelos professores não sejam tão óbvios. Analisamos os resultados buscando identificar inseguranças e reflexões sobre as práticas que foram identificadas ao longo das atividades.

Um segundo objetivo da elaboração e aplicação dessas atividades, mas não menos relevante, é promover a integração da prática docente da escola básica na formação de professores por meio da reflexão sobre tópicos que permeiam o ensino básico em uma disciplina eminentemente de conteúdo matemático presente na formação do professor. A proposta está orientada pela perspectiva de aproximar a formação docente de sua prática. Os caminhos para buscar relações entre a prática docente e o conteúdo matemático na formação do professor de matemática ainda constituem um desafio para pesquisadores e formadores de professores.

Como aluna do curso de licenciatura, acreditava, ingenuamente, que seria possível, ainda em minha formação inicial, encontrar uma disciplina que desenvolvesse em mim conhecimentos necessários para ensinar matemática. Porém, quanto mais me aproximava do final do curso, mais tinha a clareza de que determinados conhecimentos só seriam aprendidos com o exercício da profissão, ou seja, depois de alguns anos de experiência docente. O problema era: até lá, como poderia atuar enquanto professora nos primeiros anos de profissão sem me sentir preparada para lecionar? Acreditava ter um bom domínio do conteúdo matemático e sempre busquei na literatura algumas reflexões sobre educação e, em especial, educação matemática, mas isso não era o suficiente. Saber o conteúdo aprendido na universidade não era o bastante para que eu me sentisse confiante em ser professora da escola básica. A literatura a que tive acesso até então apontava para a existência de um conhecimento específico para exercer a profissão docente, porém não encontrei nenhuma definição sobre o que era exatamente esse conhecimento e nem como este tipo de conhecimento poderia ser desenvolvido.

Logo após minha graduação, ingressei no Mestrado em Ensino de Matemática com o objetivo inicial de compreender o que seria este conhecimento específico do professor e como ele poderia ser desenvolvido.

Ao cursar a disciplina de Análise Real que, no ano de meu ingresso, era obrigatória no primeiro período do mestrado, me deparei com uma tarefa proposta pelo formador, orientador dessa pesquisa, que consistia em determinar a soma, a subtração, o produto e a divisão de dois números inteiros representados em uma base não decimal. Esse exercício me fez ver o quanto eu desconhecia o sistema posicional de numeração e, também, o quanto eu apenas reproduzia os algoritmos sem compreendê-los em sua totalidade. Naquele momento, as discussões se restringiram a pensar estritamente no algoritmo, e não as maneiras de ensiná-lo.

Sendo assim, ao desenhar o projeto de pesquisa do mestrado, nos debruçamos sobre esse tipo de tarefa com o objetivo de iluminar aspectos da prática docente que emergissem a partir do envolvimento de professores já formados. Reconhecemos que aquele tipo de atividade afasta o professor da sua *zona de conforto usual*, por meio de conteúdos que lhes são familiares, porém sem aspectos que fornecem as garantias de validade dos procedimentos que estão acostumados a executar – como, por exemplo, as operações com números representados em uma base não decimal. Entretanto a atividade não consiste na pura realização da tarefa proposta. A discussão entre os professores participantes e o estímulo a reflexões e questionamentos levantados por eles seriam características chave para a proposta da pesquisa. Assim, outro aspecto que caracteriza a proposta é o ambiente no qual a tarefa é desenvolvida.

Neste trabalho, consideramos zona de conforto a partir de uma reinterpretação do sentido para o termo definido por Penteado e Borba (2000, p. 32) como sendo a "dimensão da prática docente em que estão presentes a previsibilidade e o controle". Entendemos zona de conforto não só como uma dimensão da prática, mas também a partir da perspectiva do indivíduo em relação ao próprio conhecimento sobre conteúdo matemático, sobre o qual tem controle e previsibilidade. Ao propormos tarefas em que o professor é levado a pensar em uma base não decimal, buscamos provocar um afastamento da zona de conforto sob esse aspecto, ou seja, estamos propondo um olhar diferenciado para o conteúdo, de modo que os procedimentos não são previsíveis *a priori*. Esse afastamento da zona de conforto é uma das características principais da tarefa desenhada.

Sendo assim, nossa questão de pesquisa se coloca, inicialmente, do seguinte modo: **Como tarefas problematizadoras, desenhadas com essas características, podem fazer emergir aspectos do conhecimento de conteúdo matemático para o ensino de professores e promover reflexões e esses conhecimentos e sobre a prática dos participantes?**

A partir de uma reflexão mais elaborada e fundamentada no referencial teórico, reformulamos nossa questão de pesquisa do seguinte modo: **Que aspectos do conhecimento do professor são evidenciados em um ambiente problematizador?**

Sendo assim, o objetivo da pesquisa está centrado na observação do processo que emerge no ambiente proporcionado pela tarefa proposta, procurando iluminar aspectos da complexidade do conhecimento matemático para o ensino.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1. Saberes Docentes e Formação de Professores

Uma referência central para a pesquisa em formação de professores é o trabalho de Shulman (1986) que propõe a noção de conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK). Em seu artigo *Those who understand, Knowledge growth in teaching*, Shulman analisa as mudanças ocorridas nas avaliações que habilitavam professores para atuar na escola básica nos Estados Unidos. Para isso, o autor compara provas que eram realizadas por professores no século XIX com aquelas aplicadas na década de 80.

Segundo o autor, no século XIX, as avaliações eram orientadas pelos conteúdos que permeavam a escola básica, carregando implícita a ideia de que para ser professor bastava ter sido um bom aluno no segmento que se pretendia atuar. As questões avaliadas nesse exame que capacitava professores para sua atuação eram exclusivamente voltadas para o conteúdo. Entretanto, com o passar dos anos, percebeu-se que não era suficiente ter domínio exclusivo do conteúdo para exercer a profissão docente. Era necessário, também, ter domínio de conhecimentos de conteúdos pedagógicos, ou seja, avaliar a capacidade que o professor tem para ensinar.

Desse modo, as avaliações da década de 1980 traziam uma característica bastante diferente daquelas realizadas no século XIX. Na década de 1980, ter domínio dos conteúdos que permeiam a escola básica passou a não ser mais considerado suficiente para se tornar professor e, por isso, seria necessário mudar a direção das avaliações. Para isso, era preciso ser aprovado em um exame que apresentava poucas indagações sobre conteúdos presentes na escola básica e uma grande ênfase em questões de conteúdo pedagógico. Os conteúdos que deveriam ser ensinados não eram mais o foco das avaliações. Segundo o autor, nessa mudança de perspectiva, um paradigma se perdeu: um "ponto cego com relação ao conteúdo"[2] (SHULMAN, 1986, p. 7, tradução nossa). Ainda, segundo Shulman: "o que se perdeu foram questões sobre o *conteúdo* das lições ensinadas, as questões perguntadas e as

[2] No original: "A blind spot with respect to content"

explicações oferecidas"[3] (SHULMAN, 1986, p. 8, itálico como no original, tradução nossa).

O "ponto cego" a que Shulman se refere indica uma primeira orientação para o que ele define posteriormente como o conceito chave que viria a ser debatido por diversos pesquisadores sobre o ensino e, em particular, o ensino de matemática, ou seja, o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (no original, em inglês, *Pedagogical Content Knowledge*).

Segundo o autor, o conhecimento pedagógico do conteúdo é:

> Um segundo tipo de conhecimento do conteúdo [...], que vai além do conhecimento do conteúdo per se para a dimensão do conhecimento de conteúdo *para o ensino*. Ainda estou me referindo ao conhecimento de conteúdo que incorpora aspectos do conteúdo mais pertinentes à sua capacidade de ser ensinado.[4] (SHULMAN, 1986, p. 9, itálico como no original, tradução nossa).

Sendo assim, podemos compreender esse conceito como um conhecimento sobre o conteúdo com vistas ao ensino: não apenas um conhecimento do conteúdo por si só, mas que extrapola e vai além disso, alcançando saberes da "ensinabilidade" deste conteúdo, ou seja, o conhecimento sobre aspectos do conteúdo que o fazem compreensível a outros. Shulman também se refere ao Conhecimento Pedagógico do Conteúdo como uma amálgama em que não se pode distinguir que parte do conhecimento corresponde ao conteúdo ou à pedagogia.

As contribuições de Shulman foram notáveis e aplicáveis ao ensino de um modo geral, isto é, não se referem a uma disciplina específica, podendo ser adaptadas ao ensino de História, Biologia, Matemática ou demais campos do currículo escolar. Sendo assim, diversos pesquisadores se fundamentaram nesses argumentos de modo a responder melhor as questões específicas do ensino de matemática.

Ao analisar a formação inicial de professores nos Estados Unidos, Ball (1988) identifica e desafia (dentre outras) a suposição de que *os conteúdos que serão ensinados pelos professores em formação são simples e não necessitam ser reaprendidos no curso universitário*. Segundo a autora, mesmo sabendo efetuar corretamente as operações, os futuros professores que participaram de sua pesquisa

---

[3] No original: "What we miss are questions about the *content* of the lessons taught, the questions aked, and the explanations offered"

[4] No original: "A second kind of content knowledge is pedagogical knowledge, which goes beyond knowledge of subject matter per se to the dimension of subject matter knowledge for teaching. I still speak of content knowledge here, but of the particular form of the content knowledge that embodies the aspects of content more germane to its teachability."

traziam questões conceituais e apresentavam concepções errôneas sobre, por exemplo, o conceito de divisão. Desse modo, ela aponta para os perigos de assumir argumentos como os que ela questiona. Para ela, o que pode ser destacado com sua pesquisa é que os dados:

> [...] sugerem o risco de assumir que a preparação do conteúdo vai realmente acontecer em "algum outro lugar" e salientam a necessidade de torná-lo (o conteúdo) foco central. Fazer isso exige não somente mudanças na ênfase, uma vez que muita matemática não produz o tipo de compreensão da matemática que o professor necessita.[5] (BALL, 1988, p. 25, tradução nossa)

Recentemente, a literatura tem apresentado um movimento de maior empenho nas reflexões sobre a necessidade de compreender o conteúdo com vistas ao ensino a partir de uma perspectiva diferente. Portanto, a questão que se coloca é: sob qual perspectiva deve ser compreendido o conhecimento do conteúdo necessário ao professor?

Em trabalhos mais recentes, Ball direciona sua pesquisa para uma nova perspectiva teórica sobre o conhecimento do conteúdo necessário para o ensino. Ela e seus colegas apontam para um olhar sobre o conteúdo que emerge da prática docente. Nesse sentido, seu objetivo se volta a questões sobre "o que os professores *fazem*, e como o que eles fazem demanda raciocínio matemático, perspicácia, compreensão e habilidade"[6] (BALL; BASS, 2002, p. 5, itálico como no original). Segundo os autores:

> Saber matemática para o ensino implica, muitas vezes, em conhecer métodos e soluções diferentes dos seus próprios e, assim, aprender a avaliar outros métodos, determinar sua adequação e compará-los é uma habilidade essencial para o ensino e oportunidades de se envolver nesses trabalhos analíticos e comparativos têm potencial para serem úteis aos professores.[7] (BALL; BASS, 2002, p. 13, tradução nossa)

Além disso, ressaltam a importância de envolver professores em resolução de problemas matemáticos que estejam relacionados com a sua atuação profissional. Segundo os autores:

---

[5] No original: "suggests the danger of assuming that subject matter preparation will indeed happen 'somewhere else' and points to the need to make it a central focus. Doing that requires not only changes in emphasis since much mathematics teaching does not produce the kind of understandings of mathematics that teachers need."

[6] No original: "What do teachers do, and how does what they do demand mathematical reasoning, insight, understanding, and skill?"

[7] No original: "Knowing mathematics for teaching often entails making sense of methods and solutions different from one's own, and so learning to size up other methods, determine their adequacy, and compare them, is an essential mathematical skill for teaching, and opportunities to engage in such analytic and comparative work is likely to be useful for teachers."

> Prática em resolução de problemas matemáticos que eles vão enfrentar em sua profissão ajudaria os professores a aprender a usar a matemática da maneira que eles o farão na prática e é provável também um fortalecimento e aprofundamento das ideias.[8] (BALL; BASS, 2002, p. 13, tradução nossa)

Ball e Bass (2002, p. 5) apresentam uma teoria para o conhecimento matemático para o ensino baseada na prática[9]. Eles caracterizam esta abordagem como sendo similar ao trabalho realizado por Hoyles e colaboradores (NOSS; HEALY; HOYLES, 1997 *apud* BALL; BASS, 2002) com outras profissões que necessitam conhecimento matemático, como, por exemplo, enfermeiros, engenheiros, físicos e outros. No caso de Ball e Bass (2002), as questões norteadoras giram em torno do conhecimento matemático necessário para a profissão docente que é, essencialmente, diferente do conhecimento necessário a outros profissionais.

Inspirados pelos trabalhos de Shulman (1986), Ball e seus colaboradores (e.g. Ball, Bass, 2002; Ball, Hill, Bass, 2005; Ball, Thames, Phelps, 2008; Ball et al., 2009) tomam essa perspectiva como premissa e buscam na prática docente traços do conhecimento de conteúdo matemático necessário à atuação do professor.

Ball, Hill e Bass (2005) definem Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) como:

> [...] um tipo de conhecimento profissional de matemática diferente dos que são exigidos por outras profissões que envolvem matemática tais como engenharia, física, contabilidade ou carpintaria[10] (BALL; HILL; BASS, 2005, p. 17, tradução nossa).

A literatura aqui citada (BALL; HILL; BASS, 2005) aponta para o fato de que, na formação do professor, deve ser considerado o conhecimento matemático a partir da prática docente e não simplesmente uma formação teórico-acadêmica, como é a do matemático. O professor deve ser visto como um profissional com uma prática matemática distinta da do matemático, assim como de engenheiros, de físicos e de outros profissionais que utilizam matemática na sua atuação profissional.

Ball, Hill e Bass (2005) apontam para alguns aspectos que caracterizam o MKT. Segundo os autores, esses aspectos incluem reconhecer os erros de alunos, assim como a origem e os motivos que os levaram a cometer o erro identificado; ter

---

[8] No original: “Practice in solving the mathematical problems they will face in their work would help teachers learn to use mathematics in the ways they will do so in practice, and is likely also to strengthen and deepen their understanding of the ideas.”

[9] No original: “practice-based theory for mathematical knowledge of teaching”

[10] No original: “a kind of professional knowledge of mathematics different from that demanded by other mathematically intensive occupations, such as engineering, physics, accounting, or carpentry.”

a habilidade de apresentar representações que transmitam significado efetivo para o conceito trabalhado; reconhecer e determinar exemplos estratégicos para a abordagem e exploração do conteúdo, além de dominar uma linguagem matemática fluente e especializada são conhecimentos de *conteúdo matemático* necessários para exercer a *profissão docente*. Os autores (BALL; HILL; BASS, 2005, p. 20) esclarecem:

> Note que nada que está sendo dito até este ponto envolve saber sobre estudantes. Nada implica uma maneira particular de ensinar multiplicação ou para solucionar erros dos alunos. Nós não estamos sugerindo que este tipo de conhecimento não é importante. Mas argumentamos que, ao ensinar, existe mais de "saber o conteúdo" do que os olhos podem ver. Nós procuramos descobrir o que esse "mais" é.[11] (BALL; HILL; BASS, 2005, p. 20, tradução nossa).

Deste modo, ficam exemplificadas diferenças entre o conhecimento matemático necessário para o ensino e o conhecimento matemático necessário a outras profissões. Não basta ao professor dominar os procedimentos que o levam a uma resposta correta.

Segundo os autores (BALL; HILL; BASS, 2005):

> [...] saber matemática para o ensino demanda um tipo de profundidade e detalhe que vai muito além do que é necessário para realizar o algoritmo corretamente. Mais do que isso, indica que há tarefas previsíveis e recorrentes que professores enfrentam que estão profundamente entrelaçadas com matemática e raciocínio matemático. Descobrir onde o aluno errou (análise de erros), explicar a base para um algoritmo em termos que as crianças possam compreender e mostrar por que funciona (conhecimento de princípios dos algoritmos e raciocínio matemáticos), e o uso de representações matemáticas. É importante notar que cada uma destas tarefas comuns de ensino envolve raciocínio matemático tanto quanto pensamento pedagógico[12] (BALL; HILL; BASS, 2005, p. 21, tradução nossa).

Assim, evidencia-se que o conhecimento de conteúdo necessário para ensinar matemática precisa ser compreendido sob uma perspectiva diferente da oferecida nos cursos de bacharelado em matemática (ou cursos voltados para a formação de outros profissionais que se utilizam da matemática em suas atuações).

---

[11] No original: "Note that nothing we have said up to this point involves knowing about students. Nothing implies a particular way to teach multiplication or to remedy student errors. We do not suggest that such knowledge is unimportant. But we do argue that, in teaching, there is more to "knowing the subject" than meets the eye. We seek to uncover what that 'more' is"

[12] No original: "knowing mathematics for teaching demands a kind of depth and detail that goes well beyond what is needed to carry out the algorithm reliably. Further, it indicates that there are predictable and recurrent tasks that teachers face that are deeply entwined with mathematics and mathematical reasoning - figuring out where a student has gone wrong (error analysis), explaining the basis for an algorithm in words that children can understand and showing why it works (principled knowledge of algorithms and mathematical reasoning), and using mathematical representations. Important to note is that each of these common tasks of teaching involves mathematical reasoning as much as it does pedagogical thinking."

Em nossa interpretação, isso não significa que a matemática do futuro professor possa ser rotulada como mais “simples” ou mais “fácil” do que aquela do futuro matemático. A comparação não pode ser estabelecida em termos de aprofundamento teórico, e sim de ênfase: os aspectos do conteúdo matemático em que o professor em formação precisa se aprofundar são outros e dependem da natureza de sua atividade profissional, isto é, das demandas da prática de sala na escola básica. Segundo Ball, Hill e Bass (2005), “[o] professor tem que pensar a partir da perspectiva do aprendiz e considerar o que é necessário para entender a ideia matemática para aquele que está tendo contato com aquilo pela primeira vez”[13] (BALL; HILL; BASS, 2005, p. 21, tradução nossa).

Partindo da premissa de que o conteúdo matemático abordado na formação do professor necessita ser orientado sob uma perspectiva diferenciada, é necessário pensar a partir das necessidades da atuação profissional do professor. Neste sentido, os autores continuam:

> Professores precisam de habilidades com termos matemáticos e discurso que possibilitam trabalho matemático cuidadoso para os estudantes, e que não gerem concepções errôneas ou erros. Os alunos precisam de definições utilizáveis, recaindo em termos e ideias que eles já compreendam. Isto requer que o professor saiba mais do que as definições que eles possam encontrar nos cursos universitários[14] (BALL; HILL; BASS, 2005, p. 21, tradução nossa).

Deste modo, Ball, Hill e Bass (2005) destacam algumas características particulares da prática docente que devem ser contempladas ao longo da formação do professor. Segundo esses autores, é necessário discutir e definir quais são os conhecimentos necessários ao ensino para então discutir sobre práticas formativas que auxiliem na construção e desenvolvimento destes conhecimentos. Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), “ao invés de começar com o currículo ou parâmetros para a aprendizagem dos alunos, nós estudamos o trabalho do professor’[15] (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 395, tradução nossa).

---

[13] No original: “[t]he teacher has to think from the learner’s perspective and to consider what it takes to understand a mathematical idea for someone seeng it for the first time”.

[14] No original: “Teachers need skill with mathematical terms and discourse that enable careful mathematical work by students and that do not spawn misconceptions or errors. Students need definitions that are usable, relying on terms and ideas they already understand. This requires teachers to know more than the definitions they might encounter in university courses”

[15] No original: “Instead of starting with the curriculum, or with standards for student learning, we study teachers“

A partir da teoria baseada na prática do conhecimento matemático para o ensino[16] (BALL; BASS, 2002, tradução nossa), Ball, Thames e Phelps (2008) elaboraram um modelo para analisar o conhecimento matemático para o ensino utilizando hipóteses formuladas por meio da análise qualitativa de vídeos contendo a prática de professores. Dessa análise, Ball, Thames e Phelps (2008) propõem a definição do conceito de *Conhecimento Matemático para o Ensino* (MKT). Para os autores, o MKT é o conhecimento de conteúdo matemático necessário à prática docente que é distinto e exclusivo ao professor. Ainda, segundo os autores, esta definição do MKT:

> Por exemplo, sugere que a maneira de decidir quando professores precisam aprender um determinado conteúdo, como o cálculo, é considerando quando e onde tal conhecimento vai interferir naquilo que o professor precisa fazer. Isso também sugere que as conexões entre conhecimento de conteúdo e ensino precisam ser explicitadas[17] (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 5, tradução nossa).

Esses autores apresentam uma nova proposta dos conceitos de *conhecimento de conteúdo* (CK) e *conhecimento pedagógico do conteúdo* (PCK) discutidos anteriormente por Shulman (1986). Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), essas duas categorias podem ser subdivididas em subcategorias. A primeira, é composta de *conhecimento comum de conteúdo* (CCK), *conhecimento especializado do conteúdo* (SCK) e o *conhecimento horizontal do conteúdo* (HCK) (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). A segunda seria composta de *conhecimento de conteúdo e dos alunos* (KCS), *conhecimento de conteúdo e do ensino* (KCT) e *conhecimento curricular* (KC)[18]

Nessa versão revisada das categorias de Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008) optam por renomear o conhecimento de conteúdo, antes derivado da tradução de *content knowledge*, como *subject matter knowledge*. Posteriormente, Ball e seus colaboradores (BALL et al., 2009) descrevem uma de suas componentes, o *conhecimento comum do conteúdo*, como sendo o conhecimento que os professores de matemática têm em comum com as demais profissões que utilizam matemática, como engenheiros, matemáticos e físicos. Por outro lado, o *conhecimento*

---

[16] No original: “Practice-based theory of mathematical knowledge for teaching.”

[17] No original: “For instance, it suggests that the way to decide whether teachers should be taught particular content, such as calculus, is by considering when and where such knowledge would bear on what teachers need to do. It also suggests that the connections between subject matter knowledge and teaching be made explicit.”

[18] Optamos por utilizar as siglas em inglês devido ao maior reconhecimento e larga utilização no meio acadêmico

especializado do conteúdo, é o conjunto de conhecimentos sobre o conteúdo matemático que o professor deve possuir que não são necessárias a outras profissões que utilizam a matemática em suas práticas como, por exemplo, engenharia, física, dentre outras. Entretanto, esta categoria não está necessariamente relacionada a conhecimento sobre estudantes ou sobre o ensino. Segundo Ball, Thames e Phelps (2008) este tipo de conhecimento extrapola o conhecimento matemático de um adulto que teve sua formação básica bem fundamentada (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 9). Os autores apontam, como exemplos associados a essa categoria, saber selecionar representações para fins específicos, utilizar notação e linguagem matemáticas, além de criticar seus usos e modificar uma determinada tarefa para torná-la mais fácil ou difícil (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 10). Enquanto um profissional de outra área que exige conhecimento matemático diferente do professor de matemática poderia reconhecer e apontar um erro cometido por um aluno, um professor de matemática deve ser capaz de reconhecer as origens do erro cometido. Esta é uma situação que diferencia o *conhecimento comum do conteúdo* do *conhecimento especializado do conteúdo*.

Na primeira versão do diagrama (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 403), a categoria relativa ao conhecimento de conteúdo trazia o "conhecimento horizontal do conteúdo" (*Horizon Content Knowledge*). Em uma versão posterior do diagrama, Ball e seus colaboradores (BALL et al., 2009, p. 98) o redefinem como sendo um conhecimento do horizonte matemático (K*nowledge at the Mathematical Horizon*), especificando melhor o significado desta categoria.

Segundo eles (BALL et al., 2009, p. 98), esta subcategoria

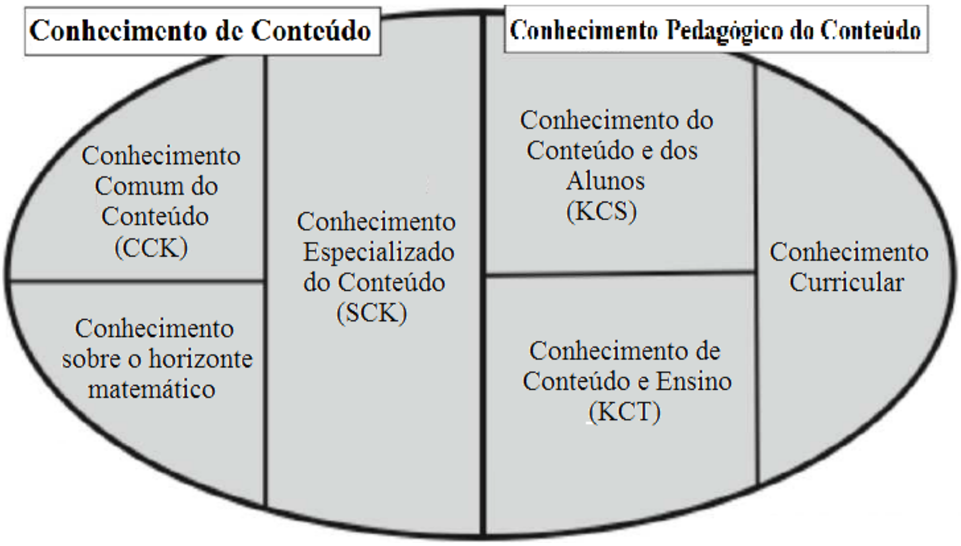
> é a compreensão de um conjunto mais amplo de ideias matemáticas a qual uma ideia particular se conecta. É o tipo de conhecimento que fornece ao professor uma visão periférica de onde ele está e para onde seus alunos estão se dirigindo[19] (BALL et al., 2009, p. 97-98, tradução nossa).

Segundo Ball; Bass (2009, p. 10), esse tipo de conhecimento complementa o conceito de matemática elementar visto de um ponto de vista superior de Klein (1924 *apud* BALL; BASS, 2009). Consiste em um conhecimento sobre aspectos relacionados com uma ideia matemática particular que não se restringe a tópicos

[19] No original: “is the understanding of the broader set of mathematical ideas to which a particular idea connects. It is the sort of understanding that gives teachers peripheral vision for where they are and where their pupils are heading,”

matemáticos, mas também está associado com valores e práticas matemáticas distintas como, por exemplo, conjecturar, argumentar, validar e demonstrar.

Figura 1 – Conhecimento matemático para o ensino.



(BALL et al., 2009, p. 98)

Sobre o diagrama ilustrado na Figura 1, os autores destacam que:

> Do lado esquerdo do diagrama está o conhecimento matemático para o ensino que é puramente matemático; o lado direito corresponde à mistura de saberes sobre alunos ou saber maneiras de ensinar no contexto de um tópico matemático particular[20] (BALL et al., 2009, p. 98, tradução nossa).

Autores brasileiros, como Fiorentini e Oliveira (2013) e Moreira e David (2005), também defendem esta perspectiva para repensar a formação dos professores. Fiorentini e Oliveira (2013) afirmam que o conhecimento matemático do professor não se encontra em posição de inferioridade ou maior simplicidade em relação ao conhecimento do matemático. Para esses autores, diferentemente do matemático, o professor de matemática precisa ter um conhecimento *profundo* e *diversificado* da matemática como prática social, que diz respeito à matemática escolar e às múltiplas matemáticas do cotidiano. É desta maneira que o conhecimento do professor, segundo Fiorentini e Oliveira (2013), está associado ao que Ball e Bass (2009) se referem ao Horizonte do Conhecimento Matemático.

---

[20] No original: "On the left hand side of the diagram is the mathematical knowing in teaching that is purely mathematics; the right hand side comprises mixtures of knowing about pupils or knowing ways of teaching in the context of particular mathematical topics."

Para esses autores (MOREIRA; DAVID, 2005; FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013), um conhecimento sobre as matemáticas – inclusive sobre a matemática escolar – é considerado *profundo*, por exemplo, na medida em que se compreende que uma demonstração de um determinado fato matemático é uma maneira de justificar a veracidade dele. Entretanto, essa justificativa não precisa ser formal através de um sistema axiomático. É fundamental, mas não suficiente, para o professor que ele conheça teoricamente este processo de justificativas e argumentações. É preciso, também, que o aprendiz, neste caso o futuro professor, *experiencie* o processo de exploração e investigação de diferentes maneiras que não seja unicamente através de um rigor formal, ou seja, tenha a vivência sob uma perspectiva ativa nesse processo.

Segundo Fiorentini e Oliveira (2013), não é suficiente que o professor seja capaz apenas de:

> [...] dominar procedimentos matemáticos e saber utilizá-los em demonstrações ou na resolução de exercícios e problemas. Para a docência em matemática é importante que o professor saiba justificar esses procedimentos, conheça outros procedimentos histórico-culturalmente produzidos, conheça os conceitos e ideias atuais, bem como a evolução histórica dos mesmos. (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 924-925).

Por outro lado, este conhecimento também deve ser *diversificado*, uma vez que deve não compreender apenas conceitos, procedimentos e ações relacionadas à matemática, escolar ou acadêmica. Mais do que isso, os autores afirmam que:

> A compreensão da matemática, enquanto objeto de ensino e aprendizagem, implica, também, conhecer sua epistemologia e história, sua arqueologia e genealogia, sua linguagem e semiose e sua dimensão político-pedagógica no desenvolvimento das pessoas e da cultura humana. A matemática também precisa ser compreendida em sua relação com o mundo, enquanto instrumento de leitura e compreensão da realidade e de intervenção social, o que implica uma análise crítica desse conhecimento (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 925).

É neste sentido que Fiorentini e Oliveira (2013) apresentam sua perspectiva sobre o que deve ser a diversidade do conhecimento matemático do professor. Além disso, os autores comentam sobre a necessidade de se equacionar os papéis da matemática científica e escolar no processo de formação do professor:

> São importantes os conteúdos da matemática superior que compõem as disciplinas de formação matemática da licenciatura, pois amplia-se, assim, a visão dos futuros professores acerca da matemática como campo de conhecimento. Mas, é necessário adotarmos posturas que apontem para uma visão mais integradora do curso, sem deixar de aprofundar, numa perspectiva multirrelacional, epistemológica e histórico-cultural, o conteúdo específico. Além disso, como propõe Moreira (2004), é fundamental um

> redimensionamento da formação matemática na licenciatura, de modo a equacionar melhor os papéis da matemática científica e da matemática escolar nesse processo. (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 935)

O trabalho de Fiorentini e Oliveira (2013) aponta para a necessidade de considerar conhecimentos de conteúdo matemático que sejam específicos do professor, orientados *pela* e *para* sua atuação profissional, e não apenas uma versão diluída do conhecimento do matemático. Portanto, a formação do professor de matemática deve ser pensada a partir desta perspectiva.

Segundo Moreira e David (2005), “[...] a abordagem lógico-dedutiva – nos termos em que se organiza a matemática científica – não somente é insuficiente para a sistematização da matemática escolar como é também muitas vezes inadequada” (MOREIRA; DAVID, 2005, p. 59). Um curso de formação inicial de professores não pode ser estruturado simplesmente a partir de três blocos de disciplinas (de conteúdo matemático, didático-pedagógicas e integradoras), uma vez que estes podem não ser integráveis. É necessário pensar na formação de professor *a partir* da prática e *com fins* na prática.

Destacamos, também, o conceito de Matemática Escolar definido por Moreira e David (2010) que, segundo os autores, não consiste de uma Matemática Científica didatizada, nem de uma matemática produzida de maneira autônoma na escola básica. Para Moreira e David (2010) as diferenças entre Matemática Científica (ou Acadêmica) e Matemática Escolar são evidenciadas, por exemplo, a partir das diferenças dos papéis desempenhados por determinadas práticas matemáticas. Quando se referem às diferenças entre os papéis desempenhados por definições e demonstrações, os autores afirmam que:

> No caso da Matemática Científica, devido à sua estruturação axiomática, todas as provas se desenvolvem apoiadas nas definições e nos teoremas anteriormente estabelecidos (e evidentemente nos postulados e conceitos primitivos). [...] No caso da Matemática Escolar, estão permanentemente em cena dois elementos fundamentais que modificam significativamente o papel das definições e provas. O primeiro se refere ao fato de que a “validade” dos resultados matemáticos a serem discutidos no processo de escolarização básica não está posta em dúvida; ao contrário, já está garantida, *a priori*, pela própria Matemática Acadêmica. [...] Por exemplo, o produto de dois números naturais é comutativo, não há nenhuma dúvida quanto a isso. O problema que se coloca no ensino escolar não é o de demonstrar um fato como esse rigorosamente, a partir de definições precisas e de resultados já estabelecidos, como no processo axiomático científico. A questão fundamental para a Matemática Escolar – esse é o segundo elemento, sempre presente no cenário educativo – refere-se à aprendizagem, portanto ao desenvolvimento de uma prática pedagógica visando à compreensão do fato à construção de justificativas que permitam ao aluno utilizá-lo de maneira

coerente e conveniente na sua vida escolar e extra escolar. (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 23 - 24, itálicos e aspas no original).

2. A INVESTIGAÇÃO – PRINCÍPIOS, QUESTÃO DE PESQUISA E ASPECTOS METODOLÓGICOS

2.1. Princípios e Caminhos

A atuação do professor de matemática deve ser encarada como uma prática social (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013).

Segundo Skovsmose (2005):

> [...] o papel da educação matemática para o avanço da formação da sociedade informacional é crítico. Para mim, isso significa duas coisas. Primeiro, acredito que a educação matemática tem um papel significante em processos sociopolíticos. Isto é indicado pelo fato de que a educação matemática pode ser vista como um dos pilares da fundação da sociedade tecnológica, bem como uma invasão cultural, etc. (SKOVSMOSE, 2005, p. 133)

Inspirados por essas ideias, Fiorentini e Oliveira (2013) reforçam que a prática docente pode contribuir para a transformação do *status quo* social, dada sua potencialidade de contribuir para a emancipação ou exclusão social de sujeitos. É neste sentido que uma prática matemática em que os conteúdos são abordados como resultados prontos, sem problematização, carregam valores que desfavorecem ou inibem uma autonomia no ato do pensar matemático. Considerando que futuros professores, ao longo de sua formação – inicial ou continuada – são também aprendizes, sendo formados sob essa perspectiva passiva, poderão, por sua vez, estender os mesmos valores para sua própria prática.

Sendo assim, a partir da literatura considerada, destacamos três pressupostos principais que fundamentam a nossa pesquisa:

1) O reconhecimento de uma identidade profissional do professor de matemática, diferente daquela dos demais profissionais que utilizam a matemática no exercício de sua profissão, o que nos direciona, também, ao desenvolvimento de um conhecimento específico desse profissional (BALL; HILL; BASS, 2005).

2) A matemática, como prática social, possui diversas facetas e é assumida por pontos de vista distintos de acordo com os sujeitos que se apropriam dela. Portanto, deve ser compreendida a partir do contexto cultural em que está inserida (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013).

3) Não há como pensar na abordagem de um conhecimento matemático específico do professor de maneira desarticulada com sua atuação profissional.

Portanto, é preciso pensar em atividades formativas para e a partir da prática docente (MOREIRA; DAVID, 2005).

Orientados por essas premissas, e reconhecendo a complexidade de identificar ou definir no que consiste o conhecimento matemático para o ensino, buscamos desenvolver e aplicar uma atividade que provoque e explore a reflexão sobre conhecimentos matemáticos que estejam intrinsecamente relacionados com uma prática matemática específica do professor e com sua atuação profissional. A atividade foi concebida como uma ferramenta investigativa, para fazer emergir conhecimentos de conteúdo matemático de professores em exercícios que sejam mobilizados em sua atuação profissional. Não é nosso objetivo, no entanto, identificar o que o professor “sabe” ou “não sabe”, mas sim focar no processo de reflexão sobre os próprios conhecimentos matemáticos para o ensino.

Na literatura de pesquisa, encontram-se diversas propostas e estratégias para fazer emergir e explorar o conhecimento matemático para o ensino, provocar reflexão sobre esse conhecimento, e possivelmente sua (re)construção. Um exemplo é o trabalho de Biza, Nardi e Zachariades (2007) que apresentam um modelo de Tarefa desenhado para explorar conhecimentos matemáticos, didáticos e pedagógicos de professores. Essas Tarefas são estruturadas da seguinte forma: primeiramente, é pedido que os professores resolvam e identifiquem os objetivos de uma questão de matemática pensada para alunos do ensino básico; em seguida, lhes são apresentadas resoluções de alunos e é pedido que eles avaliem e comentem essas resoluções, que expliquem que tipo de feedback dariam aos alunos e que justifiquem suas opções. As resoluções de alunos são hipotéticas, porém possíveis de acontecer em sala de aula, tomando como referência questões apontadas pela literatura como delicadas no ensino da matemática.

Figura 2 – Exemplo de tarefa.

The Task

In a mathematics test students were given the problem:

"Solve the equation: $|x| + |x - 1| = 0$"

a. What do you think the examiner intended by setting this problem?

b. A student responded as follows:

"It is true that

$|x| + |x - 1| = 0 \Leftrightarrow (|x| + |x - 1|)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (x - 1)^2 + 2|x(x - 1)| = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 + x^2 - 2x + 1 + 2|x(x - 1)| = 0$

Case 1: $x(x - 1) \leq 0$

Then

$2x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ Impossible.

Case 2: $x(x - 1) \geq 0$

Then $2x^2 - 2x + 1 + 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Therefore the solution of the equation is $x = \frac{1}{2}$."

What comments would you make to this student with regard to this response?

(BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2007, p. 303)

Segundo esses autores, apesar de não fornecer acesso às suas práticas efetivas, o envolvimento de professores com esse modelo de *Tarefas* oferece informações representativas sobre suas concepções e, portanto, sobre suas *práticas intencionadas* (BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2007, p. 303), ou seja, aquelas que os professores afirmam que gostariam de fazer em suas aulas. Biza, Nardi e Zachariades (2007) afirmam que essas *Tarefas* constituem uma:

> [...]ferramenta para identificação e exploração matemática, didática e pedagógica de questões específicas relativas ao conhecimento dos professores (que questões puramente teóricas sobre pedagogia ou matemática não seriam possíveis de identificar); e, desencadeiam a reflexão do professor sobre essas questões[21] (BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2007, p. 308, tradução nossa).

[21] No original: "as tools for the identification and exploration of mathematically, didactically and pedagogically specific issues regarding teacher knowledge (that purely theoretical questions on pedagogy or mathematics could not have identified); and, as triggers for teacher reflection on these issues."

Para os autores, o envolvimento com questões teóricas descontextualizadas não é suficiente para promover uma reflexão significativa sobre os conhecimentos pedagógicos e matemáticos necessários para o ensino. A partir das discussões sobre as soluções apresentadas pelos sujeitos da pesquisa, que a princípio dizem respeito à prática (intencionada) dos professores, emergem concepções e conhecimentos sobre o conteúdo matemático escolar. Embora as *Tarefas* tenham sido empregadas pelos autores nesse trabalho apenas como ferramenta para fazer emergir e explorar conhecimentos dos professores participantes, eles observam que esse modelo tem grande potencial para ser usado como atividade de formação de professores.

Oliveira e Palis (2011) propõem um modelo de atividade com estrutura semelhante àquele proposto por Biza, Nardi e Zachariades (2007). No modelo proposto por Oliveira e Palis (2011), apresenta-se aos participantes um problema matemático e, inicialmente, pede-se que eles resolvam o problema individualmente. Em seguida, pede-se que eles analisem, ainda individualmente, produções de alunos pré-selecionadas pelas pesquisadoras. Após esse trabalho individual, os professores expõem sua análise para um grupo com todos os participantes (que também passaram pelas etapas anteriores). Por fim, em grupos de três ou quatro professores, eles compararam as produções dos alunos com aquela encontrada em livros didáticos.

Figura 3 – Exemplo de tarefa.

1. Considere uma circunferência C com centro e raio dados. Decida: o ponto P dado pertence a C, está situado na região limitada por C ou está fora desta região? Explique o raciocínio desenvolvido. Entregue seu trabalho ao coordenador das atividades.

Versão I: $C = (3, -5)$ $R = 36$ $P = (23, 25)$; Versão II: $C = (-4, 1)$ $R = 50$ $P = (46, 0)$

2. (Individualmente) Analise os trabalhos de alunos que você recebeu e liste as estratégias de resolução que eles utilizaram com seus quadros de trabalho (algébrico, gráfico, outro). Aponte os detalhes que chamaram a sua atenção nessas resoluções e aspectos que possam ter favorecido ou prejudicado o desempenho desses alunos.

3. Apresente a sua análise individual a todo o grupo. Síntese das apreciações de todos.

4. (Em grupos de três ou quatro) Compare a estratégia dos alunos com a abordagem da mesma questão como encontrada nos livros da 3ª série de ensino médio (que vocês trouxeram)[3].

(OLIVEIRA; PALIS, 201, p. 348)

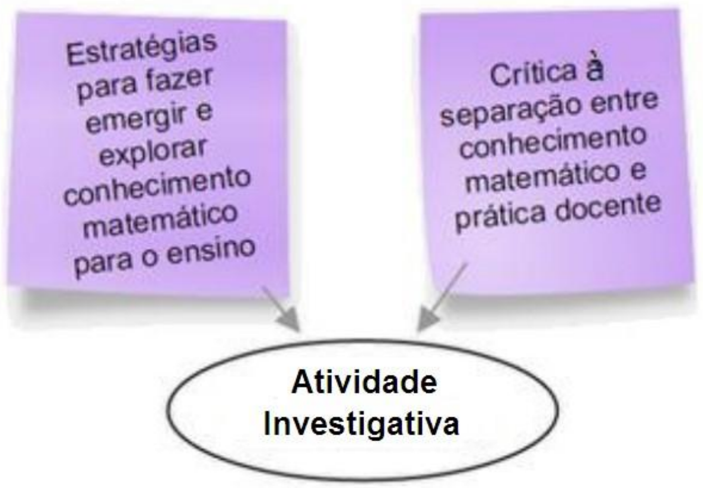
Segundo Oliveira e Palis (2011, p. 345), o objetivo das atividades focadas em produções de alunos é: “promover o desenvolvimento do conhecimento matemático e pedagógico do conteúdo matemático em grupos de professores licenciados em Matemática”.

Outra possibilidade é apontada por Davis e seus colaboradores (DAVIS, 2010), que propõem o modelo de *Concep Study*, como uma estrutura de estudo coletivo em que professores compartilham experiências e conhecimentos acumulados com o objetivo de questionar e (re)construir seus próprios conhecimentos de matemática com vistas ao ensino. Rangel, Giraldo e Maculan (2015a), apresentam uma variação do modelo de *Concept Study* (DAVIS, 2010), inspirado nas ideias de Klein, em que a discussão coletiva tem foco na identificação de partes elementares de um conceito matemático proposto, com base na experiência de sala de aula dos professores participantes. Os autores afirmam que: “o foco desta investigação está na potencialidade de estudos colaborativos envolvendo grupos de professores de matemática para a construção do conhecimento matemático para o ensino” (RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2015a, p. 55).

Além da proposição de estratégias que buscam fazer emergir e explorar conhecimento matemático para o ensino, a literatura de pesquisa também tem criticado modelos de formação e de desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática por partir da separação entre conhecimentos de conteúdo matemático e reflexões sobre a prática. Por exemplo, como observa Moreira (2012), a tentativa de inserir no currículo de formação inicial de professores um bloco isolado de disciplinas com o papel de integrar pedagogia e conteúdo se mostrou ineficaz. Sendo assim, cabe buscar formas de promover a reflexão sobre o conteúdo da matemática escolar, ao mesmo tempo que se reflete sobre a prática de sala de aula.

Com base na literatura de pesquisa destacada (BIZA; NARDI; ZACHARIADES, 2007; MOREIRA; DAVID, 2005) identificamos dois eixos teóricos que tem influência direta com nosso trabalho: (i) estratégias para fazer emergir e explorar conhecimento de matemática para o ensino e (ii) crítica sobre a separação entre conhecimento matemático e prática docente.

Figura 4 - Eixos teóricos para o desenvolvimento da atividade investigada.



(SILVA, 2016, p. 33)

Levando esses dois eixos em consideração, neste trabalho, objetivamos investigar estratégias para explorar e refletir sobre conhecimentos de matemática para o ensino de professores em exercício de forma integrada com a reflexão sobre a prática, em um momento da formação que é usualmente dedicado ao conteúdo matemático per se – no caso, uma disciplina de Análise Real em um curso de pós-graduação.

Nos trabalhos de Biza, Nardi e Zachariades (2007) e de Oliveira e Palis (2011) a análise da produção de alunos tem o papel de disparar a reflexão sobre a prática e sobre o conhecimento de matemática para o ensino. Já nos trabalhos de Davis (2010) e de Rangel, Giraldo e Maculan (2015a), a reflexão é disparada a partir da discussão coletiva sobre aspectos específicos do ensino, a partir da própria experiência de sala de aula. Na nossa proposta, procuramos disparar essa reflexão a partir de atividades especialmente desenhadas para *tirar os professores de sua zona de conforto usual*.

Assim como Biza, Nardi e Zachariades (2007), acreditamos que tarefas dessa natureza possam ser empregadas tanto como *ferramentas de investigação* - para explorar conhecimentos de conteúdo matemático para o ensino dos professores participantes -, quanto como *ferramentas de formação* - para promover a reflexão e, possivelmente, a reconstrução desses conhecimentos.

2.2 Atividade Investigativa

Desenhamos uma atividade, que passaremos a chamar de atividade investigativa, em que são propostas a professores em formação continuada questões matemáticas com duas condições fundamentais:

1) **versam sobre conteúdos que sejam familiares aos professores, que tenham papel chave nos currículos da educação básica brasileira e cuja aprendizagem envolva dificuldades de alunos amplamente reconhecidas por eles**;

2) **tratam esses conteúdos sem as garantias de validade que usualmente sustentam a realização de ações que os envolve na educação básica, isto é, por meio de representações, fatos ou procedimentos diferentes daqueles usualmente empregados no contexto de sala de aula.**

Esta segunda característica das atividades propostas é pensada com o intuito de provocar um deslocamento para fora da *zona de conforto* do professor, levando-os a refletir sobre conteúdos intrínsecos à prática docente na educação básica, colocando-os sob o prisma e a dificuldade dos estudantes desse segmento. Desta forma, pretende-se trazer à superfície aspectos dos conteúdos e dos procedimentos usuais relacionados que podem ser assumidos como garantidos, promovendo uma reproblematização desses conteúdos.

O objetivo de se propor tarefas com essas duas características é, principalmente, provocar uma estranheza em lidar com conteúdos considerados centrais na escola básica e que, sendo assim, se pressupõem familiares a um professor desse nível de ensino. Para provocar esse deslocamento para fora da zona de conforto dos professores participantes, retiramos as características que usualmente sustentam argumentos, algoritmos e procedimentos comumente usados na escola básica. Dessa maneira, buscamos levar o professor a se colocar no papel de aprendizes ao desconhecerem os procedimentos utilizados. No caso da tarefa que será analisada neste trabalho, o objetivo proposto aos professores participantes é efetuar uma conversão de representação de um número racional da forma fracionária para a forma posicional (em uma base diferente da decimal). Esse processo envolve também uma mudança de base: a representação dada se encontra na base 10 e a representação que se pede deve ser apresentada em outra base, sem passar pela base decimal. Entendendo que a base 10 é a estrutura familiar que garante, para aquele que efetua a operação, a validade do algoritmo, propomos, então, que as operações sejam realizadas sem essa *garantia de validade*.

Além disso, essa tarefa será aplicada em um ambiente intencionalmente construído com o objetivo de estimular a troca de ideias entre os participantes e fazer com que eles exponham e compartilhem reflexões sobre sua própria prática e sobre sua própria formação, incluindo tanto sua formação inicial como professores (licenciatura), quanto sua formação anterior como alunos da escola básica. Para que esse ambiente se estabeleça, é fundamental o papel do formador que irá conduzir a atividade e um ambiente favorável à discussão de qualquer conteúdo que seja trazido pelos participantes, sem que haja relações de hierarquia entre os conteúdos abordados, de modo que os conteúdos elementares não sejam compreendidos como simples, porém como constituintes das “partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar a Matemática” (RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2015b, p. 90). Dessa maneira, o formador não pode guiar a discussão tendo em vistas a repressão de erros, mas sim identificar a origem do erro e incentivar buscas de justificativas para cada etapa desenvolvida. A partir daí, acreditamos que o formador deve ter não só uma formação matemática consistente, mas também uma relação estreita com a pesquisa sobre a prática docente e a formação de professores para que possa orientar a discussão sobre o conhecimento matemático para o ensino. Chamamos essa combinação de fatores de *ambiente problematizador*, ou seja, um ambiente em que mobilize o professor a expor suas dúvidas, questões e sugestões sobre o ensino.

Assim, uma terceira característica determinante da tarefa é:

3) **um ambiente problematizador em que o(s) formador(es) estimule(m) intencionalmente os participantes a compartilharem reflexões sobre sua prática docente e sobre sua formação e a discutirem coletivamente essas reflexões.**

Com o objetivo de proporcionar esse ambiente favorável a reflexões, possibilitando que os participantes da pesquisa possam expor suas dúvidas e opiniões, o papel do formador não se restringe a oferecer respostas prontas, mas sim a provocar a interação entre os participantes buscando acessar e fazer emergir seus argumentos, impressões, experiências, bem como possíveis inseguranças. Por outro lado, o formador não deve assumir um papel de fonte única de informação, e sim de um mediador das discussões que emergem dos participantes. Dessa forma, a intenção é de que todos os atores troquem experiências, dúvidas, sugestões e críticas entre si e que o formador intervenha no sentido de iluminar as questões que são trazidas, além de estimular a emergência de aspectos relativos à prática docente e à formação dos participantes.

Assim, o papel do formador no ambiente proposto é crucial para a tarefa com o objetivo de proporcionar uma discussão coletiva buscando fazer emergir conhecimentos de matemática para o ensino dos professores participantes e encorajar a reflexão sobre esses conhecimentos. Procura-se promover a discussão sobre aspectos conceituais dos conteúdos matemáticos, porém evitando uma forma desconectada da prática e investindo em uma forma que a reflexão sobre a sala de aula se faça presente. Entretanto, os conteúdos matemáticos não são trazidos para a discussão da mesma forma como esses são usados no cotidiano escolar, isto é, as garantias de validade que, em geral, sustentam esse uso são ausentes.

Tomando como inspiração o modelo de *Tarefa* apresentado por Biza, Nardi e Zachariades (2007), a atividade aqui desenhada e explorada também é concebida com o objetivo de cumprir com a dupla função de ser, por um lado, ferramenta de investigação e, por outro, uma prática que pode ser utilizada para a formação docente. Por essa característica dupla, dizemos que se trata de uma atividade formativa-investigativa.

Com a proposta de uma ferramenta com essa característica formativa-investigativa, também buscamos contribuir para futuras pesquisas que tenham como objetivo a formação inicial de professores, ou seja, aqueles que ainda não adquiriram experiência docente. Ao procurar inseguranças e referências que os sujeitos da pesquisa trazem ao longo da atividade proposta, temos o objetivo de iluminar algumas questões que precisam ser discutidas na formação inicial do futuro professor. Nesse sentido, objetivamos auxiliar a composição de uma abordagem de conteúdos matemáticos para futuros professores orientada *para* e *a partir* da prática docente, uma vez que tomamos como referência as experiências de professores em atuação.

Um dos objetivos iniciais da pesquisa era o de buscar possibilidades de reconstruir o conhecimento matemático necessário para o ensino. Contudo, acessar informações que apontem para essa reconstrução é um desafio complexo que não foi possível de ser alcançado através da atividade aplicada. Por se tratar de uma ferramenta investigativa, o objetivo é investigar conhecimentos expostos livremente pelos participantes e, dessa maneira, não foi possível identificar se houve ou não uma reconstrução do conhecimento matemático, uma vez que o objetivo não era de comparar o conhecimento anterior ou posterior a aplicação da atividade, mas sim de reconhecer conhecimentos mobilizados durante a discussão.

2.3 Contexto e Procedimentos Metodológicos

2.3.1 Contexto

Neste trabalho, analisaremos os resultados da aplicação de uma tarefa problematizadora, de acordo com o modelo descrito na seção anterior, com um grupo de professores do ensino básico. A atividade analisada fez parte de uma sequência de atividades aplicada em uma disciplina de Análise Real do curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PEMAT) da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), no ano de 2014. A disciplina era obrigatória para os alunos de primeiro período do curso. Embora se tratasse de uma disciplina de conteúdo matemático, a mesma tinha como objetivo declarado pelo professor "estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos e abordagem da escola básica".

A sequência de tarefas, que tinha como tema comum a *representação de números naturais, racionais e reais em sistemas de numeração posicional de base qualquer* (diferente da base 10), foi estruturada em etapas (tópicos e tipos de atividade), como mostra a Tabela 1 a seguir. Essa sequência de tarefas foram atividades ao longo de nove seções consecutivas, com 2 horas de duração cada, que foram parte das aulas regulares da disciplina.

Uma das tarefas dessa sequência consistia em solicitar que os professores participantes determinassem se um número dado, representado em uma base não decimal era ou não divisível por outro (por exemplo, se o número (1103) na base 4 é divisível por cinco). Na base decimal, os critérios de divisibilidade usuais já estavam interiorizados e faziam parte da *zona de conforto* dos participantes. Porém, o objetivo de investigar a divisibilidade em outras bases era de problematizar a validade desses critérios. Em outra tarefa, os professores participantes eram solicitados a efetuar adições, subtrações, multiplicações e divisões em outras bases (sem passar pela base 10). A partir desta tarefa, os algoritmos não eram automaticamente realizados, possibilitando o aprofundamento em uma discussão sobre as justificativas para a eficácia dos algoritmos prontos.

Tabela 1 – Tópicos e atividades abordadas em toda a disciplina de Análise Real

Campos Numéricos	Tópicos	Tipos de Tarefas e Atividades realizadas
Naturais	Critérios de Divisibilidade	Determinar se os números naturais dados são ou não pares, a partir de sua representação em um sistema posicional de base qualquer.
		Determinar se os números naturais dados são ou não múltiplos de um número natural p fixo, a partir de sua representação em um sistema posicional de base qualquer.
		Generalizar critérios de divisibilidade para um sistema posicional de base qualquer.
	Algoritmos para as operações elementares.	Realizar operações de adição, subtração, multiplicação e divisão em um sistema posicional de base qualquer.
		Justificar os algoritmos para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão em um sistema posicional de base qualquer.
Racionais	Conversão de representações de números racionais	Converter representações fracionárias para posicionais em bases quaisquer.
		Converter representações posicionais para fracionárias em bases quaisquer.
		Estabelecer critérios para determinar sob que condições a representação posicional em base qualquer de um número racional será finita ou não.
Reais	Representação posicional de números reais	Expressar números reais em representação posicional de base qualquer.

Neste trabalho, nos concentramos em analisar uma tarefa relativa ao campo dos racionais, que envolvia a conversão de representações fracionárias em posicionais em base qualquer.

A escolha dessa tarefa especificamente foi devida ao fato de que essa sessão foi inteiramente gravada e a pesquisadora esteve presente durante toda a sessão. Além disso, os dados que emergiram nessa atividade chamaram mais a atenção do que os que foram obtidos nas demais sessões em que a pesquisadora esteve parcialmente presente. Compreendendo o ambiente como uma característica dinâmica da experiência, esse também influenciou na escolha da atividade.

O envolvimento dos participantes com outras atividades do programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática - em especial, os seminários de Saberes Docentes, em que todos os participantes da pesquisa estavam presentes - também pode ter possibilitado reflexões sobre conteúdos envolvidos ao resolver a tarefa. Em um dos seminários que ocorreu antes dessa sessão, lhes foi apresentado o algoritmo da divisão por estimativas, desconhecido da maioria. Além disso, após algumas sessões da disciplina, os participantes estavam mais familiarizados com o ambiente estabelecido. Acreditamos que esses aspectos possam ter exercido uma influência importante nos resultados da experiência.

As características dos participantes da experiência também foram importantes para a composição desse ambiente. Esses participantes eram 8 alunos do curso de Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ, que cursavam a disciplina de Análise Real. Todos os participantes, com exceção de um, atuavam ou já haviam atuado como professores da educação básica e, desses, todos tinham 5 anos ou menos de experiência docente. Esses participantes serão designados pelos seguintes pseudônimos: André, Bruno, Camila, Daniel, Eduardo, Felipe, Gabriela e Igor.

2.3.2 A Tarefa

A atividade analisada foi conduzida por dois pesquisadores, sendo um o professor responsável pela disciplina, e orientador deste trabalho, e outra a autora deste trabalho.

Neste trabalho, analisamos a aplicação de uma das tarefas, que tinha como tema: *converter representações fracionárias para posicionais em bases quaisquer*. A atividade se iniciou com a apresentação do seguinte enunciado:

Considere o número racional 163 + $\frac{7}{8}$ *(representado na base 10). Encontre a representação do número no sistema posicional de base 4.*

A tarefa proposta envolve conteúdos com papel chave na educação básica brasileira e cuja aprendizagem envolve dificuldades amplamente reconhecidas: *representações de números racionais e conversões entre essas representações*. Além disso, a tarefa é apresentada sem uma garantia central que sustenta a validade dos procedimentos usuais para conversões entre representações na educação básica: o sistema decimal. Sendo assim, a tarefa satisfaz às duas condições fundamentais que caracterizam uma tarefa problematizadora no sentido estabelecido neste trabalho.

No ensino básico, a conversão de representações fracionárias para representações decimais é efetuada, em geral, por meio do algoritmo usual da divisão, aplicado ao numerador e ao denominador da fração dada. A estrutura do sistema de numeração posicional de base 10 constitui uma garantia de validade importante para a condução dos passos desse algoritmo. No caso da atividade analisada neste trabalho, em lugar da conversão da representação fracionária, expressa na base 10, para a representação posicional também decimal, propõe-se a conversão da representação fracionária na base 10 para a representação posicional *de base 4*. Tal conversão pode ser realizada por meio de um algoritmo de divisão com estrutura análoga àquele usualmente empregado para a conversão para representação decimal. Entretanto, nesse caso, a validade dos passos do algoritmo não se sustenta no sistema decimal, que é familiar para os professores da educação básica.

Portanto, espera-se que a alteração das garantias de validade da base 10 para a base 4 propicie um movimento para fora da *zona de conforto* usual na qual os professores participantes operam com esse tipo de tarefa e, a partir desse movimento, faça emergir reflexões sobre aspectos procedimentais da conversão que lhes são familiares e assumidos como verdadeiros. Essas reflexões foram aprofundadas por meio da discussão coletiva. Dessa forma, espera-se que o desenho da tarefa problematizadora proposta forneça dados que permitam investigar os conhecimentos dos professores participantes sobre a própria prática e, em especial, o conhecimento de conteúdo matemático para o ensino mobilizado por essa prática.

2.3.3 Procedimentos de Aplicação da Tarefa, Coleta e Análise de Dados

A tarefa em tela, aplicada na 6ª sessão da sequência descrita na Tabela 1, foi proposta aos professores participantes no início da sessão e ocupou todo o seu tempo de duração. Foi apresentada a atividade proposta que deveria ser realizada coletivamente com auxílio do formador, orientador desta pesquisa. Em seguida, foi pedido que eles relatassem suas soluções para o grupo, indicando as justificativas para os procedimentos empregados e as possíveis dúvidas.

Assim como no trabalho de Rangel, Giraldo e Maculan (2015a), o objetivo era buscar estabelecer um ambiente de discussão coletiva entre os professores participantes, que eram encorajados a compartilhar impressões e dúvidas com o grupo.

Por esse motivo, as intervenções do professor eram: (i) durante a realização da atividade, propondo coletivamente ao grupo questões visando ao aprofundamento de aspectos (de natureza matemática ou pedagógica) levantados pelos próprios participantes ou indagando os participantes quanto a justificativas para as afirmações feitas por eles; (ii) apresentando reflexões teóricas sobre o tema abordado, sejam estas relativas à pesquisa em educação matemática, ou relativas ao conteúdo abordado; (iii) esclarecendo possíveis dúvidas surgidas ao longo da discussão; (iv) ao final de realização das atividades, apresentando um fechamento para as mesmas (que procurava levar em conta as sugestões trazidas pelos participantes). A pesquisadora esteve presente sob a perspectiva de observadora-participante e contribuía apenas pontualmente, apresentando reflexões que pudessem acrescentar à discussão e reflexão dos professores participantes.

Os instrumentos de coleta dos dados incluíram: (i) gravação em áudio da sessão destacada (transcrita); (ii) anotações escritas realizadas pelos pesquisadores durante as sessões; (iii) anotações escritas pelos professores participantes e coletadas pela pesquisadora.

Após a coleta dos dados, as gravações de áudio foram transcritas e posteriormente analisadas. A partir dos dados e de uma análise inicial, foram destacados cinco episódios que consideramos representativos para a pesquisa. Dessa análise inicial, identificamos que alguns aspectos dos episódios destacados poderiam ser analisados à luz das categorias do conhecimento de matemática para o ensino, a partir do modelo proposto por Ball, Thames e Phelps (2008). Além disso, como alguns dados apontavam para além das categorias integrantes do modelo, propomos ainda categorias complementares para contemplar todos os aspectos que emergiram dos dados. Assim, nossa análise combinou a identificação, nos dados coletados, de categorias propostas no modelo de Ball e seus colaboradores com a proposição de categorias emergentes dos dados.

3. DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO

Este capítulo será dividido em três sessões. Inicialmente, será descrita, em linhas gerais, a atividade que decorreu da tarefa destacada. Depois disso, seguirão outras duas sessões de análise. Na primeira, apresentaremos os episódios destacados e a análise dos discursos dos sujeitos da pesquisa, que entendemos estar relacionados com suas dúvidas, dos posicionamentos e inseguranças relativas ao conteúdo matemático, ensino e sua própria formação. Na sessão seguinte, ou seja, terceira sessão deste capítulo, discutimos potencialidades e limitações do modelo de tarefa proposto de acordo com a análise feita dos discursos que emergiram dos professores participantes durante a atividade.

3.1 Aplicação da Atividade: dinâmica, apresentação dos dados e categorias de análise

3.1.1 Contexto

A sessão em que a tarefa foi aplicada teve início com uma explicação sobre a aplicação de séries na representação posicional de números reais. O formador observa que o objetivo da atividade é compreender o que significa representar um número real na base 10 e, de uma perspectiva mais ampla, o que significa escrever um número real em uma base qualquer. Os professores participantes já eram familiares com a representação de um número natural *a* em uma base ≥ 2:

$$a = \sum_0^n a_k \alpha^k, 0 \leq a < \alpha$$

A expressão a seguir foi apresentada como uma generalização desta forma de representação para números reais não negativos quaisquer:

$$a = \sum_{-\infty}^n a_k \alpha^k, 0 \leq a < \alpha$$

3.1.2 Determinação do algoritmo para mudança de base

A atividade foi proposta pelo formador com o seguinte enunciado:

Considere o número racional 163 + $\frac{7}{8}$ *(representado na base 10). Encontre a representação do número no sistema posicional de base 4.*

Já havia sido discutido com os professores participantes, em uma sessão anterior, o algoritmo usual para mudança de base de números naturais, ao qual nos referiremos como **algoritmo de divisões sucessivas**. De acordo com esse algoritmo, o número natural dado é sucessivamente divido pela base e são tomados os restos dessas divisões. Os professores participantes concluíram que a parte inteira do número racional dado, que corresponde a 163, é representada na base 4 por $(2203)_4$.

O formador questionou, então, se esse algoritmo poderia ser aplicado diretamente a um número não inteiro e o que seria necessário para determinar a representação de 163 + $\frac{7}{8}$ na base 4, completando a atividade. Foi discutido com o grupo um novo procedimento, baseado em determinar quantas vezes cada potência 4^{-n} cabe na parte remanescente da etapa anterior. Chamaremos esse procedimento de algoritmo de **subtração de potências da base**.

3.1.3 Discussão sobre algoritmos de mudança de base e de divisão: reflexões emergentes

Em um primeiro momento, para determinar a representação da parte inteira, poucos questionamentos foram feitos pelos professores participantes. Entretanto, é aqui que emergem os 4 primeiros episódios destacados para a análise.

Episódio 1: Determinação da maior ordem da representação posicional na base 4

Formador: *Para descobrir o algarismo de maior ordem eu tenho que descobrir primeiro quem é a maior ordem. Como eu descubro isso? Essas ordens são determinadas pelo que?*

Eduardo: *Potências do...*

Formador: *Potências de quem? Do 4. (Escreve ao quadro) Não é isso que eu vou fazer? Então eu tenho que descobrir quem é esse n aqui. Quem vai ser, nesse caso?*

Bruno: *A parte inteira da raiz quarta de 163?*

Episódio 2: Discussão sobre o procedimento a ser utilizado para a determinação do algarismo que ocuparia esta ordem

Formador: *Então, como é que eu vou determinar esse* $_3$*aqui? Esse 3 eu tenho que achar o que?*

André: *Dividir o 163 por 64...*

Formador: *É... Mas dividir e pegar o que? A parte inteira?*

André: *Isso. A primeira... O primeiro resultado aí...*

Formador: *E quanto vai dar isso?*

André: *Eu não sei dividir...*

O professor se refere ao 3 para determinar o algarismo que ocupa a maior ordem, uma vez que já foi determinado anteriormente que a maior potência da base que cabe em 164 seria a terceira potência. O que se segue é uma tentativa de utilizar o algoritmo de subtração de potências da base para determinar a representação de 163 na base 4. Depois disso, os esforços se direcionaram à determinação da representação da parte não inteira. O primeiro passo desse processo é efetuar a divisão de $\frac{7}{8}$ por $\frac{1}{4}$ e tomar a parte inteira do resultado.

O professor faz um paralelo com a divisão na base 10 de números que não são múltiplos entre si e comenta sobre o procedimento de se colocar o "zero à direita" do resto quando a divisão não tem resultado inteiro. Com o auxílio da representação gráfica feita no quadro, os alunos respondem os questionamentos propostos pelo professor e, por vezes, pedem por esclarecimentos pontuais.

Na resolução deste exemplo, os professores participantes não apresentaram muita dificuldade para a determinação dos algarismos da parte não inteira a partir da sua representação na reta numérica, uma vez que a parte não inteira é uma fração cujo denominador é um múltiplo – e, portanto, possui todos os seus fatores sendo divisores – da base escolhida, e, por isso, possui uma representação finita. O professor faz o registro algébrico de cada etapa e justifica que "olhar para o que sobra" significa calcular $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$ uma vez que o algarismo de ordem -1 era 3, isto é, tomando a parte inteira da divisão de $\frac{7}{8}$ por $\frac{1}{4}$, seria necessário determinar o resto. Em seguida, determinar quantas vezes o $\frac{1}{16}$ caberia no resultado desta subtração, e assim por diante.

Em um momento posterior, André intervém com uma dúvida sobre o algoritmo da divisão, o que foi o estopim para uma longa discussão sobre diferentes algoritmos de divisão, a abordagem do conteúdo em sala de aula e a formação do professor.

Inicialmente, eles relatam sobre incompreensões de algumas etapas que, segundo André, são obscuras. Depois desse diálogo, o formador comenta que essa é uma questão delicada, uma vez que, ao aprender isso no ensino fundamental, a abordagem é feita como um algoritmo pronto, não problematizado e transmitido mecanicamente e que um objetivo desta atividade é, de fato, problematizar as etapas do algoritmo para compreendê-lo melhor. Porém, é esclarecido que isso não significa que é preciso ensinar operações em outras bases na escola básica, mas, sim, desvendar o significado das etapas do algoritmo na própria base 10.

Depois disso, André justifica que, por meio do algoritmo por estimativas, ele compreende as etapas da divisão e volta a comentar sobre as dificuldades do algoritmo por ordens. A partir daí o formador questiona aos demais professores participantes se eles compreendem perfeitamente o significado de cada passo do algoritmo por ordens. Camila responde que não pode dizer que compreende perfeitamente e Bruno relata que, apesar de conhecer e compreender as etapas do algoritmo, ele não costuma justificar as etapas aos seus alunos no momento em que ele está ensinando. Esse é o terceiro destaque para a análise, que relatamos a seguir.

Episódio 3: Insegurança sobre o ensino da divisão na escola básica e ausência dessa discussão em sua formação inicial

André:	*O [algoritmo] de estimativa e o de Euler. Aquele por estimativa, a lógica por trás dele, eu consigo entender numa boa. E na hora, inclusive, desenvolver as contas. Mas o de Euler, o ótimo, eu resolvo mecanicamente.*
Bruno:	*Exato!*
André:	*Mas entender o que eu tô fazendo... Sinceramente não sei... Resolvo mecanicamente, mas... essas coisas do zero... Eu não sei. E o pessoal falou assim: ‘Pô! Mas o cara tem que saber isso!’ aí dá até um certo... Como que eu vou falar que eu não sei um troço desse...*
Formador:	*Mas é normal não saber isso aí porque isso aí não é objeto de estudo no curso de licenciatura. Quando a gente começa o curso de licenciatura já se pressupõe que a pessoa já saiba isso.*
André:	*Na verdade isso nunca foi questionado ao longo de minha vida acadêmica.*

A partir dos comentários dos colegas, Daniel começa dizendo que não entende porque ninguém nunca pensou nisso. O professor, então, propõe uma reflexão sobre como são constituídos os cursos de formação de professores e traz referências da literatura, citando autores como Deborah Ball e Felix Klein, que apontam para a problemática de que se supõe que o professor já domine o conteúdo que deve ser ensinado. Com isso, Daniel expõe sua opinião sobre as consequências da problemática levantada pelo formador e faz suas considerações sobre a formação inicial do professor. Aqui aparece o quarto episódio identificado como relevante para a pesquisa.

Episódio 4: Reflexão sobre a formação do professor

André: *Mas o algoritmo ótimo, sinceramente, pra mim não é claro. Eu não sei o que você...Aquele negócio de você pegar... Baixa um número, agora você divide, quando não dá, joga o zero... O que tá significando cada coisa com relação à unidade, dezena, centena pra mim não faz sentido nenhum.*

[...]

André: *Hoje em dia eu só ensino aos meus alunos somente por esse, o por estimativa. Não exclusivamente ele, mas eu só uso ele porque é o algoritmo que eu sei o que tá acontecendo, porque se eu passar o outro, vou simplesmente vou reproduzir uma forma mecânica.*

Formador: *O que a gente pode fazer é fazer o outro algoritmo registrando a conta como se fosse por estimativas. Todo mundo tem a mesma dúvida que ele? Ou vocês entendem perfeitamente o algoritmo (da divisão)? Pode falar...*

Camila: *Perfeitamente, não...*

André: *Posso falar uma coisa? Eu entendo, mas eu também assumo uma certa falha porque eu, dando aula, nunca expliquei assim... Exatamente os passos. Até sei, mas nunca falei "olha só, essa vírgula aqui é por causa disso, disso e disso. [...] Para ficar claro pro aluno.*

[...]

Daniel: *Acho que ninguém entende porque nunca ninguém parou pra pensar nisso... [...] Isso vale para quase todos os conteúdos que são ensinados no ensino básico. Você vai dar aula com aquilo que você aprendeu na escola. Então você reproduz todos os erros que aprendeu e continua fazendo a mesma coisa.*

Depois dessa passagem, o professor volta ao exemplo da divisão de 163 por 4 e, a partir daí, mais dúvidas e justificativas para procedimentos antes tidos como verdades absolutas emergiram. Em seguida, André pergunta sobre como essas justificativas podem ser dadas, a partir do algoritmo da divisão por ordens, para alunos da escola básica. Esse foi o estopim para uma intensa discussão sobre o ensino do algoritmo da divisão na escola básica.

3.1.4 Discussão sobre o ensino do algoritmo

Após a pergunta de André, o professor e a pesquisadora apontam possibilidades e perguntam aos demais professores participantes as suas sugestões. É esse o quinto destaque para a análise.

Episódio 5: Sobre o conteúdo per se e sobre o ensino do algoritmo da divisão por ordens e outras possibilidades de ensino

André: *Porque isso que a gente tá discutindo agora de pegar uma centena ou pegar 16 dezenas pra falar para uma criança que tá começando a aprender a dividir não tem cabimento. Acho que não dá. [...] Mas quando eu aprendi não tinha isso de dividir por 100 não... (risos) Era assim, ó. "Um dá por 4? Não. Então junta com o 6 e forma o 16. Agora divide o 16."*

Formador: *É por isso que você aprendeu sem ter raciocinado naquilo que você estava fazendo.*

André: *É, mas se bem que isso aí... Eu, na hora de ensinar, infelizmente cometia esses crimes porque isso é quase que um crime. [...] Fazia a mesma coisa até conhecer o de estimativas.*

O debate prossegue com professores participantes e pesquisadores questionando sobre a possibilidade de alternativas para o ensino do algoritmo da divisão. Eduardo comenta a possibilidade de empregar o quadro valor de lugar para iluminar a justificativa das etapas do algoritmo da divisão por ordens. Além disso, foram comentados, também, a abordagem desse conteúdo nos materiais didáticos e o uso desse recurso nas aulas. Daniel começa a levantar questões sobre a possibilidade de justificar o algoritmo por ordens de maneira mais clara, comenta sua experiência e acredita que o material didático induz o professor a abordar tal qual é feito no livro.

A aula se encerra com uma retomada em outras contas de divisão, refletindo sobre o algoritmo da divisão e uma revisão teórica sobre o que foi visto na aula. O formador comenta, também, que será demonstrado, na aula seguinte, que um número é racional se, e somente se, tem representação finita ou periódica e que o procedimento adotado servirá para a parte da demonstração deste teorema.

3.1.5 Categorias de análise

A interpretação dos dados se baseou, inicialmente, em uma análise iluminada pelas categorias do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008). Entretanto, alguns episódios apontaram para aspectos que não são contemplados por essas categorias. Por esse motivo, além das categorias do Conhecimento Matemático para o Ensino, trazemos categorias complementares que emergiram dos dados. Cabe destacar que compreendemos que estas categorias não são necessariamente disjuntas, ou seja, podem ser identificadas mais de uma categoria em um mesmo episódio. Desse modo, a análise é estruturada por meio das seguintes categorias que passamos a descrever:

I. Categorias do Conhecimento Matemático para o Ensino:

Conhecimento comum do conteúdo

À luz dessa categoria analisaremos os episódios que trazem dúvidas ou concepções errôneas sobre conteúdo puramente matemático, que não estejam diretamente relacionadas com situações de ensino ou aprendizagem.

Conhecimento do horizonte matemático

A partir desta categoria, discutiremos episódios que, segundo nossa interpretação, caracterizem uma reflexão associada a diferentes relações possíveis entre uma ideia matemática específica e outros tópicos e valores matemáticos, bem como práticas matemáticas.

Conhecimento especializado do conteúdo

Sob esta categoria, estarão associados os episódios que explicitem reflexões relativas ao conteúdo matemático e o olhar para este conteúdo sob a perspectiva de professor, porém que não envolvam necessariamente o conhecimento de alunos ou ensino.

Conhecimento do conteúdo e alunos

Associaremos a essa categoria os episódios que explicitem, nas falas dos professores participantes, seus conhecimentos e reflexões sobre a aprendizagem do conteúdo e as dificuldades ou estratégias que os alunos de educação básica podem trazer no contexto da sala de aula.

Conhecimento de conteúdo e seu ensino

Sob esta categoria, serão analisados os episódios que apresentem reflexões dos professores que estejam relacionadas com a dificuldade de ensino de determinado conteúdo, bem como estratégias que os participantes comentam como possibilidades de ensino.

Conhecimento curricular

São analisados, nessa categoria, os conhecimentos e reflexões dos professores sobre o currículo e sequências didáticas para ensinar determinado conteúdo, ou seja, quais são os pré-requisitos para lecionar determinado conteúdo matemático.

II. Categorias Emergentes

Além das categorias incluídas no modelo de Conhecimento Matemático para o Ensino, acrescentamos à análise outras categorias, emergentes dos dados, que iluminam questões que não são destacadas à luz das categorias do modelo proposto por Ball e seus colaboradores. Entretanto, é importante ressaltar que estas categorias emergentes podem variar de acordo com os dados obtidos em diferentes atividades, mesmo que estas sejam aplicações de uma mesma tarefa.

Críticas e reflexões sobre a própria formação (básica e inicial)

O objetivo desta categoria é de discutir as críticas implícitas e explícitas que os professores participantes expõem em seu envolvimento com a atividade. Em diferentes momentos, a crítica à sua formação inicial emerge. Entretanto, vale ressaltar que, além de professores, eles vivenciaram diferentes práticas matemáticas enquanto alunos da escola básica. Muitos de seus comentários podem ser interpretados como críticas às práticas de seus próprios professores e às instituições (escolas e instituições de ensino superior) em que estudaram, tanto de sua formação inicial como de sua formação escolar enquanto alunos da educação básica.

Críticas e reflexões sobre a própria prática

Para incluir a análise das críticas que os professores fazem sobre sua própria prática relatada, sentimos a necessidade de incluir essa categoria. Aqui, cabe um olhar para a postura crítica que os professores se colocam ao se envolver com a tarefa, repensando suas práticas (prática relatada) e apresentando novas possibilidades para sua futura prática (prática intencionada).

Reconhecimento da matemática como prática social

Essa categoria ilumina a mobilização de discursos que apontam para a compreensão da matemática como instrumento de intervenção social e para o reconhecimento de uma cultura matemática dinâmica e produzida em diferentes espaços, inclusive na escola básica.

3.2 Análise dos dados

No caso específico da atividade analisada neste trabalho, a partir dos dados apresentados, associamos os episódios destacados às categorias de análise apresentadas na seção anterior da maneira descrita na Tabela 2 a seguir.

Tabela 2 – Episódios e categorias associadas

Episódios	Categorias
1: Determinação da maior ordem da representação posicional na base 4	Conhecimento comum do conteúdo
2: Discussão sobre o procedimento a ser utilizado para a determinação do algarismo que ocuparia esta ordem	Conhecimento comum do conteúdo
3: Insegurança sobre o ensino da divisão na escola básica e ausência dessa discussão em sua formação inicial	Conhecimento especializado do conteúdo; Conhecimento do horizonte matemático; Críticas e reflexões sobre a própria formação.
4: Reflexão sobre a formação do Professor	Conhecimento especializado do conteúdo; Críticas e reflexões sobre a própria formação; Críticas e reflexões sobre a própria prática; Reconhecimento da matemática como prática social.
5: Sobre o conteúdo per se e sobre o ensino do algoritmo da divisão por ordens e outras possibilidades de ensino	Conhecimento do conteúdo e de seus alunos. Críticas e reflexões sobre própria formação; Críticas e reflexões sobre própria prática; Reconhecimento da matemática como prática social.

Cabe destacar que não tivemos acesso à prática docente efetiva dos professores participantes, mas sim à prática relatada como professores, a comentários sobre como pretendiam atuar no futuro, bem como a relatos da própria formação como estudantes da escola básica e da licenciatura. Portanto, nossas conclusões se sustentam nos relatos dos professores participantes sobre a própria prática (relatada ou intencionada) e sobre suas experiências como discentes.

A partir das categorias descritas, tecemos uma análise da proposta, avaliamos suas limitações e discutimos perspectivas para aperfeiçoamentos metodológicos do modelo e para futuras pesquisas.

O objetivo deste trabalho não é discutir o que o professor sabe ou não sobre o assunto em tela. Embora não fosse nosso objetivo inicialmente estabelecido, o trabalho revelou ainda, a partir das dúvidas dos professores participantes, possíveis fragilidades da formação inicial.

Episódio 1: Determinação da maior ordem da representação posicional na base 4

Formador: *Para descobrir o algarismo de maior ordem eu tenho que descobrir primeiro quem é a maior ordem. Como eu descubro isso? Essas ordens são determinadas pelo que?*

Eduardo: *Potências do...*

Formador: *Potências de quem? Do 4. (Escreve ao quadro) Não é isso que eu vou fazer? Então eu tenho que descobrir quem é esse n aqui. Quem vai ser, nesse caso?*

Bruno: *A parte inteira da raiz quarta de 163?*

Quando questionados sobre como poderiam determinar a maior ordem do número procurado, Eduardo levanta a possibilidade de ser a maior potência de 4 que é menor que o número procurado. Em seguida, para responder qual seria a maior ordem da representação do número, Bruno responde que deveria ser a raiz quarta do número que se pretendia representar na base 4. Esse é o primeiro destaque referido na primeira etapa da discussão sobre o algoritmo e reflexões emergentes.

Podemos associar este episódio com a categoria relativa ao **conhecimento comum do conteúdo**, uma vez que está relacionado com uma questão que é puramente associada ao conteúdo matemático e não tem relação direta com o ensino. Este é um conteúdo relativo a séries numéricas e, por isso, poderia ser discutido em um curso de formação de profissionais com outras práticas matemáticas como, por exemplo, um engenheiro. Assim como Ball, Thames e Phelps (2008) comentam, esse é um conteúdo que não está associado a um currículo específico, mas permeia formação de diferentes profissionais. Por esse motivo, está associado à esta categoria de análise.

A representação do número na base 10 é a conhecida. Por isso, a estrutura em forma de série numérica não é uma ferramenta de referência para se determinar a maior ordem: esta já é incorporada implicitamente *a priori* aos procedimentos usuais. Ao trabalhar fora da zona de conforto, ou seja, através da representação não decimal, essa estrutura se perde. Sem essa *garantia de validade* não há uma referência usual para obter o resultado do exercício que foi pedido.

Sob essa nova estrutura, sem a *garantia de validade*, ou seja, a base 10, além de respostas inseguras, em tom de pergunta, emergiu, também, um equívoco comum a estudantes de ensino básico. No momento da determinação do algarismo de maior ordem era necessário identificar o expoente de uma potência para que essa fosse menor que o número dado. Entretanto, ao invés de considerar o logaritmo na base 4 do número, Bruno busca, equivocadamente, na raiz n-ésima, no caso, a raiz quarta, o inverso da exponencial. Depois disso, o formador corrige sua resposta dizendo que não seria a raiz quarta, e que o problema estaria exatamente em determinar qual seria esse *n*, ou seja, qual seria o expoente do 4 para obter sua maior potência de modo que o número encontrado fosse a maior das potências de 4 menor que o número 163.

Podemos notar que essa ausência da *garantia de validade* provocou um reposicionamento do formador em direção à perspectiva do professor participante. Acreditamos que essa é uma forma de proporcionar uma experiência de investigação deste conteúdo a partir de uma exploração que não é puramente axiomática, mas o leva a uma posição de incertezas onde é necessário investigar e explorar o conteúdo de maneira análoga à de um aluno da escola básica que tem contato com a conversão de representação pela primeira vez. Segundo nossa interpretação, esse episódio descreve uma situação que vai ao encontro do que Fiorentini e Oliveira (2013) e Moreira e David (2005) apontam em seus trabalhos como sendo necessário que o professor explore e investigue conceitos matemáticos de maneiras diferentes além de uma abordagem puramente axiomática.

Episódio 2: Discussão sobre o procedimento a ser utilizado para a determinação do algarismo que ocuparia esta ordem

Formador: *Então, como é que eu vou determinar esse $_3$aqui? Esse $_3$ eu tenho que achar o que?*

André: *Dividir o 163 por 64...*

Formador: *É... Mas dividir e pegar o que? A parte inteira?*

André: *Isso. A primeira... O primeiro resultado aí...*

Formador: *E quanto vai dar isso?*

André: *Eu não sei dividir...*

Após o esclarecimento das questões levantadas no episódio anterior, ficou claro que o algarismo de maior ordem seria o algarismo da terceira ordem. O problema passa a ser determinar qual seria esse algarismo. Com os questionamentos levantados pelo formador, André afirma *não saber dividir*.

Esse diálogo foi o segundo destaque relevante para a discussão. Cabe notar que o movimento para *fora da zona de conforto* proporcionado pela alteração da base possibilitou que André sentisse a necessidade de expor suas dificuldades para seus colegas. Esse movimento, provocado pela ausência do que garantia a validade dos procedimentos adotados, ou seja, trabalhar em uma base não decimal, colocou a todos uma mesma situação duvidosa, proporcionando a André um ambiente propício para expor dúvidas que, em outras situações, poderiam ser vistas como banais. Neste primeiro momento em que essa inquietação de André aparece, ela não se revela de uma maneira mais complexa. Apenas sugere que ele não sabe efetuar a operação. Entretanto, em episódios seguintes, ele aprofunda suas inquietações e, por isso, esta é uma questão mais ampla que não pode ser enquadrada exclusivamente em uma única categoria de análise. Em um episódio posterior André explica com mais detalhes o que ele não sabe. Ele declara que, embora saiba efetuar os passos do algoritmo usual da divisão, não sabe justificar as etapas desse procedimento.

É importante destacar que essa passagem explicita a necessidade que o professor tem de extrapolar o conhecimento da efetuação precisa dos cálculos matemáticos. Uma vez que o professor expõe sua dúvida, ele está assumindo a necessidade de conhecer além do puro procedimento automático efetuado mecanicamente.

Aqui vale destacar que esse episódio fortalece o argumento de Ball (1988) sobre o risco de assumir que os conteúdos que serão lecionados pelos professores são simples e que não precisam ser revisitados na formação inicial do professor. Nesse momento inicial, André apenas expõe um desconhecimento pragmático: não saber efetuar a operação de divisão. Efetuar essa operação é um conhecimento que não é necessário somente ao professor de matemática. Por isso, como nesse momento a dúvida de André se apresenta como apenas uma dificuldade procedimental, esse episódio está relacionado à um **conhecimento comum de conteúdo**.

Para o esclarecimento da dúvida do André, o professor sugere pensar na estratégia de procurar o maior número que multiplicado pela terceira potência do 4 fosse menor que o número procurado. O procedimento prosseguiu sem mais dúvidas até finalizar a determinação da parte inteira do número. Porém, vale destacar que a sugestão do professor foi de apresentar uma estratégia diferente da conhecida para responder à questão feita, ou seja, para determinar o resultado de 163 dividido por 64. Essa estratégia sugerida pelo professor já aponta para o algoritmo da divisão por estimativas, porém, sem nomeá-lo dessa forma. Essa sugestão de uma estratégia alternativa para efetuar a divisão também é consonante com o que Fiorentini e Oliveira (2013, p. 924 e 925) defendem enquanto conhecimentos a serem desenvolvidos pelos professores.

Episódio 3: Insegurança sobre o ensino da divisão na escola básica e ausência dessa discussão em sua formação inicial

André: *O [algoritmo] de estimativa e o de Euler. Aquele por estimativa, a lógica por trás dele, eu consigo entender numa boa. E na hora, inclusive, desenvolver as contas. Mas o de Euler, o ótimo, eu resolvo mecanicamente.*

Bruno: *Exato!*

André: *Mas entender o que eu tô fazendo... Sinceramente não sei... Resolvo mecanicamente, mas... essas coisas do zero... Eu não sei. E o pessoal falou assim: ‘Pô! Mas o cara tem que saber isso!’ aí dá até um certo... Como que eu vou falar que eu não sei um troço desse...*

Formador: *Mas é normal não saber isso aí porque isso aí não é objeto de estudo no curso de licenciatura. Quando a gente começa o curso de licenciatura já se pressupõe que a pessoa já saiba isso.*

André: *Na verdade isso nunca foi questionado ao longo de minha vida acadêmica. O terceiro episódio destacado ilumina questões de diversas categorias. Aqui iremos explorar melhor apenas questões relativas ao conteúdo. Entretanto, nesse mesmo episódio, podemos notar questões relativas ao ensino do conteúdo e à formação do professor.*

No momento em que André discute as diferenças entre o algoritmo por ordens (ao qual ele se refere como algoritmo de Euler) e o algoritmo por estimativas, ele explicita as dúvidas que estavam implícitas no episódio discutido anteriormente. Uma dúvida que aparentava ser puramente pragmática – não saber dividir – está associada a questões mais subjetivas. Ele assume que resolve o problema da divisão utilizando o algoritmo por estimativas, porém, é como se ele reproduzisse o procedimento de modo mecânico, sabendo percorrer na ordem correta as etapas necessárias para chegar ao resultado esperado. Entretanto, segundo nossa interpretação, ele expõe que saber isso não é o suficiente.

Quando André apresenta suas dúvidas como, por exemplo, a justificativa de se colocar um zero no quociente ou então, quando deve ser colocada uma vírgula no quociente, podemos notar que estas questões não são necessárias para engenheiros, matemáticos ou físicos. Porém, André, como professor, expõe sua necessidade de saber justificar estas etapas.

Esse é outro episódio que reforça o argumento de Ball (1988) para derrubar a suposição de que os conhecimentos que os professores irão ensinar não precisam ser revisitados. Essa reformulação da dúvida de André é a exposição de uma necessidade de revisitar o conteúdo da escola básica de modo que as etapas do procedimento não sejam fatos prontos que precisam ser reproduzidos em uma determinada ordem, mas sim, uma problematização para compreender as justificativas para que a próxima etapa seja desta maneira e não de outra. Compreendemos que este professor apresenta tal insegurança em busca de conhecer as justificativas que sustentam este procedimento, o que Fiorentini e Oliveira (2013) apontam como um conhecimento necessário ao professor.

Deste modo, associamos esse episódio à categoria de **conhecimento especializado do conteúdo**, por estar iluminando uma discussão que aponta exclusivamente para o conteúdo, porém, sob uma perspectiva ligada ao desenvolvimento de conhecimentos sobre a prática docente.

Nesse momento, não só André, como os demais professores participantes são levados a pensar sobre a operação de divisão e as diferentes estratégias para se chegar ao resultado. Reconhecer outras estratégias, diferentes daquela aprendida e reproduzida até então, também caminha ao encontro do que Fiorentini e Oliveira (2013) defendem como necessário para a profissão docente. Por esse motivo, esse episódio pode ser associado à categoria relativa ao **conhecimento do horizonte matemático**, uma vez que relaciona uma ideia matemática particular com valores matemáticos distintos. Estão sendo confrontados o procedimento puro – o algoritmo da divisão por ordens – e o pensamento por estimativas.

Outro destaque que podemos fazer neste episódio está no comentário de André de que esse conteúdo nunca foi discutido em sua vida acadêmica. Aqui é feita uma **crítica à sua formação inicial** de maneira explícita. Segundo nossa interpretação, André, como professor, sente falta da discussão sobre essas questões em sua vida acadêmica, uma vez que seria necessário ter clareza do procedimento ao se colocar enquanto docente de escola básica. Ele aponta para uma falha do curso de formação de professores devida à ausência de reflexões como a que propõe.

Em suma, esse episódio pode ser analisado sob três dimensões distintas: o conhecimento especializado do conteúdo, que é iluminado quando André apresenta suas dúvidas não meramente procedimentais, mas de maneira semântica, ou seja, o que justifica, matematicamente, cada etapa do procedimento; o conhecimento do horizonte matemático ao permitir a discussão sobre diferentes algoritmos para uma mesma operação mobilizando dois valores matemáticos distintos – o puramente procedimental e o pensamento por estimativas; e a crítica à formação inicial, quando André diz que essas questões não foram discutidas em sua formação inicial.

Episódio 4: Reflexão sobre a formação do professor

André: *Mas o algoritmo ótimo, sinceramente, pra mim não é claro. Eu não sei o que você... Aquele negócio de você pegar... Baixa um número, agora você divide, quando não dá joga o zero... O que tá significando cada coisa com relação a unidade, dezena, centena pra mim não faz sentido nenhum.*

[...]

André: *Hoje em dia eu só ensino aos meus alunos somente por esse, o por estimativa. Não exclusivamente ele, mas eu só uso ele porque é o algoritmo que eu sei o que tá acontecendo, porque se eu passar o outro, vou simplesmente vou reproduzir uma forma mecânica.*

Formador: *O que a gente pode fazer é fazer o outro algoritmo registrando a conta como se fosse por estimativas. Todo mundo tem a mesma dúvida que ele? Ou vocês entendem perfeitamente o algoritmo (da divisão)? Pode falar...*

Camila: *Perfeitamente, não...*

André: *Eu tinha até vergonha!*

Bruno: *Posso falar uma coisa? Eu entendo, mas eu também assumo uma certa falha porque eu dando aula nunca expliquei assim... Exatamente os passos. Até sei, mas nunca falei "olha só, essa vírgula aqui é por causa disso, disso e disso. [...] Para ficar claro pro aluno.*

[...]

Daniel: *Acho que ninguém entende porque nunca ninguém parou pra pensar nisso... [...] Isso vale para quase todos os conteúdos que são ensinados no ensino básico. Você vai dar aula com aquilo que você aprendeu na escola. Então você reproduz todos os erros que aprendeu e continua fazendo a mesma coisa.*

O quarto episódio traz novamente uma ilustração da necessidade de revisitar, sob outra perspectiva, conteúdos elementares do ensino básico como apontado por Ball (1988). Apesar de saber fazer, André explicita sua dificuldade em saber explicar o algoritmo da divisão por ordens. Segundo ele, depois de tomar conhecimento do algoritmo de divisão por estimativas, ele prefere usá-lo em sua abordagem de sala de aula, uma vez que possui domínio das justificativas que sustentam o procedimento enquanto, por outro lado, o algoritmo usual por ordens se reduz, para ele, a um procedimento mecânico.

Nesse destaque, André faz **reflexão sobre sua própria prática** confirmando que não utiliza mais o algoritmo da divisão por ordens – que chama de *obscuro* – e prefere utilizar o algoritmo por estimativas por ser aquele que ele consegue explicitar as justificativas de cada etapa. Por que há a necessidade de justificar? Para quem?

A necessidade de saber justificar cada etapa se explicita como uma busca de um conhecimento sobre o algoritmo da divisão que não é necessário aos outros profissionais que lidam com matemática. Porém, acreditamos, em consonância com Ball, Thames e Phelps (2008), que é uma necessidade o professor ter o conhecimento desse conteúdo para torná-lo compreensível aos seus alunos. Assim, isso não é um conhecimento descolado da atuação profissional do professor participante. Por esse motivo, interpretamos esse episódio como sendo uma reflexão relativa ao **conhecimento especializado do conteúdo**.

Quando os demais professores participantes são questionados sobre a compreensão do algoritmo da divisão por ordens, Camila também expõe seu desconhecimento das justificativas deste procedimento. Bruno, por sua vez, também faz uma **crítica à própria prática**, uma vez que, apesar de compreender o algoritmo e saber justificar as etapas do procedimento, essas justificativas não são discutidas com seus alunos. Já Daniel expõe sua **crítica à própria formação** de modo geral, pois, segundo ele, essas justificativas não são oferecidas e, em geral, essas questões não são nem mesmo discutidas. Segundo ele, isso explica o fato de que o licenciado, ao retornar para a escola básica com o papel de docente acaba reproduzindo a prática de seus próprios professores.

Podemos interpretar essa fala do Daniel como uma reflexão da sua trajetória desde aluno da escola básica, passando pela formação inicial e retornando para a escola básica como docente. Como essas questões não foram revisitadas na formação inicial do professor, ele justifica que isso leva muitos a buscarem a maneira como aprenderam para poder ensinar.

Essa fala de Daniel nos leva a refletir sobre o papel da escola enquanto espaço de produção de uma matemática cultural. Ao se fechar o ciclo – aluno da escola básica, licenciando, professor da escola básica – em um curso de formação inicial em que não há uma problematização dos conceitos que serão ensinados na escola, os conhecimentos que são produzidos na própria escola não são revisitados. Entretanto, a problematização desses conteúdos no curso de formação inicial provavelmente possibilitaria mudanças na matemática que é produzida na escola. Nesse sentido, o **reconhecimento da matemática como prática social** e a busca por ressignificações dos conteúdos da matemática escolar são maneiras de proporcionar mudanças na matemática produzida na escola. Pensar na prática matemática do professor como uma prática matemática distinta daquelas de outros profissionais direciona o olhar do professor para essa prática matemática como produtora de novos conhecimentos. Esse reconhecimento da matemática como prática social é apontado por Fiorentini e Oliveira (2013) como característica do conhecimento *profundo* e *diversificado* do professor de matemática.

Nesse sentido, podemos analisar este episódio sob a perspectiva de três categorias de análise distintas: a crítica à sua própria prática, crítica à sua formação e o reconhecimento da matemática enquanto prática social.

Episódio 5: Sobre o conteúdo per se e sobre o ensino do algoritmo da divisão por ordens e outras possibilidades de ensino

André: *Porque isso que a gente tá discutindo agora de pegar uma centena ou pegar 16 dezenas pra falar para uma criança que tá começando a aprender a dividir não tem cabimento. Acho que não dá. [...] Mas quando eu aprendi não tinha isso de dividir por 100 não... (risos) Era assim, ó. "Um dá por 4? Não. Então junta com o 6 e forma o 16. Agora divide o 16."*

Formador: *É por isso que você aprendeu sem ter raciocinado naquilo que você estava fazendo,* *André:* *É, mas se bem que isso aí... Eu, na hora de ensinar, infelizmente cometia esses crimes porque isso é quase que um crime[...] Fazia a mesma coisa até conhecer o de estimativas.*

Nesse episódio, André expõe um **conhecimento do conteúdo e dos alunos** sobre a dificuldade de crianças pequenas compreenderem com clareza as justificativas das etapas do algoritmo da divisão por ordens. Entretanto, quando continua seu discurso, ele busca na sua própria experiência enquanto aluno da educação básica as justificativas que sustentam seu argumento anterior. Essas justificativas estão fundamentadas em uma **crítica** que faz à sua **própria formação básica**.

Em seguida, André faz uma **crítica à sua própria prática** por ter cometido o "*crime*" de abordar a operação de divisão pelo algoritmo por ordens. Segundo nossa interpretação, essa crítica está estritamente relacionada ao que Fiorentini e Oliveira (2013) defendem como sendo um conhecimento *diversificado* da matemática. Ao dizer que é um crime ensinar o algoritmo da divisão por ordens sem justificar suas etapas, vai ao encontro de uma compreensão da matemática "enquanto instrumento de leitura e compreensão da realidade e de intervenção social" (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 925). Desse modo, a crítica à própria prática aponta indícios de um **reconhecimento a matemática enquanto prática social**.

3.3 Potencialidades e limitações

O objetivo desta sessão é de apontar para possíveis potencialidades e fragilidades do modelo de tarefa proposto de acordo com o que emergiu dos discursos dos participantes especificamente na aplicação desta atividade. É possível que, em outras aplicações, outras questões possam emergir, porém, isso não exclui as que aqui apresentaremos.

3.3.1 Potencialidades

Podemos identificar, com a aplicação da tarefa, conhecimentos dos professores participantes sobre o ensino de matemática. Posicionamentos sobre o que deve ser mais bem compreendido pelos alunos, como deve ser abordado o conteúdo e que recursos didáticos podem ser utilizados também emergiram durante o processo. A discussão coletiva propiciou outro olhar para o algoritmo da divisão. Afastar o professor de sua zona de conforto, isto é, substituir as *garantias de validade* usuais, revelou-se uma maneira de provocar a reflexão sobre a estrutura que permeia os procedimentos comumente utilizados na escola básica. Além disso, ao se discutir sobre as etapas necessárias para converter de uma representação fracionária na base 10 para sua representação posicional em outra base, foi possível abrir espaço para a discussão sobre um conteúdo pertinente à atuação do professor, sob um ponto de vista diferente do usual.

Ao invés de apenas apresentar o conteúdo de séries numéricas, desconsiderando a identidade profissional do professor, a atividade articula esse tópico (que é usualmente associado à matemática acadêmica) com a matemática escolar, possibilitando a discussão e a reflexão sobre conhecimento matemático para o ensino. Isso é feito a partir de uma aplicação deste conhecimento de conteúdo abordado no ensino superior visando uma ressignificação dos conteúdos vistos na escola básica. Nesse sentido, apontamos para a possibilidade de uma abordagem do conteúdo matemático sob uma perspectiva orientada para a profissão docente, reconhecendo, como destacam Moreira e David (2005), que a complexidade dos conhecimentos necessários ao professor exige uma abordagem que não seja exclusivamente lógico-formal e desarticulada com a prática docente.

Vemos como um ponto positivo o fato de que a atividade disparada pela proposição da tarefa possibilitou uma discussão sobre a prática docente e suas especificidades em uma disciplina de Análise Real, que tradicionalmente é vista como uma disciplina que aborda exclusivamente os conteúdos de matemática acadêmica, geralmente desenvolvida sob uma abordagem axiomática.

Além disso, ao ser aplicada com professores em atuação, a atividade tem o potencial de investigar, junto aos professores, aspectos de sua própria formação que eles sentem falta. Apresenta-se, dessa forma, uma ferramenta que possibilita a formadores de professores e dirigentes de cursos de licenciatura repensar aspectos que devem ser contemplados nos currículos desses cursos para que atendam às necessidades da prática profissional, reveladas pelas próprias experiências dos professores. Moreira (2012) aponta para o desafio de "desenvolver estudos fundamentados que permitam entender melhor o papel da Matemática Acadêmica na formação do professor da escola básica" (MOREIRA, 2012, p. 1148). O autor continua comentando a partir de uma perspectiva política sobre a hierarquia entre os atores que participam da formação do professor:

> Essa questão tem sido tratada, desde há muito, na base da tradição e de forma essencialmente opinativa: os matemáticos apresentam suas opiniões

> sobre o ensino da matemática e, como são as grandes autoridades na produção do conhecimento matemático acadêmico, são alçados, pela lógica subliminar ao 3+1, à condição de autoridade na formação matemática do futuro professor (MOREIRA, 2012, p. 1148)

Nesse sentido, acreditamos que a tarefa possibilita, iluminar questões inerentes à prática docente que possam constituir parâmetros para a concepção de ementas de disciplinas de conteúdo matemático acadêmico, como, por exemplo, Análise Real, que sejam orientadas por necessidades da prática, apontadas pelos próprios professores em exercício.

Dependendo da maneira como a atividade é conduzida, é possível explorar respostas para questões como: *De que forma determinado conteúdo da ementa da disciplina pode contribuir para uma ressignificação dos conteúdos que serão ensinadas na escola básica? Qual deve ser o foco da abordagem deste ou daquele tópico? Que aspectos desse tópico são importantes para que o professor possa construir um novo olhar sobre o conteúdo que ele vai ensinar na escola básica?*

As respostas para essas perguntas são construídas coletivamente pelos próprios professores em atuação a partir dos desafios encontrados nos seus percursos como docentes. Assim, consideramos que o modelo de tarefa proposto possibilita a discussão e iluminação de aspectos da Matemática Escolar e as articulações entre esta e a Matemática Científica (MOREIRA; DAVID, 2010).

Dessa forma, o caráter investigativo da tarefa é de suma importância. Assim como no modelo de Concept Study proposto por Davis (2010), a experiência da prática dos professores participantes tem um papel determinante na discussão. Ao aplicar a tarefa com professores em formação inicial, esse caráter pode não se configurar da mesma maneira. Entretanto, a mesma tarefa pode contribuir para a discussão com futuros professores sobre suas práticas intencionadas.

Cabe destacar que uma característica importante da tarefa desenhada é o ambiente criado especialmente para promover discussões relativas à prática docente. Os resultados da atividade relatada neste trabalho não foram determinados apenas pelo envolvimento dos participantes com tarefas que os afastassem de sua zona de conforto. Acreditamos que os papeis do formador e o ambiente estabelecido também tenham sido fundamentais. A simples resolução de um exercício, no caso, determinar a representação posicional de um número racional representado em sua forma fracionária, não seria suficiente para problematizar questões relativas à prática docente. Essa perspectiva também coloca em xeque as relações entre os atores, ou seja, as relações entre formador e aprendizes. No ambiente criado nessa proposta, o formador não se coloca como fonte privilegiada de informação ou de conhecimento, uma vez que as experiências, dúvidas, sugestões e críticas trazidas por todos os participantes são determinantes para os rumos da atividade e da discussão que dele emerge. Desse modo, o modelo de tarefa proposto aponta para questionamentos e transformações nas relações usualmente estabelecidas entre formador e aprendizes.

Outro aspecto interessante da tarefa foi iluminado pelo quinto episódio, em que André explicita em seu discurso a origem de reconhecer dificuldades de alunos. A partir de suas experiências como aluno da escola básica, ele reconheceu a dificuldade da abordagem do algoritmo da divisão por ordens sem justificativas.

3.3.2 Limitações

Enquanto ferramenta investigativa, a tarefa permite acesso à prática relatada e à prática intencionada, mas não à prática efetiva dos professores participantes. Nesse sentido, não é possível uma observação longitudinal dos possíveis impactos da tarefa, em seu aspecto formativo, na futura prática dos participantes. Para atingir esse objetivo, seria necessário combinar o modelo proposto com outros instrumentos metodológicos. Apesar de o objetivo da pesquisa ser o de analisar o processo, isto é, os aspectos do conhecimento do professor e reflexões que emergiram dos seus discursos ao longo da tarefa, teria sido interessante observar se o envolvimento dos professores com a atividade propiciou ou não reconstruções de aspectos do conhecimento de matemática para o ensino e mudanças em sua prática docente.

Sendo assim, podemos notar que a tarefa, como ferramenta investigativa, se limita a observar localmente e temporalmente as reflexões de um grupo de professores sobre suas experiências. É necessário trazer outras metodologias de investigação para acessar possíveis impactos nas práticas dos professores, e, a um prazo mais longo, as possíveis transformações da cultura matemática nas instituições de atuação dos professores envolvidos.

A tarefa foi desenhada com o intuito de buscar compreender melhor em que consiste o conhecimento matemático para o ensino. Porém, devido à complexidade do desafio, apenas alguns aspectos foram iluminados na atividade analisada. Entretanto, quanto mais aplicações de tarefas desenhadas no modelo proposto, mais indícios do que caracteriza esse conhecimento podem ser iluminados.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da tarefa, sob este ambiente específico, os professores participantes trouxeram explicitamente referências da própria prática, especialmente no caso de André e Bruno. Ambos comentaram espontaneamente suas experiências docentes. Os exemplos apresentados aqui apontam para a possibilidade de discutir, na formação do professor, questões conceituais, procedimentais e atitudinais sobre o conteúdo que deverá ser ensinado na escola básica, bem como o modo de ensiná-lo e estratégias e recursos didáticos que podem ser utilizados. Essas discussões se deram em uma disciplina que possui, a princípio, o objetivo principal de desenvolver um conhecimento comum ao bacharel em matemática.

Vale reforçar que as categorias de análise não são fixas. Elas podem ser distintas de acordo com os dados coletados. Por exemplo, em uma segunda aplicação da tarefa, outra categoria foi identificada a partir dos dados: o **conhecimento tecnológico do conteúdo**. O formador perguntou aos professores participantes se todo número racional sempre terá representação posicional finita e periódica. Um dos participantes se refere à fração $\frac{1}{7}$ que, quando apresentada na calculadora, não é possível encontrar o período, uma vez que esse possui muitas casas decimais. Em resposta a esta questão, um segundo participante diz que o número sugerido possui representação periódica e apresenta, como ilustração, um aplicativo em seu computador utilizado para ensinar alunos com necessidades especiais, a musiCALcolorida.

O envolvimento dos mestrandos na atividade possibilitou trazer a prática matemática da escola básica para a discussão sobre o conteúdo, o que, segundo nossa interpretação, aponta para indícios de uma ressignificação de aspectos do conhecimento matemático para o ensino. Acreditamos que a abordagem de tarefas problematizadoras seja uma maneira viável de trazer a prática matemática da sala de aula para a formação do professor de modo que o conteúdo matemático seja discutido *a partir* da e *para* a prática. Por um lado, enquanto ferramenta formativa, com o objetivo de revisitar conteúdos já aprendidos na escola básica sob a perspectiva docente e, por outro, como ferramenta investigativa, buscando compreender melhor alguns aspectos da matemática escolar que emergem ao longo da atividade decorrente da tarefa proposta. Nesse sentido, pensando em uma abordagem para professores em formação inicial, a tarefa pode ser adaptada de modo a conduzir os futuros professores a refletirem sobre as suas experiências como alunos de escola básica. Partindo do pressuposto de que a formação não se resume a três blocos de disciplinas que não se relacionam (MOREIRA, 2012), procuramos propor um modelo de atividade elaborada para, a partir de um conteúdo matemático (apresentado de forma que as garantias de validade usuais da escola básica sejam problematizadas), promover uma discussão *a partir* da prática e *para* a prática.

Sob nossa interpretação, a tarefa apresentada abriu espaço na formação do professor para uma exploração do conteúdo matemático a partir da busca por justificativas das garantias de validade comumente adotadas na escola básica (neste caso, a determinação da representação posicional de um número racional e os passos de diferentes algoritmos para a divisão). Compreendemos, desse modo, que essa prática formativa se insere na mesma perspectiva defendida por Fiorentini e Oliveira (2013), no sentido em que busca explorar o conhecimento matemático de maneira profunda, vivenciando um processo de exploração de diferentes procedimentos. Assim, acreditamos que o modelo de tarefa problematizadora proposto possa contribuir com o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino (BALL et al. 2009).

Acreditamos que o afastamento da zona de conforto proporcionado pela retirada das garantias de validade e o ambiente problematizador favoreceram a exposição de dúvidas, além de reflexões sobre a prática e sobre a formação inicial dos próprios professores participantes. Além disso, diferentes aspectos do conhecimento matemático para o ensino proposto por Ball et al. (2009) foram mobilizados e explicitados na atividade analisada. Por exemplo, quando André afirma não saber dividir, ele está expondo uma necessidade que tem de justificar as etapas dos algoritmos para seus alunos, uma dificuldade que carregava desde sua vivência enquanto aluno da escola básica. Consideramos esta postura de André uma busca para acessar um conhecimento especializado do conteúdo, uma vez que este aspecto do conteúdo não é necessário a outras profissões que desempenham práticas matemáticas distintas à prática matemática do docente, assim como Ball, Thames e Phelps (2008) caracterizam esta dimensão do conhecimento matemático para o ensino.

É necessário ressaltar que o ambiente problematizador, enquanto característica fundamental da tarefa proposta, desempenhou papel chave na promoção da discussão dos conhecimentos que são mobilizados durante a atividade.

Além de aspectos que não podem ser controladas, como, por exemplo, o perfil dos participantes, o papel do mediador é uma característica que não pode ser desconsiderada da análise dos resultados do modelo proposto. Dessa forma, é preciso pensar nas características do formador que vai orientar a discussão e construir este ambiente problematizador. No caso específico da atividade analisada, trata-se de um pesquisador em Educação Matemática, professor de um programa de pós-graduação em Ensino de Matemática, sensível às questões relacionadas à pesquisa sobre a prática docente. Dessa maneira, trazemos aqui uma questão que nos despertou interesse ao longo da pesquisa: *Qual seria o perfil do formador para que tarefas como a que apresentamos aqui possam proporcionar reflexões sobre o ensino de conteúdos elementares da educação básica?*

Estamos cientes de que definir o conhecimento matemático para o ensino é um desafio complexo, que não buscamos responder com esta pesquisa. Entretanto, acreditamos que este trabalho traga à tona a discussão em torno desse conceito oferecendo indícios para reconhecer e identificar alguns de seus aspectos.

Por outro lado, também estamos cientes de um segundo desafio, ainda mais complexo, que é apontar caminhos que propiciem a construção ou o desenvolvimento desse conhecimento. Porém, consideramos que a atividade analisada iluminou caminhos possíveis para a discussão de algumas dimensões do conhecimento matemático para o ensino. Por exemplo, quando André, no quinto episódio, expõe que o ensino do algoritmo de divisão por ordens é de difícil compreensão para os alunos, o que interpretamos como um exemplo de conhecimento do conteúdo e dos alunos, podemos notar que ele se refere à sua própria experiência enquanto aluno e à sua relação com o conteúdo que está sendo discutido. Desse modo, os resultados da experiência sugerem que aspectos do conhecimento matemático para o ensino possam ser constituídos a partir das experiências dos professores enquanto alunos. Assim, visando a adaptação do modelo proposto para formação inicial de professores, as experiências dos licenciandos enquanto alunos da escola básica pode desempenhar um papel análogo (embora não equivalente) à experiência da prática docente dos professores em exercício.

Buscando possibilidades para explorar o conhecimento matemático para o ensino, acreditamos que a pesquisa forneça indícios sobre o que caracteriza esse tipo de conhecimento. Por outro lado, a atividade se propõe como uma ferramenta que pode ser utilizada para fazer emergir, discutir e iluminar conhecimentos. O desafio ainda está em pensar práticas formativas que propiciem a reflexão, construção e reconstrução deste conhecimento, tanto para a formação inicial, quanto para a formação do professor durante sua atuação profissional.

REFERÊNCIAS

AINLEY, J.; PRATT, D.; HANSEN, A. **Connecting engagement and focus in pedagogic task design**. British Educational Research Journal, v. 32, n. 1, p. 23 – 38, 2006. Citado na página 11.

BALL, D. L. **The Subject Matter Preparation of Prospective Mathematics Teachers**: Challenging the Myths. 1988. Citado 4 vezes nas páginas 15, 47, 49 e 50.

BALL, D. L.; BASS, H**. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching.** Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group, p. 3 – 14, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.

BALL, D. L.; BASS, H. **With an eye on the mathematical horizon**: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. In paper prepared based on keynote address at the 43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik held in Oldenburg, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

BALL, D. L.; HILL, H. C.; BASS, H. **Knowing mathematics for teaching**: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? . 2005. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 18 e 24.

BALL, D. L. et al. **A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching.** Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 1, p. 95 – 98, 2009. Citado 5 vezes nas páginas 11, 19, 20, 21 e 57.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. **Content knowledge for teaching what makes it special?** Journal of teacher education, v. 59, n. 5, p. 389 – 407, 2008. Citado 9 vezes nas páginas 8, 18, 19, 20, 21, 36, 46, 51 e 57.

BIZA, I.; NARDI, E.; ZACHARIADES, T. **Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts.** Journal of Mathematics Teacher Education, v. 10, p. 301 – 309, 2007. Citado 6 vezes nas páginas 8, 11, 25, 26, 28 e 31.

DAVIS, B. **Concept Studies**: Designing settings for teacher's disciplinary knowledge. Proceedings of the 34th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, p. 63 – 78, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 54.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. **O lugar da matemática na Licenciatura em Matemática**: que matemáticas e que práticas formativas? . Bolema, v. 27, n. 47, p. 917 – 938, 2013. Citado 10 vezes nas páginas 11, 21, 22, 24, 46, 48, 49, 51, 52 e 57.

KLEIN, F. **Elementary mathematics from an advanced standpoint.** ArithmeticAlgebra- Analysis. . [S.l.]: Dover Publications, 1924. Citado na página 20.

MOREIRA, P. C. **3+ 1 e suas (In) Variantes**: Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática. Bolema, v. 26, n. 44, p. 1137 – 1150, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 27, 53, 54 e 56.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **O conhecimento matemático do professor:** formação e prática docente na escola básica. Revista Brasileira de Educação, v. 28, p.50 – 61, 2005. Citado 6 vezes nas páginas 21, 23, 24, 28, 46 e 53.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **Formação matemática do professor**: Licenciatura e prática docente escolar. [S.l.]: Autentica, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 54.

NOSS, R.; HEALY, L.; HOYLES, C. **The construction of mathematical meanings**: Connecting the visual with the symbolic. . Educational studies in mathematics, v. 33, n. 2, p.203 – 233, 1997. Citado na página 16.

OLIVEIRA, A.; PALIS, G. **O potencial das atividades centradas em produções de alunos na formação de professores de matemática**. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, v. 14, n. 3, p. 335 – 359, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 8, 26, 27 e 28.

PENTEADO, M.; BORBA, M. **A informática em ação**: formação de professores, pesquisa extensão. p. 32 –, 2000. Citado na página 13.

RANGEL, L.; GIRALDO, V.; MACULAN, N. **Conhecimento de Matemática para o Ensino**: um Estudo Colaborativo sobre Números Racionais. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, v. 8, n. 2, 2015a. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 35.

RANGEL, L.; GIRALDO, V.; MACULAN, N. **Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo** – Estabelecendo Relações. 2015b. 275 p. Tese (Teoria de Sistemas) — Universidade Federal do Rio de Janeiro. Citado na página 30.

SHULMAN, L. S. **Those who understand**: Knowledge growth in teaching. Educational esearcher, p. 4 – 14, 1986. Citado 5 vezes nas páginas 11, 14, 15, 16 e 19.

SKOVSMOSE, O. **Guetorização e globalização**: um desafio para a Educação Matemática. Zetetiké, v. 13, n. 24, p. 13 – 142, 2005. Citado na página 24.

APÊNDICES A - TRANSCRIÇÃO DA ATIVIDADE ANALISADA

Formador: *O que eu quero fazer hoje é uma aplicação de séries para representação posicional para números reais. A gente já viu como representa... Quer dizer... O objetivo é pensar o que significa representar um número na base dez. Isso que eu quero discutir na aula de hoje, mas para discutir isso a gente vai pensar nesse objetivo de uma perspectiva mais ampla que é o que significa escrever um número real numa base qualquer. A gente já pensou isso para o caso particular dos números naturais. O que significa escrever um número natural numa base qualquer? Por exemplo: um número natural "a" é expresso na base dez se eu escrevo ele nessa forma aqui. (Escreve no quadro a representação em forma de série) Então isso aqui para a pertencente a N. E no lugar da base dez eu posso escrever aqui outra base qualquer, onde esse beta, que é a base é um número natural qualquer maior ou igual a dois. Se agora isso aqui, ao invés de ser um número natural, eu vou pegar um número real qualquer, então como é a expressão disso na base dez? O que tenho que mudar nessa forma desse somatório? O somatório vai ser de onde até onde?*

Participantes: De menos infinito... Até o n.

Formador: *É... Até algum n. Mas de forma geral é menos infinito. Porque aqui na parte de cima, no limite superior do somatório eu posso colocar um n porque nenhum vai ficar até infinito. Esse n vai variar dependendo do a, porque esse n é a ordem de grandeza do a. Mas nenhum vai até infinito. Agora aqui embaixo não... Aqui embaixo alguns números vão até menos infinito mesmo (a representação deles). Então por isso que eu tenho que botar menos infinito aí.*

Eduardo: *Alguns números, só?!*

Formador: *Que não têm representação decimal finita.*

Eduardo: *Mas os que tiver você pode completar com 9...*

Formador: *É... Posso até completar com o zero. Mas o fato é que eu não posso colocar um número aqui embaixo. Porque tem representações decimais que não são limitadas inferiormente nesse sentido. Da mesma forma que* *eu faço isso na base dez eu posso fazer isso em uma base qualquer. Eu posso pegar um número real e escrever em relação a uma outra base que não seja a dez. O que significa isso aí? A gente tem o número 258, a gente sabe que esse é um número natural então quando eu escrevo na base dez esse número eu tô agrupando, não é? Eu estou formando grupos de dez. Quando eu tenho um número que não é um número inteiro, o que eu tô fazendo? Para representar a parte não inteira... O que é a parte não inteira? A parte não inteira é uma parte menor que a unidade. Lembra que da maneira como a gente tá estruturando isso aqui, o conceito de número é estabelecido a partir das ideias de contagem e medida. Então, qual é a diferença de contagem para medida? Que é uma diferença fundamental. Quando a gente passa para a medida a gente pode dividir a unidade. Quando a gente tá contando a gente não considera subdivisões da unidade. Então, um número racional é, essencialmente, um número que representa uma medida. Então eu posso ter partes menores que a unidade. Como eu faço para representar essas partes em relação a uma base fixada? Em vez de agrupar como eu faço aqui (no caso de um natural), aqui eu tô formando grupos de acordo com a base que eu tenho, que no caso é dez. O que eu vou fazer aqui (no caso de um racional)? Eu vou subdividir esse número também tomando como referência aquela base, que no caso é dez. O que significa 238,36? Significa isso aqui (escreve no quadro a expansão em forma de somatório). Por que que aqui esse número 258,36, por que que aqui, essa primeira casa decimal é 3 e não 4? Faz de conta que a gente tivesse representando na reta eu teria a unidade e eu iria subdividir a unidade em dez partes iguais. Eu tenho um número que tá mais ou menos aqui assim. Como eu faço para descobrir a representação desse número? Olhando para esse ponto aqui a representação desse número é 0,3 e por que não é 0,4?*

Camila: *Porque tá maior...*

Formador: *Porque 0,4 passa desse número aí. Só que o que acontece? É 0,3 e ainda sobra alguma coisa. Como é que você vai fazer?*

Participantes: Vai subdividir...

Formador: *Vai subdividir novamente... Vai pegar esse pedacinho, esse décimo e vai dividir novamente em dez partes. A questão é que esse processo pode nunca acabar. Agora... Como seria isso se a base não fosse dez? Como eu representaria esse mesmo ponto se eu tivesse na base 3? Como eu faria? Teria que subdividir em quantas partes?*

Participantes: 3...

Formador: *Na base 3 esse número... Aqui eu tô subdividindo a unidade em 3 partes iguais. Na base 3 esse número seria 0, ... quem seria a próxima casa dele? Participantes: 1*

Formador: *E a casa seguinte?*

André: *Tem que dividir em 3 de novo...*

Formador: *Mas e aí... Qual seria?*

Camila: *Zero...*

Formador: *Zero, né? Porque o próximo terço passaria disso aí. Então seria uma coisa assim. Então o que a gente tá fazendo nesse processor? Por exemplo, na base dez. Primeiro a gente encontra o maior múltiplo de 1 décimo que é menor que esse número, no caso é 3 décimos. Depois a gente pega o número original e subtrai esses 3 décimos e a gente vai olhar só para essa diferença aqui. Aí a gente vai ver quem é o maior múltiplo de 1 centésimo que cabe nessa diferença.*

André: *Aquele zero dá para determinar pelo desenho que você fez?*

Formador: *Dá... Porque aí se eu dividi isso aqui em três de novo né... Vou pegar esse pedaço aqui e vou dividir em 3 de novo...*

André: *Ah! Pensei que você estivesse considerando aquelas outras marquinhas brancas...*

Formador: *Não... Porque essas marquinhas em branco são da base dez... As marquinhas em rosa são da base 3.*

André: *Essas em rosa são pra gente imaginar e...*

Formador: *Exatamente, mas a nova divisão seria alguma coisa assim, concorda? André: É... Pensei que você estivesse considerando a marquinha branca.*

Formador: *Então, os números que estão nesse intervalo aqui são aqueles que tem representação na base 3 nessa forma (escreve no quadro 0,10...) Os números que estão nesse intervalo (depois da primeira marquinha rosa) são do tipo 0,11... Aqui 0,12 e daqui para cá 0,2 porque depois do 0,12 acabou. Depois do 0,2 vai pro 1 (0,21). Só que aí, o que é que vai acontecer? Como a gente tá trabalhando com coisas que podem ser incomensuráveis a gente pode não ter uma unidade comum aqui. Isso implica que esse processo pode continuar indefinidamente. Por isso que quando a gente representa um número real numa base qualquer, representação posicional, a gente vai ter uma série. E não mais uma soma algébrica.*

Formador: *A gente tá lidando com convergência de séries. Isso é importante porque muita gente não se dá conta disso. No ensino fundamental quando a gente trabalha com dízimas periódicas estamos trabalhando com a convergência de uma série. É por isso que eu quero discutir. Antes disso vamos fazer um exercício de escrever um número, esse exemplo 5.1 que tá na página 44.*

André: *Professor... Só para ressaltar... O senhor falou que a série que a gente consegue fazer ela convergir para qualquer número são apenas aquelas condicionalmente convergentes? Qualquer condicionalmente eu posso fazer ela convergir para qualquer número que eu quiser?*

Formador: *Exatamente. Mudando a ordem dela.*

Formador: *Isso é a última coisa que a gente vai ver da matéria da apostila. O resto do curso tem no livro.*

Formador: *Eu quero escrever esse número* $a = 163 + \frac{7}{8}$ *na base 4. Vamos,*

para começar o exercício, a gente pode fazer separadamente a parte inteira e a parte não inteira. Só para facilitar, pensar primeiramente o que está antes da vírgula e o que está depois da vírgula. Estou usando a *notação que muitas vezes se usa para parte inteira e essa notação para a parte não inteira. Uma observação: a parte não inteira, eu to usando esse termo, muitas vezes se fala da parte decimal de um número. Eu, pessoalmente não gosto de chamar desse jeito. Aqui nesse contexto nem faz sentido porque aqui nesse caso não é decimal. Eu não posso falar da parte decimal desse número é 0,10 porque não é decimal isso aqui. Além disso, a parte decimal não é do número, é da representação desse número e também, o que tá pra cá (antes da vírgula) também é decimal. O que tá antes da vírgula também é decimal. Então é meio equivocado. Por isso eu prefiro chamar de parte inteira e parte não inteira. Vamos nos preocupar separadamente com a parte inteira e a parte não inteira. Na parte inteira nós podemos aplicar o algoritmo que já conhecemos de passar para a outra base. Vou dividir 163 por 4 e vou ter quanto? 40 e resto 3 e aí aquilo (o 40) eu vou continuar dividindo. Esse algoritmo aí é o algoritmo usual para mudar de base, para expressar um número em relação a uma base. Esse algoritmo a gente obtém primeiro isso aqui (o resto 3). Esse resto aqui o que vai representar do número (a_0) das unidades porque a primeira coisa que eu faço é pegar a quantidade que eu tenho e vejo quantos grupos de 4 eu posso formar. O que sobra são as unidades. Com esse número eu formo 40 grupos de 4 e sobram 3 unidades. Agora... Esses grupos de 4 eu vou querer redividir em grupos de grupos de 4, ou seja, grupos de 16. Esse algoritmo não serve para a gente aplicar para a parte não inteira porque não podemos começar pelo algarismo de menor ordem porque esta menor ordem pode não existir pode ser infinita a menor ordem. Então a gente começa pelo algarismo de maior ordem. Igual ao que eu fiz aqui (aponta para o esquema gráfico utilizado no início da aula) eu comecei aqui por quem? Pelos décimos e aqui eu começo pelos terços. No caso da base dez eu tenho décimos, centésimos e milésimos. Na base 3 eu vou ter o que? Terços...*

Daniel: *Nonos...*

Formador: *27 avos. Qual foi o procedimento? O primeiro passo foi ver quantos terços cabem no número. Depois, no que sobra, quantos nonos cabem* *no que sobra? Então eu tenho um algoritmo que comece pelo algarismo de maior ordem. A ordem mais próxima da unidade, no caso. A gente pode aplicar um algoritmo dessa natureza para números inteiros também. Como a gente pensaria para começar da maior ordem? Esse algoritmo vai da menor ordem para a maior ordem. Eu quero um algoritmo que vá da maior ordem para a menor ordem. Não pode ser esse (se refere ao algoritmo proposto para números inteiros discutido no início da aula). Então como a gente pode fazer esse algoritmo aí? Um algoritmo que eu descubra primeiro quem é o algarismo da maior ordem. Então, esse número aí, 163 eu quero escrever na base 4. Primeiro eu tenho que descobrir o algarismo da maior ordem. Para descobrir o algarismo de maior ordem eu tenho que descobrir primeiro quem é a maior ordem. Como eu descubro isso? Essas ordens são determinadas pelo que?*

Eduardo: *Potências do...*

Formador: *Potências de quem? Do 4. (Escreve ao quadro) Não é isso que eu vou fazer? Então eu tenho que descobrir quem é esse n aqui. Quem vai ser, nesse caso aqui?*

Bruno: *A parte inteira da raiz quarta de 163?*

Formador: *Da raiz quarta não... Da raiz n-ésima de 163, só eu ainda não sei quem é esse n.*

Eduardo: *Vai ser 6...*

Formador: *Seis...? Por quê?*

Eduardo: *Porque tá muito longe... Por isso acho que é seis...*

Formador: *Mas por quê? Quatro elevado a seis dá quanto?*

Eduardo: *Dá.... Não, não, não! Passa! Passou muito...*

Formador: *Então, quem é?*

Participantes: 3

Formador: *Três... Quatro elevado a três dá quanto?*

Daniel: *64.*

Bruno: *Então é 4... (Querendo dizer que seria a quarta potência de 4) Não, não...*

Felipe: *4 passa... 4 é 216...*

Formador: *Então pronto, mas qual é o pensamento que vocês estão fazendo? Por que vocês estão falando que é 3? Porque vocês estão fazendo isso aqui (escreve no quadro).*

André: *Um múltiplo de quatro...*

Formador: *Então esse n vai determinar qual é a ordem. Como eu posso definir ele de forma geral? Esse n é o máximo dos expoentes n's tais que a base alfa elevado a n é menor ou igual a a. Então no caso aqui n é igual a 3. Agora como é que eu vou determinar... Então eu já sei que eu quero escrever esse número assim, ó:* $4^3a_3 + 4^2a_2 + 4^1a_1 + 4^0a_0$. *Então, como é que eu vou determinar esse* a_3 *aqui? Esse* a_3 *eu tenho que achar o que?*

André: *Dividir o 163 por 64...*

Formador: *É... Mas dividir e pegar o que? A parte inteira?*

André: *Isso. A primeira... O primeiro resultado aí... (se referindo ao quociente)*

Formador: *E quanto vai dar isso?*

André: *Eu não sei dividir...*

Formador: *Pode fazer o contrário. Pode multiplicar né? 64 vezes 2 quanto dá?*

Felipe: *Dá 128.*

Formador: *e por 3?*

Felipe: *Passou...*

Formador: *Passou, então quem é o* a_3*? Dois. Ficou claro isso? Pensa na base dez. 295. Por que é 2 aqui? Por que vai até dez ao quadrado? Porque esse número está entre 100 e 1000. Por que que aqui é 2? Porque se eu pego 2 vezes 100 não chegou ainda e se eu pego 3 vezes 100 passou. Então eu vou dividir, como o André falou, vou dividir esse número por 100 e pegar o quociente dessa divisão. Em outras palavras, o maior múltiplo de 100 antes de chegar nesse número. No caso eu vou pegar o* a_3 *vai ser 2. Então esse* a_3 *vai ser o (escreve no quadro)*

$$máx\{r \in N \mid r \times \propto^3 \leq a\}$$

O que eu tenho que fazer para determinar o a_2?

André: *O resto da divisão dividido pelo... Pelo 16 agora.*

Formador: *Exatamente, tem que ver o que sobra... Isso.Eu tenho que pegar esse resto como o André falou, vou pegar o que sobra da divisão e depois o que eu tô fazendo é dividir o 163 por 64 e o que sobrou disso agora eu vou dividir por 16. Esse resto, na folha (material didático elaborado pelo professor) eu chamei de b_2. Esse resto vai ser o que? O número que eu tenho que é 163 menos duas vezes 64. Que vai dar quanto? O resto da divisão?*

Felipe: *35.*

Participantes confirmam.

Formador: *O que esse algoritmo faz? Eu tenho um número e vou agrupando de 4 em 4. Qual é o maior tamanho de grupo, as potências de 4, que eu posso colocar ali dentro? 4 ao cubo. Agora eu vejo quantas vezes 4 ao cubo cabe ali dentro? 2. Aí sobra um pedaço. Esse pedaço que sobra eu vou querer encaixar grupos de quanto ali dentro? De 4 ao quadrado. Quem vai ser agora o a_2? Vai ser quantas vezes o 16 cabe ali dentro.*

André e Felipe: 2

Formador: *Duas vezes. Então vai ser igual a 2. Por quê? Porque esse também é o (escreve ao quadro)*

$$máx\{r \in N \mid r \times \propto^2 \leq a - a_3 \times \propto^3\}$$

Formador: *Vê se tá claro isso que eu escrevi aí.*

André: *Por que o a_3?*

Formador: *O a_3 não é 2?*

André: *Ah tá...*

Eduardo: *Mas $a - a_3 \times \propto^3$ vai dar zero, não?*

Felipe: *Não, dá o 35 que a gente calculou ali...*

Eduardo: *Ah... Sim... Verdade.*

Formador: *Isso aqui* $(a - a_3 \times \propto^3)$ *é o resto...*

Eduardo: *Ah... É o resto...*

Formador: *Entendeu?*

Eduardo: *Entendi...*

Formador: *É esse* b_2 *aqui, que é o primeiro resto.*

André: *Por que o senhor considerou um* $r_\propto$ *e (...) só um* $\propto_n$*?*

Formador: *Onde?*

André: *Aqui, no "enezão"*

Formador: *Esse aqui, no caso é 3.*

André: *Mas eu tô falando lá naquele primeiro lá, no "enezão".*

Formador: *Não... Porque o primeiro eu tô procurando o expoente. Na verdade, aqui é o maior expoente tal que* $\propto^N$ *cabe em a.*

André: *Está determinando o quociente.*

Formador: *Daqui pra frente vai ser diferente. Só ele primeiro que é o expoente. Daqui pra frente vão ser os coeficientes. Então, o próximo passo, qual é? Eu tenho que determinar o próximo resto. Aí o próximo resto vai ser quanto?*

Bruno: *3.*

Formador: *O que eu tenho que fazer? Eu tenho que fazer isso aqui de novo e esse resto anterior eu vou dividir por 16 e tenho que ver esse novo resto. Vou só repetir isso aqui. Esse aí. (Professor repete o procedimento utilizando a mesma notação utilizada ao longo da aula. Ao invés de colocar diretamente o resto, ele utiliza recursivamente os passos anteriores).*

Felipe: *Poderia colocar direto o 35?*

Formador: *Poderia. Eu tô botando só pra... Entendeu?*

Felipe: *Aham.*

Formador: *Então isso aqui vai dar quanto?*

Participantes: 3

Formador: *Eu tenho que ver agora o algarismo a_1. Será que o algarismo a_1 é 3? O algarismo a_1 é quanto?*

Felipe: *Zero.*

Formador: *Zero. Concordam? Para determinar o algarismo a_1 eu tenho que determinar qual o maior múltiplo de 4 que cabe ali dentro. Então qual é a forma para determinar qual é o algarismo? (Faz o registro no quadro)*

$$máx\{r \in N \mid r \times \propto^1 \leq a - a_3 \times \propto^3 - a_2 \times \propto^2\}$$

Formador: *Eu tô escrevendo isso aqui mas, como o Felipe falou, não precisava escrever isso tudo. Só tô escrevendo isso tudo para guardar esse registro do que a gente tá fazendo. Finalmente eu vou ver quem é o algarismo a_0. O algarismo a_0 vai ser o 3? O que concluímos? Concluímos que se eu pegar a parte inteira desse número e escrever na base 4, isso vai ficar 2203.*

André: *O senhor falou, mas em algum momento eu me perdi. Se fosse por aquele outro algoritmo não chegaria nisso?*

Formador: *Chegaria, claro. Mas chegaria primeiro no 3.*

André: *E isso é problemático?*

Formador: *Não é problemático, mas é que eu não poderia continuar esse algoritmo para a parte não inteira.*

André: *Ah... Então essa é a única diferença?*

Formador: *Para isso aqui que é um número inteiro, os dois algoritmos são igualmente válidos. Só que esse generaliza e o outro não. Porque agora eu vou continuar dividindo. Só que agora eu vou dividir por décimos (no caso da base dez).*

André: *Se temos um número com infinitas casas decimais não temos um início para aquele algoritmo.*

Formador: *(Sobre o primeiro algoritmo apresentado na aula) Isso. Você tem que começar pelo início, não pelo fim. Mas pode acontecer de você não ter um início, ou seja, uma menor ordem. Pode não ter uma menor ordem.*

André: *Pode não ter nem por onde começar, né?*

Formador: *Isso. Tem que começar pelo outro lado. Porque agora a gente vai seguir o mesmo procedimento aqui.*

André: *Ah, tá! Saquei!*

Formador: *Só para fechar, observar que, na verdade, o que a gente obtém é isso aqui (procurar no caderno de campo). Só para generalizar, o que a gente obtém com esse algoritmo vai ser isso aí. Em cada passo k, o que tá escrito aqui "a menos a diferença do somatório" não é nada mais do que aquele resto. Igual o André falou, esse aqui são os quocientes das divisões e esses aqui são os restos. Mas como eu obtenho esses restos? Eu pego o número... Primeiro eu vou obter a maior ordem, aí eu vou pegar o número que eu tenho e vou ver qual é o maior múltiplo dessa potência da base que cabe dentro do número. Depois eu pego e subtraio isso e vejo o que sobra, aí eu obtenho o resto. Aí eu vou ver qual é o maior múltiplo da próxima potência que cabe ali dentro. Aí subtraio aquilo também. Assim sucessivamente. Estou efetuando divisões e obtendo os quocientes e os restos e obtenho essa forma. E o que a gente vai fazer daqui pra frente com a parte não inteira é continuar dividindo. Só que... O que a gente vai fazer agora? Até agora isso que eu fiz foi fazendo a divisão mesmo, pegando quociente e o resto. Na primeira etapa eu peguei 163, dividi por 64 aí deu 2 e sobrou 35. Depois eu peguei esse 35 e dividi por 16 e deu 2 e sobrou 3. Depois eu peguei 3, dividi por 4, deu 0 e sobrou 3. Então repare que os divisores são as potências positivas de 4. Agora eu vou continuar daqui pra frente. Os divisores continuam sendo potências de 4. Só que agora eu tenho que efetuar um negócio dividido por ¼? Como é que eu vou fazer isso? Essa é uma coisa que a divisão não dá conta disso. Por isso que quando a gente faz a conta... Vou falar disso daqui a pouco. Então o que que eu teria que fazer? Eu teria que fazer 7/8 dividido por ¼. Dá pra eu efetuar a conta utilizando esse algoritmo da divisão euclidiana? Não. O que eu faço na verdade? Para eu não ficar com um divisor que é uma fração eu multiplico por alguma coisa aqui e multiplico por alguma coisa aqui. Por isso que quando a gente faz uma divisão euclidiana para determinar um* *número em representação decimal eu vou colocando aquele zero do lado. Por exemplo, se eu for dividir 18 por 8. O que eu vou fazer aqui?*

Participantes: 2...

Formador: Dá 2. E o próximo passo? O que eu vou fazer com esse 2?

Eduardo: Multiplica por 10.

Formador: Eu ponho um zero aqui. Colocar um zero aqui significa multiplicar por 10. Então o que eu tô fazendo é multiplicar por 10 para poder efetuar essa divisão. Da onde vem "botar o zero do lado"?

André: Tá acabando, né?

Formador: Tá, mas eu vou voltar a isso depois. Daqui a pouco a gente vê. Por enquanto é só isso aqui. Isso aqui tá claro? O que a gente fez foi isso. Só quero dizer que eu vou continuar fazendo isso aqui, só que agora eu não posso dividir por ¼ ou 1/16. Então vou ter que arrumar outro esquema. Vamos continuar seguindo esse caminho aqui. Agora eu já sei a representação na base 4 da parte inteira do número. Agora eu quero representar o 7/8. Como eu vou representar o 7/8? Eu tenho que descobrir o próximo algarismo que é o primeiro algarismo depois da vírgula. Esse primeiro algarismo eu vou ter que pegar a unidade e subdividir em quantas partes?

Participantes: 4.

Formador: 4. Então, vamos lá. Eu vou pegar o 7/8. A próxima coisa que eu tenho que determinar é o a_{-1}*. O* a_{-1} *é o primeiro algarismo depois da vírgula. Então eu tenho que achar qual é o maior múltiplo de ¼ que é menor que 7/8. Aqui é o zero, aqui o um. O 7/8 está aqui (fazendo uma representação na reta numérica esboçada no quadro).*

André: 3.

Formador: 3. Tá legal? Eu tô continuando exatamente o mesmo processo que eu estava fazendo antes. Aqui vai dar 3. Então eu sei que esse número é 2203,3... alguma coisa. Agora, como é que eu continuo? Eu tenho que olhar para esse resto aqui e dividir em 4 novamente.

Camila: *É só esse pedacinho ou o número todo?*

Formador: *Não. Só esse pedacinho aqui.*

Camila: *Achei que era dali até chegar no (... impossível compreender do áudio...)*

Formador: *Não, você vai dividir isso aqui tudo por 4 e ver quantas vezes esse pedacinho cabe aqui dentro.*

Camila: *Ah, tá! Porque pra mim o pedacinho era só aquilo (o 7/8 talvez).*

Formador: *Não. Tem que olhar para aquele pedacinho, mas eu tenho que ver quantas vezes 1/16 cabe ali dentro.*

André: *Vai dar 2.*

Formador: *É, mas como a gente chega nesse 2? Porque esse foi fácil de olhar, fazer no olho. Mas de forma geral como que a gente faria? Eu pegaria esse 7/8 e vou determinar o que eu chamei aqui (material didático utilizado em aula) de* b_{-2}*. O* b_{-2} *eu tenho que pegar o 7/8 e subtraí ¾ que seria esse pedacinho aqui, esse próximo resto. O* b_{-1} *seria o próprio 7/8 que seria o resto que sobrou da etapa anterior. Que a parte anterior esgotou a parte inteira. Então sobrou seria a parte não inteira. Agora eu fiz a primeira subdivisão da parte não inteira. Aí sobraria esse próximo resto aqui. Por isso tá essa notação. Esse resto aí seria essa conta aí que eu tenho que fazer. Essa conta aí dá quanto?*

Felipe: *1/8*

Formador: *Agora, para determinar o* a_{-2} *o que eu tenho que fazer. Eu tenho que fazer quantas vezes 1/16 cabe ali dentro. Que vai dar o que? Dois. Aí eu já vejo de olho que isso aí vai acabar, vai dar zero. Mas se eu não visse de olho, qual seria a próxima etapa? Eu teria que calcular o que? O próximo resto. O próximo resto, como eu calcularia? Eu pegaria esse resto anterior que é o resultado dessa conta e subtraio duas vezes 1/16. Nesse caso aí isso aqui vai dar zero. Se não desse zero eu teria que continuar. Eu chego a conclusão que esse número aí é escrito dessa forma.*

Bruno: *Professor... Fiquei com uma dúvida naquilo que você escreveu ali. Primeiro, por que* b_{-2}*,* b_{-3}*? Eu sei que sobra o resto e tal..., mas eu não* *entendi... (Aparentemente é uma dúvida pura e exclusivamente relativa a notação utilizada, pede para justificar as escolhas dos índices de b).*

Formador: É o próximo resto.

Bruno: A gente tinha parado no b_1.

Formador: É. Aí tenho que ver o b_{-1}. O b_{-1} é o que sobra dessa parte aí. O b_0é o próprio 3.

Bruno: Ah!

Formador: O que sobrou daqui foi 3, aí depois sobrou 3 o algarismo que deu aqui foi zero. Então o b_0 seria o próprio 3. Em cada etapa eu pego esse resto subtraindo tudo o que foi somado nas etapas anteriores. O b_{-1}seria o resto subtraindo isso aqui tudo. O b_{-1} é o próprio 7/8. Mas é só essa notação que eu tô usando, mas não é a única notação possível.

Pesquisadora: Não precisava separar a parte inteira da parte não inteira. Pode fazer direto. O algoritmo é o mesmo.

Formador: É, não precisava separar a parte inteira da parte não inteira. Poderia fazer continuamente.

Bruno: Eu entendi, mas na minha cabeça seria o b_1. E não b... Seria b_{-1} e não $b{-2}$.

Formador: Não, é porque o b_{-1}seria o próprio 7/8, porque aí pegaria o número a, que o número a inteiro é o que? É 163+7/8. Então eu pegaria o número a e subtrairia isso aqui, tipo essa definição aqui. Eu subtraí esse somatório nessa etapa e subtrairia isso tudo e sobraria o 7/8. Na folha eu escrevi assim, só que aqui eu pulei essa etapa. Mas você entendeu o procedimento?

Bruno: Aham.

Formador: Agora vamos demonstrar um teorema...

André: A continuação daqui para a parte não inteira é a mesma aqui?

Formador: É. Isso mesmo. É essa mesma coisa que eu tô fazendo aqui. Subtraindo do jeito que eu escrevi ali, entendeu?

Pesquisadora conversa baixo com o Professor (impossível de identificar no áudio) perguntando saber se está claro para os Participantes o que está sendo feito.

Formador: *Mas vocês estão entendendo que o que eu tô fazendo é ver quantas vezes ¼ cabe, certo? Quantas vezes o 1/16 cabe, ou não? Sim? André, o que houve que você tá rindo?*

André: *Porque, na verdade, professor, eu tô com essa dúvida desde a apresentação do Wellerson daquele algoritmo ótimo, o algoritmo de Euller e o outro que eu esqueci o nome, a Pesquisadora até fez isso no quadro. (Alguém comenta: "De estimativa") Isso! O de estimativa e o de Euller. Aquele por estimativa a lógica por trás dele eu consigo entender numa boa, e na hora, inclusive, desenvolver as contas. Mas o de Euller, o ótimo, eu resolvo mecanicamente.*

Bruno: *Exato!*

André: *Mas entender o que eu tô fazendo... Sinceramente não sei...*

André: *Resolvo mecanicamente, mas... essas coisas do zero... Eu não sei. E o pessoal falou assim: 'Pô! Mas o cara tem que saber isso!' aí dá até um certo... Como que eu vou falar que eu não sei um troço desse...*

Formador: *Mas é normal não saber isso aí porque isso aí não é objeto de estudo no curso de licenciatura. Quando a gente começa o curso de licenciatura a gente pressupõe que a pessoa já saiba isso.*

André: *Na verdade isso nunca foi questionado ao longo de minha vida acadêmica.*

Formador: *No ensino fundamental a gente aprende isso mecanicamente, aí faz o curso de licenciatura e nunca mais vê isso e supõe-se que você, como professor, saiba. Nunca se estudou aquilo. Mas o que eu acho legal para entender esse algoritmo a gente pode fazer daqui a pouco, uma coisa que é um desafio pra mim também, que é fazer uma conta em outra base. Por isso que eu acho que esse negócio de outra base legal. Não é que vocês vão ensinar a dividir na base quatro no ensino básico, mas isso nos força a pensar na base 10.*

Camila: *A entender de verdade...*

Formador: *É... Porque nos tira da posição de conforto.*

Formador: *Não pense que eu faço isso mecanicamente. Eu tenho que ficar pensando. Na base 10 é automático, a gente faz sem pensar. Mas o negócio é fazer isso pensando.*

André: *O problema é maior que esse, porque mesmo na base 10 eu não consigo entender o que significa!*

Formador: *Mas a maneira de entender o que significa é pensar em outra base porque na outra base você é obrigado a raciocinar. Não é a única maneira possível, mas é uma maneira que eu acho boa de te fazer pensar nisso. Eu só vou mostrar esse teorema antes, mas daqui a pouco eu quero fazer isso, discutir o algoritmo da divisão. O que o Leandro (ex-mestrando do programa que estava presente em um seminário realizado semanas antes o qual a turma estava presente) falou aquele dia foi sobre o algoritmo para números inteiros mesmo... Não foi algoritmo para...*

André: *Não, é... Ele fez aquilo para números inteiros só que aí surgiu a discussão do cara saber ou não o que significa a divisão. Aí a Joana (a doutoranda que apresentava o seminário que Leandro estava presente) sugeriu o outro algoritmo (por estimativas) que pra mim fica bem mais fácil de se entender o que tá sendo feito. Mas o algoritmo ótimo, sinceramente, pra mim não é claro. Eu não sei o que você... Aquele negócio de você pegar... Baixa um número, agora você divide, quando não dá joga o zero... O que tá significando cada coisa com relação a unidade, dezena, centena pra mim não faz sentido nenhum.*

Formador: *Vamos fazer isso. Eu quero discutir esse algoritmo da divisão para números não inteiros também, o que significa botar a vírgula, o que significa botar o zero do lado do resto, entendeu? Isso aí que eu quero discutir. A gente pode discutir para números inteiros também. Eu acho que uma coisa que nos esconde um pouco o que tá acontecendo naquele algoritmo é o seguinte: naquele algoritmo, em cada passo, tem uma subtração que tá implícita e no algoritmo por estimativa você faz aquela subtração. No algoritmo por estimativas, o que você faz? Você* *vai fazer uma divisão lá e basicamente chuta um quociente. Aí você multiplica aquele quociente pelo divisor e vai ver o que falta dividir.*

André: *Hoje em dia eu só ensino aos meus alunos somente por esse, o por estimativa. Não exclusivamente ele, mas eu só uso ele porque é o algoritmo que eu sei o que tá acontecendo, porque se eu passar o outro, vou simplesmente vou reproduzir uma forma mecânica.*

Formador: *O que a gente pode fazer é fazer o outro algoritmo registrando a conta como se fosse por estimativas. Todo mundo tem a mesma dúvida que ele? Ou vocês entendem perfeitamente o algoritmo (da divisão)? Pode falar...*

Camila: *Perfeitamente, não...*

André: *Eu tinha até vergonha!*

Bruno: *Posso falar uma coisa? Eu entendo, mas eu também assumo uma certa falha porque eu dando aula nunca expliquei assim... Exatamente os passos. Até sei, mas nunca falei "olha só, essa vírgula aqui é por causa disso, disso e disso. (???) para ficar claro pro aluno*

Formador: *Exatamente, então olha só... Por isso que eu acho bom começar pelo algoritmo por estimativas. Porque pelo algoritmo por estimativas os passos ficam mais claros.*

Pesquisadora: *Até porque pelo de estimativas você pode chegar no ótimo.*

Daniel: *Acho que ninguém entende porque nunca ninguém parou pra pensar nisso...*

Formador: *Mas o mais importante para a gente refletir é assim: ninguém parou pra pensar não é culpa da pessoa. É que o sistema de formação de professores não nos leva a pensar nisso. Assim como, também estou devendo uma aula sobre frações também que eu vou dar. O sistema não nos leva a pensar nessas coisas, é porque tem um buraco na formação dos professores. Quanto ao conteúdo, porque o conteúdo... É aquilo que a Deborah Ball fala, que o conteúdo, que o Klein fala, que todos esses autores falam que é uma coisa importante... Que o conteúdo da educação básica é tido como um conteúdo trivial. Um conteúdo* *desprovido de profundidade. Um conteúdo superficial. Então supõe-se que quando a gente começa um curso universitário a gente já saiba isso tudo. Então, o curso universitário não aborda isso. Porque supõe-se que você já aprendeu aquilo, e você vai abordar outras coisas, outra matemática. Só que quando você se forma é aquilo que você não aprendeu em nenhum curso universitário e nem no ensino básico. Isso é o que o Klein chama de dupla descontinuidade, que é quando você entra, você aprende outra coisa e quando você sai você vai ensinar outra coisa também. De fato, o professor nunca estudou o que ele vai ensinar.*

Daniel: *Isso vale para quase todos os conteúdos que são ensinados no ensino básico. Você vai dar aula com aquilo que você aprendeu na escola. Então você reproduz todos os erros que aprendeu e continua fazendo a mesma coisa.*

Formador: *Você imita o seu professor.*

Daniel: *Exatamente, e não só o professor da graduação, mas também o professor do ensino básico e não um olhar mais crítico sobre a matemática.*

Formador: *Exatamente. Um dos objetivos do curso de licenciatura é mudar o seu olhar para aqueles conteúdos. Você não sair da licenciatura com o mesmo olhar que você tinha como aluno e o que acaba acontecendo é exatamente isso. Você sai com um olhar lá...*

André: *Acho que o mesmo, o mesmo é um pouco ignorância... O cara teria que ter feito a licenciatura toda de (???) ...*

Formador: *Eu sei, mas a licenciatura, essa mudança de olhar na licenciatura, ela acontece quase como por acidente. A licenciatura não tem um objetivo de "vamos pegar isso aqui e discutir". Que é o que eu tento fazer um pouco nesse curso. Só que não dá pra fazer muito assim porque tem que abordar os conteúdos de análise, mas hoje a aula é isso. Que é o que deveria ter na licenciatura, na minha opinião.*

Bruno: *É... eu acho que assim... Não é nem a questão do conteúdo, à parte, vamos dizer assim, específica do conteúdo. Pegar e discutir bastante o saber pedagógico do conteúdo. Não é saber fazer a divisão, porque isso* *aí é um conteúdo específico. Mas como que a gente pode ensinar isso. Aí não tem essa discussão.*

Formador: *Mas eu acho que... Como você pode ensinar aquilo já é uma etapa posterior. Tem uma etapa anterior a essa que é: que aspectos do conteúdo são relevantes para o ensino. Esse é o saber pedagógico do conteúdo. Isso não é necessariamente "como ensinar". Essa coisa de "que aspectos do conteúdo são relevantes para o ensino" é o que que você tem que prestar atenção sobre o conteúdo para ver como você vai ensinar. São duas etapas. Isso que eu tô fazendo aqui são coisas que você não vai ensinar assim. Mas são coisas que são reflexões importantes que vão fundamentar a maneira que você vai ensinar. Mas você não vai chegar e ensinar assim. Eu acho que as duas coisas têm que estar incluídas aí (no curso da licenciatura), mas não tem nem uma e nem outra. O objetivo disso aqui é entender representação decimal, agora você não vai ensinar assim "base 4, somatório, não sei o que..."... Mas é um tipo de aprofundamento sobre representação decimal que não é visto. Eu acho que um primeiro passo é você entender matematicamente isso aqui. Aí depois, como que eu vou ensinar isso? Como que eu vou concretizar isso na escola? Isso já é uma segunda etapa, na minha opinião. Entendeu, Bruno, o que eu tô querendo dizer?*

Bruno: *O que você vai tirar disso aí para poder ensinar.*

Formador: *É, como você vai colocar isso na linguagem dos alunos.*

Bruno: *Antes disso tem que selecionar o que você levar.*

Formador: *Exatamente, você tem que olhar para como você recorta o conteúdo e depois como você coloca aquilo num contexto pedagógico. Na licenciatura a gente fica só com a visão matemática, não tem a visão sobre o saber pedagógico do conteúdo, né, no caso. Vocês querem fazer uma divisão? Só para... Vamos? Aula que vem a gente vai continuar com isso aí porque não vai dar pra acabar hoje não. Tudo bem... (Comentários sobre aulas extras.) Então fala aí uma divisão aí, mas primeiro eu queria sem vírgula. Tanto faz se é exata ou não exata, porque o importante são os passos.*

André: *Pode ser esse mesmo, né? De 163 por 4.*

Formador: *O importante é o meio do caminho, e não o final. Depois eu queria fazer uma com vírgula. A próxima etapa da aula seria isso aí mesmo. E depois demonstrar esse teorema. Normalmente, como você faria isso? Botaria aquela parada aqui (tipo de apóstrofe utilizado no algoritmo 'ótimo' da divisão) que eu não sei para quê que serve.*

André: *Exatamente! Todos esses por quês. Fica tudo obscuro.*

Formador: *O que é esse negócio aí?*

Camila: *É só pra mostrar que você tá dividindo o 16 e não o número todo. Só para marcar.*

Eduardo: *Na verdade, o 160.*

Formador: *Exatamente, na verdade é o 160 que você tá dividindo.*

Bruno: *16 dezenas.*

Formador: *Entendeu? É 16 dezenas. Eu proponho fazer o algoritmo por ordem (ótimo ou de Euller) só que registrando o algoritmo por ordem como a gente faria com o algoritmo por estimativas. Então, na verdade, quando eu tô dividindo 16 eu ponho esse negócio para marcar o 16, na verdade eu tô dividindo o 160 por 4.*

Igor: *Por que não divide logo o 100 que cabe várias vezes o 4 no 100.*

Formador: *Poderia ser também. Entendeu?*

Igor: *Sim, mas a ideia não está sendo analisar o ótimo?*

Muitas pessoas falando junto. Na confusão pode-se ouvir Pesquisadora falando: "Por isso que começamos com as 16 dezenas." e Eduardo dizendo: "Depois seria só somar os resultados" e o Bruno: "Entendi".

Pesquisadora: *A gente começa com 16 dezenas porque começando com 1 centena você não chegaria no ótimo, chegaria no 25. O ótimo chegaria logo no 40.*

Formador: *É, você não chegaria porque o ótimo chegaria direto na representação decimal do número sem ter que efetuar nenhuma adição. Por estimativas, como o Igor propôs, você chegaria no 25 aqui, só que no* *final você teria que somar. Assim você não vai ter que somar nada. Mas poderia começar pelo 100.*

André: *Tá, mas... Isso, pra gente é aquela parada. Mas como falar isso para uma criança?*

Pesquisadora: Por isso que a gente prefere começar pelo de estimativas.

Formador: *É.*

André: *Entendeu o problema?*

Formador: *Entendi.*

Pesquisadora: Olha só, mas a gente começando pelo de estimativas o aluno pode cansar de fazer por estimativas e pensar: "Ah... Posso começar logo do maior possível"

André: *Então a gente tá convergindo a um ponto em que está condenando o ensino de divisão pelo algoritmo ótimo, o início.*

Formador: *Eu acho, eu tenho essa opinião.*

André: *Porque isso que a gente tá discutindo agora de pegar uma centena ou pegar 16 dezenas pra falar para uma criança que tá começando a aprender a dividir não tem cabimento. Acho que não dá.*

Formador: *Você acha que não dá o que?*

André: *Para a criança entender uma coisa dessas.*

Eduardo: *Ainda mais que resgata o que ela viu no fundamental I (primeiro segmento do ensino fundamental, 1º ao 5º ano de escolaridade). Porque no fundamental I ela vê o quadro valor de lugar.*

Camila: *Mas geralmente é fundamental I isso.*

Pequena confusão e não dá pra compreender o que está sendo dito especificamente.

Formador: *Mas eu acho, assim, pra criança, eu não sei quando que ela vê isso, em que série é.*

Camila: *Na segunda.*

Formador: *Mas eu acho natural, tipo, esse tipo de conta assim desse tamanho de números. Beleza, você tem esse número, você não precisa... A gente já* começa querendo formalizar os passos do algoritmo. Tipo, você quer dividir isso aqui por 4. Por onde você começaria? Você tem 163 balas para dividir para 4 crianças. Você poderia, por exemplo, uma criança poderia até, sei lá, isso eu tô chutando porque eu nunca dei aula disso. Vocês podem falar melhor que eu. Poderia até representar, tipo o Igor falou, poderia começar pelo 100? Poderia. Pode até registrar vários diferentes.

Eduardo: *Eu acho que, pela força que tem o algoritmo da multiplicação, da adição e da subtração, alguns alunos, por exemplo, começariam com o 3.*

Formador: *Isso é até uma coisa que a Cydara colocou lá, por que num eu começo pelo menor e no outro eu começo pelo maior?*

Formador: *Na verdade você poderia começar de qualquer jeito. Depois o que você iria obter? Você iria obter resultados parciais que no final você teria que somar. Essa é a questão do algoritmo por estimativas. Você vai obtendo resultados parciais. E você vai registrar esse resultado, somar tudo e do lado de cá (embaixo do dividendo) você vai subtraindo pra ver o que falta, o que sobra. Como é que você faria do jeito que o Igor falou? Começando pelo 100. Você colocaria aqui 25 aí poderia botar assim, ó (escreve a subtração do 163 com 100). Vocês acham que isso daí uma criança conseguiria entender?*

Camila: *Sim, porque eles já viram esse menos aí.*

André: *Mas quando eu aprendi não tinha isso de dividir por 100 não... (risos) Era assim, ó. "Um dá por 4? Não. Então junta com o 6 e forma o 16. Agora divide o 16."*

Formador: *É por isso que você aprendeu sem ter raciocinado naquilo que você estava fazendo,*

André: *É, mas se bem que isso aí eu... Na hora de ensinar, infelizmente eu cometia esses crimes porque isso é quase que um crime.*

Formador: *Eu acho assim também.*

André: *Fazia a mesma coisa até conhecer o de estimativas.*

Formador: *É, no começo sempre deixa a criança dividir livremente. O que eu fiz aqui? Eu tenho 163 balas e dividi por 4 crianças. Este exemplo não é politicamente correto...*

Bruno: *Faz assim, são 163 reais pra dividir pra 4 filhos.*

Formador: *Isso! Então, primeiro, o que você faz? Divide primeiro 100 reais aí vai ficar 25 pra cada filho. Acabou? Não. Ainda sobrou um pedaço. Aí a tem que continuar chutando. Qual é o próximo chute? Pode dar qualquer chute, pode ser qualquer coisa. André: Não pode é passar!*

Formador: *É... Não pode passar. Se passar, você fala: 'mas será que dá? vai passar...' faz a conta do mesmo jeito.*

Pesquisadora: Mas no ótimo a gente também fazia isso. A gente ia chutando valores... Ah... 5... Não, 5 passou, então vou tentar o 4.

Camila: *É. A gente fazia no cantinho, mas não podia colocar!*

André: *Mas o que eu tava dizendo do ótimo que quando a gente dividia o 16 por 4, o que representava esse 16? Esse 16 não é o número 16.*

Formador: *Não, é 16 dezenas, o número 160.*

André: *Exatamente!*

Formador: *O que faz aqui? Se você fosse fazer, na verdade faria assim. Mas na verdade não é isso (16\4=4), tá fazendo isso (160\4=40) e aqui ficou (resultado).*

André: *Sim. Aquele 4. 16 dezenas dividindo por 4 dá 4 dezenas, então tem que colocar 4 dezenas.*

Formador: *Isso.*

Pesquisadora: Quando a gente não tem uma boa compreensão do algoritmo as respostas às vezes ficam como 4 no resultado final e o zero some. Aquele zero parece mágica, justificar aquele zero pra criança, do 40, a resposta é 40, mas por quê? O zero ali no meio parece que some. Porque é 4. E não 40. Aliás, em uma questão onde aparece o zero no meio, ninguém sabe justificar aquele zero ali no meio.

Formador: Isso que eu ia falar. O pior é quando tem esse procedimento e aparece um zero no meio.

Participantes: O 404 dividido por 4 dá 101...

Formador: O problema é quando aparece o zero no quociente. Mas é pior ainda quando não tem o zero no dividendo e aparece no quociente. Você tem que pular uma casa.

Eduardo: Você não pode justificar isso com o quadro valor de lugar?

Formador: Pode.

Eduardo: Porque diria... Ah... Vamos dividir o 1, por exemplo. Ah! O 1 está ocupando a casa das centenas, então se tiver um número aqui será em centenas.

Formador: Com certeza, mas o quadro valor de lugar é uma outra maneira de representar a mesma coisa que você tá fazendo.

Camila: Quando eu estava dando aula pro primeiro segmento que aparecia esse zero no meio, eu falava pra eles que a gente tava multiplicando por zero, daí zero vezes zero dá zero e fica zero e 'baixa' a próxima casa depois assim como fazíamos com o 1, com o 2... Só que a gente tá multiplicando por zero...

Formador: Mas eu acho que a questão é assim: você tem várias coisas que são abreviações do procedimento para tornar o registro mais prático. Esse foi simples, já acabou, né? Se não tivesse acabado aqui, você ia ter que somar alguma coisa. Mas como aqui é zero, esse zero não vai fazer diferença na soma, mas você não registra o zero... Você registra o resultado da soma aqui. Estão entendendo? Vamos fazer outra conta...

Pesquisadora: 1000 dividido por 9.

Formador: Como a gente pode fazer essa conta?

Pesquisadora: Com o ótimo acho que fica difícil. Pelo ótimo.

Formador: Baixa o 10, vai dar 1.

André: Mas aí isso representa 10 centenas?

Formador: *Isso. Então, na verdade a gente colocaria 1 aqui. Mas esse 1 na verdade é o que?*

Participantes: 1 centena.

Formador: *1 centena. Exatamente. Era isso que eu estava querendo dizer ali. Mas aí sobra 1. Esse "sobra 1" do lado de lá é resultado de uma subtração. Então, na verdade, o que eu tô fazendo é essa subtração. Que vai dar quanto? Certo? Repare que eu tô fazendo o algoritmo ótimo, mas registrando como se fosse por estimativas. Aqui não precisava ser o 100, eu poderia colocar qualquer número menor do que 100. A diferença é que no final não teria uma soma que não teria um monte de número zero. Vai dar uma soma aqui no final, só que com um monte de zero.*

Daniel: *Nessa discussão, se é por estimativa ou o ótimo, eu acho que é interessante começar por estimativa, mas o grande problema do algoritmo ótimo não tá em ver se a criança vai assimilar de primeira tratar o algoritmo ótimo ou não. Acho que é exatamente isso, a gente botar o 16 ou não. O 163, você pode distribuir as centenas, não, então você pode distribuir 16, no caso qual o máximo de dezenas que você pode distribuir? Acho que o problema é assimilar o que você tá fazendo. Eu acho que dá pra criança assimilar já o ótimo porque as vezes você começa a perceber já que não precisa ficar tirando a menor quantidade possível. Então eu acho que o maior problema tá em realmente justificar. Realmente, a gente começa pelos algarismos de maior ordem, mas coloca ali o 4 primeiro, mas não sabe que tá colocando ali 4 dezenas. Tipo, a gente pode distribuir uma centena pra 4 pessoas? Não pode, por isso que a gente não vai baixar a centena. Baixa o 16 exatamente por isso. Então...*

Formador: *É, mas isso aí que você tá falando, eu acho que depende um pouco da turma. Principalmente nas séries iniciais eu acho bom deixar pra eles, tipo: "como vocês fariam isso daí?"*

Daniel: *Com a minha experiência, o pouco que tenho, de dar aula para o sexto ano, eu já mostrei, eu não cheguei a formalizar...*

Formador: *Você tá dando aula para o sexto ano agora?*

Daniel: *Tô. Eu não sei, de fato, como eles estão aprendendo, mas acho que eles já registram, a subtração, eles não deixam de registrar. Porque eu já percebi, em algumas divisões, no sexto ano as divisões são mais automáticas, pessoal já tá... (???). Mas você ouve falar "baixa o 16, aí multiplica, 4 vezes 4, 16". Aí quando, não neste caso, mas normalmente quando a gente "empresta um", né? Aí fala, "4 vezes 6, 24", aí tem o zero pra 30, aí eu noto que eles já não estão habituados com esse tipo de raciocínio.*

Formador: *Mas talvez seja porque é Pedro II (CPII), não é? Porque no Pedro II as séries iniciais têm um cuidado maior.*

Daniel: *Eu não sei como tá dando nas séries iniciais, mas eu acho que tem uma diferença no processo da divisão sim.*

Formador: *Pois é, mas nas séries iniciais do (colégio onde o Daniel trabalha) é um caso bastante particular. Você não pode tomar como uma regra. Porque os professores das séries iniciais lá são geralmente bem formados. O problema é que os professores das séries iniciais em geral não sabem isso aí.*

Daniel: *Eu não sei porque eu não tenho contato com o material didático das séries iniciais. Não sei se alguém aqui tem contato. Ainda é desenvolvido dessa forma ou já mudou?*

Formador: *Acho que mudou um pouco.*

Gabriela: *Eu tenho acompanhado a coordenação dos professores do PNAIC (se referindo ao Plano Nacional de Alfabetização na Idade Certa), eu fui em alguns encontros e o que eu vejo, é o que os próprios professores falam, que o peso eles (???) que eles acabam deixando para depois é o que eles não sabem porque que isso tá acontecendo. Eles passam daquela mesma forma só pro aluno saber.*

Formador: *Mas e o material didático do PNAIC aborda isso, ou não?*

Gabriela: *Aborda.*

Daniel: *Por isso que eu perguntei do material didático, se o professor sabe ou não, se o material didático vai fazer isso, fazer uma aula só de... Acho que a gente acaba passando.*

Formador: *Mas isso que eu tava falando outro dia no seminário. Que quando eu trabalhei no pró-letramento uma vez, um programa parecido com o PNAIC, era exatamente o que a Gabriela falou. A gente trabalhava com os professores das séries iniciais, mas não era nem isso aí não... O algoritmo da adição! Você falava "vai um" eles não sabiam o que que era esse "vai um". O "vai um" pra eles parecia uma regra. E eu fiquei muito impressionado com o trabalho com os professores como a gente ensinava quadro valor de lugar... Da adição! Eles ficavam maravilhados, porque isso fortalecia a segurança deles. Eles ficavam em pé na sala de aula na frente de um monte de crianças sobre uma coisa na qual eles não tinham a menor segurança. Melhorar o conteúdo matemático melhora a autoestima do cara, porque o cara fica totalmente desguarnecido ali na frente. Esse é o problema das séries iniciais.*

Pesquisadora: Quando justifica, parece (não é possível identificar no áudio) Murmúrios incompreensíveis no áudio.

Pesquisadora: Fazendo 1000 dividido por 99 fica mais interessante.

Formador: *Tá... Como é que fica?*

Pesquisadora: Aí "baixa" o 10

Camila: *Não, o 100.*

Formador: *100.*

Pesquisadora: Então, mas como seria já tirando as centenas? Aí vai dar dez

(sobrar).

Formador: *Isso, aí eu vou colocar 10 aqui... E vou subtrair aqui.*

Pesquisadora: Isso.

Formador: *Que normalmente você já colocaria o resto 1 aqui do lado direto.*

Pesquisadora: E um ali também. Aí, bom. Sobra 10. Mas 10 não dá pra dividir por 99. Então, sem botar esse dez, geralmente dá 1.

Formador: *Ah! Sim. Normalmente você faria 1, sobra 1 e acabou. Por que que eu tenho que colocar o zero ali? Não é isso que você tá falando?*

Pesquisadora: É.

Camila: *É, porque quando isso acontecia é que estava dividindo por zero, mas ainda tem mais um. Pra, depois, poder acabar a conta que só acaba quando não tem mais ninguém pra tirar.*

Formador: *Mas só pra acabar esse registro aqui, a gente colocou 100 aqui e sobrou 100 aqui. Aliás (corrige no quadro). Aí eu vou continuar dividindo, vou dar 10 aqui, aí vou subtrair 90, aí vai dar 10, aí vou colocar 1, subtrair por 99 e aqui vai dar resto 1. Então a gente vai fazer essa conta aqui. O algoritmo por estimativas você não precisa colocar exatamente esses números. Você pode colocar número qualquer. A diferença é que colocando esses números que são os ótimos, essa adição pode ser compactada. Você tá efetuando uma adição só que essas adições se representam compactadas, numa etapa só. E as subtrações você não representa. Aí coloca aquele "maldito negocinho" aqui. Então tem várias abreviações de coisas que você tá fazendo, mas não representa. Em relação ao que o Daniel falou, o importante é explicitar essas coisas. Essa coisa de que você não deve começar pelo algoritmo ótimo, na minha opinião, não é bom começar pelo algoritmo sem explicar o que tá acontecendo de fato. Agora, eu como professor, minha postura na turma seria propor... Montar a divisão sem dar a resposta. Propor pra turma que a turma tenha estratégias, e eu acho que aparecerão estratégias. Claro que não começar com um número difícil. Você tem uma situação em que você tem não sei quantas balas pra dividir... Como você faria? Na prática? Como você resolveria o problema? E daí vão começar a surgir as estratégias. André: Meu problema é que eu ia começar distribuindo uma pra cada um.*

Formador: *Até isso é uma estratégia, mas aí você pode aproveitar e perguntar se será que não tem uma estratégia mais esperta? Para não ter tanto trabalho?*

Daniel: *Eu queria comentar sobre a barreira do algoritmo. Não acho que seja uma barreira nenhum algoritmo em si. A barreira é como ele é ensinado.*

Formador: *Eu acho que a barreira é como o algoritmo é registrado.*

Daniel: *Exatamente. Eu acho que os dois estão envolvendo as mesmas coisas, só que um, a diferença é que um tá perguntando qual é o máximo de vezes que cabe...*

Formador: *Exatamente. Esse aqui (ótimo) é um caso particular desse.*

Daniel: *Eu até concordo que trabalhar o por estimativas primeiro facilitaria. Mas dizer que algoritmo o ótimo não deve ser explicado ou só deve ser ensinado o por estimativas... Eu não acho válido. Os dois fazem a mesma coisa, a diferença é que a pergunta pro ótimo é "qual o número máximo de vezes que cabe".*

Formador: *Eu sei, mas tem uma coisa que tem que ficar claro pra criança é que todos os que a gente tá fazendo é baseado na ideia de "quantas vezes cabe". Mas o que tem que ficar claro pra criança é que o ótimo... Isso aí não é o único possível.*

Daniel: *Isso eu concordo. Principalmente explicar o que é que tá acontecendo no ótimo. Que seria o mais saudável.*

Formador: *Explicar tipo assim: "se você fizer daquele jeito tá errado?" Não! Você pode fazer daquele jeito ali também.*

Eduardo: *Parece que a maior vantagem do por estimativa é ela forçar você a procurar fazer cada vez mais rápido.*

Pesquisadora: Eles vão buscar isso...

André: *O problema é quando eles têm a mecânica do ótimo. Aí eles têm rejeição pelo de estimativas. Eu fiz um teste e falei para eles fazerem por estimativas aí eu disse "tenta fazer assim" (por estimativas) e eles disseram: "ah..., mas esse aí é muito grande... O outro é mais rápido."*

Professor: *É, mas se a criança vem assim desde o... Quanto maior a série, tipo ensino médio, é muito mais difícil. Mas se a criança vai desde as séries...*

André: *Eu fiz isso com o sexto ano também.*

Camila: *Mas ensinar a um aluno que não sabe, ele vai preferir o por estimativas.*

André: *Sim, mas o problema é que cria uma rejeição pelo fato de ele ser longo e ele não quer fazer essa procura para cada vez chegar mais perto do ótimo.*

Pesquisadora: Uma sugestão é, por exemplo, ele vai fazer 1000 dividido por 99 e vai achar 1. Aí você pergunta: "Ué? 1 vezes 99 vai ser perto de 1000?". Eles vão ficar meio balançados. Eu fiz isso com alunos da graduação como engenheiros e eles não sabiam por quê. Eu dizia que 1 vezes 99 fica muito longe do 1000, deve ser um número muito maior. Aí eles ficavam pensando e diziam que não sabiam por que tinham que colocar aquele zero.

André: *Mas aí também, são pessoas que estavam predispostas a aprender mais do que as crianças.*

Professor retoma o centro da aula em um momento de revisitar o procedimento utilizado para determinar a representação posicional de um número apresentado em sua representação fracionária de maneira geral, e apresenta a problemática que será discutida na aula seguinte que é a demonstração do fato de que a série encontrada converge, de fato, para o número que se busca determinar. Além disso, comenta que na próxima aula será demonstrado um teorema que é fundamental para o ensino básico: um número é racional se, e somente se, tem representação finita ou periódica.