UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ANDERSON ALMEIDA DE SOUZA

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA TRANSIÇÃO DO ENSINO MÉDIO PARA O SUPERIOR

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – IM/UFRJ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA TRANSIÇÃO DO ENSINO MÉDIO PARA O SUPERIOR

Por

ANDERSON ALMEIDA DE SOUZA

Orientadora: Dra. Lilian Nasser

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino De Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

RIO DE JANEIRO

2016

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática – IM/UFRJ
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação de Mestrado

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA TRANSIÇÃO DO ENSINO MÉDIO PARA O SUPERIOR

elaborada por
Anderson Almeida de Souza

como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática
Comissão Examinadora:

Lilian Nasser, Ph.D
(Presidente/Orientador)

Márcia Fusaro Pinto, Ph.D (UFRJ)

Angela Rocha dos Santos, Dra (UFRJ)

Wanderley Moura Rezende, Dr (UFF)

Rio de Janeiro, 21 de Março de 2016

DEDICATÓRIA

À minha família, minha base e sustentação.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois sem Ele não há vitórias.

À minha família, por me dar todo apoio.

A todos os meus amigos de verdade, pelos momentos felizes que passamos juntos.

À professora Lilian Nasser, por toda paciência e dedicação.

Aos professores do Mestrado em Ensino de Matemática, pela parceria e por compartilhar seus conhecimentos.

Aos professores Angela, Márcia e Wanderley, por suas contribuições como participantes da banca.

RESUMO

DIFICULDADES NO PROCESSO DE AQUISIÇÃODO CONCEITO DE FUNÇÃO NA TRANSIÇÃO DO ENSINO MÉDIO PARA O SUPERIOR

Estapesquisa procura analisar o processo de construção do conceito de função na transição do Ensino Médio para o Superior. O estudo foca nos obstáculos epistemológicos encontrados pelos estudantes nesse processo, revelando suas imagens conceituais e "acidentes do conceito" (tradução nossa paramissconcept), que dificultam a compreensão de função.Considerando que aimagem conceitual é construída a partir de experiências vividas pelo indivíduo e pode conter propriedades e/ou interpretações contraditórias, a metodologia de pesquisa constou da elaboração e aplicação de um questionário a um grupo de alunos do Ensino Médio e Licenciandos, a fim de conhecer o que eles entendem por função, revelando suas imagens conceituais. Os resultados desta investigação apontam que os estudantes têm dificuldades em relacionar as diferentes representações de uma função, admitem apenas a existência da função como expressão algébrica ou um gráfico, usam sua imagem conceitual como a definição do conceito, consideram as regras ou fragmentos do conceito como a própria definição, entre outras dificuldades. A partir desta análise, percebemos a necessidade de desenvolver uma sequência didática que ajudasse os estudantes a construir o conceito de função, considerando a possibilidade de ensinar Matemática a partir de exemplos práticos, sem a repetição direcionada de exercícios para a fixação de algoritmos ou regras de cálculo. Ao contrário, a ênfase é no entendimento de ideias e princípios fundamentais do conceito, além de sugerir um caminho natural para o estudo das funções reais. Para isso, usamos a metodologia da Engenharia Didática na elaboração, aplicação e validação dos resultados. Por fim, afirmamos, com base nos resultados analisados, que a "problematização" do ensino de funções, no processo de aquisição deste conceito proporciona ao estudante um ensino de melhor qualidade. Além de fazê-lo perceber a matemática existente em seu cotidiano e incentivar investigação matemática, é possivel criar um horizonte de possibilidades, gerando melhores condições para o desenvolvimento de uma imagem conceitual bem definida e coerente com a definição do conceito.

Palavras chave: ensino e aprendizagem de matemática, função, imagem conceitual, obstáculos epistemológicos, Engenharia Didática.

ABSTRACT

This research seeks to analyze the process of construction of the concept of function in the transition from high school to Superior Education. The study focuses on the epistemological obstacles encountered by students in the process, revealing its conceptual images andmissconcepts that hinder the understanding of function. Whereas the conceptual image is built from experiences of the individual and may contain properties and / or contradictory interpretations, the methodology of this research includes the development and implementation of a questionnaire to a high school group of students and undergraduates in order to know what they mean by function, revealing their conceptual images. The results of this research show that students have difficulties in relating the different representations of a function, only admit the existence of the function as an algebraic expression or a graph, use their conceptual image as the definition of the concept, consider the rules or concept fragments as the definition, among other difficulties. From this analysis, we realized the need to develop a didactic sequence to help students to build the concept of function, considering the possibility of teaching mathematics from practical examples, without the repetition of directed exercises for the training of algorithms or calculation rules. On the other hand, the emphasis is on the understanding of the main and fundamental ideas of the concept, suggesting a natural way for the study of real functions. For this, the methodology of Didactic Engineering has been used in the design, implementation and validation of the results. Finally, we affirm, based on the analyzed results, that the contextualization in the process of acquisition of this concept provides the student a better quality of learning. Besides making him realize the existing mathematics in his daily life and encourage mathematical investigation, it is possible to create a horizon of possibilities, generating better conditions for the development of a well-defined conceptual image, coherent with the definition.

Keywords: mathematics teaching and learning, function, conceptual image, epistemological obstacles, Didactic Engineering.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. Introdução

A pesquisa no campo do Ensino de Matemática vem se intensificando ao longo dos anos e a cada artigo, dissertação e tese lidas temos a oportunidade de conhecer eentender como os conceitos matemáticos estão sendo desenvolvidos nas escolas e universidades brasileiras. Por meiodas pesquisas é possível buscar maneiras de desenvolver técnicas que auxiliam o ensino e, como consequência, contribuir para o aprendizado em todos os segmentos escolares.

As dificuldades e adaptações ocorridas durante a vida acadêmica são muitas, e é notório que as transições de um nível escolar para outro requerem uma atenção especial.Percebemos que na transição do Ensino Médio para o Superiorexiste uma grande exigência na mudança da postura acadêmica de nossos alunos, principalmente em relação à matemática, pois os estudantes saem de um ambiente que não prioriza a abstração, mas procedimentos matemáticos e entram em um universo que requer um pensamento matemático avançado e dinâmico (ROBERT e SCHWARZENBERGER, 1991).

Muitos conteúdos do ensino superior são vistos pela primeira vez no início do curso ou, quando são anteriormente vistos na Escola Básica, são abordados de uma forma diferente nesta nova fase escolar. O ensino de Cálculo é um forte exemplo e, por ser tão importante no desenvolvimento acadêmico, há vários estudos diagnósticos que buscam identificar as concepções de estudantes sobre os tópicos desta disciplina, por exemplo, estudantes de álgebra tentam encontrar $f(x + a)$ por adição de *"a"* no fim da expressão da f(x), em vez de substituir "x + a" na função (CARLSON, 1998).

As pesquisas relativas ao processo de ensino-aprendizagem no nível superior, há anos, vêm levantando dados importantes que contribuem para a melhoria deste segmento. No ensino da Matemática e, particularmente, no ensino de Cálculo, pesquisas, como a de Rezende(2003), apontam uma grande dificuldade epistemológica no ensino desta disciplina e mostram que ela está entre as que apresentam alto índice de fracasso dentro da Universidade.

Um dos possíveis motivos para esse fato se deve a lacunas de aprendizagem da matemática básica. Por exemplo, quando o conceito de limite é definido, percebe-se grande dificuldade na interpretação do conceito de função:

> Estudos revelam que a aprendizagem do conceito de função é complexa, com muitos alunos de alto desempenho (por ex., alunos recebendo grau A em Cálculo), com fraca compreensão de funções. (Breidenbach, Dubinsky, Hawks, & Nichols, 1992; Carlson, 1998; Thompson, 1994a, apudMarilyn Carlson and Michael Oehrtman. Research Sampler 9: Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function, tradução nossa)[1]

Sendo assim, se torna muito importante identificar as possíveis causas que levam professores e alunos a terem grande dificuldade no ensino e aprendizagem de Cálculo, principalmente envolvendo o conceito de função.

Sabe-se que o conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática e seus fundamentos estão presentes desde as noções mais básicas às mais avançadas desta ciência. Ponte (1990) comenta sobre a origem e o desenvolvimento deste conteúdo ao longo da História da Matemática, seu surgimento como um instrumento matemático indispensável para o estudo dos fenômenos da natureza, mostrando que seu desenvolvimento histórico foi um processo longo e delicado. Confirmando essas ideias, os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam que:

> o estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. (BRASIL,2006, p.121)

Leinhardt e Sten (1990) apud Meira (1993, p.64) afirmam que o conceito de função é muito importante devido:

> a) ao poder organizador do conceito de funções desde a matemática do primeiro grau a tópicos mais avançados no segundo grau e graduação;

[1]Studies have revealed that learning the function concept is complex, with many high performing undergraduates (e.g., students receiving course grades of A in calculus) possessing weak function understandings (Breidenbach, Dubinsky, Hawks, & Nichols, 1992; Carlson, 1998; Thompson, 1994a)

> b) às conexões entre os sistemas simbólicos, enquanto fontes para melhor compreensão de gráficos e da álgebra. (MEIRA,1993, p.64)

Contudo, alguns estudos têm revelado que a aprendizagem do conceito de função é complexa (Carlson, 1998), envolvendo inúmeras concepções que podem assumir diferentes sentidos em diferentes contextos, com vários significados, produzidos pelos alunos, de acordo com a forma em que este tema se desenvolve no ambiente escolar.

O estudo de função decorre da necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências e generalizar. O conceito de função vai muito além do que uma simples manipulação algébrica, restrita a uma fórmula previamente apresentada. Devemos então, no papel de professores, mostrar aos alunos que este tema é muito mais abrangente e possui inúmeras aplicações dentro e fora da matemática.

Pela experiência em sala de aula, sabemos que por muitas vezes, o primeiro contato com o conceito de função, geralmente no 9° ano do ensino fundamental, é feito sem conexão com a realidade, de forma tradicional e baseado nas sequências empregadas nos livros didáticos. Os conteúdos são, de modo geral, tratados de forma independente e sem conexão alguma, por exemplo, da função afim com as progressões aritméticas e da função exponencial com as progressões geométricas.

Em outros casos a função é tratada apenas como uma “máquina” que gera valores, dando a impressão deque o uso das funções se restringe ao campo algébrico e mecanizado. Os alunos são convidados frequentemente a manipular equações algébricas,tendo que computar respostas a tipos específicos de perguntas, fazendo com que entendam a correspondência de um número a outro como função apenas quando há uma fórmula, uma expressão explicitamente definida.

Analisando os desafios enfrentados por alunos ao iniciar os estudos em Matemática avançada, Robert e Schwarzenberger (1991) apontam mudanças quantitativas:

> mais conceitos, menos tempo, necessidade de mais reflexão, mais abstração, menos problemas significativos, mais ênfase em demonstrações, maior necessidade de aprendizagem versátil, maior necessidade de controle pessoal sobre a aprendizagem. A confusão causada pelas novas definições coincide com a necessidade de mais pensamento dedutivo abstrato. A junção dessas mudanças quantitativas gera uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado. (ROBERT e SCHWARZENBERGER, 1991, p. 133, tradução nossa)[2]

De fato é necessário que haja mudanças no processo de ensino-aprendizagem de função. Porém, para mudar algo neste panorama é preciso entender, primeiro, como os alunos assimilam e interpretam este conceito. Sabemos que os estudantes possuem uma grande dificuldade em conceber o conceito de função, por isso, procuramosidentificaras dificuldades com esse conceito ecomoestas podem ser minimizadasse forem exploradas no Ensino Médio. Destacamosalgumas características consideradas positivas para a aprendizagem desse conceito (TRINDADE, 1996):

- a sua aplicação em outras áreas do conhecimento;
- as diferentes maneiras de representar uma mesma função (verbal, analítica e gráfica);
- a contextualização e aplicação de função a situações do cotidiano como agentes facilitadores da aprendizagem.

Pretendemos investigar os vícios adquiridos no processo de ensino que levam a uma visão estreita e excessivamente mecânica sobre função, pois construir adequadamente o conceito de função é muito importante para o domínio do pensamento matemático avançado (TALL, 1992), necessário ao desenvolvimento acadêmico superior.

Sabemos que em muitas escolas de Ensino Médio brasileiras, o trabalho realizado não é suficiente para suprir as necessidades destes estudantes ao ingressarem na faculdade. Há uma grande diferença nos enfoques dados ao conceito de funçãona matemáticada Escola Básica e no ensino de Cálculo. Em alguns casos, o conceito de função não é bem construído, causando dificuldades, por exemplo, na aprendizagem da teoria dos limites e das aplicações das derivadas.

---

[2]more concepts , less time, need more reflection, more abstract , less significant problems, more emphasis on demonstrations, greater need for versatile learning , the greater need for personal control over learning. The confusion caused by new definitions coincide with the need for more abstract deductive thinking . The junction of these quantitative changes generates a qualitative change characterizing the transition to the advanced mathematical thinking .

Como dito anteriormente, consideramos a importância do conceito de funções no Ensino de Matemática e a forma como este conceito vem sendo desenvolvido para analisar as etapas que constituem o processo à compreensão deste conceito. No capítulo 2 vamos trazer algumas pesquisas realizadas e teorias consideradas importantes no desenvolvimento do estudante no aprendizado de funções. Com esse apoio teórico, pretendemos revelar as imagens conceituais (VINNER, 1991; TALL & VINNER, 1981a) de um grupo de estudantes do Ensino Médio e de graduandos sobre conceito de função. Para isto, elaboramos um questionário, apresentado junto à metodologia usada, capítulo 3.

Com os dados do questionário aplicado pudemosidentificar algumas imagens conceituais e o que chamamos de “acidentes do conceito” (tradução nossa para missconcepts), os quais seriam os possíveis causadores de certas dificuldades enfrentadas por esses estudantes na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior e, com isso, foi possível elaborar e aplicar uma sequência didática para o Ensino de Funções, apresentada no capítulo 4.

Sendo assim, para validar nossa pesquisa,responderemos no capítulo 5, as seguintes perguntas:

- ✓ Que obstáculos epistemológicos surgem, em geral, durante o processo de aquisição do conceito de Função?
- ✓ Quais são as imagens conceituais evocadas por alguns alunos do E.M de uma escola particular, durante este processo?
- ✓ Que estratégias podem ser sugeridas aos professores do E.M para ajudar seus alunos a construir o conceito de função?

2. Base Teórica

Levando em consideração a importância de conhecer e discutir as concepções dos nossos alunos sobre o conceito de função e de identificar o que acreditamos e nomeamos seremos “acidentes do conceito”,analisamos algumas pesquisas realizadas neste âmbito.

Nossa base teórica conta com pesquisadores bastante conhecidos por suas contribuições no campo da educação matemática, sendoos principais nomes: David Tall, Shlomo Vinner e Anna Sierpinska. Porém, será necessário o suporte teórico de outros não menos importantes, como por exemplo, Jacques Bergeron e Nicolas Herscovivs, que introduzem em nossa pesquisa alguns conceitos importantes sobre o processo de compreensão dos objetos matemáticos estudados por nós.

No capítulo introdutório do artigo *On understanding the notion of function*(1992),Anna Sierpinska destaca a importância de definir o que seria a “compreensão” esperada por parte dos alunos, levantando as seguintes questões: ”o que desejamos que a compreensão seja? Ou: o que queremos dizer com ‘compreender? ’ e, o que queremos dizer com compreender funções?”. Para responder a estas perguntas, e nortear nossa pesquisa neste sentido, trazemos a definição encontrada em um comunicado publicado em 1982, com título de “*Níveis na compreensão do conceito de Função”*, de Bergeron e Herscovics.

Neste comunicado os autores comentam existir um modelo didático de compreensão divido em níveis: compreensão intuitiva, matematização inicial, abstração e formalização. Estes seriam os estágios da compreensão de um conceito na mentedo aluno. Em um destes níveis, o da matematização inicial, eles afirmam:

> A palavra ‘inicial’ aqui é de grande importância, já que no começo da matematização, um conceito é confundido com o procedimento que leva à sua construção. É apenas gradualmente que o conceito ganha precisão, se destaca do procedimento e alcança uma existência própria em nossa mente, essa progressão descreve o processo de abstração. (BERGERON E HERSCOVICS, 1982, p-1)

No caso específico de Função, os autores sugerem, usando os mesmos níveisde compreensão, que haja um contato gradativo com seus fundamentos deste conceito.

Inicialmente o aluno seriaumobservador e experimentador, fazendo reflexões intuitivas do comportamento de variáveis presentes em seu cotidiano, formando um “pré-conceito de função”. No segundo nível, este aluno deverá ser capaz de quantificar essas variáveis pré-concebidas, seja por tabelas, gráficos ou fórmulas, dando destaque para as relações de dependência existentes.

No nível seguinte o estudantedeve desenvolver a capacidade de diferenciar as relações comuns das Funções, entendendo a relação de dependência entre as variáveis, para que finalmente, no quarto nível possa dar significado às definições e notações estudadas.

> Ambas as distinções são essenciais na construção do conceito generalizado de função[...] Por exemplo, representações gráficas podem proporcionar uma análise se os dados estão simplesmente na forma de tabela [...] As representações algébricas se mostram essenciais na construção de funções, não apenas elas produzem um resumo de um grande numero de dados, mas elas conduzem a noção de “regra” bem melhor que as representações numéricas e gráfica. (BERGERON E HERCOSVICS, 1982)

Seguindo esse raciocínio, acreditamos que para abstrair o conceito de função é preciso, entre muitos aspectos cognitivos, dar significado e relacionar as definiçõe de função e suas representações, isto é, o aluno precisa saber quea expressão algébrica, o gráfico, as tabelas e outros, representam um mesmo conceito e cada uma destas separadamente não o esgotam de forma alguma.

Assim sendo, procurando definir o mínimo necessário para se compreender as funções, buscamos descobrir o que de fato precisa ser identificado pelo aluno e quais seriam as dificuldades encontradas neste percurso. No mesmo artigo *On understanding the notion of function*, Anna Sierpinska(1992) nos apresenta uma análise epistemológica do conceito de função que nos ajuda a identificar alguns detalhes da construção do conceito de função na mente dos alunos.

Neste artigo, a autora comenta que:

> Os estudantes têm tido problemas em fazer a ligação entre as diferentes representações de funções: fórmulas, gráficos, diagramas, descrições verbais de relações; em interpretar gráficos; em manipular símbolos relacionados a funções como por exemplo: $f(x)$, $x \rightarrow y$, sen $(x+1)$, etc. A linguagem utilizada em relação às funções não ajuda. Assim: “$f(x)$” serve tanto para o nome da função quanto para o valor da função f no ponto x. Em situações espontâneas, os estudantes utilizam um simbolismo

> e uma linguagem diferentes. Para dizer que o valor da função em 2 é 3 eles escreveriam: “x(2) = 3”. Isso seria lido como: “Coloque 2 na fórmula da função e calcule. Você acha um número.” (SIERPINSKA, 1992, p25, tradução nossa).[3]

Sierpinska destaca o que ela chama de “saltos” que, por sua própria definição, seriam as mudanças qualitativas importantes relacionadas ao conhecimento matemático na mente humana, os saltos acontecem das velhas formas de conhecimento para as novas. Uma vez que o aluno conhece uma nova forma, ele deverá contemplar as velhas formas de conhecimento para alcançar a compreensão. É neste determinado momento que devemos perceber se algo o atrapalha ou impede de conhecer essa nova forma. Este impedimento é conhecido como obstáculo epistemológico.

A noção de obstáculo epistemológico é de fundamental importância para o desenvolvimento do conhecimento no âmbito das pesquisas e foi introduzida e apresentada por Gaston Bachelard como sendo "*Uma resistência do pensamento ao pensamento"* e

> É em termos de obstáculos que se assenta o conhecimento científico, que é no ato mesmo de conhecer que aparecem, por uma espécie de necessidade funcional, as perturbações e as lentidões, nas quais se mostram as causas de estagnação e de inércia do pensamento, as quais ele denomina obstáculos epistemológicos. Um obstáculo epistemológico se incrusta no conhecimento não questionado. (IGLIORI, 2002).

A partir das constatações feitas por Bachelard, outros pesquisadores dedicaram-se ao estudo sobre os obstáculos epistemológicos à aprendizagem da Matemática. Trindade (1996) afirma que Brousseau (1976) foi o primeiro a transferir para a Matemática a noção de obstáculo epistemológico de Bachelard (1938), assinalando que um obstáculo se caracteriza por um conhecimento, uma concepção, e não por uma dificuldade ou uma falta de conhecimento, que produz respostas adaptadas num certo contexto e, fora dele, produz respostas falsas.

Segundo Trindade, os obstáculos se manifestam pela incompreensão de certos problemas ou pela impossibilidade de resolvê-los com eficácia, ou pelos erros que, para

---

[3]Students have had trouble making the connection between the different representations of functions : formulas , charts, graphs , verbal descriptions of relationships ; in interpreting graphs ; manipulating symbols related functions such as: f (x) , x → y sin (x + 1) , etc. The language used in relation to the functions does not help. Thus: " f (x) " serves both the function name as to the value of the function f at x . In spontaneous situations , students use a symbolism and a different language. To say that the function value of 2 is 3 they would write : "x (2) = 3" . This would read as : " Place 2 in the formula of the function and calculate . You find a number. "

serem superados, deveriam conduzir ao estabelecimento de um novo conhecimento. Ao estudar o conceito de obstáculo epistemológico no âmbito da história da ciência, Bachelard percebeu que alguns conhecimentos chegam mesmo a impedir o progresso do saber. Sendo assim, vamos considerar os obstáculos epistemológicos como sendo uma resistência a um determinado conceito, causada por uma incompreensão ou interpretação equivocada deste conceito. Por exemplo, uma imagem conceitual mal construida ou incompleta pode ser a causa de um obstáculo epistemológico.

Neste mesmo artigo, o pesquisador apresenta alguns dos obstáculos epistemológicos relativos às funções, identificados por Sierpinska (1988). Consideramos de grande valia retomarmos esta discussão, destacando dois desses obstáculos, a saber:

1- Matemática não se refere a problemas práticos e somente relações descritíveis por fórmula analítica são dignas de receberem o nome de funções.

2- A crença, ainda hoje presente no ensino de funções, de que somente relações que possam ser descritas por fórmulas analíticas merecem o nome de função.

Os dois obstáculos citados anteriormente parecem idênticos, mas é preciso olhar com cuidado para perceber que são complementares de certa forma, poispara muitos a matemática é definida por contas e fórmulas e essa crença invade as salas de aula e a maioria dos alunos assume a mesma postura em relação à Matemática.

No caso do conceito de Função temos a impressão que muitas vezes acontece uma confusão entre sua definição e a sua forma algébrica ou gráfica, de modo a considerarem a mesma coisa, ou seja, se expressão algébrica define o conceito de função, então somente relações que possam ser descritas por fórmulas analíticas merecem o nome de função.

Esse obstáculo epistemológico é um dos muitos a serem superados. Podemos afirmar então que identificar as funções como sendo apenas expressões analíticas é um obstáculo histórico causado pelo foco de atenção na pesquisa de instrumentos para descrever relações funcionais (TRINDADE, 1996). Dessa forma defendemos a intensificação de uma abordagem que apresente aos alunos as várias representações de uma função.

> Várias são as formas de representar funções, as mais conhecidas eutilizadas, pelo menos na escola, são tabelas, gráficos e fórmula analítica. Aconsciência das limitações de cada uma das representações e o fato que elasrepresentam uma limitação e o mesmo conceito geral são condiçõesfundamentais de entendimento de funções. (SIERPINSKA, 1992, tradução nossa).[4]

Nota-se então, uma forte preocupação em saber distinguir a definição do conceito de suas representações, além de tudo aquilo que advém do conceito estudado, pois seguindo esta ideia fica claro que a menor perturbação durante o processo que conecta a definiçãocom as formas de representar o conceito prejudica sua compreensão. Duval (2009) se preocupou com os registros de representação de um conceito, afirmando que:

> não pode haver compreensão matemática sem se distinguir um objeto de sua representação, pois jamais deve-se confundir objetos matemáticos (números, funções, retas) com suas representações (escritas decimais ou fracionárias, símbolos, gráficos, desenhos de figuras) que parecem apenas ser o meio, de que o indivíduo dispõe, para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para se tornarem visíveis ou acessíveis a outros, pois, em matemática, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática. (DUVAL, 2009, p. 15)

De fato, as concepções sobre um conceito não são suficientes para dar conta de todo o conteúdo, por exemplo, no caso de funções quando uma tabela não revela todo domínio de uma função.

O processo de compreensão do conceito de funções, comentado anteriormente, também faz parte da pesquisa de David Tall e Shlomo Vinner sobre um modelo do processo cognitivo usado para analisar os fenômenos no processo da aprendizagem deste conceito. No artigo *Concept definition, concept image and the notion of function (1983)*esse modelo é apresentado por Vinner que constrói uma análise cognitiva desses fenômenos por meio de três noções: figuras mentais, a imagem conceitual e definição do conceito. Segundo ele:

> Para cada conceito, assumimos a existência de duas células diferentes na estrutura cognitiva (para evitar confusão, não queremos dizer células biológicas). Uma célula é para a definição

---

[4]There are several ways of representing functions, the most known and used, at least in school, are tables, graphs and analytical formula. The aware of the limitations of each of the representations and the fact that they represent a limitation, and the same general concept are fundamental understanding functions

> do conceito e a segunda é para a imagem do conceito. (VINNER,1983, p.294, tradução nossa)[5]

Para fundamentar nosso estudo vamos definir as três noções comentadas anteriormente. Segundo o próprio Shlomo Vinner, as *figuras mentais* constituem o conjunto de todas as figuras (imagens) que já foram associadas a um conceito na mente de um indivíduo, ele usa a palavra 'figura' no sentido mais amplo da palavra e inclui qualquer representação visual do conceito (mesmo símbolos). Assim, um gráfico de uma função específica e os símbolos ‘y = f (x)’ podem ser incluídos (em conjunto com muitas outras coisas) na imagem mental do conceito de função de um individuo.

Ao termo *Imagem Conceitual estão atreladas* as associações não verbais efetivadas em nossa mente quando em contato com o nome de determinado conceito. Estão incluídas, nesse sentido, suas representações visuais, figuras mentais, impressões e experiências que podem ser traduzidas em formas verbais mediante essas associações (VINNER, 1991). Sendo assim:

> Devemos utilizar o termo imagem conceitual para descrever a estrutura cognitiva total associada ao conceito, o que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos associados. É construída no decorrer dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando sempre que o indivíduo encontra novos estímulos e maturidade (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

A *Definição do Conceito*(VINNER, 1991) é entendida como uma definição verbal, que explica com precisão o conceito de uma forma direta. Vinner afirma também que as definições conceituais, onde o conceito foi introduzido por meio de uma definição formal, dada pelo professor ou retirada de um livro, permanecerão inativas, na maioria dos casos.

A expressão *imagem conceitual evocada* é utilizada para designar a parte da imagem conceitual que é ativada em um momento particular para definir ou representar determinado conceito. Dependendo da situação, inúmeras imagens aparentemente em conflito poderão ser evocadas.

Dessa forma, como a imagem conceitual é construída a partir de experiências vividas pelo indivíduo ela pode conter propriedades e/ou interpretações contraditórias e, até

---

[5]For each concept, we assume the existence of two different cells in the cognitive structure (to avoid confusion, we do not mean biological cells). A cell is for the concept definition and the second is for the concept image.

mesmo, estar um pouco distante da definição do conceito. Por esta razão acreditamosque a formação de uma imagem conceitual utilizando múltiplas representações de um conceito permiteque o aluno tenha mais experiências relacionadas a esse conceito e, por conseguinte, aumente a possibilidade de chegar à compreensão esperada.

> (...) adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele. Saber de cor uma definição de um conceito não garante seu entendimento. Entender, assim supomos, significa apresentar uma imagem conceitual. Determinado significado deve estar associado às palavras. (VINNER, 1991, p. 69, tradução nossa)[6]

Para David Tall(1991), existe um conflito muito grande no processo de ensino-aprendizagem da matemática: a definição do conceito dada pelo professor nem sempre condiz com a imagem conceitual do aluno sobre determinado conteúdo. No caso das funções não é diferente.A dificuldade em formar uma imagem conceitual apropriada e os efeitos negativos de uma imagem conceitual imprópria, que apresenta conflitos em potencial, pode atingir seriamente o desenvolvimento de uma teoria.

Sonia Barbosa Camargo Igliori (2007) apresenta os resultados de uma pesquisa que revelou certos elementos inapropriados que compõem a *imagem conceitual* de alguns alunos, relativa ao conceito de função:

> a) O gráfico de uma função deve ser contínuo;
> b) A noção de continuidade como algo que não se interrompe;
> c) O gráfico de uma função deve ser linear quando é solicitado traçá-lo por dois pontos fixos.
> d) Aceite da função constante com incômodo diante da definição formal percebida como variação. (IGLIORI, 1997, p.)

Um estudo realizado por Tall e Vinner (1981) nos mostra alguns aspectos sobre as imagens conceituais de estudantes relacionadas ao conceito de limites, tanto de uma sequencia, quanto de uma função.Em um questionário aplicado para alunos do primeiro ano do $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^3 - 1}{x - 1} \right) = 3.$ curso de Matemática, foi $\lim_{x \to a} f(x) = c$ solicitado que eles explicassem o significado da expressão e dessem uma definição para .

Dentre algumas observações, osautores afirmam que:

[6]acquire a concept means forming a conceptual image for him . Decorate a definition of a concept does not guarantee your understanding. Understand, so we suppose, means presenting a conceptual image. Particular significance should be associated with the words.

- O limite de uma função é muitas vezes considerado como um processo dinâmico, em que x se aproxima de a, fazendo com que f (x) se aproxime de c, considerando $f(x)\neq c$ parte da imagem conceitual;

- A utilização de expressões como "se aproxima", "chega perto", "tende a" levam à ideia de que $f(x)\neq c$, sendo esse um fator de conflito potencial.

E de maneira geral destacam que:

> Tal como acontece com o limite de uma sequência, o limite de uma função é muitas vezes considerado como um processo dinâmico, em que x se aproxima de um a, fazendo com que f (x) chegue perto de c. Mais uma vez os alunos podem considerar f (x) = c como parte de sua imagem conceitual. (TALL; VINNER, 1981, p. 159, tradução nossa).[7]

O ensino de Função é, geralmente, realizado da mesma maneira: o primeiro contato dos alunos com o conceito acontece no 9°ano e é introduzido por relações entre elementos de dois conjuntos, seguindo uma regra específica. Após alguns exercícios envolvendo as relações é dada a definição formal do conceito e inicia-se um longo processo de fixação das funções mais simples (função afim, modular, quadrática, exponencial e logarítmica).

Nesse processo de fixação são vistas as expressões algébricas e "fórmulas", os gráficos, as condições de existências e outras "estratégias" usadas para resolverem determinados tipos de exercícios. Porém fala-se pouco da relação de dependência entre variáveis, mostrando que quando uma cresce/decresce a outra segue o mesmo caminho, ou um caminho inverso. Para Rezende (2004), discutem-se (caso existam) sobre os zeros da função, mas não os seus pontos críticos, que são, em verdade, os seus pontos ótimos. A noção de função é, desse modo, estabelecida não no contexto da "variabilidade", mas, em termos de uma correspondência estática entre os valores das variáveis "x" e "y".

Podemos dizer que, na maioria das vezes, os alunos têm acesso às diferentes representações de uma Função, porém sem uma conexão entre elas. É notória a grande importância da correlação entre as diferentes representações de uma função e, além dessa correspondência, que haja a contextualização ou problematização do conceito, para que o mesmo não pareça um conteúdo estático, "engessado", onde uma função sejaapenas uma "máquina" que relaciona dados e esses dados, quando colocados no plano cartesiano,

---

[7]As with the limit of a sequence, the limit of a function is often considered as a dynamic process, where x approaches a, causing f(x) to get close to c. Once again students may consider f(x) = c as part of their concept image.

formem sempre um reta. É de suma importância que o estudante consiga compreender quais são as variáveis, a dependência entre elas e o que caracteriza a relação funcional entre elas. Rezende (2004) confirma esse fato:

> os alunos não conseguem definitivamente “enxergar” as quantidades variáveis envolvidas no problema nem tampouco a relação funcional entre elas. Identificar o que varia, e em função de que varia é, sem dúvida, o primeiro passo para a resolução desse tipo de questão. (p.21)

De acordo com os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio, no currículo de Matemática da Educação Básica referente ao ensino de funções deve-se:

> [...] garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações-problema de matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 257)

Com a experiência adquirida há algum tempo de magistério, percebemos que o ensino de funções pode ser relacionado diretamente com muitos outros assuntos da Matemática, como por exemplo:

- A geometria analítica, que utiliza um sistema de eixos coordenados para a representação de seus gráficos, com a manipulação algébrica;

-A trigonometria que tem boa parte de seu estudo e aplicações fundamentados nas funções trigonométricas e seus gráficos;

- As progressões aritméticas e geométricas, cujas fórmulas de termo geral e partes gráficas carregam em si o conceito de função;

- A matemática financeira, a qual pode relacionar as variáveis existentes nos juros simples ou compostos por meio de funções.

Para Rezende (2004) um caminho natural para o estudo das funções reaisseria caracterizá-las conforme a maneira que variam, estabelecendo-se, desse modo, uma verdadeira conexão do conceito de função com a realidade e sua origem histórica. E questiona: será que este caminho é seguido na educação básica? E completa, pelo que vimos até aqui, parece que não.

Um forte exemplo deste fato está nos estudos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral que são introduzidos pelo conceito de função e não possuem boa aceitação por parte dos alunos, fato causado talvez, por carregam grandes dificuldades e algumas noções equivocadas sobre o conceito de função desde o Ensino Médio.

Portanto, com base nesses estudos, vamos apresentar nesta pesquisa o que foi realizado para responder às nossas questões norteadoras:

- ✓ Que obstáculos epistemológicos surgem, em geral, durante o processo de aquisição do conceito de Função?
- ✓ Quais são as imagens conceituais evocadas por alguns alunos do E.M de uma escola particular durante este processo?
- ✓ Que estratégias podem ser sugeridas aos professores do E.M para ajudar seus alunos a construir o conceito de função?

3. Procedimentos Metodológicos

Acreditamos que durante o processo de aprendizagem de um determinado conceito existem vários elementos que levam o estudante à compreensão. Nesse caminho, muitos objetos, matemáticos ou não, são conectados na mente do aluno, formando um conjunto das figuras mentais com tudo aquilo que possa representar ou definir um determinado conceito.

Neste contexto, percebemos que alguns desses objetos não são adequados ou não condizem com a definição do conceito, criando um impedimento que gerafalhas no processo de aprendizagem. Sabemos, também, que as funções estão presentes em outras disciplinas, como a Química, a Física e Biologia. Entretanto, mesmo com essa variedade de assuntos relacionados, o ensino de funções não vem dando suporte aos alunos para sua efetiva aprendizagem ou flexibilidade esperada para a resolução de problemas diversos. Muitos alunos têm dificuldades em trabalhar com funções e poucos parecem compreender seu conceito, o que pode interferir no aprendizadode outros conceitos, por exemplo, nos estudos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral que são introduzidos pelo conceito de função.

Sendo assim, buscamos revelar alguns desses objetos que compõem a imagem conceitual de estudantes do Ensino Médio e Superior por meio de um questionário com cinco questões discursivas sobre o conceito de Função.O questionário inicial foiinspirado na importância de os alunos atingirem o entendimento do conceito de função, vista a necessidade de conhecer e identificar os principais problemas com os quais os alunos se deparam ao estudar funções.

Algumas pesquisas como a de Anna Sierpinska, David Tall, Sholomo Vinner nos ajudaram na elaboração das perguntas, na categorização e interpretação das respostas obtidas. Adotamos tambéma Engenharia Didática, metodologia queé utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e é uma forma de organizar a didática com intuito de revelar informações do processo de aprendizagem do público investigado.

Aaplicação dametodologia da Engenharia Didática em nossa pesquisa consta da seção 3.2, e ocorreu desde o início da primeira etapa, da elaboraçãodo questionário. Este foi criado a partir de nossas experiências anteriores e de observações de eventos recorrentes em sala de aula, como a grande dificuldade de relacionar as representações de uma função. Como dito anteriormente, pretendíamos conhecer o máximo possível daquilo que alunos entendem sobre os fundamentos básicos do conceito de função e, a partir dos dados colhidos, fosse elaboradaa sequência didática apresentada posteriormente no capítulo 4 desta pesquisa.

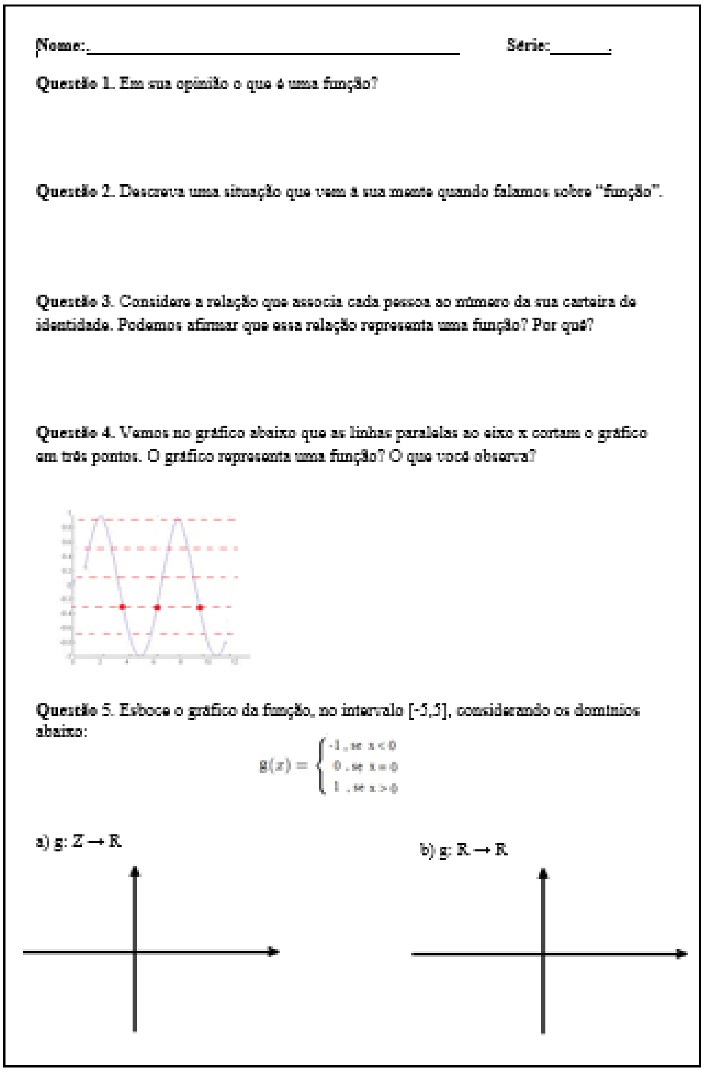
Sendo assim, foram propostas cinco questões discursivas que exigiam dos alunos apenas o conhecimento básico do conceito, como a definição e o comportamento gráfico de uma função. As três primeiras questões do questionário exigiam a capacidade do aluno de definir o conceito com suas palavras, relacionando esta definição com situações cotidianas ou com situações que o fizessem lembrar do conceito. Acreditamos que deixando o aluno à vontade para exprimir suas ideias, ou seja, não o prendendo à definição formal do conceito, podemos conhecer melhor as figuras mentais que constituem sua imagem conceitual.

Um fato interessante ocorreu quando ao serem questionados sobre o que seria função, a maioria dos alunos que participou desta etapa respondeu que se tratava de um gráfico ou uma fórmula. No entanto, não conseguiram responder uma das questões em que era preciso esboçar o gráfico de uma função que possuía duas expressões algébricas em sua lei de formação, afirmando que neste caso existiam duas funções.

Outro fato curioso aconteceu quando pedimos para citar uma situação cotidiana que os fizessem lembrar de função, e a maioria das respostas foram coerentes com a definição deste conceito. Porém foram dados exemplos clássicos, como “uma corrida de taxi” ou “lucro de uma empresa”, o que nos faz pensar se eles realmente compreendem o conceito ou apenas reproduzem os exemplos dados em aula.

Nas duas últimas era necessário que os alunos da amostra soubessem interpretar e relacionar as representações algébricas e gráficas. Em uma delas pedia-se uma análise simples da existência, ou não, de uma função a qual possuía um gráfico com retas paralelas ao eixo das abscissas e cortavam-no em mais de um ponto, remetendo ao “truque” de traçar retas paralelas ao eixo das ordenadas para conferir a tal existência da função. Dessa forma pretendíamos identificar se eles são capazes de conectar a definição do conceito com as representações, assim como entender alguns procedimentos utilizados nas verificações de existência.

> O saber matemático compreende o domínio do sistema de representação e também das regras que regem ações abstratas. A leitura (compreensão) de escritas matemáticas requer o conhecimento do sistema de notação. Sem este conhecimento, torna-se difícil ligar as expressões simbólicas com os seus significados. (MICOTTI, 1999, p. 163)



Nome:__________________________________ Série:______.

Questão 1. Em sua opinião o que é uma função?

Questão 2. Descreva uma situação que vem à sua mente quando falamos sobre "função".

Questão 3. Considere a relação que associa cada pessoa ao número da sua carteira de identidade. Podemos afirmar que essa relação representa uma função? Por quê?

Questão 4. Vemos no gráfico abaixo que as linhas paralelas ao eixo x cortam o gráfico em três pontos. O gráfico representa uma função? O que você observa?

Questão 5. Esboce o gráfico da função, no intervalo [-5,5], considerando os domínios abaixo:

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) g: $Z \rightarrow R$

b) g: $R \rightarrow R$

Fig.1: O questionário aplicado

O questionário foi aplicado inicialmente, em agosto de2014, a duas turmas de Ensino Médio de uma escola particular na cidade do Rio de Janeiro, quando 32 alunos do 2° e 3° ano responderam às perguntas sem que houvesse uma aula ou preparação antes da aplicação do questionário, pois o intuito era inferir o que eles entendem sobre o conceito de função. Muitas perguntas surgiram durante a aplicação, a dificuldade de escreverem ou traduzirem suas imagens mentais ficou muito evidente, em algumas frases do tipo: "Professor, função é aquele gráfico assim..." ou "Função é uma coordenada de x, não é?". Essa insegurança mostra que o nome Função os faz lembrar de alguns detalhes que compõem este conceito.

Após analisarmos as respostas obtidas nesta primeira etapa, percebemos a necessidade de ampliar a amostra, aplicando o mesmo questionário a alunos que já concluíram o Ensino Médio e que, provavelmente, possuem uma maturidade matemática maior. Desse modo, teríamos uma ideia melhor das imagens conceituais do conceito de função.

Sendo assim, convidamos 21 licenciandos de Matemática (19) e professores (2) que participavam de um mini curso oferecido na Semana da Universidade Federal Fluminense, na cidade de Niterói, em setembro de 2014, a responder ao questionário nas mesmas condições que o grupo do Ensino Médio, sem aula ou preparação anterior.

A análise das respostas foi feita observando o nível escolar e a tendência das respostas em cada questão. Dessa forma, conseguimos identificar algumas características ou figuras mentais que compõem a imagem conceitual de cada aluno sobre o conceito de função. Destacamos algumas delas a seguir, apresentando tanto as respostas dos alunos do Ensino Médio (grupo 1), quanto as dos licenciandos e professores (grupo 2).

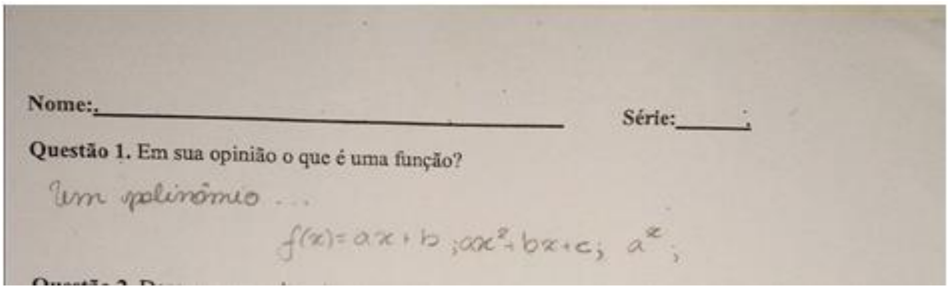
3.1. O questionário e a análise das respostas

Questão 1- Em sua opinião o que é uma função?

- **O aluno responde evocando um aspecto da imagem conceitual, considerando como definição.**

Palavras e exemplos, que normalmente aparecem durante as aulas e ajudam a exercitar o conteúdo, podem compor a imagem conceitual e, além disso, transformá-la na definição do conceito. Diante da pergunta sobre o que é uma função, encontramos nesta categoria 14 respostas no grupo 1 e 10 respostas no grupo 2. Destacamos algumas respostas que melhor expressam a visão do respondente em relação ao conceito de função, nos seguintes exemplos de respostas:

"Um polinômio"


Nome:

Série:

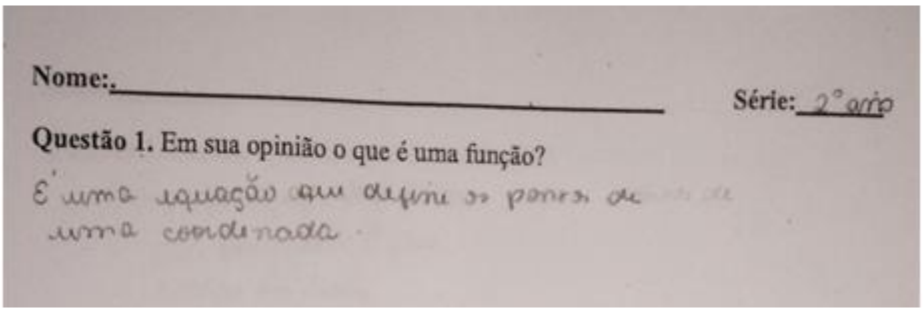
Questão 1. Em sua opinião o que é uma função?

Um polinômio ...

$f(x) = ax + b$; $ax^2 + bx + c$; a^x;

Fig.2: Para este aluno uma função é determinada por um polinômio

"Um equação, fórmula, expressão ou ferramenta ".


Nome:

Série: 2° ano

Questão 1. Em sua opinião o que é uma função?

É uma equação que define os pontos de [illegible] de uma coordenada.

Fig.3: Muitas vezes a equação é confundida com a função

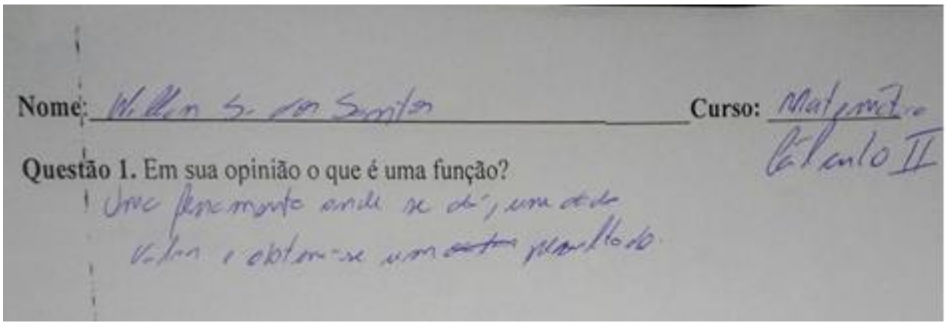


Fig.4: A função não passa de uma "maquina" de calcular

"Definida pelo gráfico"

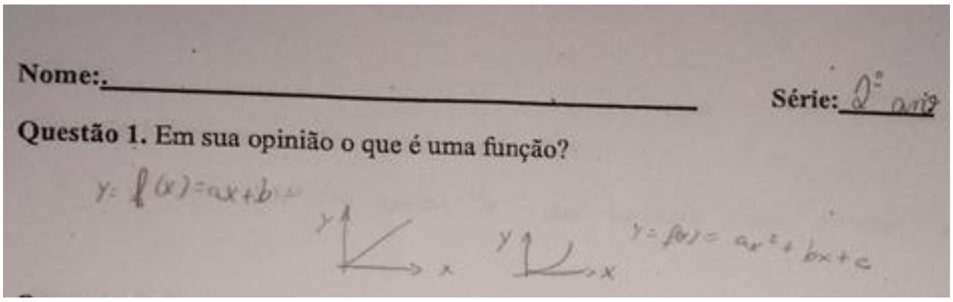


Fig.5

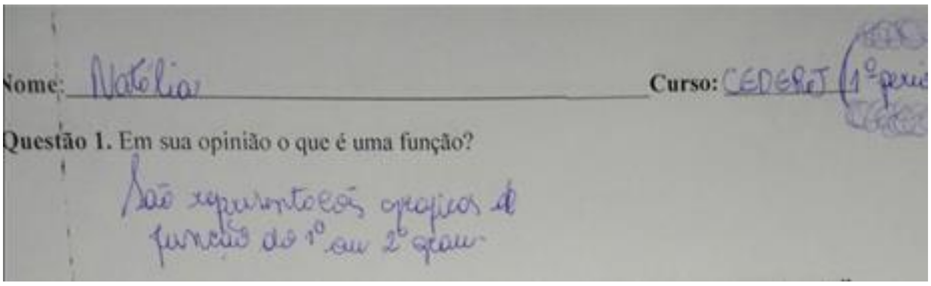


Fig.6: Nas figuras 5 e 6 a imagem conceitual mais forte, a evocada pelo aluno, é de que uma função é definida por um gráfico.

- **"Parte pelo todo". Uso de uma parte da definição do conceito para definir o conceito por completo.**

As respostas obtidas nessa categoria nos mostram que os alunos (15 do grupo 1 e 11 do grupo 2) ainda buscam "simplificar" a maneira de definir um conceito, voluntária ou involuntariamente.

Nos exemplos a seguir, uma função é definida por uma parte de seu significado, o que nos leva a crer que o aluno não consegue diferenciar uma característica do conceito da sua definição.Desta forma a aprendizagem fragmentada do mesmo não lhe dará suporte para reconhecer e trabalhar com funções de comportamentos “fora” do padrão. A função, nessa categoria, é definida pela:

“Relação entre variáveis“

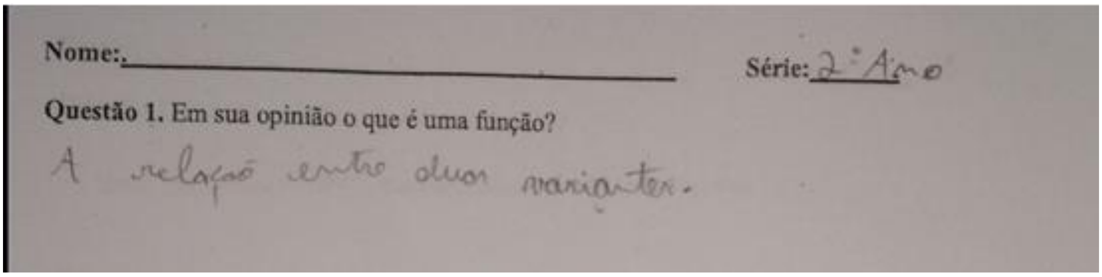


Fig.7

“Relação entre posições”

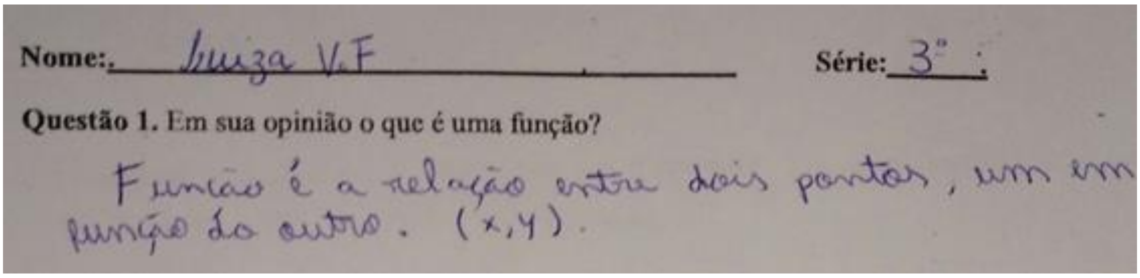


Fig.8

“Relação de dependência”

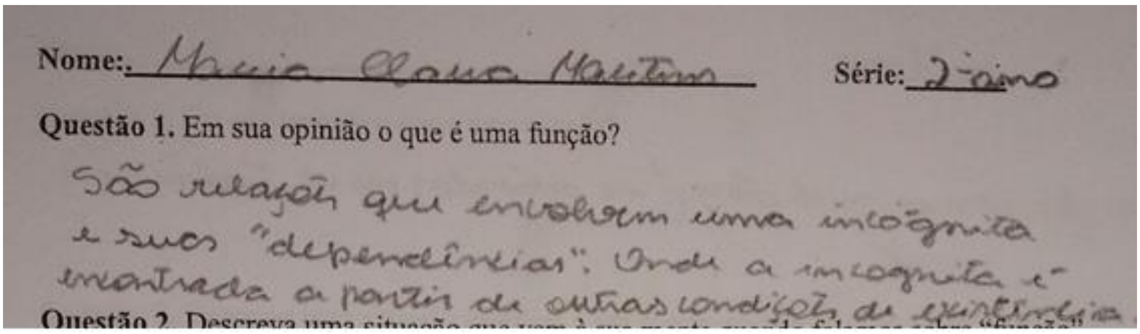


Fig.9

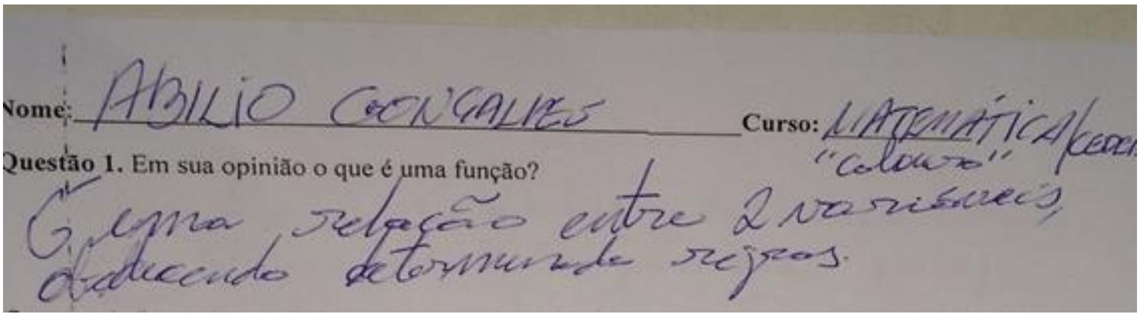

Nome: ABILIO GONÇALVES Curso: MATEMÁTICA/
"Calouro"
Questão 1. Em sua opinião o que é uma função?
É uma relação entre 2 variáveis, obedecendo determinadas regras.

Fig.10

"Associação de pontos no Plano Cartesiano"

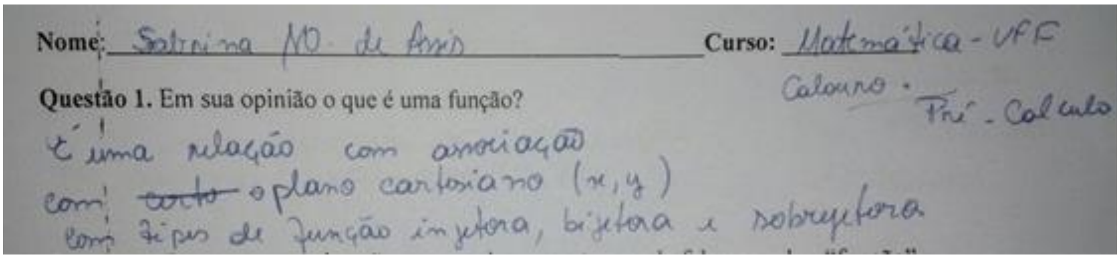

Nome: Sabrina M.O. de Assis Curso: Matemática - UFF
Calouro - Pré-Calculo
Questão 1. Em sua opinião o que é uma função?
É uma relação com associação
com ~~certo~~ o plano cartesiano (x, y)
com tipos de função injetora, bijetora e sobrejetora

Fig.11

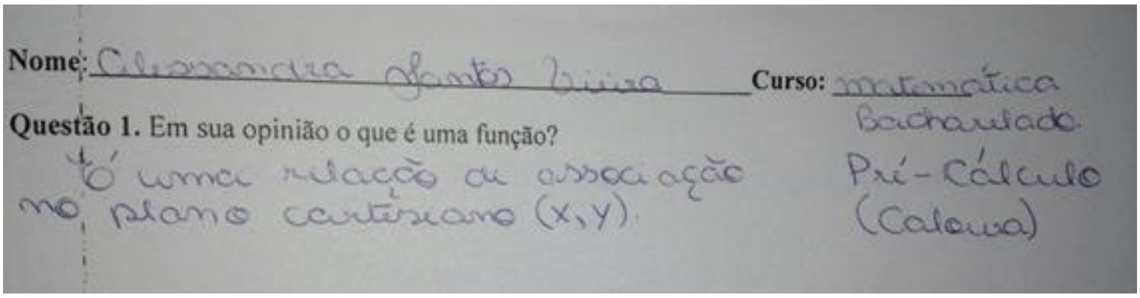

Nome: Alessandra Santos Vieira Curso: matemática
Bacharelado
Pré-Cálculo
(Calouro)
Questão 1. Em sua opinião o que é uma função?
É uma relação ou associação
no plano cartesiano (x, y).

Fig.12

"Relação entre conjunto de pontos"

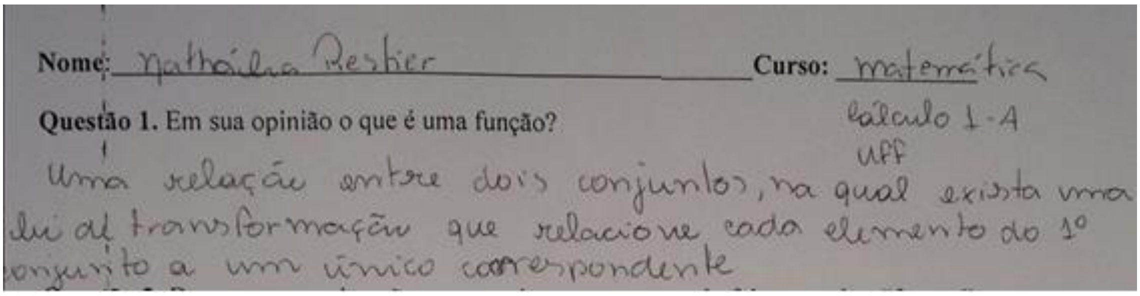

Nome: Nathália Rester Curso: matemática
Cálculo 1-A
UFF
Questão 1. Em sua opinião o que é uma função?
Uma relação entre dois conjuntos, na qual exista uma lei de transformação que relacione cada elemento do 1º conjunto a um único correspondente

Fig.13

Após analisarmos as respostas da questão 1 percebemos algumas características que podem nos ajudar a identificar os obstáculos a serem superados, não somente pelos alunos, mas também pelos professores, pois de alguma forma damos mais ênfase às funções descritíveis poruma fórmula analítica ou àquelasque possuem gráficos "bem comportados" com domínios contínuos. Vejamos a resposta que uma professora deu à questão sobre o que seria uma função:

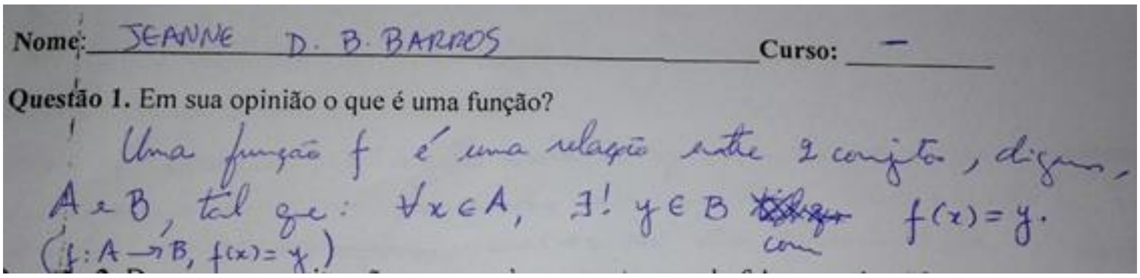


Fig.14

A resposta dada está correta, ela nos traz a definição formal do conceito de função, àquela encontrada na maioria dos livros de funções, mas vamos olhar para ela sob outro ponto de vista. Apesar de correta, a resposta nos faz refletir que, como professores e matemáticos que somos, em muitos momentos trabalhamos a linguagem científica e formal retiradas das definições dos livros sem que haja um equilíbrio com a linguagem mais didática e acessível ao aluno, contribuindo de alguma forma com a instauração dessas imagens conceituais distorcidas ou incompletas, e consequentemente com um novo obstáculo para o aprendizado. Temos a total consciência que a resposta analisada não foi direcionada a estudantes e não sabemos a forma que a professora define o conceito para seus alunos, porém foi esta a imagem conceitual evocada no momento da resposta.

Questão 2:Descreva uma situação que vem à sua mente quando falamos sobre "função".

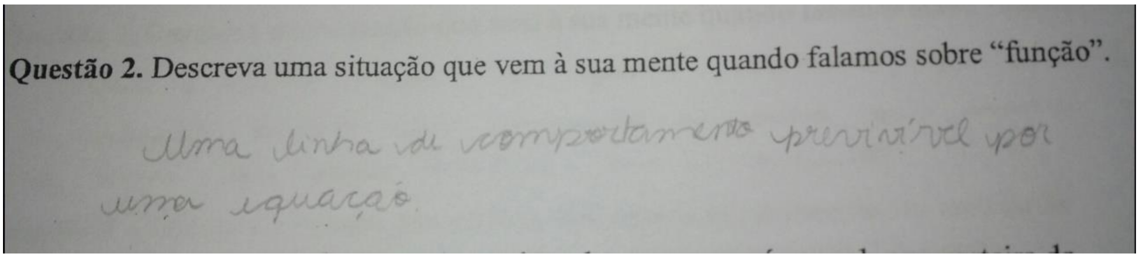
Neste item buscávamos inferir se os alunos conseguiam levar a definição do conceito de função para a sua realidade, de modo a descrever uma situação coerente com as características e fundamentos de função. Após a análise das respostas, percebemos que uma grande porcentagem dos participantes conseguia descrever uma situação matematicamente, o que permite a utilização da definição de função e por isso dividimos as respostas em dois grupos: situação coerente e situação não coerente com a definição.

1) Situação coerente com a definição de função: Para todo elemento do domínio existe um único elemento no contradomínio.

Dos 32 alunos do Ensino Médio, 27 descreveram uma situação coerente com a definição deste conceito e se enquadram nesta categoria. Desses, 9 exibiram situações meramente matemáticas, com “gráficos” , “linha de comportamento descrita por uma equação”, e 18 apresentaram situações cotidianas, como esperávamos. No segundo grupo, dos 21 participantes, 19 conseguiram responder de forma coerente, onde 9 mostraram uma situação descrita matematicamente e 10 trouxeram situações cotidianas.

Vejamos algumas dessas respostas:

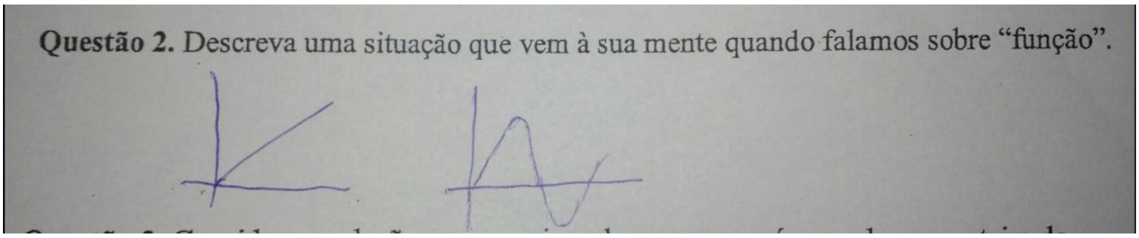
“O gráfico ou a equação associada a uma função como característica mais evidente.”



Questão 2. Descreva uma situação que vem à sua mente quando falamos sobre “função”.

Uma linha de comportamento previsível por uma equação

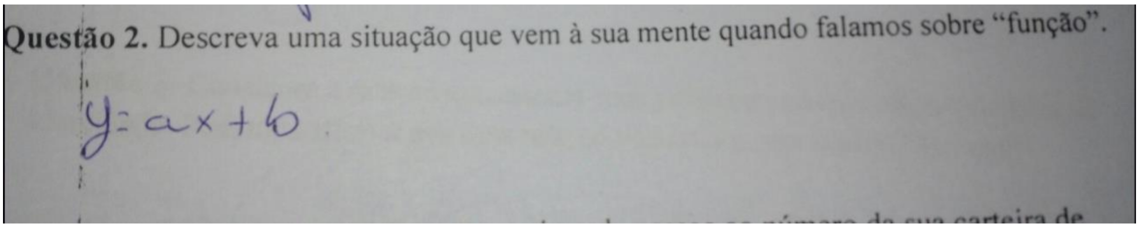
Fig.15



Questão 2. Descreva uma situação que vem à sua mente quando falamos sobre “função”.

Fig.16

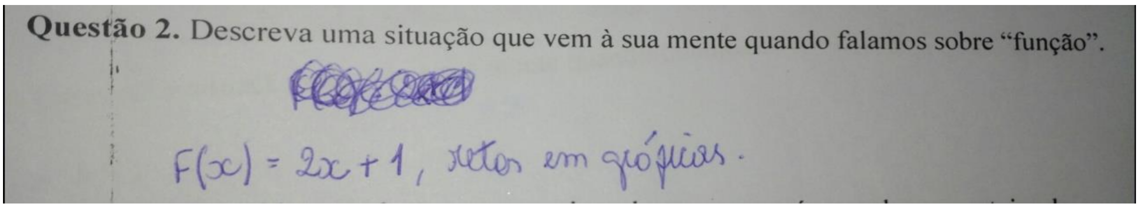
“A expressão algébrica é a imagem conceitual evocada.”



Questão 2. Descreva uma situação que vem à sua mente quando falamos sobre “função”.

$y = ax + b$

Fig.17



Questão 2. Descreva uma situação que vem à sua mente quando falamos sobre “função”.

$F(x) = 2x + 1$, retas em gráficos.

Fig.18

“Um exemplo visto em um exercicio ou em um comentario feito pelo professor “

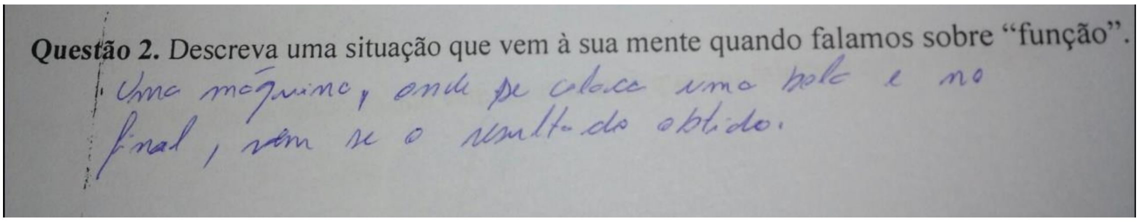


Fig.19

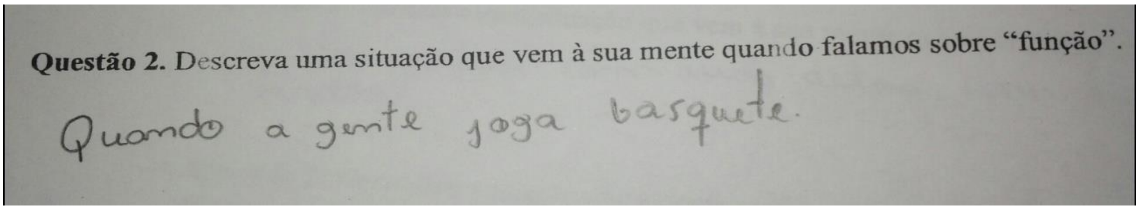


Fig.20

As situações anteriores nos mostram que, mesmo em uma situação de livre escrita, alguns alunos tendem a usar apenas uma representação do conceito. Ainda que não saibamos se eles reconhecem ou não outras representações, essa tendência indica que no momento da aprendizagem de função esses alunos guardam em sua mente apenas a figura mental mais forte ou a que mais se destaca em sua opinião e toda vez que for preciso definir esse conceito, ele usará essa figura mental escolhida. Esse comportamento é denominado por Vinner (2006) de Imagem Conceitual Temporária:

> Em uma tarefa intelectual específica, por vezes, apenas partes da célula "imagem conceitual" ou da célula "definição do conceito" são realmente ativadas. Assim, a imagem conceitual (ou o conceito definição) não pode ser determinada por uma única observação de um comportamento específico. Nós, portanto, podemos falar que uma parte da célula foi ativada quando se trabalha com uma determinada tarefa. Por isso, nós, na verdade, lidamoscom a imagem conceitual (ou a definição de conceito) em um determinado momento. Podemos chamá-la de imagem conceitual temporária. (VINNER, 2006, p.297, tradução nossa)[8]

Outras respostas nos chamaram a atenção, tanto pelo fato de serem bons exemplos de situações que podem ser representadas por uma função, quanto por serem exemplos bem clássicos e muito usados durante o processo de ensino de função. Com isso, não podemos

[8]In a specific intellectual task, sometimes only parts of the cell "conceptual image " or the cell " concept definition" are actually activated . Thus , the conceptual image (or concept definition) can be determined by a single observation of a specific behavior. We, therefore, can say that a part of the cell was activated when working with a particular task. So we actually deal with conceptual image (or the concept of definition) at a given time We call it temporary conceptual image.

inferir se os estudantes conseguiram relacionar a definição do conceito com a situação descrita ou apenas lembraram de um exemplo visto em sala de aula.

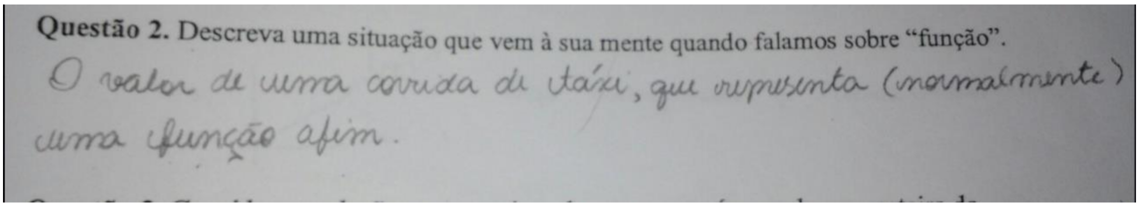

Questão 2. Descreva uma situação que vem à sua mente quando falamos sobre "função".
O valor de uma corrida de táxi, que representa (normalmente) uma função afim.

Fig.21

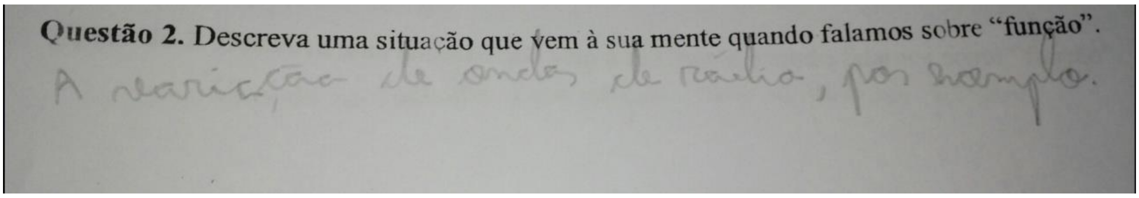

Questão 2. Descreva uma situação que vem à sua mente quando falamos sobre "função".
A variação de ondas de rádio, por exemplo.

Fig.22

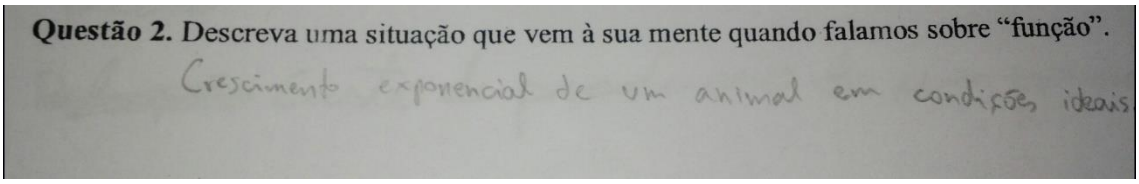

Questão 2. Descreva uma situação que vem à sua mente quando falamos sobre "função".
Crescimento exponencial de um animal em condições ideais.

Fig.23

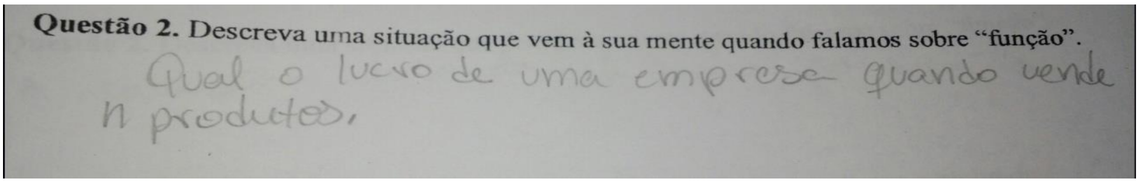

Questão 2. Descreva uma situação que vem à sua mente quando falamos sobre "função".
Qual o lucro de uma empresa quando vende n produtos,

Fig.24

2) Situação não coerente com a definição

Nesta categoria temos uma minoria que não soube descrever algo que fizesse lembrar de função: 5 alunos do grupo1 e 2 participantes do grupo2. Vejamos um exemplo interessante:

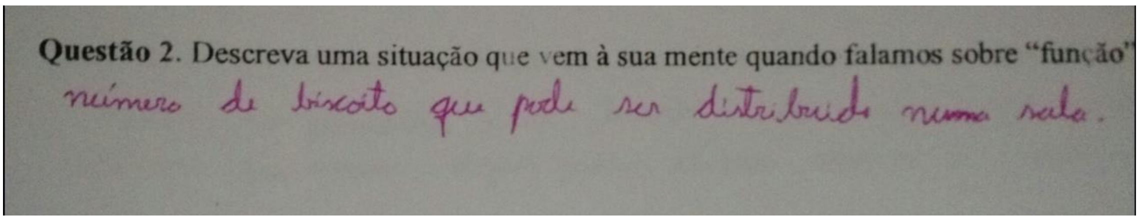

Questão 2. Descreva uma situação que vem à sua mente quando falamos sobre "função"
número de biscoito que pode ser distribuído numa sala.

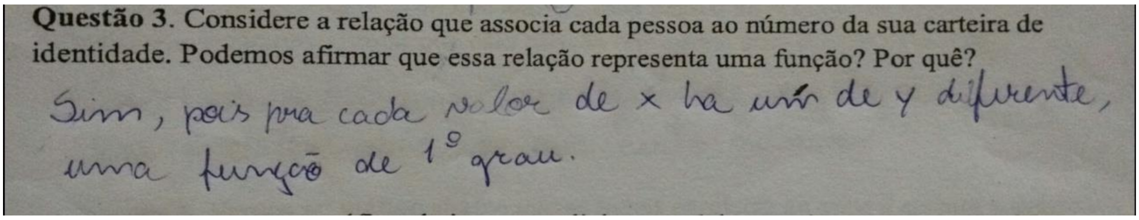
Fig.25: Exemplo de resposta não coerente com a definição.

A resposta nos mostra um exemplo do uso de parte da definição do conceito, o estudante traz uma relação entre dois conjuntos, o conjunto dos biscoitos e dos alunos. É comum inferir que nenhum biscoito vai ser dado para dois alunos, porém não existe uma condição que garanta que todos os biscoitos serão distribuídos e, neste caso, não poderia ser definida uma função.

Questão 3: Considere a relação que associa cada pessoa ao número da sua carteira de identidade. Podemos afirmar que essa relação representa uma função? Por quê?

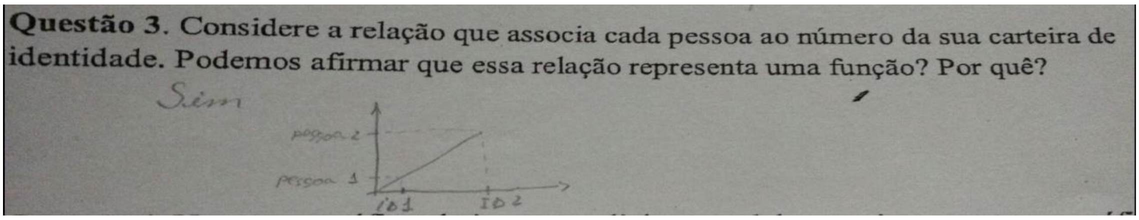
Nesta questão buscamos fazer o caminho inverso da anterior. Ao invés de pedirmos um exemplo que lembrassem o conceito de função, exibimos uma situação aberta e os estudantes deveriam decidir se o exemplo se enquadrava na definição deste conceito.Deveriam perceber as características de uma função, mesmo sem haver uma expressão, fórmula e gráfico envolvidos ouusar argumentos válidos, indicando que esta situação não representa uma função. Dividimos as respostas em 3 categorias:**Respondeu e justificou fazendo uma boa associação entre uma figura mental e a definição do conceito.** Nesta categoria, 8 alunos do grupo 1 e 10 do grupo 2 responderam “sim” e justificaram de forma coerente com a definição de função.

Alguns chegaram a definir a relação pessoa→ identidade como uma função do 1°grau, mostrando que muitas vezes eles buscam definir o conceito usando a figura mental mais forte de sua imagem conceitual, nestes casos esta parte da imagem conceitual garante a existência de função, apesar de não ficar claro que o aluno fez a correspondência entre o exemplo e a definição, como esperado. Vejamos alguns exemplos:


Questão 3. Considere a relação que associa cada pessoa ao número da sua carteira de identidade. Podemos afirmar que essa relação representa uma função? Por quê?

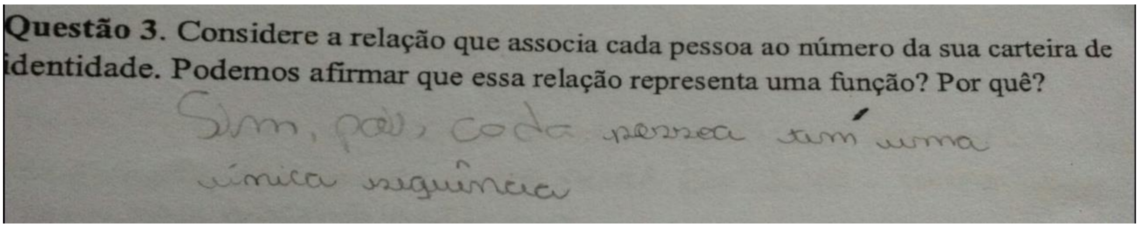
Sim, pois pra cada valor de x ha um de y diferente, uma função de 1º grau.

Fig.26


Questão 3. Considere a relação que associa cada pessoa ao número da sua carteira de identidade. Podemos afirmar que essa relação representa uma função? Por quê?

Sim

Fig.27



Questão 3. Considere a relação que associa cada pessoa ao número da sua carteira de identidade. Podemos afirmar que essa relação representa uma função? Por quê?

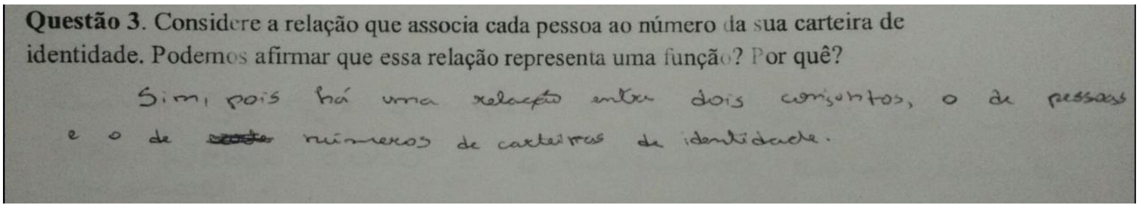
Sim, pois, cada pessoa tem uma única sequência

Fig.28

1) **Respondeu "sim", porém evocou uma parte de sua imagem conceitualque, sozinha, não garante a existência de função**.

Nesta categoria 10 alunos grupo 1 e 8 do grupo 2 responderam “sim”, porém usaram justificativas incompletas ou inconsistentes para defender sua escolha pela existência de uma função.

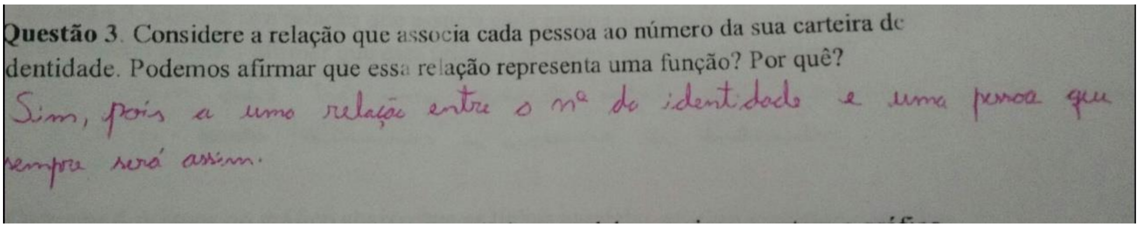
Nove desses estudantes usaram o termo “relação” em sua justificativa e, apesar de estarem corretos, pois existe de fato uma relação, eles esquecem ou não acham necessário garantir a existência que toda pessoa possui uma e, só uma, identidade ou que nem todas as pessoas possuem carteira de identidade: as crianças, por ex, não têm.



Questão 3. Considere a relação que associa cada pessoa ao número da sua carteira de identidade. Podemos afirmar que essa relação representa uma função? Por quê?

Sim, pois há uma relação entre dois conjuntos, o de pessoas e o de números de carteiras de identidade.

Fig.29

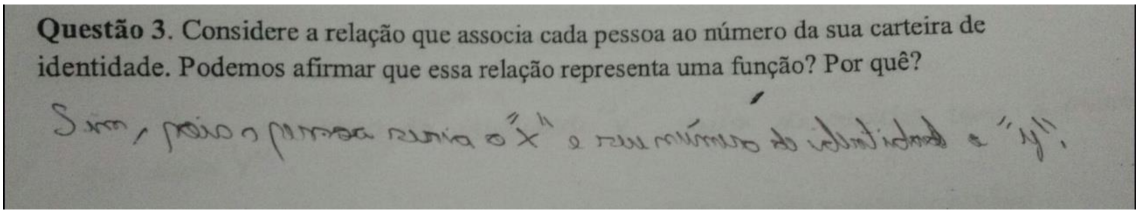


Questão 3. Considere a relação que associa cada pessoa ao número da sua carteira de identidade. Podemos afirmar que essa relação representa uma função? Por quê?

Sim, pois a uma relação entre o nº do identidade e uma pessoa que sempre será assim.

Fig.30

Três justificaram usando o argumento de que pessoa seria o “x” e a identidade o “y”, novamente dando indícios que usaram apenas uma parte da imagem conceitual para garantir a existência de função.


Questão 3. Considere a relação que associa cada pessoa ao número da sua carteira de identidade. Podemos afirmar que essa relação representa uma função? Por quê?

Sim, pois a pessoa seria o "x" e seu número de identidade o "y".

Fig.31

Contudo, acreditamos que a maioria dos alunos que responderam “sim” compreende o conceito ou estão bem próximos disso, visto que conseguiram relacionar o exemplo com uma das representações de função ou com a própria definição do conceito. Ana Sierpinska(1992) comenta:

> Assim sendo, se nos perguntarmos: “o que a definição do conceito de função diz?”, uma resposta poderia ser: uma tripla ordenada (**X**, **Y**,f), onde **X** e **Y** são fixos ef é um subconjunto de**X** x**Y** tal que se (x, y) pertence af e (x, y’) pertence af então y = y’. Isso é tudo. Mas se a questão é: “sobre o que é a definição?”, então a resposta é mais complicada, pois aqui nós nos referimos a alguma realidade que existe além da lógica e do formalismo matemático, nos referimos às interpretações e aplicações do conceito e isso envolve pelo menos todas as formas diferentes de pensar e falar sobre funções que foram mencionadas acima. Para nós, compreender o conceito significará ser capaz de lidar com ambas as perguntas e as várias relações entre as respostas a elas.(Tradução nossa)[9]

3) **Respondeu "não", porém teve problemas com a relação imagem e definição do conceito.**

Aqui, 14 alunos do grupo 1 e 3 de grupo 2 não consideraram a existência de uma função no exemplo dado, porém nenhum conseguiu justificar com argumentos ou com um contra exemplo que comprovassem a não existência da função. Por exemplo, é fato quea escolha do domínio define se há ou não uma função. Neste caso, a relação pessoas→identidade, não define uma função, pois nem todas as pessoas possuem carteira de indentidade.

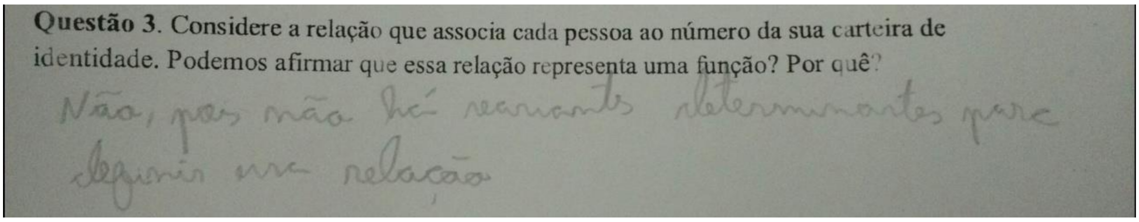
---

[9]Therefore , if we ask ourselves: " what the definition of function say? " , An answer could be : an ordered triple (X , Y , f) , where X and Y are fixed ef é a subset Dex xY such that if (x, y) belongs af e (x, y) belongs af então y = y ' . That is all. But the question is, " about what is the definition ," then the answer is more complicated , because here we refer to any reality that exists beyond logic and mathematical formalism , we refer to the interpretations and applications of the concept and this involves at least all the different ways of thinking and talking about functions that have been mentioned above . For us to understand the concept will mean being able to deal with both questions and the various relationships between the responses to them.

Um fato interessante é que três dos alunos do Ensino Médio não admitiram a existência, pois consideraram válido que as funções devem ser definidas por uma expressão algébrica, fórmula ou regra de correspondência bem clara e definida previamente, um obstáculo epistemológico muito comum, segundo Trindade:

> No ensino atual de funções e nos livros didáticos em geral, funções sãoidentificadas com expressões analíticas, o que se constitui num obstáculo àaprendizagem desse conceito. A apresentação do conceito de função é feitaatravés da sua forma analítica, a partir dela é construída a tabelacorrespondente e com os dados da tabela é feita a representação gráfica noplano cartesiano. Essa é a ordem usual de apresentação das diversas formasde representar uma função.É necessário reafirmar que não estamos sugerindo o abandono ao estudo analítico das funções. Não se trata disso. Estamos negando a forma tradicional em que as funções são apresentadas, quase que, exclusivamente, na sua forma analítica, sem que os alunos compreendam o seu significado em relação a situações reais. (TRINDADE, ano, pag.)

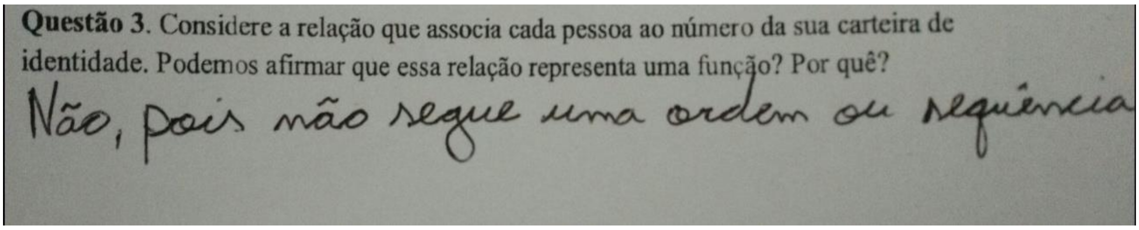
Algumas respostas foram bem interessantes, vejamos:



Questão 3. Considere a relação que associa cada pessoa ao número da sua carteira de identidade. Podemos afirmar que essa relação representa uma função? Por quê?

Não, pois não há variantes determinantes para definir uma relação

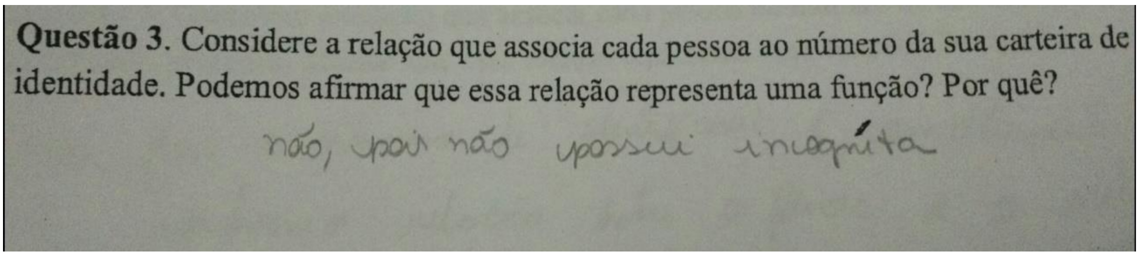
Fig.32



Questão 3. Considere a relação que associa cada pessoa ao número da sua carteira de identidade. Podemos afirmar que essa relação representa uma função? Por quê?

Não, pois não segue uma ordem ou sequência

Fig.33

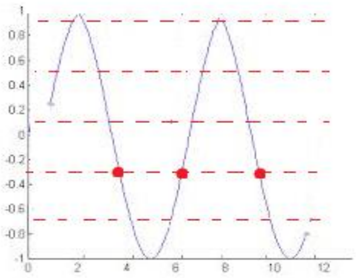


Questão 3. Considere a relação que associa cada pessoa ao número da sua carteira de identidade. Podemos afirmar que essa relação representa uma função? Por quê?

não, pois não possui incognita

Fig.34

Questão 4: **Vemos no gráfico abaixo que as linhas paralelas ao eixo x cortam o gráfico em três pontos. O gráfico representa uma função? O que você observa?**



Nesta questão, vamos destacar aquelas respostas que traduzem bem o comportamento dos alunos que:

1) **Responderam e justificaram corretamente, observando que o gráfico se enquadra na definição e, com isso, apresentaram uma boa associação entre uma figura mental e a definição do conceito**.

Vale destacar aquelas respostas nas quais os estudantes não se deixaram enganar pelo fato do gráfico ter pontos em que uma imagem possui mais de um correspondente no domínio.

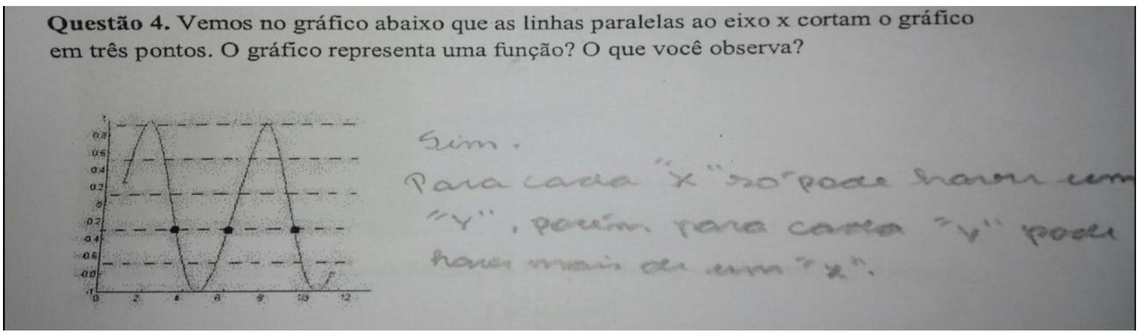


Fig.35

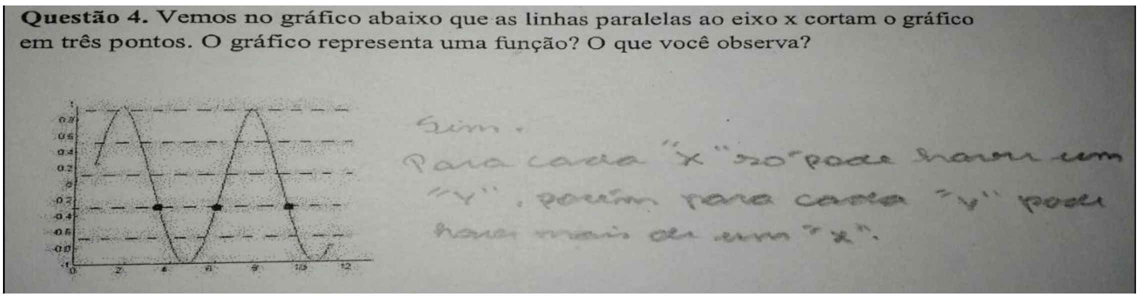


Fig.36

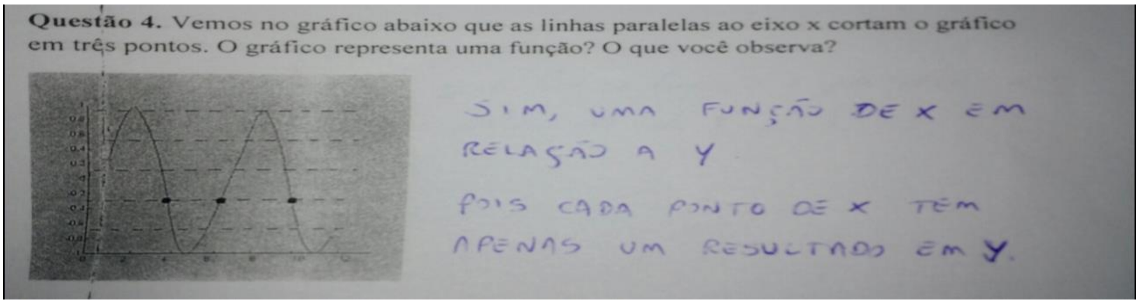


Fig.37

2) Responderam "sim" e evocaram uma imagem conceitual, nem sempre correta, para justificar.

Destacamos 3 respostas dos 11 alunos que justificaram usando uma comparação com outras funções conhecidas, como a função seno e quadrática.

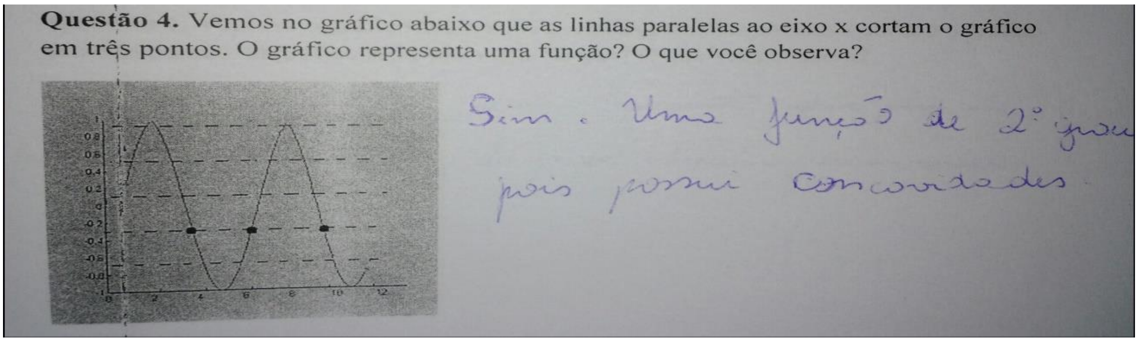


Fig.38

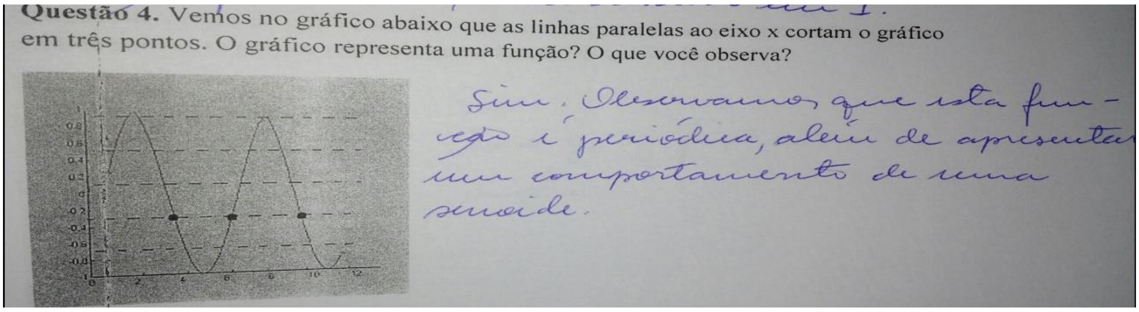


Fig.39

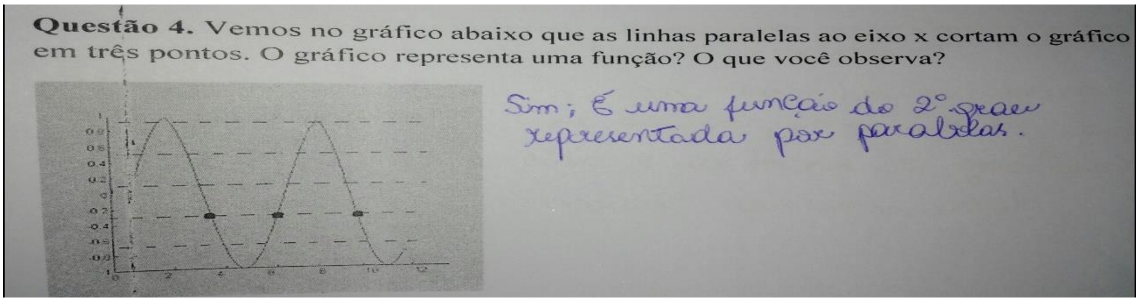


Fig.40

No caso destacado a seguir, percebemos que o questionamento sobre o gráfico fez com que o estudante demonstrasse um comportamento procedimental para justificar a existência da função, ele respondeu corretamente afirmando a existência e justificou usando um procedimento muito conhecido para verificar se um gráfico representa uma função, a "estratégia” de traçar retas paralelas ao eixo das ordenadas. Não podemos afirmar com a respostas obtida, mas em determinados casos o estudante trabalha tanto com um procedimento que acaba tornando-o parte da definição de um conceito.

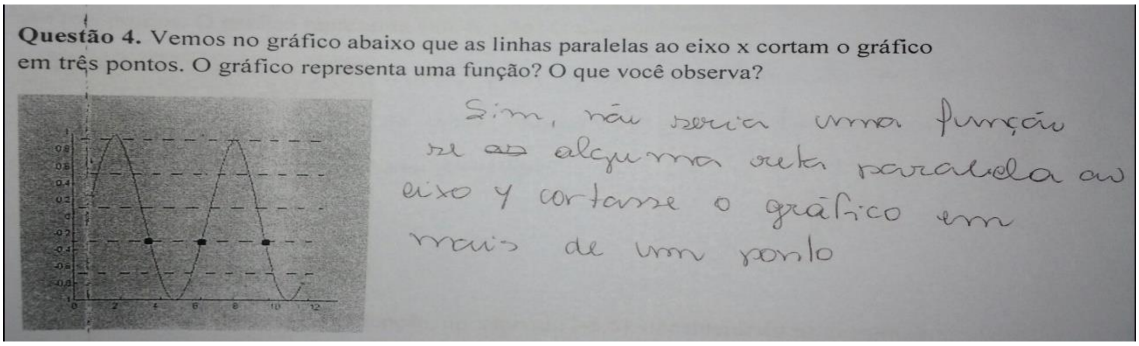


Fig.41

3) **Não responderam corretamente, sinalizandodificuldades em relacionar diferentes representações ou falhas na ligação da imagem conceitual e definição do conceito**.

Nesta categoria encontramos 15 alunos do primeiro grupo e 4 estudantes do grupo 2, o que sugere uma grande dificuldade dos alunos do Ensino Médio na análise gráfica, enquanto uma maioria trabalha bem a parte mecânica do conceito. No exemplo a seguir percebemos que o estudante se confunde e demonstra ter dificuldade de relacionar a imagem e a definição deste conceito, pois ao percebere que existem valores no eixo das ordenadas com mais de um correspondente no eixo das abscissas, afirma não existir a função.

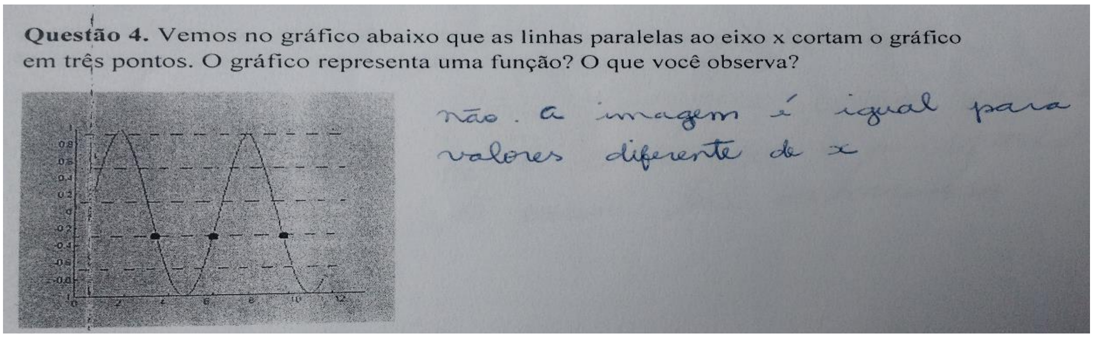


Fig.42

Questão 5:Esboce o gráfico da função, no intervalo [-5,5], considerando os domínios abaixo:

$$g(x) = \begin{cases} -1 \text{ , se } x < 0 \\ 0 \text{ , se } x = 0 \\ 1 \text{ , se } x > 0 \end{cases}$$

Novamente percebemos uma grande dificuldade dos estudantes do Ensino Médio ao trabalharem com a representação gráfica de função. Nesta questão nenhum deles conseguiu esboçar o gráfico da função g(x), a maioria sequer "rabiscou" o papel, provavelmente por não admitirem que uma função pode ter mais de uma lei de formação ou pode ser dividida em intervalos. O resultado foi o mesmo nas duas opções de domínio: Z ou IR.

Esse comportamento pode ser explicado pelo fato da grande parte dos alunos do Ensino Médio possuírem uma falsa ideia, ou uma imagem conceitual fragmentada, em que só consideram as funções "bem comportadas", com uma lei de formação bem definida e com domínio Real e contínuo. No grupo 2 percebemos que também existem grandes dificuldades, 12 dos estudantes não conseguiram esboçar o gráfico, 6 conseguiram mas não consideraram o domínio e apenas 3 esboçaram corretamente. Daqueles que desconsideraram os domínios distintos das funções, destacamos:

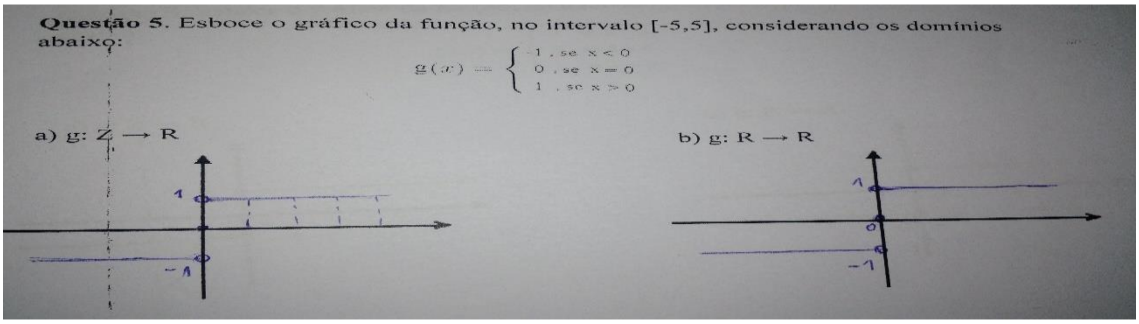


Fig.43

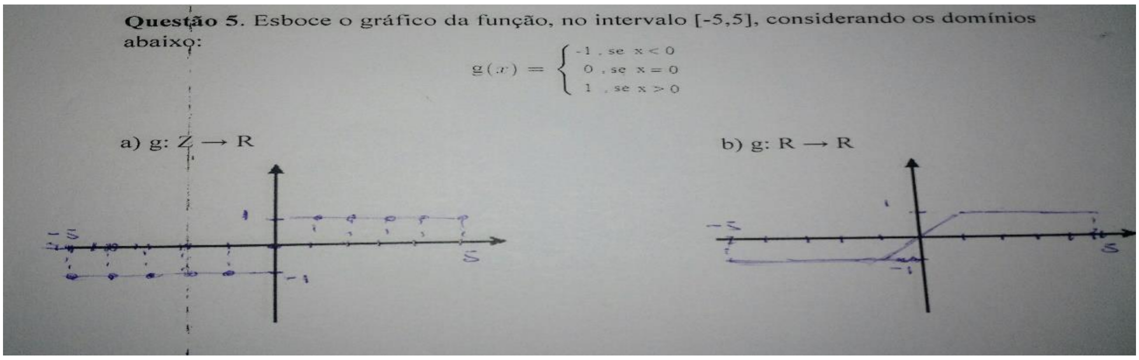


Fig.44

Com base na análise das respostas ao questionário, percebemos a necessidade de desenvolver uma sequência didática que ajudasse os estudantes a construir o conceito de função, contribuindo para a evolução das imagens conceituais formadas ao longo desse processo de construção. Para isso, usamos a metodologia da Engenharia Didática, apresentada naseçãodos recursos metodológicos e aprofundada na próxima seção.

3.2. A Engenharia Didática

Nesta seção vamos descrever mehor a Engenharia Didática, a qual norteou a elaboração, aplicação e análise das respostas do primeiro questionário e de uma sequência didática para o ensino de funções. O conceito de Engenharia Didáticaemergiu no início dos anos 80 e, segundo Artigue (1988):

> [...] esse termo foi "cunhado" para o trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar com objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência [...] (p.283)

A origem desta metodologia está na preocupação com os processos de inovação presentes no domínio educativo que abrem caminhos a diferentes tipos de experiências na sala de aula. Ao mesmo tempo em que valoriza o saber prático do professor, de alguma forma, há uma preocupação coma melhoriadas práticas de ensino. Neste sentido, busca-se agir de forma racional, com base em conhecimentos matemáticos e didáticos, dando importância para a realização didática na sala de aula como prática de investigação. Para DOUADY (1993), apud MACHADO, (2002, p.198) pelo termo Engenharia Didática entende-se:

> Uma seqüência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor”

Uma Engenharia Didática, segundo Artigue (1996), inclui diversas etapas: análises preliminares, concepção e análise a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de matemática, experimentação e análise a posteriori com a validação da experiência.

1- As análises preliminares.

A primeira etapa da Engenharia é estruturada com os objetivos de analisar o funcionamento do ensino habitual do conteúdo, para propor uma intervenção que modifique para melhor a sala de aula usual. Nesta etapa pretende-se revelar as concepções dos alunos e as dificuldades e obstáculos que marcam a evolução do conceito na mente do estudante, tendo em vista as falhas causadoras dos "acidentes do conceito". A reflexão sobre essas falhas torna-se o ponto de partida para determinar condições possíveis de um ponto de funcionamento mais satisfatório.

Artigue (1996) sugere que essa análise inclua a distinção de três dimensões: a epistemológica, associada às características do saber analisado; a didática, associada às características funcionamento do sistema de ensino e a cognitiva, associada às características do público ao qual se dirige o ensino.

No caso desta pesquisa as análises preliminares, baseadas na experiência do pesquisador e nas respostas dadas ao questionário, apontam que a maioria dos estudantes admite que apenas as relações descritíveis por uma fórmula analítica são dignas de receberem o nome de funções, ou as funções são definidas pelos seus gráficos. Por outro lado, não admitem que uma função pode ter mais de uma expressão algébrica em sua lei de formação ou pode ser dividida em intervalos, talvez por terem uma imagem conceitual fragmentada ou incompleta em que só consideram uma função aquelas “bem comportadas”, com uma lei de formação bem definida e com domínio Real e contínuo.

É importante esclarecer que nossa análiseadvém das respostas do questionário aplicado aos estudantes do Ensino Médio e Superior, onde o estudo deste tópico segue uma ordenação ainda tradicional e ditada, na maioria das vezes, pela seqüência sugerida pelos livros didáticos, fato justificado pela experiência em sala de aula. Além disso, reconhecermos a importância do trabalho com múltiplas representações deste conceito e a necessidade de compreender quais significados o aluno pode produzir durante cada "salto" do conhecimento dentro deste contexto.

2- Concepção e análise a priori.

A fase da análise a priori, segundo Artigue (1996), comporta uma parte descritiva e uma parte preditiva. É preciso descrever as escolhas efetuadas, definindo variáveis de comando em uma visão global, num sentido mais amplo e geral, além de descrevê-las no âmbito local, descrevendo cada atividade proposta.

As primeiras escolhas, que dizem respeito a variáveis globais da Engenharia desta pesquisa, foram enunciar contextos problemáticos do cotidiano do aluno que envolvessem o conceito de função, aprimonar as passagens entre as diversas representações de uma função, justificar o uso de determinadas técnicas, explorar situações incomuns e ajudar o estudante a compreender a importância do conceito estudado, dentro e fora da vida acadêmica, dando destaque para o entendimento de ideias e conceitos fundamentais do conceito, de forma natural e acessível.

3- Experimentação.

A partir dessas escolhas globais, partimos para um plano de atividades onde surgem as escolhas locais. O planejamento se apresenta numa seqüência de atividades, desenvolvidas em 8 tempos de 50 minutos. Buscamos desenvolver o conhecimento dos estudantes sobre o conceito de funções de acordo com as ideias de Caraça (1951) e de Rezende (2004) que, como dito anteriormente, sugerem uma introdução intuitiva e natural, sem a utilização de exercícios repetitivos e mecânicos.Nesta etapa de experimentação é aplicada a sequência didática criada.

Acreditávamos que, desta forma, eles conseguiriam desenvolver uma familiaridade com o conceito, sendo capazes de compreender e trabalhar os principais elementos que compõem uma função.

4- Análise a posteriori com a validação da experiência.

A experimentação da sequência didática é seguida de uma fase de análise a posteriori que se apóia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação para chegarmos à fase da validação, que na Engenharia Didática é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori (ARTIGUE, 1996, p. 197).

Desta maneira, a pesquisa que se desenvolve com os suportes da engenharia didática consegue dar significado aos dados obtidos, revelando os obstáculos epistemológicos apresentados pelos alunos, assim como suas imagens conceituais. Com a Engenharia Didática pudemos perceber o novo horizonte que esta abordagem metodológica nos possibilita, onde é possível considerar a própria prática de ensino, podendo haver mudanças à medida em que se observam os resultados alcançados.

Sendo assim, utilizamos as experiências e as informações obtidas no questionário inicial, assim como, as imagens conceituais reveladas e os fundamentos da engenharia didática para montar uma sequência didática que possibilite uma observação e análise das situações de aprendizagem que envolvem os conceitos previstos nesta pesquisa. Pretendemos também encontrar um caminho que nos leve à melhoria do Ensino de Funções.

4.Uma proposta didática para o Ensino de Funções

Como falado anteriormente, a sequência didática foi criada à luz da Engenharia Didática, baseada nas obras deWanderley Rezendee Bento Caraça. Estes defendem, entre outras ideias, a possibilidade de ensinar Matemática a partir de exemplos práticos, sem a repetição direcionada de exercícios para a fixaçãode algoritmos ou regras de cálculo, dando ênfase para o entendimento de ideias eprincípios fundamentais do conceito, além de sugerirem um caminho natural para o estudo das funções reais.

> A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente — descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições. (CARAÇA, 1951, p.8)

Concordando com Caraça (1951), no processo de aprendizagem de função existe uma grande necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências e generalizar, indo muito além das manipulações algébricas ou se restringindo aos gráficos e “estratégias” previamente apresentadas. Trindade (1996)destacou alguns dos obstáculos e dificuldades apresentadas pelos estudantes de 1º e 2º graus no aprendizado de funções,entre elas:

a) a inabilidade de construir associações entre as diferentesrepresentações de funções: fórmulas, gráficos, diagramas, tabelas, expressãoverbal das relações;

b) diferenciar entre gráficos de funções contínuas ediscretas;

c) reconhecer funções não lineares;

d) compreender o conceito devariável;

e) ser capaz de perceber que uma mesma função pode serrepresentada por duas fórmulas que se diferenciam apenas pelos nomes desuas varáveis.

Analisando os obstáculos epistemológicos apresentados por Trindade, podemos perceber que as mesmas dificuldades estão presentes na vida acadêmica da maioria dos estudantes que participaram desta pesquisa. Buscando uma melhoria, criamos uma sequência didática baseada na ideia simples de que o conceito de função pode ser ensinado destacando: a necessidade de analisar fenômenos; descrever regularidades; interpretar interdependências e generalizar (Caraça, 1951), sem a resolução excessiva de exercícios padrões que visam o domínio da técnica por meio da repetição excessiva e “estratégias” engessadas àquela parte do conteúdo.

As atividades propostas foram direcionadas para o entendimento de ideias e conceitos fundamentais de uma função e não focadas no ensino de algoritmos ou regras de cálculo. A sequência foi elaborada logo após a análise das respostas do questionário aplicado no Ensino Médio e Superior, porém não foi possível aplicá-la os estudantes que participaram da primeira parte desta pesquisa, pois perdemos o contato com a maioria e não pudemos criar uma oportunidade de reuní-loos. Com isso, essa parte da pesquisa conta com a participação de outros 7 alunos do 2°ano do Ensino Médio que não participaram do primeiro questionário, porém já possuiam certo conhecimento do conceito de função.

4.1 Sequência Didática

A sequência didática foi pensada e preparada para o conceito de Funções,destacando o tratamento da informação, aleitura e interpretação de dados e a análise e construção de gráficos diversos retratando problemas do cotidiano ou matemáticos. Trabalhamos com alunos do 2º ano do Ensino Médio que durante 8 tempos de aula puderam expor suas ideias e conversar sobre os problemas analisados. Utilizamos papel milimetrado e um software matemático (Winplot) para auxiliar a visualização de gráficos, mas não cobramos o seu uso.

1° etapa: Uma situação cotidiana como problema introdutório

Nesta etapa inicial deixamos os alunos livres para discutir o problema entre eles, sem nenhuma intermediação. Nosso intuito era deixá-los à vontade para conhecermos suas ideias sobre o conceito de funções.

Acreditamos que com um exercício simples e natural, presente no cotidiano da maioria, eles seriam capazes de desenvolver as habilidades primárias necessárias no estudo de funções. Neste caso esperávamos que eles fossem capazes de reconhecer as variáveis e as constantes do problema, relacioná-las matematicamente e de responder corretamente cada item sem que fosse usada a linguagem algébrica relacionada ao conceito de função.Os alunos poderiam usar o recurso de construir uma tabela relacionando o gasto com o número de diárias, e o custo total da viagem dependendo do número de dias em que o casal fica na pousada.

Esta situação é uma ótima oportunidade de mostrar a matemática presente em seu universo ou de "levar" a matemática para situações cotidianas.

Um casal deseja fazer uma viagem de férias, para isso faz a contabilidade dos gastos que irão realizar. Eles calculam que com os pedágios e combustíveis (ida e volta) gastarão R$200,00. Para ficarem mais tranquilos, vão se hospedar em uma pousada que cobra R$250,00 de diária, com as refeições incluídas. Considerando que eles não sabem quantos dias vão ficar nesta pousada e que os outras gastos menores não serão incluídos, responda:

1. Quais serão os gastos fixos e quais são variáveis?
2. O custo total da viagem é fixo ou variável?
3. O custo total varia de acordo com qual gasto da viagem?
4. Calcule o valor da gasto com as diárias se o casal ficar na pousada durante:
   a) 5 dias b) 10 dias c) 15 dias d) 30 dias
   e) 0 dias (caso não encontrem quartos disponíveis e voltem para casa)
5. Calcule o custo da viagem se o casal ficar na pousada durante:
   a) 5 dias b) 10 dias c) 15 dias d) 30 dias
   e) 0 dias (caso não encontrem quartos disponíveis e voltem para casa)

2° etapa: Intermediação e Discussão das respostas

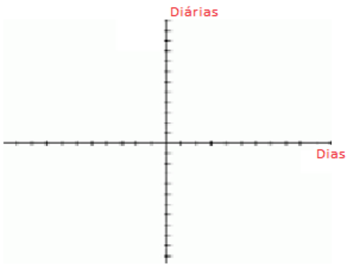
Após deixarmos os alunos respondendo livremente as questões por 10min, fizemos uma intermediação para houvesse uma a correção dos exercícios e observação das respostas obtidas. Nesse momento o professor pode trabalhar a linguagem informal, mais acessível ao aluno, ainda não é preciso falar das definições e regras contidas no conceito de funções.

3°etapa: Identificar e localizar os pontos no Plano Cartesiano e estabelecer relações entre conceito de função e situações práticas do cotidiano do aluno.

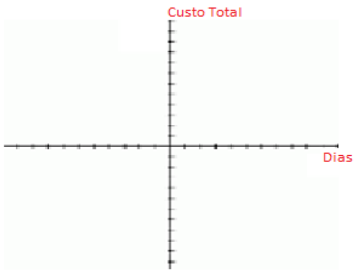
Aqui os alunos deveriam trabalhar a parte gráfica e algébrica do conceito, ainda sem o uso da definição de função. Na primeira questão esperávamos que os alunos questionassem alguns detalhes sobre os gráficos: Será uma reta ou um conjunto de pontos discretosalinhados? Será que serão iguais, tendo variáveis diferentes para x e y?O ponto (0,0) é ponto de partida nos dois gráficos?. Na segunda questão esperávamos que eles conseguissem relacionar algebricamente as variáveis, além de comparar com a representação gráfica da primeira questão. Foi observado se o aluno conseguia trabalhar as duas representações, apesar de acreditarmos que a maioria se saísse melhor na parte algébrica, pois, na maioria das vezes, esta representação é o foco das aulas sobre função, enquanto a gráfica é pouco trabalhada.

6. Use os planos cartesianos para representar os gastos realizados pelo casal se ficarem hospedados por 5, 10, 15 ou 30 dias.

a)



b)



7. Encontre uma expressão algébrica que determina:

a) o gasto com as diárias se ficarem t dias na pousada.

b) o custo da viagem se ficarem t dias na pousada.

4° etapa: **Intermediação e Discussão das respostas**

Deixamos os alunos livres por 10 minutos novamente e em seguida fizemos a intermediação, assim como na 2ª etapa. Desta vez começamos a trabalhar uma linguagem uma pouco mais formal, utilizando mais os conceitos matemáticos em conjunto com a intuição do aluno. Neste momento buscamos fazer com que eles entendessem a necessidade de relacionar as diferentes representações de um conceito. Para ajudá-los a montar os gráficos usamos o papel milimetrado.

5° etapa: Exercícios conceituais

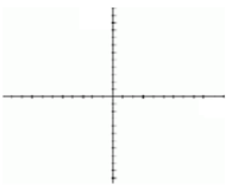
Na quinta etapa o grupo já trabalhava com o conceito de função, por isso achamos importante explorarexercícios conceituais, necessários para o desenvolvimento deste conceito na mente do estudante. Era esperado que os alunos respondessem corretamente a questão 2, substituindo os valores de x e encontrando os respectivos valores de f(x), assim comoencontrar x dada f(x). Na questão 3esperávamos que os alunos conseguissem representar graficamente os dados encontrados na parte algébrica. Novamente trabalhando a comunicação entre as representações gráfica e algébrica da função.

8.Dada a $f(x) = 2x + 10$, calcule:

a) f(5) b) f(10) c) f(15) d) f(30)

e) x tal que $f(x) = 0$ f) x tal que $f(x) = -6$

9. Dê a representação gráfica dos valores encontrados anteriormente no plano cartesiano abaixo:



10. Encontre uma função g(x) que faz a seguinte relação: g(0)=2 e g(3)=5.

E na questão 5, pretendíamos trabalhar a parte "prática" do conceito, entendemos que este exercício é bastante importante no processo de compreensão do conceito de função. Esperávamos que os estudantes conseguissem exibir uma função com as características apresentadas. Não determinamos o processo a ser usado, não era necessário encontrar uma f(x) "tradicional" e "bem comportada", mas desconfiamos que a maioria encontraria uma função do tipo $f(x)= ax + b$, pois eles trabalham muito com este tipo de exercício no dia-a-dia escolar.

6° etapa:Intermediação e Discussão das respostas

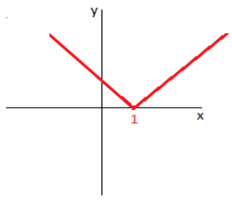
Fizemos o mesmo que nas etapas intermediadoras anteriores, deixamos os alunos livres por 10 minutos novamente e em seguida fizemos as devidas intervenções, considerando o que foi respondido por cada um deles.

7° etapa: Interação entre as representações algébrica e gráfica de uma função

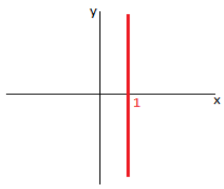
Após trabalharmos as relações intuitivas entre as representações algébrica e gráfica, pretendíamos, nesta etapa, trabalhar a interação entre as representações com um olhar mais formal, usando a definição do conceito e algumas funções "incomuns" à maioria.

11. Faça as correspondências corretas entre os gráficos e as expressões algébricas abaixo, dizendo se cada um deles pode representar uma função.

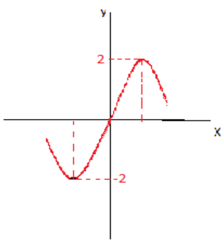
(A)



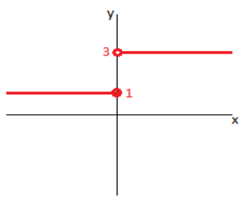
(B)



(C)



(D)



( ) $y = \begin{cases} -x+1, \text{ se } x<1 \\ x-1, \text{ se } x>1 \text{ ou } x=1 \end{cases}$

( ) $x = 1$

( ) $y = \begin{cases} 1, \text{ se } x<0 \text{ ou } x=0 \\ 3, \text{ se } x>0 \end{cases}$

( ) $y = 2\text{sen}x$

( ) $y=1$

( ) $y = \begin{cases} 2x^2, \text{ se } x<0 \text{ 0u } x=0 \\ -2x^2, \text{ se } x>0 \end{cases}$

8° etapa: Conceito de função revisitado e reconstrução do mesmo

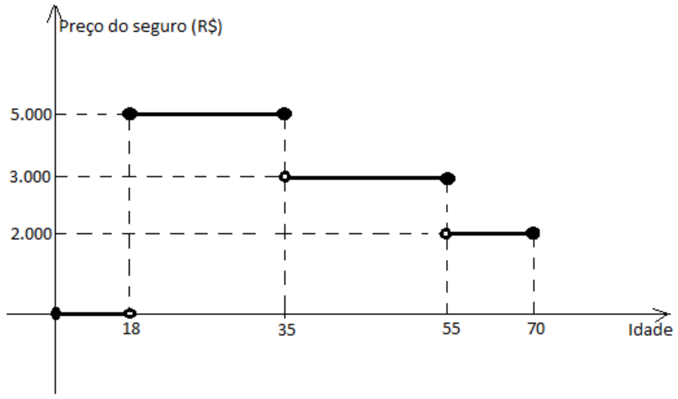
Nesta etapa buscamos rever as formas com que os alunos aprenderam a definir uma função e, a partir daí, reconstruímos a definição do conceito. Para auxiliá-los na parte gráfica usamos o software Winplot em alguns casos, , de maneira bem informal, com o intuito de fazê-los entender, por exemplo, como se comporta o gráfico de uma função afim ou quadrática quando variamos cada um de seus coeficientes.

9° etapa: Outra situação problema e a definição do conceito

Após definirmos formalmente o conceito de função na etapa anterior, trabalhamos uma nova situação problema com a mesma pretensão do primeiro exercício na etapa 1, porém, desta vez, esperávamos que eles fossem capazes de identificar o conceito de função envolvida na questão, relacionando corretamente a parte algébrica e gráfica, mesmo diante de um gráfico "incomum". O problema em questão era o seguinte:

A compra de automóveis aumentou bastante nas ultimas décadas e, com elas, a contratação de seguros automotivos. Cada contrato com a seguradora garante ao segurado 12 meses de serviços e o valor do seguro é resultado de um cálculo que leva em conta os serviços de cobertura contratados (colisão, incêndio, roubo, responsabilidade civil e serviços adicionais), o perfil de risco do segurado (baseado em informações pessoais e dados do veículo) e outros itens.

Em uma seguradora o item mais importante é a idade do segurado e o valor a ser pago por uma pessoa com idade entre 18 e 70 anos de vida varia de acordo com o seguinte gráfico:



A partir dos dados fornecidos anteriormente responda:

1) Quanto pagará uma pessoa que deseja adquirir o seguro e tem:
   a) 22 anos b) 35 anos c) 45 anos d) 55 anos e) 56 anos
2) O gráfico pode representar uma função? Justifique utilizando a definição do conceito de função.
3) É possível determinar uma lei de formação para essa função? Em caso afirmativo, represente-a.

10° etapa: Intermediação e considerações finais.

Nesta última parte da sequência didática intervimos para sanar e corrigir qualquer tipo de dúvida relativa a esta revisão do conceito de função. Percebemos que, apesar de conhecer e trabalhar bem com o conceito, os alunos possuem dificuldades ao escrever sobre função, e para verificar o que interiorizaram sobre o conceito de função após as 10 etapas da sequência, fizemos mais quatro perguntas:

1) Em sua opinião, como podemos definir uma função? Em que se baseia para defini-la?

2) Você teve ou tem dificuldades para entender este conceito? Quais são elas?

3) Tente descrever como foi seu primeiro contato com o conceito de função.

4) Em sua opinião, qual seria a melhor maneira de aprender este conceito?

4.2.Análise a posteriori e validação

Como comentado anteriormente, sabemos que os estudantes têm tido problemas em fazer a ligação entre as diferentes representações de funções e, como educadores, precisamos pensar em maneiras de lidar com todas estas dificuldades em sala de aula. O questionário proposto nos revelou respostas muito interessantes sobre o conceito de função.

Em relação à analise quantitativa, obtivemos os seguintes resultados:

1) Primeiro Bloco

Questão 1: 6 alunos acertaram e 1 aluno respondeu de forma incompleta

Questão 2, 3 e 4: Todos acertaram

Questão 5: 6 alunos acertaram e 1 aluno errou

Questão 6: 1 aluno acertou, 4 erraram completamente, 1 errou o item b) e 1 não fez

Questão 7: Todos acertaram o item a) e 1 errou o intem b)

Questão 8: 5 acertaram todos o itens, 1 aluno errou apenas o item f) e 1 aluno errou itens e) e f)

Questão 9: 5 alunos acertaram , 1 aluno errou e 1 não fez

Questão 10: Todos os alunos acertaram

Questão 11: 6 acertaram e 1 errou

2) Segundo Bloco

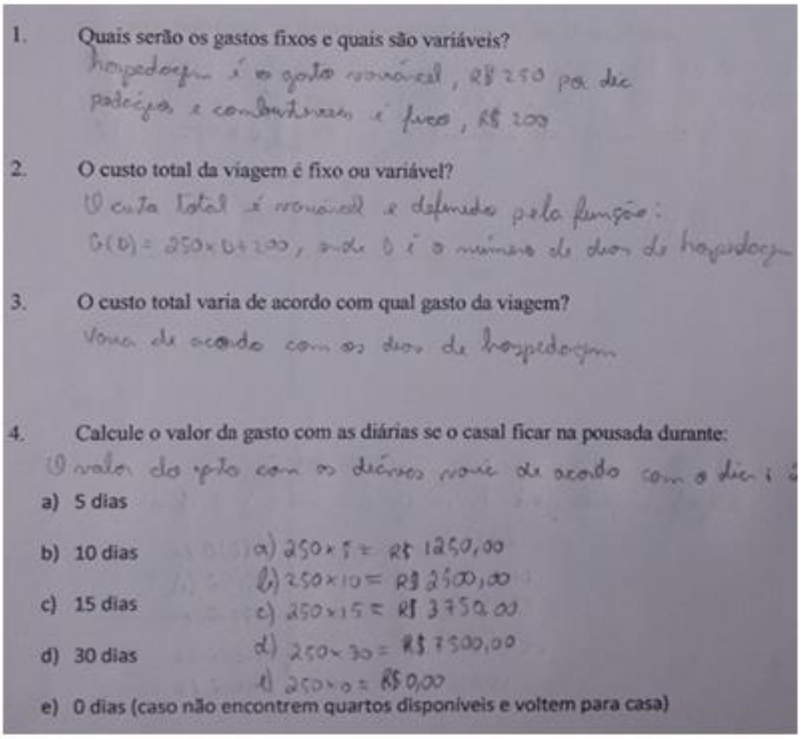
Questão 1: 6 acertaram e 1 errou.

Questão 2: Todos disseram "sim". Alguns citaram exemplos ou regras para justificar.

Questão 3: Todos responderam "sim". 4 esboçaram a lei de formação.

Na análise qualitativa dos dados colhidos, destacamos, de modo geral, algumas respostas que reforçam que o estudo de função deve decorrer da necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências e generalizar. Caraça (1989) propõe a introdução e definição do conceito de função por meio de uma série de reflexões históricas e filosóficas a respeito da utilização de instrumentos matemáticos, a fim de investigar fenômenos naturais que de algum modo evidenciam uma relação de dependência. Por isso começamos a sequência com um problema inicial e pudemos constatar que:

- Nas primeiras questões foi explorada a linguagem algébrica dos alunos, a qual sabemos que é indispensável para expressar a relação entre as grandezas e modelar situações problemas. Esperávamos que os estudantes conseguissem desenvolver intuitivamente esta representação do conceito e, confirmando as expectativas, percebemos que por meio de uma situação acessível ao nível do aluno essa linguagem algébrica se desenvolve com mais naturalidade, sem que o aluno pense que o conceito de função está estagnado e restrito aos "calcule o f(x)" ou "determine a raiz", diminuindo a chance de não desenvolverem a noção de variação e dependência, percebendo a importância deste conceito fora do âmbito matemático.


1. Quais serão os gastos fixos e quais são variáveis?
hospedagem é o gasto variável, R$ 250 por dia
padaria e combustível é fixo, R$ 200

2. O custo total da viagem é fixo ou variável?
O custo total é variável e definido pela função:
G(D) = 250×D+200, onde D é o número de dias de hospedagem

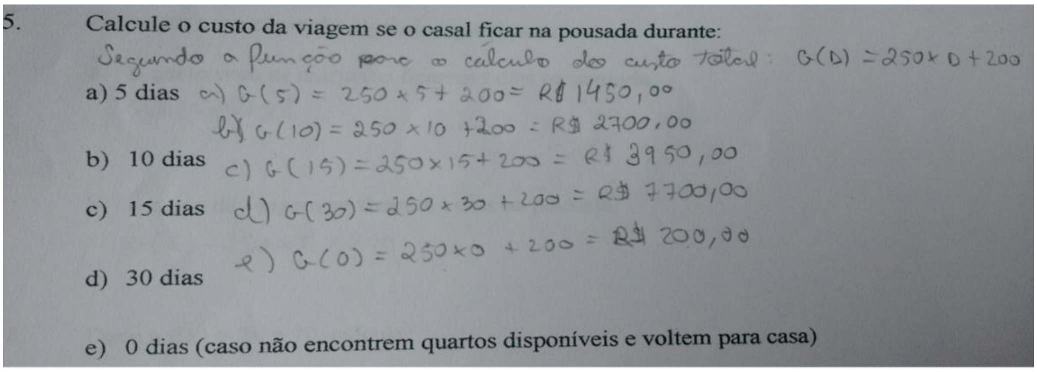
3. O custo total varia de acordo com qual gasto da viagem?
Varia de acordo com os dias de hospedagem

4. Calcule o valor da gasto com as diárias se o casal ficar na pousada durante:
O valor do gasto com as diárias varia de acordo com o dia
a) 5 dias
b) 10 dias
c) 15 dias
d) 30 dias
e) 0 dias (caso não encontrem quartos disponíveis e voltem para casa)

a) 250×5 = R$ 1250,00
b) 250×10 = R$ 2500,00
c) 250×15 = R$ 3750,00
d) 250×30 = R$ 7500,00
e) 250×0 = R$ 0,00

Fig.45: Referência natural às propriedades do conceito de função.

Destacamos a importância de oestudante atuar inicialmente como um observador e experimentador, que ele revele suas reflexões intuitivas do comportamento das variáveis observadas e que forme um “pré-conceito de função” em sua linguagem. Este aluno também deverá ser capaz de quantificar, em um momento mais avançado, as variáveis pré-concebidas e analisadas informalmente, seja por tabelas, gráficos ou fórmulas e, por fim, definir o conceito formalmente.



5. Calcule o custo da viagem se o casal ficar na pousada durante:

Segundo a função para o calculo do custo total: G(D) = 250 x D + 200

a) 5 dias

a) G(5) = 250 x 5 + 200 = R$ 1450,00

b) G(10) = 250 x 10 + 200 = R$ 2700,00

b) 10 dias

c) G(15) = 250 x 15 + 200 = R$ 3950,00

c) 15 dias

d) G(30) = 250 x 30 + 200 = R$ 7700,00

e) G(0) = 250 x 0 + 200 = R$ 200,00

d) 30 dias

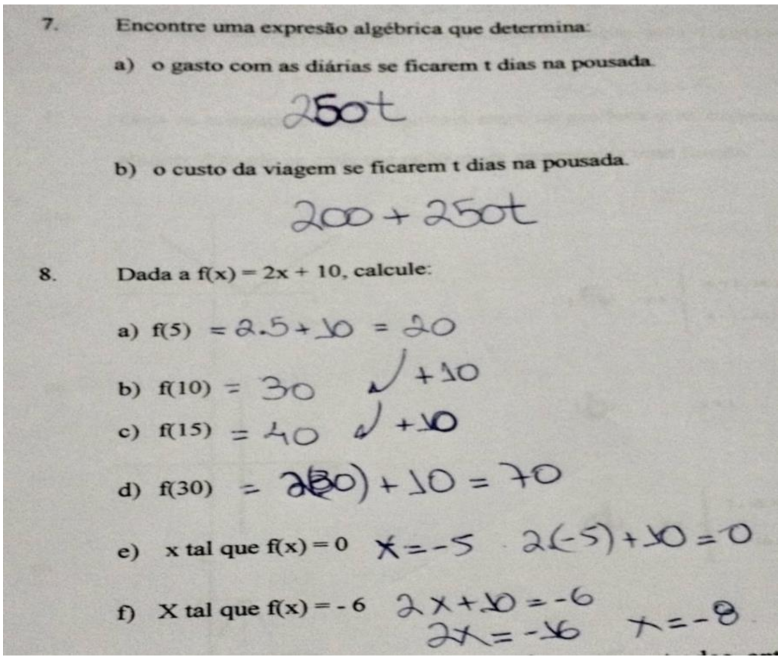
e) 0 dias (caso não encontrem quartos disponíveis e voltem para casa)

Fig.46: A imagem conceitual do conceito evocada durante os exercícios.

Como dito anteriormente, era esperado que os estudantes respondessem cada item utilizando sua intuição, sem que fosse necessário trabalhar o conceito de função, porém percebemos que alguns deles responderam usando a linguagem matemática do conceito, indicando que, mesmo sendo um exercício que relata uma situação cotidiana, sem a exigência formal do conceito, a imagem conceitual evocada, ou seja, o conjunto de figuras mentais mais "forte" e utilizado para solucionar o problema contém uma grande parte da estrutura algébrica e simbólica do conceito de função.

Neste sentido, afirmamos que houve compreensãodo conceito abordado na questão, pois acreditamos que o estudante compreende um conceito quando consegue formar uma imagem conceitual bem definida, construída por experiências vividas por ele, apesar de nada garantir que esta imagem conceitual é necessariamente coerente, podendo conter propriedades contraditórias. Por esse motivo, é preciso cercar o estudante de situações e exercícios com as diferentes representações do conceito, fazendo comque ele reveja e relembre as impressões e experiências relacionadas ao mesmo, fortalecendo a ligação entre a sua imagem conceitual e a definição do conceito.

Pensamos que é necessário dar significado para os exercícios trabalhados em sala de aula, mostrando aplicações ou relações do conceito abordado no exercício com situações cotidianas, pois percebemos que todosos estudantes (mesmo aqueles que não acertam por se confundirem nas contas ou por desatenção) executam com muita facilidade os cálculos e manipulações algébricas, porém encontram certa dificuldade ao fazerem a equalização correta de determinadas situações problema, apesar de fazê-las na maioria dos casos analisados, como por exemplo na figura 47. Ou seja, é importante também, além de trabalhar as diferentes representações, exercitar diferentes habilidades dentro de uma mesma representação, mostrando as variadas formas de representar uma determinada situação.



7. Encontre uma expresão algébrica que determina:

a) o gasto com as diárias se ficarem t dias na pousada.

250t

b) o custo da viagem se ficarem t dias na pousada.

200 + 250t

8. Dada a f(x) = 2x + 10, calcule:

a) f(5) = 2.5 + 10 = 20

b) f(10) = 30 +10

c) f(15) = 40 +10

d) f(30) = 2(30) + 10 = 70

e) x tal que f(x) = 0 x = -5 2(-5) + 10 = 0

f) X tal que f(x) = - 6 2x + 10 = -6 2x = -16 x = -8

Fig.47:Habilidade para calcular o valor de f(x) para diversos valores de x.

A compreensão de um conceito, assim supomos, se inicia ou se completa quando o estudante consegue apresentar uma imagem conceitual coerente com a definição do mesmo, associando as palavras e as figuras mentais do estudante ao significado correto do objeto em questão, seja relacionando as diferentes representações ou explorando as possibilidades dentro de uma mesma representação.

Observamos, na maioria dos casos, que alguns fatores interferem no processo de aquisição dos conteúdos matemáticos e alguns aspectos devem ser observados no momento do planejamento e execução de uma proposta pedagógica. Por exemplo, restringir o estudo gráfico de funções às funções "bem comportadas" ou de domínio contínuo induz os alunos a considerarem que o gráfico de uma função deve ser sempre uma reta ou linha contínua, desconsiderando a função com o domínio discreto ou com mais de uma lei de formação.

As dificuldades de representar a parte gráfica são bastante comuns e uma possível causa está na forma como é ensinada. Na maioria das vezes o primeiro contato dos alunos com a representação gráfica se desenvolve a partir da representação algébrica de uma função, a qual é usada para construir uma tabela de duas colunas, x e y, representando pares ordenados.Assim, com as coordenadas obtidas, marcam os pontosno plano cartesiano e, consequentemente, traça-se o gráfico da função, geralmente ligando os pontos encontrados.

Não estamos condenando este processo, porém afirmamos ser necessário haver uma complementação que dê significado ao trabalho que está sendo feito, pois por muitas vezes o estudante não consegue ir bem nem na parte algébrica nem na gráfica, se confundindo ao representar os pontos encontrados na parte algébrica no plano cartesiano (fig.48), demonstrando uma fragilidade na transição trabalhada.

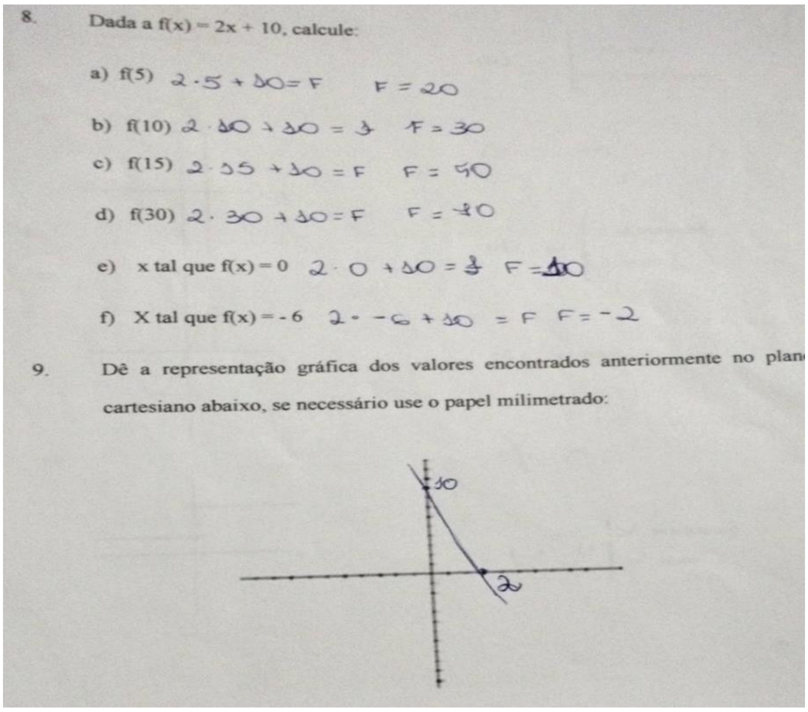
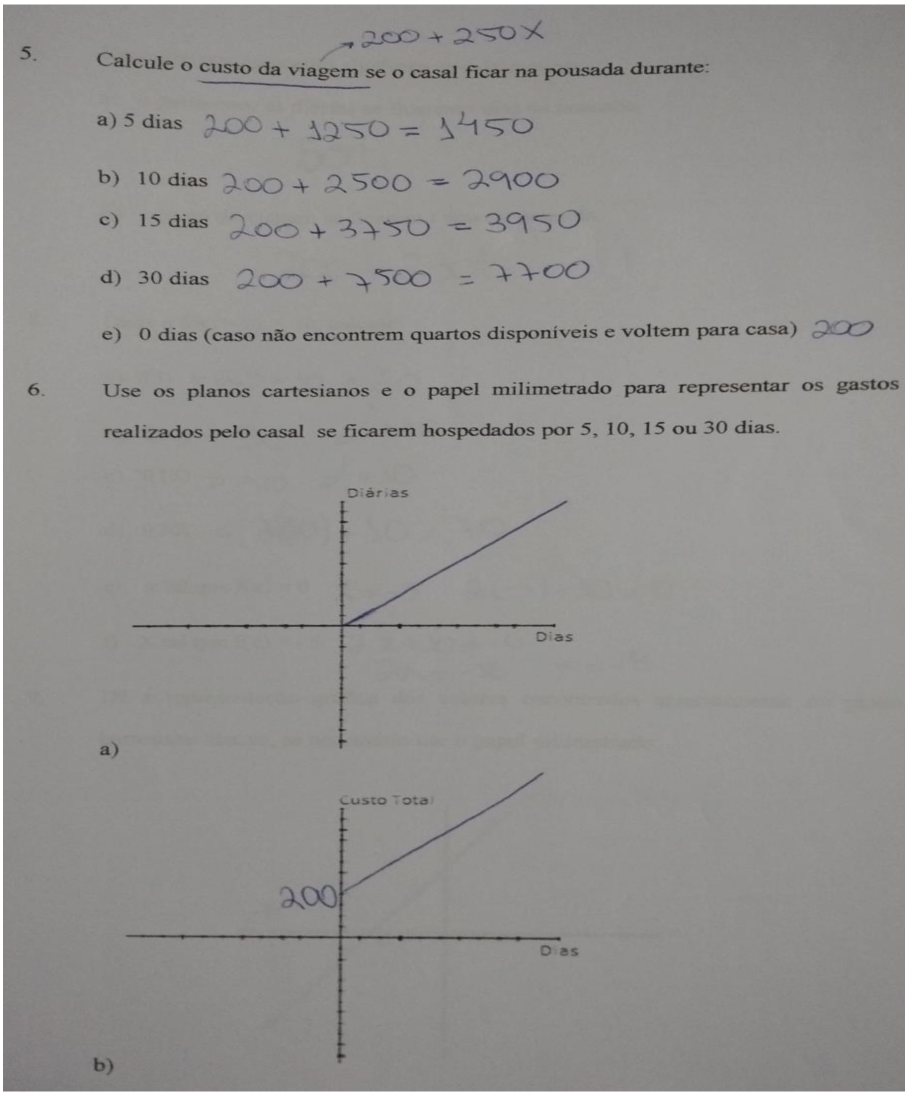


Fig.48: Exemplo de fragilidade tanto na parte algébrica quanto na gráfica.

Além disso, é muito comum que a passagem inversa deste processo não sejaexplorada, assim como, a variação gráfica de uma função com a mudança de seu domínio, o que desencadeia uma série de dificuldades, dando início a um potencial obstáculo epistemológico. Por exemplo, na resposta da figura 49, o aluno esboça um gráfico na forma de reta, ignorando o domínio discreto, provavelmente por definir algebricamente a função no exercício anterior e desconsiderar que não existe a possibilidade do casal pagar por 0,5 dia na pousada. Quando a questão foi elaborada acreditávamos, o que se comprovou, que a grande maioria não consideraria o domínio discreto, pois este tipo de exercício é pouco trabalhado e, além disso, a forte imagem conceitual que o gráfico de uma função do primeiro grau é sempre uma reta continuaria a desviar a atenção dos estudantes que responderiam à questão.


5. Calcule o custo da viagem se o casal ficar na pousada durante: → 200 + 250X

a) 5 dias 200 + 1250 = 1450

b) 10 dias 200 + 2500 = 2900

c) 15 dias 200 + 3750 = 3950

d) 30 dias 200 + 7500 = 7700

e) 0 dias (caso não encontrem quartos disponíveis e voltem para casa) 200

6. Use os planos cartesianos e o papel milimetrado para representar os gastos realizados pelo casal se ficarem hospedados por 5, 10, 15 ou 30 dias.

Fig.49: Desatenção ao domínio discreto.

Percebemos outro fato interessante na figura 50, onde o estudante liga os pontos a fim de formar uma reta, como se não fizesse sentido desenhar pontos isolados no plano. Este é um comportamento bastante comum entre os estudantes (experiência própria em sala de aula), o qual indica uma falha ou acidente na construção do conceito causada, provavelmente, por uma imagem conceitual incompleta, onde as figuras mentais relativas aos gráficos do primeiro grau são retas cujos pontos devem estar sempre ligados.

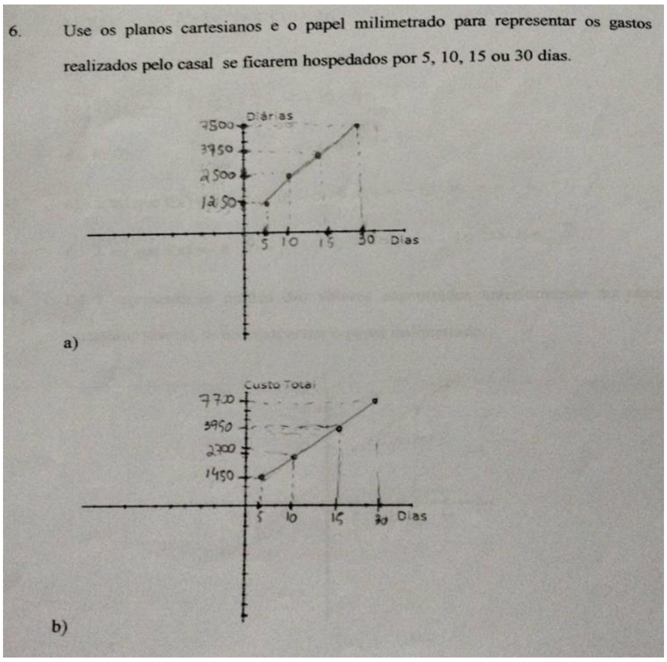
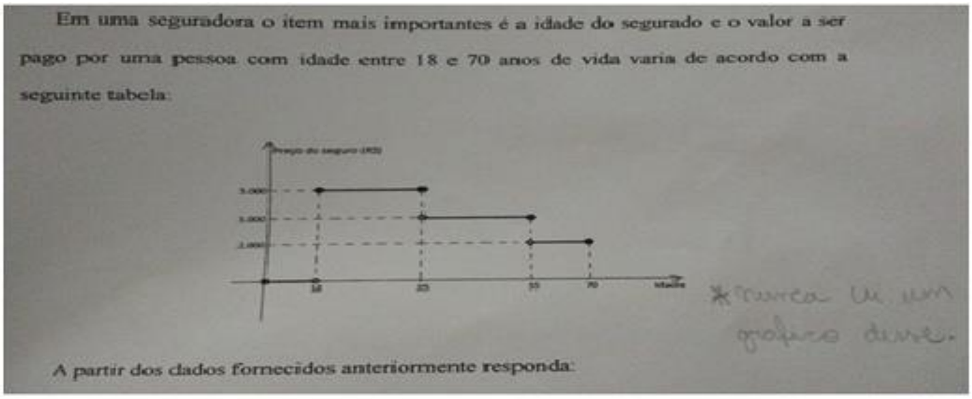


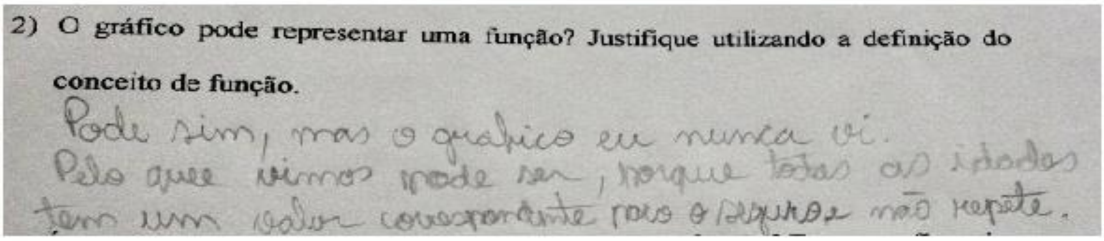
Fig.50: O aluno liga os pontos a fim de formar uma reta.

Já esperávamos também o estranhamento deles em relação à função constante por partes, como na figura 51. No exemplo, o estudante não reconhece o gráfico, apesar de ser comum em alguns livros do Ensino Médio, porém admite a existência da função usando corretamente a definição como justificativa, sinalizando que mesmo com uma imagem conceitual incompleta é possível perceber a existência da função quando a definição do conceito está corretamente relacionada com essa imagem conceitual.


Em uma seguradora o item mais importantes é a idade do segurado e o valor a ser pago por uma pessoa com idade entre 18 e 70 anos de vida varia de acordo com a seguinte tabela:

*nunca vi um gráfico desse.

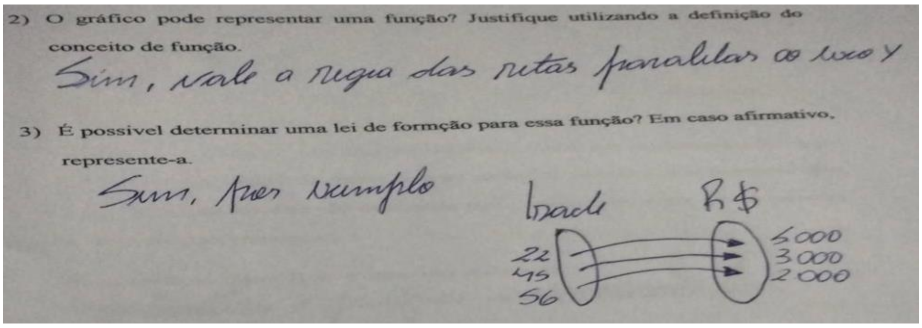
A partir dos dados fornecidos anteriormente responda:


2) O gráfico pode representar uma função? Justifique utilizando a definição do conceito de função.

Pode sim, mas o grafico eu nunca vi.
Pelo que vimos pode ser, porque todas as idades
tem um valor correspondente para o seguro não repete.

Fig.51: Estranhamento ao tipo de gráfico não convencional.

Já no exemplo da figura 52 pudemos perceber que o estudante estranha o gráfico "mal comportado", apesar de confirmar a existência da função pelo uso da técnica de traçar retas paralelas ao eixo das ordenadas. Isso indica que a representação algébrica e as aplicações do conceito formam uma imagem conceitual muito forte, enquanto a representação gráfica não está bem definida ou é formada por poucas figuras mentais, como por exemplo, o diagrama de flechas usado na questão 3 (fig.52).O fato de o estudante estranhar o gráfico, mas usar técnicas gráficas, como as retas paralelas e o diagrama de flechas para definir a função, nos indica que a representação gráfica compõe uma pequena e fragmentada parte da imagem conceitual do estudante analisado, com poucas figuras mentais e, provavelmente, sem maiores ligações com a definição do conceito.


2) O gráfico pode representar uma função? Justifique utilizando a definição do conceito de função.

Sim, vale a regra das retas paralelas ao eixo Y

3) É possivel determinar uma lei de formção para essa função? Em caso afirmativo, represente-a.

Sim, por exemplo

Fig. 52: Estratégias para justificar a existência da função.

Para Trindade e Moretti (2000), além da transição entre as diversas formas de representar uma função, o professor deve explorar a representação verbal de funções:

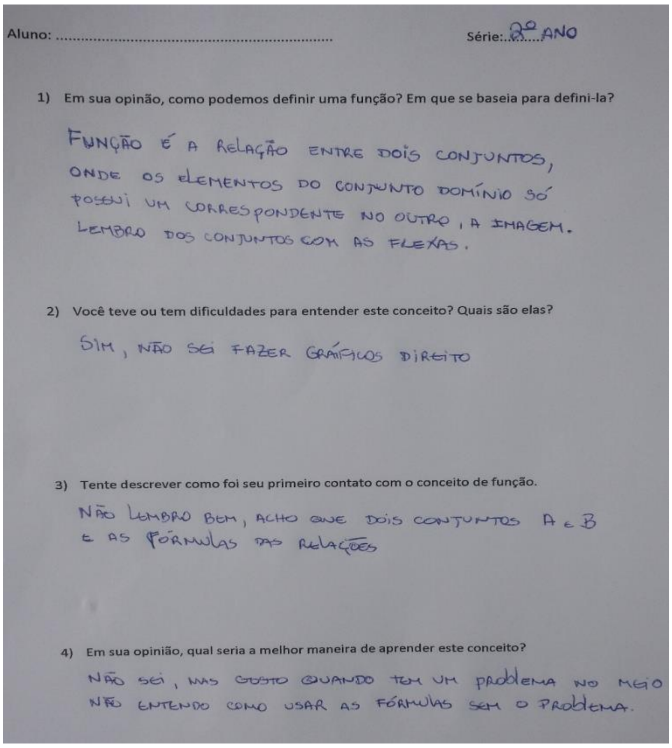
> Os alunos devem ser estimulados a descreverem em linguagem corrente a lei que rege um fenômeno e a apresentarem argumentos que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, para então representá-la em linguagem algébrica ou geométrica. [...] A utilização da linguagem oral e escrita auxilia o aluno a organizar o próprio raciocínio, a fazer a passagem de uma forma de representação para a outra e explicitação das noções de variável, dependência, regularidade e generalizações. (TRINDADE e MORETTI, 2000, p. 43-44).

Com isso, percebemos a grande importância de relacionar as representações algébricas e gráficas desde as primeiras aulas de função, mostrando principalmente quais são as variáveis, a relação de dependência entre elas, a definição de domínio e contra domínio, como elas se comportam no plano cartesiano e organizar um raciocínio que mostre a passagem entre essas representações.

O comportamento natural de analisar separadamente o gráfico de uma função e sua expressão algébrica, por exemplo, deve ser complementado com um estudo de casos em que seja possível relacionar essas representações. Acreditamos que o aluno compreenderá com mais clareza o que define uma função ou quais são as condições necessárias para que um gráfico represente uma relação funcional se as diferentes representações forem trabalhadas em conjunto.

Como exemplo, citamos uma das finalidades do ensino da matemática para o ensino médio que é reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados a diferentes representações (BRASIL, 1999, p.42). Portanto, trabalhar com as diversas representações de um mesmo conceito, permite ao estudante enxergá-lo de forma variada e, consequentemente, criar conexões entre diversos conceitos matemáticos estudados.

Por fim, pudemos comprovar a validade de nossos argumentos e ideias aqui expostas pelas respostas de alguns alunos ao final das atividades. Sentimos a necessidade de reservar um espaço para ouvirmos nossos alunos, para que falassem e escrevessem livremente sobre o conceito estudado.



Aluno: .... Série: 2º ANO

1) Em sua opinião, como podemos definir uma função? Em que se baseia para defini-la?

FUNÇÃO É A RELAÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS, ONDE OS ELEMENTOS DO CONJUNTO DOMÍNIO SÓ POSSUI UM CORRESPONDENTE NO OUTRO, A IMAGEM. LEMBRO DOS CONJUNTOS COM AS FLEXAS.

2) Você teve ou tem dificuldades para entender este conceito? Quais são elas?

SIM, NÃO SEI FAZER GRÁFICOS DIREITO

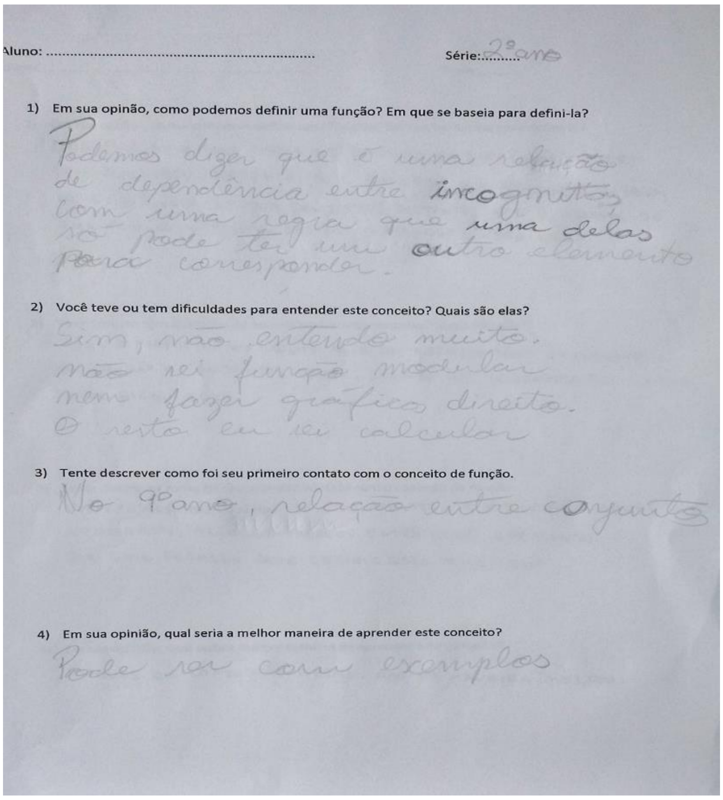
3) Tente descrever como foi seu primeiro contato com o conceito de função.

NÃO LEMBRO BEM, ACHO QUE DOIS CONJUNTOS A e B E AS FÓRMULAS DAS RELAÇÕES

4) Em sua opinião, qual seria a melhor maneira de aprender este conceito?

NÃO SEI, MAS GOSTO QUANDO TEM UM PROBLEMA NO MEIO NÃO ENTENDO COMO USAR AS FÓRMULAS SEM O PROBLEMA.

Fig. 53



Aluno: .... Série: 2º ano

1) Em sua opinião, como podemos definir uma função? Em que se baseia para defini-la?

Podemos dizer que é uma relação de dependência entre incognitas, com uma regra que uma delas só pode ter um outro elemento para corresponder.

2) Você teve ou tem dificuldades para entender este conceito? Quais são elas?

Sim, não entendo muito. não sei função modular nem fazer gráficos direito. O resto eu sei calcular

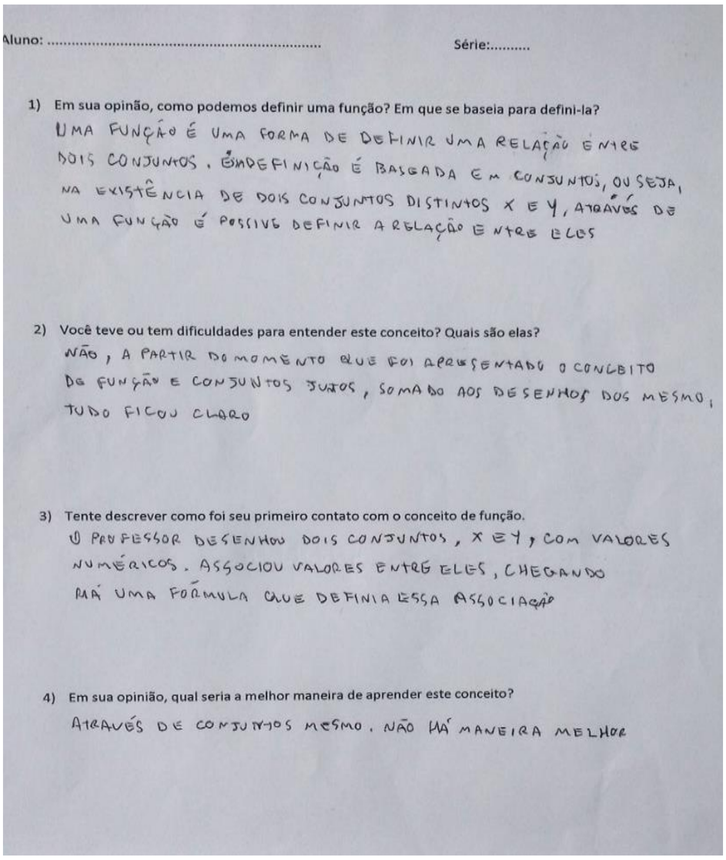
3) Tente descrever como foi seu primeiro contato com o conceito de função.

No 9º ano, relação entre conjuntos

4) Em sua opinião, qual seria a melhor maneira de aprender este conceito?

Pode ser com exemplos

Fig. 54


Aluno: .... Série:..........

1) Em sua opinião, como podemos definir uma função? Em que se baseia para defini-la?

UMA FUNÇÃO É UMA FORMA DE DEFINIR UMA RELAÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS. A DEFINIÇÃO É BASEADA EM CONJUNTOS, OU SEJA, NA EXISTÊNCIA DE DOIS CONJUNTOS DISTINTOS X E Y, ATRAVÉS DE UMA FUNÇÃO É POSSIVEL DEFINIR A RELAÇÃO ENTRE ELES

2) Você teve ou tem dificuldades para entender este conceito? Quais são elas?

NÃO, A PARTIR DO MOMENTO QUE FOI APRESENTADO O CONCEITO DE FUNÇÃO E CONJUNTOS JUNTOS, SOMADO AOS DESENHOS DOS MESMO, TUDO FICOU CLARO

3) Tente descrever como foi seu primeiro contato com o conceito de função.

O PROFESSOR DESENHOU DOIS CONJUNTOS, X E Y, COM VALORES NUMÉRICOS. ASSOCIOU VALORES ENTRE ELES, CHEGANDO NÁ UMA FORMULA QUE DEFINIA ESSA ASSOCIAÇÃO

4) Em sua opinião, qual seria a melhor maneira de aprender este conceito?

ATRAVÉS DE CONJUNTOS MESMO. NÃO HÁ MANEIRA MELHOR

Fig.55

Podemos perceber na figura 53 que o estudante confirma a importância da "problematização" no ensino de funções, do processo de aquisição deste conceito ser trabalhado de forma contextualizada. Além disso, percebe-se que, apesar de definir bem o conceito, ele sente dificuldade de representá-lo graficamente, apontando mais uma vez para a carência do estudo gráfico de funções. Alguns alunos sinalizaram grandes dificuldades em correlacionar as noções intuitiva e formal das funções, assim como em relacionar suas diferentes representações, como nas respostas obtidas da figura 54.

Assim, acreditamos que com essas respostas temos a comprovação de que precisamos renovar o ensino de funções, incentivando a investigação matemática, pois durante as atividades percebemos que a partir de uma simples situação problema é possível criar um horizonte de possibilidades. Entendemos que o ensino "formal" também é capaz de capacitar (exemplo claro na resposta do estudante na figura 55), porém é necessário que haja uma complementação.

Sendo assim, sugerimos a introdução do conceito de função por meio de uma situação problema aliada ao uso de um software matemático que auxilie a manipulação e visualização dos dados. Trabalhando oenormepotencial interdisciplinar que esse conceito possui, por exemplo, no estudo dos movimentos e fenômenos na Física, na decomposição de algumas substâncias radioativas e no crescimento de uma população de bactérias na Bio-Química ou em uma abordagem mais aprofundada da matemática. Desse modo o conceito se torna mais acessível e ganha significado na mente do estudante.

5. Considerações Finais

Nesta pesquisa, nos propusemos aanalisar as dificuldades encontradas por estudantes do Ensino Médio no processo de construção do conceito de função. Pretendíamos revelar, de modo geral, as imagens conceituais evocadas, os obstáculos epistemológicos e os "acidentes do conceito" que surgem neste processo à compreensão do conceito estudado. Para tanto, consideramos os resultados de algumas pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de funções e, principalmente, os resultados dos questionários aplicados e da sequência didática proposta nesta pesquisa, validados pela teoria da Engenharia Didática.

Após a análise efetiva das repostas ao primeiro questionário e de confrontarmos os resultados das análises à priori e à posteriori, pudemos responder à primeira pergunta de pesquisa: **Que obstáculos epistemológicos surgem, em geral, durante o processo de aquisição do conceito de Função?**

Esta análise apontou que os estudantes investigados têm dificuldades em relacionar as diferentes representações de uma função, admitem apenas a existência da função como expressão algébrica ou um gráfico, consideram algumas regras ou fragmentos do conceito como a própria definição, entre outras dificuldades. Foi possível concluir que, no geral, os obstáculos epistemológicos que surgem durante o processo de aquisição do conceito de Função, assim como os "acidentes do conceito", são gerados por imagens conceituais incompletas ou deturpadas, várias vezes evocadas durante as atividades.

Ficou claro também que os estudantes têm dificuldades em fazer a correspondência correta entre as diferentes representações de uma função, apesar de terem acesso a estas em sala de aula. Em grande parte, os alunos utilizam apenas uma representação do conceito, na maioria dos casos a representação algébrica. Isto prejudica o processo de aquisição do conceito de função, levando em consideração que:

> há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato (DUVAL, 2003, p. 31).

Em geral, o aluno utiliza apenas uma representação, que ocupa e domina grande parte da imagem conceitual e, provavelmente, é a escolha utilizada para definir o conceito, pois se trata da figura mental mais forte ou a que mais se destaca entre as demais.

Observamos grande dificuldade em lidar com funções definidas por mais de uma sentença e de traçar ou reconhecer o gráfico de uma função a partir de sua expressão algébrica. Esse comportamento foi constatado nas respostas obtidas no questionário aplicado aos alunos do Ensino Médio (grupo1).

Isso indica que uma das representações ocupa e domina grande parte de sua imagem conceitual e, provavelmente, é a escolha utilizada para definir o conceito, pois se trata da figura mental mais forte ou a que mais se destaca entre as demais.

Frente a essas constatações iniciais e dando continuidade ao estudo, investigamos as respostas dos estudantes a fim de conhecermos a fundo suas imagens conceituais e, assim, responder à segunda pergunta de pesquisa: **Quais são as imagens conceituais evocadas por alguns alunos do E.M de uma escola particular durante as aplicações do questionário e da sequência didática?**

Relembramos que a literatura que subsidiou nossa análise e conclusões vem principalmente dos estudos de Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991) sobre Imagem Conceitual e Definição Conceitual. Com essa fundamentação teórica, foi possível revelar os elementos que compõem a imagem conceitual dos estudantes que participaram de nossa pesquisa.

É importante destacar que as conclusões sobre as imagens conceituais dos estudantes sobre o conceito de função podem ser confundidas com os obstáculos epistemológicos citados anteriormente, pois possuem características bem parecidas. Ressaltamos que os obstáculos se manifestam pela incompreensão de certos problemas ou pela impossibilidade de resolvê-los com eficácia (TRINDADE, 1996), diferenciando-se das imagens conceituais evocadas pelos estudantes durante as etapas da pesquisa, as quais são formadas pelas características, concepções e interpretações de cada um estudante a respeito do conceito de função. É claro que os obstáculos interferem diretamente nas imagens conceituais evocadas e vice-versa.

Sendo assim, identificamos, em relação à definição do conceito de função, que a maioria dos estudantes utilizam parte de sua imagem conceitual para definir ou explicar o que é uma função. Para alguns deles uma função é, basicamente, uma situação que envolva matemática, por exemplo, "uma corrida de taxi" ou "o lucro de uma empresa", curiosamente situações comuns nas aulas sobre função. Encontramos também imagens conceituais compostas por mecanismos bastante utilizados pelo professor para apresentar ou representar uma função, como exemplo "a maquina de função" ou "o conjunto de flechas", os quais são evocados quando perguntados sobre o conceito de função.

Este comportamento comprova um grave problema percebido durante nossa pesquisa, a maioria dos estudantes utiliza parte da definição do conceito ou um fragmento de sua imagem conceitual para identificar e garantir a existência da função, porém eles acreditam que esse "pedaço" do conceito é necessário e suficiente para defini-la.

A grande dificuldade em estabelecer as condições necessárias para que seja definida uma função é outro fato recorrente. Mesmo usando um vocabulário informal, grande parte dos estudantes tende a adotar como definição um polinômio, uma equação ou uma expressão algébrica, ou seja, utilizam a representação algébrica para justificar a existência da função, mostrando ter uma imagem conceitual incompleta ou composta de muitas figuras mentais algébricas.

Esse comportamento indica que a formação de uma imagem conceitual fragmentada e incompleta interfere e atrasa a compreensão do conceito. Não basta preencher a mente do aluno com fórmulas, expressões, gráficos ou situações funcionais, é necessário fazer com que esses elementos interajam e formem uma imagem conceitual consistente, coerente com a definição formal do conceito.

> (...) a dificuldade em formar uma imagem conceitual apropriada e os efeitos coercivos de uma imagem conceitual inapropriada que apresenta conflitos em potencial, podem atingir seriamente o desenvolvimento de uma teoria formal na mente do indivíduo. (Tall e Vinner 1981, p.167)

Outra constatação importante é que grande parte dos estudantes define o conceito usando esboços de gráficos ou linhas de comportamento simples, apontando terem uma imagem conceitual gráfica, porém não conseguem representar graficamente uma função. Essa dificuldade advém, provavelmente, da incapacidade de relacionar as representações, comprovando que não basta apresentar gráficos para que aprendam a construir gráficos, é necessário haver equilíbrio e interação no ensino das diferentes representações. De acordo com Duval,

> há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato (DUVAL, 2003, p. 31).

Ainda sobre as imagens conceituais dos estudantes, percebemos que alguns deles não reconhecem gráficos "mal comportados" como representantes de uma função e não admitem funções com mais de uma lei de formação. Acreditamos que este comportamento é um indício que estes alunos possuem uma imagem conceitual com poucas ou nenhuma figura mental que contemplem essa parte do conceito, talvez por não serem bem trabalhados em sala de aula.

Em concordância com as pesquisas de Igliori (2007), Rezende (2004) e Tall & Vinner (1981), percebemos, a patir das imagens conceituais evocadas, que as imagens conceituais dos estudantes podem estar incompletas ou mal constituídas, formando um potencial obstáculo à aprendizagem, causando impedimentos e atrasos no processo de aquisição e compreensão do conceito.

Sendo assim, acreditamos que o conceito de funções pode e deve ser ensinado de uma maneira mais significativa e acessível ao estudante. Pensamos que, principalmente, o processo de construção deste conceitovaialém dos cálculos que geramum valor para f(x) dado um "x" ou da apresentação estática dos gráficos "bem comportados". É preciso que os meios matemáticos e "estratégias" do conceito de função sejam trabalhados de forma claraao estudante, apresentando o porquê de estar usando determinada ferramenta matemática, que uma função podeexistir mesmo sem uma lei de formação algébrica ou, em vários casos, pode ter mais de uma lei de formação.

Pensamos ser importante dar ao estudante meios de estabelecer uma boa relação entre as diferentes representações de uma função, para que sua imagem conceitual seja construida com elementos coerentes com a definição do conceito, onde ele seja capaz de admitir a existência de objetos distintos que representam um mesmo conceito, para que percebam não apenas as diferenças entre eles, mas também as suas principais propriedades.

Estas hipóteses se confirmam na possibilidade de ensinar Matemática sem a resolução exagerada de exercícios, onde a repetição dos mesmos visa o domínio de uma determinada técnica que, muitas vezes, afasta o aluno da compreensão significativa. Com base nessas idéias, podemos responder nossa terceira pergunta de pesquisa: **Que estratégias podem ser sugeridas aos professores do E.M para ajudar seus alunos a construir o conceito de função?**

Percebemos que é preciso desenvolver um trabalho dinâmico que misture o pensar matemático puro com situações contextualizadas que estimulem o aprendizado dos estudantes desde os seus primeiros contatos com o conceito. Os Parâmetros Curriculares Nacionais recomendam que:

> aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que serão essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2000, p. 111)

Como vimos nesta pesquisa, os estudantes têm dificuldades em relacionar as diferentes representações de uma função, admitem apenas a existência da função como expressão algébrica ou um gráfico, usam sua imagem conceitual como a definição do conceito, tornam as regras ou fragmentos do conceito como a própria definição, entre outras dificuldades. Verificamos que o estudo de funções deve resgatar os componentes de variação e relação de dependência e, além disso, deve-se trabalhar o conceito de função de modo dinâmico, proporcionando aos alunos uma noção intuitiva de função a partir de problemas práticos.

No entanto, o professor não deve simplesmente apresentar uma definição pronta, como na abordagem dos livros didáticos, em geral. Acreditamos que é preciso construir uma definição por meio de situações ou problemas práticos e, após defini-la, compará-la com a definição formal para que o estudante tenha acesso à linguagem científica do conceito. Vale ressaltar que não estamos questionando ou nos contrapondo à apresentação de funções por meio da linguagem matemática presente em alguns livros didáticos. O que estamos sugerindo é apenas construir com o aluno uma noção intuitiva de função, que num outro momento poderá ser relacionada à definição mais formal do conceito. Concordamos que

> O ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. (BRASIL, 2000, p. 121)

Por exemplo, os alunos precisam perceber que o plano cartesiano ajuda a interpretar o comportamento de uma função ou de algum fenômeno que pode ser modelado, como o estudo dos movimentos na Física. Ou seja, devem perceber que a Matemática e, neste caso, o conceito de função serve de instrumento para o estudo de um problema real.

Nesta pesquisa pudemos explorar esta forma de introduzir o conceito de função. Durante a aplicação da sequência didática percebemos que os estudantes são capazes de desenvolver intuitivamente o conceito de função quando exploram situações cotidianas, contextualizadas e acessíveis ao nível deles. E quando aliadas às propriedades do conceito, conseguem criar estratégias particulares no processo de aprendizagem, dando indícios de que estão formando uma imagem conceitual coerente com a definição do conceito, ou seja, estão construindo corretamente este conceito.

Após a análise a posteriori, pudemos confirmar que os estudantes analisados se saíram melhor quando o conceito de função foi explorado com mais naturalidade, sem que eles ficassem restritos aos "calcule o f(x)", "determine a raiz", "encontre o valor de x" e, desta forma, percebemos que a maioria foi capaz de compreender a noção de variação e dependência entre variáveis, tão importantes para o desenvolvimento deste conceito em sua vida acadêmica. Além disso, pudemos constatar que a imagem conceitual relativa à representação gráfica de uma função possui figuras mentais do tipo: toda função afim possui gráfico na forma de uma reta contínua e inclinada, o gráfico de outras funções são sempre "bem comportados", os gráficos oscilantes são senóides, o domínio da função não interfere no gráfico, entre outras.

A grande maioria dos estudantes que participaram da pesquisa sinalizou ter grandes dificuldades em esboçar o gráfico de uma função, apesar de terem a noção correta da definição do conceito, conseguirem desenvolver bem a parte algébrica, além de saberem identificar se um determinado gráfico podia ou não representar uma função.

Este fato nos indica que, na verdade, o problema de grande parte desses estudantes está na dificuldade de relacionar as diferentes representações deste conceito, confirmando a importância de ensinar funções usando suas variadas representações, sendo necessário fortalecer a transição entre duas representações, por exemplo, não restringir o aprendizado gráfico às construções a partir de uma lei de formação, mas dar ao estudante a possibilidade de interpretar esta lei de formação, além de mostrar o caminho inverso, que a partir do gráfico ele possa chegar à lei de formação.

Por fim, afirmamos, com base nos resultados analisados, à luz da Engenharia Didática, que a "problematização" do ensino de funções é capaz de proporcionar melhores condições de aprendizado durante o processo de aquisição deste conceito. Percebemos que uma situação problema, conforme recomendado por Caraça(1951), gera interesse e estimula a investigação matemática. Esse este tipo de abordagem abre espaço para questionamentos e argumentações, criando melhores condições para a aquisição do conceito de função.

Não discordamos que o ensino "tradicional" também é capaz de capacitar, porém acreditamos ser necessário que haja uma complementação, oferencendo um ensino que dê subsídios aos estudantes para melhor desenvolver este conceito. Por exemplo, que sejam capazes de definir uma função usando tanto a liguagem matemática quanto a informal, que saibam modelar uma situação real a partir da definição do conceito, que consigam transitar de uma representação para outra sem dificuldades e que sejam capazes de reconhecer e aplicar as propriedades do conceito de funções em conteúdos mais avançados dentro do Ensino de Matemática.

6. Referências

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

ARTIGUE, M. “Ingénierie Didactique”. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1998, v. 9.3, 281-308.

BACHELARD, Gaston. A epistemologia. Tradução de Fátima Lourenço Godinho e Mário Carmino Oliveira. Lisboa, Portugal: Edições 70, 2006.

BRASIL, Secretaria da Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.*Brasília, MEC, 2006.

CABRAL, T. C. B. Contribuições da Psicanálise à Educação Matemática: A Lógica da Intervenção nos Processos de Aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação). USP, São Paulo, 1998.

CARAÇA, B. de J. Conceitos fundamentais da Matemática. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1951

CARLSON, Marilyn. Uma investigação em corte transversal do desenvolvimento do conceito de função. Em AH Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Educação Matemática. III. Questões CBMS em Educação Matemática*, 1998, p. 114-162.

CARLSON, Marilyn e OEHRTMAN, Michael. *Research Sampler 9: Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function.*Revista eletrônica MAA.Disponível no site http://www.maa.org.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica, Campinas: Papirus, 2003, p. 11-33.

DUVAL, R. Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

IGLIORI, Sônia B. Camargo. A noção de "obstáculo epistemológico" e a educação Matemática. Livro: Educação Matemática, uma introdução. Educ, 2002, p. 98.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara, et al. Engenharia didática in: Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002, p. 197-208.

MEIRA, Luciano Lemos. *Aprendizagem e Ensino de funções, Estudos em Psicologia da Educação Matemática.* Recife: Ed. Universitária da UFPE, Pernambuco, 1993.

MICOTTI, M. C. de O. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 153-167.

NASSER, L., SOUSA, G. & TORRACA, M. Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em cálculo? Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (em CD). SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil, 2012.

PONTE, J. P. *O conceito de função no currículo de Matemática. Revista Educação e Matemática.* APM, Portugal, n.15, p. 3-9, 1990.

REZENDE, W. M. (2004) *Ensino de Funções Reais: Caminhos e Descaminhos*. Terceiro Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática.

ROBERT, A. e SCHWARZENBERGER, R. *Resarch in teaching and learning Mathematics at an advanced level*. In: David Tall (Ed.): Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1981.

SIERPINSKA, Anna. *The Concept of Function- Aspects of Epistemology and Pedagogy*Editado por Guershon Harel e Ed.Dubinsky, MAA Notes and Report Series,USA, 1992.

TALL, David. (with Shlomo Vinner) *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12 151-169, 1981a.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking , pp. 3-21, 1991. Dordrecht: Kluwer.

TRINDADE, José Análio de Oliveira. *Os obstáculos epistemológicos e a educação matemática*. Dissertação de Mestrado. Florianópolis: CED/UFSC,1996.

TRINDADE, J. A. O.; MORETTI, M. T. Uma relação entre a teoria histórico-cultural e a epistemologia histórico-crítica no ensino de Funções: a mediação. Zetetiké. v.8, n. 13-14, p. 29-50, jan.dez. 2000.

VINNER, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. International Journal of Education in Science and Technology, 14, 293-305.

VINNER, S. The role of definitions in teaching and learning. In: Advanced Mathematical Thinking (Ed. David Tall). Kluwer publications, 1991.

Anexos

Anexo 1: Questionário aplicado inicialmente aos estudantes do Ensino Médio de uma escola particular e, posteriormente, a graduandos e professores em um mini curso na UFF

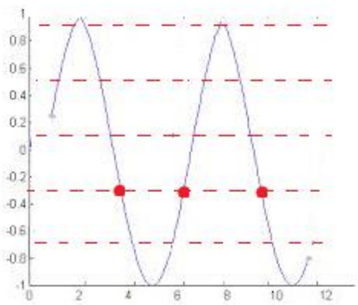
Nome:.____ **Série:______.**

Questão 1. Em sua opinião o que é uma função?

Questão 2. Descreva uma situação que vem à sua mente quando falamos sobre "função".

Questão 3. Considere a relação que associa cada pessoa ao número da sua carteira de identidade. Podemos afirmar que essa relação representa uma função? Por quê?

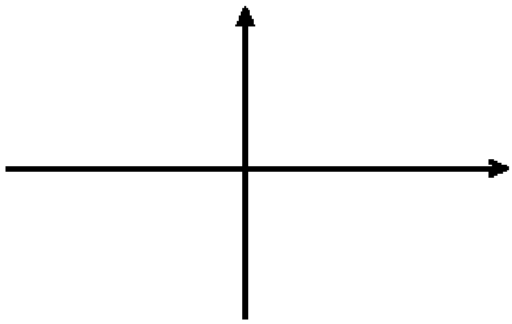
Questão 4. Vemos no gráfico abaixo que as linhas paralelas ao eixo x cortam o gráfico em três pontos. O gráfico representa uma função? O que você observa?



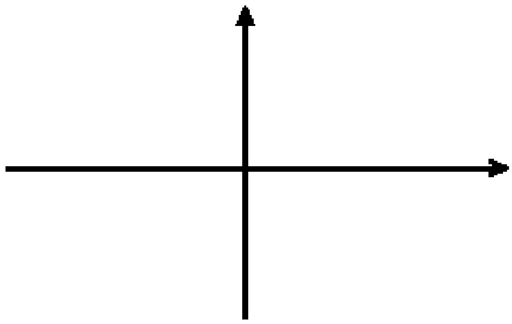
Questão 5. Esboce o gráfico da função, no intervalo [-5,5], considerando os domínios abaixo:

$$g(x) = \begin{cases} -1 \text{ , se } x < 0 \\ 0 \text{ , se } x = 0 \\ 1 \text{ , se } x > 0 \end{cases}$$

a) g: Z → R



b) g: R→R



Anexo 2: Sequência Didática

Aluno: .... Série: ....

Leia o texto abaixo e responda as perguntas:

Um casal deseja fazer uma viagem de férias, para isso faz a contabilidade dos gastos que irão realizar. Eles calculam que com os pedágios e combustíveis (ida e volta) gastarão R$200,00. Para ficarem mais tranquilos, vão se hospedar em uma pousada que cobra R$250 de diária com as refeições incluídas. Considerando que eles não sabem quantos dias vão ficar nesta pousada e que os outras gastos menores não serão incluidos, responda:

1. Quais serão os gastos fixos e quais são variáveis?

2. O custo total da viagem é fixo ou variável?

3. O custo total varia de acordo com qual gasto da viagem?

4. Calcule o valor da gasto com as diárias se o casal ficar na pousada durante:

a) 5 dias
b) 10 dias
c) 15 dias
d) 30 dias
e) 0 dias (caso não encontrem quartos disponíveis e voltem para casa)

5. Calcule o custo da viagem se o casal ficar na pousada durante:

a) 5 dias

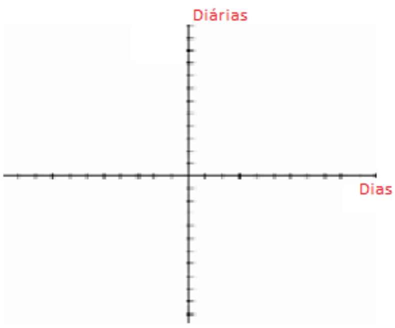
b) 10 dias

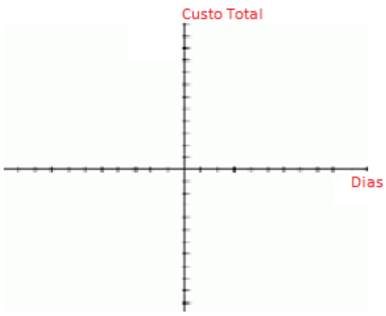
c) 15 dias

d) 30 dias

e) 0 dias (caso não encontrem quartos disponíveis e voltem para casa)

6. Use os planos cartesianos e o papel milimetrado para representar os gastos realizados pelo casal se ficarem hospedados por 5, 10, 15 ou 30 dias.

a) 

b) 

7. Encontre uma expresão algébrica que determina:

a) o gasto com as diárias se ficarem t dias na pousada.

b) o custo da viagem se ficarem t dias na pousada.

8. Dada a $f(x) = 2x + 10$, calcule:

a) $f(5)$

b) $f(10)$

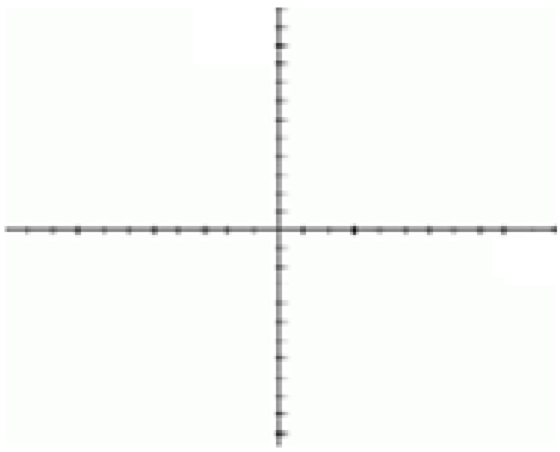
c) $f(15)$

d) $f(30)$

e) x tal que $f(x) = 0$

f) X tal que $f(x) = - 6$

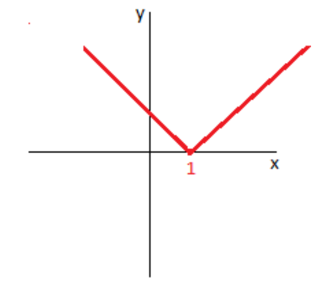
9. Dê a representação gráfica dos valores encontrados anteriormente no plano cartesiano abaixo, se necessário use o papel milimetrado:



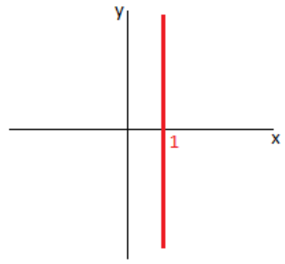
10. Encontre uma função g(x) que faz a seguinte relação: g(0)=2 e g(3)=5.

11. Faça as correspondências corretas entre os gráficos e as expressões algébricas abaixo, dizendo se cada um deles pode representar uma função.

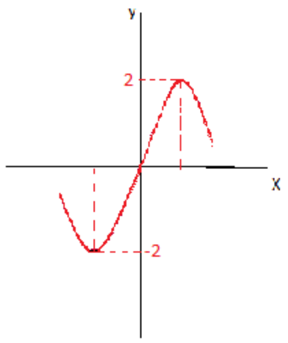
(A)



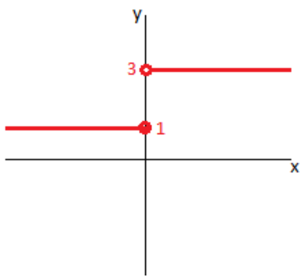
(B)



(C)



(D)



( ) $y = \begin{cases} -x+1, \text{ se } x<1 \\ x-1, \text{ se } x>1 \text{ ou } x=1 \end{cases}$

( ) $x = 1$

( ) $y = \begin{cases} 1, \text{ se } x<0 \text{ ou } x=0 \\ 3, \text{ se } x>0 \end{cases}$

( ) $y = 2\text{sen}x$

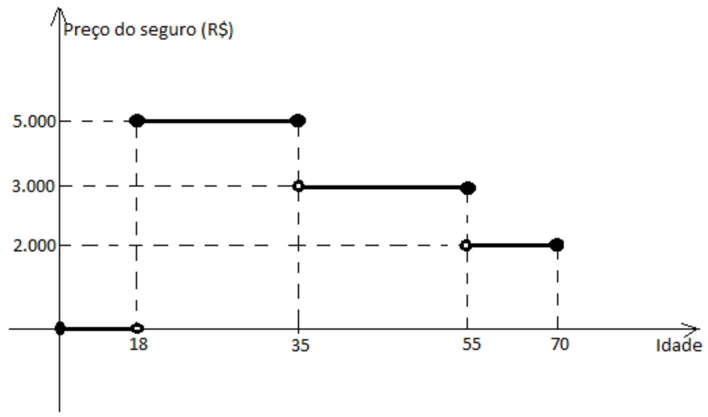
( ) $y=1$

( ) $y = \begin{cases} 2x^2, \text{ se } x<0 \text{ 0u } x=0 \\ -2x^2, \text{ se } x>0 \end{cases}$

Leia o texto abaixo e use seu conhecimento sobre função para responder as perguntas:

A compra de automóveis aumentou bastante nas ultimas decadas e, com elas, a contratação de seguros automotivos. Cada contrato com a seguradora garante ao segurado 12 meses de serviços e o valor do seguro é resultado de um cálculo que leva em conta os serviços de cobertura contratados (colisão, incêndio, roubo, responsabilidade civil e serviços adicionais), o perfil de risco do segurado (baseado em informações pessoais e dados do veículo) e outros itens.

Em uma seguradora o item mais importantes é a idade do segurado e o valor a ser pago por uma pessoa com idade entre 18 e 70 anos de vida varia de acordo com a seguinte tabela:



A partir dos dados fornecidos anteriormente responda:

1. Quanto pagará uma pessoa que deseja adquirir o seguro e tem:

a) 22 anos
b) 35 anos
c) 45 anos
d) 55 anos
e) 56 anos

2. O gráfico pode representar uma função? Justifique utilizando a definição do conceito de função.

3. É possivel determinar uma lei de formção para essa função? Em caso afirmativo, represente-a.