UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Louise dos Santos Lima

O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: INVESTIGANDO ESTRATÉGIAS DOS ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Rio de Janeiro
agosto/2014

O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: INVESTIGANDO ESTRATÉGIAS DOS ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Louise dos Santos Lima

Defesa de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Claudia C. de Segadas Vianna.

Aprovada por:

____

Presidente, Profª. Dra. Claudia C. de Segadas Vianna – PEMAT / UFRJ

____

Profª. Dra. Lilian Nasser– PEMAT / UFRJ

____

Profª. Dra. Lourdes de La Rosa Onuchic – UNESP – Rio Claro

____

Profª. Dra. Maria Darci Godinho da Silva – UFRJ

Rio de Janeiro

agosto/2014

DEDICATÓRIA

À minha mãe pelo incentivo e compreensão em todas as etapas da minha vida e ao Dimy, meu filho, por sempre se preocupar em não “fazer muito barulho” e “atrapalhar meu dever”.

AGRADECIMENTOS

Continuo acreditando que agradecimentos, em sua maioria, são apenas carregados de formalidade. Decidi louvar e agradecer a Deus com meu viver. Não concluiria nenhuma etapa da minha vida sem a experiência que tenho com Deus: um suporte incrível para as minhas decisões. Esta dissertação é uma forma de louvar a Ele por tamanho apoio.

Agradeço ao apoio dado por minha mãe Lourdes e por me auxiliar na criação do meu filho, me suportar e me amar. Ao Dimy, meu filho, agradeço por tudo que é, mesmo eu sendo quem sou. Por se silenciar nas horas necessárias para que eu pudesse escrever a dissertação, mas, mais ainda, por nunca ter desistido de me chamar para brincar ou para contar uma história. Um dia contarei histórias como ele. À minha tia-mãe-madrinha Vera por ter financiado os meus estudos e por ser minha segunda mãe. De verdade.

Agradeço à minha orientadora Claudia Segadas por me compreender em minhas fases pessoais e mostrar que, quando eu achava que aquele era o meu limite, eu ainda poderia mais. Obrigada por todo o ensinamento!

Ao PEMAT, pela experiência e aprendizado e à CAPES pelo incentivo financeiro. Ao Colégio Intellectus por todo apoio e compreensão necessária para a conclusão da minha Graduação e Mestrado: vocês fazem parte da minha formação! Ao Colégio de Aplicação da UERJ pela oportunidade de pesquisa e aprendizado contínuo.

Aqui no PEMAT confirmei algo que já desconfiava no decorrer da minha jornada: nas relações de ensino não basta apenas ocorrer mera transmissão do conteúdo, é necessário ser humano – item que julgo ser essencial em um professor. Agradeço aos professores que me acompanharam no curso e transcenderam o espaço da sala de aula, principalmente por serem humanos: Ana Teresa, Márcia Fusaro, Maria Darci, Milton, Gerard, Gert e Tatiana. Aos professores que acompanharam os seminários que muito me guiaram: Ana Teresa, Claudia Segadas, Lilian Nasser e Victor Giraldo. À professora Lúcia Tinoco por sempre me ajudar e sugerir ótimas atividades para esta dissertação.

Aos membros da Banca, meu muito obrigada! À professora Lourdes, de quem sou fã, por aceitar participar, pelas orientações à distância e pela disponibilidade em se deslocar. À professora Lilian Nasser pelo acompanhamento durante os seminários, orientações, interesse e disponibilidade.

À professora Maria Darci e ao professor Ivo Lopez *(in memorian)* cabe um agradecimento especial pelo apoio ao longo da Graduação, no processo de seleção do Mestrado, ao longo do mesmo e na vida. Vocês são minha inspiração acadêmica, profissional e pessoal.

Aos meus alunos, em especial Bruna Lima, Catarina Pessoa, Larissa Sefeltas e Maria Rita, por terem me pedido uma aula especial no meu play em 2012. A partir desta experiência, eu me interessei pelo tema. Aos alunos que participaram da aplicação, agradeço pelo esforço em fazer o melhor para me ajudar. Obrigada!

Aos meus colegas de Mestrado: Wellington, Alexandre, Chaves, Rômulo e Anderson. Ao Fellipe Coelho por ter me auxiliado ao longo da aplicação no CAp – UERJ. À Carol, presente que recebi da UFRJ desde a Graduação. Admiro todos pela garra e determinação, mas principalmente por saberem ser humanos, honestos e justos nas escolhas que afetam o grupo. Parabéns!

Em todo esse tempo, agradeço à minha amiga e dupla Fernanda por me compreender, estimular, apoiar, me dar força e, principalmente, ter paciência comigo em todas as minhas fases. Não poderia ter melhor amiga.

Aos meus amigos, que também acompanharam essa jornada, eu agradeço: Lorena Galm, pelos sorrisinhos e incentivo; Aline Scarlecio, pelas traduções; Gabriel Martins, pela irmandade; Beth Martins, pela revisão com cuidado e amor; Thais Cunha, pelo equilíbrio e Raphael Luiz, pelo suporte no processo de finalização.

RESUMO

O objetivo desta dissertação é investigar que tipos de estratégias orais e escritas transparecem em uma aula em que foi utilizada a metodologia de Ensino – Aprendizagem de Matemática via resolução de problemas, no caso específico do estudo de generalização de padrões. Planejamos, discutimos e testamos uma sequência didática com alunos do 9° ano do Ensino Fundamental para verificar o desempenho dos mesmos em uma situação em que, além de resolverem problemas, são chamados ao final a formularem problemas. Analisamos, entre outros aspectos, a expressão oral e escrita desses alunos. Os resultados nos mostraram que os alunos em sua maioria entendiam os enunciados das atividades, mas tinham dificuldades em expressar algebricamente a fórmula matemática. Verificamos, também, que, em geral, o registro oral é mais rico que o escrito e que a mediação do professor durante a atividade é fundamental para que o aluno avance. Ademais, constatamos que os alunos compreendem algumas estruturas necessárias para compor um problema, mas tem dificuldade na passagem da fala para a escrita, o que sugere mais atenção por parte dos professores para auxiliar nessa passagem.

Palavras-Chave: Resolução de Problema; Ensino da Matemática; Formulação de Problemas.

ABSTRACT

The aim of this work was investigate what types of oral and written strategies were apparent in a classroom using the methodology of teaching - learning mathematics through problem solving in a specific study that includes generalization of patterns. A didactic sequence was planned, discussed and tested with students from the 9th year of elementary school to verify their performance in a situation where, in addition to solving problems, they were called to formulate problems. Among other aspects, it was analyzed the oral and written expression of these students. The results show that students mostly understood the statements of activities, but they had difficulty expressing algebraically the mathematical formula. It was also noticed that in general, the oral record is richer than the written and the teacher mediation during the activities is essential for the students to move forward. Furthermore, it was found that they understand some necessary structures to compose a problem, but but they had difficulty in the transition from oral to written language, which suggests more attention by teachers to assist in this transition.

Key-Word: Problem Solving. Mathematics Education. Formulation of Problems.

Lista de figuras

Lista de tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

I. Escolha do tema

Meu interesse pelo tema foi motivado por minha experiência em sala de aula, observando os alunos na busca de caminhos para resolver problemas de naturezas diversas, sem que obtivessem muito sucesso. Em 2012, um grupo de alunos do 9° ano do Ensino Fundamental fez um pedido: “Queremos uma aula que nos ensine o que fazer com os exercícios dos concursos. Não sabemos que caminho seguir”. Eles se referiam aos concursos para o ingresso no 1° ano do Ensino Médio de outras escolas, tais como CEFET, Colégio Pedro II, FAETEC,...

Aceitei o pedido e planejei a aula de forma completamente intuitiva. Durante o processo de planejamento, percebi que esta era uma tarefa mais difícil do que imaginava, pois senti a necessidade de entender quais estratégias os alunos utilizavam para que eu pudesse entender suas dificuldades e guiá-los na resolução de problemas.

Na busca por material e atividades que pudessem dar um roteiro para essa aula, muito pouco encontrei. Sendo assim, utilizei uma lista com questões diversas e resolvemos, em conjunto, exercícios de concursos que os próprios alunos levaram. Nesse período, me recordei de uma aula que assisti no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) lecionada pelo professor Luciano Monteiro de Castro, em julho de 2011, em que cita, em uma homenagem, os Mandamentos do Professor Augusto César Morgado[1], que também lecionou no IMPA, são eles: 1 - Postura Ativa; 2 - Dividir em casos/etapas para conquistar e 3 - Lidar imediatamente com as dificuldades (não adiar).

Neste trajeto, foi necessário conhecer as estratégias de cada aluno para que pudéssemos, em grupo, decidir a melhor forma para se resolver as questões, tradicionalmente designadas por problemas. Durante a aula, percebi que alguns alunos tiveram “comportamentos – padrões” em suas resoluções. Assim, o meu interesse por resolução de problemas começou com este desafio proposto pelos meus alunos.

---

1 Conforme minhas notas de aula do PAPMEM – IMPA em julho de 2011. A aula se encontra disponível em http://video.impa.br/index.php?page=julho-de-2011. Professor Luciano – Combinatória.

Ao iniciar as leituras de artigos que dessem suporte teórico para este trabalho, comecei a me interessar pela definição e papel de um problema. Tradicionalmente, os problemas eram gerados para fixar conteúdos, sem ter um papel de investigação, de elaboração de estratégias e de desenvolvimento do raciocínio. A respeito disso, os PCN do Ensino Fundamental pontuam que:

> A prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações.
>
> (BRASIL, 1998, p. 40)

A resolução de problemas, a meu ver, não deve se restringir apenas ao que tange à aplicação de exercícios para fixar o conteúdo. Decidi realizar esta pesquisa diante desta prática corriqueira em sala de aula, que é a reprodução de exercícios, incomodada com a mesma, desejando ter um suporte teórico mais fundamentado para aperfeiçoar minhas aulas e, também, compreender os processos subjacentes à resolução de problemas.

II. Objetivo geral e objetivos específicos da pesquisa

O objetivo geral deste trabalho é analisar as estratégias utilizadas por alunos em uma aula utilizando resolução de problemas em turmas do Ensino Fundamental. Mais claramente, faremos o planejamento e a experimentação de uma sequência didática que possibilite ao aluno estabelecer relações a partir da observação e da análise de dados numéricos, padrões e regularidades, para que possa expressar essas relações usando recursos diversos, como a linguagem natural, diagramas, tabelas, fórmulas ou símbolos matemáticos. Assim, desejamos que esta sequência didática possibilite ao aluno generalizar, ponto de partida para as investigações acerca das estratégias envolvidas na resolução de problemas matemáticos. Nossa questão de pesquisa é: Que tipos de estratégias orais e escritas transparecem em uma sequência didática em que foi utilizada a metodologia de Ensino – Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, para o estudo de generalização de padrões?

Baseados em nosso objetivo geral estabelecemos os seguintes objetivos específicos:

a) testar uma sequência didática utilizando a metodologia de ensino através da resolução de problemas;

b) examinar as estratégias escritas que os alunos utilizam na resolução de problemas;

c) investigar o que os alunos relatam oralmente como estratégias utilizadas na resolução de problemas;

d) examinar a coerência entre o que os alunos relatam com o que eles realmente produzem ao resolver problemas;

e) analisar como formulam problemas, como forma de auxiliar a entender como eles compreendem o que é um problema;

f) propor algumas alternativas para sanar as dificuldades encontradas.

III. Estrutura da dissertação

A dissertação será organizada em seis capítulos, iniciando pela introdução. Segue a descrição do que apresentaremos nos capítulos subsequentes.

No capítulo 2, apresentamos uma revisão teórica acerca da resolução de problemas e as definições necessárias para o nosso estudo. Além disso, discutiremos as abordagens de ensino utilizando a metodologia de resolução de problemas. Neste capítulo, ainda pontuaremos o que os PCN indicam nesta perspectiva de ensino.

No capítulo 3, apresentaremos o nosso percurso metodológico, no qual listaremos quem serão os participantes da nossa pesquisa e como faremos para atingir nossos objetivos descrevendo os instrumentos para coleta de dados e forma de análise.

No capítulo 4, apresentamos as atividades que foram aplicadas no estudo piloto, além da análise e categorização das estratégias utilizadas pelos alunos ao resolverem os problemas.

No quinto capítulo, exibiremos os resultados do estudo principal e a análise da sequência didática presente em nossa pesquisa. Finalmente, apresentaremos as considerações finais deste trabalho.

Capítulo 1

1. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

1.1 O que é um problema?

Consideramos que um problema[2] pertence a uma esfera muito mais ampla que a dos exercícios, cujo objetivo é apenas de aplicação, em uma forma quase mecânica. Só há problema se o aluno for levado a pensar e estruturar a situação que é apresentada. Neste sentido, utilizaremos a definição de problema e de estratégia de resolução de problemas de Alvarenga & Vale (2007):

> É consensual que se está perante um problema quando a situação não pode ser resolvida pelo recurso imediato a processos conhecidos e estandardizados. A procura da solução envolve o recurso adicional de processos mentais que podem ajudar a chegar à solução e que constituem um apoio para que os alunos consigam, com entusiasmo e sucesso, resolver problemas. Estes processos são vulgarmente designados por estratégias de resolução de problemas e estão mais associados à criatividade e à curiosidade, que à aplicação rotineira de um conjunto de técnicas sem significado.
>
> (ALVARENGA & VALE, 2007, p.29)

Diferentemente do que tradicionalmente é entendido por resolução de problemas, concordamos com a definição de que "O termo 'resolução de problemas' refere-se a tarefas matemáticas que têm o potencial de proporcionar desafios intelectuais para melhorar o entendimento e desenvolvimento matemático dos estudantes." (LESTER, 2012, p.148)

De acordo com Wagner (2008), nem todo exercício é problemático para o aluno. Uma vez que já se dispõe de estratégias para solucionar sua dificuldade, o exercício deixa de ser um problema e se torna apenas uma questão de fixação. Neste momento, nos questionamos o que transforma uma questão em um problema de fato.

---

[2] Consideraremos problema e situação-problema como sinônimos.

Encontramos critérios estabelecidos por Lester (2012), os quais caracterizam problemas que, segundo ele mesmo, valham a pena. Nada mais são que um conjunto no qual os professores podem se basear ao revisar e elaborar problemas.

> **1.** O problema envolve matemática útil e importante.
> **2.** O problema exige níveis mais altos de pensamento e resolução de problemas.
> **3.** O problema contribui para o desenvolvimento conceitual dos alunos.
> **4.** O problema cria uma oportunidade para o professor avaliar o que seus alunos estão aprendendo e onde eles estão enfrentando dificuldades.
> **5.** O problema pode ser abordado por estudantes de múltiplas maneiras usando diferentes estratégias de resolução.
> **6.** O problema tem várias soluções ou permite diferentes decisões ou posições a serem tomadas e defendidas.
> **7.** O problema encoraja o envolvimento e o discurso dos alunos.
> **8.** O problema se liga a outras importantes ideias matemáticas.
> **9.** O problema promove o uso habilidoso da matemática.
> **10.** O problema proporciona uma oportunidade de praticar habilidades importantes.
>
> (LESTER, 2012, p.149)

A partir destes critérios, percebemos que pouco trabalhamos com problemas, de fato, com os nossos alunos. No magistério, notamos que algumas das abordagens de ensino que acreditam enfatizar a resolução de problemas são mais comuns na escola básica e, por isso, analisaremos na próxima seção a relação entre a resolução de problemas e o ensino.

1.2 Resolução de Problemas e o Ensino de Matemática

O trabalho com a resolução de problemas traz consigo uma possibilidade do aluno ir além das regras que são aprendidas, desenvolvendo a habilidade de construir suas próprias estratégias. Schoenfeld (1992) acredita que a matemática é uma disciplina viva, que tenta entender diversos padrões que nos rodeiam. Ele afirma que a linguagem matemática é baseada em regras, mas que é importante que os alunos possam ir além destas para que sejam capazes de se expressar matematicamente. Isso, porém, não ocorre sozinho, mas sugere mudanças tanto no currículo quanto no modo de ensino. O foco deve ser na busca de solução, na exploração de padrões e na formulação de conjecturas, enquanto muitas vezes é priorizada a memorização de procedimentos, fórmulas e os alunos são estimulados apenas a fazer exercícios.

A relação entre resolução de problemas e o ensino é apresentada por Lester e Schroeder (1989 apud LESTER, 2013, p. 246), sob três formas de abordagem: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar através da resolução de problemas.

A primeira abordagem se refere ao processo de resolver problemas matemáticos, em quatro fases interdependentes: compreensão do problema, criação de um plano, execução do mesmo e revisão do problema original. Estas quatro fases foram estabelecidas por George Pólya (1887-1985), precursor na área de resolução de problemas e autor do livro *How to solve it*, traduzido em português como A Arte de Resolver Problemas. Esta abordagem, de certa forma, é citada nos PCN na elaboração dos três pressupostos norteadores para a realização de um problema:

> - Elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
> - compare seus resultados com os de outros alunos;
> - valide seus procedimentos.
>
> (BRASIL, 1998, p. 41)

Na segunda abordagem - ensinar a resolver problemas - o ensino é estruturado de forma a expor muitos exemplos sobre o conteúdo de estudo para que o aluno possa utilizar os modelos apresentados ao resolver problemas.

Finalmente, a última abordagem - ensino através da resolução de problemas - traz um novo propósito, pois é uma metodologia de ensino em que o problema é um ponto inicial para se ensinar matemática. Uma situação-problema é o primeiro passo para que os alunos desenvolvam estratégias de resolução e transformem o que inicialmente eram problemas em exercícios. Além disso, é através da resolução de problemas que pontos importantes de um determinado conteúdo matemático são apresentados.

Acreditamos que o ensino através da resolução de problemas pode proporcionar uma visita aos três tópicos mencionados por Schoenfeld e, consequentemente, dar luz a um aspecto da matemática que se encontra à margem: às vezes uma disciplina dinâmica e que não estuda apenas números. Assim, analisando as abordagens de ensino que utilizam resolução de problemas, pontuadas anteriormente por Lester (2013), decidimos seguir nossa pesquisa com o foco no ensino através da resolução de problemas, tendo o mesmo como um veículo para a aprendizagem.

1.3 A formulação de problemas

A atividade do próprio aluno formular problemas é fundamental nas aulas de matemática. Acreditamos que através dela poderemos observar se um aluno compreende o que é um problema. Neste sentido, concordamos que:

> Na formulação de problemas, o aluno vai empenhar-se em pensar no problema como um todo, sem focar-se apenas em números, em algumas palavras-chave ou na própria pergunta, como ocorre quando o professor trabalha com problemas fechados ou rotineiros.
>
> (MEDEIROS & SANTOS, 2007, p.91)

O ensino através da resolução de problemas permite que o aluno faça mais que resolver problemas, possibilitando que ele formule, construa e discuta problemas, desenvolvendo outras habilidades.

English (1997 apud GONTIJO, 2006) considera que a formulação de problemas envolve a geração de novos problemas e questões para explorar uma dada situação, assim como envolve a reformulação de um problema durante o seu processo de resolução. Para o autor, esta estratégia fornece aos professores importantes *insights* acerca de como os estudantes estão compreendendo os conceitos e os processos matemáticos, bem como suas percepções a respeito das atividades desenvolvidas, suas atitudes em relação à matemática e sua capacidade criativa em matemática.

Para o desenvolvimento da habilidade de formular problemas, concordamos com três elementos básicos:

> a) Compreensão do que seja um problema: este elemento refere-se à habilidade de reconhecer a estrutura subjacente a um problema e detectar estas estruturas em problemas correspondentes, isto é, perceber que diferentes problemas apresentam estruturas semelhantes.
>
> b) Percepção de diferentes problemas: este elemento refere-se aos aspectos que despertam ou não a atenção dos estudantes em situações rotineiras ou não. Atividades nas quais os estudantes podem expressar suas percepções em relação a diferentes problemas e compará-las com as diversas opiniões de seus colegas podem se constituir em um poderoso instrumento para a compreensão da matemática.
>
> c) Perceber situações matemáticas sob diferentes perspectivas: interpretar uma situação matemática em mais do que um caminho é particularmente importante para o estudante desenvolver sua capacidade de criar problemas ou de reformulá-los.
>
> (ENGLISH, 1997 apud GONTIJO, 2006, p. 9)

Utilizamos a formulação de problemas para investigarmos o que o aluno entende por problema, como o estrutura e se contempla o que é pedido.

1.4 As indicações governamentais

Os PCN indicam que a Resolução de Problemas deve ser o ponto de partida das atividades matemáticas na sala de aula, ou seja, sugere o ensino através da resolução de problemas, além de discutir caminhos para se fazer matemática em sala de aula. Concordamos que:

> A atualidade dos PCN é evidente, pois eles traduzem a necessidade de se achar um denominador comum para a educação brasileira. Em torno deles deverá acontecer uma profícua reflexão sobre os objetivos da educação e de sua qualidade. Os PCN preconizam que a educação deve ser pensada como um trabalho de preparação do aluno para a vida como um todo.
>
> (ONUCHIC, 1999, p.209)

Com o foco neste segmento, observamos os PCN (1998) que orientam o terceiro e quarto ciclos, hoje considerados como os últimos 4 anos do Ensino Fundamental. Embora muitos professores não sigam as orientações dos Parâmetros, ali constam indicações e os objetivos do governo brasileiro para o ensino de matemática no Ensino Fundamental. Inicialmente, são apresentados dez objetivos para este nível de ensino, dentre os quais o último pontua:

> Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.
>
> (BRASIL, 1998, p. 8)

Sendo assim, um dos objetivos para os últimos anos do Ensino Fundamental contempla a formulação de problemas e as habilidades necessárias para tal. A resolução de problemas aparece também nos objetivos de matemática para os 3° e 4° ciclos, como apresenta o quadro abaixo.

Ciclo	Área da matemática	Por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
3° ciclo	Pensamento numérico	Resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.
4° ciclo		
3° ciclo	Pensamento geométrico	Resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo as noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo, que são elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas; Resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução.
3° ciclo	Competência métrica	Resolver situações-problema que envolvam diferentes grandezas, selecionando unidades de medida e instrumentos adequados à precisão requerida.
3° ciclo	Raciocínio que envolva a proporcionalidade	Observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e **construir estratégias** de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade.
3° ciclo	Combinatória, estatística e probabilidade	Resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão.
4° ciclo	Pensamento algébrico	Resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos.
4° ciclo	Raciocínio que envolva a proporcionalidade	Resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não convencionais e convencionais, como as regras de três.

Tabela 1: Alguns objetivos de matemática para os últimos anos do Ensino Fundamental.

Além disso, os PCN, página 39, dedicam uma seção inteira para este ponto, denominada “*A resolução de problemas e o ensino-aprendizagem de Matemática”*, em que são utilizados argumentos de educadores matemáticos e até da própria história para justificar a necessidade da resolução de problemas no Ensino Fundamental. Nesta seção, também é definida a resolução de problemas sob o enfoque de alguns princípios:

- A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;

- O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;

- A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas."

(BRASIL, 1998, pp. 40 - 41)

A resolução de problemas não é recomendada apenas para o Ensino Fundamental. Os PCN +, que são os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, também pontuam que "a resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado". (BRASIL, 1998, p. 129).

A indicação da resolução de problemas como metodologia, pelos PCN +, objetiva a autonomia do raciocínio, construção de estratégias de resolução e argumentações, relações entre diferentes conhecimentos e perseverança na busca pela solução.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) sempre foi norteado por um grupo de habilidades e competências, incentivando o raciocínio e trazendo questões que medem o conhecimento dos alunos por meio de enfoque interdisciplinar. Das 30 habilidades[3] do ENEM, na categoria Matemática e suas Tecnologias, 14 delas são voltadas à resolução de problemas, envolvendo avaliação dos dados, teoria, prática, interpretação de dados para a construção da argumentação, modelagem de problemas, entre outros.

Neste cenário, vemos que a resolução de problemas está presente tanto nos objetivos para o ensino de matemática no Ensino Fundamental, quanto nas competências e habilidades do ENEM.

3 Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf

Capítulo 2

2. ASPECTOS METODOLÓGICOS

2.1 Questões de pesquisa

Realizaremos uma pesquisa com o objetivo de registrar nossa experiência, no intuito de uma análise puramente descritiva, a fim de compreender o sentido do que os alunos fazem, ou seja, as estratégias que utilizam ao resolverem problemas. Para tanto, pretendemos discutir e responder às seguintes questões:

- Na resolução de problemas, que estratégias os alunos usam para generalizar?
- Como se evidencia a capacidade de generalização dos alunos?
- Que dificuldades apresentam nesse processo?

A pesquisa foi estruturada em três etapas que serão detalhadas a seguir.

2.2 Etapas da pesquisa

Dividimos a pesquisa em 3 etapas fundamentais, que seguem na ilustração abaixo e que serão detalhadas nas próximas seções.

Figura 1: Etapas da pesquisa

Na primeira delas, a que chamamos de Pré - Piloto, analisamos com os alunos do Mestrado as atividades a serem aplicadas na segunda etapa: o Estudo Piloto. Entre esta e a terceira etapa, realizamos uma análise dos resultados obtidos no Estudo Piloto e reformulamos as atividades para a aplicação no Estudo Principal, nossa última etapa. O Estudo Piloto foi essencial para a pesquisa, já que foi o momento em que testamos os instrumentos para coleta de dados, bem como a metodologia de aplicação. Nos permitiu rever as atividades, repensar nossa prática na sala de aula e em como articular a dinâmica entre os grupos e seus integrantes, nos orientando, assim, para o Estudo Principal.

Sendo assim, adotamos os seguintes passos para a realização desta pesquisa:

a) Elaboração de um bloco de atividades.

b) Discussão das atividades com um grupo de professores, alunos do Mestrado, durante o Seminário de Saberes Docentes e Aprendizagem do PEMAT.

c) Levantamento e análise das estratégias utilizadas através de um estudo piloto com o público – alvo citado anteriormente.

d) Utilização de categorias que emergem dos dados.

e) Análise das atividades baseada nos resultados do estudo piloto.

f) Reelaboração de algumas atividades em vista dos resultados do estudo piloto.

g) Realização do estudo principal.

2.3 Coleta de dados

Os instrumentos para a coleta de dados foram o questionário escrito e a transcrição do áudio obtido pelo gravador no dia da aula. Os resultados encontrados serão apresentados em um quadro que sintetiza as questões e as estratégias utilizadas que foram categorizadas. O bloco de atividades com os problemas apresentados no estudo piloto encontra-se no Anexo 1 e os problemas reformulados estão no Anexo 2. Desejamos não apenas analisar os dados de forma descritiva, mas dialogar com os nossos referenciais teóricos.

2.4 Pré – piloto

Após selecionarmos as questões, que estão indicadas no Capítulo 3, partimos para a primeira etapa da pesquisa, que foi um momento para discussão dessas questões que foram posteriormente aplicadas no estudo piloto. A análise das atividades foi realizada por um grupo de 7 professores durante o Seminário de Saberes Docentes e Aprendizagem da Matemática, que é parte constituinte do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática da UFRJ, estando entre eles 3 professores do programa. Esta análise foi dividida em três encontros que ocorreram em setembro de 2013, cujos relatos seguem no próximo capítulo.

2.5 Estudo Piloto

Na segunda etapa, realizamos o estudo piloto em uma turma do 9° ano do Ensino Fundamental, no dia 19 de setembro de 2013, em uma escola particular da Zona Norte do Rio de Janeiro, onde não éramos regentes nesse ano, mas já conhecíamos os alunos, pois havíamos lecionado para a turma no ano de 2012. Utilizamos 3 tempos, de 50 minutos cada, sendo 1 tempo isolado e 2 consecutivos, para aplicação das atividades, que serão apresentadas no próximo capítulo juntamente com os resultados obtidos.

2.6 Estudo Principal

Após os resultados do estudo piloto, reestruturamos as atividades e realizamos o estudo principal, sendo esta a nossa terceira etapa. Aplicamos os problemas para uma turma, também do 9° ano do Ensino Fundamental, nos dias 6 de maio de 2014 e 10 de junho de 2014, no Colégio de Aplicação da Universidade Estadual do Rio de Janeiro, também localizado na Zona Norte do Rio de Janeiro. Utilizamos 4 tempos de 50 minutos cada, sendo 2 tempos consecutivos em cada encontro. No capítulo 4 seguem as atividades e a análise dos seus resultados.

2.7 As atividades

As atividades aplicadas foram selecionadas pela pesquisadora deste trabalho, discutidas e reformuladas junto ao grupo participante do Seminário de Saberes Docentes e Aprendizagem e, posteriormente, aplicada através do Estudo Piloto. Com os resultados obtidos, as atividades foram reformuladas, mas sem retornarmos ao grupo para a discussão.

Na seleção, privilegiamos as atividades de resolução de problemas que possibilitem generalizações de padrões, especificamente aquelas que primassem pelo desenvolvimento do raciocínio visual e da linguagem algébrica. Conforme Onuchic (informação verbal) [4] expressa, entendemos que para termos um padrão é necessário que, a partir de uma determinada posição, a forma se mantenha e o número de elementos garanta uma regularidade. Realizamos a reformulação de alguns enunciados com o intuito de torná-los menos diretos, ou seja, de forma que os alunos não sejam condicionados a utilizar um tipo de estratégia que já estivesse de certa forma indicado no enunciado.

Os objetivos das atividades que foram aplicadas no estudo principal e que são apresentadas no quarto capítulo estão sintetizados no quadro a seguir.

Atividade	Objetivos
Atividade I: **Os triângulos com palitos**	*Identificar o padrão;* *Dar continuidade à sequência;* *Relacionar cada elemento com a posição que ocupa;* *Verificar que são ímpares os números que formam a sequência de quantidade de palitos que constituem os triângulos;* *Escrever a expressão algébrica.*
Atividade II: **O preço do livro**	*Identificar a relação entre a quantidade vendida e o lucro;* *Escrever a expressão algébrica.*
Atividade III: **A cerca**	*Identificar o padrão;* *Relacionar cada elemento com a posição que ocupa;* *Escrever a expressão algébrica.*
Atividade IV: **Dobrando papéis**	*Identificar o padrão;* *Relacionar o número de quadriláteros com a quantidade de dobras;* *Diferenciar potenciação e multiplicação;* *Escrever a expressão algébrica.*
Atividade V: **Formulando problemas 1**	*Entender a necessidade, em uma sequência, de se perceber a relação entre um termo e o seguinte a este.*
Atividade VI: **Formulando problemas 2**	*Identificar o padrão na sequência;* *Colocar o aluno em uma postura ativa, identificando, assim, o que é necessário para formular um problema.*
Atividade VII: **Formulando problemas 3**	*Colocar o aluno em uma postura ativa, identificando, assim, o que é necessário ao formular um problema.*

Tabela 2: Objetivos da atividade final.

[4] Fala realizada por ONUCHIC, Lourdes. [ago. 2014]. Rio de Janeiro, 2014. 1 arquivo .mp3 (230 min.).

2.8 Metodologia para a aplicação das atividades

Para a aplicação das atividades, conforme apresentamos no capítulo 2, utilizamos a metodologia de ensino – aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. Procuramos seguir o roteiro de trabalho para a sala de aula, com uma pequena adaptação, apresentado por Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2011, p. 83), conduzindo o trabalho da seguinte forma:

- **Preparação do problema**

  Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

- **Leitura individual**

  Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

- **Leitura em conjunto**

  Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

  • Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.

  • Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, está criado, então, um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

- **Resolução do problema**

  A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como coconstrutores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

- **O papel do professor**

  O professor desenvolve um trabalho de observador, organizador, consultor, mediador, controlador e incentivador da aprendizagem. As atividades são propostas por ele, que é quem ajuda os alunos no trabalho cooperativo, intermediando o aprendizado e levando-os a pensar. Neste sentido, há tempo para que pensem, discutam e, se necessário, que o professor guie na solução de problemas secundários.

- **Resultados no quadro**

No fim do trabalho com os alunos, os resultados, sejam eles certos, incompletos ou errados, são anotados no quadro.

- **Plenária**

Após os resultados expostos, todos os alunos da turma se reúnem em uma assembleia, onde cada um defende seu ponto de vista e compartilha seu raciocínio.

- **Análise dos resultados**

As dificuldades encontradas pelos alunos são trabalhadas e, havendo necessidade, problemas secundários são resolvidos. O aspecto exploração é bastante importante nesta análise.

- **Consenso**

Após a análise, com devido esclarecimento das dúvidas, buscamos um consenso sobre o resultado.

Acreditamos que a aprendizagem cooperativa é necessária na metodologia adotada e, por isso, concordamos que:

> “Não é suficiente conduzir um grupo de estudantes, separados em pequenos grupos, trabalhando sobre um problema ou um conjunto de problemas. Não é aprendizagem cooperativa se os estudantes se sentam juntos em grupos e trabalham individualmente sobre o problema. Não é aprendizagem cooperativa se os estudantes se sentam juntos em grupos e uma só pessoa faz todo o trabalho. Verdadeiramente aprendizagem cooperativa requer a orientação do professor que é quem pode ajudar os estudantes a entender a dinâmica de grupo, a desenvolver a habilidade que eles precisam para a aprendizagem cooperativa e a aprender matemática trabalhando juntos em grupos.”
>
> (ARTZT 1991 apud AZEVEDO, 2002, p.95)

O ensino cooperativo contribui para que os alunos cooperem entre si como elementos de um grupo e cada grupo com o professor. Para ilustrarmos as relações entre alunos e professores em um ensino cooperativo, utilizamos as imagens abaixo, de Artzt (1991 apud AZEVEDO, 2002, p.95).

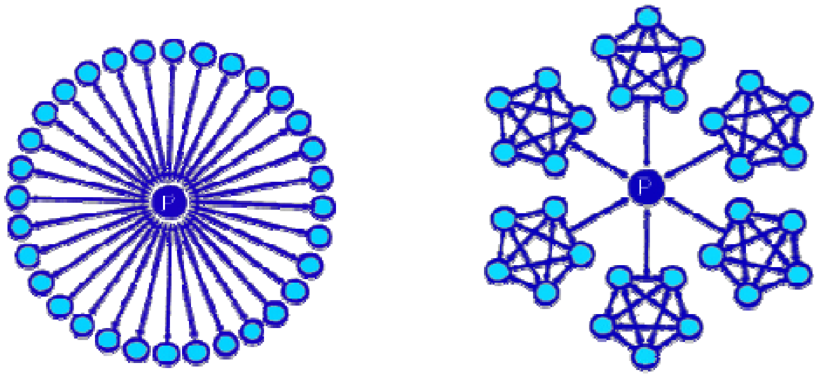


Fig. A
Sala de aula em ensino centrado no professor

Fig. B
Sala de aula em ensino cooperativo

Figura 2: Relações no Ensino

No ensino tradicional centrado no professor, descrito na figura A, cada estudante é ligado diretamente ao professor, contrastando com o ensino cooperativo, representado pela figura B. Neste, embora o professor mantenha o papel central, ele não é responsável por toda discussão matemática realizada durante a aula, desenvolvendo o papel de mediador nas relações entre os próprios grupos. Desta forma, desejamos ir além da divisão de grupos, tendo o papel do professor como descrito acima, para atingir a aprendizagem cooperativa.

Esperamos propor um trabalho que evidencie as estratégias utilizadas por alunos em um ambiente de ensino – aprendizagem de matemática através da resolução de problemas, salientando, também, as dificuldades apresentadas neste processo, assim como a capacidade de generalização dos alunos.

Capítulo 3

3. PRÉ-PILOTO E ESTUDO PILOTO

Para o nosso estudo piloto, aplicamos as atividades em uma turma do 9° ano em uma escola particular da Zona Norte do Rio de Janeiro. Antes da aplicação, realizamos três encontros com professores, alguns alunos do Mestrado em Ensino da Matemática – IM/UFRJ e outros que são professores do próprio programa, para analisarmos previamente as atividades.

3.1 Análise prévia das atividades do estudo piloto

3.1.1 Os dois primeiros encontros

O primeiro encontro com os professores ocorreu em 4 de setembro de 2013 pelo período de 1 hora. Entregamos a primeira versão do bloco de atividades para cada professor e pedimos que cada um resolvesse o primeiro problema e pontuasse o que ele esperava de um aluno, como estratégias, erros ou dúvidas. Pedimos também que fossem feitas críticas e sugestões. Assim que o grupo terminava uma atividade e anotava suas contribuições no bloco, era aberto o debate e iniciávamos o próximo problema. A primeira versão do bloco de atividades era composta por 3 questões, 2 notícias que apresentavam situações que poderiam ser relacionadas com funções e 2 atividades de formulação de problemas, mas neste encontro, trabalhamos as questões 1 e 2 e as notícias 1 e 2. As demais atividades foram discutidas no segundo encontro.

O segundo encontro ocorreu em 11 de setembro de 2013, durante o período de 1h30min com a presença de 6 professores. Entregamos a segunda versão do bloco, onde constavam as alterações sugeridas pelos professores e iniciamos, da mesma forma que no encontro anterior, a discussão das questões.

Em ambos os encontros o bloco trazia questões que tratavam de ensinar funções através da resolução de problemas, nosso objetivo no início das aplicações no Seminário. Decidimos, no segundo encontro, mudar este tópico por alguns motivos. O primeiro deles foi por conta do calendário escolar, já que teríamos que nos restringir a um determinado período para aplicar as atividades, respeitando este calendário. Ao desejarmos analisar as estratégias dos alunos, selecionamos questões que dessem margem a diversos raciocínios e caminhos.

O segundo encontro terminou, portanto, com a sugestão de que as questões deveriam direcionar, o mínimo possível, às resoluções para que pudéssemos extrair ao máximo as possibilidades de respostas dos alunos. Com base nessas constatações, decidimos mudar o tópico de ensino e trabalhar problemas de tópicos diversos que possibilitassem a generalização. Desta forma, no terceiro encontro, apresentamos a nova proposta, como segue na próxima sessão.

3.1.2 O terceiro encontro

Nesse encontro, apresentamos a terceira versão do bloco de atividades aos cinco professores que estavam presentes. Este bloco possuía algumas questões que estavam nas duas versões anteriores, com algumas adaptações, além de novas questões.

Novamente abrimos o debate para que fossem discutidas as questões que levamos à sala de aula. O primeiro assunto em pauta foi como enunciar um problema sem restringi-lo e de forma que o aluno entendesse o objetivo do mesmo. Uma das sugestões foi que houvesse um roteiro para o professor, onde diretrizes esclarecessem cada problema.

O grupo concordou, também, que não podemos classificar um aluno como inapto a generalizar se o mesmo não escreveu a fórmula. O fator tempo também foi colocado em pauta, pois houve o receio de que demorassem muito tempo em apenas um problema. A partir do momento que o professor conduz a aula, ele pode auxiliar os alunos a organizarem o raciocínio e seguirem driblando suas dificuldades e, por isso, a proposta do roteiro do professor mais uma vez foi citada. Além disso, os professores sinalizaram que questões similares deveriam ser retiradas e sugeriram um novo problema.

Em relação às questões sobre formulação de problemas, os professores concordaram com as que estavam propostas, apenas sugerindo alguns “ajustes” nos enunciados.

Com a revisão do bloco de atividades pelos professores, elaboramos a versão para ser aplicada em nosso estudo piloto. A análise da aplicação segue na próxima sessão.

3.2 Estudo piloto

O estudo piloto foi aplicado em uma turma do 9° ano do Ensino Fundamental em uma escola particular da Zona Norte do Rio de Janeiro, em 3 tempos de 50 minutos cada, sendo 2 consecutivos e 1 isolado.

No encontro, que ocorreu em 19 de setembro de 2013, dividimos a turma em 4 grupos de 4 alunos e em um grupo com 3 alunos. Entregamos um bloco de atividades para cada aluno. Os alunos foram estimulados a discutir com os seus colegas o que interpretaram de cada questão e foi dado o tempo necessário para que cada grupo chegasse à sua resposta. Dos 5 grupos, gravamos o áudio de 4 deles, pois o quinto grupo não permitiu a gravação.

Em álgebra, nesse período, os alunos haviam aprendido o conceito de função, função do 1° grau e do 2° grau, assim como seus gráficos. Entretanto, não observamos durante a aplicação da atividade que os alunos utilizaram esse conhecimento.

A tabela abaixo indica a divisão dos grupos e seus integrantes, onde os nomes são fictícios, escolhidos pelos próprios alunos.

Grupo I	Grupo II	Grupo III	Grupo IV	Grupo V
Danny	Anthony	Bob	Abby	Cacau
Harry	Clóvis	Danilo	Anastásia	Carlo
Helena	Eduardo	Kevin	Christian	Mocha
Morgan	Gustavo	Luki	Gideon	-

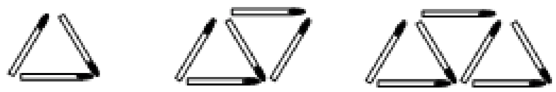
Tabela 3: Quadro de grupos e alunos.

Na análise das atividades, em negrito estarão as estratégias, erros ou percursos interessantes realizados pelos alunos, a fim de salientá-los.

3.2.1 Atividade I – Os triângulos com palitos.

Enunciado:

a) Com os palitos de fósforo, construa um triângulo. Continue a formar outros triângulos como na figura:



b) Escolha uma quantidade de palitos e descubra quantos triângulos podem ser formados. Experimente para quantidades pequenas e grandes (que tal maior que 50?), pares e ímpares de palitos.

c) Para quantidades diferentes de palitos conseguimos formar quantidades iguais de triângulos? Argumente.

d) Faça agora o mesmo escolhendo quantidade de triângulos e investigando o número de palitos necessários para formar esta quantidade.

e) Como você explicaria para uma pessoa o que você faria para determinar a quantidade de palitos necessários, dado certo número de triângulos?

f) Escreva uma fórmula matemática que relacione o número de palitos com a quantidade de triângulos.

<u>Descrição da aplicação:</u>

A primeira dúvida, comum a todos os alunos envolvidos nesta atividade, foi quanto à configuração da 4ª imagem de palitos. Tanto um aluno do grupo I quanto uma aluna do grupo IV apresentaram configurações diferentes do que era esperado, como mostram as imagens a seguir. Já a aluna Abby apresentou um esquema que não está associado ao padrão anterior, onde não parece ter observado as figuras anteriores da sequência.

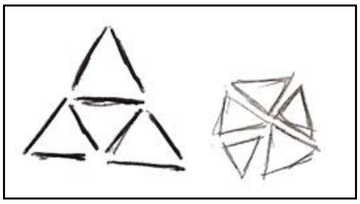


Figura 3: À esquerda, configuração realizada pelo aluno Danny (grupo I) e, à direita, a realizada pela aluna Abby (grupo IV).

Observamos que o desenho realizado por Danny poderia representar uma possível configuração e, por isso, adicionamos mais uma figura ao esquema da atividade que será apresentada no estudo principal.

Esclarecemos para a turma qual a configuração que desejávamos obter e continuamos guiando os alunos. Os alunos do grupo I e do grupo IV questionaram se no item (b) deveriam ser usados exatamente 50 palitos ou somente quantidades maiores, pois acreditavam que era algum tipo de "pegadinha", e permitimos, então, que pudessem usar 50 palitos.

Todos os grupos se sentiram orgulhosos por terem "inventado uma fórmula". Primeiro, o aluno Morgan do grupo 1 explicou oralmente o que ele fez para encontrar a quantidade de triângulos: *"É -3 dividido por 2 e somei 1"*, confirmando com testes para algumas quantidades de palitos. Ele explica que o "-3" da fórmula se refere ao primeiro triângulo. Vemos que Morgan **analisou a sequência de triângulos visualmente**, uma vez que ele observou que o primeiro triângulo necessita de 3 palitos.

Como o grupo I havia testado para 51 e 52 palitos, o aluno Morgan facilmente respondeu o item (c), embora, inicialmente, tivesse dúvidas para entender o enunciado. Depois que o mesmo foi esclarecido, todos os alunos viram como o responderiam. Muitos alunos relataram **dificuldades em justificar**. Por exemplo, o aluno Danny comentou: *"Argumentar? Não sei argumentar. Só para algumas coisas. Vou dar um exemplo que é mais fácil. Não precisa convencer ninguém não. 20 e 21 dá o mesmo número de triângulos, não é?",* logo não observa que, na verdade, com 21 e 22 palitos obtemos o mesmo número de triângulos. Mesmo com esse raciocínio, ele respondeu no bloco que com 51 e 52 palitos obtemos 25 triângulos. Danny não demonstra perceber que uma quantidade ímpar de palitos e seu sucessor resultam em uma mesma quantidade de triângulos, uma vez que não mencionou esse raciocínio nem participou da discussão.

Nem todos os alunos tiveram participação na atividade, embora ela fosse obrigatória. O aluno Harry, cuja participação foi quase nula em todo o processo de aplicação, respondeu que *"Poderão ser feitos triângulos com palitos necessários e sobrará 1 ou 2 palitos.",* mesmo o grupo tendo discutido que poderia sobrar apenas 1 palito. As respostas da Helena e do Morgan foram similares, como indicam as imagens a seguir, mas Helena não comentou sobre a sobra de um palito, enquanto Morgan demonstra compreensão de que uma quantidade ímpar de palitos e sua quantidade sucessora resultam na mesma quantidade de triângulos.

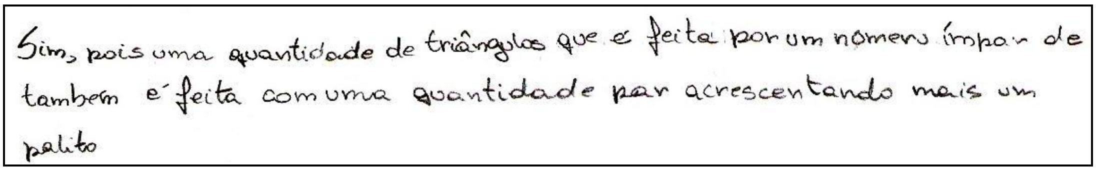

Sim, pois uma quantidade de triângulos que é feita por um nomero ímpar de
tambem é feita com uma quantidade par acrescentando mais um
palito

Figura 4: Resposta dada pela aluna Helena (grupo I) para o item (c).

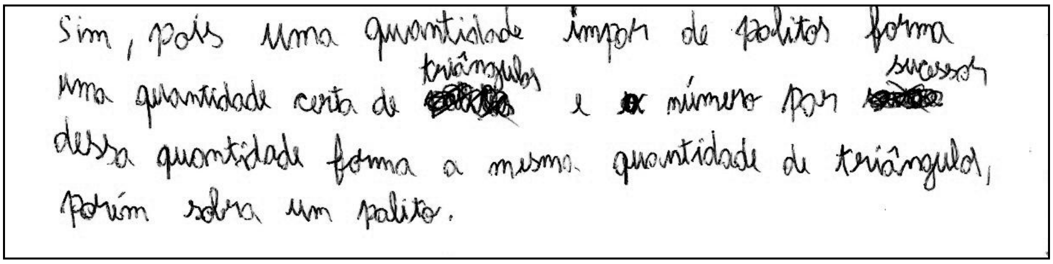

Sim, pois uma quantidade impar de palitos forma
uma quantidade certa de triângulos e número par sucessor
dessa quantidade forma a mesma quantidade de triângulos,
porém sobra um palito.

Figura 5: Resposta dada pelo aluno Morgan (grupo I) para o item (c).

Para o item (e), a aluna Helena encontrou duas fórmulas: uma para números pares e outra para números ímpares. A aluna explicou que adicionou dois palitos nas quantidades pares, porque para essas quantidades sempre sobra um palito. Observamos que ela adiciona um ou dois palitos ao dobro da quantidade de triângulos e que seu **foco foi visual**, uma vez que percebeu que sobram palitos. Desta forma, para o item (f), a aluna diz que usaria as fórmulas apresentadas no item (e), que seguem abaixo.

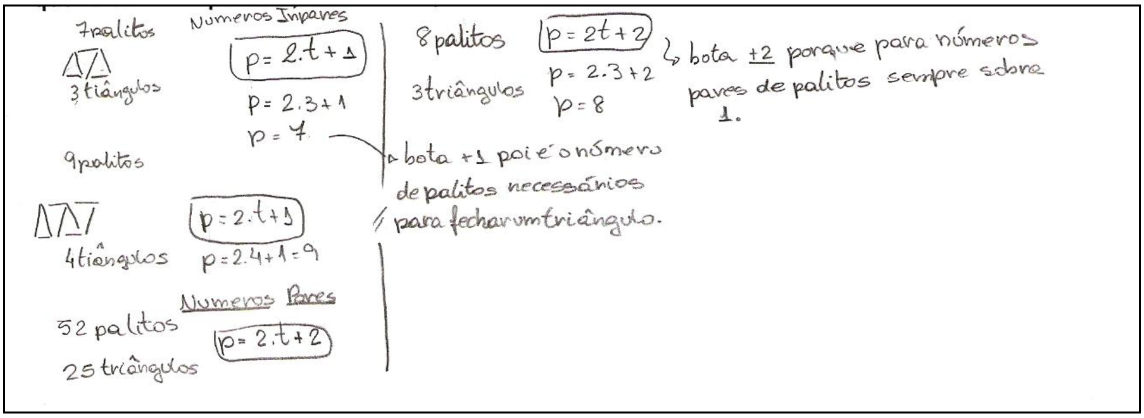


Figura 6: Resposta dada pela aluna Helena (grupo I) para o item (e).

Alguns alunos, como Morgan, embora tenham percebido ao longo da atividade que sobrariam palitos, não apresentaram duas fórmulas: Uma para quantidades pares e outra para quantidades ímpares de palitos. Para esses casos, categorizamos, na seção que segue, como uma resposta incompleta. Danny e Harry também apresentaram uma fórmula apenas para números ímpares de palitos.

O grupo II utilizou a **forma oral quase que como única forma de registro**. Poucos foram os registros escritos e anotações. O aluno Gustavo justificou a prática dizendo que *"Eu tô falando tudo o que eu penso. Então já tá registrado, não consigo escrever tudo, mas está registrado o que eu falei."*.

Para o item (b), o aluno Gustavo utilizou 60 palitos e disse que *"peguei o 60, diminuí 3, deu 57, dividi por 2"* e, em seguida, Clóvis diz que testou e não deu certo, mas Gustavo explica que *"vai dar meio... São triângulos inteiros. Então dá 29 triângulos inteiros"* e que diminuiu três *"porque o primeiro triângulo é formado por 3 palitos e o restante por 2 palitos".* Observamos, novamente, **a análise da sequência de triângulos como recurso** para estabelecerem um padrão, como o grupo I realizou.

No item (c), o grupo respondeu de imediato que sim e Gustavo justificou, inicialmente dizendo que *"um número par daria meio, não tem como cortar o triângulo ao meio"*. Gustavo inicialmente não percebeu que o "meio" se referia ao palito que sobra e associou a meio triângulo. Ele completou sua resposta utilizando exemplos:

> **Gustavo – Grupo 2:** Se temos 60 palitos, diminuindo 3 que é o 1, vai dar 57. Dividido por 2 vai dar 28,5, mas tem mais 1 do 3 que eu diminuí. Então vai ficar 29,5. Como ele só quer triângulos inteiros, não precisa fazer isso. Dá 29,5. Se fizermos com 59, é, diminuímos 3, dá 56, dividimos por 2 dá, 25..., dá 28. Somando 1 também, vai dar 29. O outro deu 29,5. Como só quer triângulos inteiros, os dois vão dar 29. Então, a (c) está verdadeira, porque conseguimos com quantidades diferentes de palitos formarem a mesma quantidade de triângulos.

O aluno considera que tirando o primeiro triângulo, que possui 3 palitos, os demais necessitarão de apenas 2 palitos. Assim, ao determinar a quantidade de triângulos, ainda é necessário que se adicione mais 1 triângulo referente ao primeiro que foi retirado, mostrando que os alunos **analisaram a sequência visualmente**. Para o item (d), o grupo percebeu que o problema pedia o **inverso do que era pedido no item (b)** e começaram a resolver o problema utilizando oito triângulos e Gustavo explica, oralmente, a resolução.

> **Gustavo – Grupo 2:** Vamos supor que sejam 8 triângulos. Deixa eu pensar. São 8 triângulos. Um desses vale 3. Os outros 7 estão valendo 2. Então, vai ser 3 e aqui vão ser 14. Então 14 mais 3 dá 17. Então são necessários 17 palitos para se fazer 8 triângulos. Irei fazer o processo inverso. 17 menos 3 dá 14. 14 por 2 dá 7. Exatamente o que eu falei. Dá certinho.

Novamente o grupo raciocinou **analisando visualmente a sequência** e, **buscando o processo inverso**, conseguiu responder o problema. Em meio à explicação, o aluno

Anthony questiona por que a quantidade total de palitos não é o produto da quantidade de triângulos por três, dizendo que *"se eu pegar 3 triângulos e multiplicar ele por 3. Vai dar 9, não é? Cada triângulo tem quantos palitos? 3."*, o que mostra um **olhar individual para cada triângulo** e não na sequência. Imediatamente o aluno Gustavo explica que "*um triângulo gasta 3 e todos os outros gastam 2."*.

O grupo não possuiu dificuldade para explicar o item (e), onde o aluno Gustavo utiliza uma quantidade de 3 triângulos para determinar quantos palitos são gastos, mas vale lembrar que o problema pedia para determinar a quantidade de palitos necessários, dado certo número de triângulos, ou seja, explicar para uma quantidade qualquer.

Para o item (f), o aluno Clóvis responde oralmente o processo para determinar o número de triângulos dada uma quantidade de palitos, mas não expressa nenhuma fórmula, como é pedido no problema. A resposta oral final foi a do aluno Gustavo, que respondeu de uma forma um pouco confusa, demonstrando **pouca habilidade com algebrismos**.

> **Gustavo – Grupo II** Pegamos p que é o número de palitos e t que é o número de triângulos. Pegamos $p = t$ vezes 3 mais xt vezes 2. Então palitos é igual a 1 t que é o número de triângulos vezes 3 porque no primeiro triângulo você vai precisar gastar 3 vezes x que é o número de triângulos que você quer vezes t que é o número de triângulos vezes 2 porque o restante você só precisa gastar 2 palitos, que você complementa com o de 3. Essa é a nossa fórmula.

Houve registro escrito do último item, (f). Anthony e Clóvis apresentaram contas para determinar o número de triângulos formados com 63 palitos e Eduardo e Gustavo apresentaram uma fórmula baseada na explicação exposta: $p = t.3 + xt.2$, sendo p o número de palitos e t o número de triângulos. Os alunos não identificaram o que representa x, por escrito, mas na fala anterior de Gustavo notamos que x representa o número de triângulos que se quer. Na fala notamos que além do x, temos t que representa, também, quantidades de triângulos.

O grupo III, inicialmente, começou a **formar uma sequência de triângulos**, **registrando as quantidades de palitos obtidas em uma tabela** para algumas quantidades de palitos. A imagem abaixo mostra a resposta do aluno Bob, que se enganou e preencheu a tabela informando que 12 triângulos são construídos com 23 palitos, em vez de 25 e que 13 triângulos são construídos com 25 palitos, em vez de 27, embora tenha apresentado fórmulas corretas para números pares e ímpares de palitos.

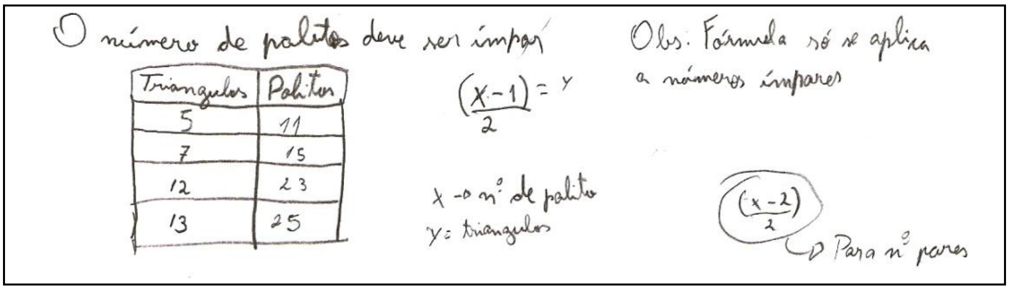


Figura 7: Resposta do aluno Bob (grupo II) para o item (a).

Após a tabela, o aluno Danilo disse que achava ter **encontrado uma fórmula** explicando oralmente que *"a conta seria... O número de palitos menos 1 divididos por 2".* Os outros integrantes do grupo questionaram se ali já deveria ser colocada a fórmula e Danilo disse que não, mas que achava mais fácil buscar por uma fórmula.

O grupo teve dificuldade em entender o enunciado do item (c). Após ser explicado, o aluno Kevin logo disse: *"É que o número de palitos deve ser ímpar"* e o Luki completou: *"Porque, tipo, se não for não vai formar triângulo".* Em seguida, Danilo responde o item (c) dizendo que *"dá sim. Tipo 7 e 8. Com 7 dá pra formar 3 triângulos e com 8 vai ter 3 triângulos e vai sobrar 1."*, provavelmente utilizando dados que testou e apresentou na tabela. Todos concordaram que sobrará 1 palito para as quantidades pares.

Uma vez que a fórmula foi obtida no item (b), os itens (d), (e) e (f) foram resolvidos utilizando a própria. No último item, (f), dois alunos registraram a fórmula para pares e ímpares, enquanto que os outros dois colocaram apenas uma fórmula.

A aluna Abby foi a primeira do grupo IV a expor seu raciocínio*: "1 2,3 palitos. 1 triângulo. 1, 2, 3, 4,5 palitos. 2 triângulos. E 1, 2, 3, 4, 5, 6,7 palitos. 3 triângulos. Tá aumentando de 2 em 2. Porém só dá certo com números ímpares.".* O raciocínio de Abby é ótimo em termos numéricos e, diferente dos outros grupos, **não está ligado à figura e às informações que o esquema dos palitos oferece, mas a uma sequência de valores**. Os outros integrantes do grupo desconfiaram se esta resposta correspondia ao que o problema questionava.

Abby continuou seu raciocínio reforçando que só geravam números ímpares: "3, 5, 7,...", mas não sinalizou ao grupo se o que eram gerados eram palitos ou triângulos. Sendo assim, para o item (b), Gideon sugeriu que eles tentassem resolver o problema para 51 palitos[5] utilizando o caminho que Abby sugeriu e que, na verdade, geravam números de palitos e não triângulos.

Com o raciocínio inicial, Abby concluiu que seriam necessários 103 "palitos", dado 51 palitos iniciais, mas o seu amigo Gideon comenta: "*Palitos? Não, ele quer saber quantos triângulos dão para fazer com 51 palitos.".* Ele diz que acha que são 26 palitos, mas não chega a argumentar.

Anastásia disse que a quantidade de palitos é igual à metade da quantidade de triângulos adicionado a 1. Na verdade, a aluna desejou dizer dobro ao invés de metade, tanto que ninguém do grupo comentou o equívoco e seguiram utilizando o dobro da quantidade de triângulos mais 1. Gideon testou a fórmula exibida, mas utilizando o dobro, e verificou que realmente eram 26 triângulos, mas Abby insistiu no seu raciocínio, utilizando 51 triângulos ao invés de 51 palitos. Abby sugere então que, como o problema pede para uma quantidade maior que 50, que eles escolhessem 103 palitos e **fizessem o processo inverso**, obtendo 51 triângulos.

O aluno Christian, que comentou inúmeras vezes que **não gostou da atividade e que preferia aquelas em que ele somente tinha que calcular ou aplicar numa fórmula**, notou que com 2 triângulos adicionavam mais 3 palitos e com 3 triângulos adicionavam mais 4 palitos, ou seja, bastava adicionar o número de triângulos com o seu sucessor para determinar a quantidade total de palitos utilizados, **sem demonstrar entender o motivo deste processo dar certo**. Com esse raciocínio, Abby chegou aos 103 palitos, adicionando 52 a 51, como ela mesma explica:

> **Abbby – Grupo 4**: É a minha lógica, gente. 1 está para 3, 2 está para 5, 3 está para 7. Conforme está aumentando, está aumentando 1 número em diferença, entre o número de triângulos e o número de palitos. Ou seja, aqui é 2, aqui é 3, aqui é 4 e aqui é 5. Obviamente no 51, por ser um número maior, vai ser uma diferença de 52 palitos para poder chegar a igual a 103.

A partir desta explicação, o grupo começou a discutir uma possível fórmula. Existiram algumas **divergências em relação à notação** utilizada para escrever a fórmula, principalmente porque Christian utilizou o símbolo "∆" para se referir à quantidade de triângulos, sendo relacionado com a letra grega "delta" pelos demais integrantes. Depois de esclarecidos, Anastásia optou pela notação "∆" enquanto Gideon e Abby decidiram usar a

[5] Sublinhamos as palavras palitos e triângulos para enfatizar a troca realizada pelos alunos.

"nt". Não só o grupo IV, como também todos os outros expressaram **dúvidas com relação a notações, algebrismos**, mostrando pouca habilidade.

Resolveram testar a fórmula exibida por Anastásia, ou seja, $p = 2t + 1$, para qual p é o número de palitos e t é o número de triângulos. Inicialmente testaram para 51 palitos, mas Abby ainda não parecia segura sobre a **diferença entre quantidades de palitos e triângulos**. A aluna insistiu que a fórmula, seguindo o equívoco de Anastásia e considerando a metade da quantidade de triângulos, fosse testada para 103 palitos, percebendo que só funcionaria para números pares. Sendo assim, o grupo decidiu mudá-la para $t = \frac{p-1}{2}$ +1. Anastásia comentou que achava que as fórmulas eram iguais, mas a discussão não seguiu adiante.

O grupo respondeu item (b) utilizando duas fórmulas, apresentadas abaixo, que relacionavam quantidades de triângulos em relação às quantidades de palitos, para quantidades pares ou ímpares de palitos, embora durante a atividade não tivessem discutido sobre o palito que sobrava. Gideon não comentou sobre as duas fórmulas, citando apenas uma em seu bloco de questões.

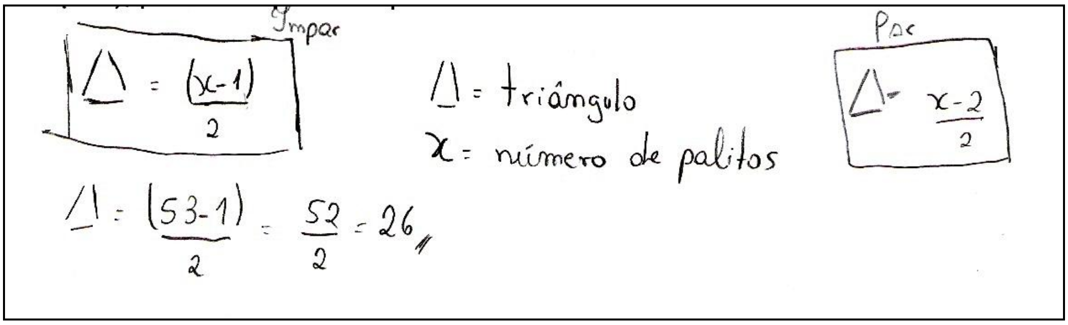


Figura 8: Resposta dada pela aluna Abby (grupo IV) para o item (b).

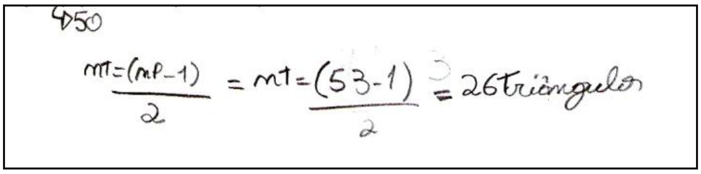


Figura 9: Resposta dada pelo aluno Gideon (grupo IV) para o item (b).

No item (c) o grupo ficou bem confuso, pois os alunos não conseguiam entender o que era perguntado. Inicialmente, o grupo achou que sim. Gideon disse: *"Depende, você* *pode aumentar o tamanho”*. Já Abby comentou: *“Acrescentando aqui em vez de você usar um palito unitário para os dois, você coloca 2 palitos para o “lado”.”*. Christian achou que *“não porque não”*, mostrando a sua **dificuldade em argumentar**. Depois que explicamos o que o problema perguntava, eles decidiram responder que não **sem justificar**. Provavelmente essa percepção se deu, porque eles não notaram que poderia sobrar 1 palito.

As respostas aos itens (d) e (f) foram iguais para todos os integrantes e ninguém respondeu o item (e). Durante toda a atividade, houve **dificuldade de compreender quem se relaciona com quem**, quando, por exemplo, Abby testa 51 palitos, considerando que são 51 triângulos, encontrou 103 palitos. Aparentemente, por este motivo, o item (f) foi respondido com uma fórmula que relacionava a quantidade de triângulos com o número de palitos e não a quantidade de palitos com o número de triângulos, como pedido no enunciado.

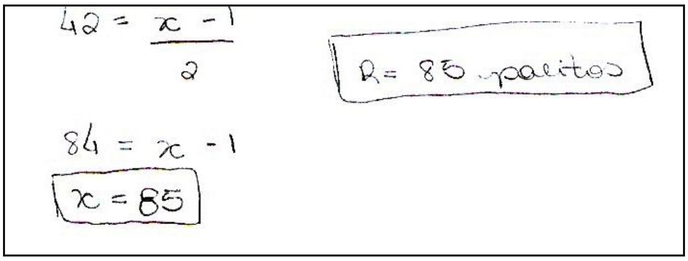


Figura 10: Resposta dada pela aluna Anastásia (grupo IV) para o item (d).

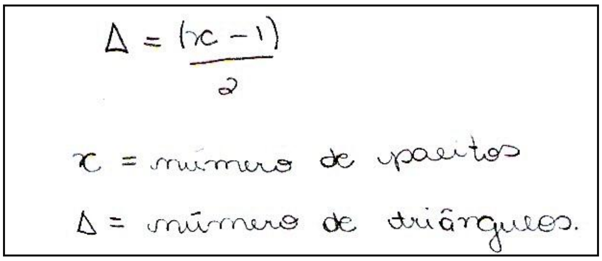


Figura 11: Resposta dada pela aluna Anastásia (grupo 4) para o item (f).

O grupo V, que não permitiu gravação em áudio, não apresentou respostas homogêneas para todos os integrantes, exceto no item (a), o qual todos resolveram corretamente. Para o item (b), a aluna Cacau testou para 52 triângulos e, dobrando esta quantidade, obteve 104 palitos, sem observar que necessitava de mais 1 palito para formar o primeiro triângulo. Os alunos Carlos e Mocha apenas **apresentaram um desenho da situação**.

Para o item (c), a aluna Cacau não pareceu ter compreendido o enunciado, da mesma forma que o grupo IV, uma vez que utilizou outra configuração para montar um triângulo, como mostra a imagem que segue. Os outros dois alunos deixaram em branco.

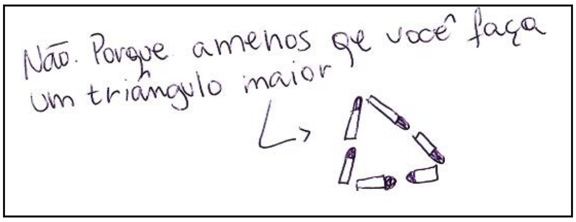


Figura 12: Resposta dada pela aluna Cacau (grupo V) para o item (c).

No item (d), Cacau continuou dobrando o número de triângulos, respondendo que 26 triângulos precisam de 52 palitos. Tanto Carlos quanto Mocha continuaram a desenhar triângulos. Carlos apresentou um resultado incorreto, afirmando que 20 palitos formam 10 triângulos, compatível com o raciocínio da Cacau e Mocha apenas fez um esquema para 26 triângulos.

Carlos e Mocha não responderam os itens (e) e (f). Cacau, no item (e), respondeu que *"a cada 1 triângulo, 3 palitos"* e, no item (f), utilizou uma fórmula em que, para determinar o número de triângulos, dobra p número de palitos e adiciona 1, como indica resolução abaixo.

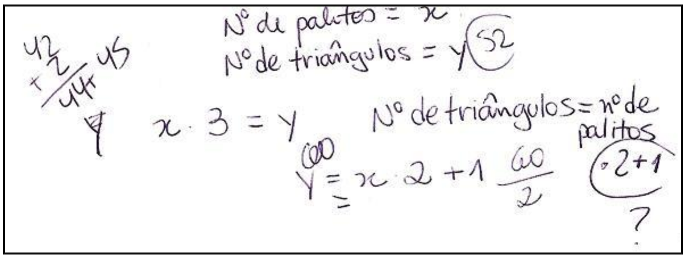


Figura 13: Resposta dada pela aluna Cacau (grupo V) para o item (f).

Embora a aluna tenha realizado o processo da atividade sem demonstrar perceber que o primeiro triângulo necessitava de mais palito, ela apresentou uma fórmula correta: $y = x.2 + 1$. Vale observar que ela escreveu a mesma fórmula utilizando palavras e apresentou uma fórmula incorreta: $x.3 = y$. Nenhuma das fórmulas apresentadas representa o raciocínio que a aluna apresentou ao longo da atividade.

3.2.2 Atividade II – O preço do livro.

Enunciado:

Uma livraria recebe certo livro por um custo de R$40,00 por exemplar. O gerente vendeu inicialmente 36 desses livros por semana a R$ 100,00 cada. Sabendo que, se reduzisse o preço de cada livro de R$ 5,00 por semana, venderia mais 6 livros por semana, resolveu experimentar e foi reduzindo o preço do livro de R$5,00 a cada semana.

a) Investigue como varia o preço ao longo das semanas.

b) Pelo que você observou, valeria a pena o gerente continuar a diminuir o preço de venda do livro? Argumente.

c) Traduza por expressões algébricas o preço da venda, o lucro e o número de livros vendidos por semana.

d) Se você fosse o gerente desta livraria, no que o conhecimento destas expressões te auxiliaria a tomar decisões?

Descrição da aplicação:

Os alunos, inicialmente, duvidaram que o gerente pudesse ganhar dinheiro ao diminuir o preço do livro, conforme consta em áudio. Para o item (a), todos os alunos, que realizaram a atividade, utilizaram um esquema para organizar seus dados. Os grupos I e III constataram que haveria lucro, antecipando parte da resposta para o item (b), observando que, mesmo diminuindo o valor do livro, o valor total recebido aumentaria.

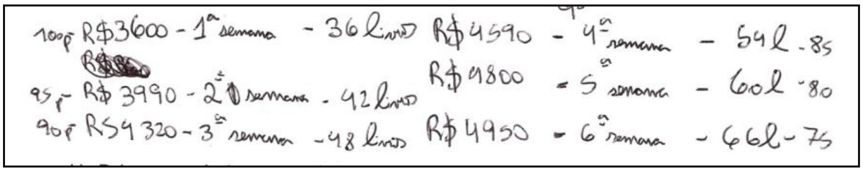

100r R$3600 - 1ª semana - 36 livros R$4590 - 4ª semana - 54 l - 85
95r - R$ 3990 - 2ª semana - 42 livros R$4800 - 5ª semana - 60 l - 80
90r R$4320 - 3ª semana - 48 livros R$4950 - 6ª semana - 66 l - 75

Figura 14: Resposta dada pelo aluno Danny (grupo I) para o item (a).

Início	1ª	2ª	3ª	4ª
Clientes	42	48	54	60
Preço	95	90	85	80
Total	3990	4320	4590	4800

Figura 15: Resposta dada pelo aluno Danilo (grupo III) para o item (a).

No grupo V, 2 alunos também realizaram esta análise para o item (a), mas não especificaram o que representava o número de livros vendidos e a receita total obtida. Esta ação de **não identificar o que cada equação, valor ou variável representa** foi comum ao longo da atividade. Por exemplo:

- No item (b), o aluno Danny, do grupo I, não pareceu perceber a diferença entre o total arrecadado e o lucro obtido.
- Morgan, do grupo I, respondeu o item (c) corretamente, mas não indicou o que representava a variável x, considerando que o preço da venda era o montante recebido na venda dos livros.

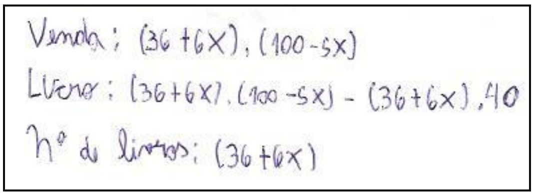

Venda: (36+6X).(100-5X)
Lucro: (36+6X).(100-5X) - (36+6X).40
nº de livros: (36+6X)

Figura 16: Resposta dada pelo aluno Morgan (grupo I) para o item (c).

- Anthony, do grupo II, apresentou a fórmula $x - 5 = px$ para o item (a), mas não indicou o que representa cada variável, assim como não justificou, nem oralmente, nem por escrito, como chegou a esta fórmula.
- Os integrantes do grupo II, exceto Eduardo que não respondeu, utilizaram uma fórmula, no item (c), para o preço e o número de livros, mas não especificaram a que cada fórmula se referia.

- Para o item (c), todos os integrantes do grupo IV responderam com as mesmas fórmulas, mas apenas 2 alunos especificaram o que correspondia a cada variável.
- Para o item (a), Cacau, do grupo V, apresentou uma tabela que, embora não especifique o que representa cada valor, apresenta a quantidade de livros e seus respectivos valores unitários passadas 2 semanas, como mostra a resolução abaixo.

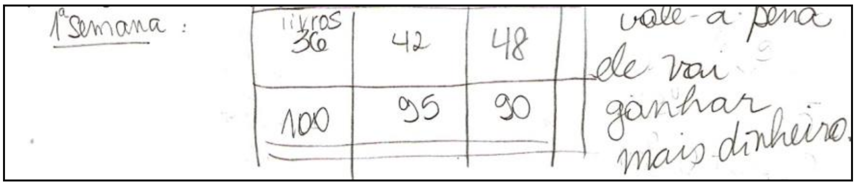


Figura 17: Resposta dada pela aluna Cacau (grupo V) para o item (a).

Muitos alunos concluíram as questões **sem justificar** o processo que os levaram a atingir a resposta. Morgan, do grupo I, por exemplo, para o item (b) apresentou cálculos para o lucro que mostram que o mesmo inicialmente cresce, com um lucro máximo na venda de 85 livros e depois decresce. Entretanto, o aluno não teceu comentários sobre essa análise nem por áudio, nem no registro escrito, mas concluiu no item (d) que o gerente teria lucro até a terceira semana, para tanto provavelmente utilizou os resultados obtidos no item (b). De qualquer forma, o aluno não mostrou perceber que na terceira semana ocorrerá o lucro máximo, mas que após esta, o gerente ainda possuirá lucro.

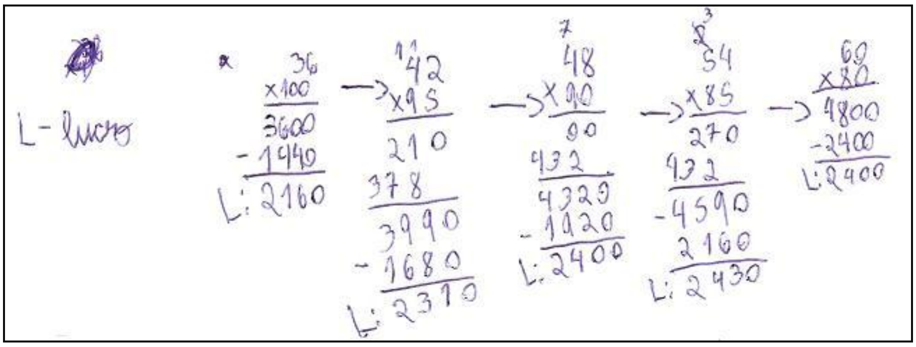


Figura 18: Resposta dada pelo aluno Morgan (grupo I) para o item (b).

Apesar do grupo III somente ter apresentado cálculos para as 4 primeiras semanas no item (a), para o item (b) o grupo apresentou o valor para a receita máxima e o valor que gera prejuízo, como mostra a resolução abaixo, **sem apresentar como chegaram a esta conclusão**.

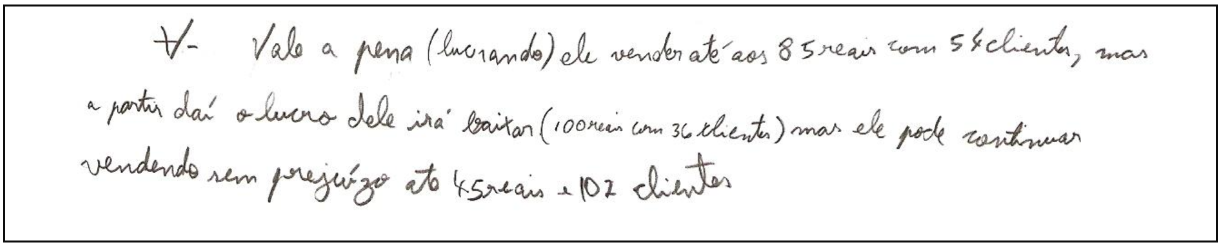


Figura 19: Resposta dada pelo aluno Bob (grupo III) para o item (b).

O grupo IV agiu de forma similar ao grupo III, pois mesmo apresentando cálculos para somente as 4 primeiras semanas, 3 integrantes do grupo responderam corretamente o item (b) dizendo que valeria a pena reduzir o preço até 12ª semana, na qual não teria lucro nem prejuízo, sem apresentar uma justificativa para isso. Abby foi a única que respondeu diferente dos demais, afirmando que *“quando diminui o preço, aumenta o número de clientes e aumenta o lucro”* sem especificar em qual período isso ocorre.

No grupo V, para o item (b), dois alunos responderam que valeria a pena até a sétima semana, e Cacau respondeu que valeria, pois ele ganharia mais dinheiro, o que é uma justificativa errônea. **Os alunos não apresentaram justificativa**.

Alguns alunos sentiram dificuldades em apresentar uma fórmula para o item (c), como Helena, embora a aluna entendesse o processo, conforme registro em áudio. Sua **dificuldade estava em escrever algebricamente o que ela verificava numericamente**.

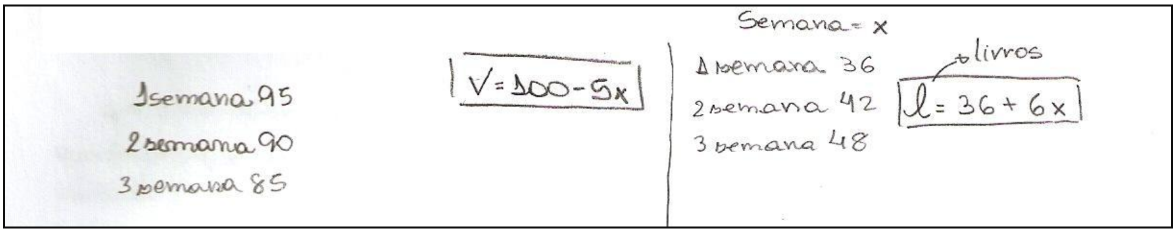


Figura 20: Resposta dada pela aluna Helena (grupo I) para o item (c).

Analisando a resposta apresentada por Helena, percebemos que a fórmula para o preço de venda está correta, mas a fórmula para a quantidade de livros não, já que a aluna considerou x como o número de semanas. Se a mesma tivesse considerado que na semana “0” foram vendidos 36 livros, a fórmula estaria correta. A aluna não apresentou uma fórmula para o lucro e nem resposta para o item (d).

Dúvidas sobre quantos livros foram vendidos na primeira semana ocorreram nos outros grupos. Por exemplo, o grupo 2 não trabalhou com a quantia fixa inicial, R$ 100,00 para o livro e 36 livros vendidos, e utilizou as variáveis para a semana e para as vendas, quando, na verdade, a quantidade de livros vendidos era um número fixo semanal.

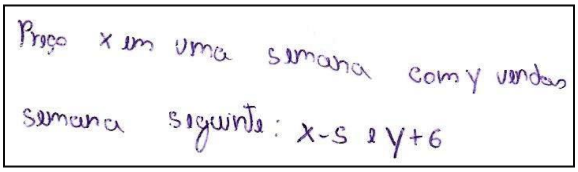


Figura 21: Resposta dada pelo aluno Clóvis (grupo II) para o item (c).

O grupo III apresentou a mesma dificuldade. Inicialmente, para o item (a) discutiram se na primeira semana teria uma receita de R$3 600,00 obtida com a venda de 36 livros ao preço de R$100,00 ou se na primeira semana já seriam vendidos “36+6” livros. Decidiram, então, estipular uma “semana 0”, cuja receita seria de R$3 600,00, como podemos verificar pelo áudio.

> **Danilo – Grupo 3:** Como estava na semana inicial, antes dele diminuir? O lucro foi quanto ele ganhou na semana inicial antes dele diminuir. 3 600 na semana INICIAL. Começou nisso, essa foi a primeira, quer dizer, entre aspas, porque não é a primeira semana. Aí a primeira semana desse processo de diminuição... Na primeira semana desse processo, ele diminuiu um preço e ganhou mais 6 clientes. Entendeu?

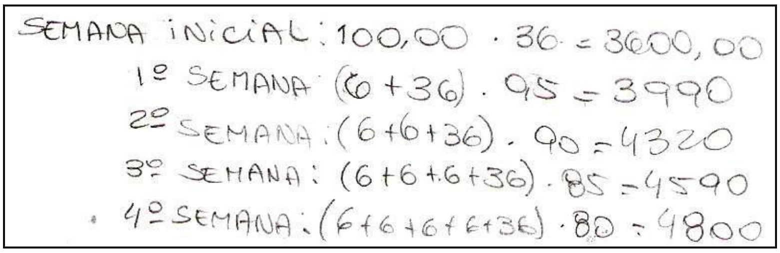


Figura 22: Resposta dada pelo aluno Kevin (grupo III) para o item (a).

O grupo IV não apresentou dificuldades, considerando que na primeira semana foram vendidos 36 livros.

Alguns alunos não analisaram o lucro obtido ao longo das semanas e, por isso, não puderam analisar completamente o item (b), não tendo a opção de verificar se vale mais a pena atingir o lucro máximo ou apenas obter lucro, não gerando discussão sobre essas possibilidades. Por exemplo, o grupo 2 analisou apenas o preço de venda do livro, concluindo que, a partir da 13ª semana, o gerente gastaria mais do que conseguiria com a venda.

Existiram **dúvidas entre receita obtida e lucro**, nas quais alunos pareceram se confundir com estas definições. Podemos citar o grupo IV que, para o item (a), analisou a variação do preço do livro, dos números de clientes que compraram e do “lucro”, sem perceber que estavam se referindo à receita obtida com a venda.

A **dificuldade não foi somente em expressar algebricamente** o que eles verificaram numericamente, mas, também, em **manipular essas equações**. Por exemplo, no grupo 3, para os itens (c) e (d), os alunos Danilo e Bob responderam por escrito e Luki e Kevin participaram e contribuíram apenas oralmente. O grupo apresentou fórmulas corretas para o preço de venda, lucro e para o número de livros vendidos por semana, mas podemos ver, pela resolução que segue, que embora o grupo tivesse informado o número n de livros vendidos em x semanas pela fórmula $n = 36 + \ (x.6)$, ele não utilizou esta informação para determinar uma fórmula para o lucro. Assim, o lucro depende de duas variáveis, x (semanas) e y (livros). Todos os integrantes responderam, para o item (d), que o conhecimento das fórmulas os auxiliariam a decidir qual seria o preço adequado para o livro.

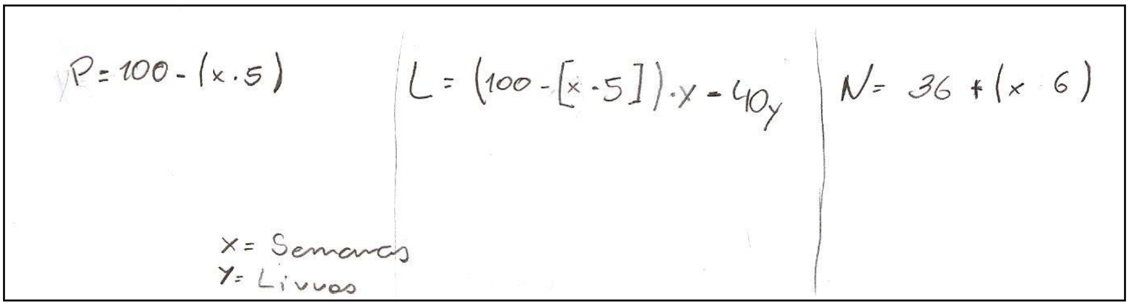


Figura 23: Resposta dada pelo aluno Danilo (grupo III) para o item (c).

O grupo IV, para o item (c), apresentou as fórmulas abaixo.

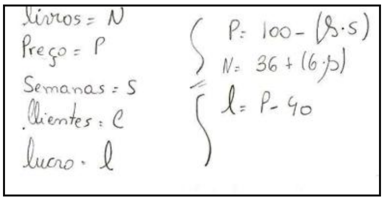


Figura 24: Resposta dada pelo aluno Christian (grupo IV) para o item (c).

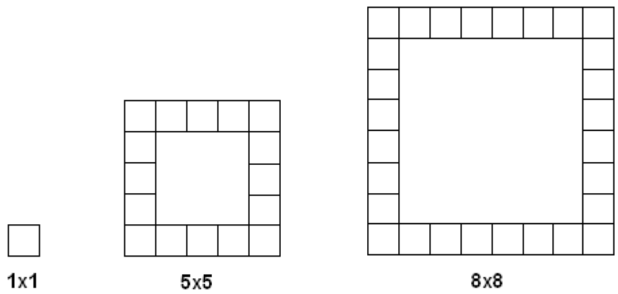
Observamos que na fórmula que representa o lucro foi considerado apenas o preço de custo de 1 livro, 40, e não o custo total, ou seja, $40n$. Para o item (d), todos os integrantes do grupo concordaram que *“auxiliaria, pois ele saberia até quando poderia diminuir o preço do livro para lucrar”.*

Em geral, responderam que o problema os ajudaria em saber quando o lucro seria negativo, ou seja, quando o gerente perderia dinheiro.

3.2.3 Atividade III – A cerca.

Enunciado:

Na figura abaixo estão representadas “cercas” quadradas formadas por quadradinhos 1x1.



a) Encontre o número de quadradinhos x necessários para construir uma cerca do mesmo tipo, sendo:

- 5x5
- 8x8
- 10x10
- 12x12
- 100x100
- 1000x1000

b) Explique como você encontrou esses números.

c) Escreva em linguagem matemática o número de quadradinhos necessários para construir uma cerca quadrada qualquer desse tipo.

<u>Descrição da aplicação:</u>

A maioria dos alunos comentou que já **havia feito uma questão similar** no 6° ano e, usando esse conhecimento, buscaram a solução para a atividade. Os grupos utilizaram 2 tipos de soluções que seguem comentadas. Vale ressaltar que o grupo V não realizou a atividade alegando cansaço e desinteresse.

- **1ª solução: Análise do perímetro**

Os alunos que apresentaram esta solução entenderam que o padrão é formado por 2 cercas com n quadradinhos e mais 2 cercas formadas por $n-2$ quadradinhos, onde o "-2" é referente aos quadrinhos dos cantos.

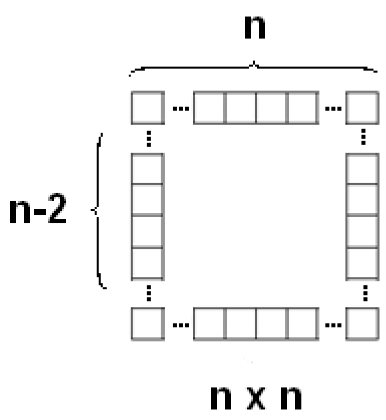


Figura 25: Cerca quadrada formada por quadradinhos n x n.

No grupo I, Danny e Harry utilizaram esta solução e justificaram para o item b de maneiras diferentes, como indicam as resoluções abaixo. Danny **explicou com palavras o que fez e depois traduziu em uma fórmula**, também utilizada no item (c). Observamos que, embora em outras atividades o aluno não tenha indicado o que representa as variáveis, neste caso, ele sinalizou o que indicava o "Δ". O aluno poderia ter respondido que $\Delta = 4x - 4$, mas preferiu deixar $\Delta = 2x + 2x - 4$ fórmula mais próxima à sua explicação com palavras.

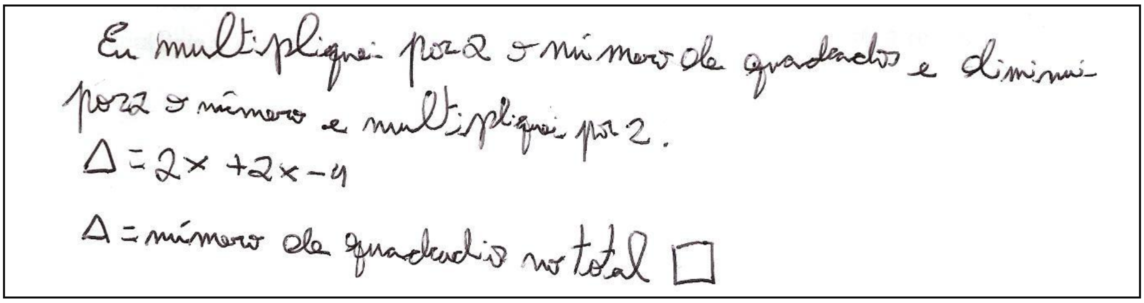


Figura 26: Resposta dada pelo aluno Danny (grupo I) para o item (b).

Harry **apresentou uma fórmula utilizando palavras**, ou seja, não utilizou variáveis. Isso mostra, como confirmou o processo das atividades e já antes sinalizado, uma **imaturidade em trabalhar com a escrita algébrica**, confirmado pelo aluno não responder o item (c) que exigia uma escrita em linguagem matemática.

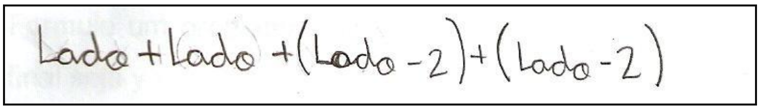


Figura 27: Resposta dada pelo aluno Harry (grupo I) para o item (b).

Todos os alunos do grupo II utilizaram esta resolução e responderam o item (b) através de exemplos. Anthony e Gustavo responderam com o mesmo exemplo. Para o item (c) os alunos não apresentaram uma expressão que representasse o número de quadradinhos necessários, mas fizeram um esquema que permite compreender o raciocínio, no qual lados estão expressos por “x” e “$x - 2$”.

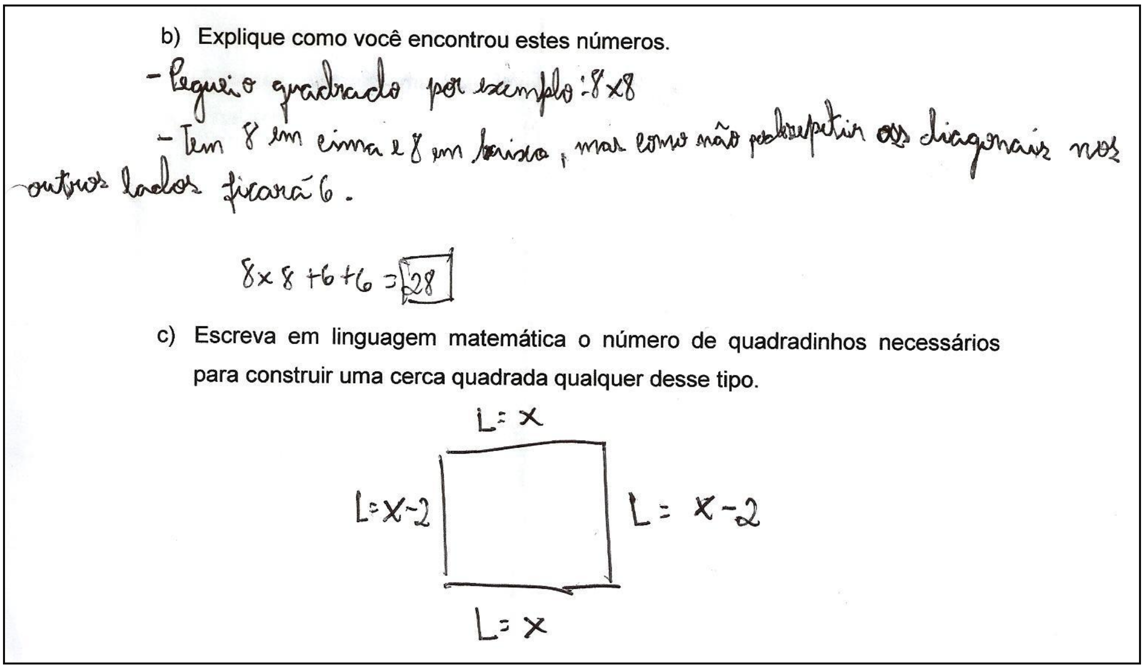


Figura 28: Respostas dadas pelo aluno Anthony (grupo I) para os itens (b) e (c).

Clóvis apenas diferiu do Anthony e Gustavo por não utilizar palavras para justificar o item (b), já que o aluno deu um **exemplo utilizando um desenho**, como indica a solução abaixo.

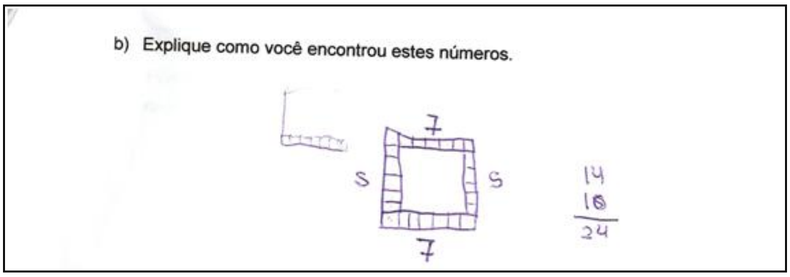
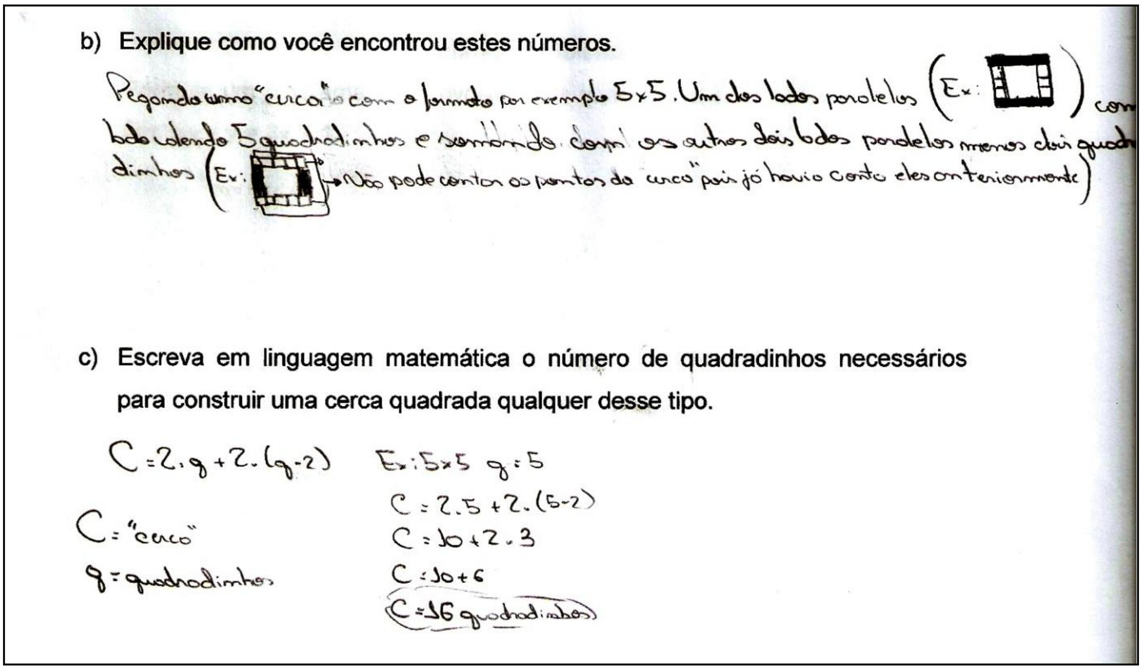


Figura 29: Resposta dada pelo aluno Clóvis (grupo II) para o item (b).

Eduardo foi quem explicou mais detalhadamente como ele encontrou os valores do item (a). Para o item (c), o aluno **além de apresentar uma fórmula para o problema, testou para uma cerca 5x5**, apresentando o valor que consta ilustrado no problema.



b) Explique como você encontrou estes números.

Pegando uma "cerca" com o formato por exemplo 5x5. Um dos lados paralelos (Ex:) com lado valendo 5 quadradinhos e somando com os outros dois lados paralelos menos dois quadradinhos (Ex: → Não pode contar os pontos da "cerca" pois já havia conta eles anteriormente)

c) Escreva em linguagem matemática o número de quadradinhos necessários para construir uma cerca quadrada qualquer desse tipo.

C = 2.q + 2.(q-2)

C = "cerca"

q = quadradinhos

Ex: 5x5 q = 5

C = 2.5 + 2.(5-2)

C = 10 + 2.3

C = 10 + 6

C = 16 quadradinhos

Figura 30: Resposta dada pelo aluno Eduardo (grupo II) para os itens (b) e (c).

Apenas 2 alunos do grupo III realizaram a atividade. Luki e Kevin apresentaram respostas iguais, dizendo que *"percebi que o produto dos lados menos (lado -2)² = ao n° de quadradinhos."*. Os alunos hesitaram em utilizar "x" como medida de lado, da mesma forma que Harry, do grupo I, mas apresentaram a fórmula correta $x.x-(x-2)^2$ para o item (c). O uso de palavras no item (b) pode ter sido influenciado pelo próprio enunciado já que apenas no item (c) se pedia para escrever em linguagem matemática.

- **2ª solução: Análise das áreas**

Os alunos que apresentaram esta solução visualizaram não somente uma cerca, mas um quadrado com $n\,x\,n$ quadradinhos e um quadrado interno com $(n-2)\cdot.(n-2)$ quadradinhos. Assim, para determinar a quantidade de quadradinhos para formar a cerca, calcularam a diferença entre a área do quadrado com $n\,x\,n$ quadradinhos e do quadrado interno com $(n-2)\cdot.(n-2)$ quadradinhos.

No grupo I, Helena e Morgan utilizaram esta solução e justificaram com expressões que davam a diferença entre a área total e a área interna. Para o item (c), Morgan **não mostrou como atingiu a fórmula**, mas o aluno apresentou $C = 4x - 4$ como resposta, indicando que “C” representava a cerca. Provavelmente o aluno desenvolveu a expressão apresentada no item (a): $x^2 - (x-2)^2$.

Gideon foi o único aluno do grupo IV que realizou esta atividade. Para explicar, no item (b), como ele encontrou os números do item (a), ele utilizou a mesma fórmula que Morgan, apenas com uma notação distinta, como é apresentada na solução abaixo. O aluno, desta vez, tomou cuidado em **sinalizar o que indicava a variável**.

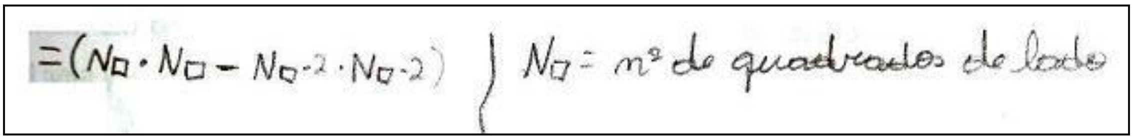


Figura 31: Resposta dada pelo aluno Gideon (grupo IV) para o item (b).

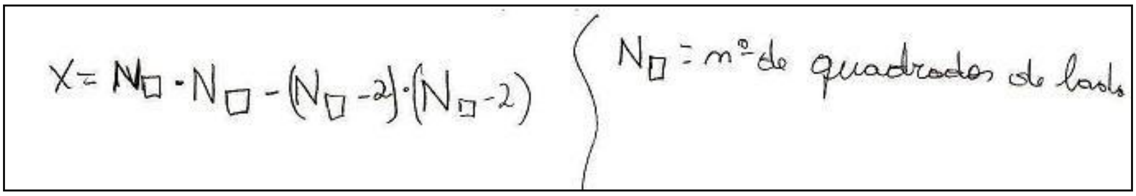


Figura 32: Resposta dada pelo aluno Gideon (grupo IV) para o item (c).

Observamos que o aluno não tomou cuidado ao escrever a fórmula no item (b), uma vez que **não indicou o produto com parênteses**, equívoco que foi consertado no item (c).

3.2.4 Atividade IV – Dobrando papéis.

Enunciado:

a) Pegue uma folha de papel e dobre ao meio. Você encontrou quantos quadriláteros?

b) Dobre novamente. O que você observou?

c) Se você repetir o processo 10 vezes, quantos quadriláteros você obterá?

d) Como você escreveria matematicamente o número de quadriláteros que você obterá ao realizar n dobras?

<u>Descrição da aplicação:</u>

Ao lerem as questões, os grupos inicialmente questionaram o que era considerado como quadrilátero, **pensando em se tratar de uma pegadinha**. Alguns alunos apontavam que, ao dividirmos a folha ao meio, encontramos 3 quadriláteros, considerando a folha de papel. Esclarecemos que apenas considerávamos quadriláteros aqueles formados pelas dobras, sem consideramos as folhas ou junções.

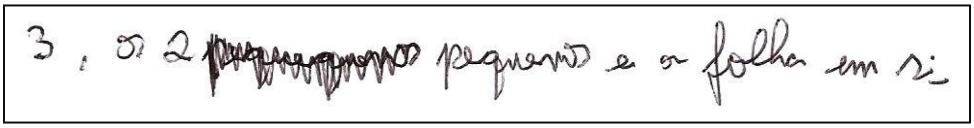

3, os 2 pequenos e a folha em si

Figura 33: Resposta dada pelo aluno Danny (grupo I) para o item (a).

Para o item (b), alguns alunos responderam com uma quantidade de quadriláteros, **não relacionando a quantidade obtida com a anterior**, ou seja, percebendo que era o dobro.

Muitos alunos tentaram dobrar a folha 10 vezes para contar os quadrados no item (c). Eles cogitaram a possibilidade de pegar uma folha de cartolina para dobrar, já que não conseguiam fazer com a folha do caderno. Neste momento, foi **necessário estimularmos os alunos ao cálculo algébrico**, pois eles preferiam o caminho físico, ou seja, a dobradura.

O aluno Harry do grupo I respondeu no item (c) que é *"impossível dobrar 10 vezes, no máximo 7 vezes que o papel dobrou."*, mostrando que **o aluno não percebeu a relação entre o número de quadriláteros e dobras e ficou preso ao material físico**, ou seja, o papel. Os integrantes do grupo IV, embora tenham apresentado uma fórmula correta para o item (d), responderam que para 10 dobras, encontrariam 20 quadriláteros, indo contra o valor que seria obtido pela própria fórmula.

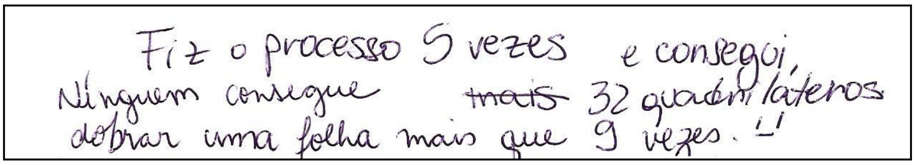

Fiz o processo 5 vezes e consegui,
Ninguem consegue ~~mais~~ 32 quadriláteros
dobrar uma folha mais que 9 vezes.

Figura 34: Resposta dada pela aluna Cacau (grupo V) para o item (c).

Analisando a resposta da Cacau, grupo V para o item (c), vemos que a mesma se **prendeu ao experimento físico, não considerando relações algébricas**. Os integrantes do seu grupo responderam corretamente o item, mas não apresentaram o caminho que os levou até a resposta e apenas Carlos apresentou a fórmula para o item (d).

No item (d), muitos alunos se confundiram em relação à notação, ou talvez em relação aos próprios conceitos de multiplicação e potenciação, indicando $2n$ em vez de 2^n. A maioria não identificou o que representava n, talvez por já estar escrito no enunciado. Alguns alunos se confundiram ao usarem as variáveis, colocando n para assumir a quantidade de quadriláteros e não de dobras.

Nesta atividade, o grupo II, que realizou praticamente todas as atividades do bloco utilizando o gravador como forma de registro, preencheu o problema completamente. Para o item (d), Clóvis organizou uma tabela que mostra a relação entre o número de dobras e de quadriláteros, mas preenche que para n dobras temos apenas 2 quadriláteros, o que **mostra não entender o que significa ter n dobras**, ou seja, uma quantidade qualquer.

Somente 2 integrantes do grupo III realizaram a atividade. Eles utilizaram tabelas para organizarem os dados e indicaram o que representa cada variável, além de terem dado a resposta correta.

3.3 Categorização das respostas do estudo piloto

Após analisarmos as respostas verificadas no estudo piloto, criamos 7 categorias para classificar as estratégias utilizadas pelos alunos. São elas:

- **Categoria 1 (C1):** Utilização de desenhos

Consideramos que uma resposta pertence a essa categoria quando possui alguma representação sob a forma de um desenho, seja para guiar ao resultado, conferir o mesmo ou ser a própria resposta.

- **Categoria 2 (C2):** Justificativa por palavras

Nesta categoria, consideramos que um aluno argumentou se ele utilizou suas próprias palavras para justificar um raciocínio.

- **Categoria 3 (C3):** Exemplos como justificativa

As respostas em que o aluno utiliza um caso específico para chegar ao resultado.

- **Categoria 4 (C4):** Utilização de uma lei geral

Consideramos que o aluno utilizou uma fórmula se há um registro algébrico pela própria fórmula.

- **Categoria 5 (C5):** Reconhecimento da lei geral sem mostrar saber expressá-la algebricamente.

Alguns alunos utilizaram todos os passos que uma fórmula sugere, mas não escreveram a fórmula, ou se há o processo da lei geral somente com operações ou, até mesmo, justificativas por escrito. Estas respostas se encaixam nesta categoria.

- **Categoria 6 (C6):** Utilização de tabelas

Se encaixa nesta categoria a resposta que possuir um registro organizado em linhas e colunas.

- **Categoria 7 (C7):** Outros

Consideramos pertinentes à categoria as respostas sem justificativas, utilização de operações em sequência organizadas em linha ou raciocínios incompletos, ou seja, que não atingem a resposta final.

Como houve o registro em áudio da aplicação da atividade, verificamos que alguns alunos que deixaram o problema em branco, desenvolveram a mesma e justificaram apenas pelo áudio. Para identificarmos estes casos, colocaremos "O" após a categoria. Por exemplo, C4O indica que utilizou a estratégia utilizada na categoria C4, mas que esta se encontra registrada apenas em áudio.

C1	Categoria 1: Utilização de desenhos
C2	Categoria 2: Justificativas por palavras
C3	Categoria 3: Exemplo como justificativa
C4	Categoria 4: Utilização de fórmula
C5	Categoria 5: Reconhecimento da fórmula, sem mostra saber enunciá-la corretamente.
C6	Categoria 6: Utilização de tabelas
C7	Categoria 7: Outros
-	Problema em branco

Tabela 4: Legenda das categorias.

Grupo	Aluno	Atividade I – Os triângulos com palitos					
		Item a	Item b	Item c	Item d	Item e	Item f
Grupo I	Danny	C1	C1	C3	C1	C3 C4	C4
	Harry	C1	C1	C2	C1	C4	C4
	Helena	-	C1	C2	C1	C4	C4
	Morgan	-	C1	C2	C1	C4	C4
Grupo II	Anthony	C1	C5	C3	-	C4	C5
	Clóvis	C1	C2 C5	C3	-	C7	C4
	Eduardo	C1	C2	-	-	-	C4
	Gustavo	C1	C5O	C5O	C5O	C1 C5	C4 C5
Grupo III	Bob	C1	C2 C4 C6	C2	C4	-	C4
	Danilo	C1	C2 C6	C2	C3 C4	-	C4
	Kevin	C1	C2 C4 C6	C2	C3 C4	C2 C4	C4
	Luki	C1	C2 C4 C6	C2	C3 C4	C4	C4
Grupo IV	Abby	C1	C4	C2	C4	-	C4
	Anastásia	C1	C4	C2	C4	-	C4
	Christian	C1	C4	C2	C4	-	C4
	Gideon	C1	C4	C7	C4	-	C4
Grupo V	Cacau	C1	C1	C1 C2	C7	C7	C4
	Carlos	C1	C1	-	C1	-	-
	Mocha	C1	C1	-	C1	-	-

Tabela 5: Categorização das estratégias utilizadas na atividade I.

Grupo	Aluno	Atividade II – O preço dos livros			
		Item a	**Item b**	**Item c**	**Item d**
Grupo I	Danny	C6	C2	-	-
	Harry	C7	C2	C4	C7
	Helena	C7	-	C4	-
	Morgan	C7	C5	C4	C2
Grupo II	Anthony	C4	C7	C4	C7
	Clóvis	-	C7	C4	C2
	Eduardo	C6	C2	-	C2
	Gustavo	C6	C2	C4	C2
Grupo III	Bob	C6	C2	C4	C7
	Danilo	C6	C2	C4	C7
	Kevin	C6	C2	C5 O	C5 O
	Luki	C6	C2	C5 O	C5 O
Grupo IV	Abby	C6	C2	C4	C2
	Anastásia	C6	C2	C4	C2
	Christian	C6	C2	C4	C2
	Gideon	C6	C2	C4	C2
Grupo V	Cacau	C6	C7	-	-
	Carlos	C6	C2	-	-
	Mocha	C6	C7	-	-

Tabela 6: Categorização das estratégias utilizadas na atividade II.

Grupo	Aluno	Atividade III – A cerca		
		Item a	**Item b**	**Item c**
Grupo I	Danny	C5	C2 C4	C4
	Harry	C7	C4	-
	Helena	C5	C4	C4
	Morgan	C7	C4	C4
Grupo II	Anthony	C7	C2 C5	C1 C4
	Clóvis	-	C1	C1 C4
	Eduardo	C5	C1 C2	C4
	Gustavo	C5	C2 C5	C1 C4
Grupo III	Bob	-	-	-
	Danilo	-	-	-
	Kevin	C5	C5	C4
	Luki	C5	C5	C4
Grupo IV	Abby	C7	-	-
	Anastásia	-	-	-
	Christian	-	-	-
	Gideon	C5	C4	C4
Grupo V	Cacau	-	-	-
	Carlos	-	-	-
	Mocha	-	-	-

Tabela 7: Categorização das estratégias utilizadas na atividade III.

Grupo	Aluno	Atividade IV – Dobrando papéis			
		Item a	Item b	Item c	Item d
Grupo I	Danny	C7	C7	C7	C4
	Harry	C7	C7	C2	-
	Helena	C7	C7	C5	C4
	Morgan	C7	C7	C5	C4
Grupo II	Anthony	C7	C7	C5	C4
	Clóvis	C7	C7	C7	C6
	Eduardo	C7	C7	C7	C4 C6
	Gustavo	C7	C7	C7	C4
Grupo III	Bob	-	-	-	-
	Danilo	-	-	-	-
	Kevin	C7	C7	C5 C6	C4
	Luki	C7	C7	C5 C6	C4
Grupo IV	Abby	C7	C7	C7	C4
	Anastásia	C7	C7	-	C4
	Christian	C7	C7	C7	C4
	Gideon	C7	C7	C7	C4
Grupo V	Cacau	C7	C7	C2	C7
	Carlos	C7	C7	C7	C4
	Mocha	C7	C7	C7	C4

Tabela 8: Categorização das estratégias utilizadas na atividade IV.

Atividade	Item	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	EB
I	A	17	-	-	-	-	-	-	2
	B	7	6	-	10	1	4	-	-
	C	1	11	3	-	1	-	1	3
	D	6	-	3	8	1	-	1	3
	E	1	1	1	7	1	-	2	9
	F	-	-	-	17	1	-	-	2
II	A	-	-	-	1	-	14	3	1
	B	-	13	-	1	-	-	4	1
	C	-	-	-	12	2	-	-	5
	D	-	8	-	-	2	-	4	5
III	A	-	-	-	7	-	-	4	8
	B	2	4	-	9	-	-	-	8
	C	3	-	-	10	-	-	-	9
IV	A	-	-	-	-	-	-	17	2
	B	-	-	-	-	-	-	17	2
	C	-	2	-	5	-	2	9	1
	D	-	-	-	14	-	2	1	3
Total	**-**	**37**	**45**	**7**	**101**	**9**	**22**	**63**	**64**

Tabela 9: Resumo da categorização das atividades.

Observamos, em todas as tabelas, que a categoria mais utilizada foi a C4, utilização de uma lei geral. Solicitamos nas atividades que os alunos expressassem, através de uma fórmula, a situação ou padrão apresentado no problema, o que os levou a utilizar uma lei geral. Entretanto, observamos que a estratégia foi utilizada em outros itens, que não exigiam necessariamente o uso da mesma. Muitos alunos se anteciparam e expressaram uma fórmula já nos primeiros itens. Embora sintam dificuldade em realizar escrita algébrica, notamos que esta tende a ser o primeiro caminho para resolver um problema.

A categoria C1, utilização de desenhos, foi utilizada mesmo quando era pedido para uma quantidade expressiva de palitos, como no item (b) da atividade I – O triângulo com palitos como vemos na tabela 1. Neste item, os alunos chegaram a desenhar um esquema para 53 palitos para compreender o que ocorria com a sequência. Consideramos que a utilização de desenhos para o item (a) foi feita pela maioria, mas devemos observar que o item pedia exatamente que os alunos apresentassem o próximo elemento da sequência através de um desenho.

Embora a categoria C2, justificativas por palavras, tenha sido muito utilizada no item (c) da Atividade I– O triângulo com palitos (tabela 5) e no item (b) da Atividade II – O preço dos livros (tabela 6), verificamos que os alunos tiveram dificuldades para argumentar e escrever o que apresentavam oralmente.

A categoria C3, exemplos como justificativa, apenas apareceu na atividade I – O triângulo com palitos, como mostra a tabela 5. Acreditamos que isso ocorreu devido ao fato de sinalizarmos, nesta atividade, que não podem se limitar a apresentar um exemplo para um caso específico, se desejavam justificar a validade de uma regra para todos os casos. Sendo assim, não continuaram com esta estratégia para as outras atividades.

A categoria C5, reconhecimento da fórmula, sem mostrar saber enunciá-la corretamente, não foi tão expressiva, já que através da nossa mediação, estimulamos os alunos a escrever, em linguagem matemática, o que eles expressavam oralmente.

A utilização de tabelas ocorreu principalmente no item (a) da Atividade II – O preço dos livros (tabela 6). As tabelas se mostraram úteis para organização e análise dos dados. Verificamos que os alunos que organizaram os dados desta forma, tiveram mais facilidade em verificar o padrão existente.

3.4 FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS

Nas duas últimas atividades do bloco de atividades solicitamos que os alunos formulassem problemas. Os alunos alegaram cansaço e desinteresse e, por isso, a participação desta atividade foi muito pequena, como mostra a tabela abaixo.

	Aluno	Formulação de Problemas	
		Atividade 1	Atividade 2
Grupo I	Danny	-	-
	Harry	-	-
	Helena	✓	✓
	Morgan	-	✓
Grupo II	Anthony	-	-
	Clóvis	-	✓ (incompleto)
	Eduardo	-	✓
	Gustavo	-	-
Grupo III	Bob	-	✓
	Danilo	-	-
	Kevin	✓	-
	Luki	✓	-
Grupo IV	Abby	✓	✓
	Anastásia	✓	✓
	Christian	✓	✓
	Gideon	✓	-
Grupo V	Cacau	-	-
	Carlos	-	✓
	Mocha	-	-

Tabela 10: Participação na atividade de formulação de problemas.

3.4.1 Análise dos problemas formulados

3.4.1.1 Primeira atividade de formulação de problemas

Enunciado:

1. Formule um problema que envolva duas variáveis, x e y, em que a resposta final seja $y = 3x + 1$.

Análise:

- **Grupo I**

No grupo I, apenas a aluna Helena formulou um problema, que segue.

> Lucia tem uma idade y e Mariana sua irmã tem três vezes a idade de sua amiga, que é x mais um. Sabendo que Lucia e Mariana são gêmeas quantos anos elas tem?

Figura 35: Problema formulado pela aluna Helena (grupo I).

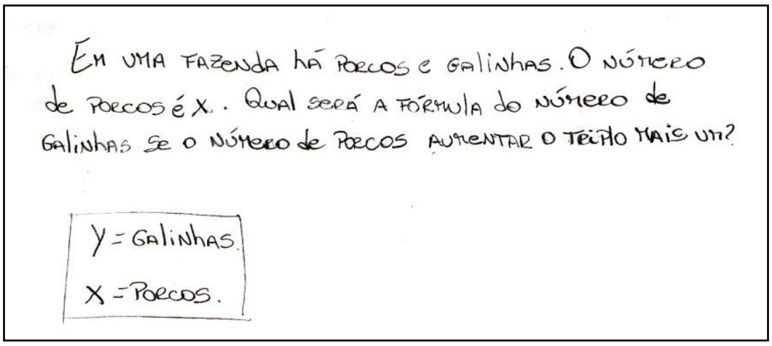
Observamos que o problema deseja que a idade de Lúcia seja a mesma que a de Mariana, já que são gêmeas. Mariana, por sua vez, tem o triplo da idade de uma amiga que possui $x + 1$ anos, o que não é usual de se escrever em um enunciado. A aluna apenas **não notou que o triplo de $x + 1$ é $3x + 3$**, ou seja, a idade das gêmeas seria $y = 3x + 3$, não sendo o que é pedido no enunciado.

- **Grupo III**

No grupo III, 2 alunos formularam problemas. Tanto o aluno Kevin quanto o aluno Luki, cujos problemas seguem abaixo, enunciaram situações que exigem a equação $y = 3x + 1$, como pedido, mas que **não caracterizam um problema**, uma vez que é um problema que pede para escrever, em forma de equação, uma formulação escrita em palavras.

> EM UMA LIVRARIA "SARAIVA" VENDEM-SE O TRIPLO MAIS UM DE LIVROS DA LIVRARIA "SÓ LEITURA".
>
> QUAL A FÓRMULA QUE REPRESENTA O Nº DE LIVROS DA SARAIVA?
>
> Y = Nº DE LIVROS DA "SÓ LEITURA"
>
> X = Nº DE LIVROS DA "SARAIVA"

Figura 36: Problema formulado pelo aluno Kevin (grupo III).

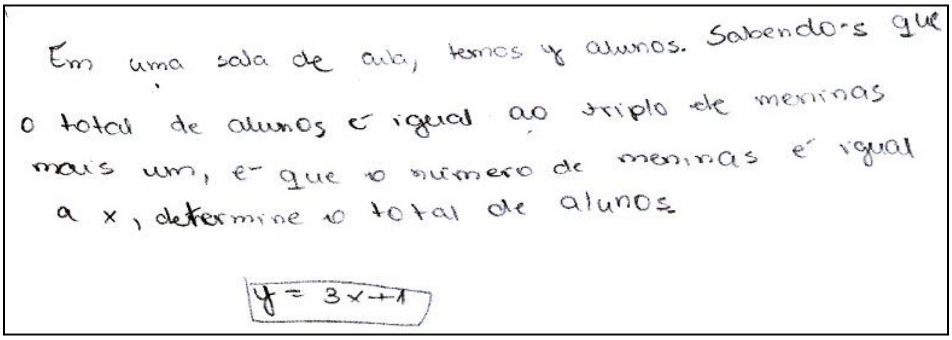

EM UMA FAZENDA HÁ PORCOS E GALINHAS. O NÚMERO de PORCOS É X. QUAL SERÁ A FÓRMULA do NÚMERO de GALINHAS SE O NÚMERO de PORCOS AUMENTAR O TRIPLO MAIS UM?

y = GALINHAS.
X = PORCOS.

Figura 37: Problema formulado pelo aluno Luki (grupo III).

- **Grupo IV**

Todos os integrantes do grupo IV formularam o mesmo problema, que segue abaixo. A situação proposta pelo grupo também resulta em $y = 3x + 1$, como pedido no enunciado, e se assemelha com as situações propostas pelo grupo III, sendo, também, uma questão direta.


Em uma sala de aula, temos y alunos. Sabendo-se que o total de alunos é igual ao triplo de meninas mais um, e que o número de meninas é igual a x, determine o total de alunos

$\boxed{y = 3x+1}$

Figura 38: Problema formulado pela aluna Abby (grupo IV).

3.4.1.2 Segunda atividade de formulação de problemas

<u>**Enunciado:**</u>

2. Crie um problema em que o resultado dependa de uma quantidade "n" de elementos.

<u>Análise:</u>

- **Grupo I**

No grupo I, dois alunos formularam problemas. A aluna Helena apresentou a situação que é apresentada abaixo.

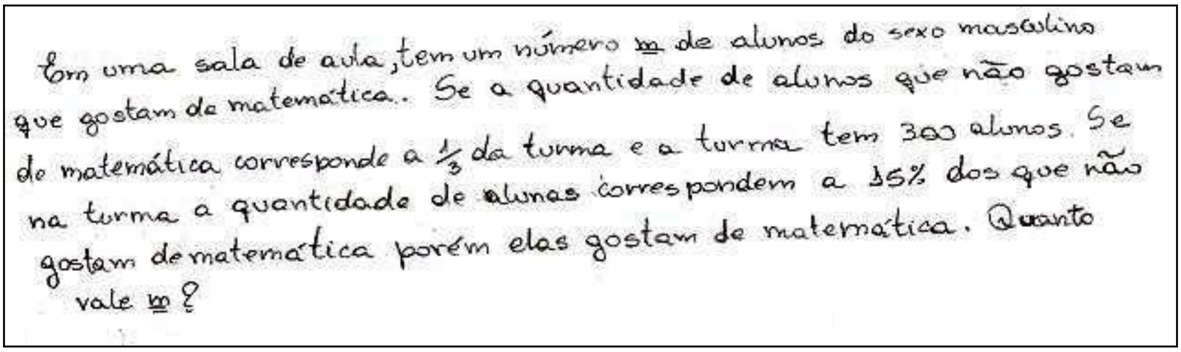

Em uma sala de aula, tem um número m de alunos do sexo masculino que gostam de matemática. Se a quantidade de alunos que não gostam de matemática corresponde a 1/3 da turma e a turma tem 300 alunos. Se na turma a quantidade de alunas correspondem a 15% dos que não gostam de matemática porém elas gostam de matemática. Quanto vale m?

Figura 39: Problema formulado pela aluna Helena (grupo I).

A construção das sentenças do problema está um tanto confusa, no entanto, apresentamos a nossa interpretação. Ao analisarmos o problema, vemos que ele possui várias fases. Primeiro, é necessário o foco na quantidade total de alunos, que são 300. A partir daí, já que 1/3 dos alunos da turma não gostam de matemática, concluímos que 100 alunos não gostam de matemática e, portanto, 200 alunos gostam. A partir daí, como a quantidade de alunas corresponde a 15% dos que não gostam de matemática, vemos que existem 15 alunas que, como informado na situação, gostam de matemática. Assim, podemos organizar que:

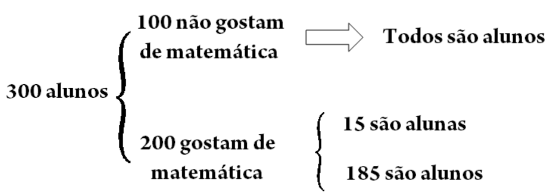


Figura 40: Esquema para o problema formulado por Helena (grupo I).

O problema possui dados corretos e **exige que o leitor esteja atento às negações** como quantidade de alunos e alunas e os que gostam ou não de matemática. Entretanto, **o resultado final não depende de n, mas se deseja descobrir o valor de n**.

O aluno Morgan formulou um problema que exigia a relação entre equações do 1° grau. Observe o problema:

Um excelente flautista realiza em um show de duas horas e 30 minutos, realizando 300 movimentos dos quais 246 estão certos. Um outro flautista tem $\frac{1}{3}$ de habilidade da habilidade do 1º mais a diferença entre o tempo de seus shows. Quanto de habilidade o 2º flautista tem, se seu show tem 2 horas e a habilidade do 1º é descrita com n de seu show. (movimento certo - movimento errado) + 3 ?

Figura 41: Problema formulado pelo aluno Morgan (grupo 1).

O primeiro flautista realiza 246 movimentos certos e 54 movimentos errados. Sendo sua habilidade n descrita por $(movimento\,certo - movimento\,errado) + 3$ resulta em 195. Isto implica que a habilidade do segundo seja 1/3 de 195, isto é, 65 mais a diferença entre os tempos dos shows, logo, 30 minutos.

Observamos que 65 expressa quantidade de movimentos, enquanto que 30 minutos expressa um tempo e, assim, a habilidade é uma **adição de movimentos com minutos**. Além disso, **o problema não deseja um resultado que dependa de uma quantidade n.**

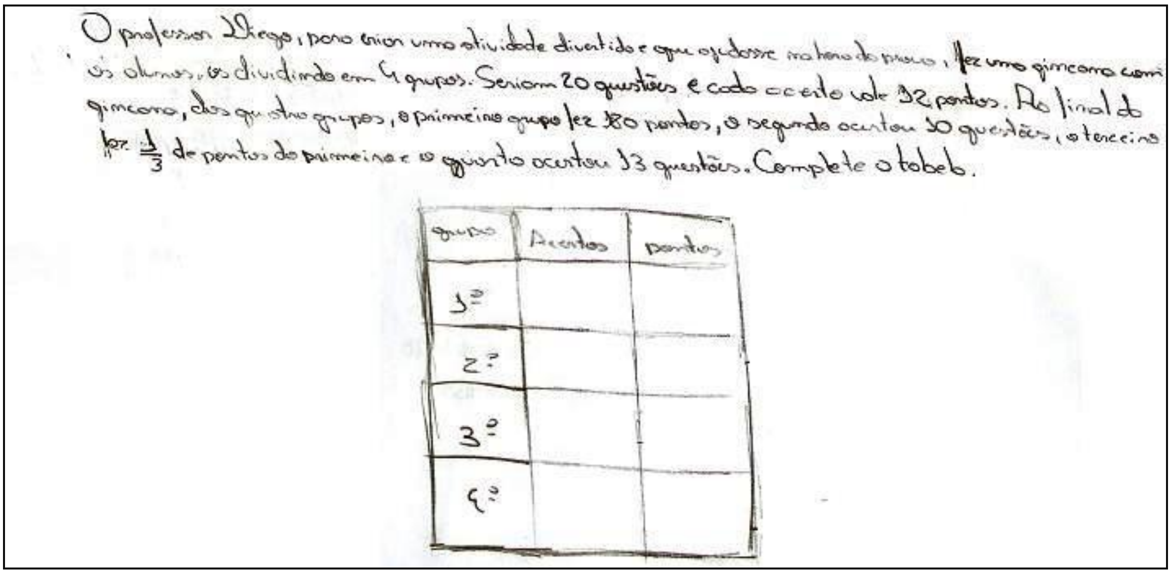
- **Grupo II**

No grupo II, Clóvis apresentou apenas o início de um problema, como segue abaixo.

Jorjovaldo, o marinheiro tem uma fazenda, em que planta bodes,
Se ele comprar uma bodemente (semente que faz crescer bodes) por R$ 60,0

Figura 42: Problema incompleto formulado pelo aluno Clóvis (grupo II).

O aluno Eduardo apresentou uma situação cujo objetivo era estabelecer as relações entre 4 grupos e preencher uma tabela. Este problema também **não apresentou um resultado final que dependesse de n**, mas apresenta dados corretos e possui uma solução.



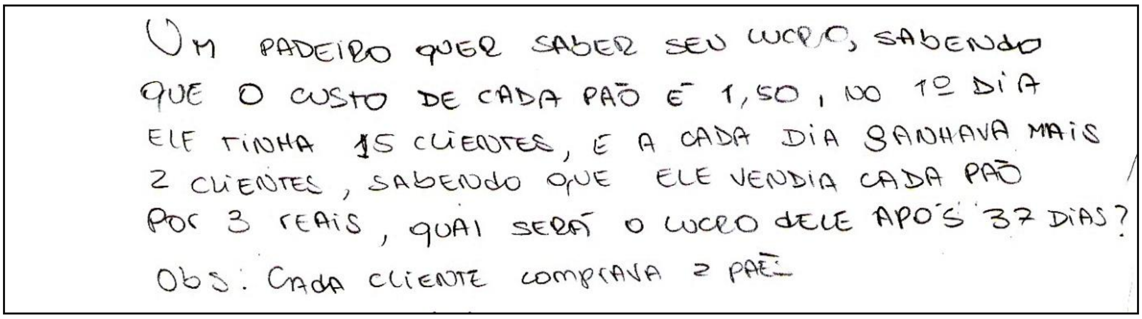
O professor Diego, para criar uma atividade divertida e que ajudasse na hora da prova, fez uma gincana com os alunos, os dividindo em 4 grupos. Seriam 20 questões e cada acerto vale 32 pontos. Ao final da gincana, dos quatro grupos, o primeiro grupo fez 180 pontos, o segundo acertou 10 questões, o terceiro fez $\frac{1}{3}$ de pontos do primeiro e o quarto acertou 13 questões. Complete a tabela.

grupo	Acertos	pontos
1º		
2º		
3º		
4º		

Figura 43: Problema formulado pelo aluno Eduardo (grupo II).

- **Grupo III**

Apenas 1 aluno do grupo III formulou um problema. Neste, Bob utilizou uma situação similar à atividade II: “O preço do livro”. O objetivo é determinar o lucro do padeiro após 37 dias, **não obtendo um resultado que dependa de n**. O problema apresenta dados corretos e possui solução.



UM PADEIRO QUER SABER SEU LUCRO, SABENDO QUE O CUSTO DE CADA PÃO É 1,50, NO 1º DIA ELE TINHA 15 CLIENTES, E A CADA DIA GANHAVA MAIS 2 CLIENTES, SABENDO QUE ELE VENDIA CADA PÃO POR 3 REAIS, QUAL SERÁ O LUCRO DELE APÓS 37 DIAS?
OBS: CADA CLIENTE COMPRAVA 2 PÃES

Figura 44: Problema formulado pelo aluno Bob (grupo III).

- **Grupo IV**

Todos os integrantes do grupo IV apresentaram o mesmo problema, mas sua **resposta não depende de uma quantidade n**, uma vez que podemos determinar a quantidade de meninas, sendo este o objetivo da questão. O exercício apresentado é similar ao que o grupo apresentou para a primeira questão de formulação de problema.

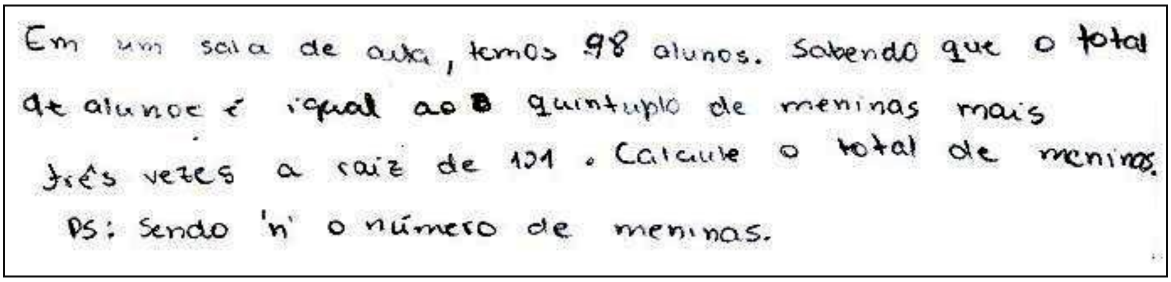

Em um sala de aula, temos 98 alunos. Sabendo que o total de alunos é igual ao quintuplo de meninas mais três vezes a raiz de 101. Calcule o total de meninas.
PS: Sendo 'n' o número de meninas.

Figura 45: Problema formulado pela aluna Abby (grupo IV).

- **Grupo V**

Apenas 1 aluno do grupo V formulou um problema, cuja **resposta final não depende de** n. O objetivo é descobrir a idade do personagem central, onde necessitamos escrever algumas expressões algébricas até encontrarmos uma equação que determina o valor de x, ou seja, 14 anos. O problema, que possui dados corretos e solução, segue abaixo.

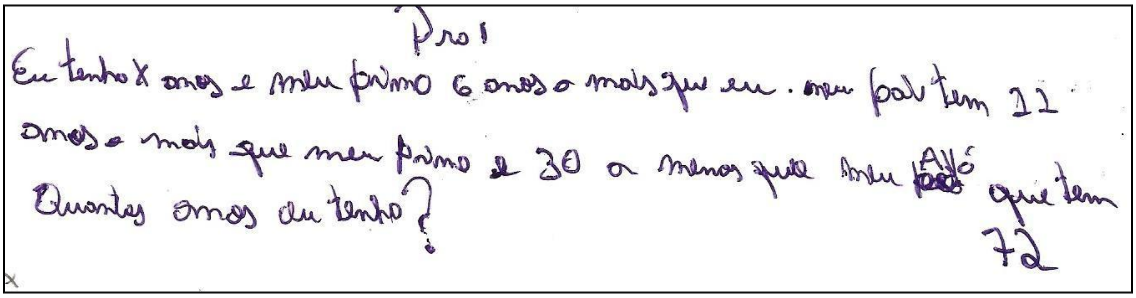

Prof
Eu tenho x anos e meu primo 6 anos a mais que eu. meu pai tem 22 anos a mais que meu primo e 30 a menos que meu Avô que tem 72
Quantos anos eu tenho?

Figura 46: Problema formulado pelo aluno Carlos (grupo V).

3.5 Considerações sobre o estudo piloto

O estudo presente neste capítulo é uma preparação para o estudo principal, com o objetivo de perceber as estratégias utilizadas pelos alunos, além de analisar e aprimorar as atividades. Neste sentido, vimos que o apoio do grupo de professores no processo de elaboração das atividades foi fundamental para nortear o processo de aplicação como um todo. Durante os 3 encontros com o grupo, várias vezes foi pontuada a necessidade de um roteiro para o professor, indicando caminhos e possíveis respostas.

Após a aplicação das atividades, realizamos algumas alterações na mesma para que fosse aplicada no estudo principal. Na atividade I, inserimos mais uma configuração de triângulos para a sequência do item (a), esperando evitar que haja outras configurações fora do padrão esperado. O item (b) da mesma atividade gerou dúvidas quanto à quantidade sugerida, ou seja, maior que 50 palitos e, por isso, decidimos sugerir que o aluno experimente para várias quantidades, pequenas e muito grandes, pares e ímpares de palitos. Os itens (d) e (e) também sofreram pequenas alterações, com o objetivo de se tornarem mais claros, assim como o item (d) da atividade II.

Durante a aplicação da atividade, notamos que os alunos possuem uma grande dificuldade em justificar e argumentar, mostrando um raciocínio correto, mas sem conseguir expressá-la. Neste sentido, o grupo II, por exemplo, utilizou o gravador quase que exclusivamente como forma de expor seu raciocínio, mostrando dificuldade em registrar no bloco. Por outro lado, alguns alunos observavam e entendiam o processo, mas não sabiam explicar o que ocorria. O aluno Christian (grupo IV) chegou a dizer que prefere os exercícios mecânicos, onde não precisa raciocinar.

Para a atividade I, somente um grupo procurou uma abordagem algébrica em vez da análise visual utilizada pelos outros grupos. Como recurso, alguns alunos utilizavam problemas anteriores como base ou até mesmo o “processo inverso” de um problema já realizado, como os próprios alunos relataram.

Embora os alunos entendessem os enunciados das atividades, tiveram dificuldades em expressar a fórmula necessária. Nesse sentido, observamos que a álgebra foi um obstáculo, uma vez que os alunos possuíam dificuldades com conteúdos iniciais deste tópico, mostrando pouca habilidade com algebrismos. Divergências sobre que notação utilizar foram comuns, às quais os alunos deram muita relevância, mas, no geral, sem a preocupação em identificar o que cada variável representa. Os alunos apresentaram dúvidas quanto às variáveis de uma equação e dificuldades em entender o que se relaciona com o que. Por exemplo, na atividade I, confundiram quantidade de palitos com quantidade de triângulos. A organização dos dados em uma tabela foi um recurso bem utilizado, assim como a busca inicial por uma fórmula e a apresentação de desenhos.

Com a atividade de formulação de problemas, percebemos que a definição de problema, para os alunos, está atrelada à noção de questão direta, uma vez que os alunos, em sua maioria, apresentaram questões diretas para a primeira atividade. Na segunda atividade houve 2 formulações de problemas com enunciados confusos ou incompletos. No geral também foram apresentadas questões diretas e nenhuma delas realizou o que foi pedido: um resultado que dependa de uma quantidade "n" de elementos.

A próxima etapa da dissertação será investigar e analisar as estratégias utilizadas por cada aluno, através da aplicação das atividades em outra turma do 9° ano do Ensino Fundamental.

Capítulo 4

4. ESTUDO PRINCIPAL

O estudo principal foi aplicado em uma turma do 9° ano do Ensino Fundamental do Colégio de Aplicação da Universidade Estadual do Rio de Janeiro (CAp - UERJ) em dois encontros por 2 tempos de 50 minutos cada.

No primeiro encontro, que ocorreu em 6 de maio de 2014, dividimos a turma em 6 grupos que possuíam de 3 a 6 integrantes. Pretendíamos formar grupos com 4 componentes, mas respeitamos a preferência dos alunos. O segundo encontro ocorreu em 10 de junho de 2014, onde a turma foi dividida em 5 grupos, já que alguns alunos não estavam presentes. Desta forma, unimos o grupo I ao II e incluímos um aluno, que estava ausente na primeira aplicação, ao grupo IV.

Em ambos os encontros entregamos um bloco de atividades para cada aluno e um para o grupo. Os alunos foram estimulados a discutir com os seus colegas o que interpretaram de cada questão e foi dado o tempo necessário para que cada grupo chegasse à sua resposta. Gravamos áudios de todos os grupos, mas diferente do estudo piloto onde conseguíamos identificar a voz de cada aluno já que havíamos lecionado para a turma, não identificaremos os alunos por nomes fictícios. Desta forma, decidimos que, em cada diálogo, sempre que houver mais de um aluno no trecho transcrito, indicaremos o aluno por uma letra maiúscula seguida da identificação do seu grupo. Assim, o Aluno A presente em um trecho não é necessariamente o mesmo Aluno A presente em outro. Quando houver a fala de apenas um aluno, identificaremos com “Aluno” seguida da identificação do seu grupo.

Diferentemente dos alunos do estudo piloto, os alunos do CAp não haviam aprendido função como conceito, o que é apresentado a eles apenas no 1° ano do Ensino Médio. No 9° ano haviam estudado álgebra com foco em resolução de equações do 2° grau, equações biquadradas e equações fracionárias.

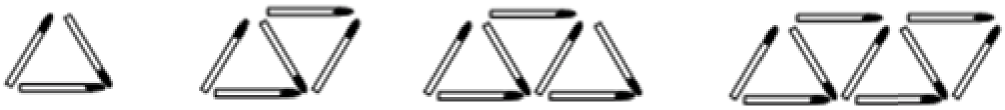
Na análise das atividades, em negrito estarão novamente as estratégias e os erros ou percursos interessantes realizados pelos alunos, a fim de salientá-los.

4.1 Primeira aplicação

4.1.1 Atividade I – Os triângulos com palitos.

Enunciado:

a) Com os palitos de fósforo, construa um triângulo. Continue a formar outros triângulos como na figura:



b) Escolha uma quantidade de palitos e descubra quantos triângulos podem ser formados. Experimente para várias quantidades, pequenas e muito grandes, pares e ímpares de palitos.

c) Para quantidades diferentes de palitos conseguimos formar quantidades iguais de triângulos? Argumente.

d) Desta vez, escolha a quantidade de triângulos e investigue o número de palitos necessários para formar esta quantidade.

e) Como você explicaria para uma pessoa o que faria para determinar a quantidade de palitos necessários para construir certo número de triângulos?

f) Escreva uma fórmula matemática que relacione o número de palitos com a quantidade de triângulos.

Descrição da aplicação:

O grupo I logo **identificou o padrão da sequência** e não questionou se haveriam outros. Para o item (c), o grupo considerou que a sequência era formada por triângulos sempre construídos com números ímpares de palitos, não considerando que poderiam sobrar palitos. Essa decisão apenas foi constatada na plenária realizada para a atividade, aonde vimos que o grupo IV pensou da mesma forma. Ao questionarmos se a resposta do item (c) era sim ou não, um aluno do grupo IV respondeu que não e justificou:

Aluno – Grupo IV: Professora, porque seguindo o padrão não podem ser utilizados números pares.
Louise: Ele comentou algo interessante: porque seguindo o padrão não podem ser utilizados números pares. O que acontece quando utilizamos números pares?
Aluno – Grupo IV: Fica pela metade.
Louise: Você quer desenhar aqui uma configuração de números pares? Essa aqui tem quantos palitos, pessoal?
Todos: 4
Louise: Conseguiu formar quantos triângulos?
Todos: 1.
Louise: Aí você tinha dito o que mesmo? Eu gostei muito da sua resposta.
Aluno – Grupo IV: Porque seguindo o padrão não podem ser utilizados números pares.
Louise: Dá para utilizar números pares de palitos?
Todos: Não.

Percebemos, neste momento, que os alunos sabiam que poderia sobrar um palito nas construções com um número par de palitos, mas eles consideraram que estes termos não faziam parte da sequência. Mesmo assim, tentamos mostrar que a resposta também poderia ser “sim”, bastando considerar que sobrariam palitos. Um aluno, então, entendeu que a resposta apenas poderia ser “sim”, pois não havia na questão o pedido para que o padrão fosse seguido, como mostra o diálogo abaixo.

Louise: Então, a pergunta era: Com quantidades diferentes de palitos eu consigo construir a mesma quantidade de triângulos?
Aluno – Grupo I: Sim, porque você não tá pedindo para seguir o padrão.
Louise: Mas eu quero que seja no padrão que a gente combinou.
Aluno – Grupo I: Então não.

Esclarecemos que **desde que seja argumentado** tanto a sobra de palitos quanto a decisão de não aceitá-los, a questão estaria correta. Como os grupo I e IV não consideraram a construção utilizando números pares de palitos, responderam que “não” para o item (c), justificando como segue.

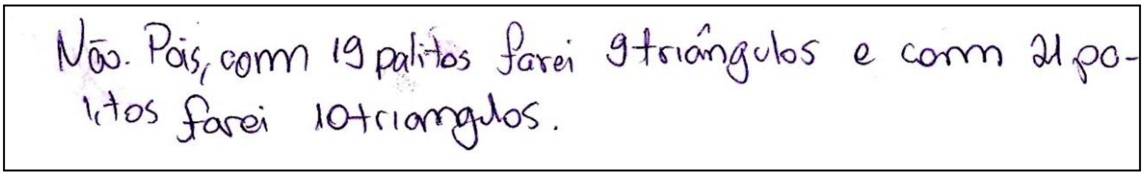

Não. Pois, com 19 palitos farei 9 triângulos e com 21 pa-
litos farei 10 triangulos.

Figura 47: Resposta dada no bloco do Grupo I para o item (c).

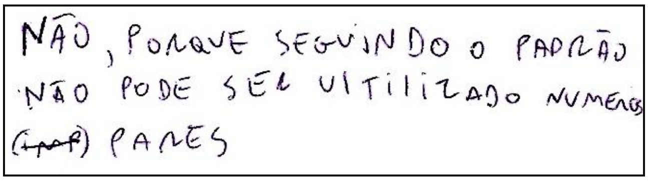

NÃO, PORQUE SEGUINDO O PADRÃO NÃO PODE SER UTILIZADO NUMEROS PARES

Figura 48: Resposta dada no bloco do Grupo IV para o item (c).

Inicialmente, um aluno apresentou oralmente o padrão que ele havia descoberto, com **dificuldades em expressar oralmente a expressão algébrica escrita**, que estava certa.

> **Aluno – Grupo I:** Eu já descobri o padrão do negócio. A quantidade de palitos é o dobro do número de triângulos. Pera aí. A quantidade de triângulos, ops, de palitos é o dobro do número de triângulos mais um. Ouviu? Você ouviu a ideia? A fórmula para calcular quantos triângulos dá um palito é só multiplicar palitos, [quer dizer] dividir palitos vezes 2 menos 1. Aqui...

O aluno convenceu os outros integrantes mostrando que a fórmula encontrada funciona para os termos da sequência que eles haviam desenhado. Os alunos do grupo I, assim como do grupo II, se mostraram interessados pelo objetivo desta dissertação, pois desejavam cumprir o mesmo. Enquanto esclarecíamos o mesmo, um aluno do Grupo I disse que a estratégia mais usada para resolver problemas é a calculadora e iniciamos uma discussão sobre o que era calcular e o que era raciocinar e o aluno finalizou dizendo: *"Usar para calcular tudo que precisa"*.

Pensando no objetivo da dissertação, alguns minutos depois, um aluno do grupo I ao perceber que utilizariam a fórmula tanto para o item (e) quanto para o (f) comentou:

> **Aluno A – Grupo I:** Cara, a (f) que era a fórmula.
> **Aluno B – Grupo I:** Ah, então a letra (e) era o que? Cara, a gente usa fórmula para todas as questões. Pedro, Pedro, a estratégia! Tá até aí a resposta para ela: A estratégia que a gente usa é usar a fórmula. Professora, a gente já tem a nossa estratégia.
> **Louise:** Já tem a estratégia? Arrasou!
> **Aluno B – Grupo I:** Fórmula para tudo!

Ao terminarem as atividades, perguntamos como eles atingiram a fórmula e vimos, portanto, que houve uma **análise visual do padrão** quando eles a buscavam, como revela o trecho abaixo.

> **Claudia (Orientadora):** Tá. E porque vocês chegaram nessa fórmula assim?
> **Aluno C – Grupo I:** A gente contou os palitos e os triângulos. Aí tipo.. Ah, é quase o dobro, e a gente aí, se tirar 1 aqui e dividir por 2 é a mesma coisa.

Claudia: É isso mesmo. Mas eu queria só perguntar se vocês sabem me explicar olhando a figura porque tá tirando esse 1 para dar certo a fórmula.
Aluno D – Grupo I: Porque tem aqui tipo 3. Um triângulo é 3. Se você fizer 2 triângulos tem 5.
Aluno C – Grupo I: Por exemplo, um triângulo tem 3, mas como já tem 1 lado, para um triângulo você já tem um lado feito. Tem que adicionar 2 e o outro fica sozinho.

Os integrantes do grupo II pouco interagiram, necessitando constantemente do estímulo dos professores. Pelo áudio verificamos que eles apenas **mostravam dúvidas e seus raciocínios quando questionados**. Por exemplo, quando perguntamos se eles estavam conseguindo, eles responderam que não, mas sabiam o que deveriam fazer embora aparentassem não ter entendido o enunciado.

Louise: E aí, gente, estão conseguindo?
Alunos – Grupo II: Estamos... não.
Louise: O que vocês não estão conseguindo?
Alunos – Grupo II: A primeira.
Louise: A primeira? Letra (a)?
Aluno – Grupo II: Tenho que conseguir formar os triângulos.
Louise: Isso. Tem que fazer uma nova sequência. Como é que seria a próxima?
[aluno desenha conforme representado na figura 3]

Neste ponto os alunos mostraram que haviam entendido o padrão a partir do momento que desenharam o elemento da sequência seguinte. Apenas um aluno do grupo fez diferente: desenhou o terceiro elemento da sequência, quando deveria ter feito o quinto. Quando questionamos se este era o padrão correto, o mesmo **demonstrou pouco interesse na atividade**.

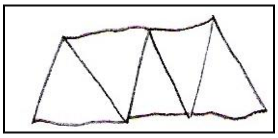


Figura 49: Resposta dada no bloco do Grupo II para o item (c).

Houve uma discussão sobre qual padrão seguir, embora o grupo tivesse apresentado inicialmente o padrão que desejávamos. Sendo assim, **outros padrões foram apresentados**, como indicam as imagens que seguem, mas o grupo decidiu seguir o padrão apresentado no item (a), já que eles não sabiam como continuar as outras sequências, ou seja, em algum momento não haveria mais uma uniformidade nas construções.

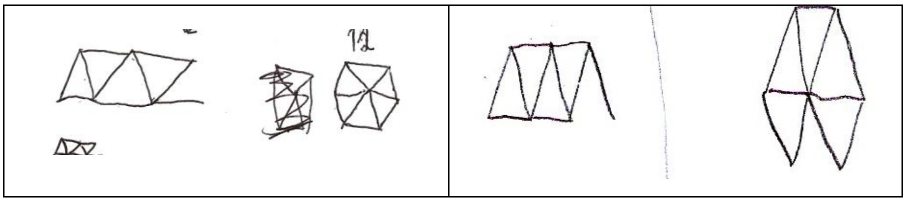


Figura 50: Respostas individuais dada por alunos do Grupo II para o item (b).

Louise: Essa configuração está seguindo o padrão de cima?
Aluno – Grupo II: Não, mas é de outro tamanho.
Louise: Mas você acha que tem um padrão ali definido ou não?
Aluno – Grupo II: Sim
Louise: Tem, né? Você acha que vale a pena fazer de outra forma ou vale seguir o padrão?
Aluno – Grupo II: Seguir o padrão.

Em outro momento, um aluno teve a iniciativa de **testar a fórmula encontrada** para números pares e ímpares, mas não conseguimos encontrar uma relação que confirmasse que o grupo percebeu que construindo um termo da sequência com um número par de palitos, haveria sobra de 1 palito, o que não ocorre com um número ímpar de palitos.

Mesmo entendendo o padrão e encontrando uma fórmula que relacionasse o número de palitos com o número de triângulos, o grupo não alterou as respostas do item (b), (c) e (d), talvez por nossa orientação de não apagar o raciocínio. Os itens mostram configurações diversas para a sequência que, claramente, não obedecem ao padrão estabelecido.

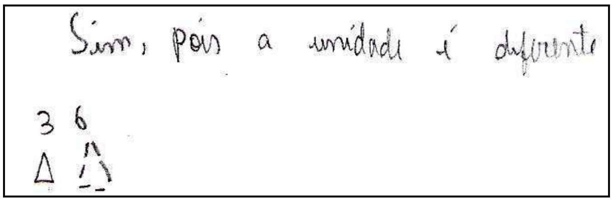


Figura 51: Resposta individual dada por alunos do Grupo II para o item (c).

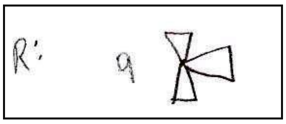


Figura 52: Resposta individual dada por alunos do Grupo II para o item (d).

Assim como na maioria dos grupos, ao escolher determinada variável para o item (f), os alunos **não mencionaram ao que se referia**. Utilizaram notações como “Δ”, sem dizer que representava a quantidade de triângulos, por exemplo.

O grupo IV iniciou uma discussão sobre os padrões, embora mostrássemos na própria sequência que os termos que eles apresentavam não se encaixavam na sequência. Além de mostrarem configurações diferentes, pensaram em juntar todas as figuras para formar um único triângulo. Em determinado momento, pensaram que o próximo elemento era colocando triângulos na fileira acima, mas explicamos e os alunos concordaram que não seguiria uma regularidade.

Os alunos pareceram entender o padrão da sequência, seguindo para o item (c). Neste momento, tentaram criar um termo com 3 triângulos que poderia ser formado com 6 ou 7 palitos, como mostra o trecho abaixo.

Aluno A – Grupo IV: São 3 triângulos aqui com 7 palitos. Aqui são 3 triângulos com 6 palitos.
Aluno B – Grupo IV: Mas não pode botar no meio cara.
Aluno C – Grupo IV: Por quê?
Aluno B – Grupo IV: Porque tem que seguir o padrão, cara!

Como alguns alunos do grupo entenderam a necessidade do padrão, facilitou o trabalho para explicarmos para os outros alunos. Em um momento os alunos se declararam confusos, pois acreditavam que mudando o padrão era possível construir a mesma quantidade de triângulos com quantidades diferentes de palitos.

Enquanto explicávamos a necessidade de se escolher um padrão para seguir, um aluno comenta que *“Não, porque seguindo o padrão, números pares não podem ser utilizados”*. Ele mostra aos integrantes do grupo que se você contar a quantidade de palitos verá que só existem números ímpares e, a partir deste raciocínio, eles concluem que a resposta para o item (c) é *“não”*, com uma justificativa que parece mostrar que eles **não compreenderam completamente o enunciado**, como mostra o diálogo abaixo.

Aluno D – Grupo IV: Não, por quê? A gente ainda não disse por quê.
Aluno E – Grupo IV: Não, pois para seguir a ordem não podem ser utilizados números pares.
Aluno D – Grupo IV: Mas o que número par tem a ver com quantidades de palitos?
Aluno E – Grupo IV: Porque tá perguntando se pode ser utilizada para qualquer quantidade. Não, por exemplo, para números pares não pode ser utilizada.

Para chegarem a formula, também recorreram à **análise visual da sequência**. Eles explicaram que *“quando você faz um triângulo você usa 3, aí para os outros você só vai colocando mais 2 palitos”*.

O grupo V iniciou a atividade alegando **dificuldades em desenhar os palitos**, até que um integrante sugeriu representar por um traço e, em seguida, testaram para uma determinada quantidade de triângulos, percebendo que é **mais razoável testar para números menores.**

Aluno A – Grupo V: Vou escolher o número 26. Caramba!
Aluno B – Grupo V: É muito grande. Vou escolher 12.
Aluno A – Grupo V: Vou escolher 10.

Neste momento, um aluno apresentou uma configuração diferente da esperada. Esta não foi escolhida pelo grupo, mas também não foi questionada.

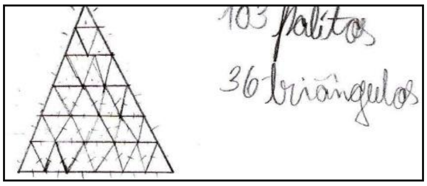


Figura 53: Resposta individual dada por alunos do Grupo V para o item (b).

O grupo também percebeu que os termos da sequência da quantidade de palitos necessários só possuem números ímpares de palitos, **testando através de desenhos**. Durante toda a atividade, um aluno **sugeria caminhos ao outro e identificava erros ao comparar as soluções**, como podemos verificar no diálogo abaixo.

Aluno A – Grupo V: O seu deu errado. Não dá para fechar com 10.
Aluno B – Grupo V: Eu sei, eu acabei de falar que tava errado.
Aluno A – Grupo V: Não dá para fechar.
Aluno B – Grupo V: Exatamente, eu coloquei com 11.

Um integrante do grupo sentiu muita dificuldade em realizar o item (c) e foi auxiliado não somente pelas professoras, como também pelos próprios alunos do grupo. Inicialmente, este aluno A, do diálogo acima, achou que a resposta do item (c) era *"não",* **sem ao menos questionar ou saber justificar sua resposta**. Quando pedimos para que o aluno A verificasse casos e que fizesse um desenho, ele não quis já que acreditava que não daria.

Mais adiante percebemos que, na verdade, o aluno A não relacionou que com uma quantidade par de palitos não formamos um termo da sequência. Observamos isto quando, raciocinando sobre o item (c), o aluno A afirma que *"não"* e, quando estimulado a justificar, pergunta: *"mais palitos não são mais triângulos?"*. Um tempo após, este aluno A percebe que *"par não vai"* e decide responder que *"sim"*. Outro integrante apresenta a dúvida e este aluno tenta explicar seu raciocínio:

Aluno A – Grupo V: É sim. Se você colocar, por exemplo, 5 triângulos que são 11 palitos e fazer com 12 vão dar 5 triângulos porque o sexto não vai fechar.
Aluno B – Grupo V: Aí vai sobrar um palito.
Aluno A – Grupo V: Ele pergunta se dar para fazer a mesma quantidade de triângulos com quantidades diferentes de palitos.

O aluno B parece não entender o raciocínio embora compreenda que sobra um palito e, por isso, o aluno A continua sua explicação, mostrando claramente um **trabalho cooperativo**.

Aluno B – Grupo V: Vai formar 5, mas vai sobrar 1.
Aluno A – Grupo V: E daí? Mas ele só quer saber se dá para formar 5 triângulos.
Aluno B – Grupo V: Para quantidades diferentes de palitos, conseguimos formar quantidades iguais de triângulos? Sim.
Aluno A – Grupo V: Com 11 palitos, a gente forma 5 triângulos. Com 12 palitos, a gente forma 5 triângulos.
Aluno B – Grupo V: Mas vai sobrar 1...
Aluno A – Grupo V: Mas não foi isso, ele só quer saber se vai formar 5. Vai formar. É isso que ele quer saber.

Em seguida, o aluno diz que não está entendendo este palito que sobra e o aluno A tenta mais uma vez explicar dizendo que *"tem 3 triângulos e tem 1 [palito sobrando] e ele te pergunta quantos triângulos tem, aí você vai dizer 3, porque aquele ali não forma um triângulo. Mas se te perguntar quantos palitos tem, você vai dizer os dos 3 triângulos mais 1"*.

Neste momento, nós intervimos e o aluno disse que havia entendido, mas que percebeu que não funcionava em todos os casos.

Louise: Qual caso você acha que não daria?
Aluno B – Grupo V: O de 10 para formar 5 triângulos.
Louise: Com 10 palitos? Como é que ficaria a configuração com 10 palitos? Aí formam quantos triângulos?
Todos: 4 triângulos.
Louise: Aí já não dá para 5.
Todos: Mas dá para quatro.
Louise: Para formar 4 triângulos, eu posso usar quantos palitos? Com 10 você já viu que dá. E com quem mais?
Aluno B – Grupo V: Com 11.
Louise: Com 11 formam 5. Eu quero 4.
Aluno B – Grupo V: Com 9.
Louise: 9. 9 também forma 4 triângulos. Entendeu?

Na verdade, o aluno testava para uma quantidade de palitos e a quantidade antecessora, quando deveria testar para a quantidade sucessora, já que se referia ao mesmo número de triângulos. Após esta dúvida ser esclarecida, o aluno mostrou **dificuldades para argumentar**.

O grupo, finalmente, respondeu que sim, como indica figura abaixo.

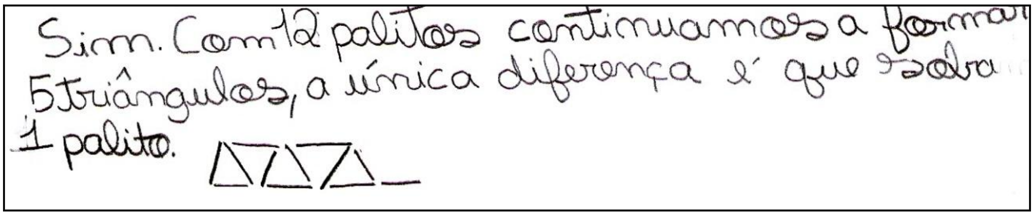
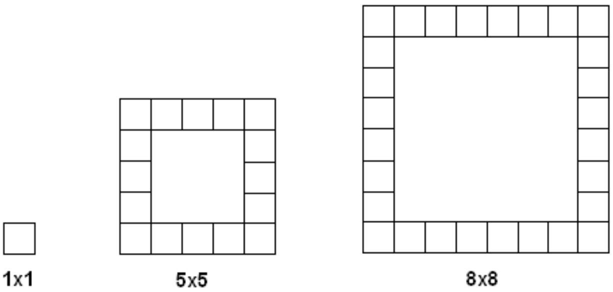

Sim. Com 12 palitos continuamos a formar 5 triângulos, a única diferença é que sobra 1 palito.

Figura 54: Resposta dada no bloco do Grupo V para o item (c).

4.1.2 Atividade II – A cerca.

Enunciado:

Na figura abaixo estão representadas “cercas” quadradas formadas por quadradinhos 1x1.



a) Encontre o número de quadradinhos necessários para construir uma cerca do mesmo tipo, com as dimensões:

- 5x5
- 8x8
- 10x10
- 12x12
- 100x100
- 1000x1000

b) Explique como você encontrou estes números.

c) Escreva em linguagem matemática o número de quadradinhos necessários para construir uma cerca quadrada qualquer desse tipo.

Descrição da aplicação:

O grupo I iniciou a atividade **buscando uma fórmula** e achando que a mesma fosse o triplo do número da figura, mais 1. Ao questionarmos como encontravam estes valores, eles informaram que contavam, mas que para números maiores eles tinham que **pensar em outra forma**. Depois, verificaram que a primeira fórmula não era válida para outros elementos e testaram para o triplo do número da figura, menos 3.

Quando perguntamos como eles raciocinaram, um aluno respondeu:

> **Aluno – Grupo I:** Olha só e vê se não está certo. Se a gente for pela noção... Eu não achei a fórmula, mas o de 1000 eu fui pela ideia do de 10, por exemplo: tem 5. Eu fui pelo de 5. Quando você vai contando, 1, 2, 3, 4,5, aí você conta 4 aqui 4 aqui 4, quer dizer, 3. Se você for por essa ideia, é 3997, 3997, 3996.

O aluno **analisou a sequência visualmente**, observando que ao manter a quantidade de quadradinhos da linha inferior, ou seja, n, as duas colunas possuirão apenas $n-1$ quadradinhos, já que 1 quadradinho pertence tanto à coluna quanto à linha inferior. Com raciocínio análogo, o aluno conclui que a linha superior possui $n-2$ quadradinhos. Exemplificou ao final de sua fala para o caso em que $n = 3998$. A figura abaixo representa o raciocínio deste aluno, que também foi o mesmo raciocínio do grupo II.

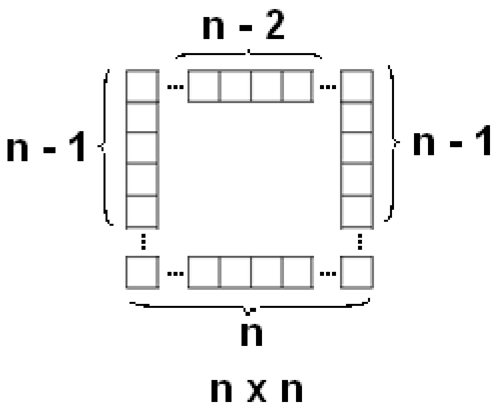


Figura 55: Cerca quadrada formada por quadradinhos n x n.

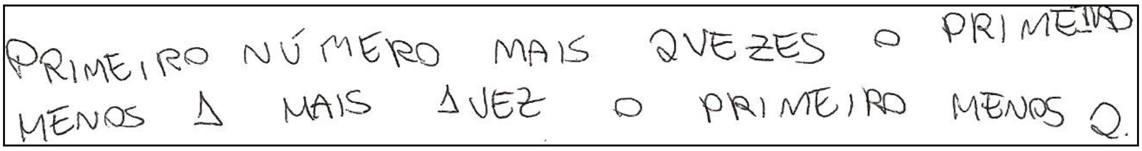


Figura 56: Respostada dada pelo Grupo II para o item (b).

O grupo concorda com o raciocínio do aluno, mas encontra **dificuldade para escrever a fórmula** quando resolve o item (a) para o caso 12x12. Neste momento, intervimos e percebemos que eles abandonaram o raciocínio exposto no item (b):

Louise: Então você vai pegar 12 e vai multiplicar por quanto?
Aluno A – Grupo I: Por quatro?
Louise: E vai tirar quanto?
Aluno A – Grupo I: Só que... aqui não conta. E depois aqui...
Louise: Quantos não contam?
Aluno A – Grupo I: Quatro.
Louise: Vai diminuir quantos?
Aluno A – Grupo I: Quatro.
Louise: Então, dá 44.
Aluno A – Grupo I: É verdade.
Aluno B – Grupo I: A fórmula, como é que é?
Aluno C – Grupo I: É o número vezes 4 menos 4
Aluno B – Grupo I: Bota x menos 4. X vezes 4 menos 4.

Considerando este novo raciocínio, os alunos perceberam que cada lado da cerca era composto por n quadradinhos, mas ao adicionarem as quantidades de quadradinhos de cada lado, alguns quadradinhos são repetidos e estão pintados de preto na figura abaixo.

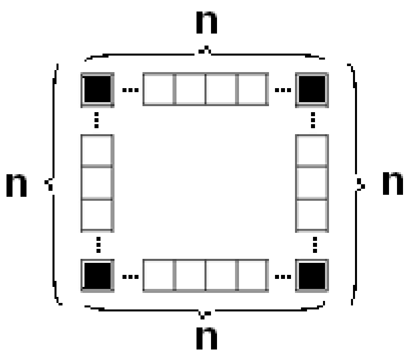


Figura 57: Cerca quadrada formada por quadradinhos n x n.

Para isso, os alunos multiplicaram o número de quadradinhos, em cada lado, n, por 4, subtraindo depois os 4 quadradinhos que se repetiam e determinando a expressão final $q = 4n - 4$. Sugerimos que os alunos indicassem **o que representa cada variável** e os mesmos concordaram, indicando que q representa a quantidade de quadradinhos que compõe a cerca n x n.

O grupo IV buscou a solução de outra forma, **utilizando o conceito de área**. Percebemos isso, pois, logo ao iniciar a atividade, os alunos concluíram que as cercas são feitas por *"números multiplicados um pelos outros"*, ou seja, uma cerca nxn possui n^2 quadradinhos. Esclarecemos tal dúvida pedindo que os alunos verificassem, na figura, se o resultado encontrado era verdadeiro.

Louise: Essa cerca é 5x5 ela tem 25 quadradinhos?
Aluno – Grupo IV: Dá 11.
Louise: Vocês contaram?
Aluno – Grupo IV: Não dá 25 quadradinhos. Dá 11.
Louise: Conta, por favor.
Aluno – Grupo IV: É 3 vezes o número aqui menos 4.

O aluno expõe uma fórmula, mas **sem qualquer razão aparente para ter encontrado a mesma**. Para validá-la, sugerimos que eles t**estassem a mesma para os desenhos da sequência** e eles fizeram isso **cooperativamente**.

Aluno A – Grupo IV: 3 vezes o número ali menos 4.
Aluno B – Grupo IV: Como assim 3 vezes?
Aluno A – Grupo IV: 3 vezes o 5 menos 4. Conta só. No de 5x5 tem o que?
Aluno B – Grupo IV: 16. 16 não é 3 vezes 4 menos.
Aluno A – Grupo IV: Ah, é verdade. É 4. É 4 vezes menos 4. Confundi.

Quando os outros alunos do grupo perguntaram o motivo, o aluno **não soube expor o raciocínio para chegar à fórmula**, mas mostrou que esta funciona, **testando-a** para as cercas $5x5$ e $8x8$. Complementou dizendo que *"para representar um número qualquer, você usa a letra n"*. Vemos que este raciocínio é igual à solução última do grupo I.

4.2 Segunda aplicação

4.2.1 Atividade IV – Dobrando papéis.

__Enunciado:__

Atividade IV – Dobrando papéis.

a) Pegue uma folha de papel e dobre-a ao meio. Você encontrou quantos quadriláteros?

b) Retome a folha dobrada e dobre-a novamente. O que você observou?

c) Se você repetir o processo 10 vezes, quantos quadriláteros você obterá?

d) Como você escreveria matematicamente o número de quadriláteros que você obterá ao realizar n dobras?

Descrição da aplicação:

Inicialmente, o grupo I se mostrava certo de que poderíamos definir quadrilátero como todo polígono que possui 4 lados iguais. Ao estimularmos o debate, um aluno concluiu que quadrilátero é todo polígono de quatro lados e os demais integrantes concordaram. O grupo, então, seguiu com resolução do problema utilizando o papel para realizar as dobras e **tomando nota das quantidades obtidas**.

Nesse processo, perceberam que a próxima quantidade de dobras é sempre o dobro da anterior, o que resultava em potências de 2. Ao notarem que com 10 dobras obtemos 2^{10} quadriláteros, associaram que com n dobras obtemos 2^n quadriláteros. Mesmo com o raciocínio correto verificado oralmente, 2 alunos anotaram em seus blocos individuais *"que os quadrados se multiplicaram por eles mesmos"* para o item (b). Pela explicação oral, percebemos que os alunos queriam dizer quadriláteros, mas disseram quadrados.

Os grupos I e V apresentaram uma **dúvida semelhante quanto ao enunciado no item (c)**, já que não sabiam se deviam repetir o processo por mais 10 vezes ou se o número total de dobras deveria ser 10. Como indicado em nossa metodologia, no item 2.8, **lemos juntos o enunciado** e explicamos que o processo deveria ser reiniciado para que o total fosse de 10 dobras.

Para resolver o problema, os alunos dos grupos II/III, IV e V tentaram dobrar a folha ao meio 10 vezes consecutivas, mas logo perceberam que não era possível. Relembramos do comentário que um dos alunos do Mestrado fez durante o Seminário em que avaliamos as atividades, em que afirmou que uma folha A4 não pode ser dobrada mais que 6 vezes. Comentamos com o grupo este fato e eles logo perceberam que **deveriam utilizar outro recurso** além de verificar os dados obtidos a partir de cada dobra.

A discussão seguiu, até que um aluno comentou que "era 2^n". Ao pedirmos uma explicação, ele apresentou apenas a resposta**, não sabendo argumentar**.

Aluno A – Grupo II/III: Se você repetir o processo 10 vezes, quantos quadriláteros obterá? 2^{10}, certo? 1024. Escreva matematicamente... Com 10 dobras o expoente é 10, com n dobras o expoente é n. 2^n.

Nesse momento um aluno questionou se o valor de n é 10. Discutimos com o grupo o que significa "valor de n", percebendo que há uma variação em n. Daí, concluímos que n é a variável. Um integrante do grupo concluiu que para 10 dobras, o valor de n será 10.

Um integrante do grupo IV apresentou, inicialmente, uma sequência para o número de quadriláteros obtidos com as dobras dos papeis.

Aluno A – Grupo IV: É sempre dobrando. Dá uma olhada: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256,612.

Ao expor seu raciocínio, um colega percebeu que o dobro de 256 não poderia ser 612, já que 250 + 250 = 500 e, já que a diferença não poderia ser tão maior, concluíram que o termo correto da sequência é 512.

Embora percebessem corretamente o que ocorre, ao responderem oralmente o item (d) tiveram dúvidas, como o diálogo abaixo mostra.

Aluno A – Grupo IV: É, o x que é o número elevado ao n, que é o número de dobraduras.
Aluno B – Grupo IV: Não. Você percebeu que dobra... É n vezes 2. Não, você falou que é elevado. Gente, é x vezes 2. Vocês não concordam comigo? Dá uma olhada, 2, 4, 8, 16,...
Aluno A – Grupo IV: É, n vezes 2.

O relato oral mostra que a fórmula que eles buscavam para expressar os dados da sequência não representava o dobro da quantidade de quadriláteros obtidos no processo anterior.

Ao questionarmos o raciocínio do grupo, um aluno disse que *"não era x, era n, que é o número de dobras"* e mostrava não entender porque multiplicar por 2. Outro integrante do grupo respondeu que *"é 2 porque você dobra e aí vai ser 2".* O aluno, que inicialmente havia apontado que a fórmula era x^n, interviu tentando explicar, mas agora defendendo a segunda fórmula exposta pelo grupo.

Aluno A – Grupo IV: Não, mas exatamente, a dobra que você faz ela justamente, que ela faz, ela vai... o próprio nome diz... quando você dobra, você dobra o número. Exatamente por isso. Então sempre vai ser n vezes 2.

O grupo precisou discutir um tempo para que percebessem que o dobro se referia à quantidade de quadriláteros obtidos no processo anterior e não ao número de dobras. Para isso, medíamos a discussão **pedindo que a fórmula fosse testada**. Após isso, um aluno mostrou ter entendido.

> **Aluno A – Grupo IV:** 2. 2x2=4. 4x2=8. 8x2 = 16.

Assim, o grupo concluiu o problema com o raciocínio correto, mas **não oralizou corretamente**, dizendo que:

> **Aluno A – Grupo IV:** Repetir o processo 10 vezes é o mesmo que multiplicar o número de quadriláteros atual por 2 elevado a décima potência.

Verificamos que a resposta presente no bloco do grupo era "$x.2$" e que um aluno julgou que o correto seria *"2^{10} vezes o número atual de quadriláteros"*, como mostram as imagens abaixo. Vale resaltar que, na mesma atividade, houve a resposta como um produto para um item e como uma potência para outro.

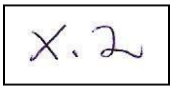


Figura 58: Resposta dada pelo grupo IV para o item (d).

Figura 59: Resposta dada por um aluno do grupo IV para o item (c).

O grupo V percebeu, inicialmente, que *"o número de quadriláteros dobrou junto com a folha"*, como um integrante mesmo afirmou. Esse raciocínio levou parte dos integrantes do grupo a acreditarem que, ao dobrar o quadrilátero 10 vezes, encontraremos 20 quadriláteros.

> **Aluno – Grupo V:** 20.
> **Louise:** Você acha que encontro 20?
> **Aluno – Grupo V:** Acho que não dá não.
> **Louise:** Por que você acha que aqui dá 20?
> **Aluno – Grupo V:** Porque aqui dobrou.
> **Aluno – Grupo V:** Então, mas vai dobrar de novo.
> **Aluno – Grupo V:** Então dá 2 elevado à décima potência?
> **Louise:** 2 a décima? Tenta testar isso para alguns números que vocês possam confirmar no papel. Não é a melhor forma da gente saber se vai dar certo?

Para auxiliarmos os alunos, indicamos que eles verificassem se a fórmula era válida para os números que eles pudessem confirmar contando o número de quadriláteros obtidos a cada dobra. Um integrante sugeriu:

Aluno A – Grupo V: Gente, dobra 5 vezes e daí você multiplica por 2.
Aluno B – Grupo V: Por 2. 16x16.
Aluno A – Grupo V: Eu sei. 256.
Aluno B – Grupo V: 256 vezes 4.
Aluno A – Grupo V: 1024
Aluno B – Grupo V: 1024 quadriláteros?
Aluno A – Grupo V: Se você repetir o processo 10 vezes, quantos quadriláteros você obterá?

O grupo trabalhou utilizando a potenciação. Reparamos que para determinar a quantidade de quadriláteros obtidos na 8ª dobra, por exemplo, o grupo calculou $2^4 x 2^4$. De forma análoga, para determinar a quantidade de quadriláteros obtidos na 10ª dobra, calcularam $2^8 x 4$. Entretanto, **não foram apresentados argumentos orais ou escritos** para tal raciocínio.

Ao encontrar 1024 quadriláteros para a décima dobra, o grupo se caracterizou em um *"ponto crítico de suas vidas"*, pois não conseguiam decidir se a resposta do problema era 20 ou 1024 quadriláteros, até que um integrante disse ao grupo que antes estava pensando *"que era multiplicar por 2, mas aí vimos que é pelo número anterior"*. No momento em que responderam 2^{10} = 1024, rapidamente perceberam que para n dobras serão 2^n quadriláteros. O grupo tomou **cuidado para identificar o que cada variável representa**, provavelmente porque insistimos na aplicação anterior.

Embora o grupo tenha apresentado **raciocínio coerente com o registro escrito**, um integrante respondeu que n dobras geram n^2 quadriláteros, como mostra imagem abaixo. Observamos **dificuldade em escrever algebricamente o que descreveu oralmente**.

Figura 60: Resposta dada por um aluno do grupo V para o item (d).

O grupo VI também percebeu que o número de quadriláteros dobrava, mas primeiramente disse que o número de quadriláteros formados após repetir o processo 10 vezes seria 20. Essa ideia foi desconstruída quando um aluno sugeriu realizar uma ***"prova real"*** que, na verdade, seria o processo de verificação que havíamos comentado muitas vezes durante a primeira aplicação das atividades.

Para verificar, começaram a dobrar o papel. Assim, construíram uma sequência com o número de quadriláteros encontrados em cada dobra. A partir daí, perceberam que o número de quadriláteros dobrava em relação ao número anterior, completando a sequência até que a mesma tivesse 10 termos e, depois, associaram cada elemento com uma potência de base 2. Dessa forma, para responder ao último item, rapidamente perceberam que deveriam elevar o número de dobras à potência 2".

4.2.2 Atividade II – O preço do livro.

Enunciado:

Uma livraria recebe certo livro por um custo de R$40,00 por exemplar. O gerente vendeu inicialmente 36 desses livros por semana a R$ 100,00 cada. Sabendo que, se reduzisse o preço de cada livro de R$ 5,00 por semana, venderia mais 6 livros por semana, resolveu experimentar e foi reduzindo o preço do livro de R$5,00 a cada semana.

a) Investigue como varia o preço ao longo das semanas.

b) Pelo que você observou, valeria a pena o gerente continuar a diminuir o preço de venda do livro? Argumente.

c) Considerando uma semana qualquer, expresse o preço de venda do livro, o lucro total e o número de livros vendidos, nessa semana.

d) Imagine que você é o gerente desta livraria. No que o conhecimento destas expressões te auxiliaria a tomar decisões?

Descrição da aplicação:

O grupo I se mostrou muito disperso durante a atividade, não discutindo muito os problemas e, por isso, não houve registro oral relevante. Pelo registro escrito, vimos que para analisar a variação de preço ao longo das semanas, como indica o item (a), o grupo verificou apenas a diferença entre o montante obtido na segunda semana. Referiam-se ao lucro na frase *"tirando o fato do preço dos livros"*, sem calculá-lo.

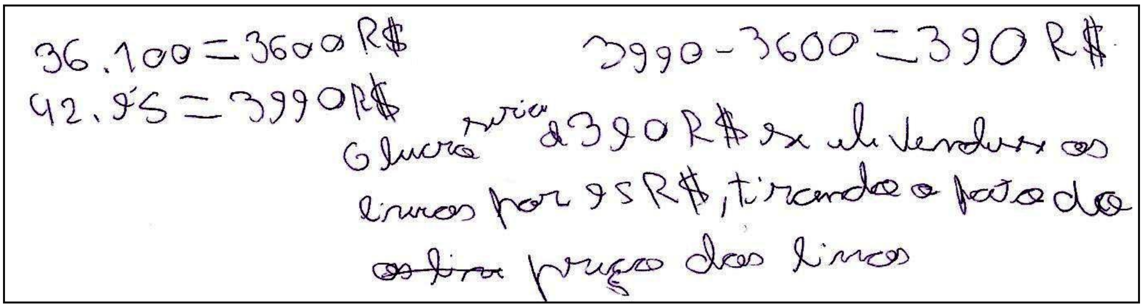

36.100 = 3600 R$ 3990 - 3600 = 390 R$
42.95 = 3990 R$
O lucro seria de 390 R$ se ele vender os livros por 95 R$, tirando o preço do antigo preço dos livros

Figura 61: Resposta dada pelo grupo I para o item (a).

Assim, para o item (b), o grupo concluiu que *"sim, pois ele iria sair no lucro em 390 reais"* considerando apenas a análise realizada para as duas primeiras semanas. Para o item (c), assim como outros grupos, eles **escolheram a semana da primeira redução, ao invés de uma semana "n"**.

Quanto ao auxílio às tomadas de decisões, o grupo responde que *"ajudaria a não sair no prejuízo e também a lucrar"*.

Um aluno do grupo II/III iniciou a atividade entendendo que havia redução de R$ 5,00 apenas por semana, sem considerar o aumento na quantidade de livros vendidos, o que foi esclarecido por outro integrante do grupo. Mesmo assim, o aluno conclui, **sem justificar**, que não valeria a pena.

Não convencido com a resposta do colega de grupo, um aluno tenta analisar a situação e expõe o raciocínio para o grupo:

> **Aluno – Grupo II/III:** A cada vez que ele abaixa, ele deixa de ganhar 5 reais, ou seja, ele vendendo 5 livros, ele perde 25 reais. Vendendo mais um livro ele vai ganhar 95 reais. Aí tá, vai ter um lucro total de 70 reais. Mas vamos supor, na 12ª semana, ele vai tá vendendo cada livro a 40 reais, ou seja, quantos livros ele vai vender? Faz aí... 108 livros vezes 40 reais.

Resolvendo o problema, obtemos na semana em que há a venda de 36 livros a R$100,00, o lucro por livro é de R$60,00, já que o preço de custo é de R$40,00, resultando em um lucro total de R$2160,00. Na semana seguinte, com a venda de 42 livros a R$95,00, o lucro por livro é de R$55,00 e o lucro total é de R$2310,00. Sendo assim, com a redução do preço do livro e, consequentemente, aumento da quantidade de livros vendidos, há uma diferença de R$150,00 no lucro obtido na segunda semana em relação à primeira.

Vemos, na fala do aluno apresentada acima, que ele analisa o lucro subtraindo a venda de um livro com o preço da segunda semana com a "perda" de R$ 25,00 referentes ao decréscimo do livro. O aluno diz que na 12ª semana serão vendidos 108 livros e o preço do livro será de R$40,00. Percebemos, então, que na semana na venda dos 36 livros, era a semana “0”, sendo a semana “1” a referente à venda de 42 livros, como indica a imagem abaixo.

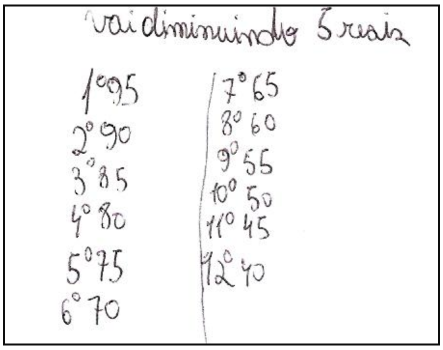


Figura 62: Resposta dada pelo grupo II/III para o item (a).

Após um tempo, o grupo conclui, oralmente que o gerente *“vai lucrar, mas bem pouquinho”*, embora tenham respondido no bloco do grupo que *“sim, pois ele vai obtendo lucro, pois a quantidade de livros vendidos vai aumentando”*.

Para o item (c), em que deveriam considerar preços para uma semana qualquer, o grupo decidiu escolher a 2ª semana, entendendo que esta é uma semana qualquer e **não “*n*”**, assim como do grupo I.

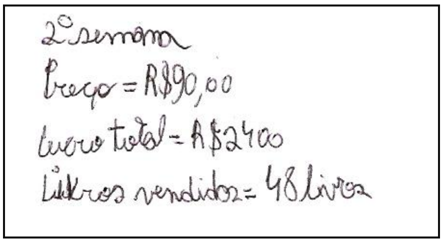


Figura 63: Resposta dada pelo grupo II/III para o item (c).

O grupo não analisou até que ponto vale a pena reduzir o preço, não sendo considerada a hipótese da redução continuar e o preço de venda ser superior ao custo do livro.

O grupo IV não quis preencher o bloco do grupo, pois seus integrantes queriam trabalhar em seus blocos individuais e tinham “preguiça” em copiar os resultados obtidos. Para o item (a), os alunos investigaram a variação do preço até a 12ª semana, em que o preço do livro se iguala ao preço de custo. Observamos, então, que o grupo considerou que a semana "0" é aquela da venda de 36 livros. Um aluno foi além, se antecipando e apresentando o valor recebido com a venda e o valor gasto na compra dos livros, mas apenas para as 5 primeiras semanas. O aluno não indicou a unidade monetária, ou seja, 1440 não foi representado por R$1440,00.

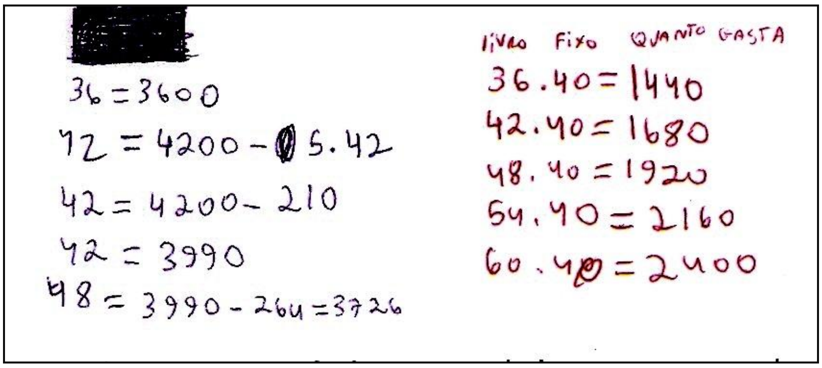


Figura 64: Resposta dada por um aluno do grupo IV para o item (a).

Existiram divergências quanto à resposta para o item (b). Um aluno acreditou que *"não, porque chegaria um momento em que o gerente não teria mais nenhum lucro"*, outro respondeu que *"sim vale a pena, o lucro aumenta"* e dois concordaram que valeria até certo ponto.

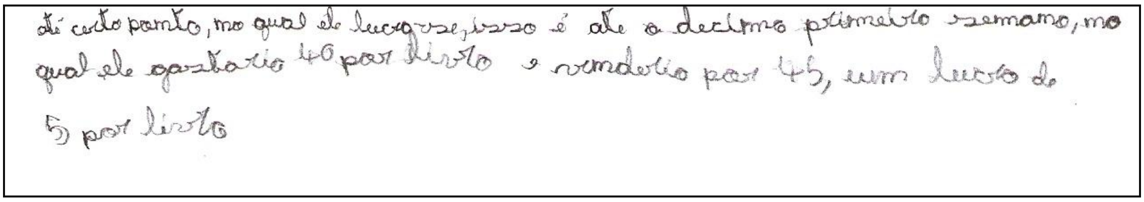


Figura 65: Resposta dada por um aluno do grupo IV para o item (b).

Para o item (c), 3 alunos **determinaram uma expressão** para uma semana "x", mas um aluno escolheu a primeira semana, considerando esta como uma semana qualquer.

Um dos alunos apresentou um **raciocínio diferente recursivo** para determinar o preço do livro em uma semana "s_x". Apesar de estar correto, não é prático e, ao mediarmos a situação o próprio aluno entendeu o problema dizendo que *"saber a semana 1000, eu preciso saber a semana 999".* Assim, o aluno, raciocinando com os demais integrantes do grupo, **determinaram uma fórmula** que relaciona o preço do livro com a quantidade de semanas passadas desde o início da redução.

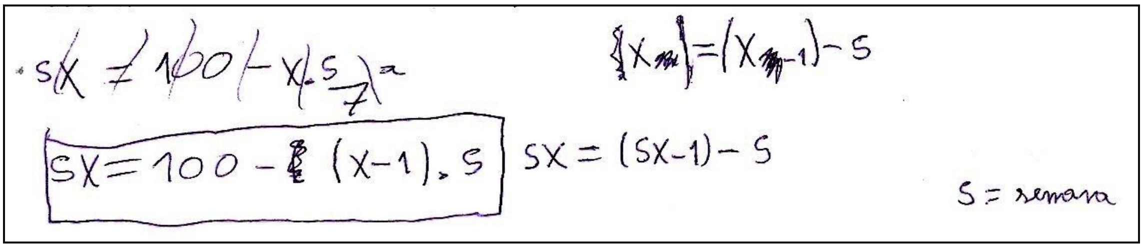


Figura 66: Resposta dada por um aluno do grupo IV para o item (c).

Um aluno, antes de determinar a fórmula, sentiu muitas **dificuldades para entender o que significava uma semana qualquer**, acreditando que bastava ele escolher uma semana.

> **Aluno – Grupo IV:** Professora, eu fiz assim. A semana qualquer seria 36 vezes 100 entre parênteses, menos abre parênteses, 36 vezes 40. 40 seria o preço que você pagaria a cada livro.
> **Louise:** Mas quando você faz essa conta, você calcula para a primeira semana.
> **Aluno – Grupo IV:** É, mas é a primeira semana que conta. Porque aqui ele diz o seguinte: uma livraria recebe certo livro ao custo de 40 reais por exemplar. O gerente vendeu inicialmente. Deixa eu ver...
> **Louise:** Aqui, você está pensando em um valor fixo.
> **Aluno – Grupo IV:** Ah, mas sempre vai ser a quantidade que recebe dos livros, multiplicado pelo valor que ele vende menos o valor que ele paga o livro.
> **Louise:** É isso, mas o que você está colocando aí é só para a primeira semana. Uma semana específica, uma semana fixa. Não uma semana qualquer. Em qualquer semana, como isso acontece? Vai ser sempre 100 reais que ele vai cobrar? Vai ser quanto que ele vai pagar?
> **Aluno – Grupo IV:** Pode ser 95, pode ser 90...
> **Louise:** Como que eu escrevo isso em função da quantidade de semanas, que você chamou de x?

A partir de então, para que o aluno atingisse uma fórmula, perguntamos como ele calcularia, para uma semana 212, por exemplo, e o aluno concluiu com raciocínio correto. Depois, perguntamos para a semana 15 e, finalmente, uma semana "x", apresentando a resposta correta em seu bloco de questões.

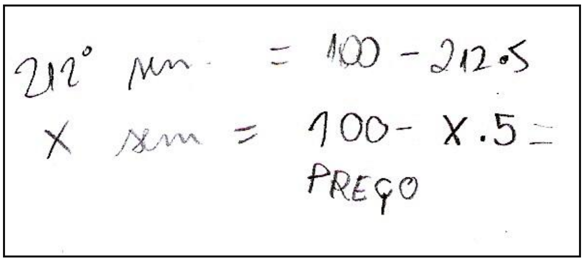


Figura 67: Resposta dada por um aluno do grupo IV para o item (d).

Todos concordaram que o conhecimento das fórmulas os ajudariam a tomar decisões para calcular o lucro.

O grupo V inicia a atividade estabelecendo uma relação entre os preços de venda e a quantidade de livros vendidos.

> **Aluno – Grupo V:** 100 está para n, assim como 95 está para n +6. Não está, mas seria na semana seguinte. Dá quanto? 2160? 60x36. Ele quis reduzir 5 reais por livro. Não, por semana, na segunda semana.

Da maneira que o aluno expôs a relação que o grupo procurava, deu a entender que se tratava de uma proporção, mas o aluno esclarece, em seguida que o correto não seria *"está"*, mas que se refere à semana seguinte. Pela fala, também percebemos que o lucro foi calculado corretamente para a primeira semana, ou seja, R$60,00 por livro, como o próprio aluno explica em outro trecho:

> **Aluno – Grupo V:** Que ele compra a 40, vende a 100 e tem um lucro de 60.

A partir de então, há uma **tentativa para generalizar** quando um integrante comenta que a quantidade de livros vendidos é *"tanto mais 6"*, onde podemos ver que é a quantidade vendida na semana anterior, mais 6. O aluno questiona "como ele conseguiria vender mais 6 livros" e os demais integrantes também não compreendem, mas a discussão não segue.

Assim, o grupo segue o raciocínio, calculando semana por semana o valor do preço do livro e o lucro, investigando a variação do preço, como sugere item (a). Entretanto, isso aparece apenas no registro oral e em uma folha de rascunho que foi anexada, pois no bloco de resposta do grupo, foi **apresentada uma fórmula** que determina o preço do livro na semana escolhida, como mostra imagem abaixo.

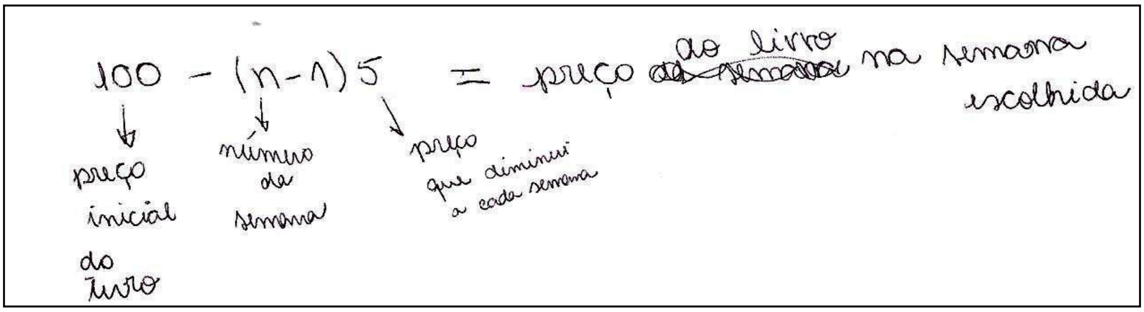


Figura 68: Resposta dada por um aluno do grupo V para o item (a).

Para determinar a fórmula encontrada para o item (a), um aluno comenta:

> **Aluno A – Grupo V:** Seria pra preço, seria x, que seria o preço inicial, menos 5, que é quanto ele tira a cada semana elevado ao n, que seria o número da semana, por exemplo.

Observamos que, neste raciocínio inicial, o aluno não percebe que o preço inicial foi estabelecido, R$100,00, e confunde, quando se expressa oralmente, as operações de multiplicação e potenciação, justificando a escolha da última da seguinte forma:

> **Aluno A – Grupo V:** Olhando aqui. Porque aqui no primeiro a gente fez e tirou 5 daqui. Aí daqui tirou 5 de novo. Só que aí eu comparei esse com esse, aí tiramos 5 e 5, só que aí pra não ficar tirando 5 e 5, eu botei 5 elevado ao número da semana, porque ele já está na terceira semana, mas aí seria só dois "5". Menos 1. Vai dar errado. É a terceira semana, mas só tirou dois "5". E ia dar vezes também.
> **Aluno B – Grupo V:** Mesmo assim, porque n seria vezes. 5x5. Não é 5x5. É 5+5. Só se fosse n, número da semana, menos 1 vezes 5.

Com a ajuda do outro integrante, há a percepção do erro e os alunos seguem o raciocínio. Um aluno questiona:

> **Aluno C – Grupo V:** Porque menos 1?
> **Aluno D – Grupo V:** É menos 1 porque é o número da semana... Por exemplo, na terceira semana, mas eu só tirei 2 "5". Ou eu tirei 3? Eu tirei 3! Está certo! Ah não, foram só 2.
> **Aluno C – Grupo V:** E se fosse tipo n, número da semana, aí só tirou 1, fica menos 1. Isso vezes 5.

Percebemos que o grupo considera que na primeira semana foram vendidos 36 livros e, por isso, há a necessidade de se retirar 1 ao número da semana. O grupo decide, então, **validar a fórmula encontrada**:

> **Aluno E – Grupo V:** Número da semana.
> **Aluno F – Grupo V:** 2
> **Aluno E – Grupo V:** menos 1
> **Aluno F – Grupo V:** 1. Ficaria 5. 1 vezes 5
> **Aluno E – Grupo V:** 5 reais? Na segunda semana?
> **Aluno F – Grupo V:** Na primeira semana não tá 100 reais? Da primeira para a segunda vai tirar 5.
> **Aluno E – Grupo V:** Tá, mas aqui se fosse na quarta, daria 20, pois é 4 vezes 5. Se fosse, por exemplo, x, que é o preço normal que ele vende, 100 reais. Aí, n seria o número da semana. Por exemplo, segunda semana, n é 2. Só que tem que tirar 1 , porque pela lógica que a gente viu aqui, de uma semana para a outra, só diminuiu aqui. Então aqui na terceira semana, e multiplica por 5 que é quanto diminui , e tira de 100 que é o preço inicial.

Neste momento, vemos que o grupo percebeu que, o que haviam chamado inicialmente de x, o preço inicial, já havia sido estabelecido anteriormente, valendo R$100,00. A validação da forma foi realizada, oralmente, até a 5ª semana. O grupo se preocupou em **identificar cada variável**, provavelmente por termos trabalhado esta questão nas atividades anteriores.

Ao discutirem se valia a pena ou não abaixar o preço, um aluno responde que não, já que sempre abaixa R$ 5,00, considerando apenas a venda de um livro, enquanto outro disse que valeria. Outro integrante argumenta que:

> **Aluno – Grupo V:** Sempre não, porque em algum momento tem certa quantidade, mas o custo-benefício não iria valer a pena. Porque ele compra por 40 reais. Em determinado momento vai vender por menos que 40 reais. Continuará a diminuir o preço? Não. Eternamente ele não pode continuar. Coloca assim: Sim, porém sem passar... parando quando chegasse em 40 reais.

O grupo concordou com o argumento, investigaram até que semana valeria a pena, seguindo o raciocínio inicial. No bloco de questões, apresentaram que vale a pena até a 12ª semana. Entretanto, a justificativa apresentada não está correta, pois a partir da 13ª semana o preço de venda será inferior ao de custo, já que consideraram a semana “0” como aquela em que foram vendidos 36 livros.

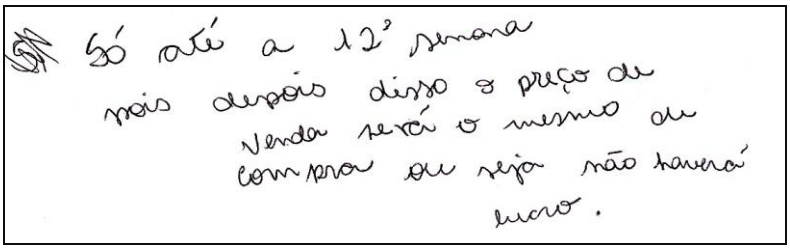

Só até a 12ª semana pois depois disso o preço de venda será o mesmo de compra ou seja não haverá lucro.

Figura 69: Resposta dada por um aluno do grupo V para o item (b).

Oralmente, um integrante sugeriu que fosse **feito o contrário** para determinar em que semana não haverá lucro:

> **Aluno – Grupo V:** É só a gente fazer o contrário. Olha só: 100 – (n-1) x 5 = 40, mas com esse 40 não tem lucro.

Ao resolvermos a equação indicada na fala no aluno, encontramos n = 13, o que indica que eles consideraram a semana da venda dos 36 livros como a semana “1”. No bloco, o grupo registrou, assim como os demais grupos, para o item (c) a resposta para uma semana qualquer, considerando a semana 10 e não a semana “n” e concluíram que o conhecimento dessas expressões auxiliaria a tomar decisões, como indica a resposta a seguir.

Sim, pois eu saberia o máximo de lucro que posso ter, sem me prejudicar

Figura 70: Resposta dada por um aluno do grupo V para o item (d).

O grupo VI, diferente dos demais, procurou saber por quanto um livro sairia ao final do mês:

Aluno A – Grupo VI: Tá, tipo assim, no final do mês o livro sai por quanto?
Aluno B – Grupo VI: O mês tem 4 semanas. Cada semana diminui 5 reais.
Aluno A – Grupo VI: 20 reais. 40 – 20.
Aluno B – Grupo VI: 40? 100. Ele tava vendendo por 100.
Aluno A – Grupo VI: Mas não era 40?
Aluno B – Grupo VI: Ele comprava por 40. Fica 80.

O diálogo mostra que eles conseguiram determinar ao final de um mês o preço do livro. A partir daí, se inicia a discussão de até quanto vale a pena reduzir o preço. Um integrante sugere reduzir o preço para R$ 40,00, mas imediatamente outro integrante comenta que *"40 ele compra, então não vai ter lucro nenhum. Ele compra pelo mesmo preço de venda"*. Entretanto, o aluno não consegue entender, pois vê que reduzindo, em algum momento, o preço chegará a R$ 40,00, mas seus colegas explicam que *"não havendo mais lucro, o gerente pode decidir não abaixar mais o preço"*. No bloco, responderam:

livro → 40,00
36 livros → 100,00
+6 livros → - 5,00

1 semana: 42 livros 95,00
2 semana: 48 livros 90,00
3 semana: 54 livros 85,00
4 semana: 60 livros 80,00

Figura 71: Resposta dada por um aluno do grupo VI para o item (b).

Inicialmente, os alunos entenderam que ao **considerar uma semana qualquer, eles poderiam considerar a quarta semana**, mas mediamos:

Louise: Aqui ele pediu para você considerar uma semana qualquer.
Aluno A – Grupo VI: Consideramos a quarta.
Louise: Mas a quarta é uma semana qualquer? Uma semana qualquer é uma semana que não tem um valor definido. Quando eu falo uma semana qualquer, não é para você pensar

numa e testar para essa semana. Você tem que expressar de forma que sirva para qualquer semana, entende?
Aluno A – Grupo VI: Ahn tá...
Louise: Não apaga, pois eu gostei muito disso. Muito mesmo. Mas o que é melhor para eu expressar para uma semana qualquer?
Aluno B – Grupo VI: O número de semanas...
Louise: O número de semanas será quem?
Aluno B – Grupo VI: X
Louise: Ah, então vocês estão usando uma variável...
Aluno A – Grupo VI: x é igual ao número de semanas. Para saber quantos livros você vendeu você multiplica pelo número de semanas e o preço é a mesma coisa.

Vemos que os alunos, ao considerarem uma semana qualquer "x", já **apresentaram uma fórmula** que relaciona o preço do livro com a quantidade de semanas passadas. Um aluno adiciona que *"5x eu calculo o preço. E 6x é igual aos livros vendidos por semana."*, que não está correto. O grupo apresentou em seu bloco de questões para o item (c) uma linha do tempo que mostra que ao passar das semanas, há uma redução de R$ 5,00 por livro e um aumento de 6 livros vendidos. Ao lado, eles mostram, para x semanas, a fórmula necessária para determinar o preço do livro e os livros vendidos por semana. A questão se encontra incompleta, uma vez que não responderam qual seria o lucro total.

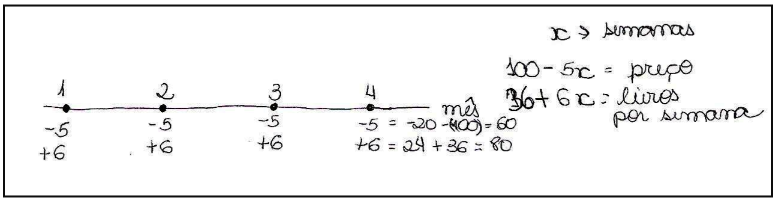


Figura 72: Resposta dada por um aluno do grupo VI para o item (c).

Como gerente da livraria, o grupo considera que o conhecimento dessas expressões o auxiliaria a *"calcular o lucro e ver quantos livros vendem".*

4.2.3 Formulando problemas

<u>Enunciado:</u>

Analise a imagem abaixo e, a partir dela, formule um problema.

<u>Descrição da aplicação:</u>

Todos os alunos pareceram surpresos ao observarem que deveriam formular um problema. Inicialmente, não conseguiam identificar cada elemento da sequência e, por isso, separamos a lápis cada um deles para uma melhor visualização, como indica a figura abaixo.

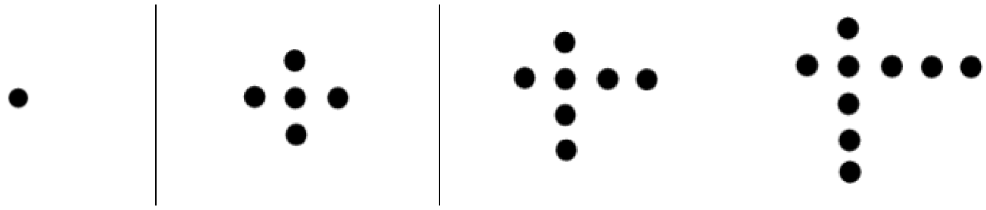


Figura 73: Separação dos elementos da sequência

Ao conseguirem distinguir cada elemento da sequência, foram em **busca de um padrão**, que muitos grupos chamaram de “ordem”. Todos os grupos acharam que a sequência estava errada, pois não correspondia ao padrão de acrescentar sempre 2 bolinhas à quantidade de bolinhas presente no elemento antecessor. Os grupos relutaram em aceitar que deveriam procurar outro padrão, já que o encontrado não era válido na sequência apresentada.

Nenhum grupo **tentou buscar a solução para o próprio problema que formularam,** sendo necessário que nós questionássemos se havia ou não solução para este. O grupo I chegou a cogitar que o problema formulado por eles não tivesse solução, mas outro integrante interviu dizendo que eles não haviam encontrado a resposta.

Antes dos grupos determinarem a resposta final, alguns problemas foram expressos oralmente, que seguem na análise abaixo, junto com o problema final escrito no bloco, formulado por cada grupo.

- **Grupo I**

1. A partir da imagem a seguir, diga o que isso pode ser e quantas bolinhas têm aí. (Registro oral)

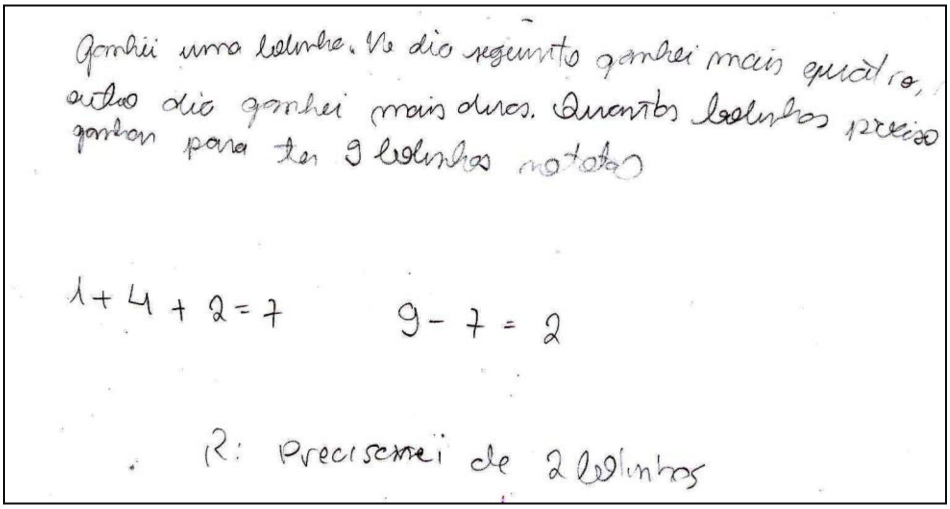
2. O que essas bolinhas representam? Transforme a quantidade de bolinhas em uma sentença matemática. (Registro oral)
3. Qual é a ordem que o grupo de bolinhas segue? (Registro oral)
4. Ganhei uma bolinha. No dia seguinte ganhei mais 4 bolinhas. No outro dia ganhei mais 2. Quantas bolinhas preciso ganhar para ter 9 bolinhas? (Registro oral)

Problema final: Ganhei uma bolinha. No dia seguinte ganhei mais quatro, outro dia ganhei mais duas. Quantas bolinhas preciso para ter 9 bolinhas no total?

O primeiro problema não mostra, por si só, relação com a busca de padrões e generalizações. Pela evolução dos problemas percebemos que, provavelmente, a expressão *“diga o que isso pode ser”* se refere aos próximos elementos ou até mesmo a fórmula matemática que expresse a regularidade da sequência.

No segundo problema, percebemos que **questionam se há um padrão** para a sequência, assim como a apresentação de fórmula matemática que expresse esse padrão, a qual os alunos denominaram “sequência matemática”. Notamos que a **fala não parece clara**, uma vez que transformar uma quantidade de bolinhas em sentença matemática não é equivalente a apresentar uma fórmula matemática que expresse a quantidade de bolinhas para qualquer termo da sequência. Já o terceiro problema não necessariamente exige resposta através de uma fórmula, uma vez que, por exemplo, a resposta “aumenta sempre 2 bolinhas” é correta a partir do segundo termo da sequência.

O grupo pensou que a sequência pudesse ser de números primos, mas os alunos disseram que o “1” e o “9” estavam atrapalhando. Depois, desconfiaram que poderia ser uma sequência de números ímpares, sem perceberem que o “3” não faria parte da sequência. Após o grupo não conseguir identificar um padrão, **decidiram mudar a pergunta**, apresentando o problema 4, que classificaram como muito simples.


Ganhei uma bolinha. No dia seguinte ganhei mais quatro, outro dia ganhei mais duas. Quantas bolinhas preciso ganhar para ter 9 bolinhas no total

$1 + 4 + 2 = 7$ $\quad$ $9 - 7 = 2$

R: Precisarei de 2 bolinhas

Figura 74: Problema final formulado pelo grupo I.

O problema final formulado, em uma análise fria, **não possui coerência com o discurso oral**, mas vemos que ele é consequência da tentativa “frustrada” de identificar o padrão da sequência. A estratégia de mudar o enunciado para que pudessem responder ao problema formulado foi realizada também por outros grupos, como veremos a seguir.

- **Grupo II/III**

1. Qual é a ordem de acréscimo que as bolinhas têm? (Registro oral)
2. Como são feitas as adições na borda? (Registro oral)
3. Qual é a ordem de acréscimo e qual é a alteração no formato? (Registro oral)

Problema final: Qual a ordem de acréscimo que as bolinhas têm? Ache a equação que representa esse crescimento?

O grupo seguiu os mesmos passos do grupo I, embora os grupos **não trocassem ideias entre si**. Seus integrantes desejaram formular **problemas que investigassem o padrão existente na sequência** e, para isso, buscaram entender qual a *“ordem que a sequência segue”*, mas disseram ter dificuldades para desenvolver o que procuravam. Assim como o grupo I, desconfiaram que se tratava se uma sequência de números primos, mas excluíram essa hipótese por conta da existência do “9”. Por não encontrarem um padrão que pudesse ser questionado em um problema, o grupo formulou o problema abaixo, que se assemelha ao 3º problema, em registro oral, do grupo I.

Qual a ordem de acréscimo que as bolinhas têm? Ache a equação que representa esse crescimento?

R: São colocados 2 bolinhas em cada figura seguindo o mesmo crescimento.

Figura 75: Problema final formulado pelo grupo II/III.

Vemos que o grupo **não apresentou resposta** para a segunda pergunta do problema, ou seja, determinar a equação, talvez por não terem encontrado um padrão que pudesse ser expresso por esta. Um dos alunos apresentou, em seu bloco de questões, o problema 3 registrado oralmente pelo grupo, diferente do bloco do grupo.

Qual é a ordem de acréssimo e qual é a alteração do formato?

R: São colocadas duas bolinhas em cada imagem e sempre no mesmo local.

Figura 76: Problema formulado por um aluno do grupo II/III.

Tanto o problema formulado pelo grupo quanto o que foi apresentado individualmente por este aluno **são coerentes** com o raciocínio desenvolvido durante a atividade, pois ambos **exploram a regularidade da sequência**.

Diferentemente do grupo I que apresentou um problema completamente distinto do seu raciocínio ao longo do processo, o grupo II/III **manteve a construção inicial do problema**, com pequena alteração, apenas não respondendo aquilo que não conseguiu determinar no decorrer do desenvolvimento da atividade, que foi a busca por uma fórmula.

- **Grupo IV**

1. Qual é a relação do polígono circunscrito no triângulo? (Registro oral)
2. Qual é a equação que representa o padrão da figura? (Registro oral)
3. Que polígono pode ser representado se unirmos as pontas? (Registro oral)

Problema final: A partir das figuras acima quais formações podem ser observadas? Explicite o nome das figuras encontradas além de se puder encontrar os ângulos das figuras determinadas.

O grupo IV, ao contrário dos demais grupos, não formulou um problema para que fosse determinado o padrão da sequência e sim um que relacionasse os desenhos das figuras com as bolinhas e com os vértices de um polígono.

Mesmo perseguindo esta ideia, o grupo sentiu **dificuldades na realização da tarefa**. Eles associaram que o segundo elemento da sequência formava um quadrado ao ligarmos os extremos. Depois, para o terceiro e quarto elementos encontraram trapézios ao repetirem o mesmo processo. Deixaram claro que o primeiro elemento, que é formado apenas de um ponto, não poderia formar nenhuma figura poligonal. Em determinado momento, se **mostraram confusos** para decidir o que poderia ser questionado no problema, embora estivem certos da situação que seria proposta.

> **Aluno – Grupo IV:** Quantidade de bolinhas... É que eu tava pensando outra fórmula. A partir dos pontos que nós criamos, poderíamos ser consideradas com as figuras. Se nós pensarmos assim, teremos lados o que? Paralelos! Mas eu tava tentando elaborar outro problema. Um problema que, por exemplo, se nós pensarmos a partir dos pontos que são vistos aqui dentro, e... qual seria a quantidade de triângulos e quantidade de ângulos internos que poderiam ser feitos. Mas já que sabemos que cada triângulo tem 180°, então a fórmula para resolver esse problema seria de acordo com a quantidade de triângulos, entendeu? A partir da quantidade, por exemplo, 180 vezes 4. 180 vezes x.

Enquanto os integrantes do grupo tentavam expor ideias para formularem o problema, mesmo sem conseguir, apontavam para a sequência de bolinhas, mostrando o que pensavam, mas sem riscar o papel. Por isso, apresentamos o esquema, que não foi registrado, realizado pelos alunos.

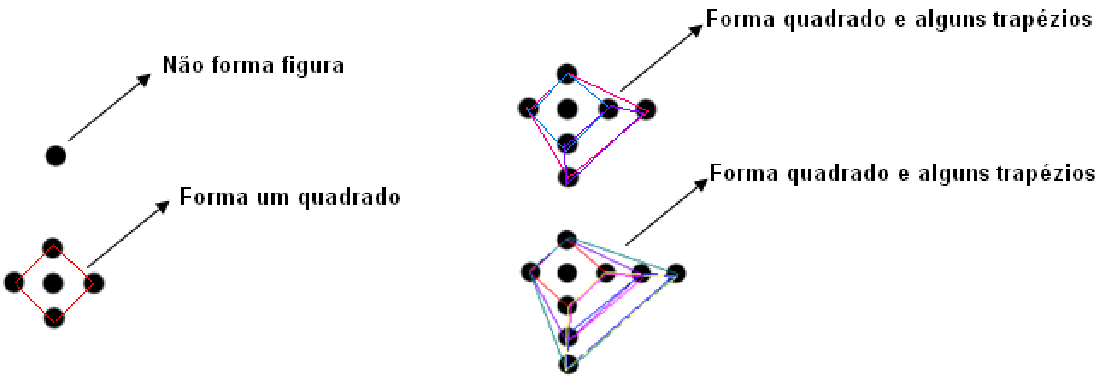
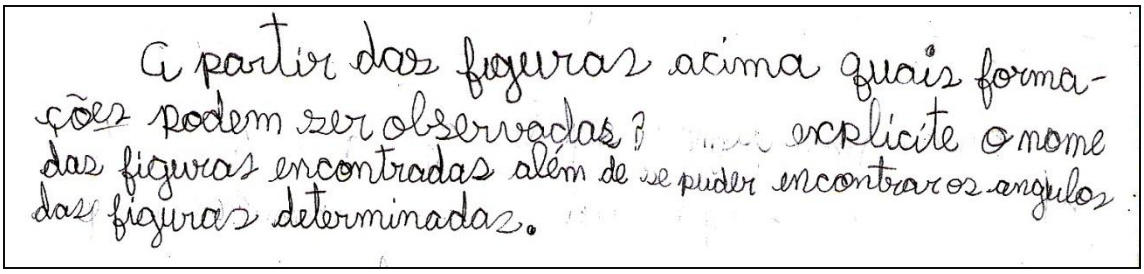


Figura 77: Figuras visualizadas pelo Grupo IV utilizando as bolinhas.

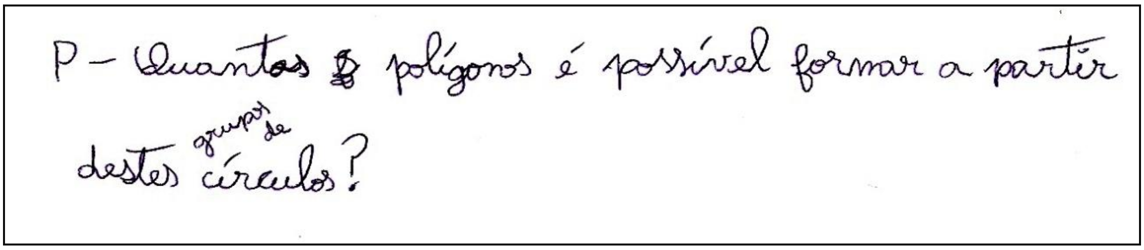
Com este raciocínio, o grupo propôs o seguinte problema final:



A partir das figuras acima quais forma-
ções podem ser observadas? explicite o nome
das figuras encontradas além de se puder encontrar os angulos
das figuras determinadas.

Figura 78: Problema final formulado pelo grupo IV.

Outro integrante do grupo, que compartilhava o raciocínio, tentou formular o mesmo problema para a situação criada, mas com palavras diferentes, como segue abaixo.



P – Quantos polígonos é possível formar a partir
destes grupos de círculos?

Figura 79: Problema formulado por um aluno do grupo IV.

Vemos que os **enunciados dos problemas mostram muito pouco do que era desejado**, mas **existe alguma coerência** entre o que disseram e argumentaram oralmente e o que apresentaram em registro escrito. Entretanto, oralmente, **tiveram muitas ideias** que ao final foram se fechando em uma **construção um tanto quanto confusa**, onde se limitaram mais. Isso ocorreu, provavelmente, devido ao fato de terem ficado confusos durante a própria argumentação oral, sem terem muita certeza do que queriam formular e pelo receio em errarem ao deixarem um registro escrito.

- **Grupo V**

1. Raquel estava com fome. Comeu um biscoito. Quantos ela comeu no total? (Registro oral)
2. Se você ligar, forma o quê? (Registro oral)
3. Descubra qual será o próximo da lista. (Registro oral)
4. Siga a sequência. Ache a fórmula para a sequência. (Registro oral)
5. Ache a fórmula para essa sequência e continue ela por mais duas imagens. (Registro oral)

Problema final: Ache a fórmula que defina essa sequência e continue por mais duas imagens.

O grupo V também desejou formular um problema que **buscasse o padrão da sequência** e, por isso, os seus integrantes iniciaram a atividade investigando possíveis padrões. Ao encontrarem um padrão que consideraram *"aceitável"*, viram que o mesmo não era verdadeiro, já que o primeiro elemento era composto de apenas uma bolinha. Apenas o primeiro problema registrado oralmente não cumpriu o papel de busca de padrões e generalização.

Uma vez que não conseguiam determinar um padrão possível para a sequência, o grupo pareceu não aceitar que a sequência estivesse correta, não conseguindo entender porque se encontrava daquela forma. Assim que medíamos o debate e explicávamos que a sequência não poderia ser alterada, os alunos reiniciaram a busca por um novo padrão.

> **Aluno A – Grupo V:** Fala assim... Tá, esse aqui a gente ignora. Mas são 3 e 3. Só que se a gente fosse fazer o resultado, a do meio você não conta, porque ela repete. Aqui a mesma coisa. São 4 e 4, só que a do meio repete.
> **Aluno B – Grupo V:** Como assim a do meio repete? Porque essa aqui no caso repetiria.
> **Aluno A – Grupo V:** Não, to falando aqui, olha. Aqui ó... Nessa direção, nessa direção. A única que repete é a do meio. E aqui são 3. Aqui são 4. Aqui são 5. Dá para fazer alguma

coisa com isso, mas eu não sei criar um problema. Sei criar uma fórmula. Dá para fazer n vezes 2 menos 1.

Seguindo o raciocínio apresentado no diálogo, que a imagem abaixo ilustra, devemos observar que em cada figura, a quantidade de bolinhas por linha e coluna é sempre a mesma. Logo, se soubermos a quantidade n de bolinhas por fileira, basta multiplicarmos por 2 e subtrairmos 1, que vamos obter o número total de bolinhas em cada figura. O 1 que subtraímos corresponde à bolinha que se repete na contagem.

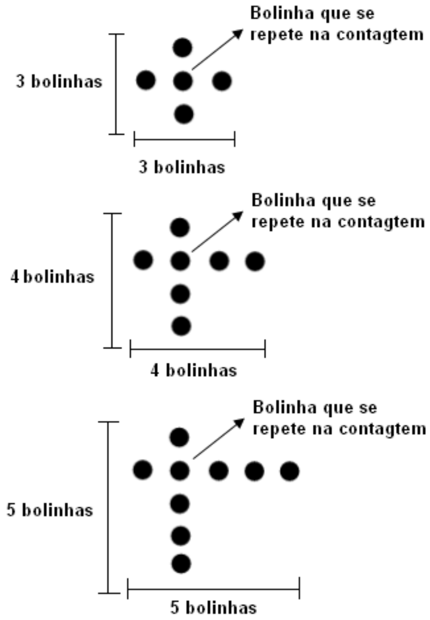


Figura 80: Raciocínio de um aluno do grupo V.

A fórmula apresentada expressaria uma sequência de números ímpares, se “ n ” indicasse o número que o elemento ocupa na sequência, mas o grupo indicou na resolução do problema final, que segue abaixo, que “ n ” indica a quantidade de bolinhas em cada fileira. A discussão entre a relação entre a quantidade de bolinhas em cada fileira e o número que o elemento ocupa na sequência não aconteceu.

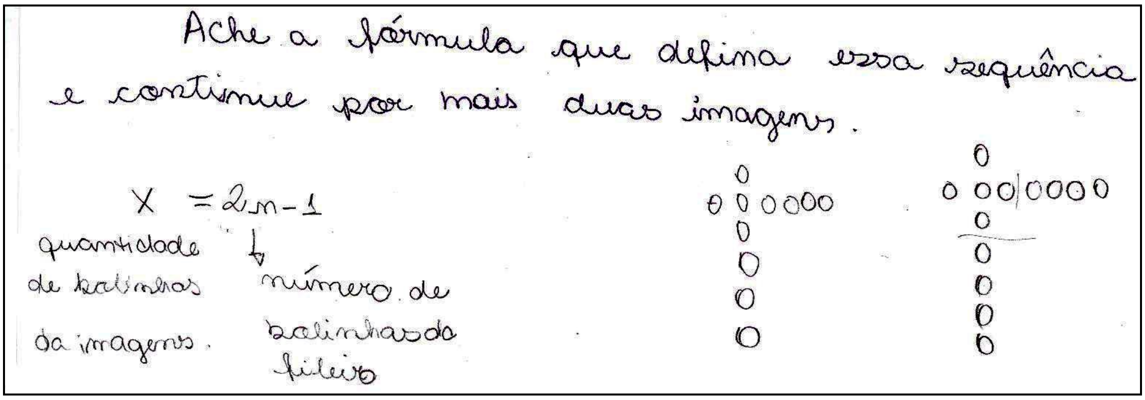


Figura 81: Problema final formulado pelo grupo V.

Apenas os 2 primeiros problemas orais não possuem ligação com o problema final formulado pelo grupo. Vemos que o enunciado do problema apresentado é completo e coerente com os 3 últimos registros orais realizados ao longo do processo de formulação, mostrando uma evolução em relação às etapas anteriores.

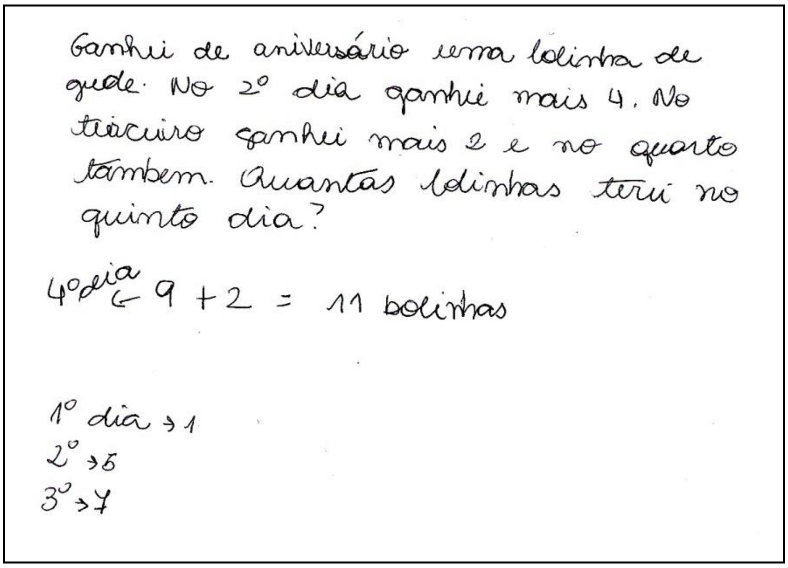
- **Grupo VI**

1. Ganhei uma bolinha em um dia. No segundo dia, ganhei mais 4 bolinhas. No terceiro dia ganhei mais 2 bolinhas. No dia 10, quantas bolinhas eu vou ter? No dia seguinte, quantas bolinhas eu vou ter? (Registro oral)
2. Qual é o total? (Registro oral)
3. Ganhei de aniversário uma bolinha de gude. No segundo dia ganhei mais 4. No terceiro ganhei mais 2 e no quarto também. Quantas bolinhas terei no quinto dia? (Registro oral)

Problema final: Ganhei no aniversário uma bolinha de gude. No 2° dia ganhei mais 4. No terceiro ganhei mais 2 e no quarto também. Quantas bolinhas terei no quinto dia?

O grupo VI também iniciou a atividade **buscando por um padrão**, no qual um aluno diz que é *“mais 5, mais 7, mais 9”* e que é instantaneamente corrigido por um colega que afirma que “não aumenta 5, mas que aumenta 2, na verdade”. Os integrantes verificam que do primeiro para o segundo elemento da sequência, há um acréscimo de 4 bolinhas, o que os deixou muito confusos.

Uma vez que não encontravam um padrão para a sequência, decidiram criar um *“problema bobo direcionado à classe de alfabetização”*, como eles mesmos mencionaram. O problema, apresentado abaixo **não necessita da sequência para ser resolvido**, já que a única relação entre a sequência e o problema são as quantidades de bolinhas.


Ganhei de aniversário uma bolinha de gude. No 2º dia ganhei mais 4. No terceiro ganhei mais 2 e no quarto tambem. Quantas bolinhas terei no quinto dia?

4º dia ← 9 + 2 = 11 bolinhas

1º dia → 1
2º → 5
3º → 7

Figura 82: Problema final formulado pelo grupo VI.

A ideia inicial do grupo, ou seja, a busca de um padrão, apareceu no registro oral e escrito, uma vez que para determinarmos a quantidade de bolinhas no quinto dia, precisamos ter identificado o padrão.

4.3 Categorização das respostas do estudo principal

Após analisarmos as respostas verificadas no estudo principal, ampliamos as 7 categorias obtidas no estudo piloto, tendo, agora, 9 categorias para classificar as estratégias utilizadas pelos grupos. São elas:

- **Categoria 1 (C1):** Utilização de desenhos

Consideramos que uma resposta pertence a essa categoria quando possui alguma representação sob a forma de um desenho, seja para guiar ao resultado, conferir o mesmo ou ser a própria resposta.

- **Categoria 2 (C2):** Justificativa por palavras

Nesta categoria, consideramos que um aluno argumentou se ele utilizou suas próprias palavras para justificar um raciocínio.

- **Categoria 3 (C3):** Exemplos como justificativa

As respostas em que o aluno utiliza um caso específico para chegar ao resultado.

- **Categoria 4 (C4):** Utilização de uma lei geral

Consideramos que o aluno utilizou uma fórmula se há um registro algébrico pela própria fórmula.

- **Categoria 5 (C5):** Reconhecimento da lei geral sem mostrar saber expressá-la algebricamente.

Alguns alunos utilizaram todos os passos que uma fórmula sugere, mas não escreveram a fórmula, ou se há o processo da lei geral somente com operações ou, até mesmo, justificativas por escrito. Estas respostas se encaixam nesta categoria.

- **Categoria 6 (C6):** Utilização de tabelas

Se encaixa nesta categoria a resposta que possuir um registro organizado em linhas e colunas.

- **Categoria 7 (C7):** Análise visual do padrão

Quando, na busca pelo padrão da sequência, há a análise visual de cada elemento da sequência, ou seja, a partir de como cada imagem aparece, são retiradas informações.

- **Categoria 8 (C8):** Verificação da fórmula encontrada

Após determinar uma fórmula, há a verificação da mesma para alguns casos particulares em que se possa conferir, por exemplo, através de um desenho.

- **Categoria 9 (C9):** Outros

Para esta categoria, consideramos apenas uma estratégia para a organização de dados que se distingui das demais, que está representada na imagem abaixo.

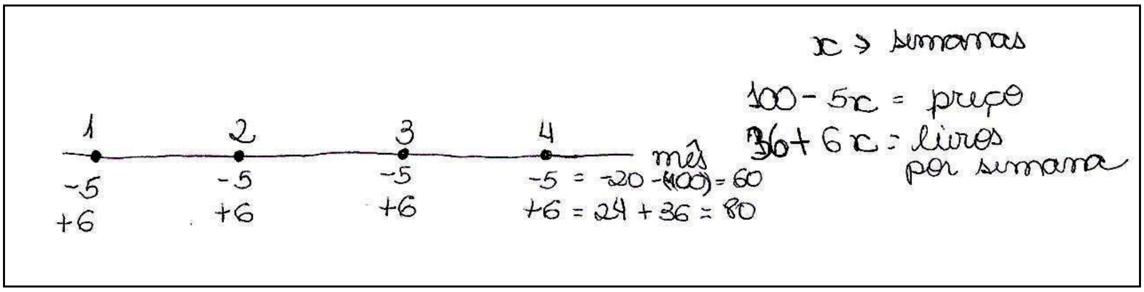


Figura 83: Resposta dada por um aluno do grupo VI para o item (c).

Da mesma maneira que a apresentada no estudo piloto, para identificarmos estratégias apresentadas oralmente , colocaremos “O” após a categoria. Por exemplo, C4 - O indica que apresentou oralmente a estratégia utilizada na categoria C4.

C1	Categoria 1: Utilização de desenhos
C2	Categoria 2: Justificativas por palavras
C3	Categoria 3: Exemplo como justificativa
C4	Categoria 4: Utilização de fórmula
C5	Categoria 5: Reconhecimento da fórmula, sem mostra saber enunciá-la corretamente
C6	Categoria 6: Utilização de tabelas
C7	Categoria 7: Análise Visual do padrão
C8	Categoria 8: Verificação da fórmula encontrada
C9	Categoria 9: Outros
-	Problema em branco

Tabela 11: Legenda das categorias.

Apresentaremos as atividades na ordem em que foram aplicadas e separadas por data de aplicação, já que na segunda houve a junção do grupo II com o grupo III, como explicado anteriormente.

4.3.1 Primeira aplicação

<table>
<tr><th rowspan="2">Grupo</th><th colspan="6">Atividade I – Os triângulos com palitos</th></tr>
<tr><th>Item a</th><th>Item b</th><th>Item c</th><th>Item d</th><th>Item e</th><th>Item f</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Grupo I</td><td>C1</td><td rowspan="2">C1</td><td>C2</td><td>C1</td><td rowspan="2">C4</td><td rowspan="2">C4</td></tr>
<tr><td>C5-O</td><td>C7 – O</td><td>C4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Grupo II</td><td rowspan="2">C1</td><td rowspan="2">C1</td><td>C1</td><td rowspan="2">C1</td><td>C4</td><td rowspan="2">C4</td></tr>
<tr><td>C2</td><td>C8 - O</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Grupo III</td><td rowspan="2">C1</td><td rowspan="2">C6</td><td>C1</td><td rowspan="2">C4</td><td>C2</td><td rowspan="2">C4</td></tr>
<tr><td>C2</td><td>C4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Grupo IV</td><td>C1</td><td rowspan="2">C1</td><td rowspan="2">C2</td><td>C1</td><td>C2</td><td rowspan="2">C4</td></tr>
<tr><td>C7 - O</td><td>C3</td><td>C5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Grupo V</td><td rowspan="3">C1</td><td rowspan="3">C1</td><td>C1</td><td>C1</td><td>C2</td><td rowspan="3">C4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C2</td><td rowspan="2">C3</td><td>C3</td></tr>
<tr><td>C8 - O</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Grupo VI</td><td rowspan="2">C1</td><td>C1</td><td>C2</td><td rowspan="2">C3</td><td rowspan="2">C4</td><td rowspan="2">C4</td></tr>
<tr><td>C3</td><td>C3</td></tr>
</table>

Tabela 12: Categorização das estratégias utilizadas na atividade I.

<table>
<tr><th rowspan="2">Grupo</th><th colspan="3">Atividade III – A cerca</th></tr>
<tr><th>Item a</th><th>Item b</th><th>Item c</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Grupo I</td><td>C7 - O</td><td rowspan="2">C4</td><td>C4</td></tr>
<tr><td>C8 – O</td><td>C3</td></tr>
<tr><td>Grupo II</td><td>C7 – O</td><td>C5</td><td>C4</td></tr>
<tr><td>Grupo III</td><td>C7 – O</td><td>C2</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Grupo IV</td><td rowspan="3">C7 – O</td><td rowspan="3">C5</td><td>C3</td></tr>
<tr><td>C4</td></tr>
<tr><td>C8 - O</td></tr>
<tr><td>Grupo V</td><td>C7 – O</td><td>C5</td><td>C4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Grupo VI</td><td rowspan="2">C7 - O</td><td>C1</td><td rowspan="2">C4</td></tr>
<tr><td>C3</td></tr>
</table>

Tabela 13: Categorização das estratégias utilizadas na atividade III.

4.3.2 Segunda aplicação

<table>
<tr><th rowspan="2">Grupo</th><th colspan="4">Atividade IV – Dobrando papéis</th></tr>
<tr><th>Item a</th><th>Item b</th><th>Item c</th><th>Item d</th></tr>
<tr><td>Grupo I</td><td>C5 - O</td><td>C2</td><td>C5</td><td>C4</td></tr>
<tr><td>Grupo II/III</td><td>C3</td><td>C2</td><td>C5</td><td>C4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Grupo IV</td><td rowspan="2">C2</td><td rowspan="2">C2</td><td rowspan="2">C6</td><td>C4</td></tr>
<tr><td>C8 - O</td></tr>
<tr><td>Grupo V</td><td>C2</td><td>C2</td><td>C5</td><td>C4</td></tr>
<tr><td>Grupo VI</td><td>C2</td><td>C2</td><td>C5</td><td>C4</td></tr>
</table>

Tabela 14: Categorização das estratégias utilizadas na atividade IV.

<table>
<tr><th rowspan="2">Grupo</th><th colspan="4">Atividade II – O preço dos livros</th></tr>
<tr><th>Item a</th><th>Item b</th><th>Item c</th><th>Item d</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Grupo I</td><td>C2</td><td rowspan="2">C2</td><td rowspan="2">C3</td><td rowspan="2">C2</td></tr>
<tr><td>C3</td></tr>
<tr><td>Grupo II</td><td>C6</td><td>C2</td><td>C3</td><td>C2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Grupo IV</td><td rowspan="3">C6</td><td rowspan="3">C2</td><td>C2</td><td rowspan="3">C2</td></tr>
<tr><td>C3</td></tr>
<tr><td>C4</td></tr>
<tr><td>Grupo V</td><td>C4</td><td>C2</td><td>C3</td><td>C2</td></tr>
<tr><td>Grupo VI</td><td>C3</td><td>C2</td><td>C9</td><td>C2</td></tr>
</table>

Tabela 15: Categorização das estratégias utilizadas na atividade II.

Atividade	Item	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	EB
I	A	6	-	-	-	1	-	1	-	-	-
	B	5	-	1	-	-	1	-	-	-	-
	C	3	6	1	-	-	-	1	-	-	-
	D	4	-	3	2	-	-	-	-	-	-
	E	-	3	1	4	1	-	-	2	-	-
	F	-	-	-	6	-	-	-	-	-	-
II	A	-	1	2	1	-	2	-	-	-	-
	B	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-
	C	-	1	4	1	-	-	-	-	1	-
	D	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-
III	A	-	-	-	-	-	-	6	1	-	-
	B	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-
	C	-	-	2	5	-	-	-	1	-	1
IV	A	-	2	1	-	1	-	-	-	-	-
	B	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-
	C	-	-	-	-	4	1	-	-	-	-
	D	-	-	-	5	-	-	-	1	-	-
Total	**-**	**19**	**24**	**16**	**30**	**8**	**4**	**8**	**5**	**1**	**1**

Tabela 16: Resumo da categorização das atividades.

A categoria mais utilizada no estudo principal, assim como no estudo piloto, foi a C4, utilização de uma lei geral. Solicitamos nas atividades que os alunos expressassem, através de uma fórmula, a situação ou padrão apresentado no problema, o que os levou a utilizar uma lei geral. Entretanto, observamos que a estratégia foi utilizada em outros itens, que não exigiam o uso da mesma. Muitos alunos se anteciparam e expressaram uma fórmula já nos primeiros itens. Embora sintam dificuldades de escrever algebricamente, notamos que este tende a ser o primeiro caminho para resolver um problema.

A categoria C1, utilização de desenhos, foi mais utilizada no estudo principal, aparecendo com frequência na atividade I – O triângulo com palitos, como vemos na tabela 1. Da mesma forma que no estudo piloto, os alunos desenharam esquemas para quantidades superiores a 50 palitos.

A categoria C2, justificativas por palavras, também foi mais utilizada no estudo principal, tanto para a Atividade I– O triângulo com palitos (tabela 12) quanto para a Atividade II – O preço dos livros (tabela 15). Verificamos que os alunos, assim como no estudo piloto, apresentaram dificuldades em escrever o que oralizaram.

Diferentemente do estudo piloto, a categoria C3, exemplos como justificativa, apareceu em todas as atividades, mas não isolada. Ou seja, como sinalizamos aos alunos que não adianta justificar que vale uma regra apresentando um exemplo, não utilizaram exemplos para verificar para um valor e depois generalizaram.

A utilização da categoria C5 foi menos expressiva em relação ao estudo piloto, já que estimulamos os alunos a escrever, em linguagem matemática, o que eles expressavam oralmente.

A utilização de tabelas, categoria C6, ocorreu poucas vezes, como mostra a tabela I, II e IV. Acreditamos que a utilização das tabelas ajudaria muito o reconhecimento do padrão e análise dos dados que foram extraídos do problema.

Em nosso estudo principal, duas novas categorias emergiram dos dados: C7 – análise visual do padrão e C8 – verificação da fórmula encontrada. Observamos que os alunos analisaram visualmente o padrão com maior frequência, no item (a) da Atividade III – A cerca, como mostra a tabela 13. Já a categoria 8, que muito se fundiu com a categoria 3, apareceu poucas vezes, como mostram as tabelas 12, 13 e 14, embora estimulássemos sempre a verificação da fórmula encontrada.

Em relação ao estudo piloto, observamos uma redução no número de questões deixadas em branco, sendo apenas uma em nosso estudo principal.

Considerações finais

Neste trabalho, objetivamos analisar as estratégias utilizadas por alunos do Ensino Fundamental em aulas utilizando resolução de problemas. Podemos dizer que atingimos nosso objetivo, uma vez que planejamos, discutimos e testamos uma sequência didática de atividades que possibilitou aos alunos realizarem atividades envolvendo generalização.

Investigamos as estratégias envolvidas na resolução de problemas matemáticos durante as nossas aplicações nos estudos piloto e final e nos propusemos a responder a algumas questões de pesquisa. A questão central, apresentada na Introdução, é:

Que tipos de estratégias orais e escritas transparecem em uma aula em que foi utilizada a metodologia de Ensino – Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, para o estudo de generalização de padrões?

Para responder tal questão, apresentamos, na Metodologia, três questões norteadoras:

1. Que estratégias, para resolver um problema, os alunos usam para generalizar?
2. Como se evidencia a capacidade de generalização dos alunos?
3. Que dificuldades apresentam nesse processo?

Retornaremos a elas, apresentando os elementos que esta pesquisa fornece para respondê-la.

1. Que estratégias, para resolver um problema, os alunos usam para generalizar?

As estratégias utilizadas para resolver um problema foram categorizadas tanto para o estudo piloto quanto para o estudo principal. As tabelas 9 e 16 apresentam um resumo para as estratégias utilizadas para os itens de cada problema.

Percebemos que a organização dos dados em uma tabela, a busca inicial por uma fórmula e a apresentação de desenhos foram as estratégias mais utilizadas durante as atividades. Vemos que os alunos se tornaram mais conscientes das estratégias utilizadas ao resolver problemas, uma vez que a maioria deles tentava aplicar o que já haviam aprendido na atividade anterior.

2. **Como se evidencia a capacidade de generalização dos alunos?**

A partir da análise das atividades, considerando tanto os registros orais como escritos, vemos que a capacidade de generalização do aluno não está limitada a determinar uma expressão que seja válida para "n", mas passa por estágios que vão desde identificar a existência de uma regularidade, expressar esta em linguagem natural, até chegar a uma fórmula para o caso geral e, por vezes, testar a fórmula encontrada para alguns casos.

3. **Que dificuldades apresentam nesse processo?**

As dúvidas que os alunos tiveram, tanto no estudo piloto quanto no final, foram equivalentes. Em ambas, os alunos mostravam entender os enunciados das atividades, embora alguns integrantes dos grupos necessitassem de uma releitura em conjunto, mas tinham dificuldades em expressar algebricamente a fórmula matemática.

Pontuamos que a pouca habilidade com algebrismos e conteúdos iniciais de álgebra foram alguns obstáculos para que os alunos pudessem generalizar. No geral, os alunos debatiam sobre qual notação usar, mas sem a preocupação em identificar o que cada variável representa. Ao longo das atividades, observamos que, provavelmente por incentivarmos, os alunos começaram a indicar a representação de cada variável.

- **Pontos de destaque**

Durante nosso estudo, percebemos que alguns pontos merecem destaque. São eles:

I. **Diferença entre o registro escrito e o oral.**

Observamos que o registro escrito representa uma parte muito pequena do raciocínio realizado durante as atividades. Através do registro oral, percebemos como os alunos organizam suas ideias e traçam caminhos muitas vezes mais criativos do que os apresentados nos blocos. Alguns alunos possuíram dificuldades em escrever e organizar seus raciocínios no papel, mas conseguiam verbalizar a resolução do problema.

De forma análoga, alguns alunos tinham dificuldades em escrever seus argumentos no bloco, mas conseguiam justificar e defender seus raciocínios para os outros integrantes do grupo. Em algumas situações, os alunos argumentavam oralmente, mas não conseguiam identificar em seu discurso o que correspondia à justificativa da questão. Nesses casos, nossa mediação foi fundamental, mas não suficiente, para que conseguissem escrever o que pensavam. Em um balanço, vemos que os alunos se apresentam mais criativos e com argumentos mais sólidos em seus registros orais do que nos escritos.

II. Trabalho cooperativo.

Defendemos, em nossa metodologia, o trabalho cooperativo, indo além da simples divisão da turma em grupos. Em nosso estudo piloto, percebemos que o trabalho, embora realizado em grupos, não chegou a atingir o que esperávamos em termos de cooperação entre os integrantes. Vimos, nesta etapa, muitas respostas individuais que eram compartilhadas com o grupo, mas não debatidas a ponto de chegarem a um consenso que gerasse uma troca real de conhecimento.

Com esta percepção do estudo piloto, demos muita atenção para o trabalho cooperativo em nosso estudo principal e acreditamos que evoluímos, embora não tenhamos atingido o que esperávamos nesta etapa. Para isso, estimulamos a troca de conhecimento, raciocínio e, até mesmo, dúvidas durante a realização das atividades, pedindo que os alunos repetissem para o grupo seus argumentos.

Vimos, assim, que no início da primeira aplicação do estudo principal, o trabalho cooperativo ainda ocorria de forma tímida, principalmente por existir a presença do gravador. Os alunos pareciam ter receio em errar. Com nosso estímulo, percebemos um avanço no decorrer da aula, consolidando o trabalho na última aula do estudo principal.

III. Reconhecimento de um padrão para generalizar.

Ao analisarmos a atividade I: os triângulos com palitos, tanto no estudo piloto quanto no principal, vimos que várias configurações, que não seguem uma regularidade, foram apresentadas pelos alunos. Percebemos que apresentar um elemento fora do padrão de uma sequência está atrelado ao não reconhecimento do próprio padrão, mas não necessariamente exclui a possibilidade do aluno reconhecer a necessidade da existência de uma regularidade para generalizar.

Nessa atividade I verificamos, com maior frequência, a apresentação de um elemento que não correspondia ao padrão da sequência, provavelmente por ter sido o primeiro contato dos alunos, durante a aplicação, com questões deste tipo. Nas atividade III: a cerca, e atividade IV: dobrando papéis, observamos que a primeira postura, na maioria dos grupos, foi a de investigar o padrão com a intenção de expressar uma fórmula, antecipadamente, para o primeiro item.

Na atividade II: o preço do livro, ao ser pedido que fosse determinado o preço do livro em uma semana qualquer (item (c)), os grupos entenderam que verificar a fórmula para um dia escolhido é, na verdade, apresentar o preço em uma semana qualquer. Essa ação unânime mostra que os grupos, inicialmente, não compreendiam o sentido de explicitar uma forma para "n", ou seja, qual o sentido, de fato, de generalizar.

Entretanto, durante a atividade de formulação de problemas, verificamos que a primeira ação de todos os alunos foi a de procurar um padrão para a sequência e uma fórmula que determinasse a regularidade. Ao não conseguirem determinar um padrão, que incluísse o primeiro elemento da sequência, viram que não poderiam determinar a fórmula, sem o reconhecimento da regularidade. Desta forma, depreendemos que reconheceram que há a necessidade de um padrão para que pudessem generalizar.

Houve alguns aspectos que contribuíram para o desenvolvimento da capacidade dos alunos em generalizar:

a) O papel do professor como mediador do conhecimento, ao questionar os alunos acerca das razões que os levaram a proceder daquele modo, conforme exposto em nossa metodologia de aplicação de atividades por Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2011, p. 83).

b) Descrição oral das mudanças entre as figuras, pois os ouvindo, pudemos auxiliá-los a perceber a mudança de um elemento para o outro na sequência, o que nos facilitou a mediação.

c) As diferentes formas de representar a sequência e organizar a informação, que contribuíram para uma melhor investigação da regularidade e determinar o padrão.

d) A necessidade de ampliarem o seu raciocínio para termos distantes, pois exigiu que determinassem a relação algébrica.

e) A necessidade de expressarem o seu raciocínio para valores de n em que não pudessem se valer mais da contagem.

Ao perceberem que deveriam prever como se comportariam os termos maiores na sequência, os alunos perceberam que seriam insuficientes apenas desenhos, por exemplo, para determiná-los. Isso permitiu que investigassem o padrão em busca de uma relação que valesse para qualquer elemento da sequência.

As estratégias de generalização que verificamos no início das atividades, consistiam em contagem e estratégias recursivas, ou seja, os alunos conseguiam determinar o termo seguinte com base no anterior. Ao final das atividades, os alunos já procuravam estabelecer uma relação direta entre a variável dependente e independente.

IV. Formulação de problemas

Assim como exposto em nosso referencial teórico, English (1997 apud GONTIJO, 2006) considera que a formulação de problemas envolve a geração de novos problemas e questões para explorar uma dada situação, assim como envolve a reformulação de um problema durante o seu processo de resolução. Na aplicação da atividade de formulação, verificamos que novos problemas foram criados para explorar a situação, assim como gradativamente foram sendo reformulados os problemas iniciais.

Observamos que, exceto no grupo IV, os problemas formulados no estudo principal tiveram como intenção inicial generalizar, o que se mostrou de acordo com os exercícios que fizeram anteriormente a essa atividade. O fato da regularidade da sequência passar a se expressar a partir do segundo elemento da sequência foi um elemento dificultador para os alunos. Poderiam ter elaborado uma questão que envolvesse a observação deste fato, que foi percebido por um dos grupos. Alternativamente, poderiam ter indagado que desenho deveria ser feito para que o primeiro elemento seguisse o padrão dos demais. Entretanto, olhando em retrospectiva, isto exige também uma maturidade matemática mais avançada e deveríamos então ter interferido de outra forma.

Vimos que os alunos compreenderam a estrutura necessária para compor um problema, por exemplo, reconhecendo a necessidade de dados suficientes e de uma pergunta para que o problema tivesse solução. Observamos também que interpretaram a situação por diversos caminhos, por exemplo, a situação geométrica, a expressão de uma fórmula ou, no caso de não consegui-la, um problema mais simples.

Muitos alunos simplificaram o problema final pela dificuldade na transposição da fala para a escrita e, também, pelo receio em errar. Neste sentido, percebemos que devemos aprender a ouvir o que os alunos falam para podermos ajudá-los a transcrever suas ideias e seus argumentos.

- **Futuras pesquisas**

Acreditamos que nossa pesquisa dá suporte a professores da educação básica, uma vez que poderão repensar suas práticas, promover o trabalho cooperativo através dos problemas apresentados ou, até mesmo, elaborar material próprio baseados em nossas conclusões e das teorias que embasam essa dissertação. Por outro lado, considerando o papel do professor que expomos em nossa metodologia, este trabalho também poderá apoiar a formação de professores.

Entendemos que esta dissertação é apenas parte de uma pesquisa que poderá se aprofundar em questões que, embora tenhamos abordado, não foram nosso foco principal, como a formulação de problemas, as contribuições do trabalho cooperativo e a função do professor como mediador, aquele que pode auxiliar o aluno a desenvolver e reconhecer as próprias estratégias.

Referências bibliográficas

AZEVEDO, E. **Ensino-Aprendizagem das Equações Algébricas através da Resolução de Problemas**. UNESP. Rio Claro. 2002.

ALVARENGA, D.; VALE, I. A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Quadrante**, Portugal, vol. 16, n°.1, p. 27 - 55, 2007.

BRANCO, N; PONTE, J. Articulação entre pedagogia e conteúdo na formação inicial de professores dos primeiros anos: Uma experiência em Álgebra. In: Seminário de Práticas Profissionais dos Professores de Matemática,2013. **Anais...** Lisboa. 2013, p 8 -9.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais.** Matemática: 3º e 4º ciclo do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

Competências e Habilidades do ENEM. Disponível em: <http://www.infoenem.com.br/competencias-para-matematica-e-suas-tecnologias/>. Acessado em 24 de fevereiro de 2013, às 12h48min.

CORREIA, P.; FERNANDES, J. Estratégias usadas por alunos do 9° ano de escolaridade na resolução de problemas em Combinatória. **Quadrante**, Portugal, vol. 16, n°.2, p. 51 - 79, 2007.

ENGLISH, L. D. The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, v. 34, p. 183-217, 1997 apud GONTIJO, C. Resolução e formulação de problemas: caminhos para o desenvolvimento da criatividade em matemática. In: IV Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006. **Anais...** Recife. 2006, p 8-9.

GONTIJO, C. Resolução e formulação de problemas: caminhos para o desenvolvimento da criatividade em matemática. In: IV Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006. **Anais...** Recife. 2006, p.8-9.

GRAÇA, Margarida. Avaliação da resolução de problemas: Que relação entre as concepções e as práticas lectivas dos professores?. **Quadrante**, Portugal, vol. 12, n°.1, p. 53 - 73, 2003.

HOFFMAN, B; SANTOS-WAGNER,V. A exploração da escrita, leitura e oralidade em matemática. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011. **Anais...** Recife. 2011, p. 3.

LESTER, F. Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno?. **Boletim GEPEM**, n°. 60, p. 147 - 162, 2012.

__________. Thoughts About Research On Mathematical Problem – Solving Instruction. **The Mathematics Enthusiast**, Vol. 10, nos. 1&2, p. 245 – 278, 2013.

MEDEIROS, K.; SANTOS, A. Uma experiência didáctica com a formulação de problemas matemáticos. **Zetetiké**, vol. 15, n°.28, p. 87 - 118, 2007.

NACARATO, A. et al. Modalidadades de pesquisas em educação matemática: um mapeamento de estudos qualitativos do gt-19 da **ANPED**. 2005

ONUCHIC, L.; ALLEVATO, N. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, São Paulo, n. 41, v.25, p.73 - 98, 2011 apud ONUCHIC, L. NOGUTI, F. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na transição dos Ensinos Fundamental e Médio para o Ensino Superior. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013. **Anais...** Curitiba, 2013

ONUCHIC, L. NOGUTI, F. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na transição dos Ensinos Fundamental e Médio para o Ensino Superior. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013. **Anais...** Curitiba, 2013

ONUCHIC, L. Ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: **BICUDO**, V (Org) pesquisa em educação matemática concepções e perspectivas. UNESP: São Paulo, p. 199 – 218, 1999.

PÓLYA, G. Dez Mandamentos para Professores. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n.10, p. 2-10, 1987

________. **A arte de resolver problemas**. Interciência. Rio de Janeiro. 1977.

SANTOS, V. **Avaliação de aprendizagens e raciocínio em matemática: métodos e alternativas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ. 1997 apud HOFFMAN, B; SANTOS-WAGNER,V. A exploração da escrita, leitura e oralidade em matemática. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011. **Anais...** Recife. 2011, p. 3.

SANTOS-WAGNER,V. Resolução de problemas em matemática: Uma abordagem no processo educativo. **Boletim GEPEM**, Brasil, n° 53, p. 43 – 74, 2008.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In: D. Grouws (Ed.), **Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning**. p. 334-370. New York: MacMillan, 1992.

SCHROEDER, T.. e LESTER, F. Understanding mathematics via problem solving. In P. Trafton e A. Shulte (Ed.), **New directions for elementary school mathematics** (pp.31-42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 1989 apud LESTER, F. Thoughts About Research On Mathematical Problem – Solving Instruction. **The Mathematics Enthusiast**, Vol. 10, nos. 1&2, p. 245 – 278, 2013.

STANIC, G.; KILPATRICK, J. Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo da matemática. **In The teaching and assessment of mathematical problem solving**, de R. I. Charles e E. A. Silver (Eds.), Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1989.

TINOCO, L. **Construindo o conceito de Função**. Projeto Fundão. UFRJ/ IM, Rio de Janeiro. 2009.

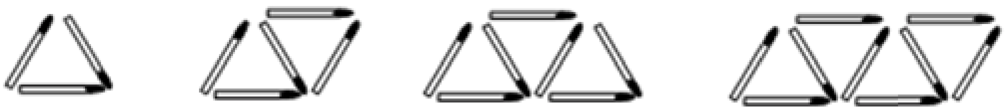
VALÉRIO, N. Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1° ciclo. **Quadrante**, Portugal, vol. 14, n°.1, p. 37 - 65, 2005.

Anexo 1

ATIVIDADES APLICADAS NO ESTUDO PRINCIPAL

Atividade I – Os triângulos com palitos.

a) Com os palitos de fósforo, construa um triângulo. Continue a formar outros triângulos como na figura:



b) Escolha uma quantidade de palitos e descubra quantos triângulos podem ser formados. Experimente para várias quantidades, pequenas e muito grandes, pares e ímpares de palitos.

c) Para quantidades diferentes de palitos conseguimos formar quantidades iguais de triângulos? Argumente.

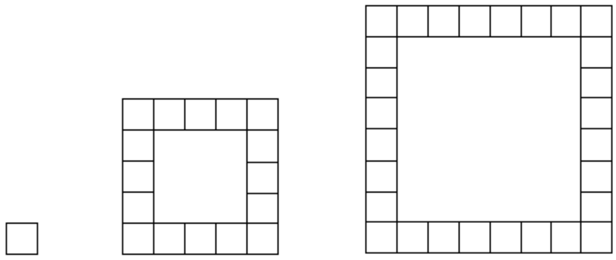
d) Desta vez, escolha a quantidade de triângulos e investigue o número de palitos necessários para formar esta quantidade.

e) Como você explicaria para uma pessoa o que faria para determinar a quantidade de palitos necessários para construir certo número de triângulos?

f) Escreva uma fórmula matemática que relacione o número de palitos com a quantidade de triângulos.

Atividade II – A cerca.

Na figura abaixo estão representadas “cercas” quadradas formadas por quadradinhos 1x1.



a) Encontre o número de quadradinhos necessários para construir uma cerca do mesmo tipo, com as dimensões:

- 5x5
- 8x8
- 10x10
- 12x12
- 100x100
- 1000x1000

b) Explique como você encontrou estes números.

c) Escreva em linguagem matemática o número de quadradinhos necessários para construir uma cerca quadrada qualquer desse tipo.

Atividade II – O preço do livro.

Uma livraria recebe certo livro por um custo de R$40,00 por exemplar. O gerente vendeu inicialmente 36 desses livros por semana a R$ 100,00 cada. Sabendo que, se reduzisse o preço de cada livro de R$ 5,00 por semana, venderia mais 6 livros por semana, resolveu experimentar e foi reduzindo o preço do livro de R$5,00 a cada semana.

a) Investigue como varia o preço ao longo das semanas.

b) Pelo que você observou, valeria a pena o gerente continuar a diminuir o preço de venda do livro? Argumente.

c) Considerando uma semana qualquer, expresse o preço de venda do livro, o lucro total e o número de livros vendidos, nessa semana.

d) Imagine que você é o gerente desta livraria. No que o conhecimento destas expressões te auxiliaria a tomar decisões?

Atividade IV – Dobrando papéis.

Atividade IV – Dobrando papéis.

a) Pegue uma folha de papel e dobre-a ao meio. Você encontrou quantos quadriláteros?

b) Retome a folha dobrada e dobre-a novamente. O que você observou?

c) Se você repetir o processo 10 vezes, quantos quadriláteros você obterá?

d) Como você escreveria matematicamente o número de quadriláteros que você obterá ao realizar n dobras?

Formulando problemas

Analise a imagem abaixo e, a partir dela, formule um problema.