UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO - UFRJ

ALEXANDRE MARINHO

AS FRAÇÕES NOS LIVROS DIDÁTICOS DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

RIO DE JANEIRO - RJ
2013

ALEXANDRE MARINHO

AS FRAÇÕES NOS LIVROS DIDÁTICOS DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao corpo docente do programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de ***Mestre em Ensino de Matemática****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Mônica Mandarino****.*

RIO DE JANEIRO - RJ
2013

M338f Marinho, Alexandre

As frações nos livros didáticos do sexto ano do ensino fundamental / Alexandre Marinho. -- Rio de Janeiro, 2013.

136 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Mônica Cerbella Freire Mandarino

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Ensino em Matemática,2013.

Referências: f. 133-136

1. Matemática - Livros didáticos. 2.Matemática (Ensino fundamental) - Tese. I. Mandarino, Mônia Cerbella Freire (Orient.). II.Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Ensino em Matemática. III. Título.

CDD 510.7

RIO DE JANEIRO - RJ
2013

AS FRAÇÕES NOS LIVROS DIDÁTICOS DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Alexandre Marinho

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Profa. Dra. Mônica Cerbella Freire Mandarino – UNIRIO
Presidente, Orientador

Prof. Dr. Luiz Carlos Guimarães – IM/UFRJ

Profa. Dra. Neide Parracho Sant'Anna – C. PedroII

Profa. Dra. Lilian Nasser – IM/UFRJ

RIO DE JANEIRO - RJ
2013

A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.

Albert Einstein

Dedicatória

Dedico este trabalho ao meu pai (*In memoriam*) e a minha mãe, que sempre me incentivaram a estudar.

Agradecimentos

Agradeço

a Deus por ter me sustentado nos momentos mais difíceis.

à minha professora orientadora – Prª Drª Mônica Mandarino, por ter me conduzido habilmente na construção deste trabalho e pela motivação.

a todos os colegas do mestrado que muito me ajudaram nessa jornada. Em especial a amizade e parceria de *Alicia, Raquel, Juliana, Chaves, Felipe e Leonardo.*

a todos os professores do mestrado que muito contribuíram na minha formação acadêmica. Em especial, ao apoio dos professores *Luiz Carlos Guimarães, Marco Cabral, Claudia Segadas, Nei Rocha, Oswaldo Vernet* e *Gerard Grimberg.*

Agradeço,

em especial, à minha mãe e ao meu pai (*in memoriam*) por toda preocupação que tiveram com minha educação.

as minhas irmãs e sobrinhos.

aos meus familiares e amigos que me apoiaram e compartilharam momentos de alegrias e angústias durante a consecução deste trabalho.

Resumo

De acordo com alguns teóricos (WU, 1998; BEHR, 1988, etc.), o ensino das frações na escola é complexo e de extrema importância na vida do aluno, pois o ajudará a desenvolver sua capacidade intelectual, considerada fator primordial para que o mesmo avance nos estudos e exerça sua cidadania. Com base no baixo rendimento dos alunos nas avaliações do Saeb (Sistema de Avaliação da Educação Básica), Prova Brasil e Projeto Melhoria do Ensino Médio, em relação às questões que envolvem o conceito de fração, resolvemos investigar como o conhecimento sobre este assunto chega às escolas por meio de material escrito. Para isto, resolvemos analisar os dez livros didáticos do sexto ano, aprovados pelo PNLD 2011. Como o assunto sobre as frações é extenso, nos propusemos a responder a seguinte questão: Que tipo de abordagem é privilegiada na introdução ao conceito de fração nos livros didáticos do sexto ano do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2011? Nosso objetivo foi traçar um diagnóstico de como os autores de livros didáticos introduzem o conceito de fração nas primeiras páginas do capítulo ou unidade. Depois, fizemos uma análise de algumas atividades. Nosso trabalho está fundamentado nas propostas de ensino dos seguintes pesquisadores: Santos & Rezende (2002), Wu (1998), Nunes & Bryant (1997) e também nos autores dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN,1998). Como nossos objetos de pesquisa eram livros, o procedimento metodológico utilizado foi a análise de conteúdos. Os resultados desse estudo mostram que, de modo geral, a abordagem utilizada nos livros para introduzir o conceito de fração se apoia fundamentalmente no modelo parte-todo e se desenvolve por meio de exemplos como se estes fossem suficientes para garantir a aquisição do conceito de fração.

Palavras-chave: fração; livro didático; conceito; contexto.

Abstract

According to some theorist (WU, 1998; BEHR, 1988, etc.), the teaching of fractions is schools is complex and extremely important in the lives of the students, therefore, will help to develop their intellectual capacity, considered as a primary factor for the same advances in the studies and exercise their citizenship. Based on the low student performance on the assessments of Saeb (Evaluation System of Basic Education), Proof Brazil and High School Improvement Project, in relation to issues surrounding the concept of fraction, we decided to investigate how knowledge about this matter comes to schools through written material. For this, we decided to analyze the ten textbooks sixth year, approved by PNLD 2011. As the subject of fractions is extensive, we set out to answer the following question: What kind of approach is privileged in introducing the concept of fraction in the textbooks of the sixth grade of elementary school, approved by the National Textbook – PNLD 2011? Our goal was to establish a diagnosis of how textbook authors introduce the concept of fraction in the first pages of the chapter or unit. Then we did an analysis of same activities. Our work is grounded in the teaching of the proposals following researchers: Santos & Rezende (2002); Wu (1998); Nunes & Bryant (1997) and also the authors of National Curricular Parameters (PCN,1998). As our research objects were books, the approach used was the content analysis. The results of this study show that, in general, the approach used in the books to introduce the concept of fraction is based mainly on part-whole model and develops through examples as if they were sufficient to ensure the acquisition of the concept of fraction.

Keywords: fraction, textbook, concept, context.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas e Quadros

SUMÁRIO

Introdução

Ao longo dos anos, a comunidade de Educação Matemática tem se esforçado para produzir trabalhos voltados para o ensino das frações. Muitos educadores matemáticos consideram o ensino das frações um assunto delicado a ser tratado no Ensino Fundamental, dos seis aos quatorze anos, pelo fato de que sua correta definição formal, por classe de equivalência, é imprópria ao ensino nesta fase de escolarização.

Embora as pesquisas tenham avançado e novas propostas curriculares tenham surgido, em especial, com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o ensino das frações continua sendo um grande obstáculo a ser superado na Educação Básica. Qualquer professor que ensina matemática já disse ou ouviu frases do tipo: “os alunos não sabem o que é fração”, “os alunos não sabem operar com as frações”. E quais são os verdadeiros motivos que levam os alunos a terem dificuldades para entender o conceito de fração?

Ao analisarmos alguns dos resultados de avaliações em larga escala (SAEB e PROVA BRASIL), confirma-se que existe uma quantidade considerável de alunos que não sabe resolver problemas simples que envolvem o conceito de fração.

O SAEB foi institucionalizado em 1995, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), sob a coordenação da Diretoria de Avaliação Básica (DAEB). O objetivo do SAEB é coletar dados sobre alunos, professores, diretores de escolas públicas e privadas em todo o Brasil. O SAEB foi a primeira iniciativa governamental para conhecer, mesmo que pontualmente, a proficiência em Matemática e Língua Portuguesa dos alunos do sistema educacional brasileiro.

A cada dois anos o SAEB é realizado com o propósito de avaliar apenas uma amostra representativa dos alunos matriculados nos anos finais do primeiro e segundo ciclo do Ensino Fundamental e no final do Ensino Médio, de escolas públicas e privadas, nas áreas de matemática e língua portuguesa. Por meio dele, busca-se conhecer a qualidade dos sistemas educacionais de todo o Brasil.

Com o passar do tempo, foi visto que embora o SAEB fosse um instrumento importante para os gestores das redes municipais e estaduais, bem como para o Ministério da Educação (MEC), para formular políticas públicas educacionais, seu impacto na escola era muito pequeno, ou seja, ele era insuficiente para que as escolas se vissem retratadas em tal avaliação. Além disso, para a formulação de políticas públicas se fazia necessário uma análise mais detalhada dos sistemas públicos, que fosse capaz de fornecer dados a cada município e escola participante. Com este objetivo, nasce, em 2005, a Prova Brasil. Em 2007, a Prova Brasil passou a ser realizada em conjunto com o SAEB pelo fato de serem formuladas com o uso da mesma metodologia.

Apresentamos, a seguir, cinco questões que envolvem o conceito de fração e discutimos seus resultados. Cada uma delas fez parte de avaliações de grande porte, a saber: SAEB, Prova Brasil e Projeto Melhoria do Ensino Médio - prova elaborada pelo IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada). Nosso objetivo é apresentar as dificuldades que os alunos enfrentam na aprendizagem das frações, com base nos resultados apresentados na análise dos dados dessas avaliações.

SAEB 5° ano do Ensino Fundamental: Números e Operações (BRASIL, 2001, p.29-30)

> Descritor 24 – Identificar fração como representação que pode estar associada a "diferentes significados".

Segundo o relatório do SAEB, as questões que envolvem esse descritor apontam uma variação de acertos entre 35% e 80%. Vejamos dois exemplos:

Exemplo 1 do SAEB: O desenho representa uma torta dividida em partes iguais. Ana comeu a parte escura. Que fração da torta Ana comeu?

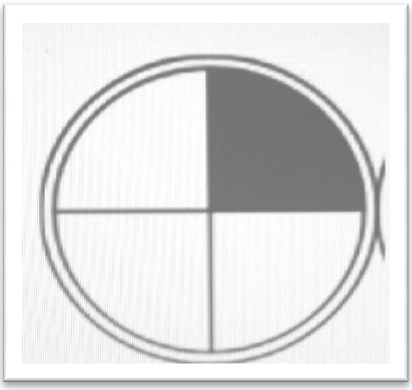


Figura 1 – Representação gráfica do Exemplo 1 do SAEB

A) 1/4 B) 3/4 C) 3/3 D) 4/3

Tabela 1 – Percentual de respostas do Exemplo 1 do SAEB

A	B	C	D
80%	**8%**	**4%**	**4%**

Observando a Tabela 1, verificamos que para este exemplo o percentual atingiu o limite superior mencionado no relatório (Brasil, 2011). Esta questão exige, de fato, a simples associação de uma representação tipicamente escolar de um inteiro dividido em partes iguais com a fração que a representa. Supomos que o índice de acertos se deve a valorização deste tipo de atividade e deste tipo de representação das frações pelas escolas, em especial pelos livros didáticos, nosso objeto de análise.

Exemplo 2 do SAEB: Para fazer uma horta, Marcelo dividiu um terreno em 7 partes iguais. Em cada uma das partes, ele plantará um tipo de semente. Que fração representará cada uma das partes dessa horta?

A) 1/7 B) 2/7 C) 7/1 D) 7/7

Tabela 2 – Percentual de respostas do Exemplo 2 do SAEB

A	B	C	D
35%	**10%**	**14%**	**33%**

Observamos na Tabela 2 que, apenas 35% dos alunos do quinto ano do Ensino Fundamental (antiga quarta série) responderam esta questão corretamente. O que difere esta questão da anterior é a falta de uma representação gráfica como apoio. Ambas as questões exigem apenas a notação de frações de numeradores unitários e denominadores menores do que dez. No entanto, os alunos evidenciaram maior dificuldade de interpretação quando a identificação da fração depende da leitura do enunciado sem apoio visual. Mais uma vez, inferimos que tal resultado pode estar associado com as ênfases adotadas no ensino deste tópico nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Dos alunos que terminaram o quinto ano do Ensino Fundamental, segundo o relatório de Matemática do SAEB – 2001, apenas 19,04% adquiriram conhecimentos básicos de Matemática; 28,64% adquiriram habilidades mais estruturadas para o término do quinto ano; e 52,32% adquiriram habilidades elementares, isto é, sabiam muito pouco do conteúdo de Matemática necessário para progredir no ano seguinte. Estes dados evidenciam uma situação muito crítica do primeiro segmento do Ensino Fundamental. Menos de 30% dos alunos demonstraram ter apreendido o conhecimento necessário ao ano em que se encontravam.

Prova Brasil (2009) - 5º ano do Ensino Fundamental: Números e Operações (Brasil, 2011, p.142-145)

> Descritor 24 – Identificar fração como representação que pode estar associada a “diferentes significados”.
> Descritor 22 – Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica.

Exemplo 1 da Prova Brasil: A figura abaixo representa uma figura dividida em partes iguais. A parte pintada de preto corresponde a que fração da figura?

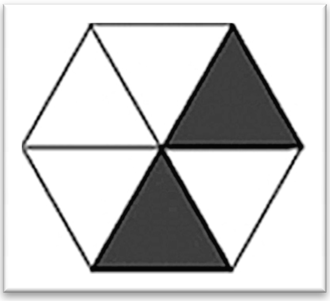


Figura 2 – Representação gráfica do Exemplo 1 da Prova Brasil

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{2}{6}$ D) $\frac{6}{2}$

Tabela 3 – Percentual de respostas do Exemplo 1 da Prova Brasil

A	B	C	D
18%	7%	53%	18%

De acordo com o resultado apresentado, na Tabela 3, verificamos que pouco mais da metade dos alunos mostrou dominar a habilidade desejada. Observa-se que um percentual significativo (18%) dos alunos assinalou a alternativa “D”, invertendo o numerador e o numerador. O mesmo índice foi o dos que assinalaram a alternativa A, o que é preocupante tendo em vista a suposição de que a ideia de metade e sua representação $\frac{1}{2}$ seriam as mais conhecidas.

Exemplo 2 da Prova Brasil: Em uma maratona, os corredores tinham que percorrer 3 km, entre uma escola e uma igreja. Joaquim já percorreu 2,7 km, João percorreu 1,9 km, Marcos percorreu 2,4 km e Mateus percorreu 1,5 km.

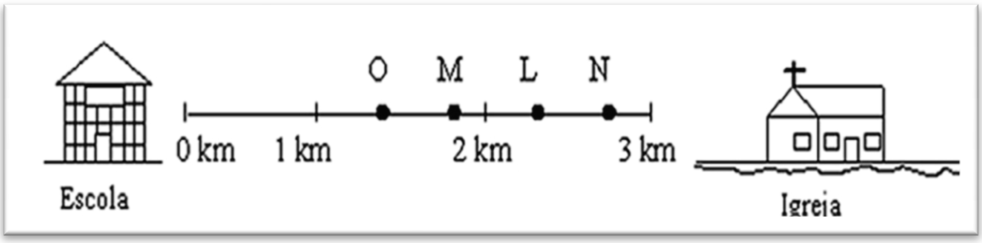


Figura 3 – Representação gráfica do Exemplo 2 da Prova Brasil

Qual é o corredor que está representado pela letra L?

A) Mateus B) Marcos C) João D) Joaquim

Tabela 4 – Percentual de respostas do Exemplo 2 da Prova Brasil

A	B	C	D
11%	**40%**	**13%**	**34%**

Verifica-se na Tabela 4 que 40% dos alunos do universo pesquisado mostraram dominar a habilidade desejada. Um percentual considerável de 34% marcou a opção **D**. Isto coloca em evidência que talvez tais alunos percebam que o número 2,7 se localiza à direta do número 2, porém, não souberam diferenciar as posições de 2,7 e 2,4. Um percentual de 11% marcou a opção **A** e 13% a opção **C**, demonstrando que não compreendem que os números 1,5 e 1,9 estão à esquerda do número 2 na reta numérica.

Com exceção da última questão, dentre as usadas como exemplos até aqui, o conceito de fração envolvido esta associado à relação parte-todo. Segundo Hiebert & Behr (1988), o primeiro contato dos alunos com as frações ocorre por meio de situações que envolvem a relação parte-todo, em que o novo símbolo (fração ou decimal) representa parte de uma unidade que foi dividida em partes iguais.

Projeto Melhoria do Ensino Médio - Avaliação promovida pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)

A questão a seguir foi discutida no Programa de Aperfeiçoamento para Professores do Ensino Médio, realizado pelo IMPA em 24 de janeiro de 2012, durante a aula do professor Paulo Cezar Pinto de Carvalho[1]. O tema desta aula era: Números Reais.

Exemplo 1 - IMPA: Qual é a fração representada pelo ponto **P** na reta numerada?

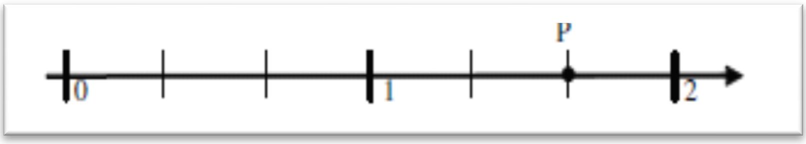


Figura 4 – Representação gráfica do Exemplo 1 do IMPA

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) $\frac{3}{2}$

Segundo Carvalho, tal questão foi inserida numa avaliação promovida pelo IMPA que foi aplicada a aproximadamente mil alunos das três séries do Ensino Médio do Estado do Rio de Janeiro. Carvalho informou que o índice de acerto desta questão foi de 16%, sendo a letra (A) a opção mais assinalada pelos alunos. Consideramos que a escolha da opção A pode ser resultado da interpretação de fração restrita à ideia de parte-todo. Nesta abordagem, as frações estudadas são quase sempre menores do que 1. O baixo índice de acerto nesta questão pode também estar associado ao fato do estudo das frações na reta numérica ser pouco valorizado no Ensino Fundamental, como buscaremos verificar nesta pesquisa em relação ao livro didático.

[1] Paulo Cezar Pinto de Carvalho é pesquisador do IMPA na área de computação gráfica. É um matemático envolvido com ensino que nos meses de julho e janeiro ministra aulas para professores que atuam na Educação Básica. Uma discussão da questão trazida como exemplo neste texto, pode ser encontrada em vídeo disponível em: http://video.impa.br/index. php?page=janeiro-de-2012, acessado em 27/11/2012.

Estes dados colocam em evidência uma situação muito preocupante no que diz respeito ao ensino das frações na Educação Básica. Com base nesses resultados, várias indagações foram surgindo como motivação para nossa pesquisa. Dentre elas, destacamos:

- Qual abordagem é mais utilizada para o ensino das frações no Ensino Fundamental?
- Qual seria uma abordagem eficiente para o ensino das frações no Ensino Fundamental?

Com tais indagações em mente, iniciamos o levantamento bibliográfico sobre o tema: ensino e aprendizagem de frações. Nesta fase foi possível observar que, apesar de ainda se encontrar em quantidade inferior às pesquisas sobre o ensino e aprendizagem dos números naturais e inteiros, há vários pesquisadores preocupados com a complexidade em relação ao ensino das frações.

Nossas leituras e a necessidade de delimitar o tema e a investigação a ser realizada nos levaram a um novo tipo de análise das pesquisas encontradas. Como as questões iniciais diziam respeito à tentativa de identificar motivos de dificuldade e as abordagens que vêm sendo mais adotadas, decidimos analisar livros didáticos. Afinal, se queremos um ensino-aprendizagem significativo a cerca do conceito de fração, devemos considerar a maneira como este conhecimento pode chegar ao aluno por meio dos livros didáticos.

Na tomada da decisão, três aspectos foram de grande peso. Primeiro reconhecer a importância do papel do livro didático nas salas de aula brasileiras. Em segundo lugar, a busca de contribuir para o campo com um trabalho ainda não realizado, pelo menos nos últimos anos, já que nosso levantamento evidenciou que não há dados relativos à análise do estudo de frações nas obras disponíveis no Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), portanto, obras aprovadas em processo de avaliação. O terceiro e último aspecto que influenciou tal escolha foi a participação nas atividades de pesquisa da professora Mônica Mandarino, minha orientadora desta pesquisa. Sua atuação na coordenação dos PNLD de Matemática há cinco anos e, antes disso como parecerista nas avaliações, tem muito a contribuir para a consecução deste trabalho.

Assim, as questões apontadas se aglutinaram em apenas uma questão, apesar de ainda bastante ampla:

- Qual a abordagem que os livros didáticos do segundo segmento do Ensino Fundamental adotam no trabalho com frações?

Obviamente, para responder a esta questão, nossos estudos sobre o campo dos números racionais continuaram a se ampliar. Ao mesmo tempo os levantamentos iniciais do currículo e dos primeiros livros didáticos a que tivemos acesso evidenciaram a necessidade de melhor delimitar a questão de pesquisa. Então, resolvemos responder a seguinte pergunta:

- Que tipo de abordagem é privilegiada na introdução ao conceito de fração nos livros didáticos do sexto ano do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2011?

Para isto, a análise foi realizada em dez livros do sexto ano das dez coleções aprovadas no PNLD 2011. A partir de então, buscamos traçar um diagnóstico de como os autores de livros didáticos introduzem o conceito de fração no sexto ano, como também buscamos investigar os recursos utilizados para promover a aquisição do conceito desse novo número, considerado como uma das ideias mais complexas e importantes a serem tratadas nos primeiros anos de escolarização (Behr *et al*, 1983).

Listamos, a seguir, os seguintes objetivos específicos:

- Analisar a abordagem que os livros apresentam para introduzir o conceito de fração.
- Mapear as atividades que envolvem o conceito de fração em capítulos ou unidades específicos.

- Analisar o tipo de contexto[2] nas atividades, contínuo ou discreto.
- Analisar algumas atividades que os livros apresentam para trabalhar o conceito de fração em contextos que envolvem: área, comprimento, volume, massa, tempo e coleções.
- Investigar quando e como a fração é definida.
- Investigar os tipos de recursos usados como apoio no processo de conceituação de fração.

Descrevemos, a seguir, a estrutura de nossa dissertação.

Na presente introdução, mencionamos a problemática levantada pelas avaliações de grande porte e introduzimos o objeto de pesquisa para o leitor.

No primeiro capítulo, apresentamos nosso levantamento bibliográfico a respeito do ensino de fração. Privilegiamos apresentar as propostas de ensino de Wu (1998), PCN (1998) e Santos & Rezende (2002).

No segundo capítulo, apresentamos o Programa Nacional do Livro Didático – PNLD. Fizemos um levantamento sobre o livro didático no Brasil e depois apresentamos um breve histórico do PNLD de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental.

Apresentamos no terceiro capítulo o percurso metodológico da pesquisa, direcionado a perspectiva de encontrar, a *posteriori,* nos objetos de estudo, respostas para a questão de pesquisa levantada.

No quarto capítulo, apresentamos as análises dos dados e discussões.

Apresentamos as considerações finais no quinto capítulo, onde buscamos levantar os resultados mais importantes desse estudo, com a finalidade de responder nossa questão de pesquisa.

[2] Neste trabalho estamos considerando contexto contínuo tudo o que envolve: área, comprimento, volume e massa, como também estamos considerando contexto discreto tudo o que envolve coleções com objetos de mesma natureza.

Capítulo 1: As Frações no Contexto do Ensino

Neste capítulo, trouxemos perspectivas teóricas que fundamentam nossa pesquisa. Reunimos algumas propostas de ensino sobre o conceito de fração na educação básica.

No levantamento bibliográfico, encontramos pesquisadores empenhados na busca de possíveis soluções para que o ensino das frações seja mais significativo na escola, a saber: (WU, 2000; SANT'ANNA, 2008; BEHR, 1993; KIEREN, 1993; NUNES, 2003; ROMANATTO, 1999; SANTOS & REZENDE, 2002; dentre outros). Explicitaremos, no decorrer deste capítulo, as propostas de cada um desses pesquisadores.

1.1 Contribuições das Pesquisas

Segundo Behr *et al* (1983) o ensino dos racionais na escola é uma atividade importante e difícil. Difícil porque rompe com determinadas crenças, na medida em que, nem sempre os conceitos adquiridos no campo dos naturais se aplicam no campo das frações. Podemos citar o seguinte exemplo: no campo dos naturais, a multiplicação nos leva sempre à ideia de aumentar, porém, no campo dos racionais, tal ideia nem sempre se aplica. Já a importância reside no fato de que o ensino desses números, além de contribuir para o desenvolvimento intelectual e aplicações para a vida, contribui para o desenvolvimento do pensamento do aluno no campo algébrico.

Behr *et al*. (1983) argumentam que:

> Os conceitos associados aos números racionais estão entre as ideias mais complexas e importantes que as crianças encontram ao longo dos primeiros anos de escolarização. A importância desses conceitos pode ser vista a partir de diferentes perspectivas: (a) do ponto de vista prático, a habilidade de lidar com esses conceitos aumenta enormemente a capacidade da criança de compreender e manejar uma série de situações dentro e fora da escola; (b) de uma perspectiva psicológica, os números racionais constituem um cenário rico para um contínuo desenvolvimento intelectual; (c) do ponto de vista da matemática, o entendimento dos números racionais provê os fundamentos sobre os quais as operações algébricas elementares podem ser desenvolvidas. (BEHR ET AL, 1983, p.91).

Os dados evidenciados na introdução, por meio das avaliações de grande porte, revelam a dificuldade que os alunos enfrentam para resolver problemas simples que envolvem o conceito de fração. Levando em consideração os argumentos de Behr *et al* (1983), esta dificuldade é provocada pela estrutura complexa que as frações apresentam aos alunos da escola. A começar pela correta definição de fração, por meio de classes de equivalência de inteiros, não ser aplicável na escola devido à falta de maturidade dos alunos (WU, 1998, p.2).

Reforçando este fato, Wu (2001) cita o livro de Ma (1999), que derruba o mito de que a matemática básica é simples. De acordo com Wu (2001):

> Em nenhum lugar deste livro a observação da autora fica mais evidente do que no ensino das frações. Frações são difíceis não só para os alunos, mas também para seus professores, que de certa maneira, são eles mesmos vítimas de uma pobre educação matemática. (WU, 2001, p.7).

Devido a essas problemáticas, Wu (1998) propõe definir fração como um ponto na reta numérica ou como medida de comprimento de segmento de reta na reta numérica. Wu (1998) adota, em sua obra, o modelo da reta numérica com o objetivo de trabalhar o conceito de fração de maneira bem definida e, a partir da medida de comprimento de segmento de reta, levar o aluno a conceituar fração como número, mostrando-lhe as restrições dos números naturais. Segundo esse autor, o aluno precisa compreender que as frações são números que ampliam o sistema numérico já conhecido.

A proposta de Wu é inserir o aluno no pensamento abstrato, por meio das frações associadas a pontos da reta numérica. O objetivo é levá-lo a um entendimento significativo da passagem do campo aritmético para o algébrico. Argumenta que, o estudo das frações na reta numérica, além de ajudar o aluno a conceituá-las como números, o ajudará a compreender a construção dos números racionais e a introdução ao campo algébrico.

A pesquisadora Sant'Anna (2008), em sua tese de doutorado, se apoiou nas propostas do pesquisador Wu, com o objetivo de abordar um ensino significativo da passagem do campo aritmético para o algébrico. Para isto, aplicou atividades a alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental, a fim de levá-los, a *priori*, ao entendimento de que frações são números e, a *posteriori*, ao entendimento significativo do campo algébrico. De acordo com Sant'Anna:

> Em vários momentos, ficou clara a dificuldade dos alunos em reconhecer fração como número e como, ao vencer essa dificuldade e associar à fração um conceito objetivo bem determinado, rapidamente eles prosseguem no domínio de conceitos mais complexos. Para a criança atingir este conhecimento, desenvolvemos uma série de atividades, envolvendo, por exemplo, equivalência entre frações e ordem no conjunto das frações.
>
> Ao longo do trabalho, foi possível identificar como o êxito nessas atividades refletiu o domínio da conceituação de fração como número. (SANT'ANNA, 2008, p.223).

Segundo Sant'Anna (2008), os alunos que tiveram melhor desempenho no campo algébrico, foram os que sabiam reconhecer a fração como número, identificando sua representação na reta numérica. Segundo essa autora, os alunos foram capazes de fazer facilmente operações com frações equivalentes e assimilar bem o conceito de proporcionalidade.

Durante o levantamento bibliográfico, encontramos outras propostas de ensino para as frações. Hiebert e Behr afirmam que:

> [...] O conceito de "número racional" é expansivo – é parte de um todo, um operador, uma razão, e um quociente... A necessidade de coordenar estas diversas interpretações requer um entendimento mais profundo dos conceitos e das inter-relações entre elas. (HIEBERT & BEHR, 1988, p.6).

Existem outros teóricos (NUNES, 2003; KIEREN, 1988; ROMANATTO, 1999, dentre outros) que também realizaram pesquisas sobre as frações e seus vários significados.

De acordo com Kieren (1993), o ensino dos racionais deve ser explorado por meio dos seguintes subconstrutos: quociente, operador, medida e razão. Este autor não considera o subconstruto parte-todo, pois, para ele, as ideias contidas em tal subconstruto encontram-se presentes nos subconstrutos: medida, operador e quociente.

Nunes *et al* (2003) chegam à conclusão que a aprendizagem do conceito de fração é mais significativa, quando se realiza uma abordagem com ênfase em situações que envolvem os seguintes significados: número, parte-todo, quociente, operador e medida. Em relação a Kieren (1993), Nunes *et al* (2003) acrescentam número e a relação parte-todo como significado de fração.

Segundo Damico (2007), a ideia de fração envolvida no significado de número se relaciona à notação $\frac{a}{b}$ que pode ser representada como um número na reta numérica, ou ainda, a sua representação na notação decimal.

Os autores dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) afirmam que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número (frações). Para eles (BRASIL, 1998), os racionais assumem diferentes significados nos diversos contextos: relação parte-todo, quociente, operador e razão. Afirma-se também que estes significados não devem ser tratados de forma isolada.

No livro sob o título: *Compreendendo Números Racionais*, Nunes e Bryant (1997) apresentam um mapeamento sobre a maneira como as crianças pensam em matemática. No capítulo 8, argumentam que:

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e, ainda assim, não têm. Elas usam termos fracionais certos; elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é provável que alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba.
>
> Uma forma comum de apresentar as crianças às frações é mostrar-lhes o inteiro dividido em partes iguais, onde umas das partes são distinguidas do resto, por exemplo, por uma cor. As crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então, o número de partes pintadas é o numerador. Esta introdução, junto com alguma instrução sobre algumas regras para calcular, permite que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre fração. (NUNES & BRYANT, 1997, p. 191).

De acordo com Nunes e Bryant (1997), a maneira como os assuntos são apresentados pode influenciar o sucesso da aprendizagem dos alunos. Esses autores criticam abordagens que priorizam regras, procedimentos mecânicos, em detrimento da compreensão dos conceitos. Neste sentido, criticam a abordagem da relação parte-todo a figuras geométricas com ênfase na contagem do número de partes pintadas da mesma cor e o número total de partes. Ainda comentam que os estudos de Campos *et al* (1995) realizados no Brasil, apontam que este tipo de abordagem pode conduzir os alunos a erros. Segundo Campos *et al* (1995), este método de ensino apenas encoraja os alunos a uma prática de contagem dupla, isto é, contar o número de partes pintadas da mesma cor e o número total de partes, sem entender verdadeiramente o conceito de fração.

Encontramos algumas pesquisas relacionadas à análise de livros didáticos que revelam o fato de que existe uma preferência dos autores dos livros didáticos, dos quais analisaram, em abordar situações que envolvem a relação parte-todo durante a introdução ao conceito de fração.

Teixeira (2008) tomou em sua pesquisa três coleções de livros do Ensino Fundamental do primeiro segmento e analisou os volumes de quarto e quinto ano do Ensino Fundamental. Afirma que os livros do quarto ano das três coleções abordam apenas dois dos cinco significados propostos por Nunes (2003): parte-todo e operador, com forte predominância no primeiro. Já para os livros do quinto ano, Teixeira (2008) afirma que os mesmos abordam os cinco significados das frações proposto por Nunes *et al* (2003). Entretanto, verificou que as atividades propostas naqueles livros estavam mais concentradas em situações que envolviam a relação parte-todo.

Bezerra (2001) tomou em sua pesquisa quatro coleções de livros didáticos do quarto ano. Focou sua análise em contextos que envolvem frações de “quantidades” contínuas ou discretas e nas situações que envolvem as frações com o significado de quociente e parte-todo. Segundo Bezerra (2001), apenas uma coleção apresenta uma proposta diferenciada das demais, pois trabalha com problemas que envolvem o conceito de fração em situações de divisão, enquanto as outras três dão ênfase a relação parte-todo.

Durante nossa análise, buscamos compreender se há nos livros do sexto ano do Ensino Fundamental aprovados no PNLD 2011, abordagens que privilegiam a relação parte-todo.

De acordo com Wu (1998), não ocorre nenhum dano ao ensino durante a introdução de modelos, por exemplo, do tipo: um quadrado dividido em quatro partes iguais ou uma torta dividida em seis partes iguais, etc. No entanto, argumenta que seria melhor introduzir tais modelos depois que os alunos se tornarem eficientes na divisão de segmentos de reta em partes com comprimentos iguais e no manuseio das frações na reta numérica. Segundo Wu (1998):

> Uma razão é que nosso raciocínio ao longo do desenvolvimento das frações é feito com a ajuda da reta numérica. Mas há outra razão: a representação de frações da torta, por exemplo, tem o inconveniente de ser desajeitada para representar frações maiores do que 1 porque os professores e alunos se recusam tanto a desenhar muitas tortas. Raciocínio feito com o modelo de torta, portanto, tende a acentuar a importância de pequenas frações. Por outro lado, a reta numérica coloca automaticamente todas as frações, grandes ou pequenas, em pé de igualdade para que todas elas possam ser tratadas de maneira uniforme. (WU, 1998, p.2).

Reforçando os argumentos de Wu (1998), de acordo com Toledo e Toledo (1998), no ensino das frações tendem a priorizar as que são menores do que a unidade. Esses autores argumentam que:

> No estudo das frações, são sempre explorados casos em $m < n$ $(m,\ n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$, enfatizando-se bastante que o inteiro dividido em n partes iguais e delas foram retirados m partes. É por isso que muitas crianças ficam perplexas quando lhes pedimos que representem com uma figura a fração $\frac{m}{n}$, em que $m > n$. (Toledo & Toledo, 1998, p.167).

A equipe do Projeto Fundão (SANTOS; REZENDE; *orgs.*; 2002) lançou o livro sob o título: *Números – Linguagem Universal* com propostas de ensino para trabalhar o conceito de fração e sua representação decimal, antes de conceituar número racional. Com base em experiências de sala de aula, a equipe do Projeto Fundão (2002, p.6) acredita, sem pretensões de ignorar os resultados obtidos pelos matemáticos que sistematizaram os conjuntos numéricos, na questão da necessidade do aluno compreender o processo de construção desses conceitos. Para isto, Santos e Rezende (2002) defendem uma proposta de ensino que exige a participação efetiva do aluno nas resoluções de atividades durante a introdução do conceito. O principal objetivo é que o aluno adquira compreensão clara dos conceitos e que evite a memorização de regras, o que leva à resolução de atividades por meio da mecanização de procedimentos, sem a compreensão devida dos conceitos. A abordagem do livro se inicia com o estudo do conceito de frações de conjuntos discretos e contínuos.

Na próxima seção, privilegiamos em apresentar com mais detalhes as propostas de Wu (1998), PCN (1998) e Santos & Rezende (2002).

1.2 Wu

Hung Hsi Wu é professor do departamento de matemática da Berkeley, onde dedica parte de seu tempo às pesquisas voltadas para o Ensino da Matemática[3].

Dividimos em duas etapas a proposta de Wu. Na primeira, trouxemos suas ideias no que diz respeito à importância do ensino das frações para a construção dos números racionais e para introdução ao campo algébrico, pois, segundo ele, o estudo das frações é o primeiro passo a abstração. Já na segunda, trouxemos algumas de suas ideias contidas no artigo *Teaching Fractions in Elementary School*: *A manual for teachers* (April 30, 1998), em relação à introdução ao conceito de fração no sexto ano do Ensino Fundamental.

Há anos, Wu tem proposto uma nova abordagem para o ensino da matemática escolar. Nesta abordagem o ensino das frações é visto como elemento fundamental da Educação Básica por preparar caminhos que levarão

[3] Várias pesquisas de Wu, pertinentes ao ensino da matemática, podem ser encontradas no seguinte endereço eletrônico: http://math.berkeley.edu/~wu/.

os alunos ao entendimento da construção dos números racionais e certas estruturas abstratas do campo da álgebra.

Segundo Wu, o ensino da álgebra só será significativo se houver uma mudança radical no ensino das frações e números decimais.

Wu (2001) argumenta que:

> O estudo de frações fornece uma rampa que leva o estudante suavemente da aritmética para álgebra. Mas quando a abordagem de frações é defeituosa, a rampa desmorona, e os estudantes precisam escalar a parede da álgebra não com uma inclinação suave, mas como um ângulo reto (90°). Não é de surpreender que muitos não consigam. Para compreender por que frações têm o potencial para ser o melhor tipo de pré-álgebra, nós devemos primeiro considerar a natureza da álgebra e o que ela faz diferente da aritmética dos números inteiros. (WU, 2001, p.1).

A abordagem que Wu (2002, p.6-7) propõe para ensinar a fração na escola está fundamentada simplesmente em trabalhar o seu conceito por meio de medida de segmento de reta na reta numérica. Ele defende a ideia que tomar a reta numérica como modelo cria caminhos para uma melhor aprendizagem no campo algébrico. Esta abordagem tem o propósito de conduzir o aluno a uma abstração do conceito de fração com o auxílio da reta numérica, almejando o sucesso de sua aprendizagem quando for introduzido o campo algébrico. Espera-se que o aluno consiga atingir o pensamento abstrato de modo a superar as dificuldades que são peculiares nesta fase do ensino. De acordo com Wu (2002), o sexto ano é o momento ideal, no currículo escolar, para explorar a ideia do objeto matemático abstrato.

Em outro artigo, Wu (2001) argumenta que é necessário mostrar ao aluno que a álgebra nada mais é do que a aritmética generalizada. As estruturas algébricas são mais abstratas e mais gerais do que a aritmética, isto é, a álgebra é uma extensão das ideias mais gerais das operações aritméticas com números inteiros, frações e decimais.

Para Wu (2001), a abstração é o ingrediente fundamental para o entendimento da álgebra que anda segundo ele de mãos dadas com a generalidade. Segundo Wu (2001):

> Não se pode definir abstração da mesma maneira que não se pode definir a poesia, mas, grosso modo, ela é a qualidade que focaliza a cada instante uma propriedade particular excluindo outra. Na álgebra, generalidade e abstração são expressas por notação simbólica. Da mesma maneira que não há poesia sem linguagem, não há generalidade ou abstração sem notação simbólica. A fluência com a manipulação simbólica é, portanto, uma parte integral de proficiência em álgebra. (WU, 2001, p.1).

O sentido do termo generalizar, empregado aqui, se refere ao fato de que a álgebra ultrapassa a ideia de cálculo de medidas concretas e tem por objetivo tratar das propriedades que são comuns a todos os números.

Segundo Wu (2005), existe um motivo muito forte para tratar o ensino das frações como algo relevante na escola. Argumenta que “a compreensão de fração é o passo crítico na compreensão dos números racionais porque as frações constituem a primeira introdução à abstração”. Para ele, é por meio das frações que o aluno desenvolve o pensamento abstrato necessário para entender as estruturas do campo algébrico. Por conta disso, é importante que o aluno desenvolva essa competência, uma vez que na álgebra, nem sempre podemos nos apoiar em modelos concretos. Sendo assim, somos levados a pensar no objeto matemático no campo puramente abstrato. Podemos tomar como exemplo a questão da interseção de mais de três conjuntos onde não é possível fazer uma representação gráfica por meio do diagrama de Ven.

Para Wu (2005), em relação aos números inteiros, a intuição pode ser baseada através da contagem com os dedos, já na aprendizagem com as frações ($+$, $-$, $\times$, $\div$), este fato não ocorre, portanto, é necessário, antes de tudo, uma substituição mental para os dedos. Argumenta que:

> Precisamos de modo claro dizer o que é uma fração. Uma fração tem de ser um número, e, portanto a definição de uma fração como parte-todo não serve. O aluno precisa ver que as frações são extensão natural dos números inteiros, de maneira que as operações aritméticas de números inteiros podem ser estendidas de maneira natural para as frações. (WU, 2005, p. 2).

A substituição mental para os dedos é uma abstração que o aluno terá que se apropriar para realizar operações com frações. Em relação aos números inteiros, os dedos das mãos funcionam como um apoio concreto.

O artigo sob o título: *Teaching Fractions in Elementary School*: *A manual for teachers* (April 30, 1998), trata de um conteúdo de um workshop que foi realizado em março de 1998 para professores que atuam na Educação Básica (6° ano ao 9° ano do Ensino Fundamental).

Segundo Wu, a abordagem sobre as frações, nesse artigo, não está dirigida ao quinto ano do Ensino Fundamental (primeiro segmento), antiga quarta série, onde o ensino do conceito de fração faz sua primeira tentativa de forma experimental. Argumenta que:

> A preocupação aqui é que, após o encontro informal das crianças com frações nas séries iniciais, que elas atinjam o ponto na 5ª série (sexto ano), onde seu conhecimento fortuito precisa de consolidação e sua primeira incursão em matemática abstrata (frações) precisa de alguma estrutura de apoio. (WU, 1998 p.2).

Um dos seus objetivos é ajudar o professor a enfrentar o desafio dos alunos, levando-os para a próxima fase de realização matemática. Sua proposta apresenta um ensino diferenciado sobre as frações, baseado numa abordagem geométrica. Nesta abordagem, a fração é identificada de forma inequívoca como um ponto na reta numérica. Wu argumenta que:

> [...] assim uma fração se torna um objeto definido matematicamente de forma clara. Além disso, a ênfase é toda no raciocínio matemático e à medida que progredimos de tópico para tópico, uma razão é fornecida para cada etapa. (WU, 1998, p.2).

Wu reconhece que sua abordagem tem defeito, porém, afirma que é apenas uma boa motivação para que o aluno possa entender o que é uma fração de forma clara. Ainda argumenta que sua abordagem é um passo a frente a abordagem realizada pelos livros didáticos, que apresentam novas propriedades periodicamente ao conceito fração, como se por decretos celestes, sem qualquer justificação matemática. Segundo Wu:

> Como podemos pedir aos alunos para somar, multiplicar e dividir frações, se nós mesmo não dissermos a eles o que são frações? Infelizmente, é o caso dos livros didáticos que geralmente não definem frações de forma clara. Experimente olhar o índice de um livro didático de matemática do ensino fundamental, pode ser uma

> experiência muito desconcertante. Em "frações" é possível encontrar muitos itens, tais como "adicionar", "multiplicar", "números mistos", ou "estimar", mas nunca a definição "ou significado". Este estado de ambiguidade não surpreendentemente gera confusão interminável sobre os conceitos de "razão", "proporção", e "porcentagem". (WU, 1998, p.2).

Para Wu (1998), os problemas enfrentados durante o ensino das frações na escola são por causa da sua correta definição, como classe de equivalência de pares ordenados de inteiros ser abissalmente inadequada ao ensino nesta fase. Por certo, o aluno ainda não têm maturidade o suficiente para entender uma definição a um nível de abstração elevado. Wu (1998) ainda afirma que, as definições formais das operações aritméticas, como aquelas ditadas pelas exigências dos axiomas de corpos, também são grosseiramente inadequados para o ensino neste nível.

Devido a essa problemática, Wu (1998) define fração como um ponto ou como uma medida de comprimento na reta numérica. O objetivo é levar os alunos a compreensão que as as frações são números, sem entrar no mérito de explicar o que verdadeiramente um número é. A partir deste princípio, ele introduz o conceito de adição, multiplicação e divisão com frações, estendendo a idéia intuitiva adquirida a partir de experiências com números naturais.

1.3 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os "diferentes significados" associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal. (BRASIL, 1998, p.100-101).

Os autores dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) afirmam que estas dificuldades estão ligadas ao fato de que durante a aprendizagem dos números racionais, os alunos terão que fazer rupturas com as ideias que construíram para os números naturais. Por conta disso, os alunos acabam tendo que enfrentar os seguintes obstáculos:

- *Cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo,* $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}$*, ... são diferentes representações de um mesmo número* (*idem*, p.101)*;*
- *A comparação entre racionais: acostumados com a relação 3 > 2, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja,* $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ (*idem*, p.101);
- *Se o "tamanho" da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza (8345 > 83), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério* (*idem*, p.101)*;*
- *Se ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por* $\frac{1}{2}$ *se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10* (*idem*, p.101)*;*
- *Se a sequência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87*. (*idem*, p.101).

De acordo com os PCN (1998), a abordagem dos racionais desde o sexto ao nono ano tem por objetivo levar os alunos à compreensão que os números naturais não são suficientes para resolver determinados problemas como os que envolvem a medida de uma grandeza e o resultado de uma divisão. Argumentam que:

> Para abordar os estudos dos racionais, sob essa perspectiva, os problemas históricos envolvendo medidas, que deram origem a esses números, oferecem bons contextos para seu ensino.
> Pode-se discutir com alunos, por exemplo, que os egípcios já usavam a fração por volta de 2000 a.C. para operar com sistemas de pesos e

> medidas e para exprimir resultados. Eles usavam apenas frações unitárias (frações com numerador 1), com exceção de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Assim, numa situação em que precisavam dividir 19 por 8 eles utilizavam um procedimento que na nossa notação pode ser expresso por $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. A partir dessa situação pode-se propor aos alunos que mostrem que essa soma é $\frac{19}{8}$, que encontrem outras divisões que podem ser determinadas por uma soma de frações unitárias e que pesquisem outros problemas históricos envolvendo os racionais. (BRASIL, 1998, p.102).

Como a maioria dos teóricos (HIERBERT & BEHR, 1988; KIEREN, 1993; NUNES, 2003; ROMANATTO, 1999) apresentados anteriormente, os PCN (1998) também sugerem trabalhar o conceito de fração por meio de situações, onde esta assume "diferentes significados" nos diversos contextos: relação parte-todo, divisão, operador e razão.

Descrevemos, a seguir, os significados das frações de acordo com os PCN (1998, p.102-103).

- **Relação parte-todo**

Neste significado, "*um todo (unidade) se divide em partes equivalentes. A fração, por exemplo, indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes, é o caso das tradicionais divisões de uma figura geométrica em partes iguais.*" (*idem*, p.102). É o caso, também, mais diretamente associado à divisão em partes iguais de uma quantidade de objetos. Segundo os PCN, nesta situação, supõe-se que *"o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o todo (grandeza contínua ou discreta), compreenda a inclusão de classes, saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas"* (idem, p.102).

- **Quociente**

Neste significado, a fração desempenha o papel de um quociente de um inteiro por outro ($a \div b = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$). De acordo com os PCN (*idem*, p.102), esta interpretação se diferencia da relação parte-todo, *"pois dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que* *é preciso dividir 2 unidades em 3 partes iguais. No entanto, nos dois casos, o resultado é dado pelo mesmo número:* $\frac{2}{3}$*"* (*idem*, p.102).

- **Razão**

A fração é vista como razão quando representa *"um índice comparativo entre duas quantidades", ou seja, "quando ocorrem situações do tipo: 2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes, logo* $\frac{2}{3}$ *da população da cidade é de imigrantes"* (*idem*, p.102). A ideia de razão também está associada a situações que envolvem o conceito de probabilidades, isto é, a chance de sortear uma bola verde de uma caixa em que há 2 bolas verdes e 3 bolas de outras cores é de $\frac{2}{5}$.

- **Operador**

Neste significado, a fração *"desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Essa ideia está presente, por exemplo, em problemas do tipo 'que número devo multiplicar por 5 para obter 2'"* (*idem*, p.102-103).

Os PCN (1998) só não adotam número como significado de fração. Para os autores dos PCN (1998), não é desejável na perspectiva do ensino tratar isoladamente cada uma das interpretações atribuídas às frações. Argumentam que:

> A consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, ao longo do terceiro ciclo (sexto e sétimo anos) e quarto ciclo (oitavo e nono anos), que possibilite análise e comparação de variadas situações-problema. (BRASIL, 1998, p.103).

De acordo com os PCN (1998), ao tratar o ensino dos racionais pelo seu reconhecimento no contexto do dia a dia, é necessário observar que eles aparecem mais na forma decimal do que na forma fracionária. Afirmam que:

> Embora o contato com as representações fracionárias seja bem menos frequentes nas situações do cotidiano seu estudo também se justifica, entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico).

> A familiaridade do aluno com as diferentes representações dos números racionais (representação fracionária, decimal, percentual) pode levá-lo a perceber qual delas é mais utilizada ou adequada para expressar um resultado. (BRASIL, 1998, p.103).

1.4 Santos & Rezende

Nesta seção, descrevemos alguns tópicos do livro escrito pela equipe do Projeto Fundão (SANTOS, REZENDE, *orgs.*, 2002) sob o título: *Números: Linguagem Universal*. A proposta de Santos & Rezende, com o ensino das frações, consiste em auxiliar o aluno na descoberta das noções de frações enquanto for experimentando novas situações com auxílio de materiais concretos. Vimos que o principal objetivo é levar o aluno a compreensão de forma clara sobre o processo de construção do conceito de fração, buscando evitar, dessa forma, a memorização de regras que possivelmente leva-o a resolver as atividades por meio de uma mecanização de procedimentos, sem a compreensão devida dos conceitos. A composição do livro se divide em dez etapas: 1) Conceito de Fração de Conjuntos Discretos; 2) Conceito e Representação Gráfica de Fração de Conjuntos Discretos; 3) Conceito e Representação de Fração de Conjuntos Contínuos; 4) Equivalência de Frações; 5) Simplificação de Frações e Revisão de Conceitos; 6) Comparação de Frações; 7) Números Mistos e Frações Impróprias; 8) Adição e Subtração de Frações; 9) Multiplicação de Frações; 10) Divisão de Frações.

Nesta pesquisa, apresentamos uma síntese da proposta de ensino relacionada aos três primeiros assuntos:

- Conceito de Fração de Conjuntos Discretos.
- Conceito e Representação Gráfica de Fração de Conjuntos Discretos.
- Conceito e Representação de Fração de Conjuntos Contínuos.

De acordo com Santos e Rezende (2002):

> Devido à carência de trabalhos que tratem de frações de conjuntos discretos, tentamos equilibrar essa abordagem com a de frações de conjuntos contínuos: no caso discreto, contar $\frac{1}{2}$ de 20 cartões,

> obtendo como resposta um número inteiro e no caso contínuo, recortar $\frac{1}{3}$ de uma tira de papel, obtendo como resposta uma parte do todo (Santos, 1984; Tinoco, 1982; Tinoco, Lopes, Santos, Nasser, Silva & Rezende, 1988). Em seguida usamos uma fase posterior de abstração: a representação gráfica (pintar, desenhar, etc.) e a cada novo conceito introduzido, estas etapas voltam a ser percorridas. (SANTOS e REZENDE, 2002, p.15).

Uma das propostas de Santos e Rezende (2002) é introduzir o conceito de frações de conjuntos discretos e contínuos sempre utilizando como apoio material concreto do tipo:

- chapinhas, cartões, etc., para exemplificar um conjunto discreto;
- barbante, círculo feito com papel, etc., para exemplificar um conjunto contínuo.

Por certo, o objetivo neste tipo de abordagem é levar o aluno a compreensão, por meios lúdicos, do fato de que o "todo" de um conjunto discreto não é de mesma natureza do "todo" de um conjunto contínuo. De acordo com Santos e Rezende (2002), os alunos nesta fase de escolarização não tem maturidade para compreender uma explicação teórica sobre este assunto. Para essas autoras, o professor deve estar atento ao momento certo de fazer a transição do concreto para o abstrato, voltando à situação concreta sempre que perceber alguma dificuldade na compreensão dos alunos.

Para o conceito de fração de conjuntos discretos, Santos e Rezende (2002) tomam como base os seguintes objetivos:

- Identificar frações de conjuntos discretos.
- Associar uma parte de um conjunto à fração correspondente.

Para atingir tais objetivos, sugere-se que o aluno seja exposto, primeiramente, a situações de repartição com material concreto de um dado conjunto discreto em grupos com a mesma quantidade de elementos.

Depois desta etapa é que o terreno está propício para o aluno associar uma parte do conjunto a uma fração correspondente. Neste momento a nomenclatura (numerador e denominador) deverá ser introduzida enquanto se for escrevendo as frações.

- **Denominador**: número de partes iguais em que se repartiu o conjunto inicial e que denomina as partes (meios, terços,...).
- **Numerador**: o número de partes, a quantidade que se quer considerar (três quartos, um meio,...).

Depois do trabalho com material concreto, sugere-se trabalhar o conceito representação gráfica de fração de conjuntos discretos. O objetivo é:

- Identificar frações de conjuntos discretos apresentados graficamente.

Segundo Santos e Rezende (2002), nesta fase o aluno deve fazer primeiro a representação gráfica do conjunto de cartões com os quais ele já trabalhou. Depois de praticar tal atividade, as condições para uma apresentação da representação gráfica de conjuntos discretos quaisquer se tornam favoráveis ao ensino.

Para o conceito e representação gráfica de fração de conjuntos contínuos, Santos e Rezende (2002) tomam como base os seguintes objetivos:

- Identificar frações de conjuntos contínuos.
- Associar uma parte de um conjunto à fração correspondente.

Neste contexto, também é proposto expor o aluno primeiramente em situações que envolvem a divisão do inteiro em partes iguais, com o apoio de material concreto. A proposta inicial é usar barbante e levar o aluno a associar uma ou mais partes do referido barbante a uma fração correspondente. Depois, sugere-se trabalhar com círculos de papel e outros tipos de figuras regulares e não regulares. Santos e Rezende (2002) chamam a atenção para o fato de que dividir qualquer figura geométrica, basta que as partes tenham a mesma área e que isto não implica necessariamente que elas tenham a mesma forma.

Observamos uma atividade pertinente (Santos e Resende, 2002, p.28) que exige o aluno dividir três pizzas entre cinco amigos. Segundo essas autoras, tal atividade envolve conjuntos contínuos e discretos ao mesmo tempo.

De acordo com os PCN (1998), a fração em tal atividade assume o “significado” de quociente. Vimos que, segundo os autores dos PCN (1998), os alunos fazem distinção entre as atividades que envolvem a relação parte-todo e quociente, pois a ação de dividir uma pizza em cinco partes iguais e tomar três de suas partes é diferente daquela que envolve a divisão de três pizzas entre cinco pessoas. Entretanto, para ambas as situações, o resultado é dado pela mesma fração $\frac{3}{5}$.

Outra atividade pertinente (Santos e Rezende, 2002, p.28) exige que o aluno desenhe uma figura geométrica plana a partir de uma de suas partes associada a uma fração correspondente. Por certo, no decorrer do processo de conceituação de fração, neste contexto, é importante ter o conhecimento de quantas partes com a mesma área a certa fração dada são necessárias para constituir o “todo”. De posse desse entendimento, é possível reconhecer o tipo de fração, assim como a unidade tomada como referência.

De acordo com Bertoni (2008), as situações que apresentam divisões de objetos são favoráveis para levar as crianças à compreensão das primeiras noções a cerca das frações. Segundo essa autora, o professor deve oportunizar, durante o ensino, situações de repartição do inteiro, com o objetivo de levar o aluno à compreensão do fato de que as partes devem ser iguais.

Os argumentos de Bertoni (1998), em relação à participação do aluno em situações de divisão do inteiro em partes iguais, reforçam uma das propostas de ensino de Santos & Rezende (2002) para o estudo da fração em contextos que envolvem área e coleções.

Capítulo 2: O Programa Nacional do Livro Didático – PNLD

Neste capítulo, começamos com um levantamento sobre o livro didático no Brasil e depois fizemos uma síntese do histórico sobre o PNLD de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental.

O termo “Livro Didático” teve sua definição pela primeira vez na década de 30, por meio do Decreto-Lei n° 1.006 de 30 de dezembro de 1938. O livro didático, neste período, foi convencionado como o livro destinado à escola, cujo objetivo é o de ensinar e oferecer propostas condizentes aos currículos educacionais do país. Seguindo este princípio, podemos considerar os livros didáticos como instrumentos criados com o propósito de transmitir os conhecimentos construídos pelo homem ao longo dos tempos.

Os livros didáticos têm sido alvo de muitas críticas. Se analisados por matemáticos profissionais, a abordagem feita para determinados assuntos é considerada superficial ou equivocada, já que distante dos conceitos formais. Se analisados por educadores matemáticos, a abordagem realizada costuma ser criticada por não oportunizar a compreensão e significação de conceitos e por não contribuir para a formação do pensamento matemático autônomo. Podemos citar como exemplo, as proposições da geometria que não são mais abordadas nos livros didáticos, o que é criticável por qualquer dos dois grupos. Muitos conceitos são explicados por meio de regras sem nenhuma justificação. Entendemos que existem teoremas cuja demonstração rigorosa é incompatível com o nível de maturidade dos alunos da Educação Básica. No entanto, existem maneiras de convencer o aluno do Ensino Básico, por meio de argumentos precisos e claros, da veracidade de um dado teorema, levando-o a compreensão que esta é uma prática em matemática e contribuindo para que o mesmo, aos poucos, se aproprie desta competência.

Por certo, os livros didáticos desempenham um papel importante no ambiente escolar. Em muitos casos, o livro didático é o único instrumento de ensino que o professor dispunha como recurso pedagógico.

Um fato negativo apontado por Romanatto (2004), é que o livro didático costuma atribuir uma importância maior a técnicas operatórias, dando mais ênfase pela memorização e mecanização do que pela compreensão dos conceitos. Afirma que o livro didático tem uma presença muito forte em sala de aula, chegando até, em muitos casos, substituir o professor, enquanto deveria apenas lhe servir de apoio. Apesar dessas problemáticas, Romanatto (2004) reconhece que o livro didático desempenha um papel essencial no processo de comunicação no tempo e no espaço, além de fornecer muitas informações.

De acordo com Guimarães, Gitirana, Cavalcanti e Marques:

> O livro didático se constitui em um importante recurso utilizado por professores na condução e/ou elaboração das abordagens de ensino, em parte pela ausência de outros materiais que orientam os professores sobre o quê e como ensinar, e em parte pela frequente dificuldade de acesso do aluno a outras fontes de estudo e pesquisa (GUIMARÃES *et al*, 2008, p.3).

De acordo com Carvalho (2007), com a implantação do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), os livros didáticos, que antes vinham sendo distribuídos pelo MEC no Ensino Fundamental, passaram a ser avaliados por meio de uma análise criteriosa, a partir de 1995. Tal análise passou a ser feita por especialistas de diversas áreas: Matemática, Ciências, Língua Portuguesa, Geografia e História. Afirma que esta iniciativa do governo foi boa, pois os livros, a partir de então, mostraram-se com melhor qualidade.

De acordo com Lopes (2000), o livro didático sempre representou e continua representando o complemento da lacuna na formação acadêmica do professor e o apoio na prática escolar. Segundo esse autor, as condições de trabalho que o professor enfrenta, em muitos casos, chegam a ser desfavoráveis.

Por certo, em muitas situações, o livro didático é um instrumento de referência em relação ao saber a ser ensinado, como também, um condutor dos conteúdos e dos processos relacionados à prática pedagógica do professor. Sendo assim, uma investigação de como a introdução ao conceito de fração está organizada e estruturada nos livros didáticos, destinados às escolas públicas, pode contribuir para uma análise dos fenômenos de ensino-aprendizagem na Educação Básica.

O Ministério da Educação criou os Parâmetros Curriculares Nacionais com objetivo de reorganizar o currículo de matemática no Ensino Fundamental. Com isto, os PCN acabaram orientando os autores dos livros didáticos nas reformulações necessárias do conteúdo programático. Entretanto, a influência dos PCN nos livros didáticos não se manifesta de forma incisiva em todas as coleções, mas de forma processual com diferentes abordagens entre as coleções.

Certamente as propostas de ensino apresentadas nos PCN tendem a sinalizar se os livros didáticos estão incorporando ou não os novos paradigmas educacionais, a saber, no que diz respeito ao ensino-aprendizagem sobre as frações.

Desde o ano de 1999, o Programa Nacional do Livro Didático – PNLD publica o Guia Nacional do Livro Didático. Todas as coleções são submetidas a análises com base em critérios estabelecidos que visem às adequações de aspectos teórico-metodológicos, estrutura editorial e manual do professor.

A análise que o guia apresenta é elaborada por meio de parâmetros com tendências atuais da Educação Matemática. Tal análise também busca uma adequação do tratamento dos conceitos, tendo em vista uma formação sólida para as sucessivas ampliações e aprofundamentos dos conteúdos da Matemática. Partindo nesta direção, a correção conceitual tem sido balizadora no processo da aprovação das obras e, possíveis inadequações que não se configurem como erro ou indução ao erro, são sinalizadas nas resenhas visando à melhoria progressiva da qualidade dos livros. Um dos objetivos da resenha é prevenir os professores quanto à necessidade de estarem atentos ao ato de aprimorar, adequar e complementar o trabalho com algum conteúdo.

A cada três anos o guia é publicado, contendo as resenhas das coleções aprovadas. Conforme é apresentado no próprio guia, a etapa final de um longo e cuidadoso processo de avaliação, que reúne professores de diversas instituições educacionais de várias regiões de nosso país, sendo todos com larga experiência no ensino-aprendizagem da matemática escolar (GUIA DE LIVROS DIDÁTICOS, 2010, p.11).

De acordo com Friolani (2007), as análises dos livros didáticos começaram em 1995. No entanto, só em 1999 que ocorreu a análise dos primeiros livros didáticos destinados às séries da época denominadas 5ª a 8ª série. Nesta época a publicação do guia classificava as obras como: recomendadas com distinção; recomendadas; recomendadas com ressalvas e excluídas. As obras voltam a ser analisadas em 2002, após um período de interrupção. Desde então, à cada três anos é publicado um novo guia para atender ao PNLD. Após a escolha do professor, os livros são enviados as escolas públicas. As classificações expostas acima deixam de existir em 2005 e as obras passaram a ser aprovadas ou excluídas.

Quanto aos anos finais do Ensino Fundamental, em 2002 o PNLD recomendou 13 coleções de matemática, em 2005 aprovou 23 coleções, em 2008 aprovou 16 coleções e em 2011 aprovou apenas 10 coleções.

De acordo com guia do PNLD 2011, um dos aspectos fundamentais da Matemática é a diversidade de formas simbólicas presentes em seu corpo de conhecimentos. Linguagem natural, linguagem simbólica, desenhos, gráficos, tabelas, diagramas, ícones, entre outros, desempenham papel central, tanto na representação dos conceitos, relações e procedimentos, quanto na própria formação desses conteúdos. Por exemplo: um mesmo número racional pode ser representado por símbolos tais como $\frac{1}{2}$; 0,50; 50%, ou pela área de uma região plana ou, ainda, por expressões como “meio” ou “metade”. No que diz respeito aos números de forma geral, o guia discorre que na Matemática, o conceito de grandeza tem papel importante na atribuição de significado a conceitos centrais, como os de número natural, inteiro, racional e irracional, entre outros. Além disso, é um campo que se articula bem com a álgebra e a geometria e contribui de forma clara para estabelecer ligações entre a Matemática e outras disciplinas escolares.

Capítulo 3: Percurso Metodológico

Apresentamos neste capítulo a metodologia que empregamos para analisar os livros didáticos, com o objetivo de responder nossa questão de pesquisa: Que tipo de abordagem é privilegiada na introdução ao conceito de fração nos livros didáticos do sexto ano do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2011?

Conforme já apresentado no capítulo anterior, no Brasil, existe uma avaliação dos livros didáticos que é o PNLD (Programa Nacional do Livro Didático). Portanto, nossa pesquisa já parte do princípio de uma primeira avaliação qualitativa dos livros, realizada pelo PNLD o qual avalia e escolhe os livros que serão destinados às escolas públicas.

Nossa investigação, no que diz respeito aos procedimentos de coletas de dados, caracteriza-se como uma pesquisa documental realizada a partir da análise de materiais já publicados. No nosso caso, os livros didáticos.

Segundo Peter Woods (1987), os documentos escritos de maior importância nas escolas são, possivelmente, os que atendem manifestadamente à função de ensinar e aprender. Dentre estes, podemos destacar: livros didáticos, planilhas, programas, quadros, cadernos de exercícios, documentos relativos a testes e exames, filmes e outras ajudas visuais. Peter Woods (1987) argumenta:

> São poucos estudos qualitativos que podem deixar de levar em conta pelo menos alguns destes documentos. No entanto, a abordagem qualitativa destes documentos é muito peculiar, pois mesmo que eles contenham informações úteis, devem ser sempre contextualizados nas circunstâncias de sua construção. (WOODS, 1987, p.146).

Com objetivo de traçar um diagnóstico de como é realizada a introdução ao conceito de fração, nos dedicamos a investigar, das dez coleções aprovadas pelo PNLD 2011, os livros do sexto ano. Para isto, recorremos aos procedimentos indicados por Laurence Bardin (1977) para análise de conteúdos.

Análise de conteúdo é conjunto de técnicas que um pesquisador se apropria para explorar documentos, com objetivo de identificar os conceitos mais importantes abordados num determinado texto.

Chizzotti (2001) argumenta que:

> A análise de conteúdo é um método de tratamento e análise de informações, colhidas por meio de técnicas de coleta de dados, com substâncias em um documento. A técnica se aplica à análise de textos escritos ou de qualquer comunicação (oral, visual, gestual) reduzida a um texto ou documento. (CHIZZOTTI, 2001, p. 98).

Segundo Bardin (1977), as técnicas utilizadas na análise de conteúdo se aplicam em vários discursos, principalmente no campo das ciências sociais. Trata-se de uma metodologia com objetivos bem definidos que servem para revelar o que está em oculto num determinado texto. Para Bardin, a análise de conteúdo é:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (BARDIN, 1977, p.42)

De acordo com Bardin (1977), o método de análise do conteúdo trata as informações a partir de um roteiro específico, composto por três fases: pré-análise (I), descrição analítica do material (II) e tratamento dos resultados e interpretação (III). Cada fase do roteiro é composta por regras específicas que se aplicam em pesquisas qualitativas ou quantitativas.

A seguir, descrevemos cada uma das três fases citadas acima.

I - A pré-análise

A pré-análise trata da fase de organização do material que será estudado. Relacionamos por meio desta:

- a escolha dos documentos de pesquisa;
- o estabelecimento das hipóteses;
- os objetivos iniciais de pesquisa e;
- a definição dos indicadores que levarão à interpretação final.

II - Descrição analítica do material

A descrição analítica do material se inicia desde a pré-análise. Nesta fase, o material de estudo, no nosso caso, o livro didático, é submetido a um estudo profundo, com base em reflexões a partir dos referenciais teóricos e intuição do pesquisador, que, por meio de sucessivas leituras do material de pesquisa, busca identificar possíveis categorias e classificações.

Os procedimentos de codificação, classificação e categorização são desenvolvidos nesta fase do estudo. Com o objetivo de que tais procedimentos sejam desenvolvidos, será necessário realizar recortes a partir dos indicadores selecionados os quais serão buscados no material de pesquisa (livros didáticos).

III - Tratamento dos resultados e interpretação

O tratamento dos resultados é a fase que a investigação alcança sua maior intensidade, inferência e interpretação inferencial. Nesta fase, as discussões no que diz respeito aos materiais analisados ganham maior profundidade quando estes estabelecem relações com o referencial teórico, permitindo então concluir a investigação.

O Quadro 1, a seguir, apresenta as dez coleções de livros didáticos aprovados no PNLD 2011 que foram objetos de nossa pesquisa.

Quadro 1 – Lista das coleções aprovadas no PNLD 2011

Livro	Coleção	Autores	Editora/ Edição
A	Matemática	Edwaldo Bianchini	Moderna - 6ª edição São Paulo – 2006
B	A Conquista da Matemática – edição renovada	José Ruy Giovanni Jr. e Benedicto Castrucci	FTD - 1ª edição São Paulo – 2009
C	Aplicando a Matemática	Reis e Trovon	Casa P. Brasileira 2ª edição São Paulo – 2009
D	Matemática Ideia e Desafios	Iracema e Dulce	Saraiva - 15ª edição São Paulo – 2009
E	Novo Praticando	Imenes e Lellis	Moderna – 1ª edição São Paulo – 2009
F	Matemática e Realidade	Iezzi, Dolce e Machado	Saraiva – 6ª edição São Paulo – 2009
G	Matemática na Medida Certa	Jacubovick e Centurión	Scipione – 11ª edição São Paulo – 2009
H	Projeto Radrix	Jackson da Silva Ribeiro	Scipione – 1ª edição São Paulo – 2009
I	Tudo é Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática – 3ª edição São Paulo – 2009
J	Vontade de Saber Matemática	Souza e Pataro	FTD – 1ª edição São Paulo – 2009

O processo de análise foi realizado em duas fases, conforme prescreve Bardin (1977):

1ª Fase: pré-análise

Nesta fase se realiza a seleção e a preparação do material que será efetivamente foco de análise, considerado como *corpus* da análise de conteúdos. A seguir, com o *corpus* da pesquisa organizado, fazem-se diversas leituras para dar início à categorização. Segundo Bardin (*op. cit*., p.96), é nesta fase que o pesquisador estabelece *"contacto com os documentos a analisar [...] deixando-se invadir por impressões e orientações"*. Assim, os seguintes procedimentos foram realizados:

- seleção dos capítulo ou unidade destinado a dar início ao trabalho com as frações, que constituiriam o *corpus* desta pesquisa;
- cópia da unidade ou capítulo selecionado para possibilitar marcações e anotações durante as leituras;
- identificação da estrutura do capítulo: seções, exemplos, sistematização, atividades, tópicos abordados, etc.;
- leituras sucessivas para identificar possíveis categorias utilizadas por algum dos autores estudados.

2ª Fase: análise

Dado que já na pré-análise identificamos que a introdução do conceito de fração ocorre fundamentalmente por meio de exemplos resolvidos e atividades propostas, iniciamos a análise pelo mapeamento dos exemplos e das atividades. Nosso interesse foi compreender como estes (exemplos e atividades) se estruturam e se há alguma sistematização no sentido de levar o aluno a construir o conceito de fração.

Nossa pesquisa não se restringe somente a uma análise da introdução. Também fizemos um mapeamento das atividades propostas e dos exemplos no decorrer dos capítulos ou unidades específicos. Nossas primeiras classificações foram por tipo de:

- ilustração usada nos exemplos ou atividades propostas;
- contexto: contínuo ou discreto;
- atividade proposta: simples aplicação ou problematização;
- atividade quanto ao incentivo à participação efetiva do aluno;
- sem contexto (atividades que exploram apenas manipulações numéricas, leituras de frações, etc.).

Depois, nossa classificação foi por tipo de uso das frações nas atividades propostas e nos exemplos: uso da fração para expressar uma medida, uso da fração para expressar parte da área de figuras geométricas, uso da fração para expressar ponto na reta, uso da fração para expressar parte de uma coleção, etc.

Capítulo 4: Análise e Discussão dos Resultados

Neste capítulo, analisamos e discutimos os resultados encontrados nos livros didáticos aprovados pelo PNLD 2011.

4.1 Descrição dos assuntos analisados nos livros didáticos

Nesta seção, descrevemos, por livro, os capítulos e seções dos assuntos que analisamos. Visto que as obras tratam as frações maiores do que 1 no decorrer do capítulo ou unidade, resolvemos ir até a seção onde elas aparecem, a fim de investigar como é feita a abordagem.

- **Descrição do Livro A**

  Capítulo 6 - Os números racionais na forma de fração

1. Os números racionais com os quais convivemos

Apresenta-se, nesta parte, o uso da representação fracionária nas questões do cotidiano por meio de ilustrações.

2. Noção de número racional e a fração que o representa

Neste item, inicia-se o processo de conceituação por meio do uso da fração para expressar: medida de comprimento; parte da área de uma figura geométrica; parte de uma pizza e parte de uma coleção.

3. A fração também pode representar um quociente

Nesta seção, trabalha-se o conceito de fração maior do que 1 por meio do conceito de quociente entre dois números naturais.

- ## Descrição do livro B

Introdução – A forma fracionária dos números racionais

Apresenta-se, neste trecho, o uso da representação fracionária nas questões do cotidiano por meio de ilustrações.

20. A ideia de fração

Nesta parte, apresenta-se o uso das frações pelos egípcios e, logo em seguida, inicia-se o processo de conceituação por meio do uso da fração para expressar: medida, parte da área de uma figura geométrica e parte de uma coleção.

26. A forma mista

Trabalha-se, neste item, o conceito de fração maior do que 1 por meio de uma sequência de figuras geométricas planas congruentes, todas divididas em partes com a mesma área.

- ## Descrição do livro C

Unidade 3 – Explorando frações

Neste trecho, apresenta-se uma ilustração com vários símbolos de frações.

1. Frações - Que bichos são esses?

Nesta seção, inicia-se o processo de conceituação por meio do uso da fração para expressar parte da área de uma figura geométrica e parte de outros tipos de figuras (tábua, bolo).

3. Números mistos e frações impróprias

Nesta parte, trabalha-se o conceito de fração maior do que 1 por meio de uma sequência de figuras geométricas, todas dividas em partes com a mesma área. Utiliza-se também uma sequência de outros tipos de figuras de mesmo tamanho (bolos e pepinos).

- ## Descrição do livro D

Unidade 8 – **Números racionais: representação fracionária**

Neste trecho, apresenta-se o uso da representação fracionária nas questões do cotidiano, por meio de ilustrações.

1. Estudo das frações

Apresenta-se primeiro, nesta seção, o uso das frações pelos egípcios e, logo em seguida, inicia-se o processo de conceituação por meio do uso da fração para expressar: medida de comprimento, parte da área de uma figura geométrica e parte de uma coleção.

2. Tipos de fração

Nesta parte, trabalha-se o conceito de fração maior do que 1 por meio de uma sequência de figuras geométricas planas congruentes, todas divididas em partes com a mesma área.

- ## Descrição do livro E

Capítulo 6 – Frações e porcentagem

1. Uso das frações

Nesta seção, apresenta-se primeiro o uso da representação fracionária nas questões do cotidiano. Logo em seguida, inicia-se o processo de conceituação por meio do uso da fração para expressar: parte da área de uma figura geométrica e parte de uma coleção.

3. Números mistos

Trabalha-se, neste item, o conceito de fração maior do que 1 por meio de uma sequência de figuras geométricas planas congruentes, todas divididas em partes com a mesma área. Utiliza-se também o conceito de medida, usando a polegada como unidade.

- ## Descrição do livro F

Capítulo 14 – O que é fração

1. Separando e juntando partes (tangram);

Nesta parte, apresentam-se ilustrações de um material chamado tangram.

2. Frações da unidade

Inicia-se, nesta seção, o processo de conceituação, por meio do uso da fração para expressar parte da área de uma figura geométrica.

3. Frações de um conjunto

Neste item, apresenta-se o uso da fração para representar parte de uma coleção.

4. Tipos de fração.

Nesta seção, trabalha-se o conceito de fração maior do que 1 por meio de uma sequência de figuras geométricas planas congruentes, todas divididas em partes com a mesma área.

- ## Descrição do livro G

1. As frações mais comuns: meios, terças e quartas partes.

Primeiramente, apresenta-se o uso da representação fracionária nas questões do cotidiano. Logo em seguida, inicia-se o processo de conceituação por meio do uso da fração para expressar parte da área de uma figura geométrica.

Fração de uma quantidade.

Apresenta-se, neste item, o uso da fração para expressar parte de uma coleção.

2. Frações: a generalidade e as porcentagens

A generalidade das frações

Nesta seção, trabalha-se o conceito de fração maior do que 1 por meio de uma sequência de figuras (barras de chocolate), todas divididas em partes iguais.

- ## Descrição do livro H

Capítulo 10 – Frações

Apresenta-se, neste trecho, o uso das frações nas questões do cotidiano.

1. Estudando frações

Neste item, inicia-se o processo de conceituação através do uso da fração para expressar parte da área de uma figura geométrica.

2. Números na forma mista

Nesta seção, trabalha-se o conceito de fração maior do que 1 por meio de uma sequência de figuras geométricas, todas divididas em partes com a mesma área.

- ## Descrição do livro I

Capítulo 6 – **Frações** e porcentagens

Neste trecho, apresenta-se o uso das frações nas questões do cotidiano.

1. Algumas ideias associadas à fração

Fração como parte de uma figura ou objeto

Nesta seção, inicia-se o processo de conceituação por meio do uso da fração para expressar parte da área de uma figura geométrica.

Números mistos

Trabalha-se, neste item, o conceito de fração maior do que 1 por meio do conceito de quociente entre dois números naturais.

- ## Descrição do livro J

Capítulo 6 – Frações

Neste trecho, apresenta-se o uso da representação fracionária nas questões do cotidiano, por meio de ilustrações.

1. As ideias de fração

Primeiramente, ocorre uma breve abordagem a cerca de como as frações eram usadas no antigo Egito. Logo em seguida, inicia-se o processo de conceituação por meio do uso da fração para expressar parte da área de uma figura geométrica.

2. Frações "próprias", frações "impróprias" e números na forma mista

Nesta seção, trabalha-se a ideia de fração maior do que 1 por meio de uma sequência de figuras geométricas congruentes, todas divididas em partes com a mesma área.

4.2 Nossas escolhas: um primeiro resultado da pesquisa

Além da classificação proposta nos PCN (1998), já apresentada resumidamente, outros significados, ideias ou “subconstructos” podem ser encontrados na literatura sobre o ensino de frações. Nossa revisão bibliográfica, tanto dos autores elencados nesta pesquisa, quanto de outros (por exemplo, Vasconcelos e Belfort, 2006; 1999; Canova, 2006), evidenciou a necessidade de fazermos escolhas para classificação da abordagem utilizada nos livros analisados. Sem desmerecer cada tipo de subdivisão adotada em outros estudos, decidimos simplificar a categorização que utilizaríamos. Desde a pré-análise percebemos que a diversidade de classificações encontrada na revisão bibliográfica seria desnecessária. Em primeiro lugar, porque os livros não contemplam usos variados desde o capítulo ou unidade de introdução. Em segundo lugar, porque, mesmo quando subdividem o texto por meio de subtítulos que indicariam a apresentação de diferentes usos das frações, observamos que seria possível classificá-las apenas pela diferenciação do contexto da aplicação.

Assim, decidimos usar inicialmente apenas os contextos – contínuo ou discreto – para classificar os exemplos, as atividades, como também os textos de sistematização. A análise evidenciou que no caso contínuo o que de fato ocorre são situações que envolvem medidas de comprimento, área, capacidade, etc., quase sempre ilustrado por figuras geométricas (planas ou espaciais) ou por figuras de objetos como tortas, pizzas, vasilhames. De outro lado, em todas as obras aborda-se a fração como parte de coleções discretas, consideradas aqui como uma reunião de carros, pessoas, folhas de papel, etc., ou seja, conjuntos de elementos contáveis. Com esta escolha, não consideramos as frações como constructo que possui “vários significados” (BRASIL, 1998) ou “subconstructos” (Canova, 2006) e buscamos dar ênfase a outros aspectos da abordagem adotada pelas obras, como passamos a apresentar nas seções seguintes.

Devido à complexidade do termo “grandeza”, evitamos ao máximo pronunciá-la nesta pesquisa. Para título de exemplo, Lebesgue (1975) afirmou que comprimento, área e volume são exemplos perfeitos de grandezas. Lima

(2009, p.6) afirma que existem dois tipos de grandezas: as discretas e as contínuas. Para grandeza discreta tomou como exemplo um rebanho. Já para grandeza contínua: o tempo, o peso e a distância.

4.3 Análise do tipo de abordagem adotada nos livros didáticos para introduzir o estudo das frações

Neste ponto, analisamos a abordagem que os livros apresentam na introdução. Nosso objetivo é traçar um diagnóstico de como os autores de livros didáticos introduzem o conceito de fração. Para esta análise consideramos as páginas de abertura dos capítulos ou unidades selecionados para este estudo, já descrito em 4.1, como também as primeiras páginas onde, normalmente, se faz a apresentação da representação da nomenclatura, dos diferentes usos, exemplos, etc. Quase sempre são entre duas e quatro páginas que antecedem a primeira lista de exercícios. Há livros que além destas páginas iniciais fazem apresentações entremeadas aos exercícios, adotando um estilo “siga o modelo” para os exercícios subsequentes. Outros fazem as apresentações em pequenas etapas, quase sempre desvinculadas entre si e seguidas de pequenas doses de atividades propostas aos alunos.

Numa primeira etapa, os livros abordam as frações menores do que 1. Mais tarde, ainda no mesmo capítulo ou unidade, os livros fazem a apresentação das frações maiores do que a unidade, que são apresentadas como “número misto”, “forma mista” e/ou “frações impróprias”. A análise que trazemos neste capítulo também será subdividida desta forma, primeiro apresentamos o resultado da classificação das obras quanto à introdução das frações ditas “próprias” para, a seguir, nos dedicarmos à análise de como os livros fazem a apresentação das frações maiores do que a unidade.

Para classificar as abordagens adotadas vamos separá-las em dois grandes blocos, as que envolvem coleções e as que optam por área de figuras geométricas, comprimento de segmento de reta, etc. para introduzir o estudo das frações. A partir desta classificação inicial, subdividimos os grupos um pouco mais, como será apresentado a seguir. As escolhas das categorias, como indicado pela metodologia adotada nesta pesquisa, foram feitas a partir da realidade do material em análise e não de nossos ideais ou crenças.

4.3.1 As frações em contexto contínuo e discreto

Nesta seção, apresentamos primeiramente os recursos utilizados pelos livros para conceituar as frações e a abordagem na apresentação da representação fracionária. Depois, apresentamos as categorias de acordo com o uso das frações nos contextos.

4.3.1.1 Tipos de recursos utilizados

Analisamos, neste item, os tipos de recursos utilizados nas atividades aplicadas para introduzir o conceito de fração. Durante nossa análise encontramos os seguintes tipos de recursos, que passamos a descrever:

- Ilustrações de figuras geométricas (FG);
- Ilustrações de objetos do cotidiano (bolo, pizza, barra de chocolate, etc.) (OC);
- Ilustração de uma coleção (CD);
- Desenhos associados à ideia de comprimento (IC);
- Abordagem histórica (AH);
- Material concreto para trabalhar o conceito de frações da área de uma figura geométrica (MC).

Observamos, ainda, os tipos de atividades presentes nas obras, que passamos a descrevê-las a seguir:

- Situação que exige a participação efetiva do aluno na construção do conhecimento (AP).
- Aplicação com referência a situações do cotidiano (AC).

- Aplicação em situações da própria matemática (AM).

No Quadro 2, a seguir, assinalamos a presença nos livros analisados dos tipos de recursos e de aplicação listados no parágrafo anterior.

Quadro 2 – Tipos de recursos e de aplicação identificados nos 10 livros analisados

	Tipos de recursos						Tipos de atividades		
Livro	FG	OC	CD	IC	AH	MC	AP	AC	AM
A	X	X	X	X				X	X
B	X	X	X	X	X	X	X	X	X
C	X	X						X	X
D	X	X	X	X	X		X	X	X
E	X	X	X					X	X
F	X		X			X		X	X
G	X		X					X	X
H	X							X	X
I	X	X		X				X	X
J	X	X			X			X	X

Síntese da análise dos dados do Quadro 2

Quanto aos recursos, observamos que todos os livros utilizam situações (exemplos e atividades) envolvendo a partição de figuras geométricas. Quanto ao tipo de atividade, exemplos ou atividades envolvendo o uso das frações para resolver situações do cotidiano ou da própria Matemática também estão presentes em todas as obras. Observando todas as categorias presentes no Quadro 2, apenas o livro B contempla todas elas e no livro D apenas o uso de material concreto não se faz presente no capítulo introdutório do conceito de frações. Além de valorizarem a representação de frações por meio de figuras geométricas, verificamos que a mais utilizada é o retângulo, e depois, o círculo. Destaca-se que em três dos livros em questão (F, G, H) são usadas apenas figuras geométricas, não foram encontrados outros tipos de figuras (pizza, bolo, etc.).

Para a apresentação de fração de uma coleção de objetos, seis livros trazem ilustração das coleções. Dentre eles, três (B, E, F) utilizam fotografias de coleções e os outros três livros (A, D, G) utilizam desenhos de objetos de uma coleção. No entanto, verificamos que nenhum deles solicita que o aluno utilize material concreto para exemplificar uma coleção. Quanto a este tipo de abordagem, Santos & Rezende (2002) defendem que os alunos trabalhem a divisão de uma coleção concreta (chapinha, cartões, etc.), dividindo-a em grupos com a mesma quantidade de elementos, antes da representação por meio de desenhos e, principalmente, antes de uma abordagem sem qualquer apoio visual. Conforme podemos observar no Quadro 2, o uso de desenhos associados à ideia de comprimento (IC) é pouco frequente. Dos dez livros, verificamos que apenas cinco (A, B, D, G, I) valorizam a fração em situações de medida de comprimento em suas introduções.

Três livros (B, D, J) usam como recurso uma abordagem histórica das frações, todos fazendo menção ao antigo Egito. Os três mencionam que as frações foram inventadas para auxiliar no processo de medição de terras, quando as enchentes provocadas pelo rio Nilo “desmarcavam” as medições dos terrenos.

A respeito do uso da História da Matemática como recurso didático (AH), no caso das frações, os PCN (1998) sugerem abordar seu uso pelos egípcios, por meio de seus sistemas de medidas. No entanto, alguns historiadores da Matemática (Roque, 2012; Boyer, 1974) não trazem dados que confirmem que os egípcios usavam frações para representar medida de comprimento, por meio de corda com nós igualmente espaçados, como se afirma nos livros didáticos B e D mencionados no parágrafo anterior. Verdade histórica ou não, o que nos preocupa de fato é o hiato entre o que vem antes e o que vem depois da abordagem histórica. Não há qualquer articulação entre os assuntos de tal forma que, após a abordagem histórica, no decorrer do capítulo de introdução, não se usa mais o contexto de medida de comprimento. A sensação é de que a retirada da abordagem histórica não faria diferença alguma.

O incentivo ao uso de materiais concretos foi identificado em apenas dois dos livros (B, F). Em ambos o material concreto é proposto para trabalhar frações correspondentes a uma ou mais partes, com áreas iguais, de uma figura geométrica. No livro F o material concreto é o Tangram, no entanto a obra não propõe atividades que exijam a participação efetiva do aluno. Há apenas ilustrações com peças do Tangram, o que não podemos considerar suficiente para o aluno compreender o processo de repartição do inteiro com aquele tipo de material, especialmente porque a maioria dos demais exemplos de frações de figuras geométricas envolvia partes congruentes. Já a atividade proposta no livro B exige a participação efetiva do aluno na construção do seu conhecimento, orientando que dividam tiras de papel em pedaços com mesma área, conforme mostra, a seguir, a Figura 5.

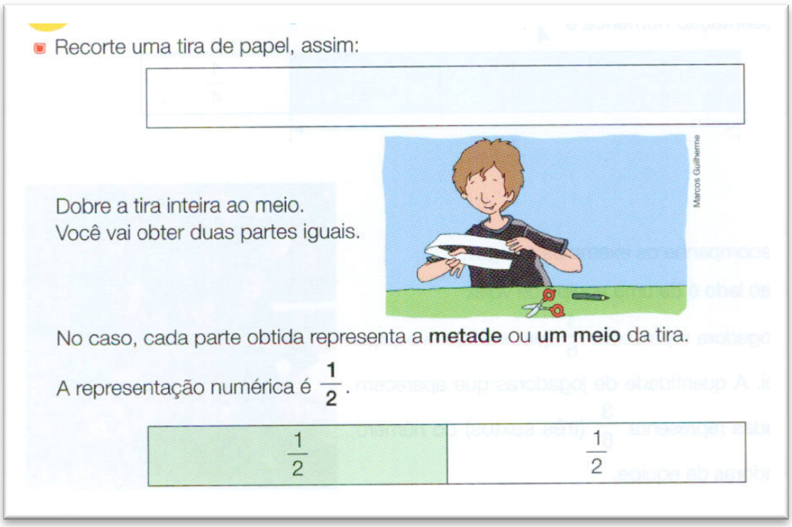


Figura 5 – Atividade com material concreto (Livro B, p.165)

Esta primeira classificação revela um aspecto muito preocupante: dos dez livros, apenas dois (B, D) apresentam atividades que exigem a participação efetiva dos alunos na construção do conhecimento. O livro B traz três atividades propostas, enquanto o livro D, propõe apenas uma. Confrontando esse dado com a proposta de Santos & Resende (2002), pode-se afirmar que a introdução do conceito de fração, da maioria dos livros aprovados pelo PNLD 2011, ainda não leva em conta a recomendação de que o aluno precisa se envolver na construção de seu conhecimento, por meio de atividades lúdicas, visando estabelecer bases firmes para auxiliar a passagem do concreto para o abstrato. Não temos dúvidas de que apenas exemplos apoiados por ilustrações não são suficientes para o aluno compreender o conceito de fração.

4.3.1.2 Análise da apresentação da representação fracionária

Analisamos, nesta seção, o tipo de abordagem que os livros usam para introduzir a representação fracionária. Observamos que, na primeira página do capítulo ou unidade, os livros buscam despertar o interesse do aluno para as frações e, para isso, já mostram sua notação. No entanto, a abordagem adotada pode ser dividida em dois grupos em função do que parece ser o objetivo dos autores, como explicamos a seguir.

As páginas de abertura dos capítulos ou unidades que dão início ao trabalho com frações no sexto ano, presentes em todas as obras, são compostas basicamente por ilustrações. Quase sempre também há questões para discussão (proposta no livro do aluno ou apenas no manual do professor). Nestas seções há um grupo de livros que exemplificam situações de uso das frações no cotidiano (SC) e há outros livros que se restringem a exemplificar o uso de frações em situações da própria matemática (SM).

Dos dez livros, verificamos que oito (A, B, D, E, G, H, I, J) buscam envolver o aluno com ilustrações que mostram a utilidade das frações em situações do cotidiano (SC) e apenas dois (C, F) apresentam apenas ilustrações da própria matemática.

No que diz respeito aos livros do primeiro grupo (SC), observamos comentários ou perguntas do tipo:

- *A Amazônia representa 1/3 das florestas tropicais do planeta*... (Livro A p.150);
- *Carlota vai comer 1/4 do chocolate. O que significa isso?* (Livro E, p.113);
- *Tomei 1/4 de litro de leite. Por favor, me dê 3/4 de carne moída. Quantos exemplos mais você pode dar, pensando em situações do seu dia a dia em que se usem frações?* (Livro B, p.163);
- *1/3 de xícara (chá) de manteiga*. (Livro I, p.150);
- *De toda superfície da Terra, 3/4 são cobertos por água* (Livro J, p.108);
- *Meia xícara de azeite* (livro H, p.114).

Observamos que, nas declarações acima, as frações são utilizadas para expressar situações da realidade em que vivemos. No entanto, segundo os PCN, *"ao abordar os racionais pelo seu reconhecimento no contexto diário, deve-se observar que eles aparecem muito mais na forma decimal do que na forma fracionária"* (PCN, 1998, p.103). Dificilmente encontraremos num projeto de arquitetura, a notação fracionária $\frac{7}{2}\,m$. É bem provável que encontremos a notação decimal $3{,}5\,m$.

Nas situações do cotidiano não é comum alguém utilizar a frase citada no livro B: *"Por favor, me dê ¾ de carne moída"*. É mais comum as pessoas pedirem 750 gramas de carne moída, meio quilograma de carne moída. Ainda há um erro na frase, pois não se explicita a unidade, no caso, a unidade de medida de massa. Seria preciso registrar: ¾ de kg de carne moída.

De modo geral, o que ocorre na abordagem dos livros do primeiro grupo (SC) é um apelo a questões do cotidiano, às vezes forçadas ou inadequadas, como se elas por si só, pudessem despertar o interesse dos alunos. A Figura 6 a seguir é um exemplo disso. Ambas as situações destacadas não aportam sentido algum ao conceito de fração como um instrumento que pode ser usado para expressar parte de uma unidade. Não há preocupação de explicitar a unidade a que se referem às frações $\frac{9}{16}$ e $\frac{1}{4}$. Bem sabemos que é apenas uma apresentação, porém a referência à unidade deveria ser sempre bem cuidada, já que este é um aspecto fundamental da conceituação de frações, quando se deseja usá-las em contextos concretos e não como números abstratos.

Figura 6 – As frações no cotidiano (Livro E, p.113)

Em todas as obras do primeiro grupo (SC), há situações que mostram o uso das frações para expressar parte de uma unidade em contextos que envolvem medidas (massa, comprimento, capacidade, etc.). Dos oito livros, quatro (A, B, E, J) apresentam, nessas páginas de abertura, o uso da fração de uma coleção, como mostra a Figura 7.

Figura 7 – As frações no cotidiano (Livro E, p.113)

A Figura 8, a seguir, mostra o uso da fração para expressar parte de uma pizza.

Figura 8 – As frações no cotidiano (Livro D, p.150)

Consideramos a situação da Figura 8 inadequada para dar início ao trabalho com frações. É improvável que um aluno do sexto ano consiga compreender a frase: *“um quarto de pizza será dividido igualmente entre duas pessoas.”* Sem dúvida, é cedo demais para comentar a ideia de fração que representa parte de uma parte da pizza, mesmo que o professor tente debater os exemplos apresentados com seus alunos com a intenção de motivá-los para a aprendizagem de frações.

Quanto à abordagem dos livros C e F, que trazem aplicações de frações que consideramos como situações da própria matemática (segundo grupo (SM)), o livro C traz uma ilustração que mostra apenas símbolos de frações, sem nenhuma pretensão de associá-las a situações do cotidiano. Já o livro F não usa a representação fracionária. Apresenta o tangram, quebra cabeça formado por sete peças, sem estabelecer qualquer relação com frações, como mostra a Figura 9. Esta abordagem abre portas para o estudo de fração associado a uma ou mais partes da área de uma figura geométrica, vínculo que não é feito nas páginas subsequentes e que fica a cargo do professor. Por certo, a abordagem será mais atrativa se o professor também promover a participação efetiva do aluno no manuseio com o tangram.

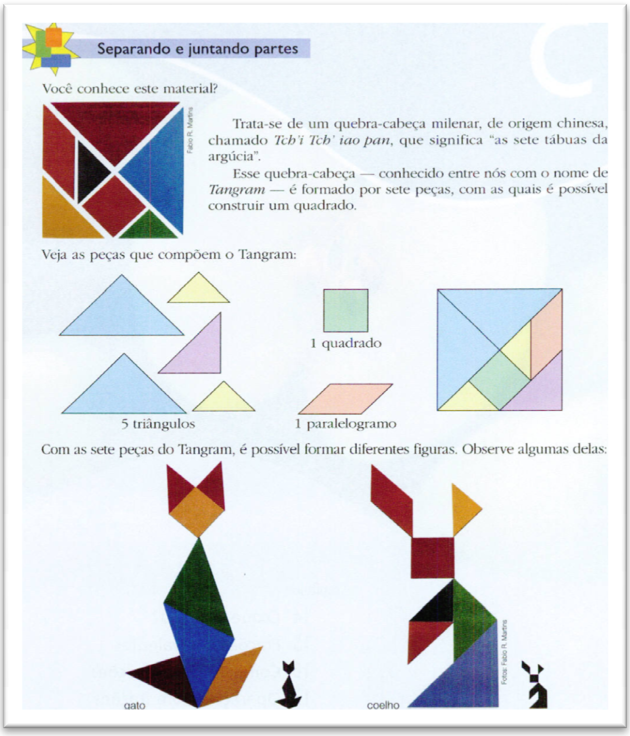


Figura 9 – Decomposição de uma figura (Livro F, p.154)

Concluímos que, durante a apresentação, a maioria das obras (A, B, D, E, F, G, H, I, J) busca mostrar que a fração pode ser usada para expressar parte de uma unidade em consonância com o fato de que todos privilegiam a conceituação de fração através da relação parte-todo. Consideramos pouco provável que ilustrações que mostram o uso das frações em situações do cotidiano sejam suficientes para despertar o interesse do aluno do sexto ano. A ação do professor, promovendo um debate em sala de aula a partir de tais ilustrações é fundamental, como alguns livros mencionam. No entanto, a seleção dos exemplos, muitas vezes, não nos parece adequada por mostrarem situações improváveis ou com níveis de aplicação difíceis de serem discutidos numa abordagem motivacional.

4.3.1.3 Análise dos contextos utilizados pelos 10 livros

Iniciamos pelo contexto que envolve área por ser o que dá início à sistematização das frações em todos os livros. Apesar de comprimento, volume, massa e capacidade, dentre outras, também serem grandezas contínuas, a presença de situações envolvendo-as é pouco significativa nas obras analisadas. Finalizamos a seção discutindo o tratamento dispensado nas obras a frações de coleções discretas.

Contextos que envolvem medida de área

O contexto mais frequente é o que envolve a divisão da superfície de uma figura geométrica em partes iguais ou a divisão da superfície da ilustração de um objeto, como uma pizza, em partes iguais. Em tais situações a área total (unidade) é dividida em n partes com áreas iguais, quase sempre congruentes. A partir deste tipo de contexto, alguns livros (B, D, F, G) informam ao aluno que cada parte é associada a uma fração com representação $\frac{1}{n}$. Assim, a fração é apresentada, por exemplo, usando a ilustração de um quadrado dividido em quatro partes congruentes, e informa-se que cada parte corresponde a $\frac{1}{4}$ do quadrado.

Além de recorrerem às figuras geométricas, como vimos no Quadro 2, também é frequente recorrerem a atividades que remetem a situações do cotidiano como: "Marta fez um bolo e dividiu em 5 partes iguais, das quais comeu duas." Exemplos deste tipo são acompanhados de ilustrações, neste caso, ilustração do bolo dividido em 5 partes, com duas delas destacadas. Como conclusão aparece a notação de fração para indicar que Marta comeu $\frac{2}{5}$ do bolo.

Logo depois de poucos exemplos dos tipos acima mencionados, a maioria dos livros (A, C, D, F, H, I, J) apresenta a nomenclatura dos termos de uma fração (numerador e denominador), e o vocabulário para leitura do denominador.

Apesar do recurso mais utilizado ser figuras geométricas planas, divididas em partes congruentes, apenas um dos livros traz uma situação que contribui para o aluno compreender que o que está em jogo é a igualdade das áreas das partes e que, portanto, as partes não precisariam ter necessariamente a mesma forma. Apresentamos na Figura 10, a seguir, a atividade proposta pelo livro D, que exige esse conhecimento.

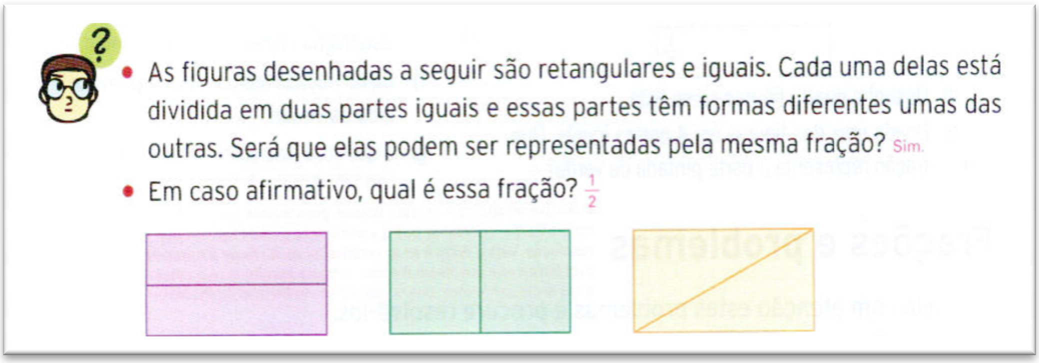


Figura 10 – Fração da área do retângulo (Livro D, p. 155)

Conforme podemos observar, a atividade apresentada na Figura 10 exige que o aluno compreenda o fato de que os três retângulos são congruentes e por conta disso, a divisão dos mesmos em duas partes com a mesma área não implica que necessariamente as mesmas tenham a mesma forma.

Observamos, também, que não há discussão de assuntos importantes, como o próprio conceito de área, nem do que se deve considerar para que as partes sejam iguais na divisão de coisas como pizzas, bolos e até frutas. Observamos que, dos dez livros, nove apenas mencionam o fato de que “as partes do inteiro são iguais”, como se isto bastasse para um aluno do sexto ano compreender o significado de “partes iguais” em diferentes situações.

Encontramos dois tipos de abordagens para associar uma ou mais partes de uma figura geométrica a uma fração. Uma delas apresenta figuras geométricas divididas em n partes congruentes e dá ênfase ao fato de cada parte corresponder à fração $\frac{1}{n}$, mesmo que a ilustração mostre, por exemplo, a fração $\frac{3}{4}$, como se vê na Figura 11, a seguir. Este tipo de abordagem é usado por quatro livros (B, D, F, G).

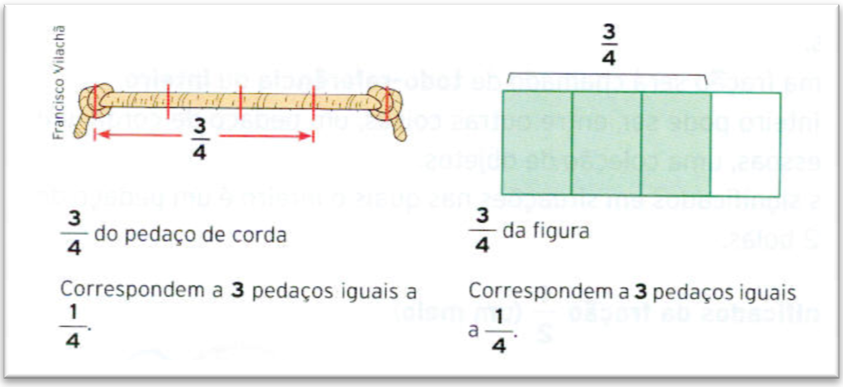
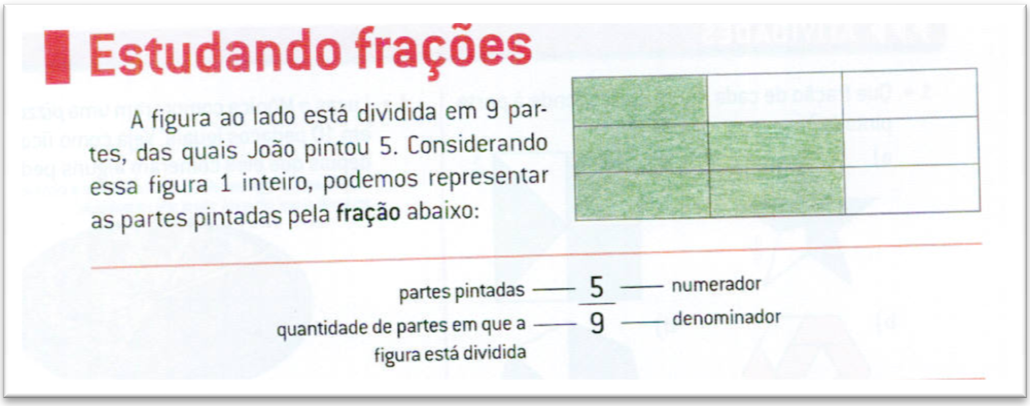


Figura 11 – Fração da área do retângulo (Livro D, p.154)

Consideramos que este tipo de abordagem pode evitar que o aluno determine a fração desejada apenas contando o número de partes pintadas e o número total de partes, o que pode levar a considerar a fração como uma sobreposição de dois números, resultantes das duas contagens, o que cria um obstáculo à compreensão da fração como um número.

O outro tipo de abordagem, que também parte de figuras geométricas divididas em n partes com áreas iguais, é o que leva o aluno a considerar o número m de partes pintadas da mesma cor (o numerador) e o número total n de partes que compõem a figura (o denominador), formando a representação fracionária $\frac{m}{n}$. Este tipo de abordagem é usado por seis dos livros analisados (A, C, E, H, I, J), como exemplificado na Figura 12.



Estudando frações

A figura ao lado está dividida em 9 partes, das quais João pintou 5. Considerando essa figura 1 inteiro, podemos representar as partes pintadas pela **fração** abaixo:

partes pintadas — 5 — numerador

quantidade de partes em que a figura está dividida — 9 — denominador

Figura 12 – Fração da área do retângulo (livro H, p.115)

Neste exemplo, a parte pintada de verde do retângulo maior foi associada à fração $\frac{5}{9}$ por uma relação entre o número de partes pintadas e o número total de partes em que o retângulo foi dividido. Não há na obra qualquer referência ao fato de cada parte do retângulo estar associada à fração $\frac{1}{9}$. Como já comentado, este tipo de abordagem pode levar o aluno a representar corretamente frações de ilustrações como a do exemplo, sem um entendimento do conceito que possa levá-lo posteriormente a compreender a fração como um número. Segundo os estudos de Campos *et al* (1995), citados por Nunes & Bryant (1997), neste tipo de abordagem estimula-se apenas uma espécie de contagem dupla, o que não favorece a compreensão do conceito de fração.

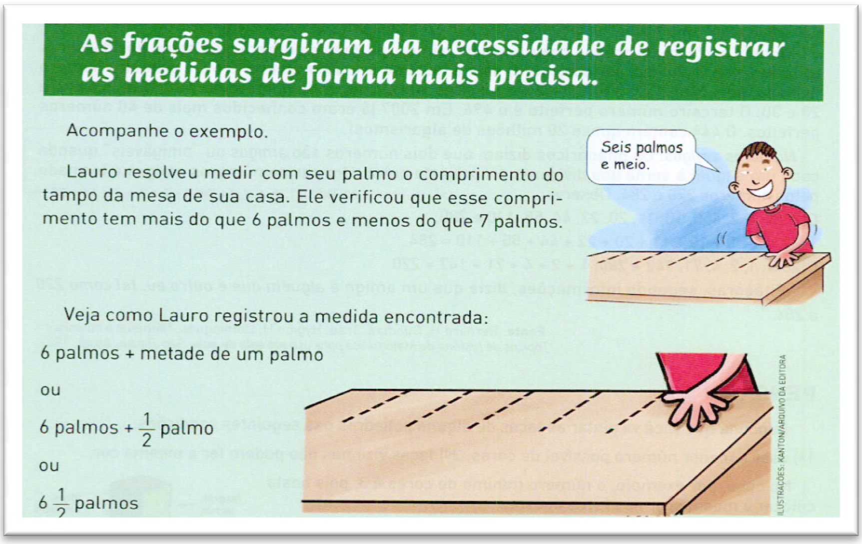
Outro fato que observamos na abordagem com figura geométrica (retângulo), é que a maioria dos livros (B, C, D, E, G, H, J) apresenta as partes com áreas iguais pintadas da mesma cor, todas juntas e da esquerda para direita, conforme podemos ver nos exemplos das Figuras 13 e 14 acima. É bem provável que este tipo de abordagem pode levar o aluno a criar estereótipos ao fato de que, se as partes pintadas da mesma cor não estiverem todas juntas, não é possível associá-las a uma fração correspondente.

Contextos que envolvem medida de comprimento e a reta numérica

Formalmente, a fração no contexto de medida, após atribuir um sentido a um segmento de reta $\overline{OA}$, indicaremos OA a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{OA}$. A medida OA é um número que deve expressar quantas vezes o segmento de reta $\overline{OA}$ contém um segmento u, fixado como unidade de comprimento. Por certo, não está claro o que significa a expressão "o número de vezes que o segmento de reta $\overline{OA}$ contém a unidade de medida u. No entanto, podemos usar esta ideia, meio que imprecisa, para chegar a uma definição precisa da medida do comprimento do segmento $\overline{OA}$. Tomemos de início um segmento de reta u, fixo, que chamaremos de segmento unitário ou unidade de comprimento. Definimos o comprimento de u igual a 1. Ainda, por definição, todos os segmentos de reta congruentes a u terão a medida do comprimento igual a 1. Se por ventura tivermos um número inteiro m qualquer, e se for possível obtermos $m-1$ pontos intermediários $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{m-1}$ no segmento de reta $\overline{OA}$, de maneira que os m segmentos $\overline{OM_1}, \overline{M_1M_2},\ \overline{M_{m-1}A}$ sejam todos congruentes ao segmento unitário u, decorre que a medida do comprimento do segmento de reta $\overline{OA}$ será o número inteiro m e escrevemos $\overline{OM_1} + \overline{M_1M_2} + \cdots + \overline{M_{m-1}A} = m$, ou seja, descrevemos esta situação $OA = m$, porque o segmento de reta $\overline{OA}$ se decompõe em m segmentos de reta justapostos, todos unitários (comprimento igual a 1).

Na maioria das vezes, nem sempre conseguimos um segmento de reta $\overline{OA}$ que contém o segmento unitário u um número inteiro de vezes. Por exemplo, pode ser que o segmento de reta $\overline{OA}$ seja menor do que o segmento unitário u. Sendo assim, a medida OA não pode ser um número inteiro. Para resolvermos este tipo de situação, suponhamos, por hipótese, que embora o segmento de reta $\overline{OA}$ não contenha u um número inteiro de vezes, exista um segmento menor v, tal que v esteja m vezes contido em u e n vezes contido em $\overline{OA}$, sendo $m\ e\ n$ números inteiros. Neste caso, dizemos que o segmento v é um submúltiplo comum dos segmentos $\overline{OA}$ e u. Como o segmento v está contido m vezes no segmento u, decorre que a medida de v é dada por $\frac{1}{m}$. E, como o segmento v está contido n vezes no segmento $\overline{OA}$, decorre que a medida de $\overline{OA}$ é n vezes a medida de v, logo $OA = n \times \frac{1}{m}$, isto é, $OA = \frac{n}{m}$. Dizemos que o símbolo $\frac{n}{m}$ representa um número racional na sua forma fracionária.

Verificamos que dos dez livros, cinco (A, B, D, G, I) apresentam o uso da fração para expressar medida de comprimento, apesar de não sistematizá-lo formalmente. O livro A apresenta um exemplo com uma pessoa medindo o comprimento de uma praça, usando como unidade de medida o comprimento de seu passo. Já o livro I, apresenta um exemplo de uma pessoa medindo o tampo de uma mesa, usando como unidade de medida o comprimento de seu palmo, como mostra a Figura 13.


As frações surgiram da necessidade de registrar as medidas de forma mais precisa.

Acompanhe o exemplo.

Lauro resolveu medir com seu palmo o comprimento do tampo da mesa de sua casa. Ele verificou que esse comprimento tem mais do que 6 palmos e menos do que 7 palmos.

Seis palmos e meio.

Veja como Lauro registrou a medida encontrada:

6 palmos + metade de um palmo

ou

6 palmos + $\frac{1}{2}$ palmo

ou

$6\frac{1}{2}$ palmos

ILUSTRAÇÕES: KANTON/ARQUIVO DA EDITORA

Figura 13 – A fração expressando uma medida de comprimento (Livro I, p.150)

O exemplo da Figura 13 mostra que nem sempre a unidade de medida escolhida cabe um número inteiro de vezes no comprimento que se deseja medir e por conta disso, houve à necessidade de repartir a unidade, onde surgiram as frações.

Os exemplos apresentados pelos livros A e I são adequados. O problema é que ambos os livros não apresentam atividades envolvendo medida de comprimento, que exigem a participação efetiva do aluno.

Nos livros B e D a ideia de medida de comprimento aparece na abordagem histórica das frações no antigo Egito, como mencionado na seção sobre recursos didáticos. No livro D afirma-se que os egípcios usavam cordas com nós igualmente espaçados para medir comprimento como também apresenta-se uma ilustração deste instrumento de medida. Já no livro B encontramos apenas uma ilustração para exemplificar uma corda com nós, sem comentários sobre a igualdade do espaçamento entre os nós. O objetivo das cinco situações parece ser apenas mostrar que nem sempre a unidade de medida escolhida cabe um número inteiro de vezes no comprimento que se deseja medir e, por conta disso, houve a necessidade de repartir a unidade, o que deu origem às frações. Na Figura 14, apresentamos a abordagem do livro D.

Figura 14 – As frações no antigo Egito (Livro D, p.152)

Observamos na Figura 14, que a abordagem do livro D busca mostrar a questão da necessidade de repartir a unidade, com o objetivo de levar o aluno à compreensão de como surgiram às frações. Certamente, apresentar apenas ilustrações não é suficiente para o aluno compreender a necessidade da divisão da unidade em partes com comprimentos iguais. É necessário expor o aluno em situações de divisão de um dado segmento de reta qualquer.

Um fato intrigante é que os PCN (1998) sugerem abordar o uso das frações pelos egípcios, por meio de seus sistemas de medidas. No entanto, alguns historiadores da Matemática (Roque, 2012; Boyer, 1974) não relatam dados que confirmem que os egípcios usavam frações para representar medida de comprimento, por meio de corda com nós igualmente espaçados.

Na verdade, o fato que mais nos preocupa não é este, e sim, o hiato que existe entre o que vem antes e o que vem depois da abordagem histórica, tamanha a falta de articulação entre os assuntos. Verificamos que, logo após a abordagem histórica, os livros (B, D) não falam mais, no decorrer da introdução, em medida. A sensação é que a retirada da abordagem histórica, não faria diferença alguma.

Sabe-se que o uso da história da Matemática é um dos caminhos para ""fazer Matemática"" na sala de aula (BRASIL, p.42), mas é preciso que seu uso auxilie na construção do conceito do objeto matemático em estudo, que no nosso caso são as frações. Certamente, os símbolos das frações egípcias apresentados na abordagem histórica, em nada contribuem para a construção do conceito de fração. Sequer a ideia do uso das frações para medir é bem explorada. Isso poderia ser proposto por meio de uma atividade lúdica, usando a corda com nós, por exemplo, o que poderia levar o aluno à compreensão do fato de que a unidade escolhida nem sempre "cabe um número inteiro de vezes no comprimento que se deseja medir".

No livro G, a ideia de medida de comprimento está presente em um exemplo, sem apoio de desenho, afirma-se:

> Se você precisar medir um comprimento em metros, pode ser que o resultado não seja um número natural. Por exemplo, pode ser um valor entre 1 e 2. Como se indica essa parte do metro que está entre 1 e 2? Para situações como essas, foram criados os números fracionários. Vamos estuda-los, começando pelas frações (p.126).

O que se informa ao aluno é extremamente vago e consideramos pouco provável que um aluno do sexto ano consiga compreender o que se pretende, sem sequer ter, antes, experimentado concretamente o uso das frações para representar uma medida de comprimento usando o metro como unidade.

Por certo, a abordagem nos cinco livros busca mostrar ao aluno a limitação dos números naturais no campo das medidas, que consequentemente levou o homem a criar as frações. O problema é que suas abordagens se desenvolvem com base em exemplos, como se estes fossem suficientes para o aluno compreender a necessidade que levou o homem a dividir a unidade de medida para continuar o processo de medição. Poderia haver, pelo menos, um desafio para o aluno realizar medições, usando diferentes unidades, e tomar decisões sobre o que fazer para medir uma parte menor do que a unidade que está sendo usada.

Observamos que em nenhuma das obras o uso de frações em situações de medida de comprimento se associa com a representação da fração na reta numérica, como defende Wu (1998). Mesmo considerando os volumes do 6º ano como um todo, apenas nas coleções A e D, no capítulo destinado aos números decimais, a reta numérica é associada aos racionais.

Contextos que envolvem medida de massa, volume e capacidade

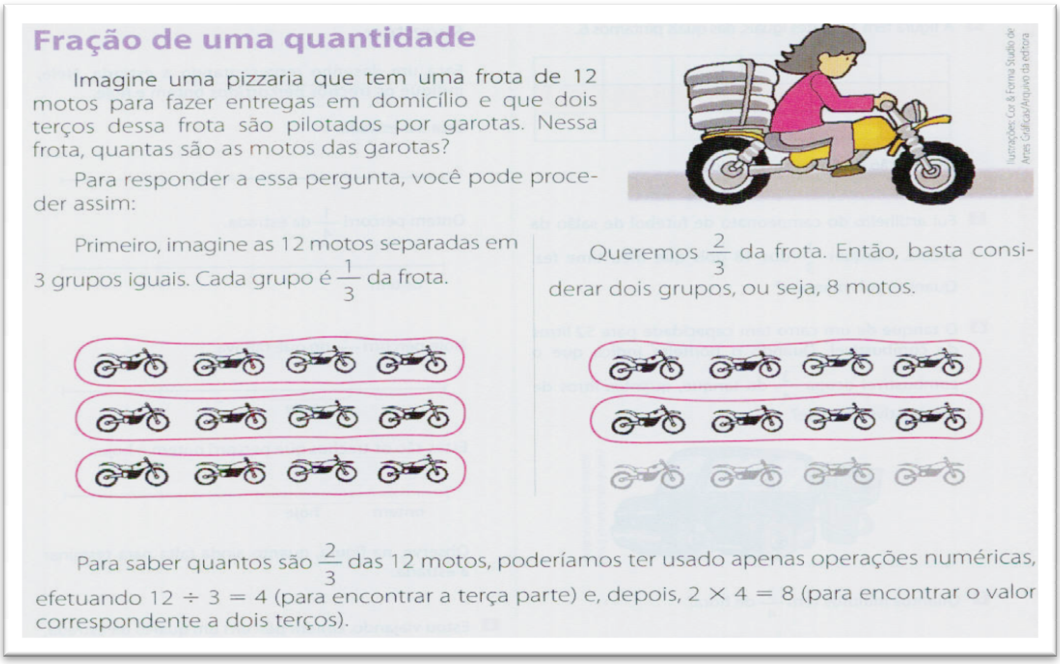
O uso de frações em situações envolvendo medida de massa, de volume ou de capacidade está presente nas listas de atividades propostas ao aluno das dez obras. Em quatro livros (I, B, J, H) situações deste tipo são mencionadas nas páginas de abertura do capítulo/unidade ($\frac{3}{4}$ do tanque de combustível, por exemplo). No entanto, se presentes, servem apenas como exemplos de usos de frações no cotidiano e ficam em aberto. Não há qualquer discussão a respeito do uso destas outras grandezas e, muito menos, do que se deve considerar para realizar uma divisão em partes iguais nestes casos. De fato, como o que ganha ênfase nas atividades são as medidas, o aluno lida com números pouco importando seu significado na situação. Cabe ressaltar que quando os exemplos envolvem objetos do cotidiano, nas figuras ilustrativas o que é levado em conta é a área da superfície maior e que sempre possui um formato conveniente (circular ou retangular).

Contextos que envolvem coleções

Os exemplos e atividades que envolvem as frações de coleções discretas de objetos podem ser separados em três tipos dependendo do que solicitam:

- conhecendo o total de elementos da coleção e a fração, determinar a quantidade de elementos de cada parte e, se o numerador for maior do que 1, obter a quantidade de elementos das partes indicadas pelo numerador;
- conhecendo o total de elementos da coleção e a quantidade de elementos de uma parte, determinar a fração que associa estas quantidades;
- conhecendo a quantidade de elementos de uma parte e a fração que esta quantidade representa do total de elementos, determinar a cardinalidade da coleção.

No primeiro caso, a fração dada representa a quantidade de elementos de uma parte (o que se deseja determinar). As obras indicam como obter tal número por meio de uma sequência de cálculos, recorrendo a situações resolvidas, como se observa no exemplo da Figura 15. A Figura 15 ilustra ainda uma estratégia adotada em dois livros (E, G). A saber: os exemplos mostram uma ilustração da coleção, já dividida n em grupos com a mesma quantidade de elementos, onde n é o denominador da fração envolvida no enunciado. Este tipo de ilustração contribui, por um lado, para dar mais significado ao problema e, por outro, retira do aluno a necessidade de pensar em estratégias para realizar tal divisão, parte essencial de um problema envolvendo frações. Observada a quantidade de elementos que compõe cada parte da coleção, sem dúvida, a apresentação do procedimento fica facilitada.


Fração de uma quantidade

Imagine uma pizzaria que tem uma frota de 12 motos para fazer entregas em domicílio e que dois terços dessa frota são pilotados por garotas. Nessa frota, quantas são as motos das garotas?

Para responder a essa pergunta, você pode proceder assim:

Primeiro, imagine as 12 motos separadas em 3 grupos iguais. Cada grupo é $\frac{1}{3}$ da frota.

Queremos $\frac{2}{3}$ da frota. Então, basta considerar dois grupos, ou seja, 8 motos.

Para saber quantos são $\frac{2}{3}$ das 12 motos, poderíamos ter usado apenas operações numéricas, efetuando $12 \div 3 = 4$ (para encontrar a terça parte) e, depois, $2 \times 4 = 8$ (para encontrar o valor correspondente a dois terços).

Figura 15 – Fração de uma coleção (Livro G, p.127)

A outra forma de abordar frações de uma coleção é determinar a fração por meio de uma relação entre o número de elementos das partes de uma coleção e o número total de elementos que compõe a coleção.

A título de exemplo reproduzimos um problema do livro F: *"Um casal tem 5 filhos: Alfredo, Carlos, Ênio, Lucas e Marisa. Na família, os homens representam 5/7 (cinco sétimos). E as mulheres 2/7 (dois sétimos) do total de pessoas."* (p.166). Verificamos que, dos dez livros, cinco (A, B, D, F, J) trazem situações deste tipo. No entanto, há uma sutil diferença entre o tratamento adotado, como passamos a explicar.

Em três dos livros (B, F, J) analisados, os exemplos são como o apresentado no parágrafo anterior: informam-se as quantidades de elementos que compõem as partes de uma coleção e, consequentemente, a soma destas quantidades fornece a cardinalidade da coleção como um todo. O objetivo é encontrar a fração que representa uma relação entre as partes e o todo (no exemplo anterior, homens e mulheres de uma família). Nestes casos não se apresenta um procedimento (nem isso é necessário) para determinação do resultado, ou seja, da fração. Espera-se que o aluno compreenda que basta contar o número m de elementos que compõe cada parte da coleção e o número n de elementos da coleção, e escreva a representação fracionária $\frac{m}{n}$. O problema é que há situações nas quais esta associação direta não basta e isso nos faz lembrar que Nunes & Bryant (1997) afirmam que com as frações as aparências enganam, pois, o aluno pode acertar as atividades que envolvem o conceito de fração sem de fato ter entendimento do conceito.

O outro tipo de abordagem é realizado pelos livros A e D. Nestes há um exemplo que mostra uma coleção dividida em n grupos com a mesma quantidade de elementos, onde cada grupo corresponde à fração $\frac{1}{n}$. Consideramos que esta abordagem abre caminho para compreensão, a *posteriori*, do procedimento usado para resolver problemas do tipo: $\frac{3}{4}$ de uma coleção com 12 elementos equivale a x elementos.

$$\frac{1}{4}\,de\ 12 = 12 \div 4 = 3\ \rightarrow\ \frac{3}{4}de\ 12 = 3 \times 3 = 9.$$

Apresentamos na Figura 16, a seguir, o exemplo do livro A.

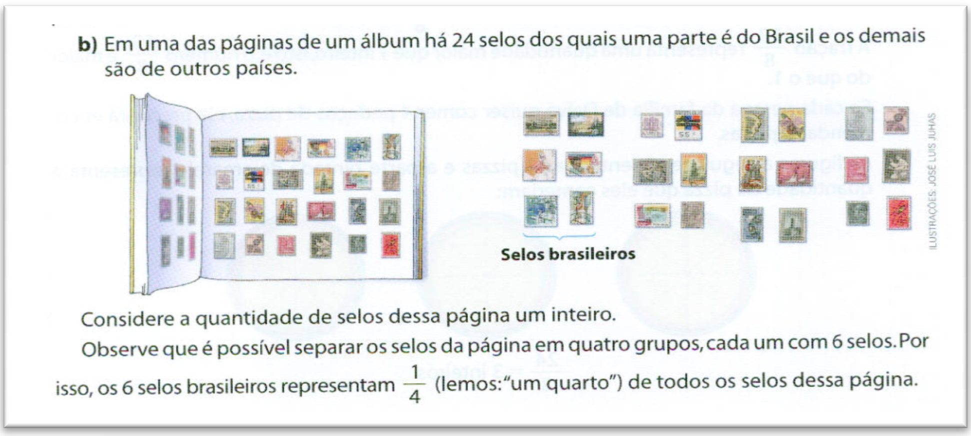


Figura 16 – Fração de uma coleção (livro A, p. 153)

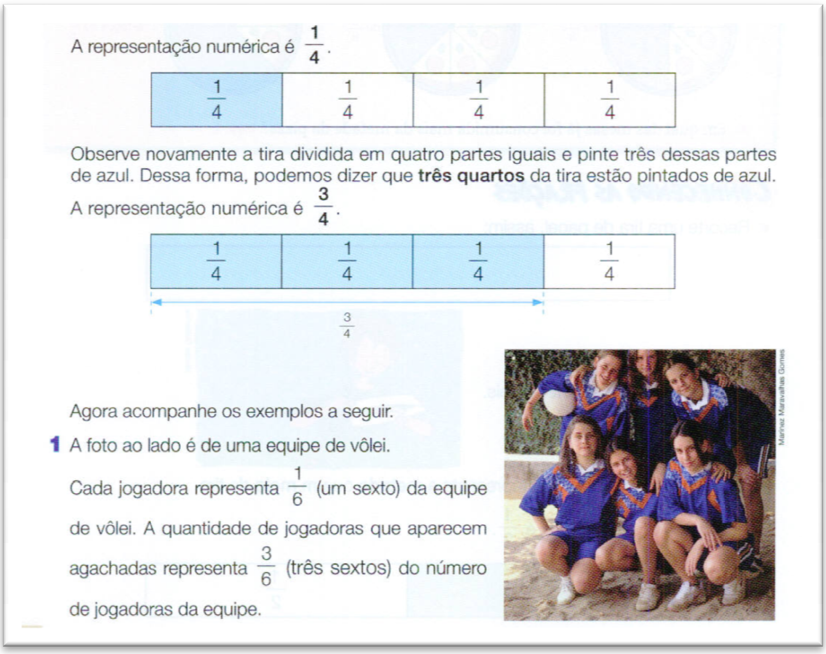
Como já mencionado na análise dos recursos, nos parece inadequado que nenhuma coleção solicite ao aluno o uso de material concreto para trabalhar a repartição de uma coleção em partes com a mesma quantidade de elementos. Vimos que o único recurso utilizado são ilustrações, desenhos ou fotografias.

Outro fato preocupante é a mistura de exemplos que envolvem coleção com os que envolvem área de figuras geométricas, presente nos livros A, B, D, E e J, sem ao menos comentar que os procedimentos usados para associar uma fração correspondente a uma parte de uma coleção são diferentes dos procedimentos usados para associar uma fração correspondente a uma parte da área de uma figura geométrica. Em nenhum momento discute-se que, o “todo” que representa a área de uma figura geométrica é diferente do “todo” que representa uma coleção. Já os livros F e G separam cada tipo de contexto por meio de subtítulos. Entretanto, estes livros também não contribuem para que o aluno compreenda a diferença entre o “todo” nas duas situações. É claro que um aluno do sexto ano não tem maturidade para compreender uma explicação teórica sobre tal assunto. Mas, uma maneira didática de explicar ao aluno a diferença entre a natureza de ambas as situações é propor atividades lúdicas, como sugerem Santos e Rezende (2002). Parece óbvio que $\frac{1}{3}$ de 15 equivale a 5.

No entanto, Monteiro e Costa argumentam que:

> [...] $\frac{1}{3}$ de uma unidade contínua ou $\frac{1}{3}$ de um conjunto discreto de 15 elementos são situações diferentes, e o fato de 5 (unidades simples) corresponder à segunda situação pode construir um motivo de perturbação para os alunos. (MONTEIRO e COSTA, 1996, p.61).

Apresentamos na Figura 17, a seguir, a abordagem apresentada pelo livro B.



A representação numérica é $\frac{1}{4}$.

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Observe novamente a tira dividida em quatro partes iguais e pinte três dessas partes de azul. Dessa forma, podemos dizer que **três quartos** da tira estão pintados de azul.

A representação numérica é $\frac{3}{4}$.

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4}$

Agora acompanhe os exemplos a seguir.

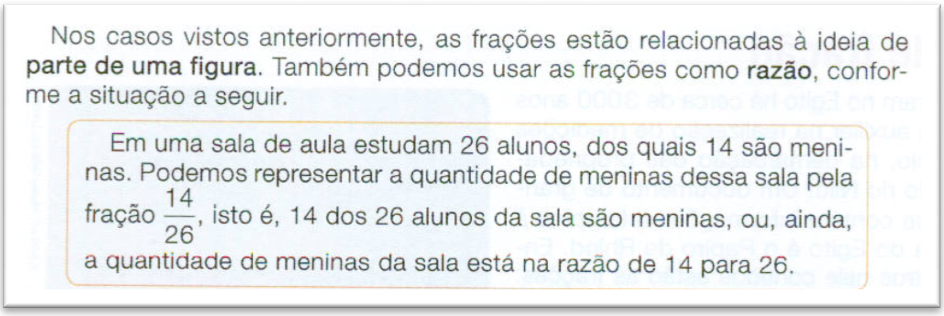
1 A foto ao lado é de uma equipe de vôlei.

Cada jogadora representa $\frac{1}{6}$ (um sexto) da equipe de vôlei. A quantidade de jogadoras que aparecem agachadas representa $\frac{3}{6}$ (três sextos) do número de jogadoras da equipe.

Figura 17 – Fração da área e fração de uma coleção (Livro B, p.166)

Conforme podemos observar na Figura 17, os dois exemplos estão inseridos em contextos que envolvem área e coleção. Em nenhum momento se comenta a diferença entre o "todo" em ambas as situações. Considerando a citação de Monteiro e Costa (1996), é pouco provável que o aluno compreenda os procedimentos usados para associar uma fração correspondente a uma parte do "todo", em ambas as situações, apenas por meio de exemplos.

Como já mencionamos, os PCN (1998) sugerem trabalhar os vários significados da fração de maneira conjunta. Um dos livros (J) tenta contemplar tal proposta, mas sua abordagem apresenta alguns equívocos ao apresentar a fração com "significados" de razão e quociente. Na Figura 18, a seguir, a obra informa que "Também podemos usar as frações como razão" e, logo em seguida, apresenta um exemplo do que seria tal uso. De fato, no exemplo apresentado, a situação pode ser traduzida como parte-todo, com 26 elementos, cada elemento sendo representado pela fração $\frac{1}{26}$, ou seja, o todo dividido em 26 partes, sendo 14 delas de um tipo, meninas.



Nos casos vistos anteriormente, as frações estão relacionadas à ideia de **parte de uma figura**. Também podemos usar as frações como **razão**, conforme a situação a seguir.

Em uma sala de aula estudam 26 alunos, dos quais 14 são meninas. Podemos representar a quantidade de meninas dessa sala pela fração $\frac{14}{26}$, isto é, 14 dos 26 alunos da sala são meninas, ou, ainda, a quantidade de meninas da sala está na razão de 14 para 26.

Figura 18 – Fração de uma coleção (Livro J, p.110).

O exemplo da Figura 19, também do livro J, anuncia a fração como "quociente de uma divisão". No entanto, o que de fato apresenta é o caso de uma fração com numerador igual ao denominador e traz como ilustração uma situação típica da relação parte-todo em uma figura geométrica. Evidentemente, não conceitua fração como divisão de dois naturais quaisquer. Como agravante induz o aluno a considerar válido um comportamento condenável em Matemática – generalizar a partir de um único exemplo – e, pior, exemplo de um caso atípico. Lembramos que, segundo os PCN (BRASIL, 1998), o aluno diferencia "significado" parte-todo do "significado" quociente, pois, "dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 unidades em 3 partes iguais. No entanto, nos dois casos, o resultado é dado pelo mesmo número $\frac{2}{3}$" (p.102).

A fração também está relacionada ao **quociente de uma divisão**. A fração $\frac{5}{5}$, por exemplo, representa 1 inteiro, ou seja, $\frac{5}{5} = 1$. Como $5 : 5 = 1$, temos que $\frac{5}{5} = 5 : 5$.

Assim, podemos escrever uma fração na forma de divisão e vice-versa. O traço da fração representa uma divisão.

Figura 19 – Fração da área de uma figura (Livro J, p.110)

4.4 Quando e como a fração é definida nos livros didáticos

Nesta seção, buscamos compreender, nas obras, o que é uma fração. Nosso objetivo foi identificar quando e como ocorre a definição de fração. Durante nossa análise, encontramos dois tipos de abordagens. Por conta disso, separamos os livros em dois grupos:

- Os que apresentam a fração como número racional (RF).
- Os que buscam dar significado à representação fracionária (SF).

Dos dez livros analisados, verificamos que oito buscam apresentar o que é uma fração, enquanto apenas dois (A e I) apresentam as frações como representação dos números racionais.

A seguir, reproduzimos as definições dos livros A e I respectivamente:

- *"Todo número que pode ser representado na forma de fração a/b, em que a e b são números naturais, com b ≠ 0, é um número racional"* (Livro A, p.152).

Esta definição é apresentada logo no início da introdução, antes de estabelecer a nomenclatura de frações.

- *"Número racional é todo número que pode ser escrito na forma de uma fração com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero"* (Livro I, p.158).

Esta definição está presente depois ter sido estabelecida a nomenclatura de frações, numa seção sob o título: Número racional.

Certamente, nenhuma destas duas definições diz claramente o que é uma fração. Elas apenas mencionam que as frações servem de modelo para representar os números racionais. Consideramos que sem compreender o que é uma fração e seus usos o aluno não será capaz de generalizar tal conceito para construir um novo conjunto numérico, os racionais. Mais que isso, nos parece que nas definições apresentadas valoriza-se apenas a introdução de nomenclatura. Segundo Wu (2005), compreender as frações é uma condição necessária para construção dos números racionais, pois as frações conduzem os primeiros passos à abstração.

Descrevemos, a seguir, o que os livros do segundo grupo (SF) apresentam com o intuito de sistematizar o que são frações. Buscamos detectar nas obras a parte do texto com afirmação do tipo "fração é...":

- "$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}$ *e* $\frac{5}{8}$ *são chamados frações e indicam partes de figuras ou de quantidades."* (Livro B, p.167).
- *"As frações são um tipo especial de número."* (Livro C, p.86).
- *"Usamos frações para representar números que indicam uma ou várias partes de um todo que foi dividido em partes iguais."* (Livro D, p.153).
- *"As frações são escritas numéricas usadas para indicar partes de quantidades, medidas, grupos de pessoas, etc."* (Livro E, p.113).
- *"Fração é um número que representa partes de um inteiro."* (Livro F, p.156).
- *"Na Matemática, a fração pode ser: parte do objeto, o objeto todo, o objeto todo mais parte dele, dois objetos, dois objetos mais a metade dele, etc."* (Livro G, p.133).
- *"Fração é um número que pode ser parte de uma unidade ou uma quantidade que foi dividida em partes iguais."* (Livro H, p.115).
- *"Fração é um número que pode representar parte de um inteiro ou parte de uma quantidade."* (Livro J, p. 110).

Com exceção do livro G, nos outros sete livros as afirmações descritas, que buscam informar o que é uma fração, são apresentadas logo no início da introdução.

Observamos nas citações acima que o significado de parte-todo é o foco das definições adotadas. Alguns livros se referem às frações como números. No entanto, se o objetivo é levar o aluno ao entendimento de que as frações são números que ampliam o sistema numérico, este tipo de definição não serve. Como mencionado no capítulo 1, Wu (2005) argumenta que o problema da definição de fração como parte-todo, é que ela privilegia as frações que são menores do que 1.

Observamos que o livro G é o único que tenta não restringir a ideia de fração a um número menor do que a 1, mas o faz de modo bastante confuso, por meio de alguns exemplos. E ainda pior, a redação de sua definição confunde a fração como número com o próprio objeto ou parte dele.

Um dos desafios para ensino de frações na escola é conseguir realizar uma abordagem por meio de definições que sejam inteligíveis para o aluno, ou seja, uma definição com a qual o aluno consiga compreender efetivamente o que é uma fração. Sem dúvida, a definição formal de frações por meio de classes de equivalência não é adequada nesta fase de escolaridade, como discutido no capítulo de referencial teórico deste trabalho. Mas, não encontramos nos livros analisados uma definição adequada para substituí-la. Ao mesmo tempo em que há nos livros dificuldade de sistematizar o conceito de fração, valoriza-se a apresentação de nomenclaturas, desde o como se leem diversas frações e do nome de seus termos, até classificações como frações próprias e impróprias, número misto, etc.

Wu (1998) afirma que:

> Em "frações" é possível encontrar muitos itens, tais como “adicionar”, “multiplicar”, “números mistos”, ou “estimar”, mas nunca a definição. Este estado de ambiguidade, não surpreendentemente, gera confusão interminável sobre os conceitos de “razão”, “proporção”, e “porcentagem” (WU, 1998, p.2).

No capítulo 1, vimos que este autor propõe definir fração como ponto na reta numérica, recorrendo a conhecimentos prévios de números naturais e de medida de segmento de reta. Para ele este caminho possibilita compreender as frações como números e que elas ampliam o sistema numérico já conhecido.

Na próxima seção, analisamos o tipo de abordagem que os livros apresentam para ampliar o conceito de fração para números maiores do que 1.

4.5 As frações maiores do que 1

Apresentamos, nesta seção, nossa análise de como os livros apresentam as frações maiores do que 1. Verificamos que apenas três obras (A, G, I) apresentam na introdução, exemplos de situações do cotidiano que envolvem a ideia de fração maior do que a unidade. No geral, os livros dão ênfase às frações menores do que 1. As frações maiores do que 1 são tratadas mais adiante, no decorrer do capítulo ou unidade, como um novo caso, às vezes em uma seção específica.

Descrevemos, a seguir, os recursos utilizados pelos livros para dar inteligibilidade ao conceito de fração maior do que 1. Em todas as obras esta apresentação é feita com base em exemplos acompanhados de uma ilustração. Assim, classificamos a abordagem das obras, segundo o tipo de exemplo utilizado:

- Situação envolvendo área de figuras geométricas planas.

Verificamos que, dos dez livros, sete (B, C, D, E, F, I, J) usam situações da própria matemática, ou seja, usam uma sequência de figuras geométricas planas congruentes, todas divididas em partes com a mesma área.

- Situação envolvendo figuras que ilustram objetos da realidade (bolo, pepino, barra de chocolate, laranja, etc.).

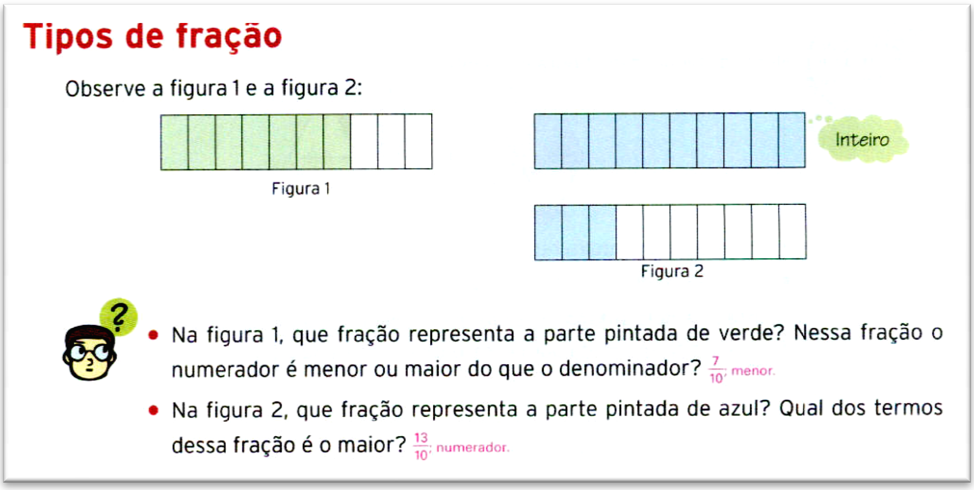
Verificamos que, dos dez livros, sete (A, B, C, G, E, H, I) usam situações do cotidiano que podem ser representadas por meio de ilustração.

Observamos que os livros B, C, E e I utilizam exemplos nas duas categorias. Discutimos alguns exemplos presentes nos livros para tratar de frações maiores do que 1.

Situação envolvendo área de figuras geométricas planas

Neste contexto, as sete obras apresentam uma sequência com n figuras geométricas congruentes, todas divididas em m partes com a mesma área, sendo que cada parte corresponde à fração $\frac{1}{m}$. Se o número p de partes pintadas na sequência de figuras for um múltiplo de m $(p = k.m)$, decorre que a fração $\frac{p}{m} = \frac{km}{m} = k$, ou seja, um número inteiro. Este tipo de fração é conhecida como fração "aparente". Agora, se p não é múltiplo de m, temos a fração $\frac{p}{m}$, conhecida como fração "imprópria".

Observamos na Figura 20, a seguir, a atividade proposta pelo livro D para introduzir a ideia de fração maior do que 1. Se por um lado a participação do aluno na construção de seu conhecimento é desejável, por outro é criticável a introdução de uma nova ideia por meio de apenas um exemplo. Logo em seguida, busca-se sistematizar o significado de fração "imprópria, "própria" e "aparente", como mostra a Figura 21.


Tipos de fração

Observe a figura 1 e a figura 2:

- Na figura 1, que fração representa a parte pintada de verde? Nessa fração o numerador é menor ou maior do que o denominador? $\frac{7}{10}$; menor.
- Na figura 2, que fração representa a parte pintada de azul? Qual dos termos dessa fração é o maior? $\frac{13}{10}$; numerador.

Figura 20 – Fração maior do que 1 (Livro D, p.159)

Na fração $\frac{7}{10}$, o numerador 7 é menor que o denominador 10. Dizemos que $\mathbf{\frac{7}{10}}$ é uma **fração própria**.

As **frações próprias** têm numerador **menor** que o denominador.

Na fração $\frac{13}{10}$, como 13 é maior que 10, dizemos que $\mathbf{\frac{13}{10}}$ é uma **fração imprópria**.

Nas **frações impróprias**, o numerador é **maior** que o denominador.

Existem frações em que o **numerador é múltiplo do denominador**. Frações desse tipo são chamadas **frações aparentes**. Veja os exemplos:

$\frac{18}{3}$ — 18 é múltiplo de 3.

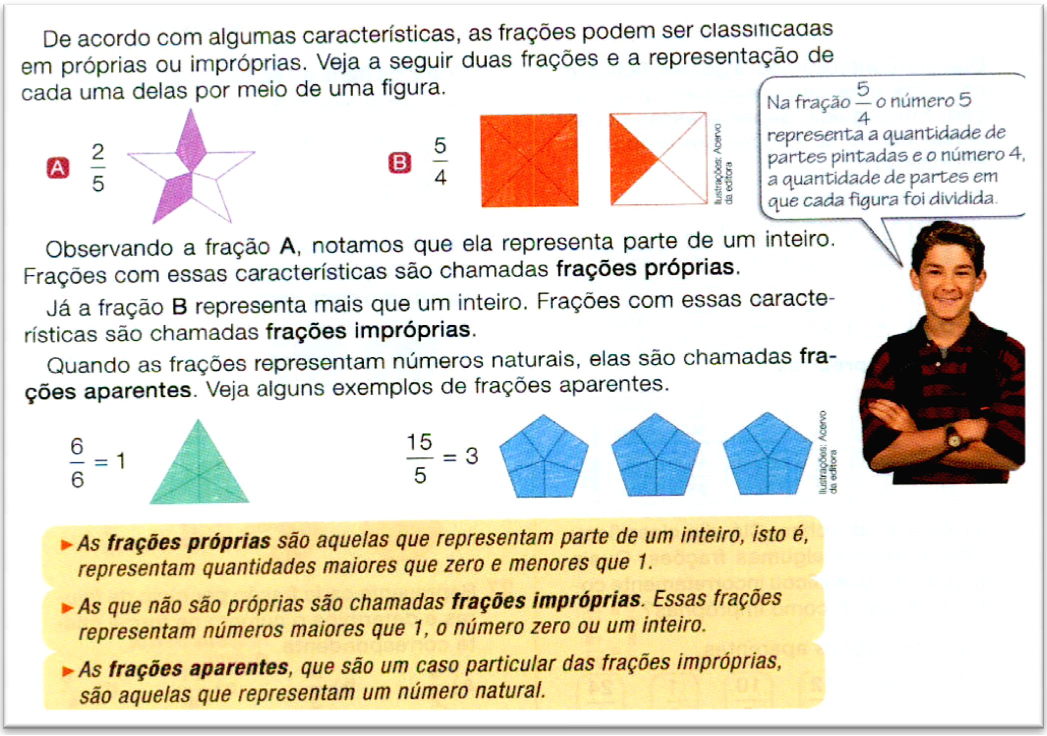
$\frac{18}{3}$ — É uma fração aparente igual a **6**. Observe: $\frac{18}{3} = 18 : 3 = 6$

$\frac{500}{4}$ — 500 é múltiplo de 4.

$\frac{500}{4}$ — É uma fração aparente igual a **125**. Observe: $\frac{500}{4} = 500 : 4 = 125$

Figura 21 – Tipos de frações (Livro D, p.115)

A Figura 22, a seguir, reproduz a abordagem realizada no livro J para apresentar o conceito de fração maior do que 1, que como no caso anterior, é feita por meio de exemplos: um de fração imprópria e dois de fração aparente. Em seguida, definem-se frações “própria”, “imprópria” e “aparente”.



De acordo com algumas características, as frações podem ser classificadas em próprias ou impróprias. Veja a seguir duas frações e a representação de cada uma delas por meio de uma figura.

A $\frac{2}{5}$ **B** $\frac{5}{4}$

Ilustrações: Acervo da editora

Na fração $\frac{5}{4}$ o número 5 representa a quantidade de partes pintadas e o número 4, a quantidade de partes em que cada figura foi dividida.

Observando a fração **A**, notamos que ela representa parte de um inteiro. Frações com essas características são chamadas **frações próprias**.

Já a fração **B** representa mais que um inteiro. Frações com essas características são chamadas **frações impróprias**.

Quando as frações representam números naturais, elas são chamadas **frações aparentes**. Veja alguns exemplos de frações aparentes.

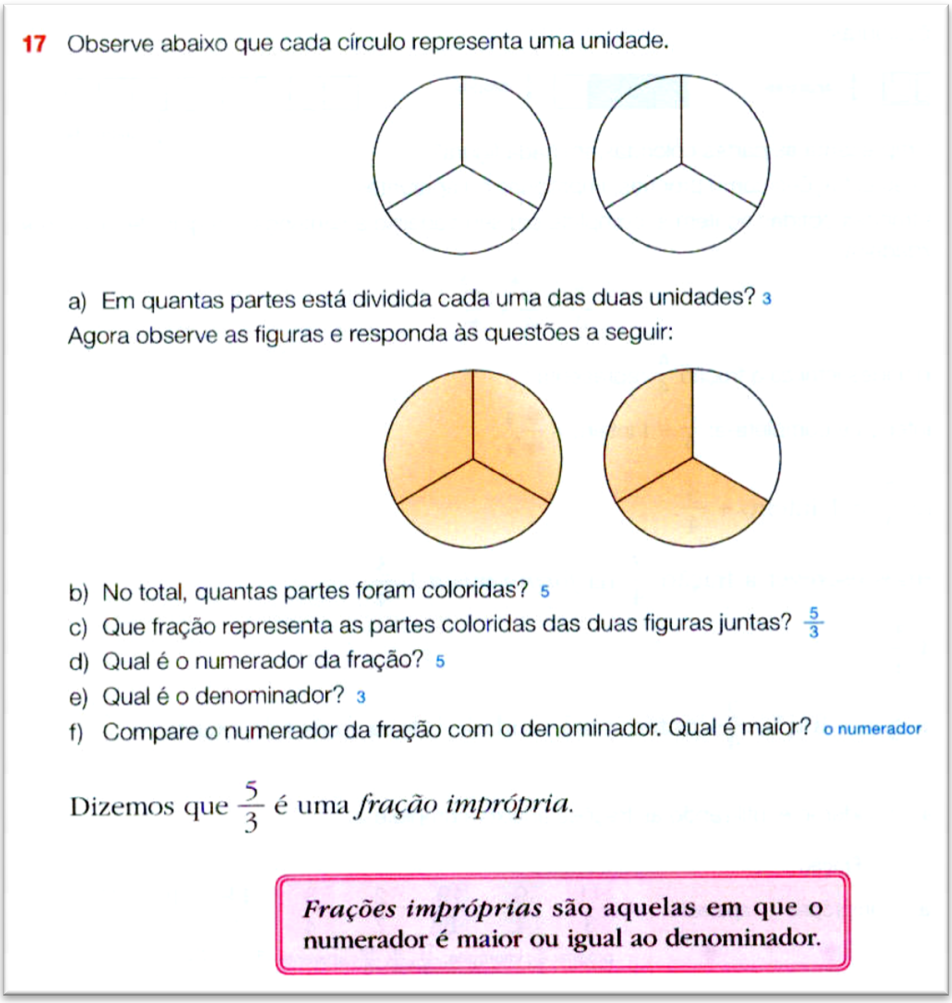
$\frac{6}{6} = 1$ $\frac{15}{5} = 3$

Ilustrações: Acervo da editora

- *As **frações próprias** são aquelas que representam parte de um inteiro, isto é, representam quantidades maiores que zero e menores que 1.*
- *As que não são próprias são chamadas **frações impróprias**. Essas frações representam números maiores que 1, o número zero ou um inteiro.*
- *As **frações aparentes**, que são um caso particular das frações impróprias, são aquelas que representam um número natural.*

Figura 22 – Frações maiores do que 1 (Livro J, p.115)

O livro F é o único que trata este assunto no decorrer das atividades propostas, como mostra a Figura 23. A definição é apresentada após um exercício, o que dá a entender ser um conceito menos importante.



17 Observe abaixo que cada círculo representa uma unidade.

a) Em quantas partes está dividida cada uma das duas unidades? 3

Agora observe as figuras e responda às questões a seguir:

b) No total, quantas partes foram coloridas? 5

c) Que fração representa as partes coloridas das duas figuras juntas? $\frac{5}{3}$

d) Qual é o numerador da fração? 5

e) Qual é o denominador? 3

f) Compare o numerador da fração com o denominador. Qual é maior? o numerador

Dizemos que $\frac{5}{3}$ é uma *fração imprópria*.

Frações impróprias **são aquelas em que o numerador é maior ou igual ao denominador.**

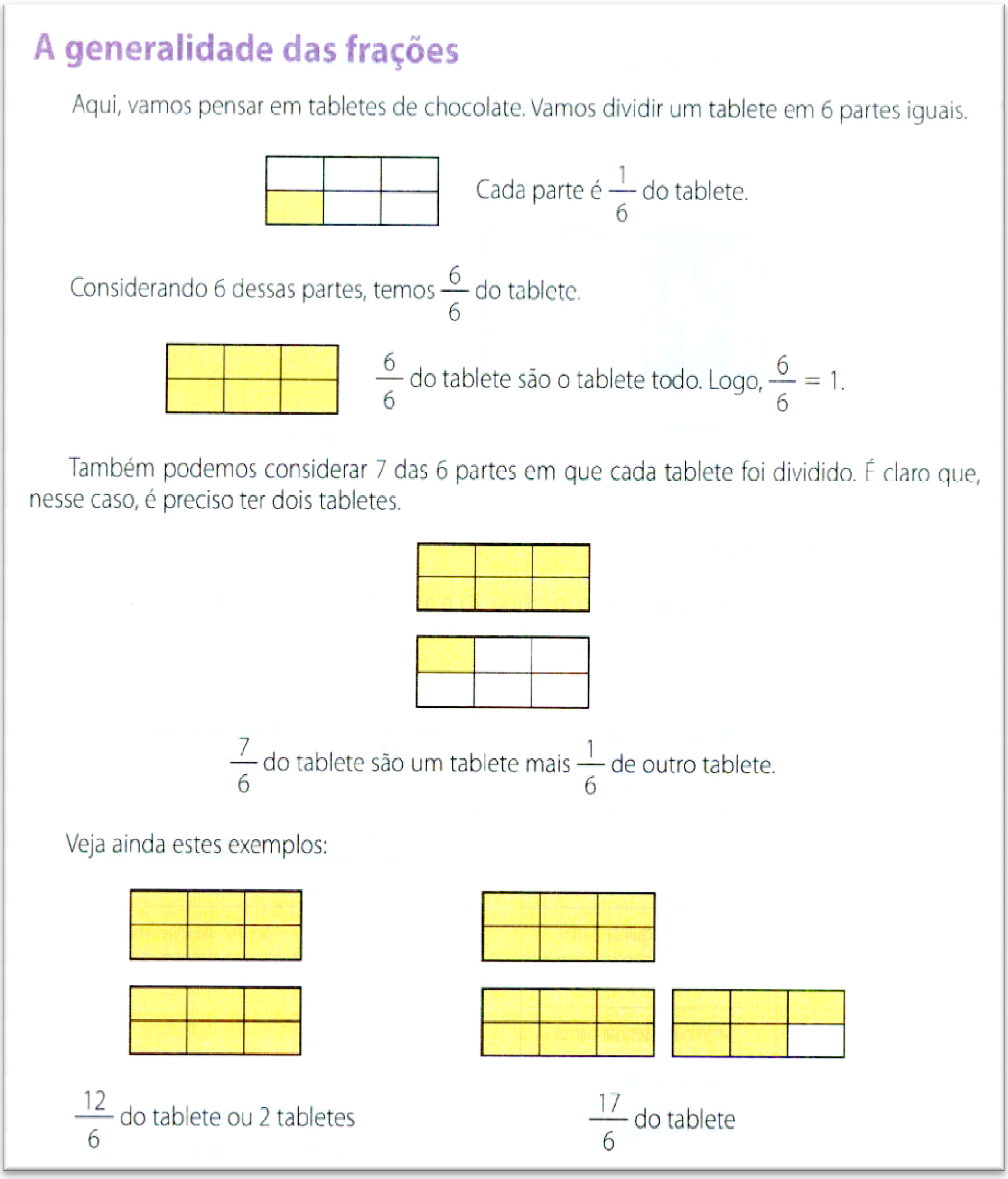
Figura 23 – Fração maior do que 1 (Livro F, p.161)

Verificamos que seis livros (B, C, D, F, J, I) usam o termo “fração imprópria” para dar sentido às frações maiores do que a unidade. Enquanto quatro deles afirma-se que frações impróprias são aquelas que possuem o numerador maior do que o denominador, como se pode observar nas Figuras 21, 22 e 23. Nos livros B e J não há definição e a nomenclatura é introduzida com apoio apenas no exemplo. Em todos os casos nos parece que o foco é a introdução da nomenclatura, considerando-se que o significado possa ser construído por meio de poucos exemplos, de fato apenas um, ou de uma frase que enfatiza uma regra de comparação entre os termos da fração, contribuindo para que ela não seja vista como um número, mas como um símbolo composto por dois números.

Situação envolvendo outros tipos de figuras que ilustram objetos da realidade

Dos dez livros, sete (A, B, C, E, G, H, I) utilizam contextos da vida cotidiana. Dentre estes, foi possível identificar, ainda, dois tipos de abordagem: uma com exemplos para mera apresentação de notação e nomenclatura (livros B, C, E, G, H), e outra apoiada em situações de distribuição de objetos, conjuntos discretos, nas quais é preciso dividir algum ou alguns deles (livros A e I).

Cabe observar que poderíamos ter considerado quatro dos livros (B, C, G, H), que colocamos nesta classe, junto com aqueles que se apoiam apenas em figuras geométricas. São livros que usam como apoio visual uma sequência de figuras de mesmo tamanho, apesar de associá-las com objetos do cotidiano no enunciado. A situação apresentada no livro B, Figura 24, exemplifica o que acabamos de afirmar.



A generalidade das frações

Aqui, vamos pensar em tabletes de chocolate. Vamos dividir um tablete em 6 partes iguais.

Cada parte é $\frac{1}{6}$ do tablete.

Considerando 6 dessas partes, temos $\frac{6}{6}$ do tablete.

$\frac{6}{6}$ do tablete são o tablete todo. Logo, $\frac{6}{6} = 1$.

Também podemos considerar 7 das 6 partes em que cada tablete foi dividido. É claro que, nesse caso, é preciso ter dois tabletes.

$\frac{7}{6}$ do tablete são um tablete mais $\frac{1}{6}$ de outro tablete.

Veja ainda estes exemplos:

$\frac{12}{6}$ do tablete ou 2 tabletes

$\frac{17}{6}$ do tablete

Figura 24 – Frações maiores do que 1 (Livro G, p.132)

A Figura 25 mostra a apresentação da notação de número misto realizada no livro C. O exemplo proposto, além de não representar de fato uma situação motivadora, tem alguns problemas. Primeiro, a apresentação da ilustração dos 8 pepinos como “antes” em nada ajuda ou interfere no que se quer registrar; segundo, a unidade não fica clara, tendo em vista que exemplos de frações de conjuntos discretos já foram explorados e não há qualquer explicitação de que não se estará considerando os 8 pepinos como unidade; terceiro, a divisão de pepinos em 3 partes iguais, não é uma boa escolha didática, como fica claro pela própria figura do livro. Será que a imagem da parte do pepino apresentada corresponde a $\frac{2}{3}$ de um pepino inteiro? Este tipo de atividade pode levar o aluno a considerar que a divisão do inteiro pode ser feita de qualquer maneira.

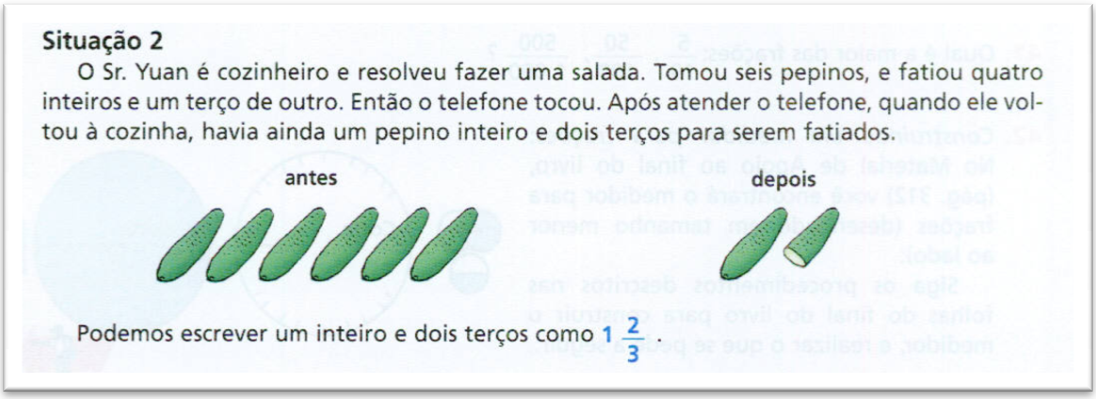


Figura 25 – Número misto (Livro C, p.100)

O livro E é o único que apresenta exemplos de situações do cotidiano que envolve o conceito de medida, usando a polegada como unidade. A Figura 26 reproduz o exemplo apresentado no livro E.

Figura 26 – Número misto (Livro E, p.123)

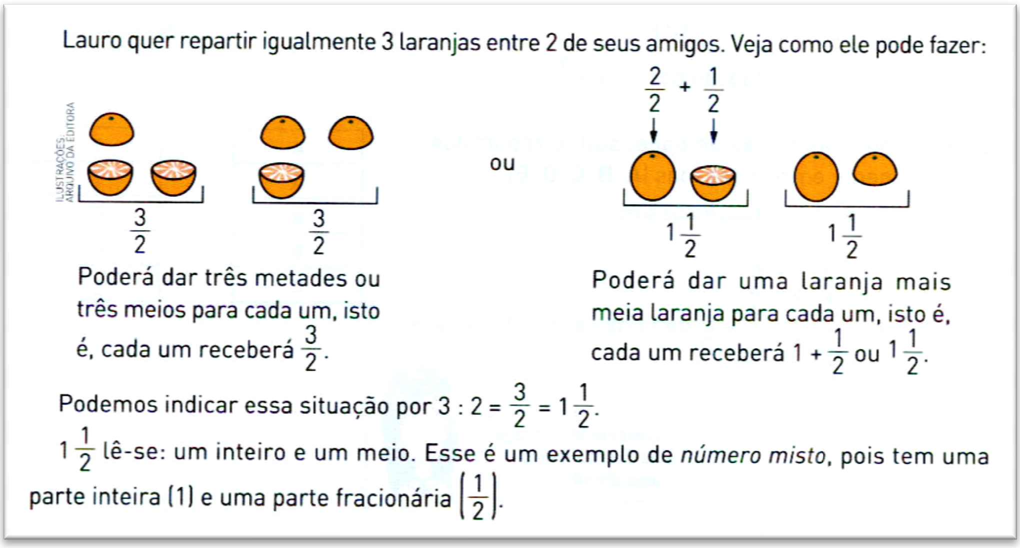
Como defende Wu, situações envolvendo medida de comprimento contribuem para conceituar as frações como números, mas seu uso no livro E não convida o aluno a participar efetivamente da situação proposta. É pouco provável que um aluno do sexto ano consiga compreender o uso das frações em situações de medições apenas por meio de exemplos ilustrativos, em especial, recorrendo para isso à uma unidade pouco conhecida e utilizada no cotidiano destes jovens.

Há livros que usam uma sequência de figuras de mesmo tamanho para explorar a ideia de distribuição da divisão. Neste contexto, uma coleção com uma quantidade n de elementos é dividida e distribuída igualmente em m gavetas, formando a fração $\frac{n}{m}$. Se por ventura a coleção é formada por n elementos "não cortáveis" do tipo carro, decorre que, a situação só faz sentido caso n seja múltiplo de m, ou seja, se existir um natural k tal que $n = k \times m$. Sendo assim, o resultado do problema será dado por $\frac{n}{m} = \frac{k \times m}{m} = k$, isto é, um número natural. Agora, se a coleção é formada por n elementos "cortáveis" do tipo folha de papel sulfite, decorre que n não precisa ser necessariamente um múltiplo de m. Supondo n não múltiplo de m, decorre que os n elementos da coleção serão todos divididos em m partes iguais. Logo, teremos um total de $n \times m$ partes iguais, cada uma correspondente à fração $\frac{1}{m}$, das quais deverão ser distribuídas igualmente em m gavetas. Portanto, cada gaveta receberá $\frac{n \times m}{m} = n$ partes, cada uma correspondente à fração $\frac{1}{m}$. Logo, cada gaveta receberá $n \times \frac{1}{m} = \frac{n}{m}$.

Pelos PCN (1998), em situações deste tipo, a fração assume o significado de quociente. Apenas os livros A e I usam esse tipo de atividade para apresentar o conceito de fração maior do que 1.

Vejamos o exemplo do livro A: "*Uma professora deu cinco folhas de papel sulfite a um grupo de três alunos para que construam pequenos blocos de anotações. Qual foi a quantidade de papel que cada aluno recebeu sabendo que o papel foi distribuído igualmente entre eles?"* (p.159).

A Figura 27 reproduz o exemplo do livro I.


Lauro quer repartir igualmente 3 laranjas entre 2 de seus amigos. Veja como ele pode fazer:

$\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$ ou $\frac{2}{2} + \frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$

Poderá dar três metades ou três meios para cada um, isto é, cada um receberá $\frac{3}{2}$.

Poderá dar uma laranja mais meia laranja para cada um, isto é, cada um receberá $1 + \frac{1}{2}$ ou $1\frac{1}{2}$.

Podemos indicar essa situação por $3 : 2 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

$1\frac{1}{2}$ lê-se: um inteiro e um meio. Esse é um exemplo de *número misto*, pois tem uma parte inteira (1) e uma parte fracionária $\left(\frac{1}{2}\right)$.

Figura 27 – Fração maior do que 1 (Livro I, p.156)

Apesar de já ser louvável encontrarmos atividades que envolvem o conceito de fração como um quociente (livros A e I), elas não favorecem a compreensão de uma quantidade considerável de frações maiores do que 1. Além disso, certamente, usar figuras geométricas para explorar uma quantidade suficiente de frações de diferentes magnitudes, como representa a fração $\frac{17}{2}$, não é muito adequado. Neste exemplo, pelo fato de ter que desenhar uma sequência com nove figuras congruentes divididas ao meio.

Por certo, o modelo da reta numérica é mais atrativo para trabalhar com as frações maiores do que 1. Conforme já vimos, segundo Wu (1998), é possível trabalhar na reta numérica todos os tipos de frações de maneira uniforme, desde as "pequenas" até as "grandes" frações.

4.6 Levantamento das atividades nos dez livros

A princípio, fizemos um levantamento das atividades, por livro, que envolvem o conceito de fração em capítulos ou unidades específicos. Depois, agrupamos as atividades que estão inseridas em contextos contínuo (área, comprimento, volume, etc.) e discreto (coleções), como também agrupamos as atividades que não envolvem nenhum dos dois contextos, ou seja, as atividades que valorizam apenas manipulações numéricas. Feito isto, buscamos investigar o tipo de modelo usado nos contextos (quadrado, círculo, pizza, bolo, ilustração de uma coleção) para dar inteligibilidade ao conceito de fração.

4.6.1 Fluxograma do caminho percorrido durante a análise das atividades

Contabilizamos 1475 atividades (exercícios a resolver, exercícios resolvidos, exemplos) dentro de capítulos ou unidades específicos. Como são muitas, fizemos um recorte com objetivo de analisar somente as atividades contextualizadas (contínuo ou discreto) que não envolvem os seguintes assuntos: equivalência de frações, simplificação de frações, comparação de frações, operações com frações, porcentagem e decimal. Contabilizamos 448 atividades recortadas para análise, das quais 250 estão inseridas em contexto contínuo e 198, em contexto discreto.

Apresentamos um esquema abaixo para mostrar o percurso da análise que fizemos nos dez livros em relação às atividades.

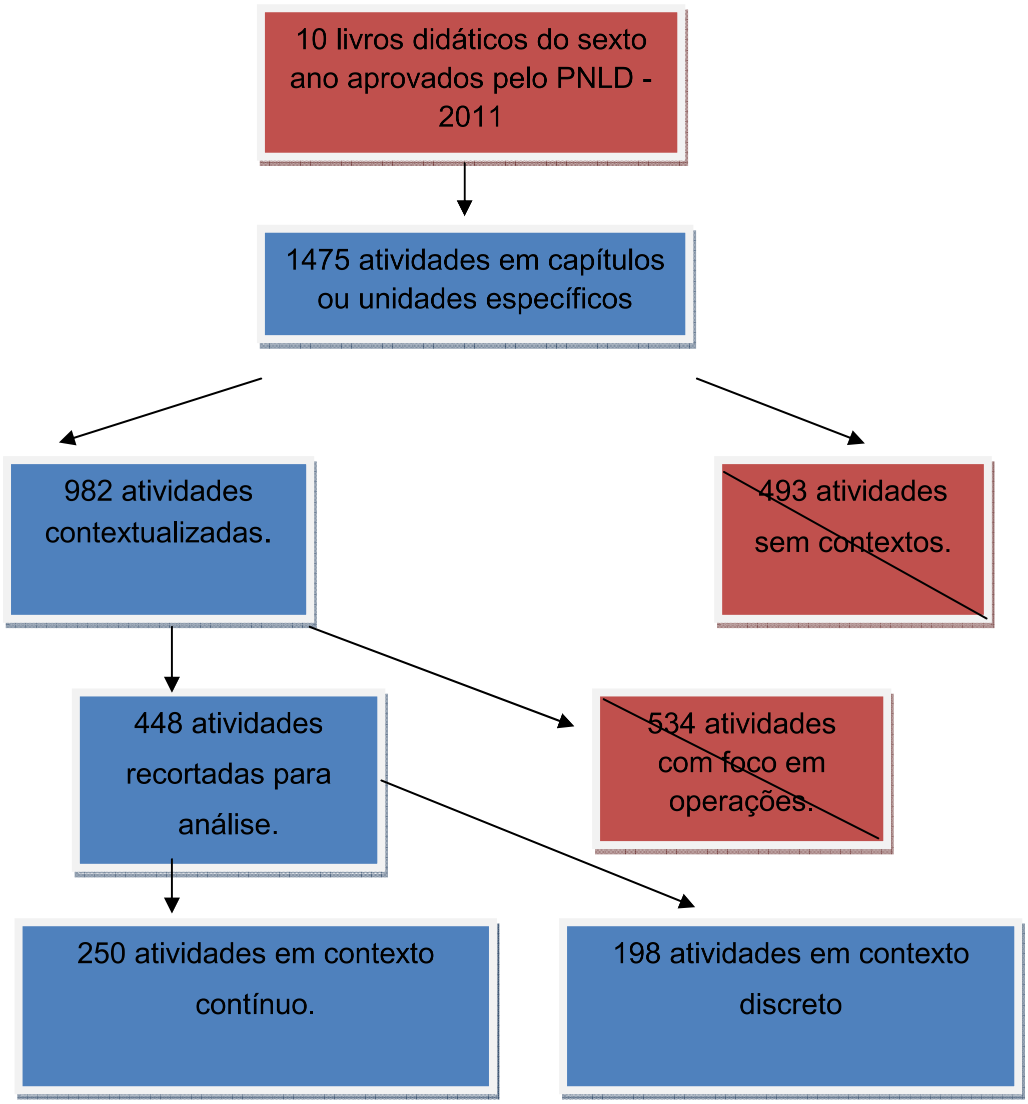


Figura 28 – Fluxograma da análise das atividades nos dez livros

Conforme podemos ver na Figura 28, não analisamos as atividades sem contexto. Das 982 atividades inseridas em contextos contínuo e discreto, descartamos 534 atividades que envolvem os seguintes assuntos: equivalência de frações, simplificação de frações, comparação de frações, operações com frações, porcentagem e decimal. As 448 atividades foram recortadas de acordo com as categorias criadas durante o processo de análise.

4.6.2 Frequência das atividades nos dez livros

Nesta seção, apresentamos na Tabela 5 a frequência das atividades, por livro, em capítulos ou unidades específicos.

Tabela 5 - Frequência das atividades por livro

Livro	Frequência	(%)
A	200	13.56
B	169	11.46
C	136	9,22
D	188	12,75
E	91	6,17
F	120	8,14
G	135	9,15
H	127	8,61
I	175	11,86
J	134	9,08
Total	1475	100

Observamos que todos os livros possuem um capítulo ou unidade específico para trabalhar o conceito de fração, onde concentram as atividades.

Os dados da Tabela 5 indicam que os livros A e D são os que mais apresentam atividades. No geral, o livro A abrange 13,56% das atividades, enquanto que o livro D, 12,75% das atividades. O livro E é o que menos apresenta atividades, abrangendo apenas 6,17% do total de atividades. Já o percentual de atividades dos demais livros varia entre 8% e 12%.

4.6.3 Quantitativo das atividades em contextos discreto e contínuo ou sem contexto

No decorrer de nossa investigação, buscamos identificar o tipo de contexto em que as atividades foram elaboradas. Para isto, passamos a descrever, a seguir, as seguintes classificações:

- ASC – Atividades sem contextos, ou seja, atividades que exploram apenas manipulações numéricas e leitura das frações.
- ACC – Atividades inseridas em contextos que envolvem área, comprimento, volume, capacidade, tempo e massa.
- ACD – Atividades inseridas em contextos que envolvem coleções (reunião de objetos, reunião de pessoas).

Na Tabela 6, a seguir, apresentamos o quantitativo das atividades distribuídas nos três grupos descritos acima.

Tabela 6 - Percentual das atividades contextualizadas e sem contexto

Livro	ASC	ACC	ACD
A	38,00	38,00	24,00
B	20,71	41,42	37,87
C	26,47	61,03	12,50
D	35,64	34,04	30,32
E	39,56	38,46	21,98
F	50,83	31,67	17,50
G	36,30	37,04	26,66
H	24,41	44,88	30,71
I	40,57	28,57	30,86
J	23,13	44,03	32,84
Geral	33,42	39,46	27,12

Os dados da Tabela 6 evidenciam que todos os livros abordam atividades envolvendo contextos contínuo (ACC) e discreto (ACD), como também abordam atividades sem contexto (ASC), ou seja, atividades que estimulam apenas manipulações numéricas e fixação de nomenclaturas. Quanto às categorias das atividades contextualizadas, observamos na Tabela 6 que, na maioria das obras (nove), as atividades estão concentradas em contexto contínuo (ACC). No geral, essas atividades correspondem a 39,46%, enquanto que, as atividades envolvendo contexto discreto (ACD), 27,12%.

Agora, considerando as três categorias, observamos na Tabela 6 que, das dez obras, cinco (B, C, G, H, J) apresentam mais atividades em contexto contínuo (ACC). Observamos também que, o livro F é o único a apresentar um quantitativo de aproximadamente 50% de atividades sem contexto, ou seja, a metade das atividades do livro F exploram apenas manipulações numéricas.

O livro C nos chamou atenção pelo fato de ter sido o único a apresentar uma diferença percentual significativa de quase 50% entre o quantitativo de atividades envolvendo contextos contínuo e discreto. Conforme podemos verificar na Tabela 6, na maioria das obras (A, E, F, G, H, J), essa diferença varia entre 10% e 15%. Já na minoria das obras (B, D, I), verificamos que a diferença chega ao máximo 3,7%, ou seja, uma distribuição quase equilibrada das atividades envolvendo contextos contínuo e discreto.

No que diz respeito às atividades sem contexto, observamos que, no geral, elas representam 33,42%, isto é, um quantitativo significativo de atividades que exploram apenas manipulações numéricas. Das dez obras, observamos que o livro F é o único que apresenta mais atividades sem contexto, ultrapassando a 50%, o que sinaliza nesta obra, mais atividades sem contexto do que atividades contextualizadas. Verificamos que, nas demais obras, o quantitativo de atividades sem contexto varia entre 20% e 41%.

Bem sabemos que as atividades envolvendo apenas manipulações numéricas são necessárias, no entanto, elas não são suficientes para levar o aluno à compreensão de determinados conceitos. Por exemplo, só faz sentido adicionar frações, se as mesmas estiverem relacionadas à mesma unidade. A compreensão deste conceito é fundamental e por certo, não se aprende por meio de atividades do tipo: calcule ½ + ¼, em que não aparece a unidade referencial.

De acordo com Monteiro e Costa (1996), nem sempre, a unidade que serve de contexto e que aporta sentido a representação fracionária é explicitada nas situações apresentadas aos alunos. Segundo elas, este fato ocorre quando se trabalha num campo puramente simbólico, por exemplo, ao determinar a soma de $\frac{1}{3}$ com $\frac{1}{4}$ em que não aparece explícita a unidade a quem se referem estes símbolos.

4.6.4 Quantitativo das atividades com e sem representação gráfica

No decorrer de nossa análise, buscamos identificar o tipo de representação gráfica usada nas atividades. Para isto, descrevemos, a seguir, as seguintes classificações:

- ASF – Atividades com ausência de figuras.
- AFP – Atividades com figuras geométricas planas.
- AFE – Atividades com figuras geométricas não planas.
- ASR – Atividades com segmentos de reta.
- AFC – Atividades com figuras que representam coisas comestíveis (bolo, pizza, chocolate, torta, frutas, etc.).
- AOF – Atividades com outros tipos de figuras: vasilhas, copos, garrafas, xícara, tábua, prego, tubos, régua, gráficos de barra, gráficos de setores, etc.
- AIC – Atividades com ilustração de coleções.

Na Tabela 7, a seguir, apresentamos o quantitativo de atividades com representação gráfica e com ausência de representação gráfica.

Tabela 7 – Percentual de atividades com e sem representação gráfica

Livro	ASF	AFP	AFE	ASR	AFC	AOF	AIC
A	59,00	16,00	1,00	1,50	2,00	14,50	6,00
B	57,37	17,75	-	1,18	3,55	11,83	8,28
C	43,38	30,88	-	1,47	6,62	9,56	8,09
D	74,47	11,17	1,06	0,53	3,19	4,26	5,32
E	63,74	15,38	3,30	2,20	2,20	10,99	2,19
F	70,83	13,33	-	-	2,50	9,17	4,17
G	71,11	11,85	-	0,74	5,92	7,41	2,96
H	58,27	14,96	1,57	3,15	2,36	11,81	7,87
I	69,71	8,00	0,57	4,00	4,00	5,72	8,00
J	47,76	18,66	2,24	0,75	2,98	17,16	10,45
Geral	61,90	15,53	0,88	1,56	3,52	10,10	6,51

Os dados da Tabela 7 evidenciam que todas as obras apresentam atividades com e sem representação gráfica, sendo que, na maioria delas (A, B, D, E, F, G, H, I), as atividades sem representação gráfica (ASF) são as mais exploradas. Conforme podemos observar, a taxa percentual de atividades sem representação gráfica, nestas obras, varia entre 57% e 74%. No geral, essas atividades representam 61,90%, ou seja, um quantitativo bastante expressivo.

Quanto às atividades com representação gráfica, observamos que todas as obras utilizam: figuras geométricas planas (AFP), figuras que representam coisas comestíveis (AFC), outros tipos de figuras (AOF) e ilustrações de coleções (AIC).

Observando na Tabela 7 somente as categorias que representam atividades com representação gráfica, concluímos que as figuras geométricas planas (AFP) são as mais exploradas, chegando a representar, no geral, 15,53%. Das figuras geométricas planas, verificamos em todas as obras, uma preferência por retângulos e círculos, com uma forte predominância nos retângulos. Em segundo lugar, vem as atividades com outros tipos de figuras (xícara, jarra, gráfico de barra, etc.), representando, no geral, 10,10%. Nesta categoria, existem atividades em todas as obras com figuras que serviram apenas para aumentar o número de páginas, ou seja, figuras que não ajudam na resolução. Verificamos que, no geral, estas atividades representam 6,92%. Em terceiro lugar, vem às atividades com ilustração do discreto, representando, no geral, 6,51%. Observamos nesta categoria três livros (E, F, G) que apresentam no máximo 5 atividades, enquanto que os demais apresentam no mínimo 10 atividades. Em quarto lugar, vem as atividades com figuras que representam coisas comestíveis (bolo, pizza, frutas, etc.), representando, no geral, 3,52%.

No que diz respeito às atividades com figuras geométricas não planas e atividades com segmentos de reta, observamos que nem todos os livros as utilizam nos capítulos ou unidades analisados. Dos dez livros, seis (A, D, E, H, I, J) utilizam atividades com figuras geométricas não planas, chegando ao máximo 3 e nove (A, B, C, D, E,G, H, I, J) apresentam atividades com segmentos de reta, chegando ao máximo 7. No geral, as atividades em ambas as categorias representam 0,88% e 1,56%, ou seja, uma quantidade inexpressível, caso comparemos com o percentual de atividades nas outras categorias.

A apresentação de algumas representações gráficas de coleções foi algo que nos chamou atenção durante a análise das atividades, como no caso da ilustração de uma coleção de uma atividade reproduzida na Figura 29.

Figura 29 – Atividade com ilustração de uma coleção (Livro F, p.159).

O que nos preocupa na atividade apresentada na Figura 29, é que o porta retrato tem a forma retangular que representa uma figura geométrica plana, e, à primeira vista, isto pode gerar confusão na identificação dos contextos, ou seja, discreto ou contínuo? A causa que pode gerar tal confusão se relaciona ao fato de que durante a introdução, os livros não apresentam atividades com material concreto, com objetivo de exemplificar, no lúdico, a diferença entre contextos que envolvem coleções e contextos que envolvem, por exemplo, área de figuras geométricas, como mostra a Figura 30.

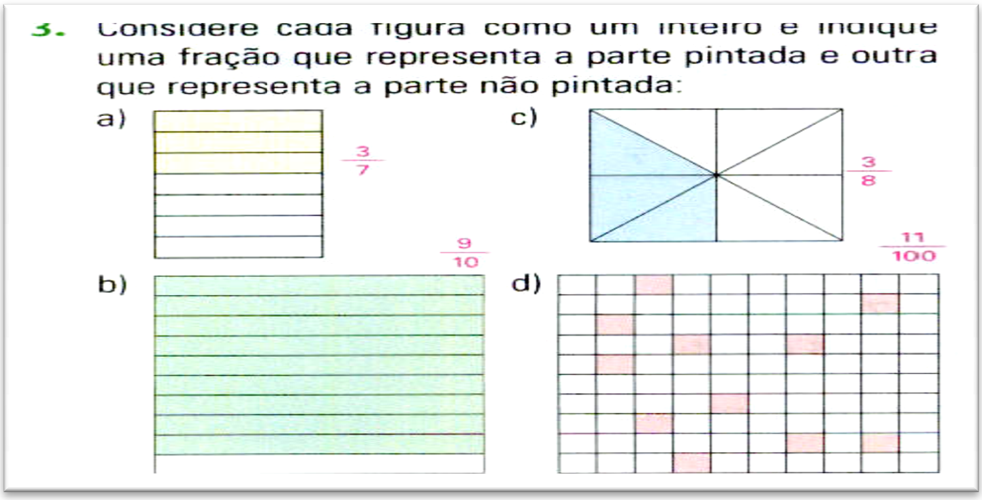
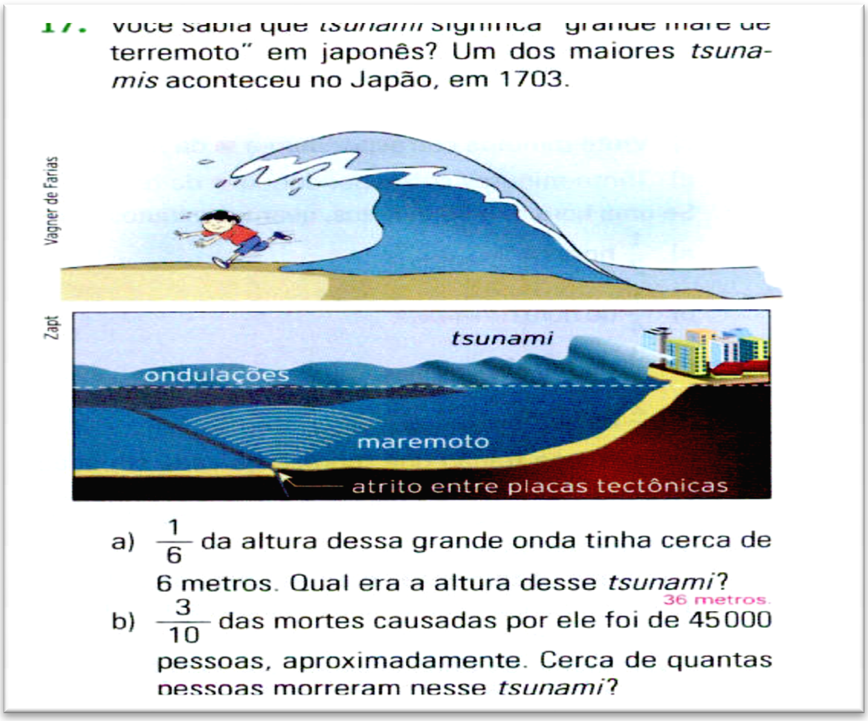


Figura 30: Atividade com figuras geométricas planas (Livro A, p.155).

Observamos na Figura 30 que, a fração é usada para representar parte de um “todo” (área de figura geométrica). Na atividade da Figura 29, a fração também é usada para representar parte de um “todo” (coleção com nove pessoas). No entanto, o “todo” em ambas as situações são de naturezas diferentes. Outro fato preocupante, já analisado na introdução de todas as obras, é que nenhuma delas discute a questão da diferença entre o “todo” de grandezas contínuas e discretas. No entanto, verificamos que todas as obras misturam as atividades envolvendo ambas as grandezas, como se fosse simples para o aluno compreender os procedimentos usados para associar o uso da fração, em ambas as situações.

Para encerrar essa seção, apresentamos na Figura 31, a seguir, uma atividade com representação gráfica que não ajuda na resolução.


17. Você sabia que *tsunami* significa "grande maré de terremoto" em japonês? Um dos maiores *tsunamis* aconteceu no Japão, em 1703.

a) $\frac{1}{6}$ da altura dessa grande onda tinha cerca de 6 metros. Qual era a altura desse *tsunami*?
36 metros.

b) $\frac{3}{10}$ das mortes causadas por ele foi de 45 000 pessoas, aproximadamente. Cerca de quantas pessoas morreram nesse *tsunami*?

Figura 31 – Atividade com representação gráfica que não ajuda na resolução (Livro D, p.157)

Conforme já vimos, todas as obras apresentam atividades com desenhos que servem apenas para aumentar a quantidade de páginas.

Os dados levantados até agora nos fornecem uma visão geral de como os livros distribuíram suas atividades. Nosso objetivo agora é fazer um recorte nas atividades mapeadas.

4.7 Análise de algumas atividades contextualizadas nos livros didáticos

Conforme já vimos na Tabela 6, no geral, os livros apresentam um quantitativo considerável de atividades sem contextos (33,42%), isto é, atividades mecânicas de fixação de nomenclaturas e procedimentos. Considerando as atividades contextualizadas, a Tabela 6 nos mostra que a maioria dos livros (nove) se apoia em contextos que envolvem grandeza contínua (ACC). No geral, 39,46% das atividades estão apoiadas em contexto contínuo (área, comprimento, volume, capacidade e massa) e 27,12% das atividades, em contexto discreto. Além disso, vimos na Tabela 7 que, quando há modelos geométricos, os tipos mais utilizados são as figuras geométricas planas.

Conforme já vimos, das 1475 atividades mapeadas, separamos apenas as contextualizadas. Das atividades contextualizadas, fizemos um recorte a fim de analisar somente as que não envolvem os seguintes assuntos: equivalência de frações, simplificação de frações, comparação de frações, operações com frações, percentual e decimal. As atividades foram agrupadas de acordo com as categorias criadas durante o processo de análise. Para as atividades dentro de contexto contínuo, selecionamos 250 e, para as atividades dentro de um contexto discreto, selecionamos 198, perfazendo um total de 448 atividades.

4.7.1 Atividades em contexto contínuo

Nesta seção, apresentamos uma tabela com a quantidade de atividades que envolvem as categorias criadas durante o processo de análise, como também apresentamos algumas atividades para discussão. A seguir, apresentamos os contextos e as categorias.

Contexto que envolve área de figura geométrica plana

- **FAF – A fração associada a uma parte da área de uma figura geométrica.**

Neste contexto, o “todo” (área) é dividido em n partes iguais, sendo que cada parte é associada diretamente a uma fração correspondente $\frac{1}{n}$. Reproduzimos, a seguir, um exercício do livro I: *“José repartiu uma região retangular em 4 partes iguais e pintou duas delas. a) Que fração representa a parte pintada nessa região retangular. b) Que parte do inteiro essa fração representa?”* (p.152). Segundo os PCN (1998), nesta situação, a fração recebe o significado de parte-todo.

As atividades neste contexto são exploradas por todas as obras no processo de conceituação das frações. Verificamos que os dez livros tomam, como ponto de partida, atividades propostas envolvendo figuras geométricas planas já divididas em partes congruentes, onde o aluno é solicitado a associar uma ou mais partes da área de uma figura a uma fração correspondente, como mostra a atividade proposta pelo livro I acima. No geral, contabilizamos 124 atividades que correspondem a 27,68% do total de atividades recortadas para análise, ou seja, uma quantidade bastante expressiva. No geral, verificamos que, 3,12% dessas atividades não apresentam figura geométrica plana, o que consideramos um dado positivo, pois, entendemos que, nesta fase de escolarização, os alunos precisam de um apoio.

Nesta categoria, encontramos algumas atividades propostas que abordam um nível de reflexão, os quais julgamos importante serem estudados na abordagem com figuras geométricas planas. A fim de destacar essas atividades, criamos as seguintes subcategorias, que passamos a descrevê-las a seguir:

- **Uso de material concreto para mostrar a divisão do inteiro em partes com a mesma área.**

Verificamos que, das dez obras, apenas três (B, D, E) apresentam uma atividade que envolve esta subcategoria. Consideramos este dado preocupante, pois, segundo Santos e Rezende (2002) é importante o uso de material concreto para auxiliar na passagem do concreto para o abstrato.

Vimos que apenas um livro (B) usa material concreto na introdução ao conceito de fração para mostrar a divisão do “todo” em partes com a mesma área.

- **Dividir uma figura geométrica plana em partes com áreas iguais de maneiras diferentes.**

Verificamos que, das dez obras, apenas duas (A, C) apresentam uma atividade que envolve esta subcategoria. Este tipo de atividade é importante, pois pode evitar que o aluno crie estereótipos de que só existe uma única maneira, por exemplo, de dividir um retângulo ao meio.

- **Dividir uma figura geométrica plana em partes com áreas iguais e associar uma ou mais partes da referida figura a uma fração correspondente.**

Verificamos que todas as obras apresentam atividades que envolvem esta subcategoria. Consideramos esse dado positivo. No geral, contabilizamos uma média de três atividades por livro.

A atividade proposta pelo livro G (Figura 32) oferece uma boa oportunidade de diversificação de formas possíveis de subdividir uma figura geométrica.

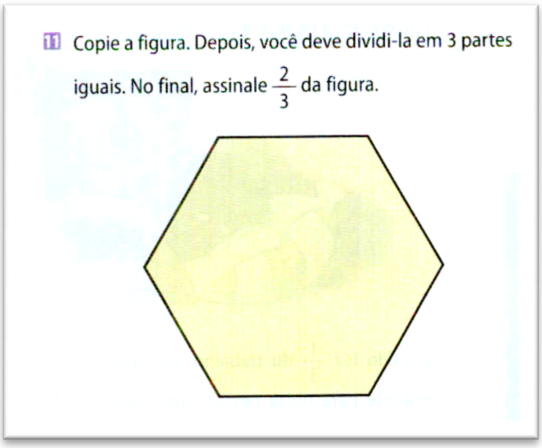


Figura 32 – Fração da área de um hexágono (Livro G, p.129)

Na divisão do hexágono em partes com áreas iguais é possível levar o aluno a compreender que não é necessário usar formas iguais. Consideramos o hexágono como uma excelente figura geométrica plana para trabalhar a divisão em partes com a mesma área. Apesar do destaque positivo, é bem provável que um aluno do sexto ano não consiga desenhar sozinho um hexágono regular. Uma saída seria oferecer moldes para o professor reproduzir para seus alunos.

- **Reconhecer quando as áreas das partes da figura geométrica plana não forem iguais.**

Verificamos que, das dez obras, apenas três (A, B, E) apresentam uma atividade que envolve esta subcategoria, como a do livro E reproduzida na Figura 33.

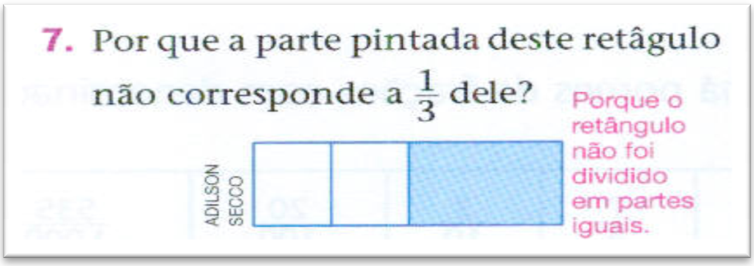


Figura 33- Partes de um retângulo com áreas diferentes (Livro E, p.117)

É bem provável que o aluno não compreendendo a necessidade das áreas das partes serem iguais, associe a fração $\frac{1}{3}$ à parte pintada de azul.

- **Reconhecer numa figura geométrica plana que as partes com a mesma área não implica que elas tenham necessariamente a mesma forma.**

Das dez obras, verificamos que apenas quatro (A, C, D, I) apresentam uma atividade que envolve esta subcategoria, como se vê na Figura 33. Vimos no capítulo 1 que Santos & Rezende (2002) chamam a atenção do professor para este fato.

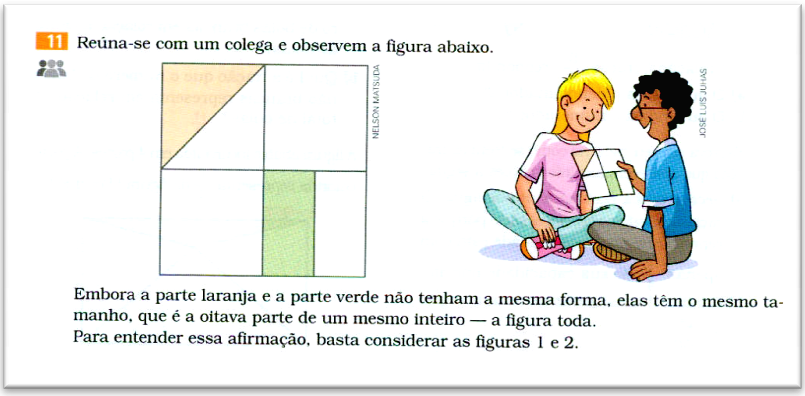
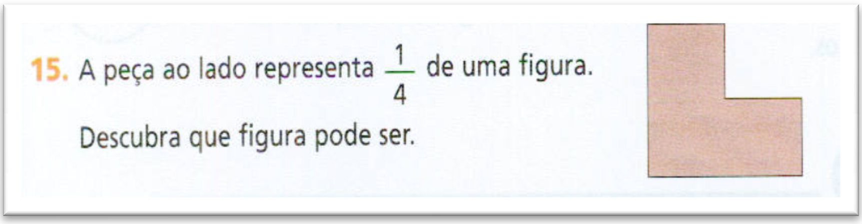


Figura 34 – Partes de um quadrado com a mesma área e formas diferentes (Livro A, p.156)

- **Construir uma figura geométrica plana a partir de uma de suas partes associada a uma fração correspondente.**

Verificamos que, dos dez livros, apenas dois (A, C) apresentam uma atividade que envolve esta subcategoria. A Figura 35 reproduz a atividade proposta pelo livro C.



15. A peça ao lado representa $\frac{1}{4}$ de uma figura.
Descubra que figura pode ser.

Figura 35 – Fração da área de uma figura geométrica (Livro C, p.91).

Este tipo de atividade requer do aluno uma compreensão profunda sobre a divisão de uma figura geométrica plana em partes com áreas iguais, como também, a associação de uma ou mais dessas partes a uma fração correspondente.

- **Colorir uma ou mais partes com a mesma área de uma figura geométrica, de acordo a fração dada.**

Das dez obras, verificamos que seis (A, B, C, D, E, G) apresentam atividades que envolvem esta subcategoria. Contabilizamos no máximo duas atividades. Dentre os livros que abordam tal subcategoria, resolvemos apresentar na Figura 36, a seguir, a atividade proposta pelo o livro A. O que nos chamou atenção em tal atividade foi a escolha de algumas figuras geométricas.

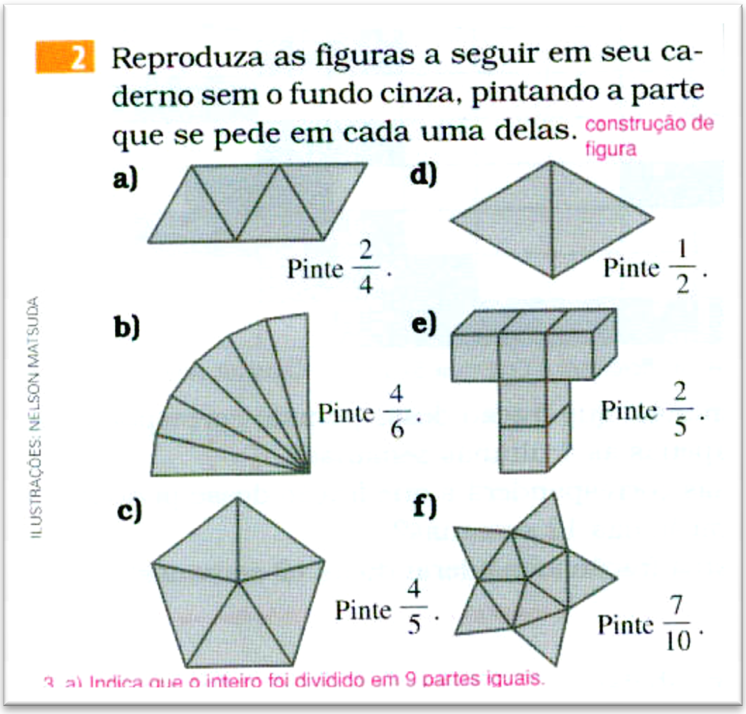


Figura 36 – Fração da área e do volume de figuras geométricas (Livro A, p.155)

O problema que detectamos nesta atividade está relacionado ao fato de que a reprodução das figuras (b, c, f) de maneira que a área das partes seja preservada e a reprodução da figura (e) de maneira que o volume das partes seja preservado, pode ser uma tarefa difícil para um aluno do sexto ano do Ensino Fundamental executar. Sabendo-se das restrições em relação ao uso do livro didático pelo aluno, devido ao fato de que não se permitem que o mesmo pinte as tais figuras no livro, o autor do livro A poderia ter apresentado figuras geométricas do tipo das letras (a, d), ou seja, figuras geométricas mais fáceis de reproduzir.

- **Compreender que as partes com áreas iguais de uma figura geométrica podem ser pintadas aleatoriamente e que isto não impede de uma ou mais dessas partes sejam associadas a uma fração correspondente.**

Antes de apresentarmos os dados nesta subcategoria, verificamos que todos os livros apresentam atividades com figuras geométricas divididas em partes com a mesma área, sendo que as partes pintadas da mesma cor aparecem sempre juntas.

Verificamos que, dos dez livros, sete (A, C, D, E, H, I, J) apresentam atividades que envolvem figuras geométricas com partes pintadas da mesma cor, distribuídas aleatoriamente. Contabilizamos no máximo dez atividades por livro. Consideramos esse dado positivo, pois, vimos que a maioria dos livros (B, C, D, F, G, H, J) apresenta, na introdução ao conceito, figuras geométricas com partes pintadas da mesma cor, todas juntas da esquerda para direita. Confrontando os dados acima, observamos que pelo menos os livros C, D, H e J apresentam atividades propostas envolvendo figuras geométricas com partes pintadas, distribuídas aleatoriamente. Já os livros B, F e G, neste contexto, só apresentam figuras geométricas com partes pintadas da mesma cor, sempre juntas. A Figura 37 traz uma atividade proposta pelo livro E que mostra as partes pintadas da mesma cor, separadas.

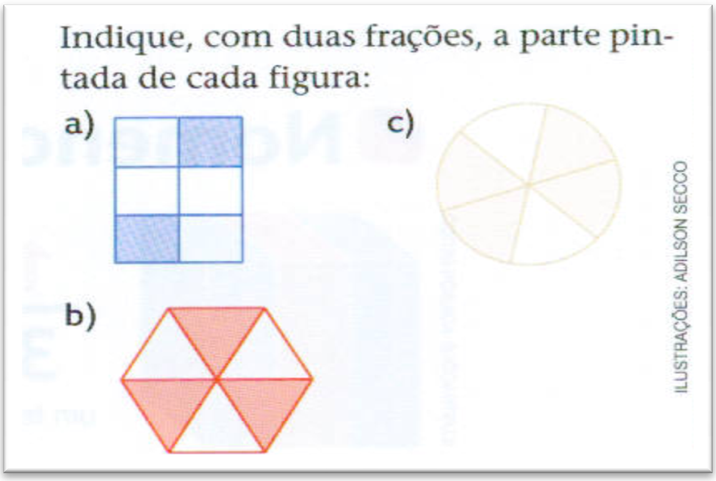


Figura 37 – Fração da área de figuras geométricas (Livro E, p.117)

Apesar de termos encontrado atividades envolvendo diversas subcategorias, consideramos negativo que dentre as oito descritas nesta seção (4.7), somente uma (dividir uma figura geométrica em partes com áreas iguais e associar uma ou mais partes da referida figura a uma fração correspondente) é explorada por todos os livros. De modo geral, exploram-se poucas atividades envolvendo a maioria (sete) das subcategorias. E o que é pior, a existência de livros (F, G, H, J) que abordam no máximo duas das oito subcategorias. Verificamos que o livro F só aborda uma subcategoria.

Contexto que envolve figuras do tipo: bolo, pizza, torta, etc.

- **FDB – A fração associada a uma parte de figuras do tipo: bolo, pizza, etc.**

Nesta categoria, o "todo" (pizza, bolo, etc.) é dividido em n partes iguais, sendo que cada parte corresponde à fração $\frac{1}{n}$. Reproduzimos, a seguir, um exemplo do livro E: *"Carlota vai comer $\frac{1}{4}$ do chocolate. O que significa isso? Imagine o chocolate dividido em quatro partes iguais. Ele todo corresponde a $\frac{4}{4}$, e a quantidade que Carlota vai comer corresponde a uma das quatro partes, ou seja, $\frac{1}{4}$. "*(p.113).

Das dez obras, verificamos que apenas o livro I não apresenta atividades nesta categoria. No geral, contabilizamos cerca de 26 atividades que correspondem a 5,80% do total das atividades recortadas para análise.

Contexto que envolve volume

- **FVS – A fração associada a uma parte do volume de um sólido geométrico**

Nesta categoria o "todo" (volume) é dividido em n partes com mesmo volume, sendo que cada parte corresponde à fração $\frac{1}{n}$, como ocorre no livro E (Figura 38).

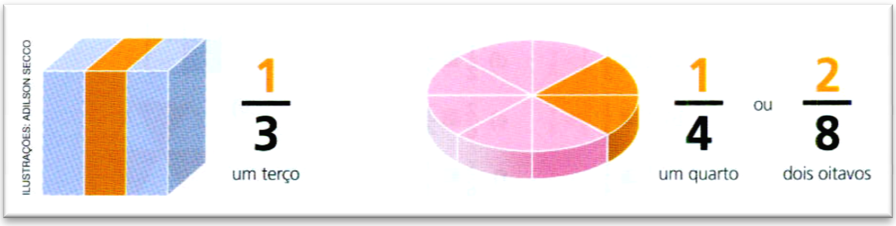


Figura 38 – Fração do volume de um sólido geométrico (Livro E, p.118)

Das dez obras, verificamos que cinco livros (A, D, E, H, J) apresentam atividades envolvendo esta categoria, chegando ao máximo, duas atividades. No geral, contabilizamos sete atividades que correspondem a 1,56% do total das atividades recortadas para análise.

Contexto que envolve medida de comprimento, capacidade, massa e tempo

- **FM1 – Determinar uma medida que corresponde à fração de uma medida associada ao "todo" (comprimento, capacidade, massa e tempo).**

Nesta categoria, uma dada grandeza já vem etiquetada com um número natural n que representa sua medida. Por meio de uma fração $\frac{p}{q}$ dada, pede-se para determinar uma medida k correspondente a fração $\frac{p}{q}$ de n. Reproduzimos, a seguir, uma atividade proposta pelo livro G: *"Eu sei que em 1 kg tem 1000 g. No açougue uma senhora pediu $\frac{3}{4}$ de quilo de carne moída. Quantos gramas têm $\frac{3}{4}$ de quilograma?"* (p.129). Observamos que o nível de dificuldade nesta atividade é mais elevado do que o nível de dificuldade das atividades nas categorias anteriores.

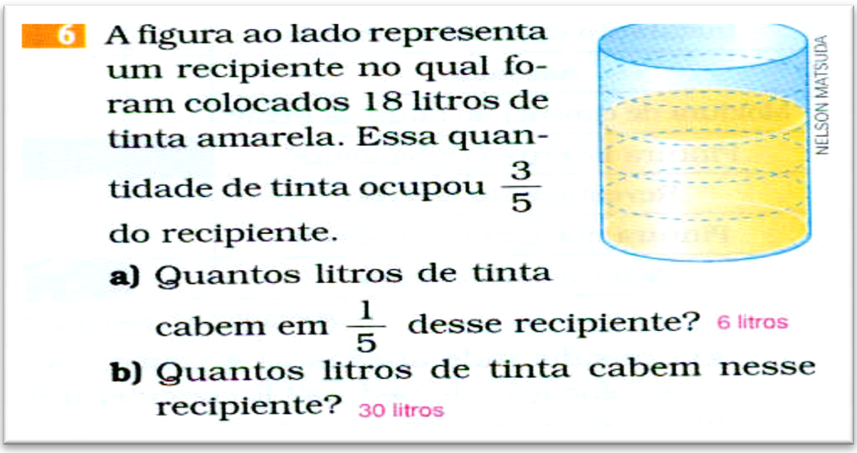
Das dez obras, verificamos que apenas um livro (F) não apresenta atividades envolvendo esta categoria. No geral, contabilizamos 45 atividades que representam 10,04% do total das atividades recortadas para análise.

Verificamos que, neste contexto, nenhum livro apresenta uma abordagem, *a priori*, que exige a participação efetiva do aluno na resolução de atividades desse tipo.

- **FM2 – Determinar uma medida que representa o "todo" (comprimento, capacidade, massa e tempo), a partir de uma fração correspondente a uma medida da parte do referido "todo".**

Nesta categoria, uma parte de uma dada grandeza vem etiquetada com um número natural p (medida) associado a uma fração $\frac{m}{n}$. O objetivo é, por meio desses dados, encontrar a medida que representa a totalidade da referida grandeza. Reproduzimos, a seguir, uma atividade proposta pelo livro D: *"Num tanque, 35 litros equivalem a $\frac{7}{8}$ de sua capacidade. Qual é a capacidade desse tanque?"* (p.158). Observamos que esta atividade é mais difícil do que as atividades apresentadas nas categorias anteriores.

Das dez obras, verificamos a maioria (A, D, E, F, H, J) apresenta atividades envolvendo esta categoria. No geral, contabilizamos 10 atividades que representam 0,23% do total das atividades recortadas para análise. Na Figura 39 observa-se uma atividade proposta pelo livro A.



6 A figura ao lado representa um recipiente no qual foram colocados 18 litros de tinta amarela. Essa quantidade de tinta ocupou $\frac{3}{5}$ do recipiente.

a) Quantos litros de tinta cabem em $\frac{1}{5}$ desse recipiente? 6 litros

b) Quantos litros de tinta cabem nesse recipiente? 30 litros

Figura 39 – Fração da medida da capacidade de um recipiente (Livro A, p.155)

O que nos preocupa é que nenhum livro apresenta uma abordagem, *a priori*, que exige a participação efetiva do aluno, na resolução de atividades desse tipo.

Contexto que envolve medida de comprimento e a reta numérica

- **MCR – A fração associada a uma medida de comprimento.**

Nesta categoria, após atribuir um sentido a um segmento de reta $\overline{OA}$, indicaremos OA a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{OA}$. A medida OA é um número que deve expressar quantas vezes o segmento de reta $\overline{OA}$ contém um segmento u, fixado como unidade de comprimento. Por certo, não está claro o que significa a expressão "o número de vezes que o segmento de reta $\overline{OA}$ contém a unidade de medida u. No entanto, podemos usar esta ideia, meio que imprecisa, para chegar a uma definição precisa da medida do comprimento do segmento $\overline{OA}$. Tomemos de início, um segmento de reta u, fixo, que chamaremos de segmento unitário ou unidade de comprimento. Definimos o comprimento de u igual a 1. Ainda, por definição, todos os segmentos de reta congruentes a u terão a medida do comprimento igual a 1. Se por ventura tivermos um número inteiro m qualquer, e se for possível obtermos $m-1$ pontos intermediários $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{m-1}$ no segmento de reta $\overline{OA}$, de maneira que os m segmentos $\overline{OM_1}, \overline{M_1M_2}, \ \overline{M_{m-1}A}$ sejam todos congruentes ao segmento unitário u, decorre que a medida do comprimento do segmento de reta $\overline{OA}$ será o número inteiro m e escrevemos: $\overline{OM_1} + \overline{M_1M_2} + \cdots + \overline{M_{m-1}A} = m$, ou seja, descrevemos esta situação $OA = m$, porque o segmento de reta $\overline{OA}$ se decompõe em m segmentos de reta justapostos, todos unitários (comprimento igual a 1).

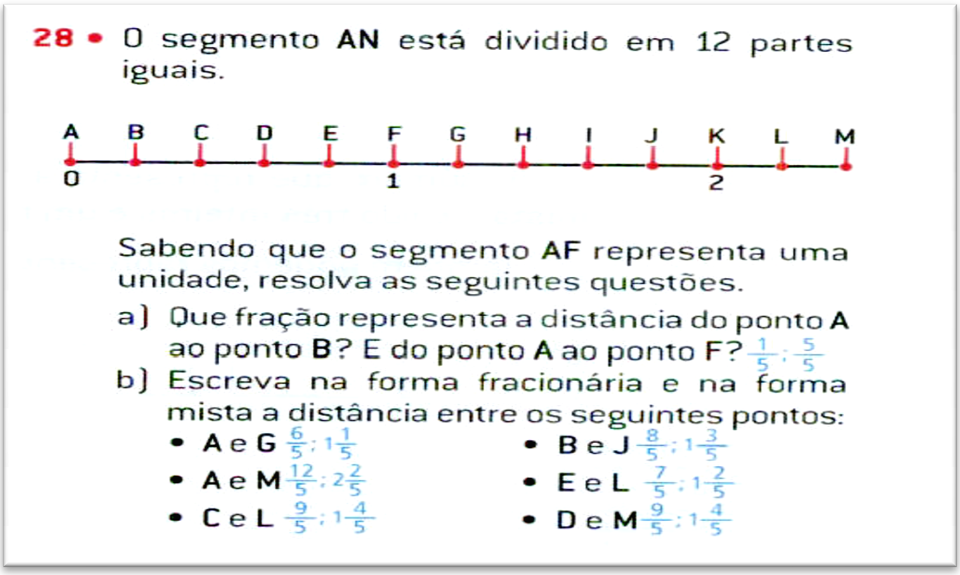
Na maioria das vezes, nem sempre conseguimos um segmento de reta OA que contém o segmento unitário u um número inteiro de vezes. Por exemplo, pode ser que o segmento de reta $\overline{OA}$ seja menor do que o segmento unitário u. Sendo assim, a medida OA não pode ser um número inteiro. Para resolvermos este tipo de situação, suponhamos, por hipótese, que embora o segmento de reta $\overline{OA}$ não contenha u um número inteiro de vezes, exista um segmento menor v, tal que v esteja m vezes contido em u e n vezes contido em $\overline{OA}$, sendo $m\ e\ n$ números inteiros. Neste caso, dizemos que o segmento v é um submúltiplo comum dos segmentos $\overline{OA}$ e u. Como o segmento v está contido m vezes no segmento u, decorre que a medida de v é dada por $\frac{1}{m}$. E, como o segmento v está contido n vezes no segmento $\overline{OA}$, decorre que a medida de $\overline{OA}$ é n vezes a medida de v, logo $OA = n \times \frac{1}{m}$, isto é, $OA = \frac{n}{m}$. Dizemos que o símbolo $\frac{n}{m}$ representa um número racional na sua forma fracionária.

Das dez obras, verificamos que sete (A, B, C, D, E, H, I) apresentam atividades que envolvem esta categoria. No geral, contabilizamos 13 atividades que representam 2,90% do total das atividades recortadas para análise. Consideramos uma quantidade inexpressiva para uma categoria considerada relevante para levar o aluno a conceituar as frações como números.

Um fato que consideramos preocupante é que dos sete livros, verificamos que cinco (A, B, D, E, I) abordam superficialmente, por meio de exemplos, o conceito de medida. Já os livros (C, H) apresentam o conceito de medida somente por meio de atividades propostas, como se não precisasse de uma abordagem, *a priori*, para explicar o uso das frações para expressar medida de comprimento. Entendemos que nesta categoria, é necessário o aluno experimentar a divisão de um dado segmento de reta qualquer em partes com comprimentos iguais (Wu, 1998). Infelizmente, nenhum dos sete livros valoriza esse tipo de atividade.

Considerando os dados acima, é pouco provável que o aluno do sexto ano compreenda, de fato, as atividades que envolvem o uso da fração para expressar uma medida de comprimento.

Uma atividade proposta pelo livro H é apresentada na Figura 40.



28 • O segmento **AN** está dividido em 12 partes iguais.

Sabendo que o segmento **AF** representa uma unidade, resolva as seguintes questões.

a) Que fração representa a distância do ponto **A** ao ponto **B**? E do ponto **A** ao ponto **F**? $\frac{1}{5}$; $\frac{5}{5}$

b) Escreva na forma fracionária e na forma mista a distância entre os seguintes pontos:

- **A** e **G** $\frac{6}{5}$; $1\frac{1}{5}$
- **A** e **M** $\frac{12}{5}$; $2\frac{2}{5}$
- **C** e **L** $\frac{9}{5}$; $1\frac{4}{5}$
- **B** e **J** $\frac{8}{5}$; $1\frac{3}{5}$
- **E** e **L** $\frac{7}{5}$; $1\frac{2}{5}$
- **D** e **M** $\frac{9}{5}$; $1\frac{4}{5}$

Figura 40 – Fração expressando medida de comprimento (Livro H, p.122)

Nesta atividade, observamos um enunciado confuso, pois, é dito que o segmento AN, que na verdade não é o AN e sim o AM, está dividido em 12 partes iguais. Logo em seguida, é dito que o segmento AF representa uma unidade. Já que foi dada a unidade AF, entendemos que não convém dizer que o segmento AM está dividido em 12 partes iguais, para não gerar confusão na identificação da unidade referência. Por certo, quem ler a primeira parte do enunciado, pela primeira vez, acaba tomando o segmento AM como a unidade.

- **PNR – A fração associada a um ponto na reta numérica.**

Nesta categoria, ao dividir um segmento de reta $\overline{OA}$ qualquer em n partes com comprimentos congruentes e definir o ponto O como origem, podemos associá-lo ao número zero. Definindo o segmento $\overline{OA}$ como unitário e indicando OA como sua medida, temos que $OA = 1$. Logo, cada um dos pontos intermediários da divisão de $\overline{OA}$ $(M_1, M_2, \dots, M_{n-1})$ correspondem a uma fração, ou seja, M_1 corresponde a fração $\frac{1}{n}$; M_2 corresponde a fração $\frac{2}{n}$; ...; M_{n-1} corresponde a fração $\frac{n-1}{n}$. Como tomamos $\overline{OA}$ unitário, obtivemos uma sequência de frações menores do que 1. Podemos prolongar o segmento $\overline{OA}$, no sentido de O para A, a fim de obtermos as frações maiores do que 1. Por exemplo, seja o segmento $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$, sendo $\overline{OA}\ e\ \overline{AB}$ congruentes. Tomando OB como a medida do segmento $\overline{OB}$, decorre que $OB = 2$. Sendo assim, dividindo o segmento $\overline{AB}$ em n partes, podemos formar os seguintes pontos intermediários na divisão do mesmo $(M_{n+1}, M_{n+2}, \dots, M_{2n-1})$, onde cada um desses pontos correspondem a uma fração, ou seja, M_{n+1} corresponde a fração $\frac{n+1}{n}$; M_{n+2} corresponde a fração $\frac{n+2}{n}$; ....; M_{2n-1} corresponde a fração $\frac{2n-1}{n}$. Observe que este último procedimento nos fornece frações compreendidas entre 1 e 2.

Vimos que, segundo Wu (1998), a reta numérica oferece condições favoráveis para levar o aluno a conceituar as frações como números que ampliam o sistema numérico.

Verificamos que, das dez obras, apenas três (C, I, J) apresentam atividades que envolvem esta categoria em capítulos ou unidades destinadas às frações. No geral, contabilizamos 7 atividades que representam 1,56% do total das atividades recortadas para análise, ou seja, uma quantidade inexpressiva.

Apresentamos na Figura 41, a seguir, uma atividade proposta pelo livro I.

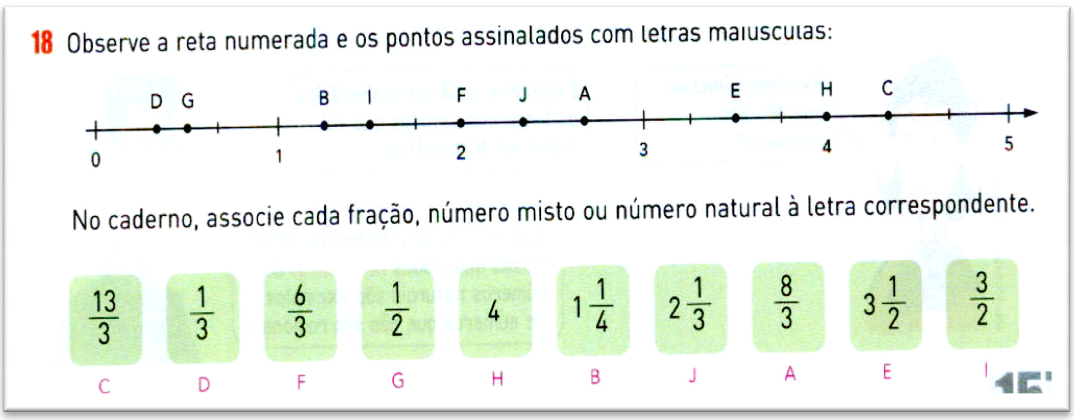


Figura 41 – A fração associada a um ponto da reta (Livro I, p.157)

Nesta atividade, o aluno é desafiado a fazer rupturas de conceitos que são válidos somente para os números naturais. Por exemplo, entre dois números naturais consecutivos não existe nenhum número natural. Já entre duas frações é sempre possível encontrar outras frações.

A atividade é adequada para o aluno que já trabalhou a divisão de um dado segmento de reta qualquer em partes com comprimentos iguais. O problema é que o livro I, assim como outros não apresentam uma abordagem com a reta numérica, *a priori*, que convide o aluno a participar efetivamente na construção do conhecimento. Vimos no capítulo 1, que Wu (1998) recomenda alguns requisitos antes de iniciar a associação da fração a um ponto na reta numérica. Para ele, é necessário que o aluno esteja bem treinado na divisão de um dado segmento de reta qualquer em partes com comprimentos congruentes, antes de iniciar o processo de conceituação das frações por meio da reta numérica.

Verificamos que os livros A e D fazem uma abordagem das frações na reta numérica, com base em exemplos, no capítulo destinado aos números racionais na sua forma decimal.

Considerando os fatos relatados acima, é pouco provável que o aluno compreenda, de fato, as atividades que envolvem o uso das frações para expressar pontos na reta numérica.

Contexto que envolve os casos contínuo e discreto ao mesmo tempo

- **QDN – A fração associada ao conceito de quociente entre dois números naturais.**

Nesta categoria, uma coleção com uma quantidade n de elementos é dividida e distribuída igualmente em m gavetas, formando a fração $\frac{n}{m}$. Se por ventura a coleção é formada por n elementos "não cortáveis" do tipo carro, decorre que, a situação só faz sentido caso n seja múltiplo de m, ou seja, se existir um natural k tal que $n = k \times m$. Sendo assim, o resultado do problema será dado por $\frac{n}{m} = \frac{k \times m}{m} = k$, isto é, um número natural. Agora, se a coleção é formada por n elementos "cortáveis" do tipo folha de papel sulfite, decorre que n não precisa ser necessariamente um múltiplo de m. Supondo n não múltiplo de m, decorre que os n elementos da coleção serão todos divididos em m partes iguais. Logo, teremos um total de $n \times m$ partes iguais, cada uma correspondente à fração $\frac{1}{m}$, das quais deverão ser distribuídas igualmente em m gavetas. Portanto, cada gaveta receberá $\frac{n \times m}{m} = n$ partes, cada uma correspondente à fração $\frac{1}{m}$. Logo, cada gaveta receberá $n \times \frac{1}{m} = \frac{n}{m}$. Reproduzimos, a seguir, uma atividade proposta pelo livro G: *"Dividindo igualmente 4 pizzas entre 7 pessoas, quanto cada uma receberá?"* (p.145). A fração, nesta situação, recebe o significado de quociente pelos PCN (1998).

Das dez obras, verificamos que apenas três (A, G, I) apresentam atividades envolvendo esta categoria. No geral, contabilizamos 18 atividades que correspondem a 4,02% do total das atividades recortadas para análise, ou seja, uma quantidade inexpressiva.

Um fato preocupante é que, embora os livros A, G e I apresentem uma abordagem que envolve a fração associada ao conceito de quociente entre dois números naturais, antes das atividades propostas, verificamos que as mesmas se desenvolvem por meio de exemplos. É pouco provável que o aluno do sexto ano consiga compreender o nível de abstração das atividades nesta categoria, apenas por meio de exemplos que mostram "como se faz". Vimos que os PCN (1998) chamam a atenção para o fato de que os alunos diferenciam as situações que envolvem a relação parte-todo das situações que envolvem quociente. No entanto, verificamos que os tais livros não apresentam uma abordagem que confronta ambas as situações.

Apresentamos na Tabela 8, a seguir, a quantidade de atividades encontradas nos livros que envolvem cada uma das categorias que acabamos de descrever acima.

Tabela 8 - Quantidade de atividades por livro

Livro	FAF	FDB	FVS	FM1	FM2	MCR	PNR	QDN	Total
A	14	1	2	2	2	1	-	5	27
B	6	2	-	3	-	1	-	-	12
C	16	13	-	1	-	1	2	-	33
D	14	1	1	2	3	1	-	-	22
E	13	3	1	1	1	3	-	-	22
F	13	1	-	-	1	-	-	-	15
G	13	3	-	11	-	-	-	9	36
H	16	1	1	10	1	4	-	-	33
I	5	-	-	6	-	2	2	4	19
J	14	1	2	9	2	-	3	-	31
Total	124	26	7	45	10	13	7	18	250
(%)	27,68	5,80	1,56	10,04	2,24	2,90	1,56	4,02	55,80

Síntese da análise dos dados da Tabela 8

Os dados da Tabela 8 evidenciam que todas as obras contemplam a categoria **FAF** (a fração associada a uma parte da área de uma figura geométrica) num percentual (27,68%) de atividades bastante expressivo em relação às demais categorias. Com esse dado, concluímos que todas as obras privilegiam atividades que mostram o uso das frações para representar uma ou mais partes da área de uma figura geométrica plana, ou seja, a famosa relação parte-todo. Vimos anteriormente que apenas 3,12% dessas atividades não apresentam figuras geométricas, ou seja, um percentual baixo. Com este dado respondemos nossa indagação, feita na introdução desta pesquisa, a cerca de que uma questão da Prova Brasil com figura geométrica plana teve alto índice de acerto, devido à valorização deste tipo de atividades nos livros didáticos.

Quanto às categorias **FM1** (determinar a quantidade que corresponde a uma fração de uma quantidade correspondente ao "todo": área, comprimento, volume, massa) e **FM2** (determinar a quantidade que corresponde ao “todo”, a partir de uma fração associada a uma quantidade do referido “todo”), verificamos que, no geral, as atividades que envolvem a categoria **FM1** (10,04%) são mais exploradas do que as atividades que envolvem a categoria **FM2** (2,24%). Este dado nos revela que, ao compararmos ambas as categorias, observamos que as atividades mais fáceis são as mais exploradas.

4.7.2 Atividades em contexto discreto

Nesta seção, apresentamos uma Tabela com a quantidade de atividades que envolvem as categorias criadas durante o processo de análise, como também apresentamos algumas atividades para discussão. Descrevemos, a seguir, os contextos e as tais categorias.

Contexto que envolve coleções (I)

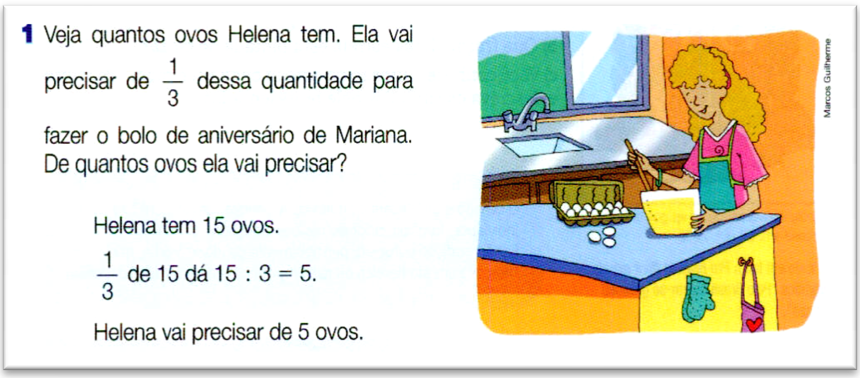
As frações, aqui, são usadas para representar uma quantidade de elementos de uma ou mais partes de uma dada coleção.

- **FCD1 - Conhecendo o total de elementos da coleção e a fração, determinar a quantidade de elementos de cada parte e, se o numerador for maior do que 1, obter a quantidade de elementos das partes indicadas pelo numerador.**

Nesta categoria, é dada uma coleção com n elementos e uma fração $\frac{p}{q}$, com n múltiplo de q, onde q representa o número de partes iguais da referida coleção. O objetivo é encontrar uma quantidade de elementos da coleção associada à fração $\frac{p}{q}$. Primeiramente, consideremos $p = 1$. Agora, dividimos os n elementos da coleção por q. Como n é múltiplo de q, decorre que existe um k natural tal que $n = k \times q$. Logo, $\frac{n}{q} = \frac{k \times q}{q} = k$, ou seja, q grupos com k elementos, sendo que cada grupo corresponde à fração $\frac{1}{q}$. Como tomamos

$p = 1$, decorre que $\frac{1}{q}$ da coleção com n elementos corresponde a k elementos da coleção. Supondo $p = x$, com $1 < x \leq p$, decorre que a fração $x \times \frac{1}{q} = \frac{x}{q}$ corresponde a $x \times k$ elementos da coleção. Reproduzimos, a seguir, uma atividade proposta pelo livro D: *"Na classe de Joana estudam 42 alunos. Um terço deles são meninos. Quantos meninos estudam na classe de Joana?"* (p.157).

Observamos que esta categoria é contemplada por todas as obras. No geral, contabilizamos 94 atividades que correspondem 20,98% do total das atividades recortadas para análise. Um fato que nos preocupa é que dos dez livros, três (F, H, J) apresentam esta categoria somente por meio de exercícios. Verificamos que, desses três livros, dois (H, J) apresentam um exercício do tipo "siga o modelo", como se apenas este fosse suficiente para o aluno compreender o conceito de frações em contextos que envolvem coleções. Já os demais (A, B, C, D, E, G, I) apresentam uma abordagem baseada em exemplos do tipo "como se faz", o que também é preocupante. Na Figura 42, a seguir, apresenta-se um exemplo do livro B.



1 Veja quantos ovos Helena tem. Ela vai precisar de $\frac{1}{3}$ dessa quantidade para fazer o bolo de aniversário de Mariana. De quantos ovos ela vai precisar?

Helena tem 15 ovos.

$\frac{1}{3}$ de 15 dá 15 : 3 = 5.

Helena vai precisar de 5 ovos.

Figura 42 – Fração de uma coleção (Livro B, p.170)

Neste exemplo, não se utiliza como apoio uma ilustração para mostrar a repartição da quantidade de ovos em grupos com a mesma quantidade. Conforme podemos observar, utiliza-se apenas uma regra de cálculo para chegar à resposta desejada. Esta maneira de apresentar exemplos, com ênfase apenas em regras de cálculo, não consideramos adequada para o ensino. O grande problema é que este tipo de abordagem estimula o aluno a decorar a regra e aplicá-la perfeitamente nos exercícios, sem ter compreendido de fato o conceito.

É neste sentido que Nunes & Bryant (1997) argumentam que com as frações as aparências enganam, pois o aluno pode acertar todas as atividades propostas, e, no entanto, a compreensão devida do conceito ainda lhe escapa.

Vimos ainda que, segundo Monteiro e Costa (1996), não é tão simples para o aluno compreender que $\frac{1}{3}$ de um conjunto com 15 elementos equivale a 5.

- **FCD2 – Conhecendo o total de elementos da coleção e a quantidade de elementos de uma parte, determinar a fração que associa estas quantidades.**

Nesta categoria, uma fração correspondente a uma parte dos elementos de uma coleção, é determinada por meio de uma relação entre o número de elementos que compõe parte da referida coleção e o seu número total de elementos. Reproduzimos, a seguir, um exemplo apresentado no livro J: *"Em uma sala de aula estudam 26 alunos, dos quais 14 são meninas. Podemos representar a quantidade de meninas dessa sala pela fração $\frac{14}{26}$, isto é, 14 dos 26 alunos são meninas."* (p.110).

Verificamos que, dos dez livros, apenas um livro (G) não contempla atividades nesta categoria. No geral contabilizamos 63 atividades que correspondem a 14,06% das atividades recortadas para análise. O fato que nos preocupa é que dos nove livros (A, B, C, D, E, F, H, I, J), cinco (A, C, D, E, H) apresentam esta categoria somente por meio de exercícios. Desses cinco livros, apenas um (H) apresenta um exercício do tipo "siga o modelo", como se este fosse suficiente para o aluno compreender o conceito de fração em contextos que envolvem coleções. Já os livros (B, F, I, J) apresentam uma abordagem baseada em exemplos do tipo “como se faz”, o que também é preocupante.

A Figura 43 reproduz um exercício do livro H, do tipo siga o modelo.

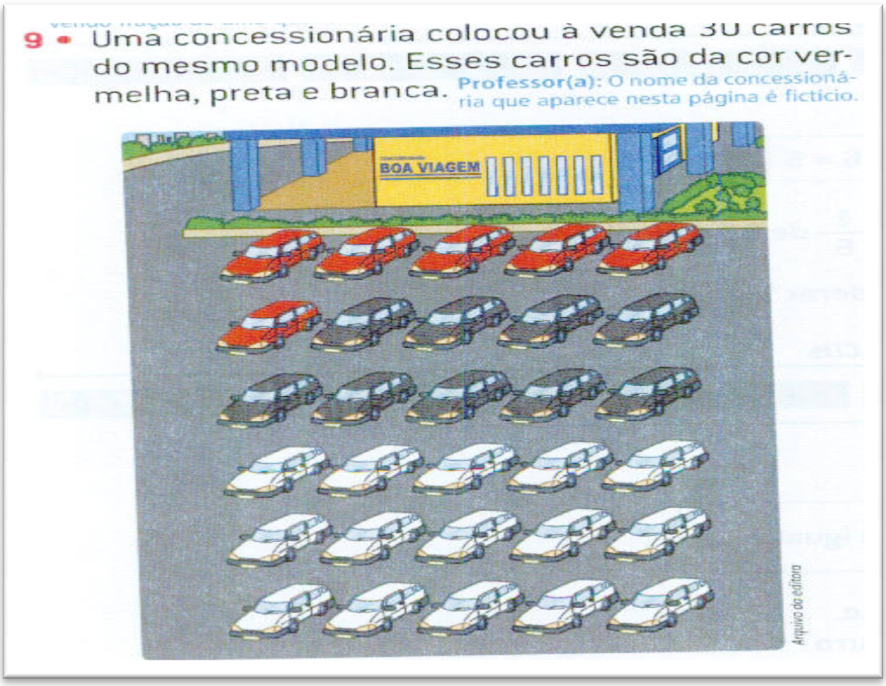


Figura 43 – Fração de uma coleção (Livro H, p.117)

Neste exercício modelo, observamos uma regra para descobrir a fração correspondente à quantidade de carros vermelhos. Veja a seguir:

$$\frac{6 \rightarrow quantidade\ de\ carros\ vermelhos}{30 \rightarrow quantidade\ de\ carros\ desse\ modelo}$$

Depois de ter apresentado esta regra, a atividade exige que o aluno encontre a fração de carros pretos e brancos em relação ao total de carros da frota. O problema que encontramos neste tipo de abordagem é que o aluno chega à fração desejada simplesmente contando a quantidade de carros vermelhos (seis) e a quantidade total carros (trinta), sem muito esforço e o que é pior, sem compreender de fato, o conceito de fração de uma coleção.

Conforme observamos, valoriza-se uma “regra”, com objetivo de “facilitar” o ensino.

- **PCD3 – Conhecendo a quantidade de elementos de uma parte e a fração que esta quantidade representa do total de elementos, determinar a cardinalidade da coleção.**

Nesta categoria, a quantidade total de elementos que compõe a coleção é determinada, por meio de uma fração correspondente a uma quantidade da parte da referida coleção. Exemplo: “Numa caixa há n bombons. Se $\frac{3}{5}$ equivale a 12 bombons da caixa, decorre que $\frac{1}{5}$ equivale a 4 bombons. Logo $\frac{5}{5}$ equivale aos n bombons, isto é, 20 bombons $(4 \times 5 = 20)$.” Percebemos que este tipo de atividade é mais difícil do que as atividades apresentadas nas categorias anteriores.

Verificamos que esta categoria não é contemplada apenas pelo livro A. No geral, contabilizamos 24 atividades que correspondem a 5,36% do total das atividades recortadas para análise.

Um fato preocupante é que, dos nove livros, cinco (E, F, G, H, J) apresentam esta categoria somente por meio de exercícios, como se estes fossem triviais para o aluno do sexto ano resolver. Acabamos de ver que as atividades nesta categoria são mais difíceis do que as atividades das categorias anteriores. Os demais livros (B, C, D, I) apresentam uma abordagem baseada em exemplos do tipo “como se faz”, o que também é preocupante. Na Figura 44, a seguir, mostra um exemplo apresentado no livro I.

Muitas vezes o número que queremos determinar é o todo. Veja como podemos resolver uma situação como essa.

Em uma corrida de Fórmula 1, somente 15 carros completaram todas as voltas, e esse número equivale a $\frac{3}{4}$ dos carros que iniciaram a corrida. Quantos carros havia no início da corrida?

Observe:

$\frac{3}{4}$ dos carros $\rightarrow$ 15 carros

$\frac{1}{4}$ dos carros $\rightarrow 15 : 3 \rightarrow$ 5 carros

$\frac{4}{4}$ dos carros $\rightarrow 4 \times 5 \rightarrow$ 20 carros

Processo prático

$\frac{3}{4}$ de ? = 15

$15 : 3 = 5$ e $4 \times 5 = 20$

Logo, havia 20 carros no início da corrida.

Figura 44 – Fração de uma coleção (Livro **I**, p. 161)

Neste exemplo, observamos uma valorização nos procedimentos operatórios em detrimento de uma abordagem mais significativa do conceito de fração de uma coleção. Poderia haver, pelo menos, uma ilustração como apoio na regra de cálculo. Consideramos que este tipo de abordagem apenas induz o aluno a decorar a "regra pré-estabelecida" para resolver os exercícios semelhantes.

- **FMP – Conhecendo o total de elementos da coleção e a quantidade de elementos da parte, determinar a fração que mede a chance no intervalo [0, 1] de um elemento da parte ser sorteado (probabilidade).**

Nesta categoria, se uma coleção contém n elementos, dos quais p elementos correspondem a uma parte da referida coleção, decorre que, a chance de um desses p elementos ser sorteado é dada pela fração $\frac{p}{n}$. Reproduzimos, a seguir, uma atividade proposta pelo livro A: *"Em uma caixa há* *três bolas verdes. Qual a probabilidade de tirarmos, sem olhar, uma bola verde dessa caixa?"* (p.178)

Verificamos que, das dez obras, apenas duas (A, I) apresentam atividades envolvendo esta categoria. No geral, contabilizamos 7 atividades que representam 1,56% das atividades recortadas para análise. Em ambos os livros há uma abordagem baseada em exemplos que mostram "como se faz". É pouco provável que o aluno consiga compreender o conceito de probabilidade, por meio da abordagem de ambos os livros.

Contexto que envolve coleções (II)

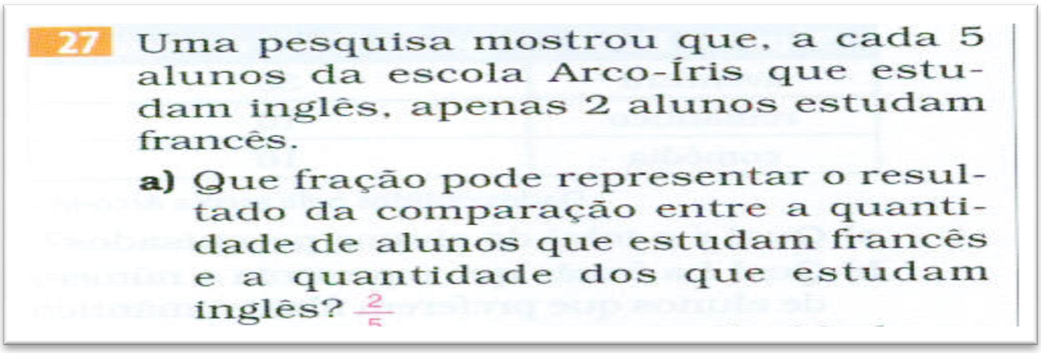
Aqui, a representação fracionária é usada para expressar uma comparação entre duas quantidades de elementos da parte de uma dada coleção.

- **RFC – Determinar uma representação fracionária por meio de uma comparação entre duas quantidades de uma coleção.**

Nesta categoria, uma representação fracionária é determinada por meio de uma relação entre dois números que representam quantidade de elementos que compõe uma coleção. Por exemplo: Se numa empresa trabalham 25 funcionários dos quais 15 são mulheres e 10 são homens, decorre que a representação fracionária $\frac{10}{15}$ representa uma comparação entre o número de homens e o número de mulheres que trabalham na empresa.

Verificamos que, dos dez livros, apenas três (A, B, J) apresentam atividades envolvendo esta categoria. No geral, contabilizamos 10 atividades que correspondem 2,23% das atividades recortadas para análise.

Na abordagem dos livros A e J, afirma-se que a fração pode ser interpretada como uma razão. Na figura 45, a seguir, mostra uma atividade proposta pelo livro A.


27 Uma pesquisa mostrou que, a cada 5 alunos da escola Arco-Íris que estudam inglês, apenas 2 alunos estudam francês.

a) Que fração pode representar o resultado da comparação entre a quantidade de alunos que estudam francês e a quantidade dos que estudam inglês? $\frac{2}{5}$

Figura 45 – Uso da representação fracionária para expressar uma razão (Livro A, p.165)

A Tabela 9, a seguir, mostra a quantidade de atividades que envolvem as categorias apresentadas acima.

Tabela 9 – Quantidade de atividades por livro

Livro	FCD1	FCD2	FCD3	FMP	RFC	Total
A	10	7	-	3	6	26
B	15	14	8	-	2	39
C	12	1	1	-	-	14
D	13	7	4	-	-	24
E	5	2	3	-	-	10
F	5	5	2	-	-	12
G	18	-	1	-	-	19
H	5	7	1	-	-	13
I	8	8	3	4	-	23
J	3	12	1	-	2	18
Total	94	63	24	7	10	198
(%)	20,98	14,06	5,36	1,56	2,23	44,20

Síntese da análise dos dados da Tabela 9

Os dados da Tabela 9 evidenciam que todas as obras contemplam atividades envolvendo a categoria **PCD1** (determinar a quantidade de elementos que correspondem a uma fração de uma coleção). Observamos que, as atividades nesta categoria, no geral, representam um percentual (20,98%) maior em relação às demais categorias. Confrontando a categoria **PCD1** com a categoria **PCD3** (determinar a quantidade total de elementos que compõe uma dada coleção, a partir de uma fração correspondente a uma quantidade de elementos que compõe parte da referida coleção), observamos que, no geral, as atividades nesta última categoria, consideradas as mais difíceis, são as menos exploradas (5,36).

Observamos que, até mesmo na análise das atividades recortadas, os contextos que envolvem grandezas contínuas (55,80%) são mais explorados do que os contextos que envolvem grandezas discretas (44,20%).

5 – Considerações finais

A motivação para este estudo foi a dificuldade que os alunos apresentam para compreender o conceito de fração. Considerando a importância dos livros didáticos na formação dos alunos, buscamos traçar um diagnóstico de como os livros aprovados no PNLD 2011 introduzem o conceito de fração. Para isso identificamos inicialmente o ano de escolaridade e o capítulo ou unidade da coleção onde se apresentam as frações. Como primeiro resultado observou-se que, nos trechos selecionados, os livros enfatizam o estudo de frações menores do que 1. Com este dado, ampliamos nossa delimitação inicial para que fosse possível analisar a abordagem utilizada para ampliar o conceito de fração, ou seja, a apresentação das frações maiores do que 1. Cabe ainda destacar que como em muitos livros didáticos para o grau de ensino em foco (segundo segmento do ensino fundamental) há ênfase na proposição de atividades em detrimento da formalização e sistematização de conceitos. Nossas análises levaram em conta tanto os textos matemáticos quanto as atividades propostas.

Com o propósito de fundamentar nosso trabalho, fizemos um levantamento de pesquisas que tratam do ensino das frações. No capítulo 1 apresentamos vários pesquisadores que se preocupam com este tópico do currículo. No entanto, apesar da quantidade de pesquisas estar se ampliando, não se observa consenso entre as propostas para melhoria da aprendizagem de frações nem sobre a classificação de seus usos e/ou significados. Das propostas estudadas, as que mais nos chamaram atenção foram a de Wu (1998) e a de Santos & Rezende (2002), por proporem um caminho de ensino que nos pareceu pouco explorado por professores e livros didáticos no Brasil. Por isso, uma de nossas preocupações foi detectar se esta hipótese se confirmaria, ou seja, se haveria nos livros analisados um trabalho com a conceituação de frações usando a reta numérica e, para isso, a ideia de medida de comprimento, conceitos naturalmente imbricados.

A metodologia de pesquisa utilizada foi a análise de conteúdo, mais adequada para pesquisa realizada em documentos, no nosso caso os livros didáticos. Iniciamos o trabalho pela seleção e preparação do material de análise – *corpus do estudo*. Mapeamos os exemplos e as atividades propostas nos capítulos ou unidades específicos, com objetivo de criar categorias para agrupá-las. Este tipo de procedimento nos forneceu informações para respondermos nossa questão de pesquisa.

Esta pesquisa evidencia que o principal contexto utilizado pelos dez livros analisados é o que envolve área de figuras geométricas, com ênfase no uso da fração para expressar uma ou mais partes da figura.

Como já era apontado nos PCN, publicado em 1998, a ênfase na relação parte-todo exemplificada por meio de figuras geométricas continua sendo a mesma nos livros aprovados para serem adotados 22 anos depois. Mesmo levando em conta que os Parâmetros não modificaram de fato os currículos das escolas e as salas de aula brasileiras, os autores de livros didáticos têm sido recomendados pelo MEC a tomarem este documento como referência. Naquele documento curricular se defende a ideia de trabalhar as frações e seus vários significados, de forma sistemática e concomitante, para que o ensino seja eficaz. Não é nosso papel defender tal princípio, já que não há comprovação, por meio de pesquisa, de que o trabalho simultâneo, desde a introdução do conceito, com todos os usos das frações seja eficaz para a compreensão do conceito.

Sem dúvida, como a publicação do PCN apontava nos anos 1990, a relação parte-todo continua sendo privilegiada, mas já se percebe que a maioria dos livros (sete) passou a incluir contextos que envolvem coleções.

Como contraponto, lembramos que Wu (1998) defende, e tem realizado experiências neste sentido, que o aluno deve ser eficaz em um modelo, antes de ser exposto a outro. Para Wu (1998) a abordagem das frações por meio da reta numérica possibilita explorar todos os tipos de frações, desde as “pequenas” e as “grandes” frações, usando um mesmo modelo. Para ele, isso ajuda a conceituá-las como números que ampliam o sistema numérico já conhecido.

No entanto, a introdução das frações por meio de medida de comprimento não é valorizada nas obras. Não foram identificadas atividades que explorassem situações de medição e de divisão de um segmento de reta qualquer em partes com a mesma medida. Quando algum exemplo relacionado a ideias de medida de comprimento com a de fração está presente, ele tem um caráter ilustrativo, a ponto de poder ser retirado sem comprometer o restante do que é proposto.

O que mais nos chama a atenção, no entanto, é que, além de pouco diversificada do ponto de vista dos usos, a introdução do conceito de fração é feita de modo bastante superficial, como tentamos deixar claro nesta pesquisa. De modo geral, a abordagem dos livros se desenvolve por meio de exemplos, como se estes fossem suficientes para promover a aquisição do conceito de fração. Por certo, apenas exemplos não são suficientes para que um aluno do sexto ano compreenda as frações como um instrumento utilizado para expressar medida comprimento.

Nos contextos que envolvem área de figuras, apenas um dos dez livros, apresenta uma atividade que exige que o aluno divida um material concreto em partes iguais. Os demais livros apresentam modelos prontos, ou seja, figuras geométricas ou outros tipos de figuras, já divididas em partes iguais, impedindo que o aluno compreenda, de fato, a necessidade das áreas das partes serem iguais. Mais rara é a preocupação de que o aluno compreenda que não há necessidade de que as partes sejam figuras congruentes.

A participação do aluno na construção de seu conhecimento também não é valorizada nos contextos que envolvem coleções. Nenhum dos livros analisados apresenta atividade de manipulação de material concreto, o que exigiria do aluno dividir uma dada coleção em grupos com a mesma quantidade de elementos. Mais uma vez, o recurso usado são ilustrações de coleções, o que pode não ser suficiente para o aluno diferenciar o "todo", que antes representava a área de uma figura, do "todo" que representa uma coleção de objetos.

A proposta de Santos & Rezende (2002) é bem clara em relação à participação efetiva do aluno na construção do conhecimento durante a introdução dos conceitos. O principal objetivo desta opção metodológica é evitar a memorização de regras que possivelmente levam o aluno a resolver as atividades por meio da mecanização de procedimentos, sem o entendimento dos conceitos. Neste aspecto as coleções também deixam a desejar.

Quanto às frações maiores do que 1, vimos que todas as obras apresentam uma abordagem que explora poucas frações desse tipo. Mais uma vez a apresentação é feita com base em exemplos, o que é inadequado para levar o aluno à compreensão das frações como números que ampliam o sistema numérico já conhecido. Além disso, passa-se rapidamente dos exemplos para a apresentação de nomenclatura classificatória: frações próprias, frações impróprias, frações aparentes e número misto. Como agravante de um enfoque com foco em procedimentos e nomenclaturas, as “definições” apresentadas para cada uma destas classes se baseia simplesmente na comparação do valor absoluto dos termos das frações, o que consideramos contribuir para que elas sejam vistas como apenas uma estrutura simbólica que associa dois números, o que sem dúvida dificultará a compreensão das frações como números.

Na introdução desta pesquisa, apresentamos três questões (Saeb, Prova Brasil) envolvendo a relação parte-todo. As duas cujo enunciado trazia uma ilustração de figura dividida em partes iguais tiveram um índice de acerto maior do que a questão sem apoio de figura. Com os dados desta pesquisa, podemos dizer que a abordagem dos livros analisados pode ser a justificativa para que o aluno tenha mais êxito na resolução de questões com o apoio de figuras divididas em partes iguais.

Respondendo nossa questão de pesquisa: Que tipo de abordagem é privilegiada na introdução ao conceito de fração nos livros didáticos do sexto ano do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2011? Por certo, os livros privilegiam contextos que envolvem área de figuras geométricas, com ênfase no uso da fração para expressar uma ou mais partes da área da referida figura. De modo geral, suas abordagens se desenvolvem por meio de exemplos que buscam mostrar “como se faz”. O aluno não é estimulado a pensar e a usar sua criatividade, pois tudo já aparece pronto. Na realidade, a abordagem dos livros analisados não convida o aluno a construir o conceito de fração.

Conforme observamos no decorrer desta pesquisa, de modo geral, a abordagem que os livros do sexto ano apresentam para o estudo das frações não contribui para que o aluno compreenda o conceito. Se realmente queremos um ensino significativo, os livros precisam melhorar suas abordagens, investindo em propostas que incentivem a participação do aluno e que valorizem diferentes aplicações das frações. Destaca-se que o que identificamos para o campo das frações tem forte influência de uma visão procedimental do ensino de matemática e uma concepção utilitária da matemática escolar.

De modo a caracterizar cada uma das obras analisadas do ponto de vista de nosso estudo – a abordagem inicial para introduzir o conceito de fração no sexto ano do ensino fundamental – apresentamos a seguir uma resenha para cada livro. Nosso objetivo principal é contribuir com os professores, instituições de ensino e pesquisadores na tarefa de avaliar e escolher dentre as obras aprovadas pelo PNLD para os anos finais do ensino fundamental.

- **Livro A – Matemática – Edwaldo Bianchini**

A introdução deste livro mostra por meio de um exemplo a insuficiência dos naturais no campo das medições. A ideia é adequada, porém apenas um exemplo não é suficiente para o aluno compreender as frações como um instrumento que serve para expressar medida de comprimento. É necessária uma abordagem que privilegia a participação efetiva do aluno em situações de medições. Logo em seguida, exploram-se contextos contínuo e discreto, concomitantemente, sem ao menos discutir que a unidade em ambas as situações é de natureza distinta. Nestes contextos, a fração é usada para expressar uma ou mais partes de: área de figuras geométricas planas, pizza e coleção de selos.

Quanto ao uso da fração em contexto contínuo (área), a ênfase é dada na contagem do número de partes congruentes pintadas da mesma cor e o número total de partes congruentes. Vimos que este tipo de abordagem é criticada por Nunes e Bryant (1997). No decorrer do capítulo, exploram-se, por meio de exemplos, o uso das frações para expressar: um quociente entre dois naturais, uma razão e a chance de um evento acontecer (probabilidade). Concluímos que a abordagem do livro A não estimula o aluno a construir o conhecimento sobre as frações, pois tudo já aparece pronto.

- **Livro B – A Conquista da Matemática – Giovanni Jr e Castrucci**

O livro B utiliza como recurso, na introdução, o uso das frações no antigo Egito. Afirma-se que as frações foram inventadas devido ao fato de que nem sempre a unidade escolhida cabe um número inteiro de vezes na grandeza que se deseja medir. Embora seja vaga tal ideia, é um bom começo para motivar o aluno a compreender as frações como instrumento que serve para expressar medida de comprimento. O problema é que esta ideia não é explorada de modo significativo. Logo em seguida, exploram-se contextos contínuo e discreto, concomitantemente, sem ao menos discutir que a unidade em ambas as situações é de natureza distinta. Nestes contextos, a fração é usada para expressar uma ou mais partes de: área do retângulo, pizza e coleção de pessoas.

Um dado positivo é que o livro B apresenta atividades em contexto contínuo que exigem a participação efetiva do aluno. Já em contexto discreto, a abordagem se desenvolve apenas por meio de um exemplo com ilustração. No decorrer do capítulo, encontram-se exemplos em contexto discreto que mostram “como se faz”. Embora o livro B apresente atividades que exigem a participação efetiva do aluno em contexto que envolve área, no geral, concluímos que sua abordagem não estimula o aluno a construir o conhecimento sobre as frações.

- **Livro C – Aplicando Matemática – Reis e Trovon**

Este livro traz em sua introdução exemplos em contexto contínuo que mostram o uso da fração para expressar uma ou mais partes congruentes de: tábua, bolo, torta e figura geométrica plana. A abordagem enfatiza a contagem do número de partes congruentes pintadas da mesma cor e o número total de partes congruentes. No decorrer do capítulo, apresentam-se exemplos que mostram o uso da fração em contexto que envolve coleções. Não se discute o fato de que a unidade em contextos contínuo e discreto não é de mesma natureza. Concluímos que a abordagem de tal livro, não convida o aluno a construir o conhecimento sobre as frações, pois tudo já aparece pronto.

- **Livro D – Matemática Ideia e Desafios – Iracema e Dulce**

A introdução deste livro mostra o uso das frações no antigo Egito. Afirma-se que a unidade escolhida nem sempre cabe um número inteiro de vezes na grandeza que se deseja medir. Por conta disso, surgiram as frações. Embora seja vaga tal ideia, é um bom começo para despertar o interesse do aluno. O problema é que a abordagem não convida o mesmo a participar efetivamente de situações que envolvem medições. Logo em seguida, exploram-se contextos contínuo e discreto, concomitantemente, sem ao menos discutir que a unidade em ambas as situações é de natureza distinta. Nestes contextos, a fração é usada para expressar uma ou mais partes de: área de figuras geométricas, corda e coleção de bolas.

Um dado positivo é que encontramos uma atividade que exige a participação efetiva do aluno. Tal atividade, inserida em contexto contínuo, mostra que as partes de uma figura geométrica plana com a mesma área não precisam ter necessariamente a forma. No decorrer do capítulo encontram-se exemplos em contexto discreto que mostram "como se faz". No geral, concluímos que a abordagem de tal livro não convida o aluno a construir o conhecimento sobre as frações, pois tudo já aparece pronto.

- **Livro E – Novo Praticando – Imenes e Lellis**

Este livro traz em sua introdução exemplos que envolvem contextos contínuo e discreto, ao mesmo tempo, sem uma discussão prévia que a unidade em ambas as situações é de natureza distinta. Em ambos os contextos, a fração é utilizada para expressar uma ou mais partes de: figura geométrica plana, barra de chocolate e coleção de pessoas. Quanto ao contexto que envolve área, a abordagem dá ênfase na contagem do número de partes congruentes pintadas da mesma cor e o número total de partes congruentes. No decorrer do capítulo, na seção sob o título: Números Mistos apresentam-se exemplos que mostram o uso da fração para expressar medida de comprimento. Um fato preocupante é que em nenhum momento o aluno participa efetivamente de atividades durante a introdução dos conceitos. Concluímos que a abordagem do livro E não convida o aluno a construir o conhecimento sobre as frações, pois tudo já aparece pronto.

- **Livro F – Matemática e Realidade – Iezzi, Dolce e Machado**

A introdução do livro F apresenta um material concreto chamado Tangram. Mostram-se ilustrações com as peças do Tangram, com objetivo, *a posteriori*, de trabalhar por meio de exemplos o uso da fração para expressar uma ou mais partes da área de um quadrado. Quanto ao contexto discreto, é apresentado por meio de um exemplo com ilustração sob o subtítulo: Frações de um conjunto. Embora o livro F separe os exemplos que envolvem os contextos contínuo e discreto através de subtítulo, não há uma explicação sobre a unidade em ambos os casos. Apesar de sua abordagem se desenvolver por meio de exemplos, consideramos positivo o fato da apresentação de um material concreto. No geral, concluímos que sua abordagem não convida o aluno a construir o conhecimento sobre as frações, pois tudo já aparece pronto.

- **Livro G – Matemática na Medida Certa – Jacubovick e Centurión**

A introdução deste livro apresenta uma questão extremamente vaga, em contexto contínuo, que busca mostrar o uso das frações como instrumento para expressar medida de comprimento. Logo em seguida, exploram-se exemplos que mostram o uso da fração para expressar uma ou mais parte de retângulos. O contexto discreto é abordado por apenas um exemplo com ilustração, sob o subtítulo: Fração de uma quantidade. Em nenhum momento se discute a questão da diferença da unidade em contextos contínuo e discreto. No decorrer do capítulo, encontram-se exemplos que mostram o uso da fração em situações de divisão e distribuição. No geral, concluímos que a abordagem do livro G não convida o aluno a construir o conhecimento sobre as frações, pois tudo já aparece pronto.

- **Livro H – Projeto Radix – Jackson da S. Ribeiro**

O livro H traz em sua introdução um exemplo em contexto contínuo que mostra o uso da fração para expressar partes de um retângulo. A ênfase é dada na contagem do número de partes congruentes pintadas da mesma cor e o número total de partes congruentes. Quanto ao contexto discreto, não é abordado na introdução. No entanto, exploram-se atividades propostas que envolvem o caso discreto, como se fosse simples para o aluno do sexto ano compreender as frações de uma coleção. Concluímos que a abordagem do livro H não ajuda o aluno a construir o conhecimento sobre as frações.

- **Livro I – Tudo é Matemática – Luiz Roberto Dante**

A introdução deste livro mostra através de um exemplo a insuficiência dos naturais no campo das medições. O exemplo é adequado, no entanto, apenas exemplos não levam os alunos compreenderem as frações como instrumento que serve para expressar medida. Logo em seguida é apresentado um exemplo que mostra o uso da fração para expressar uma parte de um retângulo. A ênfase é dada na contagem do número de partes congruentes pintadas da mesma cor e o número total de partes congruentes.

Quanto ao contexto discreto, é explorado por meio de exemplos com ilustração, no decorrer do capítulo. Em nenhum momento se discuti a questão da diferença da unidade em contextos contínuo e discreto. No decorrer do capítulo, exploram-se, por meio de exemplos, o uso das frações para expressar: um quociente entre dois naturais, uma comparação entre dois números naturais e a chance de um evento acontecer (probabilidade). Concluímos que a abordagem do livro I não estimula o aluno a construir o conhecimento sobre as frações, pois tudo já aparece pronto.

- **Livro J – Vontade de Saber – Souza e Patarro**

O livro J apresenta em sua introdução um breve relato histórico das frações no antigo Egito que não contribui em nada como motivação para construção do conceito de fração. Logo em seguida, apresentam-se exemplos em contexto contínuo e discreto, concomitantemente, sem uma explicação prévia sobre a diferença da unidade em ambas as situações. O livro J foi o único que buscou apresentar exemplos, de uma só vez, que mostram o uso da fração para expressar: parte da área de uma figura geométrica, uma razão e um quociente entre dois naturais. Quanto ao contexto que envolve área, a ênfase é dada na contagem do número de partes congruentes pintadas da mesma cor e o número total de partes congruentes.

Além desse tipo de abordagem não ser adequado ao ensino, por ser um grande potencial para confundir o entendimento do aluno, ocorre um equívoco em relação à razão e quociente. Na realidade, os exemplos apresentados não contemplam estes dois casos. No geral, concluímos que a abordagem do livro J não contribui para que o aluno construa o conhecimento sobre as frações.

Referências bibliográficas

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdos.** Lisboa: Edições 70, 1977.

BEHR, Merlyn et al. **Rational number, and proportion.** In: GROUWS, D. A. (Ed). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning New York: Macmilian, 1983, p.296-333.

BERTONI, Nilza Eigenheer. **A Construção do Conhecimento sobre Número Fracionário.** BOLEMA Vol. 21, N° 31 (2008). Disponível em http;//cecemca.rc.unesp.br/ojs/índex.php/bolema/article/view/2111. Acesso em 04/01/2013.

BEZERRA, Francisco José Brabo. **Introdução do Conceito de Número Fracionário e de suas Representações; Uma abordagem Criativa para a Sala de Aula.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2001.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blüncher, 1974.

BROUSSAU, Guy. (1997). **Theory of Didactical Situations in Mathematics: didactique dês Mathématiques.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

______. Secretaria de educação do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática, 5ª a 8ª série. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARVALHO, Claudia Cristina Soares. **Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC/SP, 2007.

CANOVA, Raquel Factori. **Crença, Concepção e Competência dos professores do 1º e 2º ciclo do ensino fundamental com relação à fração.** São Paulo, 2006. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

CHIZZOTTI, Antonio. **Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais.** 5ª ed. São Paulo: Cortez, 2001.

DAMICO, Alécio. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino dos números racionais no ensino fundamental.** Tese de Doutorado em Educação Matemática, PUC/SP, 2007.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** (Tradução Hygino H. Domingues. 5ª Ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FRIOLANI, Luis Cesar. **O pensamento estocástico nos livros didáticos do Ensino Fundamental.** 2007. 150 f. Dissertação (Mestrado Profissional em

Ensino da Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo/SP, 2007.

GUIA DE LIVROS DIDÁTICOS: **PNLD 2011. Matemática.** Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. 2010.

GUIMARÃES, Gilda; GITIRANA, Verônica.; CAVALCANTE, Milka Rossana. e MARQUES, Mabel. **Análise das atividades sobre representações gráficas nos livros didáticos de matemática.** *Anais do 2° Simpósio Internacional de Educação Matemática – SIPEMAT.* UFRPE.2008.

HIEBERT, James; BEHR, Marlyn. Research agenda for mathematics education: **Number concepts and operations in the middle grades.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. (Eds.) (1988).

KIEREN, T. E. **On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers.** In LESH, R. (Ed.). **Number and measurement: Paper from a research workshop.** Columbus, Ohio: ERIC/MEAC, p. 101-144, 1976.

KIEREN, T. E. Personal knowledge of rational numbers: **its intuitive and formal development.** In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Ed.). **Number concepts and operations in the middle grades.** Hillsdale, NJ: Erlbaum, p. 162-180, 1988.

LEBESGUE, Henry Léon. **La Mesuare des Grandeurs.** Paris: A. Blanchard, 1975.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria.** Coleção Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática – Rio de Janeiro, 2009.

LOPES, Jairo de Araujo. **Livro didático de matemática: concepção, seleção e possibilidades frente a descritores de análise e tendências em educação matemática.** Tese de Doutorado em Educação Matemática – Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, 2000.

MA, Liping. **Knowing and Teaching Elementary Mathematics.** This anniversary edition published 2010 by Routledge 270 Madison Avenue, New York, NY 10016.

MANDARINO, Mônica Cerbella Freire. **Concepções de ensino da matemática elementar que emergem da prática docente.** Orientadores: João Bosco Pitombeira de Carvalho e Maria Apparecida Mamed. Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Educação, 2006. Tese de doutorado.

MERLINI, Vera Lúcia. **O Conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos do sexto e sétimo anos do Ensino Fundamental.** São Paulo, 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MEC/INEP. **Relatório do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) – 2001.** Brasília, 2002. Disponível em: http://www.inep.gov.br/download/saeb/2001/relatorioSAEB_matematica.pdf. Ministério da Educação. Disponível em: http://provabrasil2009.inep.gov.br/images/stories/pdf/provabrasil_matriz.pdf.

MOREIRA, Plínio Cavalcante. Tese de Doutorado UFMG – **O conhecimento Matemático do Professor: Formação na Licenciatura e Prática Docente na Escola Básica - 2004.**

MONTEIRO, Cecília e COSTA, Cristolinda. Revista: Educação e Matemática n° 40 – **Dificuldades na Aprendizagem dos números racionais, 1996.**

MAGINA, Sandra Maria Pinto; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. - **A Fração na Perspectiva do Professor e do Aluno das Séries Iniciais da Escolarização Brasileira.**

NUNES, Terezinha. et al. **Educação Matemática: números e operações numéricas.** 4 ed. São Paulo: Cortez, 2005.

NUNES, Terezinha. **Diferentes significados da fração e suas influências sobre o ensino e aprendizagem.** Palestra realizada na UFPE em 2003, Recife.

NUNES, Terezinha, BRYANT, Peter. **Crianças fazendo Matemática.** Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre; Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, Antônio Marmo. **Biblioteca da Matemática Moderna, Volume 1.** Lisa – Livros Irradiantes S.A. São Paulo – 1969.

Rational Number Project: **Fraction Lessons for the Middle Grades** – Cramer, Kathleen – Behr, Merlyn – Post, Thomas – Lesh, Richard - 1995.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas –** Rio de Janeiro, 2012.

ROMANATTO, Mauro Carlos. **Número Racional: Uma Teia de Relações.** ZETETIKE. Vol. 7, nº 12, p. 37- 49. Campinas – 1999.

ROMANATTO, Mauro Carlos. **O livro didático: Alcance e Limites.** Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática, São Paulo, 2004.

SANT'ANNA, Neide da Fonseca Parracho. **Práticas Pedagógicas para o Ensino de Frações Objetivando a Introdução à Álgebra.** Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – 2008.

SANTOS, Vânia Maria Pereira; REZENDE, Jovana Ferreira (orgs). **Números: linguagem universal.** Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2002.

TEIXEIRA, Alexis Martins. **O professor, o ensino de fração e o livro didático: um estudo investigativo** – Dissertação (Mestrado Profissional em

Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – 2008, PUC/SP.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Didática da Matemática: como dois e dois, a construção da matemática.** São Paulo: FTD, 1997.

VASCONCELOS, Cleiton Batista; BELFORT, Elizabeth. **Diferentes significados de um mesmo conceito: o caso das frações. In: Boletins do Salto para o Futuro, Discutindo práticas em Matemática.** TVE, 2006. Disponível em: http://www.tvbrasil.org.br/saltoparaofuturo/publicacaoeletronica.asp?ano=2006, acessado em 31 jul. 2013.

WOODS, Peter. **La Escuela por Dentro - La etnografía en la investigación educativa.** Ediciones Paidós. Barcelona- España 1987. Primera edición.

WU, Hung Hsi. **Teaching fractions in elementary school: A manual for teachers – 1988.**

WU, Hung Hsi. Chapter 1: **Whole Numbers** (Draft) Department of Mathematics # 3840 – University of California, Berkeley - Berkeley, CA 94720 – 3840 (July 15, 2000; Revised September 3, 2002).

WU, Hung Hsi. Chapter 2: **Fractions** (Draft) Department of Mathematics # 3840 – Unversity of California, Berkeley – Berkeley, CA 94720-3840. June 20, 2001; Revised Setember 6, 2002.

WU, Hung Hsi. **How to prepare students for algebra.** Techinical report # 3840 Departament of Mathematics. C. Berkeley, May 25, 2000; revised Jan 17, 2001.

WU, Hung Hsi. **Key Mathematical Ideas in Grades 5-8.** Technical report # 3840 Department of Mathematics. C. Berkeley September 12, 2005. Apresentado no NCTM, 2005.

WU, Hung Hsi. **Fractions, Decimals and Rational Numbers, September 24, 2008.**