UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO - UFRJ
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ARGUMENTAÇÃO, PROVA E DEMONSTRAÇÃO EM GEOMETRIA: ANÁLISE DE COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

RACHEL BLOISE MARTINS

RIO DE JANEIRO - RJ
2012

RACHEL BLOISE MARTINS

ARGUMENTAÇÃO, PROVA E DEMONSTRAÇÃO EM GEOMETRIA: ANÁLISE DE COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao corpo docente do programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de **Mestre em Ensino de Matemática**

Orientadora: **Mônica C. F. Mandarino**.

RIO DE JANEIRO - RJ
2012

RACHEL BLOISE MARTINS

ARGUMENTAÇÃO, PROVA E DEMONSTRAÇÃO EM GEOMETRIA: ANÁLISE DE COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Banca Examinadora:

Mônica Cerbella Freire Mandarino – PEMAT / UNIRIO

Rute Elizabete S. Rosa Borba – UFPE

Lilian Nasser – PEMAT / UFRJ

RIO DE JANEIRO - RJ
2012

Dedico este trabalho à minha mãe, Teresa, à minha avó, Alice, ao meu marido, Fabrício, pelo apoio e compreensão, e ao meu filho, Eduardo, "Luz divina que me inspirou a continuar esta batalha e chegar à vitória".

AGRADECIMENTOS

Quero expressar a minha gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

À minha família, que com compreensão e carinho incentivou e apoiou o estudo que aqui apresento. Em especial ao meu marido Fabrício e meu filho Eduardo, personagens fundamentais de minha vida que muitas vezes ficaram sem minha companhia, por conta da pesquisa.

A todos os meus amigos que tiveram paciência e respeito pelas minhas inúmeras ausências.

À minha orientadora Professora Drª Mônica Mandarino, pela paciência e dedicação durante todo o período em que me orientou. Uma profissional incentivadora, sempre serena, atenciosa e muito amiga. O seu profissionalismo, entusiasmo e inteira disponibilidade foram essenciais para realizar e prosseguir este estudo.

Às Professoras Drª, Lílian Nasser e Rute Borba, que gentilmente aceitaram participar da Banca Examinadora, cujas críticas, sugestões e recomendações foram muito apreciadas.

Aos colegas de grupo Juliana, Chaves e Alicia, pela amizade e companheirismo.

Ao Programa de Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ, seus professores e funcionários, pela qualidade das disciplinas, seminários, espaços de aprofundamento acadêmico e profissional.

RESUMO

Este estudo teve por objetivo compreender a abordagem da prova e da demonstração de conteúdos geométricas presentes em livros didáticos do 6° ao 9° ano, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático de 2011. Os temas, objeto de estudo, são ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal, soma dos ângulos internos do triângulo, bem como a relação entre as medidas de um ângulo externo e os internos não adjacentes de um triângulo. Desse modo, o estudo pretendeu responder à seguinte questão: como os livros didáticos, aprovados pelo PNLD/2011, abordam temas geométricos, com enfoque nas demonstrações e provas. O estudo fundamentou-se no trabalho de Nicolas Balacheff sobre os processos de validação de provas. Para a análise dos livros, considerados como documentos de pesquisa, a pesquisa teve como procedimento metodológico a análise de conteúdos. Os resultados deste estudo mostraram que, em geral, os autores dos dez livros didáticos analisados mesclam provas pragmáticas e intelectuais para validar teoremas e propriedades apresentadas, porém as tarefas de natureza investigativa estão ausentes na maioria dos livros. Todavia, paralela às qualidades das coleções, emergiu o valor do docente como mediador e promotor dos processos de argumentações. A otimização do potencial das obras demonstrou dependência da sua condução pedagógica adequada.

Palavras-chave: Livro didático. PNLD. Prova e demonstração. Geometria.

ABSTRACT

This study aimed understanding the approach to proof and proving of geometric contents in textbooks for the 6th to the 9th grades approved by PNLD/2011. The themes, object of study, are angles formed by two parallel lines and a transversal, addition of internal angles of the triangle, as well as the relation between the measures of non-adjacent exterior and interior angles of the triangle. Thus, the study sought to answer the following question: how textbooks approved by PNLD/2011 present geometric themes and how do they teach this object with a focus on proof and proving. The study was based on the work of Nicolas Balacheff about the processes of validation of tests. To analyze the textbooks, documents of investigation, the methodological procedure of this research was content analysis.. The study results showed that, in the textbooks examined, in general, the authors mixed evidence to validate pragmatic and intellectual properties and theorems presented, but the nature of investigative tasks are missing in most of the books. However, in parallel to the quality of the collections, emerged the value of the teacher as mediator and promoter of arguments processes. The optimization of this collections demonstrates on its adequate pedagogical conduction.

Keywords: Textbooks. PNLD. Proof and prooving. Geometry.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

> *"Ninguém começa a ser educador numa certa terça-feira às quatro da tarde. Ninguém nasce educador ou marcado para ser educador. A gente se faz educador, a gente se forma, como educador, permanentemente, na prática e na reflexão sobre a prática."*
> *(FREIRE, 1991, p. 58)*

Ensinar Matemática tem sido cada vez mais desafiante.

Quando comecei a lecionar no Ensino Fundamental surgiram inquietações sobre como explicar os porquês da Matemática, já que os alunos perguntavam: Como chegou a essa fórmula? Pra que serve?

Durante a trajetória da minha vida escolar, como aluna, não tive oportunidades de desenvolver e conhecer estes porquês. Frequentemente a Matemática nos era apresentada como um saber já construído, sem lugar para a intuição, experimentação ou descoberta, e perante o qual não era possível a argumentação. Os conceitos eram mostrados já formalizados e não decorriam de nossas reflexões. Não se dava tempo para que nós, alunos, sentíssemos a formalização como algo natural e necessário à comunicação de processos e resultados. Além disso, não havia oportunidade do aluno questionar o professor, este era soberano, o senhor detentor de toda a sabedoria. Dessa forma, propiciava-se a construção de uma imagem da Matemática como ciência abstrata, acabada, indiscutível – algo apenas compreensível e utilizável por poucos.

Mas, a realidade está mudando, cada dia mais os alunos estão em contato constante com o desenvolvimento tecnológico e recebendo informações em excesso. O jovem de hoje é mais curioso do que o de antigamente e, por ser menos ingênuo, ele questiona tudo e todos. A maior oferta de informação, também, faz com que ele crie um percurso próprio na aquisição do conhecimento.

Vivemos em um mundo que, cada vez mais, exige que as pessoas pensem, questionem e se arrisquem propondo soluções aos vários desafios os quais surgem no trabalho ou na vida cotidiana.

Boero (2011) afirma que o desenvolvimento da consciência dos alunos sobre as regras de argumentação e prova na Matemática é um dos principais desafios da Educação Matemática. Segundo ele, isso mostra a convicção partilhada pelos educadores matemáticos nas últimas três décadas apesar de algumas divergências quanto ao momento em que se deve desenvolver a consciência sobre elas, que elementos incluir na conscientização e como lidar com esses pormenores na sala de aula.

A discussão em torno de ensino e aprendizagem da prova e da demonstração tem mais a ver com o papel que a atividade deveria desempenhar na Educação Matemática, (HANNA, 2000), mas também tem a ver com o tipo de enfoque que se poderia dar em sala de aula (HEINZE, 2004). Hanna et al. (2009) afirmam que os profissionais da Educação Matemática enfrentam uma tarefa importante que é de levar os alunos a compreender o papel da argumentação e prova em Matemática escolar, e que atualmente documentos curriculares de diferentes países têm elevado o status da prova em Matemática escolar.

Em relação ao papel da demonstração em sala de aula, Hanna (2000) defende que se considere todo o conjunto de funções que a prática de uma demonstração pode desempenhar (verificação, explicação, sistematização, descoberta, comunicação, construção de uma teoria empírica, exploração do significado de uma definição, incorporação de um fato em um novo quadro e sua visualização a partir de nova perspectiva), porém ela defende que no ensino sejam priorizadas as funções de verificação e de explicação. Caracterizando a prática da demonstração em sala de aula, Balacheff (1987) categoriza as provas produzidas por alunos em pragmáticas e intelectuais e defende que

> A prática de provas precisa (...) poder encontrar seu lugar desde as práticas matemáticas das primeiras classes, aceitando que sejam reconhecidas como provas outras coisas que não as demonstrações no sentido estrito. Será preciso levar em consideração a natureza da racionalidade dos alunos e as condições de sua evolução, mas também encarregar-se da análise didática dos critérios aceitos de prova que podem evoluir no decorrer da escolaridade. (BALACHEFF, 1987, apud CARLOVICH, 2005, p. 49).

Este movimento de discussão entre pesquisadores em Educação Matemática me inspirou a refletir sobre a problemática da demonstração no currículo educacional. Mas como, em geral, a Matemática escolar contempla vários tópicos cada um dos quais susceptíveis de contemplar demonstrações, nossa atenção ficou voltada para a geometria.

Na disciplina Desenvolvimento de Recursos Didáticos do Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ, nos foi apresentado com detalhes o trabalho feito no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). As informações e o debate em torno do PNLD e do papel do livro didático geraram em mim o interesse de investigar como autores de livros didáticos, recurso didático mais utilizado pelos professores, trazem e abordam a argumentação em suas obras como competência a ser desenvolvida em Matemática.

Conversei, então, com a professora Mônica Mandarino, que apresentou o seminário e é integrante da equipe técnica do Programa. Mostrei-me interessada em desenvolver uma dissertação de mestrado com a finalidade de fazer uma análise crítica das argumentações e provas apresentadas nas coleções do Ensino Fundamental, aprovadas pelo PNLD.

O papel do livro didático, sua qualidade e caracterização tem sido tema de um número crescente de pesquisas nos últimos anos. Tal interesse deve-se, em parte, à expansão da política pública de análise, compra e distribuição de livros na rede pública, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)[1]. Um dos objetivos desse programa é oferecer informações para subsidiar o processo de escolha e uso do livro didático.

No caso de nossa pesquisa, a atenção volta-se para as Coleções de Matemática aprovadas na avaliação do PNLD/2011 (BRASIL, 2010), obras que estavam nas escolas durante a realização desta pesquisa. O objetivo é explicitar tendências adotadas pelos autores no campo da argumentação e prova. Interessa-nos particularmente verificar a forma como as provas são realizadas, se existem atividades com teor de prova e a articulação do uso deste tipo de raciocínio em geometria e sua conexão com o que foi, está sendo e será trabalhado, num mesmo livro didático.

Mas por que enveredar por geometria e não por outro assunto matemático?

[1] Temática que será explorada na seção 1.1.3.

A delimitação em torno da geometria justifica-se pela necessidade de revalorização deste campo (PAVANELO, 1993) e por ser lócus privilegiado de aplicação e compreensão da demonstração em Matemática.

Existe uma preocupação pelo resgate do ensino da Geometria nas escolas brasileiras. Esta afirmação pode ser constatada em um estudo realizado sobre o desempenho dos alunos do Ensino Médio:

> [...] os alunos revelam maiores dificuldades na expressão escrita particularmente na produção de textos bem estruturados, com sequência lógica e sem erros ortográficos fato que se reflete no desempenho dos mesmos nas restantes disciplinas. Os testes revelaram ainda haver problemas na disciplina de Matemática, por exemplo, na geometria, cálculo percentual, trabalho com radicais e em exercícios que exigem cálculo com números decimais ou notação decimal. (INDE e MEC, 2007, p.6).

Outro ponto importante é que grande parte dos professores e autores de livro que hoje estão em atividade tiveram uma formação precária em Geometria, em razão do Movimento da Matemática Moderna que relegou o ensino deste campo para segundo plano.

ALMOULOUD e MELLO (2000 p.2) afirmam que “embora os currículos mais recentes destaquem a importância de se resgatar o trabalho com Geometria no Ensino Fundamental, o professor não sabe o que fazer.” Estes autores defendem a necessidade de uma formação adequada do professor para trabalhar com a demonstração em Geometria como forma de preparar o aluno para apropriar-se dos conceitos e habilidades geométricas.

Como reflexo da identificação dos problemas que o Ensino da Geometria enfrenta no Brasil, constatamos que existem várias pesquisas de Mestrado e/ou Doutorado (GOUVÊA, 1998, PIETROPAOLO, 2005, entre outros) que têm contribuído para a busca de formas adequadas para abordar a prova e a demonstração em Geometria.

Como uma das motivações para a utilização dos livros didáticos como fonte de dados desta pesquisa está associada à grande influência que este recurso exerce nas salas de aula, levamos este aspecto em conta no levantamento de pesquisas. Até o momento atual, não foram encontradas pesquisas que tivessem o livro didático como objeto de análise para a questão da prova em Geometria.

Assim, a questão orientadora desta pesquisa será:

Como são trabalhadas as argumentações e provas no ensino da geometria, no que diz respeito às orientações pedagógicas indicadas pelos livros didáticos de Matemática de anos finais do Ensino Fundamental?

Para tal investigação delimitamos a pesquisa a três conteúdos. Para esta escolha tomamos como princípio serem conteúdos para os quais a argumentação e prova são simples de serem trabalhadas e entendidas. São eles:

- Ângulos formados por paralelas e transversais.
- Soma dos ângulos internos do triângulo;
- Relação entre as medidas de um ângulo externo e os internos não adjacentes de um triângulo;

Nosso trabalho tem como objetivo descrever e analisar a organização Matemática e didática destes três conteúdos da Geometria, do ponto de vista da prova e demonstração. Para esse estudo, tomamos como referencial teórico os tipos de provas propostos por Balacheff.

Consideraremos as funções do livro didático (GÉRARD & ROEGIERS, 1998) e, dentre elas, a de apresentar o conhecimento formal e estruturado, fundamental para o desenvolvimento de habilidades de argumentação.

Como o objeto de análise são textos, livros didáticos de Matemática aprovados pelo PNLD 2011, recorreremos à metodologia análise de conteúdos.

1. A PESQUISA E SEU REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo discutimos o levantamento bibliográfico realizado para cada um dos temas envolvidos nesta pesquisa. Primeiramente tratamos de estudos relativos ao livro didático. Na seção seguinte trazemos nossos estudos e reflexões iniciais sobre argumentação, prova e demonstração Matemática, relacionando-as com o ensino. Por isso, faz-se uma rápida revisão histórica sobre o tema, apresentando algumas teorias, onde procuramos entender os fundamentos que os sustentam. Neste momento definimos então nosso referencial teórico, o qual nos dará embasamento para as análises realizadas. Como nossa pesquisa está direcionada para o ensino e a aprendizagem de geometria, achamos necessário apresentar um breve histórico sobre que necessidades levaram o homem a utilizar-se da Geometria em seu cotidiano, propomo-nos em seguida tratar, de maneira breve, a questão do ensino da Geometria, tendo como embasamento trabalhos de diversos autores. Posteriormente, apresentamos, então, os conteúdos que serão analisados nos livros didáticos, mostrando algumas maneiras de abordá-los e demonstrá-los.

1.1. Reflexões sobre o livro didático

Nesta seção, primeiramente apresentamos alguns estudos relativos ao livro didático. Posteriormente, relacionamos de forma breve, os livros com a organização curricular, pois no levantamento e análise da seleção e distribuição dos conteúdos que abordamos neste trabalho, a compreensão das questões curriculares atuais serão fundamentais. Nesta mesma seção, trazemos ainda, informações sobre o PNLD, visto que os livros que serão analisados foram os aprovados por este programa.

1.1.1. Algumas ideias iniciais sobre livros didáticos

Pesquisas mostram que, para muitos professores e alunos, o livro didático é a mais importante e, muitas vezes, a única fonte de consulta. Segundo Pereira e Melo (2007, p. 1), “Uma parcela significativa dos docentes utiliza na preparação de suas aulas, única e exclusivamente o livro didático adotado na escola, alguns até limitando o conteúdo abordado e a metodologia empregada ao proposto no livro”.

Na literatura, os livros didáticos têm sido abordados por diversos pesquisadores, especialmente os que trabalham com instrumentos de ensino e aprendizagem. As discussões acerca do assunto apontam para várias concepções sobre esses recursos didáticos.

Molina (1988, p.17), ao realizar estudos sobre a qualidade dos livros didáticos, refere-se a eles como “uma obra escrita (ou organizada, como acontece tantas vezes), com a finalidade específica de ser utilizada numa situação didática, o que a torna, em geral, anômala em outras situações”. Fica claro que para esse pesquisador, o livro didático é um material único e exclusivamente usado no ensino escolar. Segundo Rojo (2005, p.3), “o conceito de livro didático proposto por Molina implica uma sala de aula regida basicamente pelo manual, pelo livro didático”.

Goldberg (1983, p. 7) considera que, o livro didático “tem intenção de fazer com que o aluno aprenda, razão pela qual apresenta conteúdos selecionados, simplificados e sequenciados”.

Esses estudos, assim, apontam para a reafirmação da relevância do livro didático no ensino escolar. Porém há outras reflexões sobre o papel desses livros.

Segundo pesquisadores Gérard & Roegiers (1998), no que diz respeito ao professor, o livro didático desempenha, entre outras, as funções de:

> - auxiliar no planejamento didático-pedagógico anual e na gestão das aulas;
> - favorecer a formação didático-pedagógica;
> - auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno;
> - favorecer a aquisição de saberes profissionais pertinentes, assumindo o papel de texto de referência.

De acordo com os mesmos pesquisadores, para os alunos, o livro deve:

> - favorecer a aquisição de saberes socialmente relevantes;
> - consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos;

> ➢ propiciar o desenvolvimento de competências e habilidades do aluno, que contribuam para aumentar sua autonomia;
> ➢ contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania.
> (GUIA DO PNLD 2012, p. 13).

Para Carvalho & Lima (2010c): “o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado; os métodos adotados para que os alunos consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade”. Segundo ainda esses pesquisadores, nesse diálogo existe uma “teia” de relação que envolve o autor/livro didático, o professor, o aluno e a Matemática.

O amplo papel atribuído ao livro didático, segundo os pesquisadores acima, concorre para que se considere esse instrumento pedagógico como um elemento de muita relevância na escola. No entanto, em documentos curriculares, encontram-se advertências para desvios não tão distantes da prática escolar:

> É preciso observar, no entanto, que as possíveis funções que um livro didático pode exercer não se tornam realidade, caso não se leve em conta o contexto em que ele é utilizado na escolha quanto no uso do livro, o professor tem o papel indispensável de observar a adequação desse instrumento didático à sua prática pedagógica e ao seu aluno. (...) Além disso, o livro didático é recurso auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. Não pode, portanto, ocupar papel dominante nesse processo. Assim, cabe ao professor manter-se atento para que a sua autonomia pedagógica não seja comprometida. Não é demais insistir que, apesar de toda sua importância, o livro didático não deve ser o único suporte do trabalho pedagógico do professor. É sempre desejável buscar complementá-lo. (GUIA DO PNLD 2007, p. 11).

1.1.2. Livro didático e organização curricular

Como já foi falado na seção 1.1.1, o livro didático é um grande aliado do trabalho do professor. Segundo Alain Choppin (1992), uma de suas principais funções deve ser a de auxiliar no ensino de uma determinada disciplina através da apresentação de um conjunto extenso de conteúdos do currículo, de acordo com uma progressão, sob a forma de unidades ou lições em uma organização que favorece tanto o uso coletivo (em sala de aula) quanto individuais (em sala de aula ou em casa).

Portanto, para realizar pesquisas que tomam o livro didático como fonte de dados é preciso compreender o seu papel em relação ao currículo bem como, a influência do currículo sobre este material pedagógico e, antes disso tudo, adotar uma definição de currículo.

No levantamento bibliográfico sobre o termo currículo há registros de seu uso desde o século XVII. Apesar de algumas divergências dos principais teóricos sobre o tema, arriscamo-nos a dizer que este termo sempre está relacionado com um projeto de controle do ensino e da aprendizagem, associando ordenação de conteúdos e métodos de ensino, como um instrumento facilitador da administração escolar.

Para Forquin (1993)

> Um currículo escolar é primeiramente, no vocabulário pedagógico anglo-saxão, um percurso educacional, um conjunto contínuo de situações de aprendizagem (learning experiences) às quais um indivíduo vê-se exposto ao longo de um dado período, no contexto de uma instituição de educação formal. (...) O currículo, escreve por seu lado P. W. Misgrave (1972), constitui na verdade 'um dos meios essenciais pelos quais se acham estabelecidos os traços dominantes do sistema cultural de uma sociedade', no mínimo pelo papel que ele desempenha na gestão do estoque de conhecimentos de que dispõe a sociedade, sua conservação, sua transmissão, sua distribuição, sua legitimação, sua avaliação (FORQUIN, 1993, p.22)

Todo currículo envolve um processo de seleção, de decisões acerca do que será e do que não será legitimado pela escola. Assim, os professores de Matemática e autores de livros didáticos, por exemplo, compartilham concepções de Matemática e de seu ensino que direcionam a seleção dos conteúdos, do que valorizar ou não de cada conteúdo, e das práticas escolares. Tais escolhas se sustentam e reforçam uma cultura escolar. A escolha de um determinado padrão cultural na seleção de conteúdos expressa uma valorização desse padrão em detrimento de outros. Assim, decide-se, por exemplo, se a capacidade de argumentar e formular provas é uma das competências Matemáticas a ser desenvolvida na educação básica, ou seja, para todo cidadão e não apenas para os que forem se tornar matemáticos de profissão.

Silva traz o conceito de currículo oculto que pode nos ajudar a discutir decisões curriculares que privilegiem ou não uma formação Matemática mais ou menos ampla. Para este autor, "O currículo oculto é constituído por todos aqueles aspectos do ambiente escolar que, sem fazer parte do currículo oficial, explícito, contribuem, de forma implícita para aprendizagens sociais relevantes (...) o que se aprende no currículo oculto são fundamentalmente atitudes, comportamentos, valores e orientações." (Silva, 1999, p.78)

No Dicionário Interativo da Educação Brasileira[2], currículo escolar é entendido como o “Conjunto de dados relativos à aprendizagem escolar, organizados para orientar as atividades educativas, as formas de executá-las e suas finalidades”.

Do ponto de vista da legislação nacional, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), de 1996, orienta para um currículo de base nacional comum para o Ensino Fundamental e Médio. As disposições sobre currículo estão em três artigos da LDB. Numa primeira referência, mais geral, quando trata da Organização da Educação Nacional, define-se a competência da União para "estabelecer em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum". (Brasil, Lei 9.394, Art. 9°, inciso IV)

Em decorrência dessa atribuição, o Ministério da Educação encaminhou à apreciação do Conselho Nacional de Educação, no final de 1996, os chamados Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que servem de eixo norteador na revisão e/ou elaboração da proposta curricular das escolas, pois foram elaborados procurando, de um lado, respeitar diversidades regionais, culturais, políticas, existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras, favorecendo assim o acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania.

Com esta concepção, os Parâmetros apresentam um conjunto de quatro documentos: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais, Convívio Social e Ética, Documentos de Área e, Documentos de Convívio Social e Ética, que compõem o primeiro nível de concretização. Segundo o próprio documento introdutório,

> (...) os PCN constituem o primeiro nível de concretização curricular. São uma referência curricular nacional para o Ensino Fundamental; (...) Têm como função subsidiar a elaboração ou a revisão curricular dos estados e municípios, dialogando com as propostas e experiências já existentes, incentivando a discussão pedagógica interna ás escolas e a elaboração de

[2] Baseamo-nos nas informações disponíveis em: http://www.educabrasil.com.br/eb/dic/dicionario.asp?id=72, acesso em jan/2012.

> projetos educativos, assim como servir de material de reflexão para a prática de professores. (PCN, p. 22)

Assim além dos PCN, são necessários outros níveis de concretização curricular: as propostas curriculares dos Estados e Municípios; a proposta curricular de cada instituição escolar; e a realização das atividades de ensino e aprendizagem na sala de aula.

Do ponto de vista da organização dos conteúdos da Matemática escolar, os PCN propõem uma organização em quatro grandes blocos (estudo dos números e das operações; estudo do espaço e das formas; estudo das grandezas e das medidas e tratamento da informação) que deveriam servir de base para a construção do currículo das escolas. Esse agrupamento tem como finalidade evitar a excessiva fragmentação de objetivos e conteúdos e tornar possível uma abordagem menos parcelada dos conhecimentos. Para cada um dos blocos define-se, em linhas gerais, o que se considera relevante que seja trabalhado com os alunos do Ensino Fundamental.

Os conteúdos nos PCN não são apresentados em uma listagem, como em documentos anteriores a ele. Enfatiza-se a necessidade de entender a palavra conteúdo basicamente em três dimensões: conceitos, procedimentos e atitudes. Valoriza-se, portanto, muito mais a compreensão das ideias Matemáticas e o modo como estas serão buscadas (podendo esse modo de busca ser estendido e aplicado para as demais áreas do conhecimento) do que a sua sistematização, muitas vezes vazia de significado. Entendem-se os conteúdos como um meio para desenvolver atitudes positivas diante do saber em geral e do saber matemático em particular. O gosto pela Matemática e o incentivo a procedimentos de busca exploratória, desenvolvendo uma atitude investigativa diante de situações-problema propostas pelo(a) professor(a) são alguns exemplos dessa compreensão mais ampla do que é ensinar e aprender em Matemática.

Segundo Mandarino

> Uma das diversas polêmicas resultantes da convivência de diferentes concepções e pontos de vista, muitas vezes contraditórios, reside na definição ou não de uma listagem de conteúdos que oriente: o trabalho dos professores, os autores de livros didáticos, os elaboradores de avaliações nacionais e pesquisadores. No entanto, ao longo destes anos foi se constituindo um currículo seriado que, explicitado ou não por documentos, parece funcionar como oficial. A existência desta listagem de

> conteúdos sempre pôde ser identificada na organização e distribuição dos conteúdos dos livros didáticos. (MANDARINO, 2007, p.3).

Portanto, não há uma regra pré-estabelecida sobre a seriação dos conteúdos a serem abordados nos livros didáticos. Os PCN são somente as diretrizes do trabalho que deve ser desenvolvido pelos livros, tendo em vista o processo de construção do conhecimento por parte do aluno e o papel do professor como mediador entre o aluno e o conhecimento.

Fazendo um paralelo entre o que falamos acima e as dez coleções analisadas, percebe-se que todos os autores estão preocupados em adotar o que o Parâmetro Curricular Nacional propõe, a fim de que os alunos tenham um conhecimento unificado em todo o país.

Embora as coleções estejam adequadas ao Parâmetro Curricular Nacional, pode-se destacar que algumas dessas não apresentam continuidade aos conteúdos e alguns são apresentados de maneira pouco favorável ao desenvolvimento dos educandos.

1.1.3. Processo de avaliação e escolha de uma coleção de livros didáticos de Matemática

Para alunos e professores, o livro didático se constitui em uma importante fonte de informações para a elaboração de um tipo específico de conhecimento, o conhecimento escolar.

> Embora vivamos em um tempo em que a oferta de recursos destinados à disseminação do conhecimento seja cada vez maior, no espaço escolar, o livro impresso ainda é o material que melhor atende às necessidades dos professores e alunos das escolas públicas brasileiras. (GUIA DO PNLD 2012, 1998, p. 7).

Por isso, o interesse em pesquisar o livro didático vem aumentando no transcorrer dos últimos anos, o que pode ser comprovado pelo aumento do número de publicações dedicadas a esse tema. A esse propósito, destacam-se os resultados obtidos por Batista e Rojo (2005), ao concluírem que no período de 1975 a 2003 foram identificados nada menos que 1927 trabalhos dedicados ao livro didático, utilizando como fonte de dados a Plataforma Lattes do CNPq. Entre esses trabalhos, os autores incluíram títulos referentes à produção e divulgação de iniciação científica, dissertações de mestrado e teses de doutorado.

Os autores dessa pesquisa mostram ainda que a partir de 1990 houve um aumento considerável no volume da produção de trabalhos dedicados ao livro didático, destacando que apenas o período de 2000 a 2003 é responsável pela metade da produção. Dessa maneira, fica evidenciada a existência de um volume considerável de pesquisas, realizadas recentemente, sobre livros didáticos no Brasil. Dentre os diferentes trabalhos sobre LD, podemos destacar o de Molina (1987), Coracini (1999), Dionísio e Bezerra (2002), Rojo e Batista (2003), Batista e Costa Val (2004), Costa Val e Marcuschi (2005), Galvão e Batista (2009), Tagliani (2009) e Bunzen (2005, 2009).

Ao que tudo indica pelo menos dois fatores contribuíram para a expansão do atual interesse em pesquisar o livro didático. Um deles foi a expansão da pós-graduação e do número de pesquisas em áreas da educação, tal como é o caso da Educação Matemática (Cassiano, 2009), e também a implementação mais intensa de políticas públicas voltadas para a avaliação da educação, entre as quais o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

O sistema adotado pelo PNLD para analisar os livros didáticos, a partir de regras definidas pelos próprios pesquisadores das diferentes áreas do saber escolar e avalizadas pelo poder público, tem, de certa forma, influenciado não somente a formação de professores, mas também a redefinição das estratégias de ensino e consequentemente as orientações pedagógicas. A rigor, admitindo que compete ao professor definir suas opções metodológicas, podemos falar que o livro didático não determina, mas contribui para a indução de estratégias de ensino. Muitas vezes, as orientações contidas no livro didático são reproduzidas em sala de aula. Além disso, habitualmente o livro didático exerce um poder de influência na definição das atividades realizadas em sala de aula.

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)[3] foi instituído em 1985 e, ao longo dos anos, vem se aperfeiçoando para atingir seu principal objetivo: educação de qualidade.

Com a finalidade de distribuir gratuitamente livros escolares aos estudantes matriculados no Ensino Fundamental das escolas públicas, o PNLD pretende

[3] Baseamo-nos nas informações disponíveis em: <www.fnde.gov.br>. Acesso em: ago/2011.

contribuir para universalizar e melhorar o ensino do 1° ano ao 9° ano, e promover a valorização do magistério, conferindo ao professor a tarefa da escolha do livro didático.

O Programa PNLD é administrado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), com o financiamento do Salário Educação e recursos do Orçamento Geral da União.

A distribuição dos livros é feita diretamente pelas editoras às escolas, por meio de um contrato entre o FNDE e a Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos (ECT). Esta etapa do PNLD conta com o acompanhamento de técnicos do FNDE e das Secretarias Estaduais de Educação.

A cada três anos é lançado um edital para que as editoras apresentem suas obras a fim de pleitear a aquisição pelo Ministério da Educação. Esse edital define as regras para inscrição e apresenta os critérios pelos quais os livros serão avaliados.

Ao final de cada processo de avaliação é publicado o Guia Nacional de Livros Didáticos (GNLD), contendo os princípios norteadores da análise, bem como os critérios da área e ainda as resenhas das obras aprovadas. Esse guia serve de instrumento para auxiliar os professores na escolha dos livros que serão adotados. As resenhas dos Guias de Matemática oferecem informações sobre a seleção, a distribuição e a abordagem dos conteúdos adotadas pela obra, bem como uma análise da metodologia e do manual do professor, como suporte para o trabalho docente.

A análise apresentada no Guia é feita tomando-se como parâmetros as tendências mais atuais da Educação Matemática, bem como a adequação do tratamento dos conceitos tendo em vista uma formação sólida para as sucessivas ampliações e aprofundamentos dos conteúdos da Matemática. Nesse sentido, a correção conceitual tem sido balizadora da aprovação das obras e, inadequações que não se configurem como erro ou indução ao erro, são apontadas nas resenhas visando à melhoria progressiva da qualidade dos textos e prevenir os docentes quanto à necessidade de estarem atentos para aprimorar/ adequar/ complementar o trabalho com algum conteúdo.

No Brasil, muitos professores se apoiam no livro didático, devido a algumas questões emblemáticas, como por exemplo, a grande carga de trabalho que muitos professores possuem, utilizando então, o livro didático como principal ferramenta.

Com esse recurso, seu trabalho torna-se um pouco menos cansativo, já que não há necessidade de preparação de apostilas, listas de exercícios ou outro material para o desenvolvimento da aula.

> Na ausência de materiais instrucionais em quantidades e qualidade que orientassem o trabalho do professor na sala de aula [...] o livro didático passou a ser o principal e, em muitos casos, o único instrumento de apoio ao trabalho docente. Ele é que indica a amplitude, a sequência e, até mesmo, o ritmo de desenvolvimento do programa de Matemática. Isso tudo, além de sua função básica como um importante auxiliar de aprendizagem e de ensino na sala de aula. (DANTE, 1996, p.52).

Outro fator é a necessidade dos docentes da escola pública fazerem uso dos LD, pois os alunos recebem este material do Governo. Já nos estabelecimentos particulares, por vezes, há uma cobrança dos pais que investiram no material.

Assim, considerando que o livro didático é constantemente usado pelo professor e exerce um importante papel na prática docente, acreditamos ser justificável sua análise.

As coleções de Matemática, que serão objeto de nosso estudo, foram aquelas sugeridas pelo Guia Nacional do Livro Didático dos anos finais do Ensino Fundamental – PNLD 2011 – livros que, no momento desta pesquisa, são os que estão sendo adotados pelas escolas.

1.2. Reflexões sobre argumentação, prova e demonstração

Nesta seção faremos uma breve exposição de como os termos argumentação prova e demonstração são abordados por diversos autores. Posteriormente descrevemos como estes termos são tratados no ensino de Matemática para então, fazermos, na seção 1.2.3 as distinções destas palavras, de acordo com Balacheff, as quais usaremos como base teórica para esta pesquisa.

Como a intenção dessa pesquisa é tratar o uso de argumentações, provas e demonstrações em geometria nos livros didáticos, enfatizamos a necessidade de diferenciarmos essas palavras. Para nós, a diferenciação entre elas e o entendimento das implicações dessa diferenciação são a chave para um ensino eficiente de provas e demonstrações na Matemática.

1.2.1. Reflexões teóricas e empíricas

Segundo Gouvêa (1998), a origem do estudo sobre demonstração Matemática e seu desenvolvimento no decorrer da história permite esclarecer a complexidade de seu ensino. Porém, a literatura a respeito não é muito vasta, pois para os matemáticos ela não é material direto de investigação, e sim fortemente ligado aos conhecimentos matemáticos.

Para esta autora, a origem da demonstração Matemática se localiza na Antiguidade Clássica, precisamente na Grécia do século VI a.C.. No entanto, não se caracterizava como a consideramos hoje.

> A demonstração, entre gregos, é consequência do pensamento reflexivo influenciado pelas exigências político-sociais e filosóficas que se instauraram, pela necessidade de “convencer” o outro. A tríade Sócrates, Platão e Aristóteles teve a função de suplantar, pelo pensamento reflexivo, a crença mística primitiva. As atividades humanas na “πολις” (polis = cidade) alcançaram seu ponto alto de expressão. O pensamento reflexivo passou da preocupação cosmológica para a antropológica com sofistas, mestres de retórica e de eloquência na Atenas democrática, que precisavam preparar os cidadãos para a disputa dos cargos públicos através das eleições livres. (GOUVÊA, 1998, p.22).

Do ponto de vista histórico não se pode excluir a vivência de matemáticos anteriores aos gregos. Segundo Keller (1986), os escribas do Egito provavam a precisão de seus cálculos por meio da verificação do resultado. Já na Índia era utilizada a figura (precisão de desenho) para provar as afirmações geométricas.

A princípio, os significados dos termos demonstração e prova estão ligados a uma ideia comum, à descrição de argumentos com vistas a justificar ou validar uma proposição. Apesar da ideia comum, esses termos nem sempre são considerados sinônimos, assumindo variações em função do tempo e do contexto. Na acepção de Pietropaolo:

> Convém assinalar que em artigos sobre a história da Matemática e, em particular, sobre Educação Matemática são usados variados termos para se referir às demonstrações, tais como: demonstrações formais, demonstrações rigorosas, provas rigorosas ou simplesmente provas. E nem sempre essas expressões são utilizadas como sinônimas. (PIETROPAOLO, 2005, p. 48).

O ensino e a aprendizagem da argumentação, da prova e da demonstração vêm sendo objeto de muita discussão entre pesquisadores, sobretudo, quanto ao papel que a atividade deveria desempenhar na Educação Matemática (HANNA, 2000), e o tipo de enfoque que se poderia dar em sala de aula (HEINZE, 2004).

Hanna (2000) distingue a demonstração para fins escolares da demonstração para os matemáticos profissionais ou lógicos. Ela procura diferenciar as expressões demonstração formal, demonstração aceitável e demonstração empregada para fins escolares: a primeira seria o conceito teórico da lógica formal e que poderia ser encarada como o ideal matemático de cuja prática apenas se aproxima; a segunda é o conceito aceitável para os matemáticos profissionais; a terceira é a composição de atividades que visam desenvolver junto aos alunos noções e conceitos.

Para Hanna, uma demonstração deve incentivar a compreensão: “uma boa prova, entretanto, não deveria ser somente correta e explicativa, a mesma poderia também levar em consideração, especialmente em seu nível de detalhe, o contexto da aula e a experiência dos estudantes” (1995, p. 48).

Harel e Sowder (1998) consideram que para a aprendizagem da prova é fundamental que os alunos a julguem importante e propõem “o princípio da necessidade”.

Para que os estudantes possam aprender, os mesmos devem se dar conta da necessidade de aprender o que vai ser ensinado para eles, sendo que o termo “necessidade” é utilizado aqui com significado de “necessidade intelectual”, em oposição à necessidade social ou econômica (Harel e Sowder, 1998, p. 266). Para esses dois educadores, o princípio da necessidade pode favorecer a construção de uma argumentação, mas não exatamente a construção de uma demonstração[4]. Os estudantes não serão, certamente, capazes de construir de imediato uma demonstração, quando se defrontarem com uma situação que a exija. Contudo, segundo estes autores, pelo princípio da necessidade, é importante tornar uma demonstração significativa, em especial aquelas apresentadas pelos professores como forma de elucidar as dúvidas dos estudantes.

Por outro lado, Healy e Hoyles (2000) entendem que os alunos precisam frequentemente realizar ensaios e verificações empíricas da demonstração, quando esta não os convencer de imediato. Argumentam que, geralmente, quando os estudantes se deparam com uma demonstração já construída, eles tornam-se céticos, porque não conseguem compreender a garantia proporcionada por ela. Os resultados de Healy e Hoyles (2000) mostram claramente que os alunos preferem as argumentações narrativas, ou seja, aquelas em que para descrever os raciocínios utilizados se fazem valer quase que exclusivamente da língua materna.

Boero (1996 apud ALMOULOUD, 2007) realizou uma pesquisa cujo problema consistia em verificar se a maioria dos alunos daquele nível de escolaridade (8ª série, atual, 9º ano) poderia produzir conjecturas se colocados em condições ideais para tal. O autor concluiu que isso é possível desde que: (1) durante a produção da conjectura, o aluno trabalhe sua por meio de uma atividade argumentativa entremeada de justificações da plausibilidade de suas escolhas; (2) se durante a etapa seguinte da prova, o aluno organiza, por meio de relações construídas de maneira coerente, algumas justificativas (argumentos) produzidas durante a construção de acordo com uma corrente lógica. (ALMOULOUD, 2007, p.3).

Pesquisadores como Pedemonte (2007); Antonini e Mariotti (2009); Douek (2009), entre outros, defendem que a exploração da relação entre argumentação e demonstração é de extrema importância para o desenvolvimento da proficiência dos alunos em atividades de demonstração, desde que sejam preparados inicialmente a produzir conjecturas e avançar com algumas justificativas.

Balacheff (1999) é contra essa posição, pois considera que a argumentação constitui-se em um obstáculo epistemológico para a aprendizagem da demonstração. Segundo o autor, argumentação é um processo social aberto, e a demonstração obedece a regras predefinidas.

A relação entre argumentação e o processo de aprendizagem da produção de uma demonstração são objeto de instigação de outros pesquisadores em Educação Matemática. Vincent et al (2005) e Douek (2009) interessaram-se pelo significado dos termos argumento e argumentação. Para Vincent et al.:

> Um argumento pode ser definido como uma sequência de declarações Matemáticas que virão a convencer, enquanto argumentação pode ser considerada como um processo no qual uma lógica Matemática conecta o discurso desenvolvido. (VINCENT et al., 2005, p.281. tradução nossa).

Douek (2009) considera o *argumento* como as razões oferecidas a favor ou contra uma proposição, um parecer ou uma medida, no qual se incluem argumentos

[4] Diferenciaremos argumentação e demonstração na seção 1.4, segundo BALACHEFF, 1987, apud MONTORO, 2005, p.2.

verbais, dados numéricos, desenho, etc. A *argumentação* consiste em um ou mais argumentos logicamente ligados. Para a autora a prova em si é uma argumentação. Ela considera o processo de produção da prova como uma atividade cognitiva e socioculturalmente situada que envolve quatro modos de raciocínio. Ainda, segundo a autora,

> Esses quatro modos poderiam ser considerados como sucessivas fases de uma construção de prova, como momentos diferentes com diferentes intenções. Mas na verdade, como modos de raciocínio, eles raramente aparecem separadamente. (...) mas até mesmo dois ou mais deles podem intervir muito estreitamente em uma fase visando principalmente explorar ou escrever um texto dedutivo, por exemplo. (DOUEK, 2009, p.2. tradução nossa).

O termo demonstração é utilizado em âmbitos sociais e profissionais mais diversos. Um dos significados pode ser "realizar a ação efetiva que evidencia aquilo que se pretende ver" (MONTORO, 2007, p.1), por exemplo, o movimento demonstra-se andando. Montoro (2007) salienta que, por outro lado, a argumentação vem se convertendo em uma ferramenta muito utilizada na construção de aprendizados em ciências, em geral. Entendendo-se por argumentação, qualquer discurso que se emprega para tornar algo claro, deduzir como consequência natural, um raciocínio que se emprega para convencer alguém daquilo que se afirma ou nega.

A respeito da importância da argumentação para a proficiência na produção de demonstrações, Vincente et al (2005) defendem que, durante a produção das conjecturas, o aluno trabalha progressivamente sua declaração mediante uma atividade argumentativa funcionalmente entremeada com justificações da plausibilidade de suas escolhas. Na fase de produção da prova, o aluno liga-se ao processo de uma forma coerente, organizando algumas justificações, previamente produzidas na construção do esquema da cadeia lógica.

A relação entre argumentação e produção de uma prova na perspectiva cognitiva foi detalhadamente analisada por Pedemonte (2007). Em sua tese de doutorado, a pesquisadora mostra que uma prova é mais acessível para os alunos se uma atividade de argumentação for desenvolvida previamente para a produção de uma conjectura. Boero et al (1996 apud PEDEMONTE, 2007), também defendem que o raciocínio que ocorre durante a argumentação desempenha um papel crucial na produção da prova.

Alguns autores, sem esquecer as diferenças entre argumentação e prova, defendem que o importante são as analogias entre os dois processos e as possíveis implicações didáticas (ANTONINI; MARIOTTI, 2009). Na verdade concordamos quando Douek (2009) afirma que "para fins de ensino e aprendizagem, a argumentação é um meio frutuoso para controlar a validade do raciocínio". A autora defende que as atividades exploratórias e a justificação devem ser introduzidas nas fases iniciais do processo de ensino e aprendizagem da demonstração.

Manin (1977 apud HANNA, 2000) defende que uma demonstração ajuda a compreender o significado do teorema ou a proposição a ser provada: a ver não só a verdade, mas também por que é verdade. Ainda, segundo a autora, a demonstração pode contribuir para a sistematização e comunicação de resultados ou para a formalização de conhecimentos matemáticos.

A partir destas reflexões, Hanna propõe uma lista das funções da prova e demonstração:

> 1- Verificação – preocupação com a verdade de um enunciado;
> 2- Explicação – fornecimento das razões por que é verdade;
> 3- Sistematização – organização de diversos resultados num sistema dedutivo de axiomas, principais conceitos e teoremas;
> 4- Descoberta – descoberta ou invenção de novos resultados;
> 5- Comunicação – transmissão de conhecimento matemático;
> 6- Construção de uma teoria empírica;
> 7- Exploração do significado de uma definição ou as consequências de um pressuposto;
> 8- Incorporação de um fato conhecido em um novo quadro e sua visualização a partir de uma nova perspectiva. (HANNA, 2000, p.8, tradução nossa).

Embora a autora liste oito funções para as demonstrações, ela defende que para que o aluno possa entrar no mundo da Matemática, ele deve começar por conhecer as funções fundamentais que são a verificação e a explicação. No domínio da educação, seria de esperar que se valorizasse primeiro a explicação e, nesse caso, as provas que melhor ajudam a explicar.

Somos de opinião que uma simples apresentação das demonstrações em livros didáticos, sem questões que levem alunos e professores a refletirem sobre o processo complexo da constituição de uma demonstração, terá provavelmente pouco sucesso no desenvolvimento de competências para a construção de uma demonstração. Tal como mostram os precursores da problemática do processo de ensino e de aprendizagem das demonstrações, como Pólya (1954 apud MONTORO, 2007, p.2), Lakatos (1976, apud MONTORO, 2007), Schoendfeld (1992, apud MONTORO, 2007), é preciso destacar que a denominada “demonstração final” de um teorema é o culminar de um processo. A apresentação limpa e ordenada de uma investigação esconde etapas que precederam tal estruturação: intuição, provas, argumentos, justificações, erros, refinamentos, etc. É isto que se deveria privilegiar nos livros didáticos: estimular que os leitores, alunos e professores, realizem atividades de cunho exploratório de propriedades, de busca de articulação com conhecimentos prévios, de outros significados de um conceito. As explorações realizadas levam à formulação de conjecturas para as quais se buscarão formas de validação por meio de demonstrações.

Percebemos, pelo que foi descrito neste capítulo, que não há um consenso entre os pesquisadores da Educação Matemática sobre o real significado com que se usam os termos prova, demonstração e argumentação. Não há também um consenso sobre de que maneira este tema deve ser trabalhado nas aulas de Matemática.

Acreditamos que a diferenciação entre prova, demonstração e argumentação é essencial no contexto da Educação Matemática, pois com ela, explicações mais simples, porém coerentes, dadas pelos alunos da educação básica podem ser valorizadas e caracterizadas como provas. Com um trabalho adequado, segundo Balacheff (1988), essas explicações simples podem evoluir, ou seja, aumentar de nível até chegar a uma demonstração. Essa diferenciação também dá à demonstração um estatuto mais sério, faz com que ela se torne algo a ser almejado pelos alunos durante a escolarização. Ao mesmo tempo, amplia o sentido desta atividade tão importante para a Matemática.

1.2.2. Argumentação, prova e demonstração no ensino

Segundo Hanna (2000), uma das principais funções da demonstração na sala de aula é a promoção da compreensão matemática, com isso, o maior desafio dos educadores matemáticos é encontrar modos mais efetivos de utilizar a demonstração para este fim.

Para que esta compreensão matemática aconteça, o professor deve deixar de ser um mero transmissor de conhecimentos para ser mais um orientador, um estimulador de todos os processos que levam os alunos a construírem seus conceitos, desenvolverem as suas capacidades de observar, descrever, conjecturar, organizar informações e propor soluções.

Porém, diversas pesquisas em Educação Matemática (ERNEST, 1988; FENNEMA, 1992; FIORENTINI, 1995; CHEVALLARD, 2001; MANDARINO, 2006) têm reafirmado que as aulas de Matemática são tipicamente expositivas, em que o professor apresenta no quadro aquilo que julga importante e os alunos copiam para o caderno. Em seguida os alunos fazem exercícios de aplicação, e aguardam a validação do professor. É comum que os alunos resolvam muitos exercícios repetitivos, quase sempre sem compreender o significado do que aplicam, nem saber justificar por que aplicam um procedimento e, muito menos, os passos deste. Em tal ambiente, nem todos os alunos conseguem desenvolver a capacidade de argumentar matematicamente.

Neste sentido, nossa preocupação se volta para a necessidade de se criarem condições favoráveis para o envolvimento dos alunos em experiências de aprendizagem com foco na explicação e na fundamentação de raciocínios, já que:

> O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência. (BRASIL, 1998, p. 26).

Nesta tarefa, sem dúvida, o LD tem papel importante. Nasser e Tinoco (2001) salientam que os livros atuais modificaram muito a abordagem no campo da argumentação e da demonstração, mas ainda não é o bastante. Segundo estas educadoras, muitos apresentam figuras mais atrativas e uma maneira diferente de ensinar, estilo até mais motivador, entretanto a nova abordagem faz com que os alunos deixem de pensar e raciocinar recorrendo apenas às capacidades de observar e visualizar, por exemplo. As autoras enfatizam que: “os jovens não estão habituados a pensar e comunicar suas ideias” (NASSER E TINOCO, 2001, p.1).

O levantamento bibliográfico realizado, em especial a pesquisa que Nasser e Tinoco vêm desenvolvendo, bem como a experiência na docência, nos levam a partir da hipótese de que muitos livros atuais apresentam demonstrações, mas são mínimas as situações que realmente envolvem os alunos nesse trabalho. Geralmente as provas possuem um grau de generalidade inacessível para a maioria dos alunos ou incorre-se em erro por se transformarem em estratégias de convencimento de regras ou fórmulas a partir de um único exemplo.

Acreditamos ser importante que os estudantes se familiarizem com as provas desde o Ensino Fundamental para que assim, ao longo da Educação Básica, venham a atingir as competências almejadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999, p. 215-216), dentre elas "escrever textos adequados para relatar experiências, formular dúvidas ou apresentar conclusões", e:

- Identificar o problema (compreender os enunciados, formular questões, etc.).
- Procurar, selecionar, interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Segundo os documentos curriculares vigentes, as provas devem estar presentes no ensino de Matemática, devido a sua potencialidade para desenvolver o raciocínio dedutivo.

Os livros didáticos vêm incorporando uma nova forma de substituir a validação formal de um conteúdo. Recorrem, com frequência à manipulação de materiais, recortes, instrumentos de medida, o que não se pode caracterizar como contribuição para o desenvolvimento da capacidade de argumentar e, muito menos de provar algum fato matemático.

De acordo como Imenes (1987, p.60) no trabalho com atividades investigativas é importante compreender, claramente, qual é o papel desempenhado pelos materiais e instrumentos. Eles são apenas acessórios, importantes do processo, mas este material didático sozinho, não desencadeia o processo de aprendizagem. É fundamental a maneira como o professor trabalha e orienta os seus alunos no uso destes materiais.

Para muitos professores, o livro didático é a única fonte de pesquisa, de forma que, se as provas forem estimuladas nas coleções, isto pode encorajar os docentes não apenas a realizá-las em sala de aula, mas também a propor atividades referentes a provas aos alunos.

Além das definições escolhidas para os termos prova, demonstração e argumentação, nosso estudo fundamenta-se no trabalho de Nicolas Balacheff sobre processos de provas. Usaremos as ideias do autor para refletir sobre as provas constantes dos livros didáticos a serem analisados na presente pesquisa.

Desse modo, passamos a apresentar as principais ideias que nortearão o presente estudo.

1.2.3. Balacheff e os tipos de provas

Na seção anterior falamos de termos como prova, demonstração e argumentação e pensamos ser importante distingui-los nessa seção, pois estes nomes compõem os pontos de partida para o nosso estudo.

Balacheff (1982 apud GOUVÊA, 1998) interessou-se pela problemática prova e pelo significado da demonstração, como meio de validação das ideias Matemáticas, e preocupou-se com o significado dos termos argumentação, explicação, prova e demonstração. Neste autor buscamos precisar então, os significados desses termos para nossa pesquisa.

Assim, de acordo com Balacheff, entenderemos por:

> **Argumentação**, qualquer discurso destinado a obter o consentimento do interlocutor sobre uma afirmação;
>
> **Explicação,** uma argumentação em que o consentimento se busca a partir da explicitação da racionalidade da afirmação, e não através de outros tipos de argumentação;
>
> As **provas** são explicações em que a explicitação da veracidade de uma asserção se realiza sob regras ou normas acordadas por uma comunidade determinada em um momento dado. Na comunidade Matemática, essas normas estabelecem a apresentação de uma sucessão de enunciados, cada um dos quais é uma definição, um axioma, um teorema prévio ou um elemento derivado mediante regras pré-estabelecidas de enunciados que lhe precedem. Nesse caso as provas recebem o nome de **demonstração**. (BALACHEFF, 1987, apud MONTORO, 2005, p.2).

Segundo Balacheff (1987)

> Chama-se demonstração uma prova que só pode ser aceita no seio da comunidade Matemática. Ela é uma sequência de enunciados

> organizada segundo regras determinadas. Um enunciado é considerado como verdadeiro, ou é deduzido daqueles que precedem com a ajuda de uma regra de dedução tomada em um conjunto de regras bem definido. (BALACHEFF, 1987, apud CARLOVICH, 2005, p.13).

Ainda, segundo Balacheff (1988, apud GRAVINA, 2001), as provas produzidas pelos alunos podem ser subdivididas em duas categorias: *provas pragmáticas* e *provas intelectuais*. As pragmáticas apoiam-se em conhecimentos práticos, valendo-se dos recursos de ação, por exemplo, desenhos, observação de figuras; e as provas intelectuais são as que se compõe de argumentos que implicam propriedades e relações entre propriedades, sua comunicação está caracterizada pela linguagem Matemática.

O autor identifica quatro níveis de validação, sendo os três primeiros (empirismo ingênuo, experiência crucial e exemplo genérico) enquadrados nas provas pragmáticas e o quarto nível (experiência mental) na categoria de provas intelectuais.

1- O *empirismo ingênuo (empirisme naif):* consiste na verificação de alguns poucos casos, sem questionamento e de sua particularidade, para a validação de uma propriedade. É considerado o primeiro passo no processo de generalização e, permanece ao longo do processo de desenvolvimento do pensamento geométrico. Segundo as circunstâncias em que as categorias de prova foram propostas,

> No *empirismo ingênuo*, os alunos determinam experimentalmente que o número de diagonais de um certo pentágono é 5; modificam a forma do pentágono e conferem novamente a constatação inicial; daí concluem peremptoriamente que um hexágono tem 6 diagonais. (BALACHEFF, 1988, apud GRAVINA, 2001, p.66).

2- *Experiência crucial (expérience cruciale):* trata-se de um processo de validação de uma proposição depois de se verificar com um caso especial, geralmente não familiar, quer dizer, é aquela na qual se usa um exemplo cuidadosamente selecionado por quem argumenta, tomando como representante da classe de objetos. Este procedimento de validação surge de uma atividade em que explicitamente é apresentado um problema de generalização.

> Na *experiência crucial* os alunos fazem experiência com um polígono de muitos vértices (uma imensa figura), buscando depreender generalização empírica, buscando a validação em outros casos particulares. (BALACHEFF, 1988, apud GRAVINA, 2001, p.66).

3- *Exemplo genérico* (exemple générique): trata-se de um processo de validação de uma propriedade, após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos; é um procedimento de validação mediante operações ou transformações sobre um exemplo. O objetivo é explicitar as razões que validam a propriedade.

> No *exemplo genérico* os alunos utilizam o caso particular do hexágono para explicação, mas desprendem-se de particularidades, o que dá indícios de pensamento dedutivo: "num polígono com 6 vértices, em cada vértice temos 3 diagonais. Assim são 18 diagonais; mas como uma diagonal une dois pontos, o número de diagonais é 9. O mesmo acontece com 7 vértices, 8, 9 ." (BALACHEFF, 1988 apud GRAVINA, 2001, p.66).

4- *Experiência mental (expérience mentale):* trata-se de um processo de validação em que é feita a construção cognitiva mais complexa, não fazendo uso de casos particulares, quer dizer, consideram-se exemplos que não são tomados como elementos de convicção, senão para ajudar a organizar a justificativa ou como suporte de argumentação.

> Na *experiência mental* os alunos se desprendem do caso particular, o que transparece na argumentação; "em cada vértice o número de diagonais é o mesmo de vértices, menos os dois vértices vizinhos; é preciso multiplicar isto que encontramos pelo número de vértices, porque em cada vértice parte o mesmo número de diagonais. Mas estamos contando cada diagonal duas vezes; o número de diagonais que procuramos se encontra dividido por 2 e obtemos uma vez cada diagonal". (BALACHEFF, 1988 apud GRAVINA, 2001, p.66).

Para Balacheff (1998 apud GRAVINA, 2001), o nível de experiência mental marca a transição entre a prova pragmática e a prova intelectual. É no nível de experiência mental que as ações interiorizadas confluem-se à generalização, livres de concretizações particulares, em gênesis cognitivo da demonstração. O nível exemplo genérico é intermediário: ora na categoria de prova pragmática, ora na categoria de prova intelectual, conforme a natureza efetiva da ação sobre o exemplo ou dependendo da concretização feita. A passagem das provas pragmáticas para as intelectuais é marcada por uma evolução dos meios de linguagem, e o autor defende que, para que os alunos possam entender o significado de uma demonstração e serem capazes de produzir uma demonstração, é preciso passar por esses níveis.

Ao usar as ideias de Balacheff a respeito do tipo de provas e a forma de validação das propriedades geométricas, pretendemos estudar como os autores abordam as propriedades geométricas, ou seja:

1- A forma como as propriedades são validadas;

2- As funções (principais) da prova que as atividades propostas pelos autores de cada livro preenchem;

3- Os tipos de provas (segundo a tipologia de Balacheff) presentes no estudo das propriedades selecionadas.

1.3. Reflexões sobre o ensino de geometria

1.3.1. Um breve histórico

Segundo Vitrac (2006) a explicação mais aceita sobre as origens da Geometria foi proposta pelo historiador Heródoto de Halicarnasso, no segundo dos nove livros de sua Enquete (século V a. C.) que traz a mais antiga menção da palavra grega "*geometria*" a ter chegado aos nossos dias. Os sacerdotes egípcios contaram a Heródoto que o rei Sesóstris dividia o solo entre todos os egípcios agricultores, atribuindo um lote igual a cada um e prescrevendo que cada detentor passaria a lhe dever um tributo anual com base nessa repartição. Contudo, uma vez ao ano o rio Nilo inundava parte do lote. O proprietário prejudicado ia então ao encontro do soberano, que averiguava o quanto do terreno diminuíra para então providenciar um abatimento proporcional no tributo a ser pago. Ao que tudo indica, concluía Heródoto, foi isso que ensejou o nascimento da geometria. Ele acrescenta que os gregos transmitiam uns aos outros esse conhecimento.

A força da descrição de Heródoto é etimológica: "geometria" constitui-se do prefixo "*geo*", derivado de "ge", a terra, e do verbo "*métrein*", "*medir*". E assim temos "**geometria = medida da terra**", e a ideia de que ela teria nascido da agrimensura. Afirmações sobre a origem da Geometria são incertas e muito arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos do que a arte de escrever. Heródoto e Aristóteles não quiseram arriscar-se a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a Geometria que tinham em mente possuía raízes mais antigas. Como já dito, Heródoto mantinha que a Geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade da prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual do vale do Rio Nilo. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da Geometria (BOYER, 1996, pág. 4).

A Geometria foi empregada pelos povos primitivos na construção de objetos de decoração, de utensílios, de enfeites e na criação de desenhos para a pintura corporal. Formas geométricas, com grande riqueza e variedade, apareceram em cerâmicas, cestarias, e pinturas de diversas culturas, com a presença de formas como triângulos, quadrados e círculos, além de outras mais complexas.

Para Kobayashi (2001), foi durante os séculos VII e VI a.C que os gregos se interessaram pela Matemática para além da necessidade prático-utilitária, como ciência. Para este autor, o homem começa a se preocupar em formular questões sobre o "por que" e não mais sobre o "como".

A mais preciosa fonte de informação deste período é chamada Sumário Eudemiano de Proclus, que se constitui de páginas de abertura de comentários sobre Os Elementos, onde aparece um resumo sobre o desenvolvimento da geometria grega, de seus primórdios até Euclides.

O ápice da Geometria Grega é atingido no período helenístico, mas esse fato não implica que não existiram produções importantes anteriormente. Na verdade, existiu uma vasta produção Matemática que remonta há muitos séculos antes de Euclides. Toda essa produção recebeu a denominação de Geometria Pré-Euclidiana. Euclides de Alexandria viveu entre 300 e 200 a.C. e desenvolveu o método axiomático (estrutura lógica de pensamento). Embora nenhuma descoberta lhe seja atribuída, sua habilidade de expor didaticamente o conhecimento geométrico foi como o primeiro passo na história do pensamento matemático, bem como da organização da própria Matemática.

Euclides foi responsável por sistematizar o conhecimento de geometria de sua época. A ordenação da Geometria de seu tempo, que realizou em um sistema dedutivo (do todo para as partes), é um trabalho notável. Ele tomou um pequeno número de conceitos geométricos simples e procurou demonstrar todos os demais como consequências lógicas desses primeiros, isto é, Euclides estabeleceu um sistema axiomático (lógico-dedutivo).

“Os Elementos” de Euclides representam de um modo perfeito, o tipo de Geometria que dominou as ciências durante todo o período compreendido entre a Antiguidade e a Idade Moderna. Sem dúvida, eles representam uma das contribuições mais importantes para a Metodologia das Ciências.

1.3.2. A importância do ensino da geometria

A Geometria é um ramo importante da Matemática, tanto como objeto de estudo quanto como instrumento para o trabalho com temas de outras áreas. Ela está presente em diferentes campos da vida humana, seja nas construções, nos elementos da natureza ou nos objetos que utilizamos. Lidamos, em nosso dia-a-dia, com ideias de paralelismo, congruência, semelhança, medição, simetria, área, volume e muitas outras. É claro que os aspectos utilitários da Geometria são importantes, mas é relevante que o aluno não tenha somente uma visão imediatista da aplicação da Geometria. Segundo Fonseca:

> [...] é possível e desejável, todavia, que o argumento da utilização da Geometria na vida cotidiana, profissional ou escolar permita e desencadeie o reconhecimento de que sua importância ultrapasse esse seu uso imediato para ligar-se a aspectos mais formativos. (FONSECA, 2001, p. 92).

Em relação à potencialidade da Geometria, Freudenthal expressa:

> A Geometria é uma das melhores oportunidades que existem para aprender como matematizar a realidade. É uma oportunidade de fazer descobertas, como muitos exemplos mostrarão. Com certeza, os números são também um domínio aberto às investigações, e pode-se aprender a pensar através da realização de cálculos, mas as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes. Até que possam de algum modo ser dispensadas as formas no espaço são um guia insubstituível para pesquisa e a descoberta. (FREUDENTHAL, 1973, apud FONSECA, et al, 2002, p. 92-93).

Muitos autores, como Pavanello (1995), apontam a Geometria como sendo o ramo da Matemática mais adequado para o desenvolvimento de capacidades intelectuais, tais como a percepção espacial, a criatividade e o raciocínio hipotético-dedutivo. Destaca ainda a autora que

> Não se pode negar que a Geometria oferece um maior número de situações nas quais o aluno pode exercitar sua criatividade ao interagir com as propriedades dos objetos, ao manipular e construir figuras, ao observar suas características, compará-las, associá-las de diferentes modos, ao conceber maneiras de representá-las. (PAVANELLO, 1995, p. 14).

Segundo Deguire (1994) é possível citar muitas razões para que se estude Geometria desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Uma delas é a oportunidade que a Geometria oferece de "ensinar a resolver problemas" e "ensinar para resolver problemas",

> ...ensinar a resolver problemas ultrapassa a mera resolução de problemas para incluir a reflexão sobre processos de resolução, objetivando coligir estratégias de resolução de problemas que poderão ser úteis posteriormente; ensinar para resolver problemas envolve o ensino do conteúdo de uma maneira significativa, de modo que passe a ser utilizado em outros problemas e aprendizados. Uma maneira, pelo menos, de ensinar para resolver problemas consiste em desenvolver o conteúdo a partir de episódios de resolução de problemas. (DEGUIRE, 1994, p. 73).

Segundo Balomenos et al (1994), são cada vez maiores os indícios de que as dificuldades de nossos alunos em cálculo devem-se a uma formação deficiente em Geometria. Os autores sugerem que se amplie o papel da geometria na escola, pois seu estudo propiciará a prontidão para o cálculo e desenvolverá a visualização espacial.

Para nós fica evidente que trabalhar com resolução de problemas propicia aos alunos uma motivação e não uma passividade do tipo "siga o modelo".

Para Búrigo (1994), existem algumas motivações para o ensino da Geometria. Em primeiro lugar por desenvolver a representação do espaço físico (vivenciado ou imaginado) num trabalho com outras disciplinas como Geografia, Educação Física, Física e Desenho em atividades como: interpretar e construir mapas, desenhos, plantas, maquetes; desenvolver a noção topológica envolvendo fronteira, exterior, cruzamento; perceber e adotar diferentes pontos de vista e estratégias na representação do espaço. Num segundo conjunto de motivações, por desenvolver a capacidade, na atividade concreta e mental, de classificar, comparar e operar figuras e sólidos, por meio de: recortar, compor, decompor, dobrar, encaixar, montar e desmontar, rodar, transladar, ampliar, reduzir, deformar, projetar, estabelecendo relações de congruência, semelhança, equivalência, entre outras. Enfatiza-se assim a importância de atividades como: quebra-cabeças, caleidoscópios, construção de sólidos, maquetes e outros. Um terceiro conjunto de motivações, segundo a autora, está relacionado à representação geométrica de conceitos ou fatos aritméticos e algébricos e, especialmente, de operações e problemas envolvendo grandezas contínuas.

Notamos assim que na Geometria temos a possibilidade de contextualizar os conteúdos, uma vez que o aluno pode perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode contribuir para uma maior significação dos conceitos aprendidos.

Por estes motivos, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) e pesquisadores da área da Educação Matemática, de modo geral, recomendam que a escola proporcione às crianças o acesso a esse conhecimento, visando à compreensão e à interação das mesmas com o mundo em que vivem. No entanto, várias pesquisas apontam problemas de ensino e aprendizagem de Geometria (ALMOULOUD, 2007).

Ao relatar a situação do ensino de Geometria no Brasil, Almouloud e Mello (2000), afirmam que a avaliação Nacional Básica (SAEB), de 1993 constatou que apenas 3,1% dos alunos da 4ª série (atualmente 5º ano) e 5,9% dos alunos da 8ª série (atualmente 9º ano) conseguiram acertar entre mais de 50% das questões propostas de Matemática.

Em sua pesquisa de mestrado, Mello (1999) afirma que um dos problemas que favorece o fraco desempenho de alguns alunos em conceitos e habilidades geométricas são as escolhas didáticas de seus professores quando ensinam Geometria.

Embora quase todos os professores achem que a Geometria é importante em todos os níveis do ensino, não há concordância quanto ao conteúdo ou à sequência do ensino da Geometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) trazem algumas recomendações claras sobre como deve ser o ensino da Geometria nos diversos ciclos de Ensino, mas não o conteúdo a ser abordado. Os PCN tornam claro que, até certo nível de aprendizagem, os alunos devem se limitar a verificação experimental. Posteriormente, alunos e professores devem considerar as demonstrações como o único meio de garantia e validação das propriedades geométricas, embora as atividades de natureza exploratória envolvendo experimentações continuem sendo importantes para o levantamento de conjecturas.

> Ao longo de sua história, a Matemática tem convivido com a reflexão de natureza filosófica, em suas vertentes da epistemologia e da lógica. Quando se reflete, hoje, sobre a natureza da validação do conhecimento matemático, reconhece-se que, na comunidade científica, a demonstração formal tem sido aceita como a única forma de validação dos seus resultados. (BRASIL, 1998, p.26).

E o documento continua afirmando que:

> Nesse sentido, a Matemática não é uma ciência empírica. Nenhuma verificação experimental ou medição feita em objetos físicos poderá, por exemplo, validar matematicamente o teorema de Pitágoras ou o teorema relativo à soma dos ângulos de um triângulo. (BRASIL, 1998, p.26).

Tradicionalmente, o estudo de Geometria é o primeiro momento em que os alunos têm oportunidade de encontrar um sistema matemático de postulados, teoremas e definições. Por mais de um século, a Geometria vem sendo considerada o curso ideal para os alunos aprenderem a fazer demonstrações (USKIN 1980 apud HERBST; MIYAKAWA, 2008, p.469). Mas, demonstrar em Matemática constitui uma tarefa cognitivamente complexa (MONTORO, 2007).

1.3.3. Problemas com o ensino da geometria

O “abandono” ou a “omissão” da Geometria no Ensino Fundamental e Médio tem sido objeto de muita discussão entre os educadores matemáticos no Brasil. Muitos trabalhos mostram a problemática em torno do ensino e da aprendizagem da Geometria, e ressaltam vários aspectos.

Pavanello (1993) apresentou o resultado de uma pesquisa, sob a forma de um artigo, intitulado “O abandono do ensino de Geometria no Brasil: causas e consequências”, no qual ela destaca o abandono do ensino de Geometria nas últimas décadas, mais precisamente após a publicação da Lei 5692/71. Muitas pesquisas, segundo essa autora, têm sido realizadas por educadores matemáticos de todo o mundo que, preocupados com o real descaso dessa disciplina, têm privilegiado o tema em suas discussões, em todos os congressos que reúnem pessoas envolvidas com a Educação Matemática.

Um trabalho que merece destaque, também, é o de Lorenzato (1995), cujo estudo deu origem ao artigo: “Por que não ensinar Geometria?” Nesse trabalho, o autor procura relatar as principais causas que levaram ao fracasso do ensino dessa disciplina no Brasil e afirma que a mesma é considerada distante ou quase ausente das salas de aula, o que implica numa realidade lastimável. O autor descreve as possíveis causas que levaram a essa falha, sendo uma delas, o fato de que muitos professores não têm conhecimentos suficientes para desenvolverem com segurança a prática pedagógica dessa disciplina, por isso, ele afirma que “Presentemente, está estabelecido um círculo vicioso: a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la.” (LORENZATTO, 1995, p.4)

Lorenzato (1995) propôs oito questões, elaboradas por alunos, sobre Geometria plana euclidiana, a 255 professores de 1ª a 4ª séries, com mais ou menos 10 anos de experiência de sala de aula, para o qual obteve como respostas cerca de 80% de erros. Além disso, somente 8% desses professores afirmaram que tentavam ensinar Geometria aos alunos.

Em suma, o que podemos perceber é a pouca importância que vem sendo dada ao ensino da Geometria em todos os níveis. A geometria faz parte do currículo do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, em devidas proporções. Porém, muitas vezes, tem sido negligenciada, tratada com uma abordagem que a torna árida e sem sentido para boa parte dos alunos e até professores.

Nesse contexto, Perez (1995) comenta que:

> Há pouco ensino de Geometria em nível de Ensino Fundamental e de Ensino Médio, quer seja por falta de tempo; por estar sempre no final dos planejamentos; por estar no final dos livros; pela preferência dos professores por Aritmética ou Álgebra; por ser o programa de Matemática muito extenso em cada série; pelo fato de a quantidade de aulas semanais em cada série ser insuficiente para cumprir todo o programa. (PERES, 1995, p. 45).

Pavanello (1989) mostra que o problema com o ensino da Geometria surge e se avoluma na medida em que as escolas passam a atender um número crescente de alunos das classes menos favorecidas. Nesse momento a Geometria é praticamente excluída do currículo escolar ou passa a ser, em alguns casos restritos, desenvolvida de uma maneira muito mais formal a partir da introdução da Matemática Moderna. A autora enfatiza ainda que o grande desconhecimento da Geometria por parte dos alunos e até dos professores é preocupante, pois, na medida em que a escola deixa os alunos sem acesso a conhecimentos importantes, acaba contribuindo para que as desigualdades sociais acentuem-se e se perpetuem.

Fonseca, et al (2001) apresentam uma experiência interessante. Num curso para formação de professores foi pedido para que estes relatassem os tópicos de Matemática que eles focalizam nos anos iniciais, e foi percebido que:

- O conteúdo de Geometria aparece sempre no final, dando a entender que é um estudo deixado para o fim do período letivo;
- O estudo de Geometria inicia-se com curvas abertas e fechadas, interior/exterior, o que sugere uma permanência da influência do Movimento da Matemática Moderna;
- Pelos relatos dos professores, observa-se que a tônica do ensino de Geometria está centrada na nomeação e classificação das figuras planas mais conhecidas;
- O estudo das figuras planas precede o estudo dos sólidos, numa organização mais próxima à exposição euclidiana do que às propostas pedagógicas que valorizam a experiência e a manipulação como pontos de partida (o que sugeriria antepor o estudo dos sólidos ao estudo das figuras planas);
- A inclusão de "ponto, reta, plano, segmento, semirreta, ângulos" numa fase muito inicial da escolaridade é frequente, num estudo centrado na apresentação formal dos conteúdos em detrimento da exploração dos conceitos (4º e 5º anos).

Pereira (2001), na sua dissertação de mestrado, intitulada: "A Geometria escolar: uma análise sobre o abandono de seu ensino", busca analisar o modo pelo qual as pesquisas têm tratado o abandono da Geometria no paradigma curricular do Ensino Fundamental e Médio, partindo de uma seleção da literatura produzida nos últimos vinte anos. Selecionando categorias que pudessem detectar pontos comuns em relação ao tema "o abandono da Geometria", ele obteve as seguintes:

A) Problemas com a formação do professor;

B) Lacunas deixadas pelo MMM (Movimento da Matemática Moderna).

C) Geometria nos livros didáticos;

Optamos por fazer uma breve discussão sobre os itens A e B citados e, nos aprofundar mais no item C, uma vez que permeiam o ensino de Geometria e nosso foco principal está no livro didático.

A) Problemas com a formação do professor

Dando enfoque à formação do professor de Matemática, a situação parece mais grave quando se trata especificamente da Geometria, visto que esta, na maioria das vezes, é apresentada aos alunos como ciência pronta e acabada, com conteúdos desvinculados do real, desmotivando os alunos e gerando dificuldades. Segundo Lorenzato (1995) “muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas”, de modo que se estabelece um círculo vicioso: “a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la”, o que leva a outra geração sem conhecimento geométrico e assim por diante.

A explicação desse fato pode estar na formação de base muito precária em Geometria de muitos professores que hoje estão em atividade, devido à própria influência que o Movimento da Matemática Moderna desempenhou em nossos currículos nas décadas de 1960/70.

Destaque-se ainda que os cursos de formação inicial de professores – tanto os cursos de magistério como os de licenciatura – continuam não dando conta de discutir com seus alunos uma proposta mais eficiente para o ensino de Geometria.

É bem verdade que nos últimos anos nos cursos de formação de professores de Matemática tem havido uma preocupação crescente com esse aspecto, graças às discussões das pesquisas em Educação Matemática. Porém, estas experiências ainda são frágeis frente aos problemas por que passamos com o ensino de Geometria.

Perez (1995, p. 57) afirma que “faltam metodologia e materiais concretos para o professor efetivar o ensino em Geometria, mostrando formação deficiente em conteúdo e metodologia, assim como necessidade de orientação e atualização, através de cursos, após estarem no mercado de trabalho”.

Pavanello (2004), numa pesquisa com professores e alunos dos anos iniciais, relata as dificuldades de professores no reconhecimento de figuras geométricas planas, de seus elementos e propriedades, o que indica que o trabalho pedagógico realizado com eles nas diferentes instâncias de sua formação não lhes permitiu elaborar devidamente seus conceitos sobre as figuras geométricas planas. A autora esclarece que parece ser possível afirmar que muitas das dificuldades que as crianças apresentam em relação ao conhecimento geométrico podem ter relação com a didática do professor, que na maioria das vezes, dá enfoque somente à nomenclatura, deixando de evidenciar suas propriedades.

Mas o problema com o ensino e a aprendizagem de Geometria não se instalou apenas no Brasil, tanto no que diz respeito à formação deficiente de professores na área de Geometria como no baixo rendimento dos alunos. Hershkowitz (1994), numa pesquisa realizada em Israel em 1984, verificou que os professores apresentam padrões de concepções incorretas semelhantes aos dos alunos de 6º e 9º anos, o que “sugere que o processo de formação de conceitos de Geometria e os fatores que inibem essa formação atuam de maneira semelhante sobre os indivíduos. Tudo indica que é preciso fazer com que os professores ou os futuros professores se familiarizem com esses processos e as concepções incorretas associadas a eles.” (HERSHKOWITZ, 1994, p.279).

Usiskin (1994), no artigo “Os Dilemas Permanentes da Geometria Escolar”, relata que em uma avaliação nacional dos EUA (1992), menos de 10% das crianças com 13 anos de idade sabiam determinar a medida do terceiro ângulo de um triângulo, dadas as medidas dos outros dois. Observou que uma questão mais difícil – determinar a hipotenusa de um triângulo retângulo, dadas as medidas dos catetos foi resolvida por 20% das crianças. Esses resultados ressaltam, além do baixo desempenho dos alunos, um fator interessante: o Teorema de Pitágoras foi resolvido por um número maior de alunos, o que ilustra segundo o autor, a ligação fundamental entre currículo e desempenho, ou seja, os alunos aprenderão aquilo que lhes for mais ensinado. O autor relata ainda que, para poder melhorar o desempenho dos alunos é preciso ampliar o grupo de pessoas que desejam estudar Geometria e para ampliar esse grupo, é preciso que haja um número maior de alunos com bom desempenho em seus estudos de Geometria. O autor diz que esses fatos constituem um dilema do tipo “o ovo ou a galinha” e para superar esse dilema sugere:

- Exigir de todos os alunos um nível significativo de competência em Geometria.
- Exigir que todos os futuros professores de Matemática, da escola elementar ou secundária, estudem Geometria na faculdade.
- Analisar, sob uma perspectiva curricular, as várias maneiras de conceituar a Geometria.

A situação descrita evidencia que enquanto não houver um investimento na formação dos professores e nos currículos dos cursos que os formam, as deficiências formativas dos alunos continuarão.

B) O Movimento da Matemática Moderna

Para Pavanello (1989) “há muito vinha-se questionando o ensino da Matemática, porém, em princípios da década de 50 a crítica acentua-se: é a disciplina na qual os alunos têm pior desempenho e a que neles causa maior aversão” (p.93). E assim muitos grupos se dedicam a criar novos currículos de Matemática financiados pelos órgãos governamentais. A autora ainda destaca que um dos principais motivos apontados pelos diferentes grupos dedicados à reforma do currículo é que os tópicos abordados no currículo tradicional referem-se a desenvolvimentos anteriores ao século XVIII, e estes deveriam ser substituídos por campos novos da Matemática, como a álgebra abstrata, a topologia, a lógica Matemática e a álgebra de Boole, “a ênfase no novo (conteúdo e abordagem) faz com que o movimento fique conhecido como ‘Matemática moderna’” (p.94).

Em muitos países começa-se a se pensar sobre que Matemática ensinar na Escola Básica. E, no Brasil, esse movimento, MMM - Movimento da Matemática Moderna, ganha força na década de 60.

Em 1959, realizou-se o Congresso em Royamont, na França. Nesse evento, segundo Pavanello (1994), foi recomendada a inclusão, no ensino de Matemática, de tópicos como a lógica, estruturas que passariam a ser ensinadas numa nova linguagem e também a teoria dos conjuntos. “Quanto à Geometria, seu estudo é reduzido justamente no momento em que a escola secundária democratiza-se e privilegia-se, em seu lugar, a álgebra e a aritmética”. (PAVANELLO,1994, p.95)

O MMM tinha como principais diretrizes a preocupação com o rigor e com a precisão da linguagem. Os programas de Geometria foram reduzidos, tornando um mero exemplo de aplicação da teoria dos conjuntos e da álgebra vetorial. Procurou-se justificar essa nova orientação, não somente pela aplicabilidade da Aritmética à Física, à Química e outras ciências, mas também pelo valor cultural do estudo do número.

Numa síntese, Kaleff afirma:

> “A Geometria Euclidiana foi praticamente excluída dos programas escolares e também dos cursos de formação de professores de primeiro e segundo graus, com consequências que se fazem sentir até hoje. Em muitas escolas de primeiro grau, o ensino da Geometria não só é confundido com o do Desenho Geométrico, como também as suas aulas são ministradas separadamente das de Matemática. Como consequência desta separação, não são professores com formação em Matemática que, na maioria das vezes, ministram as aulas de Geometria, porém outros profissionais cuja formação pode não ser adequada à tarefa em questão.” (KALEFF, 1994, apud ALVES, 2004, p.32).

Para piorar ainda mais, muitas Secretarias de Educação, municipais ou estaduais, retiraram dos currículos a disciplina de Desenho Geométrico, e assim os tópicos de Geometria, que pouco já eram discutidos em sala, tornaram-se inexistentes.

Atualmente, após movimentos de pesquisadores da Educação Matemática, estão havendo algumas mudanças, ainda diminutas, com relação ao currículo de Matemática e a inserção da Geometria com importância destacada. Basta verificarmos os Livros Didáticos que estão apresentando os temas geométricos alternadamente com temas algébricos, não mais os deixando para o final do livro conforme apresentavam anteriormente.

C) O Livro didático de Matemática

Parece evidente que entre os materiais didáticos utilizados pela escola, o livro didático é o que mais diretamente influencia a aprendizagem, pois este recurso é a fonte de informação, talvez única, para o professor e o aluno. É fácil entender então a necessidade que professores têm em utilizar os livros didáticos, pois os mesmos são um recurso de fácil alcance.

Sendo assim, a maneira como os conteúdos são organizados nos livros didáticos certamente será a usada pelo professor. Segundo se lê em Freitas (1999), o livro didático, não serve aos professores como simples fio condutor de seus trabalhos, ou seja, como um instrumento auxiliar para conduzir o processo de ensino e transmissão do conhecimento, mas como um modelo padrão.

De forma ideal, o planejamento docente deveria direcionar o material didático. Contudo o planejamento e a prática docente têm-se subordinado aos direcionamentos do livro didático.

Essa incoerência decorre de alguns fatores relacionados com a profissão docente, como a carga horária excessiva de trabalho, e com aspectos de uma cultura que considera o texto escrito e publicado acima de qualquer suspeita. Os docentes, participantes desta cultura, nem nos cursos de formação inicial para a profissão, realizam reflexões sobre a qualidade do material apresentado pela indústria editorial. Que leitura os docentes de Matemática fazem dos textos didáticos de sua área? Estes textos induzem os profissionais a modificar suas práticas de ensino? Mais especificamente: Qual é o papel dos exemplos ou da demonstração no ensino da Matemática e no livro didático que lhe dá suporte? Que papel possuem as atividades ou exercícios propostos pelos livros? Que lugar dedicam os docentes a essas atividades e por quê? Qual é a prioridade do docente na escolha de seu material: a exposição ou a apropriação de conhecimentos?

Tantas perguntas são inquietantes, porém responder a todas é um grande desafio que não se pode abarcar com o tempo para desenvolver uma pesquisa de mestrado. Assim, proponho-me a fazer uma pesquisa sobre como os livros didáticos em uso nas escolas conduzem o trabalho didático com respeito a argumentações e provas no ensino da geometria, o que pode contribuir para abrir caminhos para discutir as perguntas elencadas no parágrafo anterior.

O que percebemos na prática, como professor, é que os Livros Didáticos de Matemática, na maioria das vezes tratam a Geometria como se fosse um dicionário de definições e de inúmeras propriedades que são apresentadas como fatos, sem buscar argumentos que expliquem o porquê das relações. Iniciando com definições acompanhadas de desenhos bem particulares, os ditos desenhos prototípicos, por exemplo, os quadrados com lados paralelos às bordas da folha de papel, alturas em triângulos sempre acutângulos, etc. Isto leva os alunos a tê-los como únicos representantes desses objetos, de modo que a posição relativa do desenho ou um traçado particular passa a caracterizar o objeto geométrico, quer no aspecto conceitual como no aspecto figural, e não consegue reconhecer estes mesmos objetos quando apresentados em outra posição.

Miskulin (1999), num estudo em busca de entender a “aversão universal” que a Matemática desperta, optou por um caminho histórico do Ensino da Matemática a partir de documentos que retratavam métodos de seu ensino. Tentando encontrar os “ramos” que pudessem unificar os países, no que diz respeito à “incompreensão da Matemática”, nada encontrou na Álgebra e na Aritmética, mas com relação à

Geometria verificou que quando o ensino era somente em colégios religiosos para poucos, o ensino da Geometria era realizado de acordo com “Os Elementos de Euclides”, pois era a única obra a que tinham acesso. Entretanto, destaca que Euclides não havia escrito sua obra com a finalidade de uso nas escolas.

Ainda segundo esta autora, Alex Claude Clairaut, em 1741, no prefácio de seu livro “Os Elementos de Geometria” enfatiza que é impossível que um estudante iniciante no processo educativo possa compreender “Os Elementos de Euclides”, devido à demasiada axiomatização e abstração inerentes a ele.

Essas características de abstração e axiomatização sempre estiveram presentes nos livros de Matemática, especialmente no tratamento dos temas geométricos. Talvez essa seja umas das causas geradoras do descaso no ensino de Geometria e do tédio dos alunos pelo ensino de Matemática. Claro que o estudo matemático deve ter como principal meta o estágio de abstração, porém entendemos que no Ensino Fundamental, a Geometria deve ser apresentada de forma mais atrativa.

2. ESTUDO DOS CONTEÚDOS EM FOCO

Nossa pesquisa busca trazer à tona o tratamento dado pela Matemática escolar a tópicos da geometria euclidiana. No entanto, considerando a teoria da "transposição didática" de Guy Brosseau sabe-se que entre a teoria desenvolvida pelos matemáticos e a Matemática escolar há adaptações. Nesta perspectiva, para compreender o "conhecimento matemático ensinado" (CHEVALLARD, 2001, p.213), neste capítulo buscamos retomar as bases dos conhecimentos matemáticos em foco. Para isso, abordaremos um pouco da história dos tópicos de geometria que nos interessam, bem como as demonstrações mais formais, consolidadas no campo da geometria.

2.1. Euclides

Conta-se que em tempos muito remotos um jovem discípulo perguntou ao seu mestre qual o lucro que teria com o estudo da geometria. Seu mestre, o grande matemático grego Euclides, chamou um escravo e pediu que este entregasse algumas moedas ao jovem que a partir daquele momento deixou de ser aluno de Euclides.

Pouco se sabe sobre a vida de Euclides. Não se sabe onde nasceu, nem sua formação. E possível que tenha estudado na Academia de Platão, em Atenas, por causa da semelhança entre a visão platônica do conhecimento e a visão de Euclides, em particular do desinteresse pelas aplicações práticas. Euclides eventualmente se estabeleceu em Alexandria, Egito, onde o soberano Ptolomeu I havia criado um importante instituto cientifico conhecido como Museu.

No Museu, Euclides tornou-se um bom educador, com reconhecida habilidade como expositor. Sua obra mais importante, *Os Elementos*, era usada como texto introdutório ao estudo de matemática elementar. Ele foi o primeiro a apresentar a Matemática como ciência dedutiva, sendo que cada afirmação deveria ser deduzida de outras mais simples de maneira logica e sucessiva.

Hoje, sabe-se que a obra mais influente deste matemático, *Os Elementos*, escrita por volta de 300 a.C., é uma compilação de teoremas conhecidos e demonstrados. Euclides sistematizou a grande massa de conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo do tempo, dando ordem lógica e estabelecendo o conceito de lugar geométrico.

Não é possível saber qual a extensão do trabalho que pode ser atribuído ao próprio Euclides, porém a mera redação dessa obra já lhe confere um lugar de destaque na história da Matemática, sendo considerada como o primeiro tratado científico, modelo para todos os outros em qualquer ramo da ciência.

A obra é constituída de 13 livros. Sua organização foi tão bem estruturada que, durante séculos, superou todos os escritos sobre a Geometria e ainda hoje é explorada.

Os Elementos são um feito impressionante. Juntamente com as descobertas de J. Bolyai e de N. Lobachewsky, o trabalho de Euclides, os seus prolongamentos e a análise das suas limitações têm constituído o núcleo central da geometria com que a generalidade das pessoas e dos matemáticos entram em contato, nas escolas e nos nossos institutos e universidades. (Veloso, 1998, p. 17)

Euclides edifica a geometria a partir de definições, postulados e entes primitivos. Utiliza-os numa sequência lógica e sistemática nas proposições. Inicia seu trabalho no livro I, apresentando 23 definições, posteriormente, define, entre outros elementos, o ponto, a reta, o plano, o ângulo, o triângulo, o círculo.

Para Euclides, a geometria era uma ciência dedutiva que opera a partir de certas hipóteses básicas, os axiomas, que foram apresentados em dois grupos: as noções comuns e os postulados. A distinção entre esses grupos não é muito clara, mas noções comuns seriam consideradas hipóteses aceitáveis a todas as ciências e postulados seriam hipóteses próprias da Geometria.

Noções comuns:

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo é maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

(OS ELEMENTOS/EUCLIDES, tradução BICUDO, 2009, p.98 e 99).

Com o quinto postulado, foi criado o primeiro e mais duradouro modelo para o espaço físico, a Geometria Euclidiana, regido pelos postulados. Esse modelo possuía, aparentemente, um encadeamento lógico perfeito.

Mas, o quinto postulado tornou-se alvo de críticas dos Elementos no tempo de Euclides e durante 2.000 anos inúmeras tentativas foram feitas para demonstrá-lo. Uma das consequências foi à produção de vários outros equivalentes denominados substitutos[5].

Os substitutos mostram que o quinto postulado não é obvio e sem ele não teríamos o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, toda teoria dos triângulos semelhantes e, consequentemente, a trigonometria deixaria de existir. Substituindo o quinto postulado por outra proposição, obtém-se outra geometria um tanto diferente da que estamos acostumados.

Ao escrever os Elementos, Euclides introduziu os postulados um a um e juntamente com suas definições e axiomas, deduziu 465 proposições.

É preciso que o conjunto de axiomas tenha as três propriedades seguintes:

a) Completude: tudo que será usado na teoria está apropriadamente contido nos axiomas, de maneira que não haja hipóteses implícitas.

b) Consistência: é impossível deduzir dois teoremas contraditórios dos axiomas.

c) Independência: nenhum axioma é consequência de alguma combinação dos demais.

[5] Um postulado A ser substituto do quinto postulado significa dizer que o desenvolvimento dos quatro primeiros postulados mais o postulado A coincide com a Geometria Euclidiana. Além disso, tomando o postulado A é possível provar o quinto postulado, e vice-versa. O substituto mais conhecido é o apresentado pelo matemático escocês John Playfair num trabalho publicado em 1.795 (Elementos de Geometria).

O quinto postulado só é utilizado a partir da proposição 27 nos Elementos, sendo as 26 primeiras válidas para qualquer outra geometria onde sejam assumidos os quatro primeiros postulados, sendo assim é impossível, no âmbito da geometria euclidiana, provar a proposição 27 sem o 5º postulado.

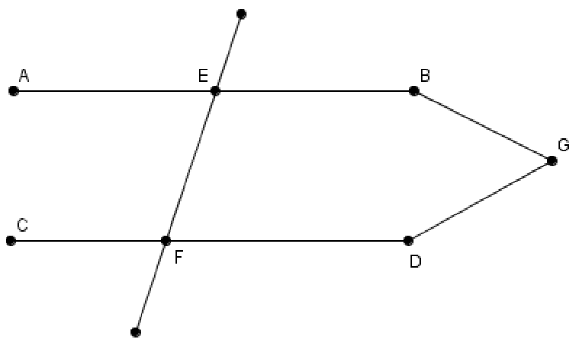
Nas seções seguintes, 2.1.1 e 2.1.2, trazemos o tratamento dado por Euclides aos tópicos analisados neste trabalho de pesquisa.

2.1.1. Paralelas cortadas por transversal

No livro II dos Elementos as proposições 27, 28 e 29 trazem o que na geometria escolar é abordado como um capítulo intitulado "paralelas cortadas por uma transversal". A seguir apresentamos cada uma destas proposições e as respectivas demonstrações propostas por Euclides. As proposições 27 e 28 apresentam condições necessárias a ângulos formados por uma reta que corta duas outras para o paralelismo das destas. Já a proposição 29 é a recíproca das anteriores, ou seja, dado que duas retas são paralelas, se cortadas por uma transversal se tem os ângulos alternos iguais entre si, ângulos opostos iguais entre si, e ângulos "num mesmo lado" suplementares (iguais a dois retos).

Proposição 27: Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos alternos iguais entre si, as retas serão paralelas entre si.

Demonstração:

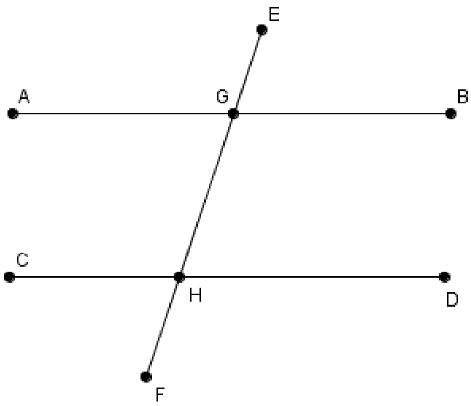


Faça, pois, a reta EF, caindo sobre as duas retas AB, CD, os ângulos sob AEF, EFD, alternos, iguais entre si; digo que AB é paralela à CD. Pois, se não, sendo prolongadas, as AB, CD encontrar-se-ão ou no lado dos B, D ou nos dos A, C. Fiquem prolongadas e encontrem-se no lado dos B, D ou G. Então, o ângulo sob AEF, exterior do triângulo GEF, é igual ao sob EFG, interior e oposto; o que é impossível; portanto, as AB, CD, sendo prolongadas, não se encontrarão no lado dos B, D. Do mesmo modo, então, será provado que nem nos dos A, C. Mas as que não se encontram em nenhum dos lados são paralelas; portanto, a AB é paralela à CD.

Portanto, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos alternos iguais entre si, as retas serão paralelas; o que era preciso provar. (EUCLIDES – OS ELEMENTOS, tradução BICUDO, 2009, p.119).

Proposição 28: Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça o ângulo exterior igual ao interior e oposto e no mesmo lado, ou os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos, as retas serão paralelas entre si.

<u>Demonstração:</u>



Faça, pois, a reta EF, caindo sobre as duas retas AB, CD, os ângulos sob EGB, exterior, igual ao ângulo sob GHD, interior e oposto ou sob BGH, GHD, interiores e no mesmo lado, iguais a dois retos; digo que AB é paralela à CD.

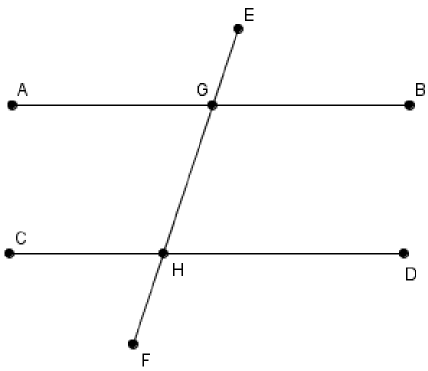
Pois, como o sob EGB é igual ao sob GHD, mas o sob EGB é igual ao sob AGH, portanto, também o sob AGH é igual ao sob GHD; e são alternos; portanto, a AB é paralela à CD.

De novo, como os sob BGH, GHD são iguais a dois retos, mas também os sob AGH, BGH são iguais a dois retos, portanto, os sob AGH, BGH são iguais aos sob BGH, GHD; fique subtraído o sob BGH comum; portanto, o sob AGH restante é igual ao sob GHD restante; e são alternos; portanto, a AB é paralela à CD.

Portanto, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça o ângulo exterior igual ao interior e oposto e no mesmo lado, ou os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos, as retas serão paralelas; o que era preciso provar. (EUCLIDES – OS ELEMENTOS, tradução BICUDO, 2009, p.119 e 120).

Proposição 29: A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos.

<u>Demonstração:</u>



Caia, pois, a reta EF sobre as retas paralelas AB, CD; digo que faz os ângulos sob AGH, GHD, alternos, iguais, e o ângulos sob EGB, exterior, igual ao sob GHD, interior e oposto, e os sob BGH, GHD, interiores e no mesmo lado, iguais a dois retos.

Pois, se o sob AGH é desigual ao sob GHD, um deles é maior. Seja maior o sob AGH; fique adicionado o sob BGH comum; portanto, os sob AGH, BGH são maiores do que os sob BGH, GHD. Mas os sob AGH, BGH são iguais a dois retos. Portanto, [também] as sob BGH, GHD são menores do que dois retos. Mas as que são prolongadas ilimitadamente, a partir dos menores do que dois retos, encontram-se; portanto, as AB, CD, prolongadas indefinidamente, encontrar-se-ão; e não se encontram, pelo supô-las paralelas; portanto, o sob AGH não é desigual ao sob GHD; portanto, é igual. Mas o sob AGH é igual ao sob EGB; portanto, também o sob EGB é igual ao sob GHD. Fique adicionado o sob BGH comum; portanto, os sob EGB, BGH são iguais aos sob BGH, GHD. Mas os sob EGB, BGH são iguais a dois retos; portanto, também os sob BGH, GHD são iguais a dois retos.

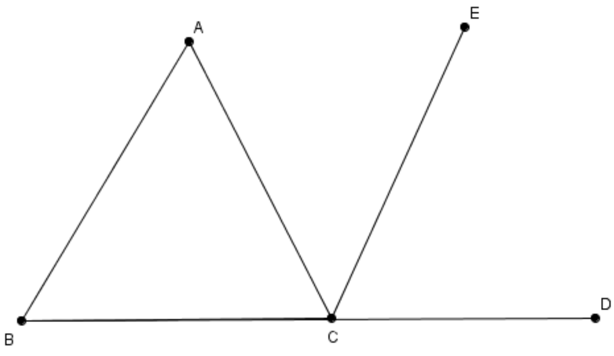
> Portanto, a reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos; o que era preciso provar. (EUCLIDES/ OS ELEMENTOS, tradução BICUDO, 2009, p.120).

2.1.2. Soma dos ângulos internos do triângulo / relação entre ângulo externo e os internos não adjacentes de um triângulo

Outro tópico da geometria analisado nesta pesquisa é o que se costuma intitular, nos currículos e livros escolares, como "soma dos ângulos internos de um triângulo". Na abordagem de Euclides este tópico é apresentado na Proposição 32, que além de tratar da soma dos ângulos internos de um triângulo traz em conjunto o que costumamos chamar de "teorema do ângulo externo". O enunciado e a demonstração desta proposição são apresentamos a seguir.

Proposição 32: Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos.

<u>Demonstração:</u>



> Seja o triângulo ABC, e fique prolongado um lado dele, o BC, até o D; digo que o ângulo sob ACD, exterior, é igual aos dois sob CAB, ABC, interiores e opostos, e os três ângulos sob ABC, BCA, CAB, interiores do triângulo, são iguais a dois retos.
>
> Fique, pois, traçada, pelo ponto C, a CE paralela à reta AB.
>
> E, como a AB é paralela à CE, e a AC caiu sobre elas, os ângulos sob BAC, ACE, alternos são iguais entre si. De novo, como a AB é paralela à CE, e a reta BD caiu sobre elas, o ângulo sob ECD, exterior, é igual ao sob ABC, interior e oposto. Mas foi provado também o sob ACE igual ao sob BAC; portanto, o ângulo sob ACD todo é igual aos dois sob BAC, ABC, interiores e opostos.
>
> Fique adicionado o sob ACB comum; portanto, os sob ACD, ACB são iguais aos três sob ABC, BCA, CAB. Mas o sob ACD, ACB são iguais a dois retos; portanto, os sob ACB, CBA, CAB são iguais a dois retos.
>
> Portanto, tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos; o que era preciso provar. (EUCLIDES - OS ELEMENTOS, tradução BICUDO, 2009, p.122).

Com base na análise das propriedades de um sistema axiomático, percebe-se que as demonstrações de Euclides eram cheias de apelos à intuição, com hipóteses implícitas, fazendo-se necessário uma reconstrução.

2.2. Legendre

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), como muitos antes dele, também tentou demonstrar o Quinto Postulado, chegando a publicar algumas de suas demonstrações. No entanto, nenhuma delas se provou correta. De qualquer modo, Legendre estabeleceu uma importante conexão entre o Quinto Postulado e a soma dos ângulos internos de um triângulo. Nesse sentido, Legendre provou que o Quinto Postulado é equivalente a termos a soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a dois ângulos retos.

Em 1794, ele publicou sua obra de maior sucesso: Éléments de géométrie. O livro tinha o objetivo, como o próprio autor escreveu, de ser muito rigoroso, pois na época os matemáticos achavam que faltava rigidez à Matemática. Ao simplificar muitas das proposições dos Elementos de Euclides, seu trabalho substituiu os Elementos no aprendizado de geometria na maioria dos países da Europa e nos Estados Unidos da América

Na seção seguinte apresentaremos as demonstrações feitas por Legendre, dos conteúdos em foco.

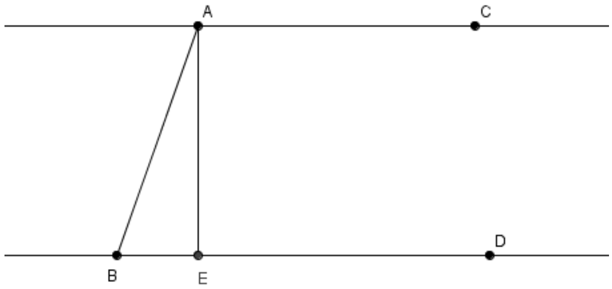
2.2.1. Paralelas cortadas por transversal

Proposição XXIII: Se duas linhas retas AC e BD fizerem com uma terceira AB dois ângulos internos $C\hat{A}B$ e $A\hat{B}D$, cuja soma seja igual a dois ângulos retos, as linhas AC e BD serão paralelas.

<u>Demonstração:</u>

Se os ângulos $C\hat{A}B$ e $A\hat{B}D$ fossem iguais entre si, seriam ambos retos, e estaríamos no caso da proposição antecedente[6]; suponhamos,

[6] Proposição XXII: Se duas linhas retas AC e ED forem perpendiculares a uma terceira AE, estas duas linhas serão paralelas, quer dizer, que se não poderão encontrar a qualquer distância que se prolonguem. (Elementos de Geometria, tradução Manuel Guimarães, p. 44).

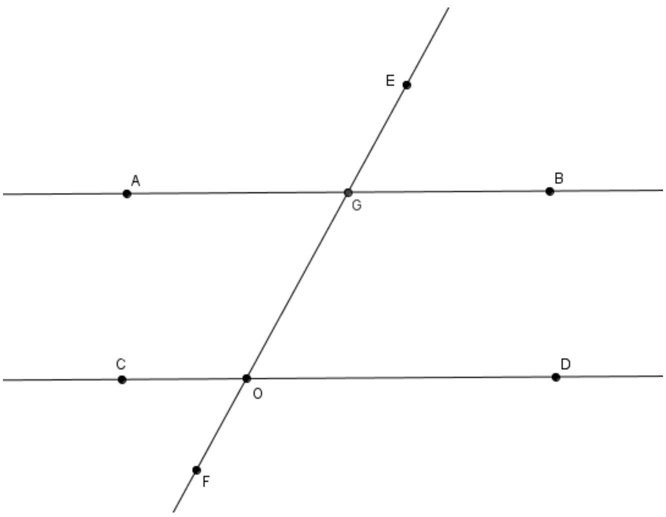


portanto que estes dois ângulos sejam desiguais, e pelo ponto A baixemos AE perpendicular sobre BD.

No triângulo retângulo ABE, a soma dos dois ângulos agudos $A\hat{B}E$ e $B\hat{A}E$ é igual a um ângulo reto (proposição 20, corolário 4). Subtraindo esta soma da soma dos ângulos $A\hat{B}E$ e $B\hat{A}C$ que, por hipótese, é igual a dois ângulos retos, ficará o ângulo $C\hat{A}E$ igual a um ângulo reto. Portanto, as duas linhas AC e BD são perpendiculares a uma mesma linha AE; logo são paralelas (proposição 22). (ELEMENTOS DE GEOMETRIA, tradução Manuel Guimarães, p. 44).

Proposição XXV: Se duas linhas paralelas AB e CD forem encontradas por uma secante EF, a soma dos dois ângulos internos $A\hat{G}O$ e $G\hat{O}C$ será igual a dois ângulos retos.

Demonstração:



Porque, se ela fosse maior ou menor, as duas linhas AB e CD se haviam de encontrar de um ou outro lado, e não seriam paralelas.

Corolário I: Se o ângulo $G\hat{O}C$ é reto, $A\hat{G}O$ também há de ser reto; logo toda linha perpendicular a uma das paralelas é perpendicular à outra.

Corolário II: Como $A\hat{G}O$ + $G\hat{O}C$ é igual a dois ângulos retos, e $G\hat{O}D +$ $G\hat{O}C$ também é igual a dois ângulos retos, tirando de ambas as partes $G\hat{O}C$, ficará o ângulo $A\hat{G}O = G\hat{O}D$. Por consequência, os quatro ângulos agudos $E\hat{G}B$, $A\hat{G}O$, $G\hat{O}D$ e $C\hat{O}F$ são iguais entre si, o mesmo acontece aos quatro ângulos obtusos $A\hat{G}E$, $O\hat{G}B$, $C\hat{O}G$ e $D\hat{O}F$. Ao mesmo tempo, se juntarmos um dos quatro ângulos agudos a um dos quatro ângulos obtusos, a soma fará sempre dois ângulos retos.

Escólio: Ordinariamente, se dão nomes particulares a alguns destes ângulos comparados dois a dois. Já chamamos aos ângulos $A\hat{G}O$ e $G\hat{O}C$, internos da mesma parte; os ângulos $B\hat{G}O$ e $G\hat{O}D$ têm o mesmo nome. Os ângulos $A\hat{G}O$ e $G\hat{O}D$ se chamam alternos internos; ou simplesmente alternos, o mesmo é com os ângulos $B\hat{G}O$ e $G\hat{O}C$. Os ângulos $E\hat{G}B$ e $G\hat{O}D$ se chamam internos-externos, e enfim os ângulos $E\hat{G}B$ e $C\hat{O}F$ tomam o nome de alternos-externos. Portanto podemos considerar as seguintes proposições.

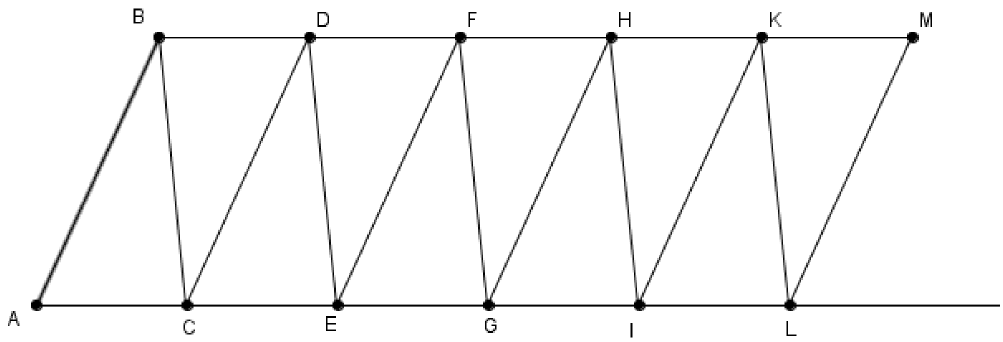
I. Os ângulos internos de mesma parte, valem em soma dois ângulos retos.
II. Os ângulos alternos-externos são iguais.
III. Os ângulos internos-externos são iguais.
IV. Os ângulos alternos-internos são iguais.

Reciprocamente, se forem iguais os ângulos notados em um destes casos, poderemos concluir que as linhas a que eles se referem são paralelas. Seja, por exemplo, o ângulo $A\hat{G}O = G\hat{O}D$; como $G\hat{O}D +$ $G\hat{O}C$ é igual a dois retos, teremos também $A\hat{G}O + G\hat{O}C$ igual a dois retos; logo (proposição 23) as linhas AG e CO são paralelas. (ELEMENTOS DE GEOMETRIA, tradução Manuel Guimarães, p. 46 e 47).

2.2.2. Soma dos ângulos internos do triângulo / Relação entre ângulo externo e os internos não adjacentes de um triângulo

Proposição XIX: A soma dos três ângulos de um triângulo não pode exceder a dois ângulos retos.

Demonstração:



Seja, se for possível, um triângulo ABC no qual a soma dos três ângulos é maior que dois ângulos retos.

Sobre AC prolongado, tome-se CE = AC; faça-se o ângulo $E\hat{C}D = C\hat{A}B$, o lado CD = AB, junta-se DE e BD. O triângulo CDE será igual ao triângulo BAC, porque tem um ângulo igual compreendido entre lados iguais cada um a cada um (proposição 6)[7]; logo teremos o ângulo $C\hat{E}D = A\hat{C}B$, o ângulo $C\hat{D}E = A\hat{B}C$, e o terceiro lado ED igual ao terceiro BC.

[7] Proposição VI – Dois triângulos são iguais, quando têm um ângulo igual compreendido entre lados iguais, cada um a cada um. (Elementos de Geometria, tradução Guimarães, p. 31),

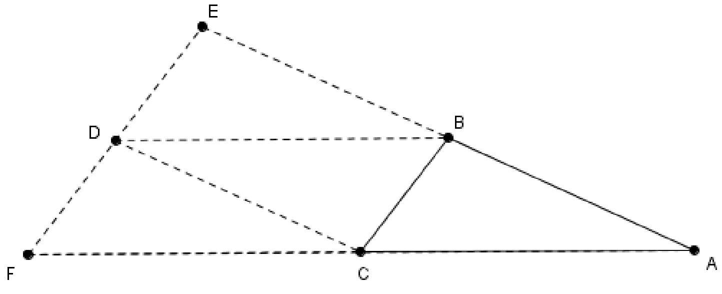
Como a linha ACE é reta, a soma dos ângulos $A\hat{C}B, B\hat{C}D, D\hat{C}E$ é igual a dois ângulos retos (proposição 2, corolário 3)[8]. Ora, supomos que a soma dos ângulos do triângulo ABC é maior que dois ângulos retos, logo teremos $C\hat{A}B + A\hat{B}C + A\hat{C}B > A\hat{C}B + B\hat{C}D + E\hat{C}D$. Tirando de uma e outra parte $A\hat{C}B$ comum e $C\hat{A}B = E\hat{C}D$, ficará $A\hat{B}C > B\hat{C}D$. Porque os lados AB e BC do triângulo ABC são iguais aos lados CD e CB do triângulo BCD, segue-se que o terceiro lado AC é maior que o terceiro BD (proposição 10)[9].

Imaginemos agora que se prolongue indefinidamente a linha AC, e da mesma maneira a série dos triângulos iguais e semelhantes dispostos ABC, CDE, EFG, GHI, etc. Se juntarmos os vértices vizinhos pelas retas BD, DF, FH, HK, etc, estas serão todas iguais entre si, porque terão um ângulo igual compreendido entre lados iguais cada um a cada um. Logo teremos BD = DF = FH = HK, etc.

Isto posto, como temos AC> BD, seja a diferença AC – BD = δ. É claro que 2δ será a diferença entre a linha reta ACE, igual a 2AC, e linha reta ou quebrada BDF, igual a 2BD; de sorte que teremos AE – BF = 2δ. Do mesmo modo teremos AG – BH = 3δ, AI – BK = 4δ, e assim por diante. Ora, por menor que seja a diferença δ, é evidente que esta diferença, repetida um número de vezes suficiente, virá a ser maior que um comprimento dado. Logo, poderemos supor a série dos triângulos prolongada tão longe que seja AP - BQ > 2AB; e assim teríamos AP > BQ + 2AB. Ora, pelo contrário, a linha reta AP é menor que a linha angulosa ABQP, que junta os mesmos extremos A e P, de maneira que teremos sempre AP < AB + BQ + QP, ou AP < BQ + 2AB. Portanto, a hipótese de que partimos é absurda: logo a soma dos três ângulos do triângulo ABC não pode exceder a dois ângulos retos. (ELEMENTOS DE GEOMETRIA, tradução Manuel Guimarães, p. 39 e 40).

Proposição XX: Em todo triângulo, a soma dos três ângulos é igual a dois ângulos retos.

Demonstração:



Havendo já provado que a soma dos três ângulos de um triângulo não pode exceder a dois ângulos resta, resta demonstrar que esta mesma soma não pode ser menor do que dois ângulos retos.

[8] Proposição II – Corolário 3 - Todos os ângulos consecutivos BÂC e C^D, DÂE, EÂF, formados do mesmo lado da reta BF, valem em soma dois ângulos retos, porque a soma deles é igual à dos ângulos BÂC e CÂF. (Elementos de Geometria, tradução Guimarães, p. 29).

[9] Proposição X – Se os dois lados AB e AC, do triângulo ABC, forem iguais aos dois lados DE e DF, do triângulo DEF, cada um a cada um; se, ao mesmo tempo, o ângulo BÂC compreendido pelos primeiros, for maior que o ângulo EDF compreendido pelos segundos,; digo que o terceiro lado BC do primeiro triângulo será maior que o terceiro lado EF do segundo. (Elementos de Geometria, tradução Guimarães, p. 33).

Suponho que ABC é o triângulo proposto, e seja, se é possível, a soma de seus ângulos = 2R - δ, marcando R um ângulo reto, e sendo δ essa quantidade qualquer que se supões faltar à soma dos ângulos para que esta seja igual a dois retos.

Seja A o menor dos ângulos do triângulo ABC; sobre o lado oposto BC faça-se o ângulo $B\hat{C}D = A\hat{B}C$, e o ângulo $C\hat{B}D = A\hat{C}B$. Os triângulos BCD e ABC serão iguais (proposição 7)[10], porque têm um lado igual BC adjacente a dois ângulos iguais, cada um a cada um. Pelo ponto D tire-se uma reta qualquer EF, que encontre em E e em F os dois lados do ângulo $\hat{A}$ prolongados.

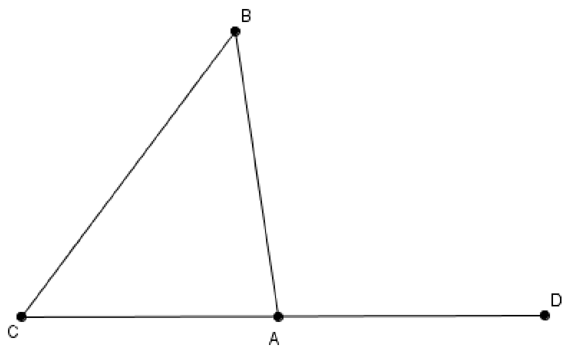
Como a soma dos ângulos de cada um destes triângulos ABC e BCD é 2R - δ e a de cada triângulo EBD e DCF não pode exceder a 2R (proposição 19), segue-se que a soma dos ângulos dos quatro triângulos ABC, BCD, EBD e DCF não passa de 4R - 2δ + 4R, ou 8R - 2δ. Se desta soma tirarmos os ângulos $\hat{B}, \hat{C}$ e $\hat{D}$, que somam 2R (proposição 2, corolário 3), o resto será igual à soma dos ângulos do triângulo AEF. Logo a soma dos ângulos do triângulo AEF não passa de 8R - 2δ - 6R, ou 2R - 2δ.

Assim enquanto é necessário juntar δ à soma dos ângulos do triângulo ABC para que ela chegue a dois retos, cumpre ao menos juntar 2δ à soma dos ângulos do triângulo AEF para completar os mesmos dois retos.

Por meio do triângulo AEF se construirá semelhantemente um terceiro triângulo, tal que seja mister juntar ao menos 4δ, à soma de seus três ângulos, para que o todo seja igual a dois ângulos retos. Por meio desse terceiro triângulo, se construirá da mesma maneira um quarto, tal que se deva juntar ao menos 8δ à soma de seus ângulos para que o todo seja igual a dois ângulos retos, e assim por diante.

Ora, por menor que seja δ a respeito do ângulo reto R, a série δ, 2δ, 4δ, 8δ ..., cujos termos crescem em razão dupla, conduzirá bem depressa a um termo igual a 2R, ou maior que 2R. Logo então se chegará a um triângulo tal que seja necessário juntar à soma de seus ângulos uma quantidade igual ou maior que 2R, para que a soma total forme somente 2R. Esta consequência é visivelmente absurda. Logo, não pode substituir a hipótese de que partimos; quer dizer, que é impossível que a soma dos ângulos do triângulo ABC seja menor que dois ângulos retos. Ela também não pode ser maior em virtude da proposição precedente, logo é igual a dois ângulos retos. (ELEMENTOS DE GEOMETRIA, tradução Manuel Guimarães, p. 41 e 42)

Corolário VI: Em qualquer triângulo ABC se prolongarmos o lado CA para D, o ângulo externo $B\hat{A}D$ será igual à soma dos dois internos opostos $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Porque,



[10] Proposição VII – Dois triângulos são iguais quando têm um lado igual adjacente a dois ângulos iguais, cada um a cada um. (Elementos de Geometria, tradução Guimarães, p. 32)

juntando a uma e outra parte $B\hat{A}C$, as duas somas serão iguais a dois ângulos retos.

2.3. Hilbert

David Hilbert (1862-1943) foi um dos maiores matemáticos dos últimos séculos. Nascido na Alemanha, Hilbert axiomatizou a geometria euclidiana de maneira mais formal que o autor de Os Elementos, o tratado de Matemática mais estudado em todos os tempos.

Em 1899, ele apresentou a primeira edição de sua obra, Fundamentos de Geometria, que passou por muitas revisões e reformulações até chegar à sua 7ª edição. A intenção de Hilbert era tornar cada vez mais explícita uma estrutura axiomática enxuta e elegante, ou ainda, reduzida a apenas o mínimo necessário e suficiente para o desenvolvimento completo da geometria, preenchendo todas as lacunas deixadas por Euclides. Segundo Eves, “Hilbert aguçou o método matemático, levando-o da axiomática material dos tempos de Euclides à axiomática formal dos dias atuais.” (EVES, 2004, p. 682).

Hilbert tornou como primitivos os conceitos de ponto, reta e plano, os quais considera interligados por três relações não definidas: "estar em", "entre" e "congruência". E os axiomas que embasam sua geometria são 21, divididos em cinco grupos: incidência, ordem, congruência, paralelismo e continuidade. Desde as primeiras linhas, Hilbert busca salientar o caráter formal de sua geometria, procurando despojar de qualquer conteúdo material os entes com que lida.

O objetivo de Hilbert foi o de identificar um conjunto simples e completo de axiomas independentes a partir do qual os mais importantes teoremas geométricos pudessem ser deduzidos. Os objetivos principais eram tornar rigorosa a geometria euclidiana (para evitar pressupostos escondidos) e deixar claras as ramificações do postulado das paralelas.

Em 1904, Hilbert provou que a geometria euclidiana é consistente se a aritmética for consistente.

Abaixo, identificamos um exemplo apresentado por Hilbert, de um dos teoremas que estão em foco nesta pesquisa.

2.3.1. O teorema do ângulo externo

Antes de enunciar o teorema Hilbert define ângulos internos e externos de um triângulo como reproduzimos abaixo.

Dado um triângulo ABC, é comum chamarmos os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de ângulos internos do triângulo. Os suplementos destes ângulos são chamados de ângulos externos do triângulo. Por exemplo, na Figura abaixo, o ângulo $C\hat{B}D$ é um ângulo externo do triângulo ABC, adjacente ao ângulo interno $C\hat{B}A$.

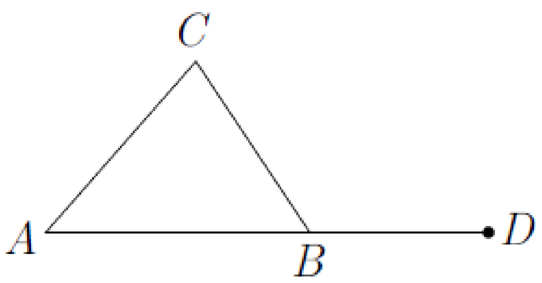


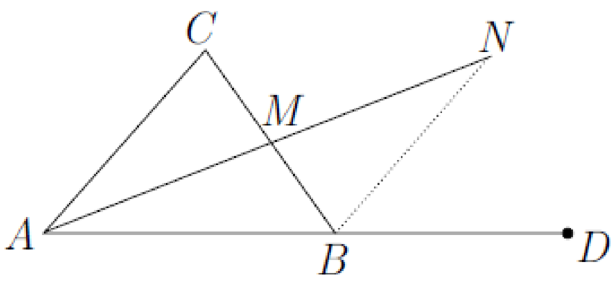
Figura: ângulo externo $C\hat{B}D$

A partir de tais definições enuncia o teorema e apresenta sua demonstração.

Teorema (Ângulo externo).

A medida de um ângulo externo de qualquer triângulo é maior que a medida de qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração :



Dado um triângulo ABC, considere um ponto D sobre a semirreta AB tal que B esteja entre A e D. Provaremos que $C\hat{B}D > \hat{A}$ e $C\hat{B}D > \hat{C}$. De fato, sejam M o ponto médio do segmento BC e N o ponto na semirreta AM tal que M esteja entre A e N e AM ≡ MN. Temos:

CM ≡ BM, AM ≡ MN e $A\hat{M}C \equiv B\hat{M}N$.

Os triângulos AMC e BMN são

congruentes, e portanto, $\hat{C} \equiv M\hat{B}N$. Como $M\hat{B}D = M\hat{B}N + N\hat{B}D$, concluímos que $C\hat{B}D > \hat{C}$. De forma inteiramente análoga se prova que $C\hat{B}D > \hat{A}$. (MANFIO, p. 23 e 24)

Os demais conteúdos em estudos foram apresentados por Hilbert de maneira análoga à demonstrada por Euclides, descrita neste trabalho nas seções 2.1.1 e 2.1.2, por isto não será exposto novamente.

3. MÉTODO

A compreensão da estrutura didática e Matemática dos livros didáticos, em uso nas escolas públicas do Brasil, pode ser útil para a análise e compreensão dos fenômenos de ensino e aprendizagem, já que este processo depende muito dos livros. Em particular porque este é visto, por muitos professores e por quase todos os alunos, como depositário de toda a verdade científica a ser consumida pelos principais atores do processo de ensino e aprendizagem – o professor e o aluno.

Propomos, então, como objetivos para o presente trabalho:

1- Analisar como os autores dos livros didáticos de Matemática de 6° ao 9° ano, aprovados no PNLD-2011, apresentam a introdução dos seguintes conteúdos: ângulos formados por paralelas e transversais, teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, e o teorema do ângulo externo, quanto à demonstração e suas relações.

2- Analisar se as coleções contemplam atividades que envolvam justificativas, provas, argumentações ou demonstrações.

3- Verificar qual a natureza das provas (pragmáticas ou intelectuais) apresentadas nos livros didáticos.

Para esta análise tomaremos como base algumas ideias e ferramentas conceituais de pesquisas da área, em particular, a tipologia das provas propostas por Balacheff (1988), conforme apresentamos na seção 1.2.3.

Considerando que não seria viável examinar em detalhes todas as obras, ou seja, todos os capítulos e tópicos, escolhemos alguns deles.

A escolha dos temas que serão estudados justifica-se por serem, geralmente, tratados no Ensino Fundamental II e, consequentemente, presentes na maioria dos livros didáticos e, também, por julgarmos que estes envolvem demonstrações simples e curtas, das mais acessíveis a alunos do Ensino Fundamental.

Neste capítulo apresentamos a metodologia de pesquisa que acreditamos ser adequada ao que queremos investigar e para a fonte de dados a ser utilizada: os livros didáticos.

3.1. Os dados da pesquisa

Como se sabe, para nosso estudo, os documentos de pesquisa são livros didáticos de Matemática. Devido à existência de considerável gama de livros didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental disponíveis no mercado, foi necessário um critério de seleção daqueles que seriam objeto de nossa análise. Para isso, buscamos junto ao Fundo Nacional de Desenvolvimento Educacional (FNDE), identificar os livros que foram aprovados na última avaliação de obras para o segundo segmento do Ensino Fundamental. Assim, acessamos o Guia do Livro Didático do ano de 2011, para verificar as obras aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

Após verificar os títulos dos livros aprovados no PNLD2011, procuramos saber quais destes foram adotados nas escolas públicas do Estado do Rio de Janeiro. Para isto, solicitamos formalmente à COGEAM – Coordenação Geral de Materiais Didáticos, da Diretoria de Formulação de conteúdos educacionais do MEC – tal informação por meio de carta enviada à coordenadora, apresentando nosso interesse de pesquisa e justificando a intenção de delimitar a pesquisa aos livros efetivamente adotados em nosso Estado. Solicitação aceita, recebemos do FNDE, uma planilha EXCEL com os títulos das obras adotadas em todas as escolas do Estado do Rio de Janeiro, em cada ano escolar e, ainda, a quantidade de livros enviados às escolas.

Trabalhamos com esta planilha para buscar os títulos de livros efetivamente escolhidos e adotados no Rio de Janeiro. Com estes dados ordenados por título foi possível construir a Tabela 1 com o ranqueamento das escolhas das obras presentes no Guia do PNLD-2011, apresentada a seguir.

Tabela 1 - Quantidade de escolas do RJ que escolheram coleções aprovadas no PNLD-2011.

	Autor	Título do livro	Qde.
1	GIOVANNI Jr. J. R.; CASTRUCCI B.	A Conquista da Matemática	641
2	IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A.	Matemática e Realidade	608
3	BIANCHINNI, E.	Matemática	396
4	DANTE, L. R.	Tudo Matemática	170
5	RIBEIRO, J. da SILVA.	Projeto Radix – Matemática	156
6	SOUZA, J.; PATARO, P. M.	Vontade de Saber	78
7	IMENES, L. M.; LELLIS, M.	Matemática – Imenes e Lellis	74
8	JAKUBOVIC, J.; CENTURIÓN, M. R.	Matemática na Medida Certa	71
9	IRACEMA; DULCE	Matemática – Ideias e Desafios	63
10	CARVALHO, A. L. T. de; REIS, L. F.	Aplicando Matemática	11
	TOTAL		2268

Fonte: FNDE, 2011

Observa-se que todas as dez obras que constam do Guia do PNLD-2011, portanto, aprovadas no processo de avaliação do MEC, foram escolhidas em algumas escolas. Assim, decidimos realizar nossas análises tomando como fonte todas estas dez obras.

Assim, as coleções de livros objetos de análise desta pesquisa, são:

L1 - BIANCHINNI, E., **Matemática.** Editora Moderna.

L2 - GIOVANNI Jr. J. R.; CASTRUCCI B., **A Conquista da Matemática – Edição Renovada.** Editora FTD.

L3 - CARVALHO, A. L. T. de; REIS, L. F., **Aplicando a Matemática.** Casa Publicadora Brasileira.

L4 - IRACEMA; DULCE, **Matemática - Ideias e Desafios.** Saraiva Livreiros Editores.

L5 - IMENES, L. M.; LELLIS, M., **Matemática – Imenes & Lellis**. Editora Moderna.

L6 - IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A., **Matemática e Realidade.** Saraiva Livreiros Editores.

L7 - JAKUBOVIC, J.; CENTURIÓN, M. R., **Matemática na Medida Certa.** Editora Scipione.

L8 - RIBEIRO, J. da SILVA., **Projeto Radix – Matemática.** Editora Scipione.
L9 - DANTE, L. R., **Tudo é Matemática.** Editora Ática.
L10 **-** SOUZA, J.; PATARO, P. M., **Vontade de Saber Matemática.** Editora FTD.

Utilizamos, a partir deste momento, a simbologia L1 a L10 em substituição aos títulos acima relacionados, pois esta classificação facilitará, posteriormente, nossos quadros de análise.

No levantamento apresentado na Tabela 1 vemos que as obras mais adotadas são “A Conquista da Matemática” e “Matemática e Realidade”, das editoras FTD e Atual, respectivamente. As obras menos escolhidas foram “Matemática - Ideias e Desafios” e “Aplicando Matemática” das editoras Saraiva e Casa Publicadora Brasileira. Sabendo que a quantidade de escolas que participou da escolha foi de 2268 (dados que constam da planilha EXCEL enviada pelo FNDE), observa-se que (641 + 608 =) 1249 escolas, mais do que 50% delas, escolheram dois dos 10 livros disponibilizados. Tal informação será levada em conta em nossas análises das obras.

Assim, buscaremos identificar, como subproduto de nossas análises sobre a abordagem realizada nas obras no uso da argumentação em tópicos iniciais de geometria, se as diferenças podem estar relacionadas com as escolhas realizadas pelos professores. Outro aspecto a averiguar é a relação entre a classificação que pretendemos obter e os textos das resenhas das obras aprovadas. Será que as resenhas ajudam o professor a identificar o tipo de abordagem realizada no campo de interesse desta pesquisa?

3.2. O método de análise dos dados

A opção metodológica desse estudo – análise de conteúdo – ocorreu a partir do objeto da pesquisa, que são documentos impressos, os livros didáticos. Neles buscaremos identificar como são feitas as demonstrações; quais são as concepções dos autores sobre o que é demonstração, prova e argumentação e, como as obras procuram desenvolver nos alunos a habilidade de realizá-las.

Segundo Chizzotti:

> A análise de conteúdo é um método de tratamento e análise de informações, colhidas por meio de técnicas de coleta de dados, com substâncias em um documento. A técnica se aplica à análise de textos escritos ou de qualquer comunicação (oral, visual, gestual) reduzida a um texto ou documento. (CHIZZOTTI, 2001, p. 98).

Para desenvolver o trabalho, nos fundamentamos em Bardin (1977), que divide a análise de conteúdo em três fases: a pré-análise, a descrição analítica e a interpretação inferencial.

A pré-análise é a fase de organização do material: relacionada com a escolha dos documentos de pesquisa, com o estabelecimento das hipóteses e dos objetivos iniciais de pesquisa, e com a definição dos indicadores que levarão à interpretação final.

Na fase de descrição analítica, que se inicia desde a pré-análise, o material é submetido a um estudo aprofundado, com base tanto na reflexão a partir dos referenciais teóricos, quanto na intuição do pesquisador, que, a partir de sucessivas leituras do material de pesquisa, busca identificar categorias e classificações possíveis. Nesta etapa do estudo são desenvolvidos os procedimentos de codificação, classificação e categorização. Para tanto, será preciso realizar recortes a partir dos indicadores selecionados para serem buscados nas obras.

A investigação alcança sua maior intensidade na fase do tratamento dos resultados, inferência e interpretação ou interpretação inferencial. Nesta fase, as discussões a respeito dos materiais analisados ganham profundidade ao se estabelecerem relações com a teoria e chegar à conclusão final da investigação.

3.3. Critérios para análise

Nossos principais critérios de análises serão baseados em alguns dos princípios usados pelos avaliadores do PNLD/2011, adaptados do item 3 da ficha de avaliação: Coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica assumida pela coleção, no que diz respeito à proposta didático-pedagógica explicitada e aos objetivos visados (PNLD 2011 p. 26-27).

1- A metodologia adotada na coleção caracteriza-se predominantemente por:

1.1- Introduzir os conteúdos por explanação teórica seguida de atividades resolvidas e propostas de cunho aplicativo.

1.2- Introduzir o conteúdo apresentando um ou poucos exemplos, seguidos de alguma sistematização e, depois de atividades de aplicação.

1.3- Partir de atividades propostas para só depois sistematizar os conteúdos.

1.4- Iniciar por atividades propostas, seguidas da sistematização, sem dar oportunidade ao aluno de tirar conclusões próprias.

1.5- Constituir-se de uma lista de atividades propostas, e deixar a sistematização dos conteúdos a cargo do professor.

2- A coleção valoriza e incentiva:

2.1- o uso de conhecimentos já trabalhados na coleção;

2.2- o uso de conhecimentos extraescolares;

2.3- a interação entre alunos.

3- A coleção favorece, através dos exercícios, o desenvolvimento de competências complexas, como:

3.1- observar, explorar, investigar e estabelecer relações;

3.2- conjecturar, provar e generalizar;

Sendo assim, primeiramente será feito um levantamento dos conteúdos de Geometria presentes nos livros que serão analisados, localizando nas obras os assuntos em foco, pois no Brasil não há uma regra para o currículo escolar.

Separaremos, então, apenas as páginas que tratam especificamente dos assuntos em foco e analisaremos como é feita a abordagem destes conteúdos: se parte de um exemplo, que tipo de exemplos, se conclui a partir de exemplo (um ou vários), modelos, se cuida da generalização para diferentes campos numéricos, etc. Verificaremos, rapidamente, os conteúdos abordados, pelos autores, antes e depois do tema estudado.

Avaliaremos, como as propriedades que estão sendo analisadas são validadas à luz da tipologia das provas propostas por Balacheff, observaremos se há participação do aluno na aprendizagem e no desenvolvimento da capacidade de demonstrar, isto é, se o autor envolve o aluno neste processo, e nos exercícios, propondo discussões, trabalhos em grupos, ou se há simplesmente uma repetição das ideias apresentadas.

4. ANÁLISE DOS LIVROS

Como já comentado, foram escolhidos três tópicos de geometria para serem analisados neste estudo. Para fins de organização do texto, neste capítulo, cada um deles será referido por uma letra, como abaixo:

A: Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal;

B: Soma dos ângulos internos de um triângulo;

C: Relação entre as medidas de um ângulo externo e os internos não adjacentes de um triângulo.

Iniciamos o capítulo descrevendo, na Seção 4.1, as formas encontradas para introduzir os conteúdos analisados. Para o tópico A, ângulos formados por duas paralelas cortadas por uma transversal, encontramos seis formas diferentes de tratamento; para o B, soma dos ângulos internos de um triângulo, cinco formas de apresentação foram detectadas; e para o teorema do ângulo externo, tópico C, apenas dois tipos de abordagem foram detectados.

Depois de descrevermos as abordagens encontradas, categorizamos nossas classificações, de acordo com o referencial teórico usado neste trabalho, verificando a presença de provas formais ou não.

Na sequência, na Seção 4.2, examinamos a adequação dessas escolhas, concluindo esta seção com um quadro onde resumimos os dados obtidos.

Nas seções 4.3 e 4.4 descrevemos e analisamos, respectivamente, os tipos de exercícios que os autores dos livros didáticos analisados selecionaram para propor aos alunos. Esta análise é importante já que nosso objetivo é investigar se as coleções ajudam os alunos a desenvolver competências complexas, como: observar, explorar, investigar, estabelecer relações, conjecturar, provar e generalizar. Assim, não bastava considerar a forma de introduzir um tópico de geometria, era preciso investigar como a obra envolve os alunos na construção de tais competências.

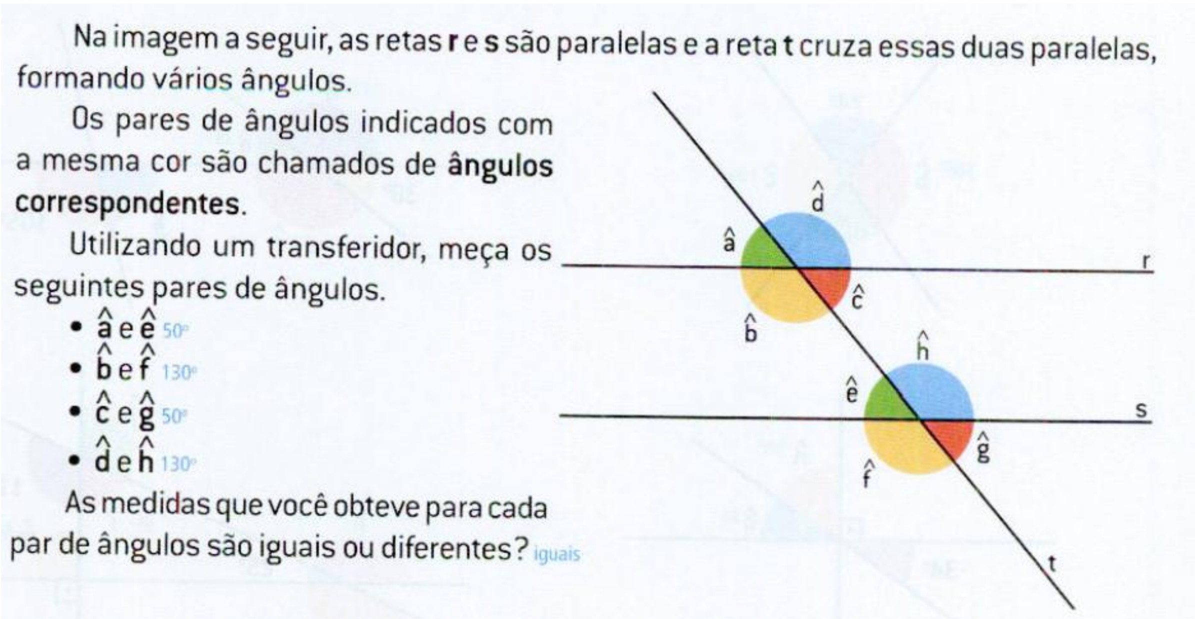
4.1. Descrição dos tipos de introdução dos conteúdos em estudo

Nesta seção serão apresentadas as classificações que criamos dos tipos de procedimentos presentes nos livros didáticos aprovados pelo PNLD/2011, para introduzir cada tema em estudo.

Posteriormente, procuramos identificar, segundo a classificação de Balacheff (discutida na seção 1.2.3), as categorias encontradas nestes livros ao introduzir os temas em estudo.

(A): Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

Tipo A1: Utilizando o transferidor, o leitor deve medir os oito ângulos formados pelo cruzamento de duas retas paralelas com uma reta transversal e, por fim, comparar os resultados obtidos verificando a existência de um fenômeno comum nestes resultados, conforme Figura 1 abaixo.


Na imagem a seguir, as retas **r** e **s** são paralelas e a reta **t** cruza essas duas paralelas, formando vários ângulos.

Os pares de ângulos indicados com a mesma cor são chamados de **ângulos correspondentes**.

Utilizando um transferidor, meça os seguintes pares de ângulos.

- $\hat{a}$ e $\hat{e}$ 50°
- $\hat{b}$ e $\hat{f}$ 130°
- $\hat{c}$ e $\hat{g}$ 50°
- $\hat{d}$ e $\hat{h}$ 130°

As medidas que você obteve para cada par de ângulos são iguais ou diferentes? iguais

Figura 1: Procedimento sugerido para verificar os Ângulos formados por Paralelas e Transversais.
Fonte: Matemática – Projeto Radix, 8° ano (2009, p. 78).

Tipo A2: Dado alguns exemplos, verifica-se, através de medições, que os ângulos correspondentes são congruentes quando as retas são paralelas. Posteriormente, enuncia-se o inverso, conforme Figura 2 abaixo.

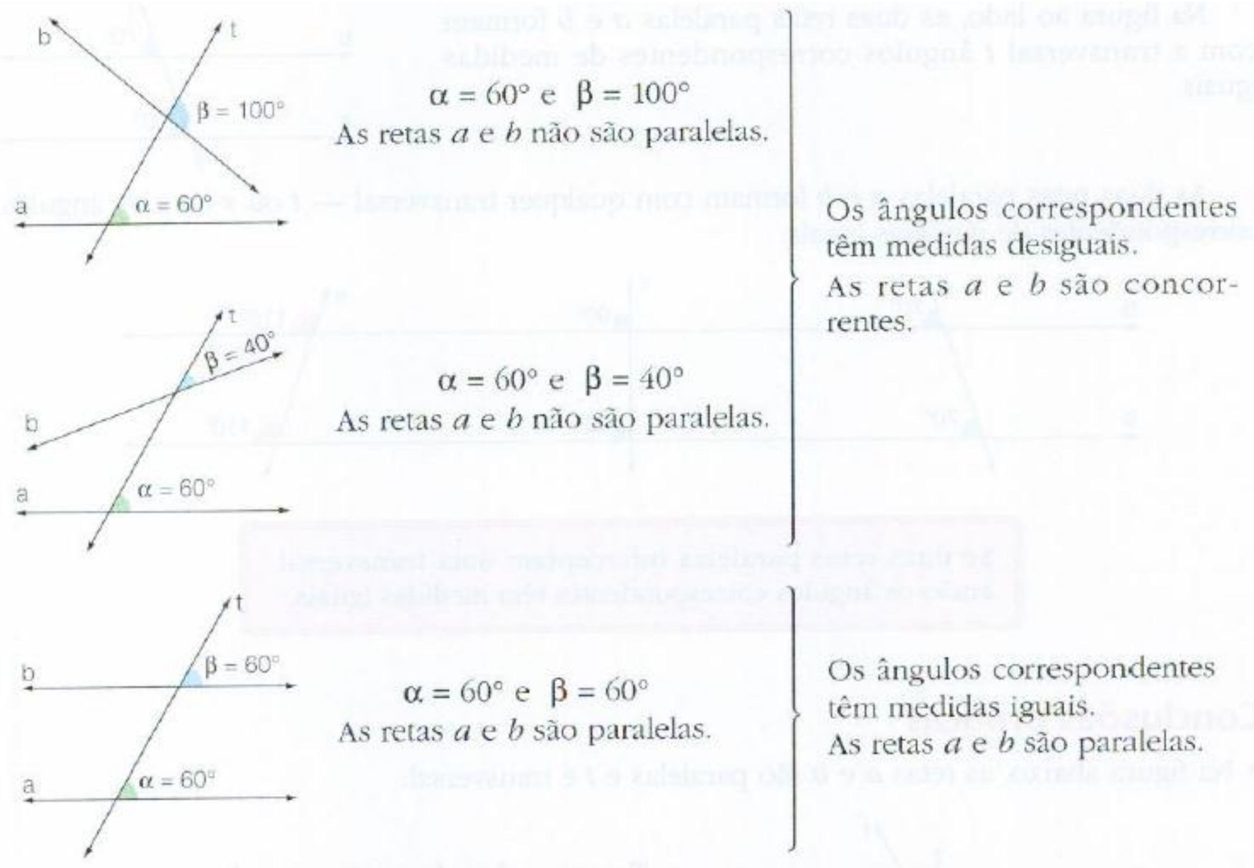


Figura 2: Procedimento sugerido para verificar Ângulos formados por Paralelas e Transversais.
Fonte: Matemática e Realidade, 8° ano (2009, p. 93).

Tipo A3: Descreve-se um caminho percorrido por uma formiga, onde o ponto de partida está no sentido oposto ao de chegada. Para percorrer este caminho, deve-se girar certo ângulo, e mais adiante girar o complemento do seu correspondente. Como o ponto de partida e o ponto de chegada estão em sentidos opostos, afirma-se que se deu um giro de 180° durante o percurso. Portanto, somam-se os ângulos girados, igualando-os a 180°, chegando à conclusão que os ângulos correspondentes são congruentes, conforme exemplificado na Figura 3.

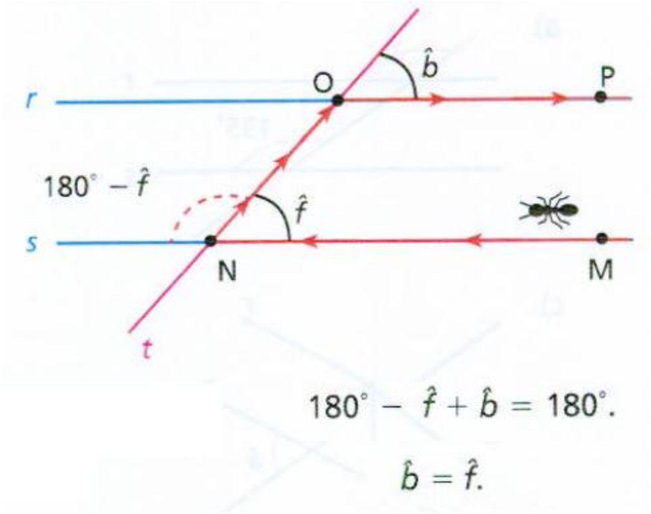


Figura 3: Procedimento sugerido para validação do estudo dos Ângulos formados por Paralelas e Transversais.
Fonte: Aplicando a Matemática, 8° ano (2009, p. 83).

Tipo A4: Constroem-se ângulos correspondentes, de mesma medida em duas retas. Traça-se uma paralela a transversal dada e através de medições verifica-se que as retas dadas são paralelas. Em seguida, afirma-se a reciprocidade, conforme Figura 4, abaixo:

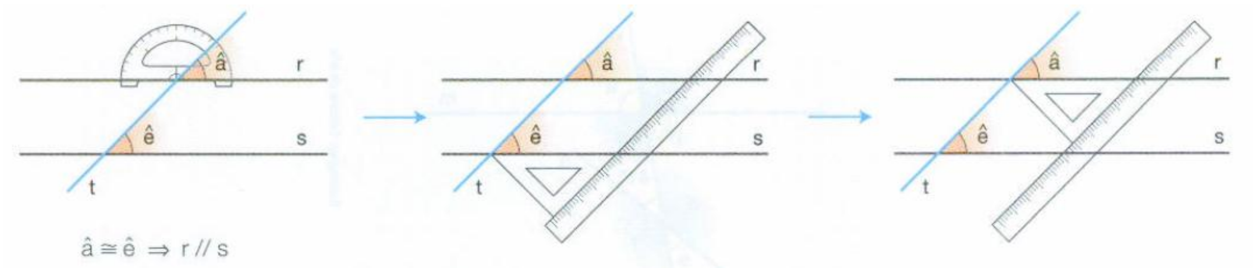


Figura 4: Procedimento sugerido para verificação de ângulos congruentes formados por Paralelas e Transversais.
Fonte: A Conquista da Matemática, 8° ano (2009, p. 226).

Tipo A5: Traçam-se duas paralelas e uma transversal, assinalando dois ângulos correspondentes, sendo um deles dado. Translada-se uma das paralelas até superpô-la a outra reta paralela fixa, constatando-se que os ângulos correspondentes são iguais, conforme Figura 5.

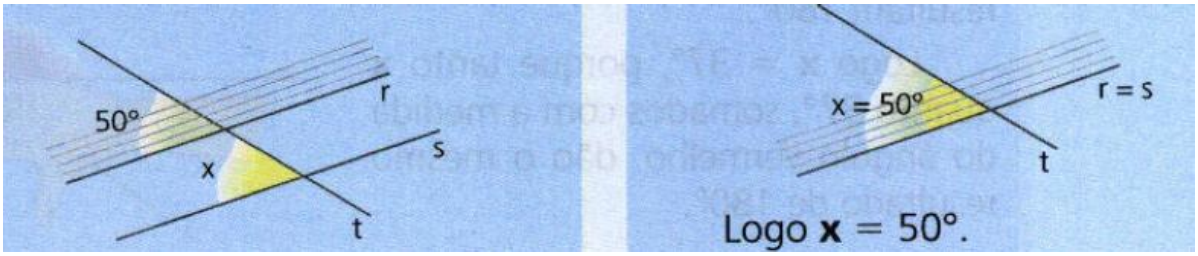


Figura 5: Procedimento sugerido para verificação de ângulos correspondentes, congruentes formados por Paralelas e Transversais.
Fonte: Matemática **–** Imenes e Lelis, 8° ano (2009, p. 92).

Tipo A6: Definem-se ângulos correspondentes e sua propriedade, dadas as retas paralelas e uma transversal, conforme Figura 6.

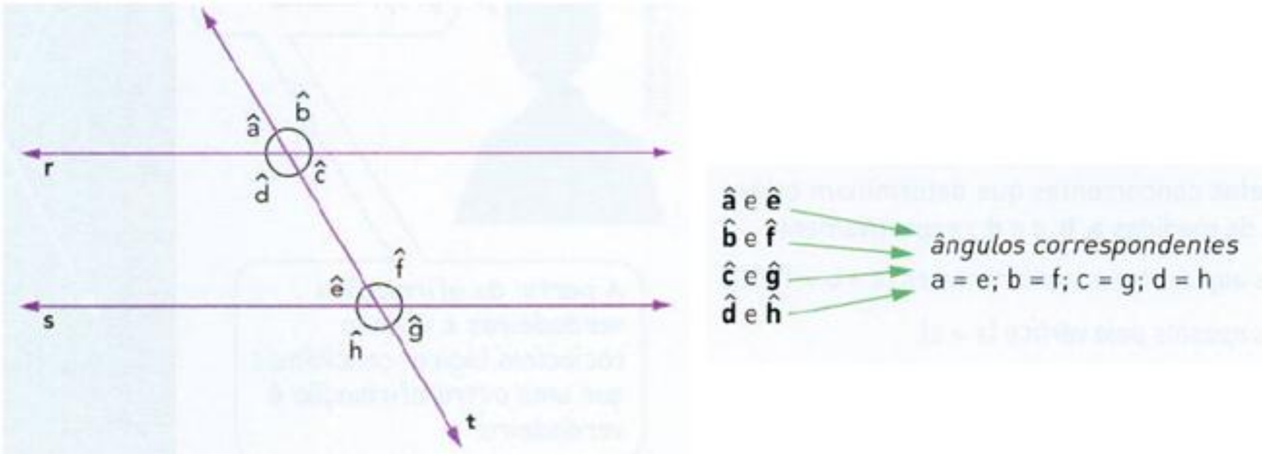


Figura 6: Apresentação da propriedade de ângulos correspondentes formados por paralelas e transversais.
Fonte: Tudo é Matemática – Dante, 8° ano (2009, p. 158).

Os tipos A1, A2, A3, A4, A5 e A6 apenas diferem nos instrumentos a utilizar na validação da propriedade, mas em sua essência todos se baseiam em prova pragmática para validar a propriedade em estudo, pois se apoiam em conhecimentos práticos, valendo-se dos recursos de ação, exemplos, desenhos, medições e observação de figuras. Não há caso de prova intelectual nos livros analisados para validar o tema em estudo, porém o tipo A3, apresentado acima, aproxima-se de demonstrações acessíveis para alunos.

(B): Soma dos ângulos internos de um triângulo.

Tipo B1: Utilizando o transferidor, medem-se os ângulos internos de diferentes triângulos, somam-se os valores obtidos, em cada caso e, por fim, comparam-se os resultados obtidos em todos os exemplos para ver se existe algum fenômeno comum neste resultado, conforme Figura 7.

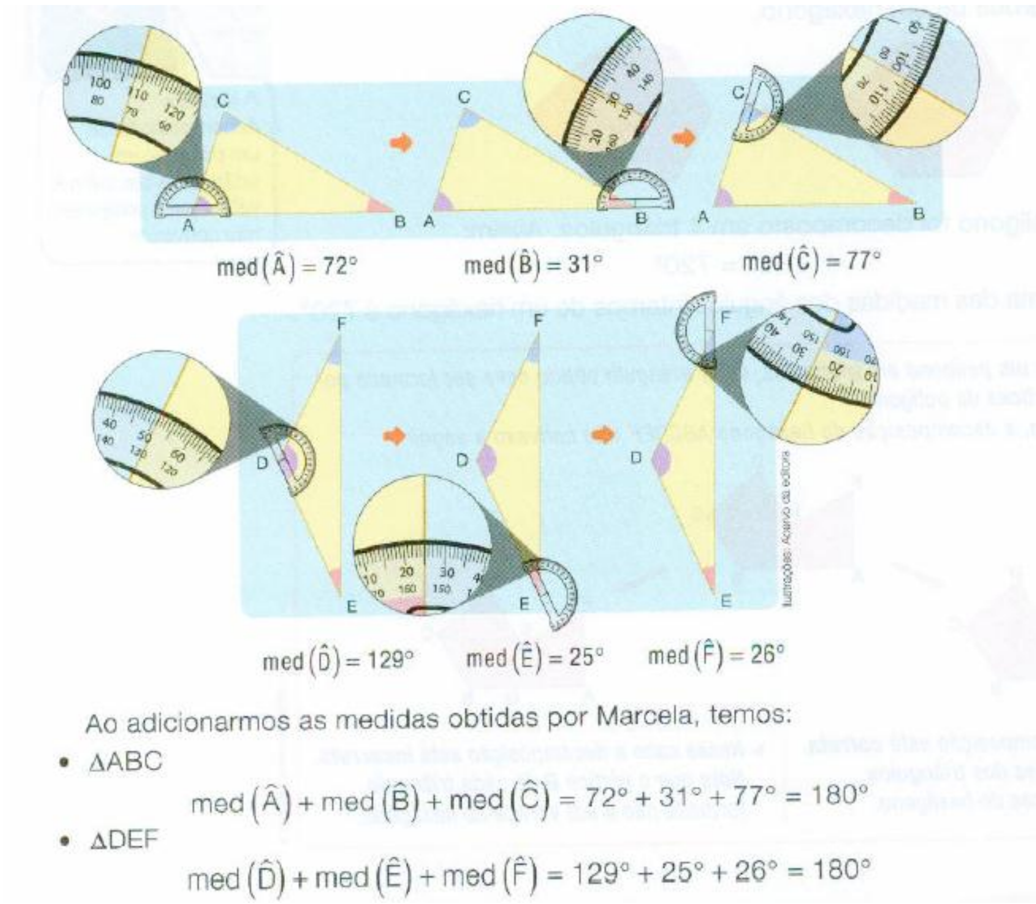


Figura 7: Procedimento sugerido para validação da propriedade da soma dos ângulos internos num triângulo.
Fonte: Vontade de saber Matemática, 7° ano (2009, p. 213).

Tipo B2: Constrói-se um triângulo qualquer de papel, assinalam-se os vértices, com uma tesoura, recortam-se e justapõe-se sobre uma reta observando-se como vai ser a configuração se todos os vértices forem postos em um mesmo ponto e um dos lados de cada ângulo for justaposto a um lado do outro ângulo, como no exemplo da Figura 8 abaixo:

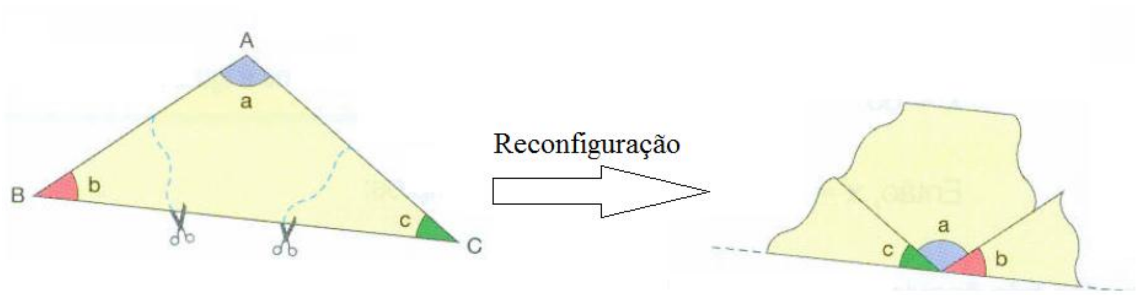


Figura 8: Procedimento sugerido para validação da propriedade da soma dos ângulos internos num triângulo.
Fonte: A Conquista da Matemática, 8° ano (2009, p. 249).

Tipo B3: Constrói-se um triângulo ABC qualquer de papel e recorta-se. Em seguida, marcam-se os pontos médios de dois lados e, finalmente, dobra-se o triângulo recortado, de modo que todos os vértices estejam em um dos pontos do terceiro lado em que não se marcou o ponto médio controlando-se que tipo de ângulo forma as três regiões que constituem os ângulos internos do triângulo, como ilustra a Figura 9 abaixo:

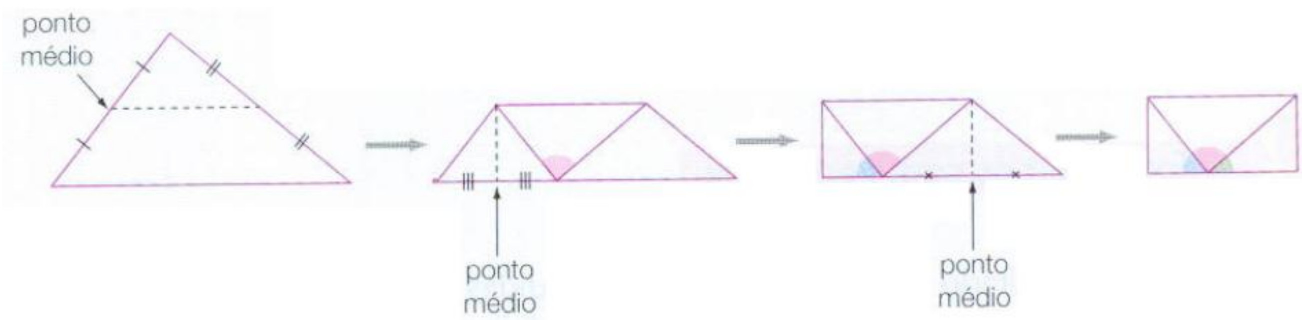


Figura 9: Ilustração técnica de dobradura para deduzir a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo.
Fonte: Matemática e Realidade, 8° ano (2009, p. 106).

Tipo B4: Exploram-se um ou mais casos, levanta-se uma conjectura e com base na teoria das paralelas (os ângulos correspondentes e/ou alternos internos em retas paralelas intersectadas por uma transversal são congruentes) faz-se a validação do resultado observado por meio de uma demonstração, conforme figura 10.

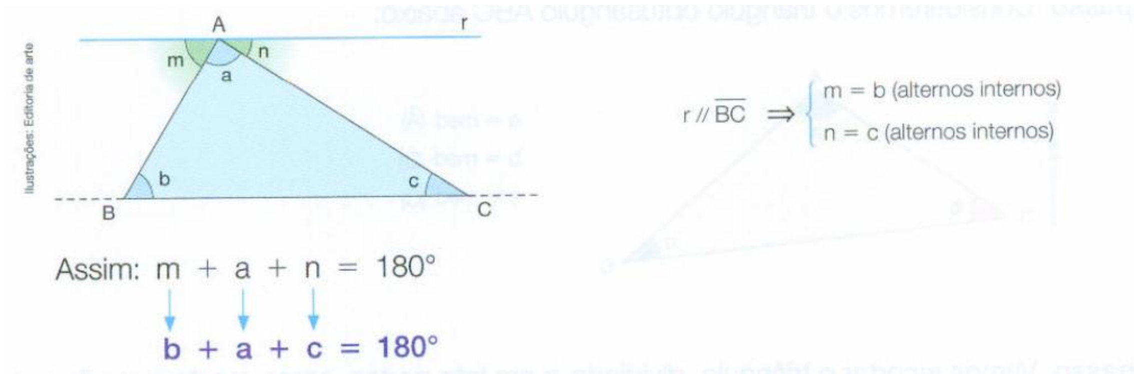


Figura 10: Demonstração sugerida para validação da propriedade da soma dos ângulos internos num triângulo.
Fonte: A Conquista da Matemática, 8° ano (2009, p. 250).

Tipo B5: Descreve-se um caminho triangular percorrido por uma formiga, onde o ponto de partida é o mesmo do ponto de chegada. Para percorrer este caminho triangular, deve-se partir de um vértice e caminhar ao longo dos lados. Ao chegar no vértice seguinte, deve-se girar o suplemento do ângulo interno. Ao passar pelos três vértices, chega-se a conclusão de que se deu um giro de 360° durante o percurso. Portanto, somam-se os ângulos girados, igualando-os a 360°, chegando a conclusão que a soma dos ângulos internos de um triângulo somam 180°, como ilustra a Figura 11, abaixo:

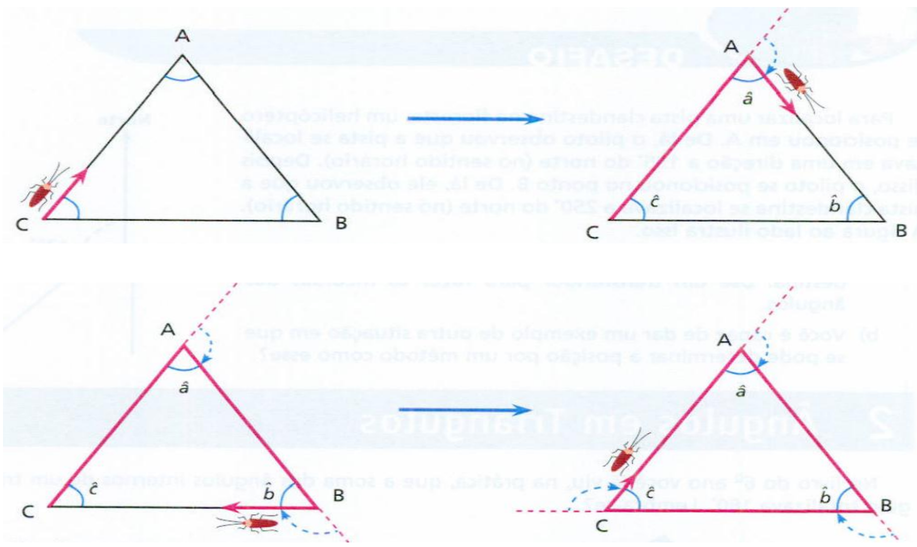


Figura 11: Demonstração sugerida para validação da propriedade da soma dos ângulos internos num triângulo.
Fonte: Aplicando a Matemática, 8° ano (2009, p. 70).

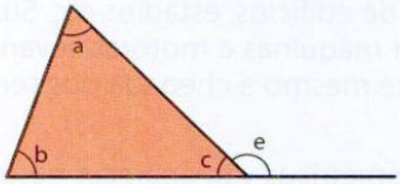
Os tipos B1, B2, B3 e B5 apenas diferem nos instrumentos a utilizar na validação da propriedade, mas em sua essência todos se baseiam em prova pragmática para validar a propriedade em estudo. Apesar desse traço comum para os três tipos, o B2 e o B3 não exigem que se meçam os ângulos internos, apenas a montagem dos recortes e dobradura efetuados, formando um ângulo raso, já é eficiente para se chegar à conclusão desejada. Já o tipo B5 utiliza ângulos suplementares para chegar a conclusão da propriedade estudada.

O tipo B4 possibilita a exploração e o levantamento de conjecturas, atividade muito importante para o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Sendo assim, classificamos esta categoria como prova intelectual. As tarefas envolvendo objetos geométricos no Ensino Fundamental devem permitir que os alunos formulem estratégias próprias e, ao mesmo tempo, mobilizem conhecimentos e capacidades anteriormente desenvolvidas.

(C): Relação entre as medidas de um ângulo externo e os internos não adjacentes de um triângulo.

Tipo C1: Desenha-se um triângulo e assinalam-se os ângulos internos. Prolonga-se um dos lados de cada um dos ângulos internos e assinala-se um ângulo externo adjacente a cada um deles. Recorrendo-se à propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo e à propriedade dos ângulos suplementares entre cada um dos ângulos internos com cada um dos ângulos externos adjacentes e mediante transformações algébricas, deduz-se a relação entre cada ângulo externo com a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes, conforme mostra a Figura 12.

Considere um triângulo qualquer.



ângulo externo: $\hat{e}$

ângulos internos não adjacentes a $\hat{e}$: $\hat{a}$ e $\hat{b}$

Vamos demonstrar que e = a + b.

Demonstração

Sabemos que e + c = 180°.

Pelo teorema anterior, sabemos ainda que: a + b + c = 180°.

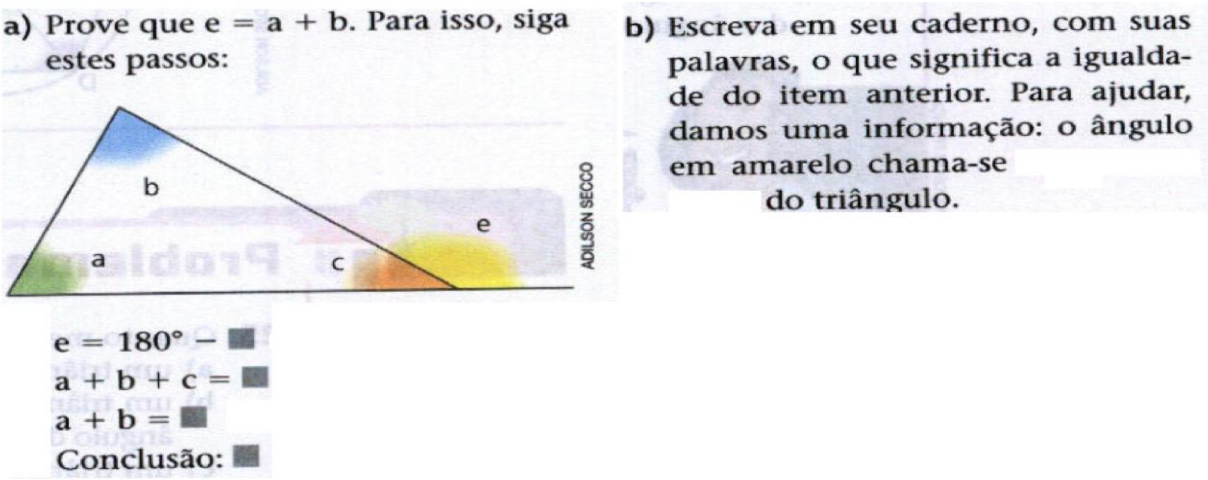
Então: e + c = a + b + c.

Subtraindo **c** dos dois membros dessa igualdade, obtém-se: e = a + b.

Demonstramos assim que a medida do ângulo externo $\hat{e}$ é a soma das medidas dos internos não adjacentes $\hat{a}$ e $\hat{b}$.

Figura 12: Demonstração sugerida para validação do teorema do ângulo externo.
Fonte: Matemática na Medida Certa, 8° ano (2009, p. 133 e 134).

Tipo C2: Propõe-se, no exercício, a verificação da propriedade. Desenha-se um triângulo e assinala-se um ângulo externo e os três internos. Em seguida, pede-se que complete alguns dados, para então tirar conclusões sobre a propriedade em estudo. Portanto, o aluno deve seguir os passos sugeridos, um roteiro pronto. Nesta atividade a propriedade “Em todo triângulo, a soma dos ângulos internos é 180º” é uma ferramenta que possibilita a demonstração de outra propriedade. Após provar a propriedade no item a) do exercício, o autor solicita no item b) que o aluno escreva com suas palavras o significado da igualdade anterior. Podemos dizer que nesse momento se dá a institucionalização da propriedade, conforme exemplificado na Figura 13 abaixo:


a) Prove que e = a + b. Para isso, siga estes passos:

e = 180° − ■
a + b + c = ■
a + b = ■
Conclusão: ■

b) Escreva em seu caderno, com suas palavras, o que significa a igualdade do item anterior. Para ajudar, damos uma informação: o ângulo em amarelo chama-se do triângulo.

Figura 13: Exercício sugerido para demonstrar o teorema do ângulo externo.
Fonte: Matemática - IMENES & LELLIS, 8° ano (2009, p. 101).

Entendemos que embora os tipos C1 e C2 sejam ambos, provas intelectuais, o tipo C2 possibilita a exploração e o levantamento de conjecturas pelos alunos. Já o tipo C1 apresenta a demonstração, não dando espaço para o aluno desenvolver suas próprias conjecturas e conclusões.

4.2. Análise dos tipos de introdução dos conteúdos em estudo

Para cada um dos conteúdos discutimos as escolhas dos autores do ponto de vista do ano em que o tema é apresentado, bem como apresentamos que livros adotam cada um dos tipos de introdução descritos acima, classificando-os segundo a tipologia de provas propostas por Balacheff.

Lembramos que, em substituição aos títulos dos livros, utilizamos a simbologia L1 à L10, apresentadas na seção 3.1 deste trabalho, para facilitar a redação do texto e as classificações que trazemos.

(A): Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

Este conteúdo é apresentado em todos os livros analisados, havendo quase uma uniformidade na maneira como e onde este tema é abordado. Aparece sempre em livros de 8° ano, sem compromisso em mencionar o quinto postulado proposto por Euclides. Sete, dos dez livros, introduzem os conteúdos por explanação teórica seguida de atividades resolvidas e propostas de cunho aplicativo e, os outros três (L3, L5 e L10) introduzem o conteúdo apresentando um ou poucos exemplos, seguidos de alguma sistematização e, depois de atividades de aplicação.

Logo, classificamos todas as demonstrações analisadas para introduzir este tema como pragmáticas, realizadas por meio de visualização, medição ou, até mesmo, de uma definição simplesmente. Percebemos que não há uma preocupação dos autores em deixar o aluno investigar, conjecturar e chegar às suas próprias conclusões sobre este tema. Nenhum livro utiliza softwares para a verificação e experimentação deste conteúdo.

(B): Propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo

É tratada em todos os livros contemplados no presente estudo. Os L4, L8, L9 e L10 apresentam, inicialmente, o conteúdo no livro do 7° ano, e o L3, no livro do 6°, para posteriormente aprofundarem o conceito, nos livros de 8° ano.

Os livros L2, L4, L9 e L6, do 8° ano, começam com uma demonstração pragmática por meio da visualização de como os três ângulos ficam quando unidos, de modo que apenas um lado seja coincidente com o lado de outro ângulo - os três primeiros livros (L2, L4 e L9) usam o tipo B2 e o quarto (L6), tipo B3 - e, logo em seguida, os quatro livros seguem com uma demonstração intelectual, através da validação da propriedade por meio de uma demonstração formal, usando a propriedade das retas paralelas – tipo B4.

Nos livros L3, L8 e L10, a propriedade é institucionalizada empiricamente pela manipulação – desenho e medição (tipo B1), recorte e dobradura (tipo B2), sem nenhum questionamento sobre as limitações destes procedimentos no estabelecimento de propriedades geométricas. Já os livros L1, L5 e L7 apresentam somente a demonstração formal – tipo B4.

Portanto, dos dez livros analisados, três explicitam a propriedade da soma dos ângulos internos por meio de uma prova pragmática e três através de uma prova intelectual, conforme a classificação de Balacheff (1988); quatro contemplam duas provas: uma pragmática e uma intelectual.

Apesar de seis livros validarem a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo por meio da demonstração, não existem, durante a explicação, atividades que motivem o aluno a alguma ação. Podemos interpretar que apesar de classificarmos estas demonstrações como intelectuais, segundo Balacheff, para os alunos, elas desempenham uma única função, a de explicação, pois os mesmos não estão envolvidos no processo de construção da aprendizagem.

Em relação aos livros L3, L8 e L10, cujos autores validam a propriedade apenas por meio da atividade experimental, observamos que, nos capítulos analisados, estes livros não levam o aluno a questionar sobre a validade desse procedimento. Balacheff (1988) afirma que esta forma de validação apresenta-se insuficiente, pois requer uma justificação conceitual.

Outro ponto muito importante observado é que nenhum dos livros incentiva e nem menciona a utilização de software de geometria dinâmica para serem feitas estas construções e demonstrações.

(C): Relação entre as medidas de um ângulo externo e os internos não adjacentes de um triângulo.

Dos dez livros didáticos analisados, sete tratam dessa propriedade: são os livros L1, L2, L5, L6, L7, L9 e L10. Em todos eles, o assunto é abordado no livro do 8° ano. Os outros três não fazem menção deste conteúdo em nenhuma unidade do Ensino Fundamental II.

Com exceção do livro L5, esta propriedade é introduzida nos outros seis livros (L1, L2, L6, L7 e L10) por meio de argumentos baseados na relação entre o ângulo externo, seu suplemento interno e a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo (tipo C1). Portanto, a validação feita nestes livros apoia-se na prova intelectual, segundo a classificação de provas propostas por Balacheff (1988), podendo considerar-se que a prova cumpre as funções de explicação e sistematização.

O L5 é o único livro que sugere que o próprio leitor tire suas conclusões a respeito desta propriedade. O autor deste livro apresenta a situação em um exercício, dando oportunidade ao aluno de fazer suas conjecturas e tirar conclusões (tipo C2). Esta validação, segundo Balacheff, também se enquadra na categoria de prova intelectual.

Depois da descrição e análise de como os autores introduzem os temas abordados neste estudo, apresentamos no Quadro 1 abaixo, um resumo com os resultados obtidos.

Quadro 1 - Resultado da análise dos tipos de introdução dos conteúdos em estudo.

Tema	Tipo	Classificação	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10
A	A1	Pragmática			X					X	X	X
	A2							X				
	A3				X							
	A4		X	X								
	A5						X		X			
	A6					X						
B	B1	Pragmática		X						X		X
	B2			X	X	X				X	X	X
	B3							X				
	B4	Intelectual	X	X		X	X	X	X		X	
	B5	Pragmática			X							
C	C1	Intelectual	X	X	-	-		X	X	-	X	X
	C2				-	-	X			-		

Fonte: Dados do pesquisador.

4.3. Descrição dos tipos de exercícios propostos sobre os conteúdos em estudo

De acordo com Brousseau (1996, p. 37), “saber Matemática não é apenas aprender definições e teoremas, a fim de reconhecer as ocasiões em que eles podem ser utilizados e aplicados; fazer Matemática implica resolver problemas”.

Entendemos que encontrar boas questões é tão importante quanto determinar suas soluções e, por isso, analisamos, em cada tema estudado, os exercícios propostos pelos autores dos livros didáticos aprovados pelo PNLD/2011. Nesta seção serão apresentadas as classificações que criamos para os tipos de atividades encontradas.

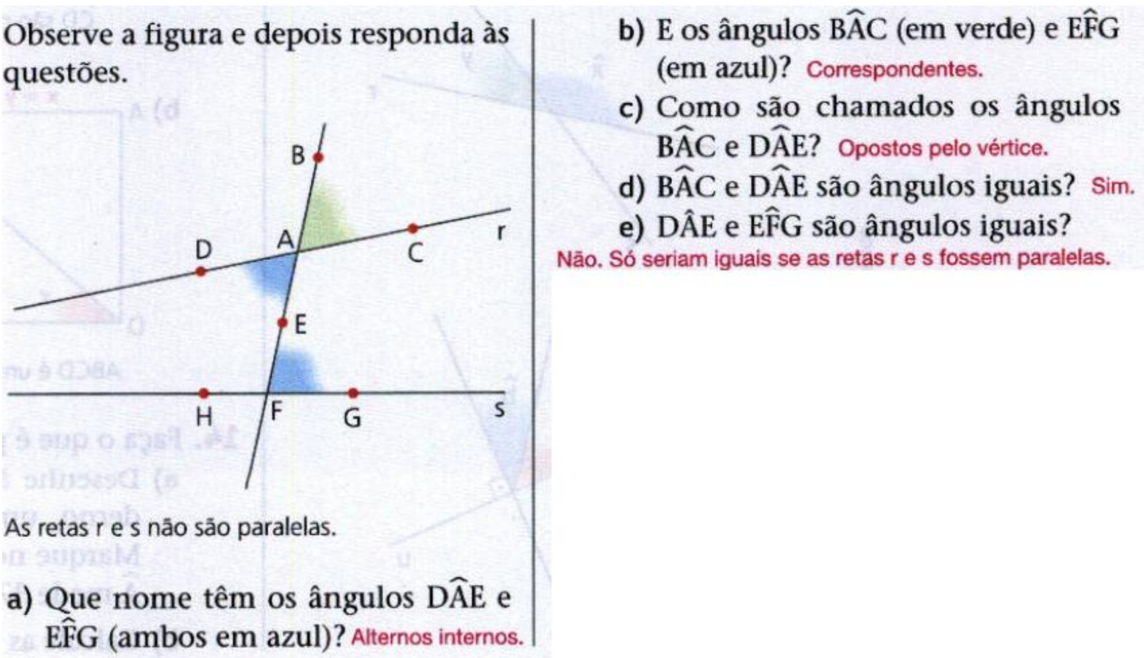
(EA): Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

Tipo EA1 – Medição

Pede-se que o aluno, utilizando o transferidor, determine a medida dos ângulos formados pelas paralelas cortadas por uma transversal.

Tipo EA2 – Conceito e nomenclatura

Pede-se que o aluno dê os nomes dos pares dos ângulos formados por retas paralelas e uma transversal, ou dê as relações existentes entre eles, bem como justifique se as retas são paralelas ou não, dados alguns pares de ângulos.


Observe a figura e depois responda às questões.

As retas r e s não são paralelas.

a) Que nome têm os ângulos $D\hat{A}E$ e $E\hat{F}G$ (ambos em azul)? Alternos internos.

b) E os ângulos $B\hat{A}C$ (em verde) e $E\hat{F}G$ (em azul)? Correspondentes.

c) Como são chamados os ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{A}E$? Opostos pelo vértice.

d) $B\hat{A}C$ e $D\hat{A}E$ são ângulos iguais? Sim.

e) $D\hat{A}E$ e $E\hat{F}G$ são ângulos iguais? Não. Só seriam iguais se as retas r e s fossem paralelas.

Figura 14: Exercício de ângulos formados por paralelas e uma transversal.
Fonte: Matemática – IMENES & LELLIS, 8° ano (2009, p. 97).

Tipo EA3 – Cálculo baseados em figuras

São fornecidos alguns ângulos da figura para que o aluno encontre os outros ângulos pedidos, usando as relações entre os ângulos formados pelas retas paralelas e uma transversal.

Em alguns exercícios não há dados de medidas de ângulos e sim uma representação dos ângulos por monômios ou polinômios, para que o aluno determine a medida do ângulo pedido usando conhecimentos de Álgebra.

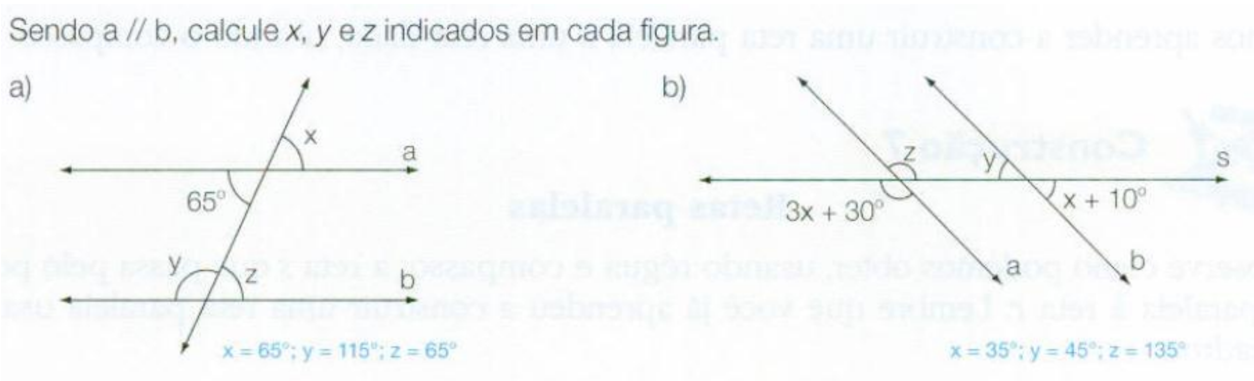


Figura 15: Exercício sugerido para calcular ângulos formados por paralelas e uma transversal.
Fonte: Matemática e Realidade – GELSON IEZZI, 8° ano (2009, p. 96).

Tipo EA4 – Desenho e cálculo

Para resolver estas atividades os alunos precisam saber não somente as nomenclaturas dos ângulos formados por retas paralelas e uma transversal, como também ter percepção geométrica destes elementos no momento em que for desenhá-los, para posteriormente utilizar conceitos para os cálculos.

Tipo EA5 – Cálculo, mobilizando conceitos prévios.

São exercícios que além do aluno utilizar o conhecimento dos ângulos formados por retas paralelas e uma transversal para resolvê-los, devem usar conhecimentos já trabalhados nas coleções, como propriedades geométricas do paralelogramo, do retângulo, sobre ângulos complementares, entre outros.

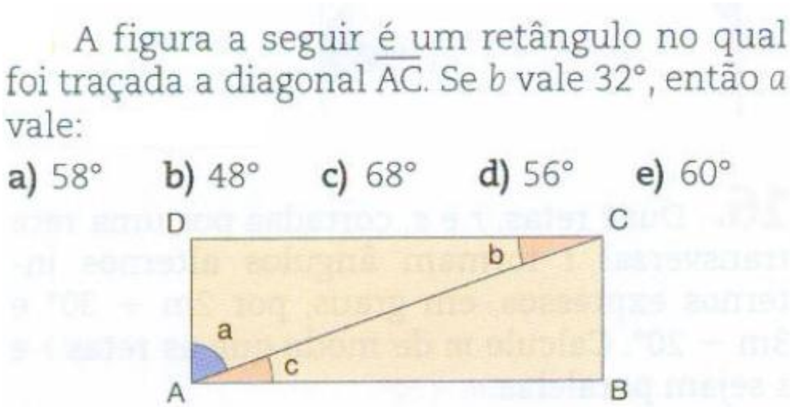
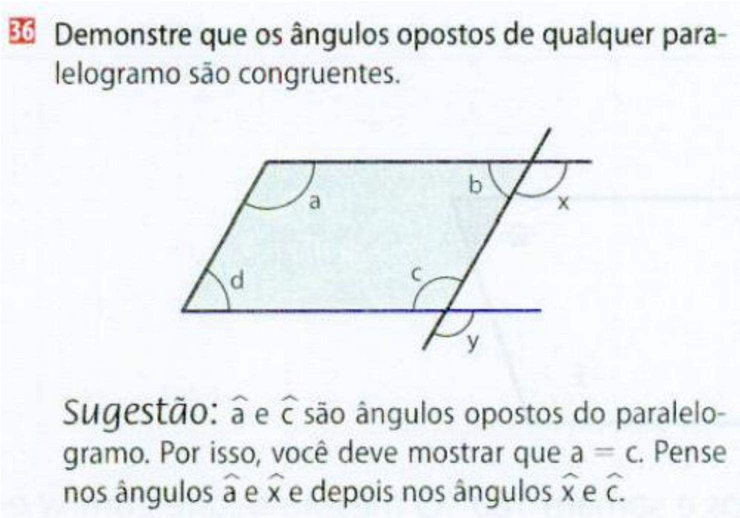


Figura 16: Exercício sugerido para calcular os ângulos internos de um retângulo.
Fonte: A Conquista da Matemática – GIOVANNI JR, 8° ano (2009, p. 234).

Tipo EA6 – Conjecturas, argumentação e demonstração

Exercícios que cuja resolução envolve o uso da relação existente entre os ângulos formados por retas paralelas e uma transversal para introduzir um novo conteúdo ou para estabelecer relações, observações, explorações, investigações e conjecturas.


36 Demonstre que os ângulos opostos de qualquer paralelogramo são congruentes.

Sugestão: $\hat{a}$ e $\hat{c}$ são ângulos opostos do paralelogramo. Por isso, você deve mostrar que a = c. Pense nos ângulos $\hat{a}$ e $\hat{x}$ e depois nos ângulos $\hat{x}$ e $\hat{c}$.

Figura 17: Exercício sugerido para demonstrar a congruência de ângulos opostos de um paralelogramo.
Fonte: Matemática na medida certa – JAKUBO J., 8° ano (2009, p. 131).

(EB): Propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo

Tipo EB1 – Medição

Pede-se que o aluno, utilizando o transferidor, determine a medida dos ângulos de triângulos desenhados no livro.

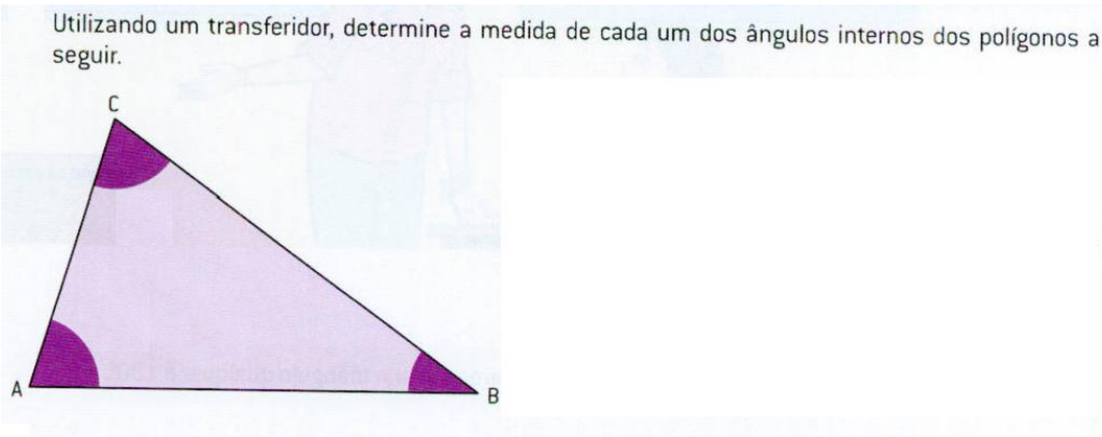

Utilizando um transferidor, determine a medida de cada um dos ângulos internos dos polígonos a seguir.

Figura 18: Exercício sugerido para verificar a soma dos ângulos internos do triângulo.
Fonte: Aplicando a Matemática – JACKSON RIBEIRO, 8° ano (2009, p. 82).

Tipo EB2 – Cálculo, em que o ponto de referência é 180°.

a - São fornecidos dois ângulos e, através da "fórmula" da soma dos ângulos internos do triângulo, o aluno deve encontrar o terceiro ângulo.

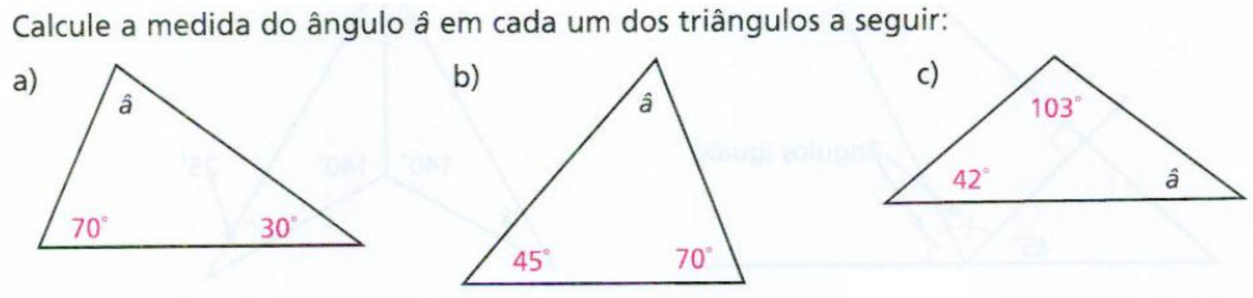


Figura 19: Exercício sugerido para calcular um ângulo do triângulo.
Fonte: Aplicando a Matemática – REIS & TROVON, 8° ano (2009, p. 73).

b – Não há dados de medidas de ângulos e sim uma representação dos ângulos por monômios ou polinômios para que o aluno, recorrendo à manipulação algébrica, determinar a medida dos ângulos dos triângulos.

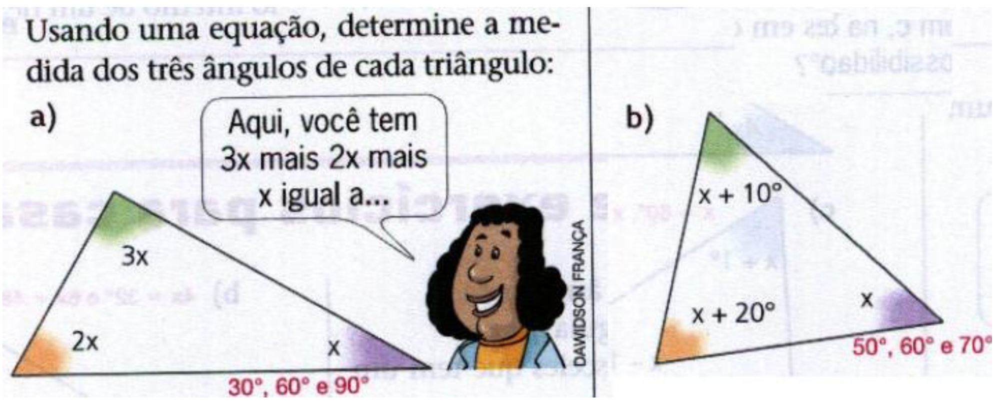


Figura 20: Exercício sugerido para calcular ângulos do triângulo.
Fonte: Matemática – IMENES & LELLIS, 8° ano (2009, p. 101).

Tipo EB3 – Cálculo, mobilizando conceitos prévios.

São exercícios que além do aluno utilizar a propriedade da soma dos ângulos internos do triângulo para resolvê-los, exigem o uso de conhecimentos já trabalhados nas coleções.

a – Ângulos adjacentes suplementares

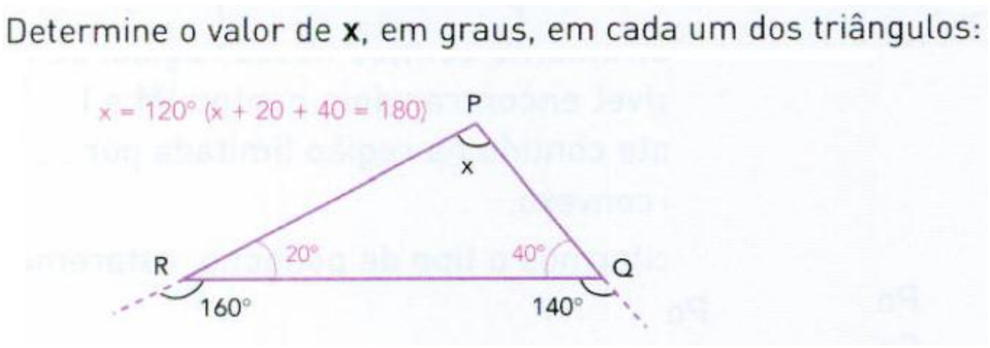


Figura 21: Exercício sugerido para calcular o ângulo de um triângulo.
Fonte: Tudo é Matemática – DANTE, 8° ano (2009, p. 161).

b – Ângulos formados por paralelas e transversais.

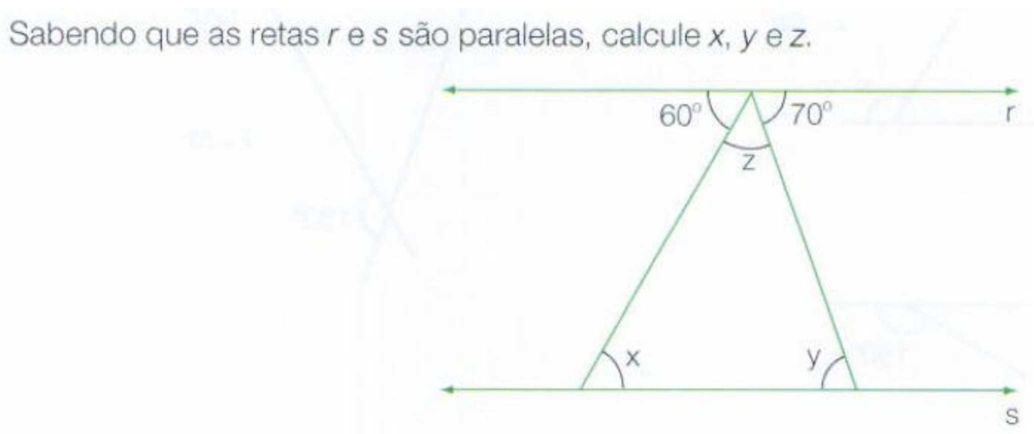


Figura 22: Exercício sugerido para calcular ângulos de um triângulo.
Fonte: Matemática e Realidade – IEZZI, 8° ano (2009, p. 111).

c – Ângulos opostos pelo vértice.

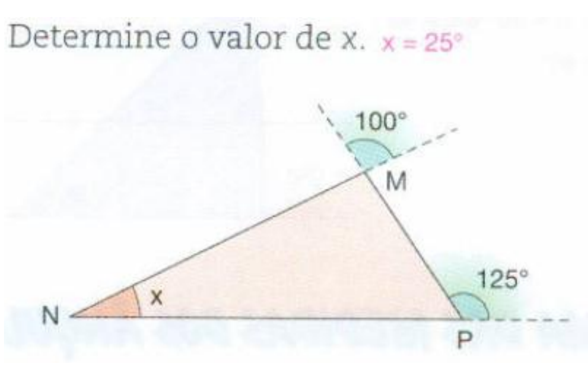
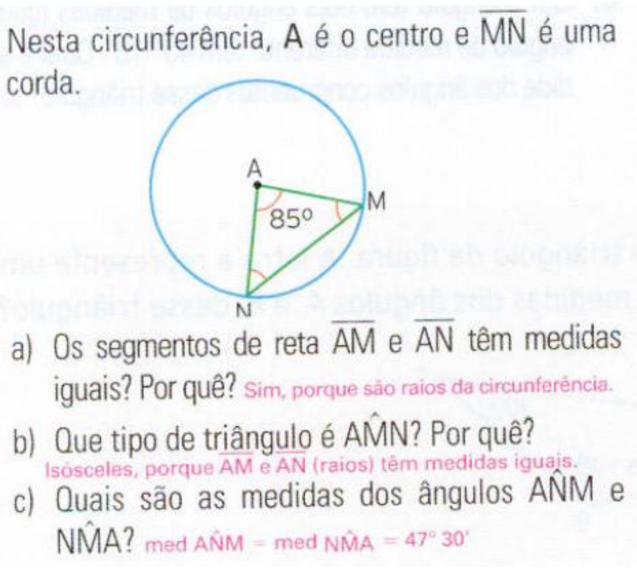


Figura 23: Exercício sugerido para calcular ângulos de um triângulo.
Fonte: A Conquista da Matemática – GIOVANNI JR, 8° ano (2009, p. 251).

d – Propriedades dos triângulos isósceles.


Nesta circunferência, A é o centro e $\overline{MN}$ é uma corda.

a) Os segmentos de reta $\overline{AM}$ e $\overline{AN}$ têm medidas iguais? Por quê? Sim, porque são raios da circunferência.

b) Que tipo de triângulo é $A\hat{M}N$? Por quê?
Isósceles, porque $\overline{AM}$ e $\overline{AN}$ (raios) têm medidas iguais.

c) Quais são as medidas dos ângulos $A\hat{N}M$ e $N\hat{M}A$? med $A\hat{N}M$ = med $N\hat{M}A$ = 47° 30'

Figura 24: Exercício sugerido para calcular ângulos de um triângulo isósceles.
Fonte: Matemática Ideias e Desafios – IRACEMA E DULCE, 7° ano (2009, p. 186).

Tipo EB4 – Conjecturas, argumentação e demonstração

Exercícios que utilizam a propriedade da soma dos ângulos internos para introduzir um novo conteúdo ou que levam o aluno a: estabelecer relações, observar, explorar, investigar e conjecturar.

Exemplo: Generalização da soma dos ângulos internos dos polígonos através da divisão das figuras em triângulos.

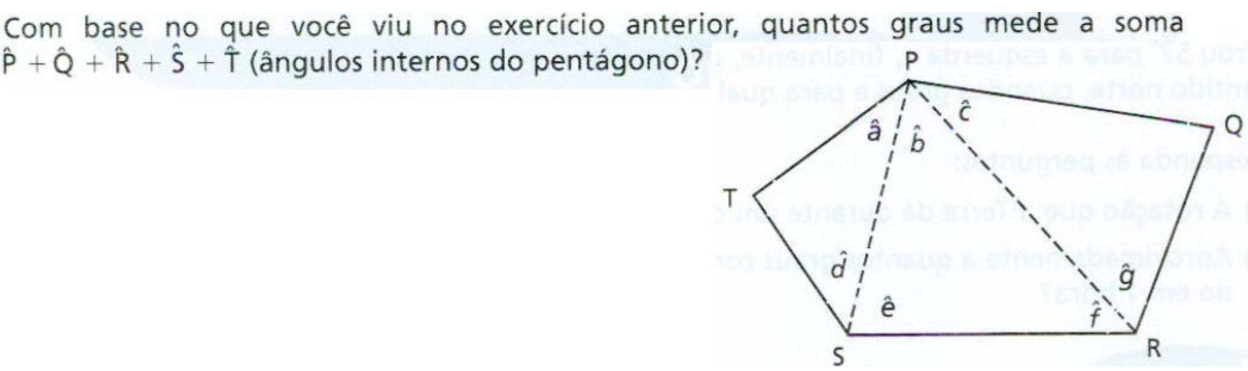

Com base no que você viu no exercício anterior, quantos graus mede a soma $\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} + \hat{T}$ (ângulos internos do pentágono)?

Figura 25: Exercício sugerido para calcular ângulos de um polígono.
Fonte: Aplicando a Matemática – REIS & TROVON, 8° ano (2009, p. 73).

Tipo EB5 – Construção Geométrica

Exercícios que propõe ao aluno a construção geométrica de figuras, para posteriormente utilizar a propriedade da soma dos ângulos internos do triângulo.

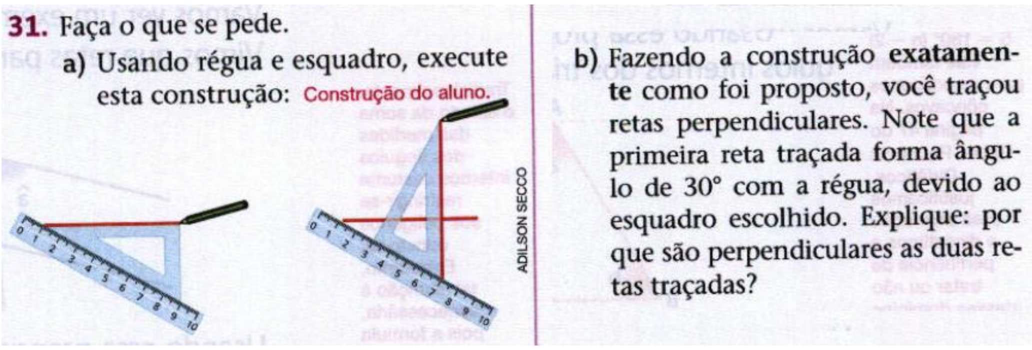


Figura 26: Exercício – Construção geométrica.
Fonte: Matemática – IMENES & LELLIS, 8° ano (2009, p. 103).

(EC): Relação entre as medidas de um ângulo externo e os internos não adjacentes de um triângulo.

Tipo EC1 – Investigação e dedução

Por meio de uma construção algébrica une-se a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo à noção de ângulos adjacentes suplementares, deduzindo-se assim, a relação em estudo.

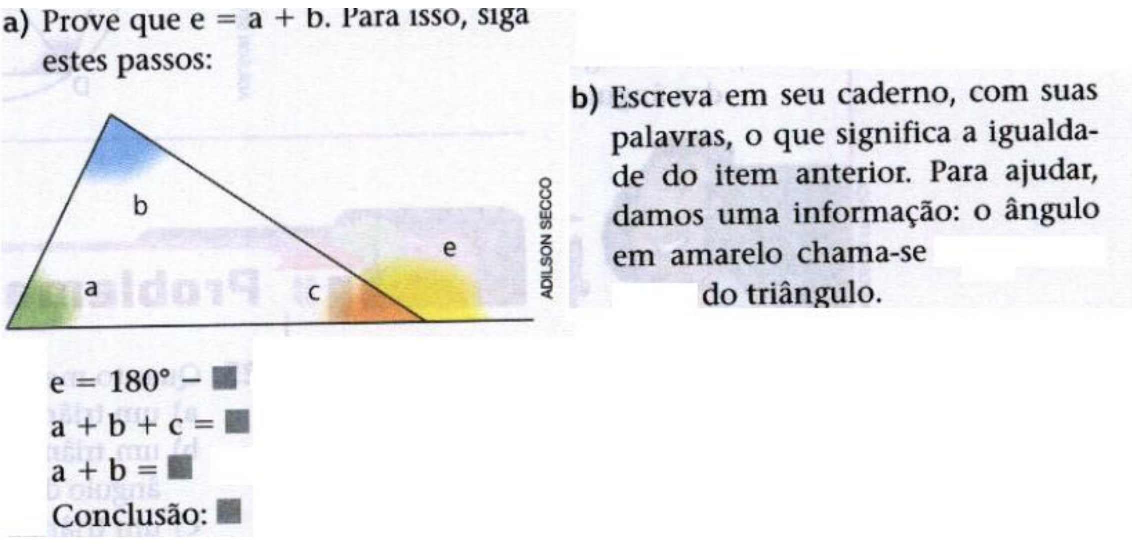


Figura 27: Exercício sugerido para demonstrar a relação entre ângulo externo e interno do triângulo.
Fonte: Matemática - IMENES & LELLIS, 8° ano (2009, p. 101).

Tipo EC2 – Cálculos.

São fornecidos dois ângulos internos do triângulo e, através da “fórmula” da relação entre as medidas de um ângulo externo e os internos não adjacentes de um triângulo, o aluno deve encontrar o ângulo pedido.

Em alguns exercícios não há dados de medidas de ângulos e sim uma representação dos ângulos por monômios ou polinômios para que o aluno determine as medidas dos ângulos recorrendo a manipulações algébricas.

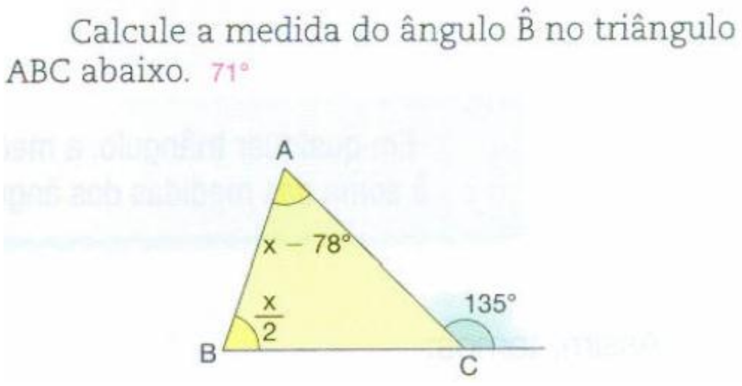


Figura 28: Exercício sugerido para calcular os ângulos internos de um triângulo, dado um ângulo externo não adjacente a eles.
Fonte: A Conquista da Matemática – GIOVANNI JR, 8° ano (2009, p. 276).

Tipo EC3 – Cálculo, mobilizando conceitos prévios.

São exercícios nos quais o aluno, além de utilizar a relação entre ângulos internos e externos não adjacentes do triângulo, para resolvê-los, deve usar conhecimentos já trabalhados nas coleções, como: ângulos adjacentes suplementares, ângulos opostos pelo vértice, ângulos, ângulos alternos internos, classificação de triângulos, bissetriz, entre outros.

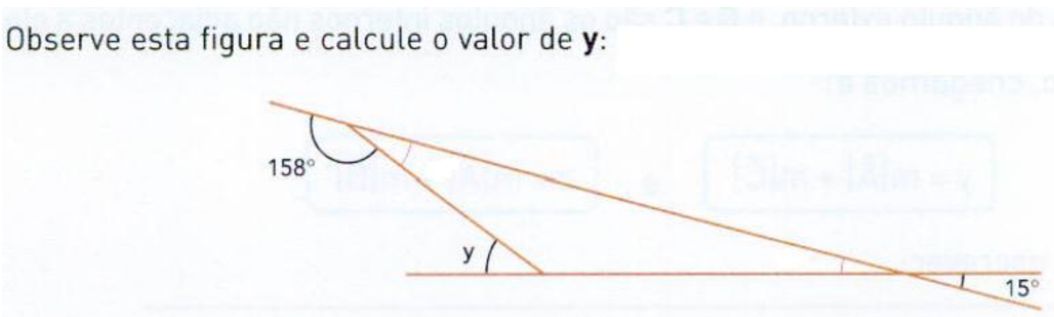


Figura 29: Exercício sugerido para calcular o ângulo externo de um triângulo.
Fonte: Tudo é Matemática – DANTE, 8° ano (2009, p. 176).

4.4. Análise dos tipos de exercícios propostos sobre os conteúdos em estudo

Nesta seção discutimos, para cada tema em estudo, se os autores dos livros envolvem os alunos no processo de desenvolvimento da capacidade de demonstrar, propondo discussões, trabalhos em grupos, ou se há simplesmente uma repetição das ideias apresentadas na introdução dos conteúdos, durante os exercícios.

(EA): Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal

Como já comentado, os dez livros analisados contemplam atividades sobre ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Em todos eles há exercícios que têm como objetivo a simples e pura computação de dados (EA3) e estes são propostos em maior quantidade que os de outros tipos. Em contrapartida, as atividades que utilizam o conteúdo em foco para fundamentar outras propriedades e/ou trabalhar dedução, justificação, verificação e demonstração (EA6) não aparecem na maioria dos livros. Apenas os livros L1, L5, L7 e L9 contemplam exercícios que ajudam o aluno a desenvolver competências complexas, como: explorar, estabelecer relações, provar e generalizar. Portanto, concluímos que as atividades dos livros analisados sobre ângulos formados por retas paralelas pouco instigam o aluno a observar, investigar, conjecturar e demonstrar.

Somente o L9 faz o uso de todos os tipos de exercícios descritos na seção anterior.

Todas as obras analisadas utilizam conhecimentos já trabalhados na coleção (EA5) em exercícios do capítulo de ângulos formados por retas paralelas, o que consideramos importante, já que esta prática contribui para que o aluno perceba interligações entre diferentes tópicos da geometria.

Observamos também a não valorização da interação entre alunos, o que não contribui para o desenvolvimento de competências importantes como a comparação e defesa de diferentes estratégias de resolução de problemas em Matemática. Somente em dois dos livros analisados, L3 e L9, foram encontradas atividades para serem realizadas em grupo, e que efetivamente favorecem a troca de ideias e o aprendizado mútuo. É lamentável que livros para serem utilizados a partir de 2011, por três anos consecutivos, ou seja, até 2013, não proponham atividades em ambiente de Geometria Dinâmica.

Em nenhum dos exercícios das dez coleções analisadas foram detectadas relações da geometria em estudo com conhecimentos extraescolares ou com contextos da vida cotidiana.

O quadro 2, abaixo, apresenta o resumo quantitativo de cada tipo de exercício encontrado nos livros analisados.

Quadro 2 - Resultado quantitativo das atividades relativas a ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal encontradas em cada coleção.

Tipo de atividade	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9 (7°/8°)	L10	**TOTAL**
EA1									0 + 1 = 1		**1**
EA2	3	2	6	6	2		2	5	3 + 0 = 3	4	**33**
EA3	13	16	1	6	13	8	5	5	3 + 7 = 10	9	**86**
EA4		4				6		1	0 + 2 = 2	1	**14**
EA5	1	7	8	11	3	2	4	2	0 + 2 = 2	3	**43**
EA6	3				3		4		1 + 1 = 2		**12**
TOTAL	**20**	**29**	**15**	**23**	**21**	**16**	**15**	**13**	**20**	**17**	**189**

Fonte: Dados do pesquisador.

(EB): Propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo

Dentre os dez livros analisados, nove possuem atividades sobre a propriedade da soma dos ângulos internos do triângulo. A diferença entre eles reside no enfoque que oferecem. O livro que não traz exercícios específicos sobre este tópico é o L1. Apesar de este livro introduzir a propriedade da soma dos ângulos internos do triângulo, isto é feito para apoiar a apresentação da soma dos ângulos internos de um polígono qualquer, na mesma seção. Assim, nesta obra, os exercícios do capítulo só focam a “fórmula” da soma dos ângulos internos de um polígono qualquer, optando por deixar de lado a apresentação de exercícios que explorem separadamente a soma dos ângulos internos de um triângulo, tema trabalhado no início da seção.

Nos demais livros os exercícios mecânicos ou braçais (tipos EB2 e EB3) aparecem em grande quantidade. Em contrapartida, as atividades que utilizam o conteúdo em foco para fundamentar outras propriedades e/ou trabalhar dedução, justificação, verificação e demonstração (EB4 e EB5) são apenas 15% do total de exercícios encontrados nas coleções. Por isso, concluímos, mais uma vez, que os autores dos livros analisados, pouco instigam o aluno a observar, investigar, conjecturar e demonstrar.

O L6 é o livro que mais possui atividades sobre o tema em questão, sendo em sua maioria (82% do total) exercícios de cálculos que fazem o uso de conhecimentos prévios, tipo EB3. Este modelo de exercício é o mais utilizado nas coleções analisadas, o que nos leva a concluir que todos os autores têm a preocupação de retomar constantemente conteúdos já trabalhados. Porém, na maioria dos casos, eles não mencionam o que está sendo revisitado.

Nos livros L2 e L10 todas as atividades envolvem apenas cálculos (tipos EB2 e EB3), não são propostas atividades que contribuam para o desenvolvimento de habilidades de dedução, justificação, verificação, etc (tipos EB4 e EB5).

Também para este tema não há atividades para serem desenvolvidas em grupo. Pode-se afirmar que os autores parecem não valorizar o trabalho de grupo, pelo menos no campo da geometria. Somente no L3 foram encontrados dois exercícios que sugeriam que os alunos analisassem o problema dado em grupo, trocassem ideias e explicassem suas respostas.

Verificamos, mais uma vez que nenhum dos dez livros contempla atividades de construção em ambiente de Geometria Dinâmica e nem utilizam nas atividades envolvendo contextos ou conhecimentos extraescolares.

O Quadro 3, abaixo, apresenta o resumo quantitativo de cada tipo de exercício encontrado nos livros analisados.

Quadro 3 - Resultado quantitativo das atividades relativas a propriedade da soma dos ângulos internos do triângulo encontradas em cada livro.

Tipo de atividade	L1	L2	L3 (6°/8°)	L4 (7°/8°)	L5	L6	L7	L8 (7°/8°)	L9 (7°/8°)	L10 (7°/8°)	TOTAL
EB1								1 + 0 = 1	2 + 0 = 2		**3**
EB2		6	0 + 11 = 11	7 + 1 = 8	5	3	5	1 + 7 = 8	5 + 3 = 8	3 + 1 = 4	**58**
EB3		13	0 + 7 = 7	5 + 10 = 15	11	22	11	0 + 1 = 1	1 + 7 = 8	0 + 6 = 6	**94**
EB4			0 + 6 = 6	1+0 = 1	5	2	4	1 + 0 = 1	3 + 2 = 5		**24**
EB5				0 + 1 = 1	1			2 + 0 = 2			**4**
TOTAL	**0**	**19**	**24**	**25**	**22**	**27**	**20**	**13**	**23**	**10**	**183**

Fonte: Dados do pesquisador.

(EC): Relação entre as medidas de um ângulo externo e os internos não adjacentes de um triângulo.

Dos dez livros analisados, sete contemplam atividades sobre a relação entre ângulos externos e internos não adjacentes do triângulo, sendo os livros L1 e L2 os que mais possuem exercícios sobre este tema.

O L5 apresenta apenas um exercício e este faz apelo à argumentação, conjectura e demonstração (tipo EC1) para deduzir a relação entre um ângulo externo e os ângulos internos não-adjacentes de um triângulo. Com exceção desta tarefa, todos os outros 34 exercícios analisados nos dez livros baseiam-se somente em cálculos, tipo EC2 e EC3. Este dado nos leva a concluir que estes livros abordam este conteúdo apenas com enfoque procedimental e, por isso, apresentam exercícios onde cálculos e fórmulas são a base das questões, sem intenção aparente de desenvolver no aluno o espírito da argumentação.

Outros dois pontos importantes que observamos são: nenhum exercício propõe que os alunos trabalhem em grupo, discutam e troquem ideias, o que seria importante para reforçar a aprendizagem conceitual e desenvolver a habilidade de interação e participação social; e nenhum livro traz exercícios que valorizem as construções em ambiente de Geometria Dinâmica.

No Quadro 4, abaixo, apresentamos o resumo quantitativo de cada tipo de exercício encontrado nos livros analisados.

Quadro 4 - Resultado quantitativo das atividades relativas ao tema relação entre as medidas de um ângulo externo e os internos não adjacentes de um triângulo.

Tipo de atividade	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	**TOTAL**
EC1			-	-	1			-			**1**
EC2	2	6	-	-		1	1	-	4	3	**17**
EC3	7	2	-	-		5		-	2	1	**17**
TOTAL	**9**	**8**	**-**	**-**	**1**	**6**	**1**	**-**	**6**	**4**	**35**

Fonte: Dados do pesquisador.

Depois da descrição e análise das atividades propostas aos alunos pelos autores dos livros didáticos analisados, sobre os temas abordados neste estudo, construímos a Quadro 5 abaixo, no qual apresentamos um resumo com os resultados obtidos.

Quadro 5 - Resultado da análise dos tipos de exercícios propostos aos alunos sobre os conteúdos em estudo.

Tema	Tipo	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10
EA	EA1									X	
	EA2	X	X	X	X	X		X	X	X	X
	EA3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EA4		X				X		X	X	X
	EA5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EA6	X				X		X		x	
EB	EB1								X	X	
	EB2		X	X	X	X	X	X	X	X	X
	EB3		X	X	X	X	X	X		X	X
	EB4			X	X	X	X	X	X	X	
	EB5				X	X			X		
EC	EC1			-	-	X			-		
	EC2	X	X	-	-		X	X	-	X	X
	EC3	X	X	-	-		X		-	X	X

Fonte: Dados do pesquisador.

Comparando as informações fornecidas pelo FNDE, apresentadas anteriormente na seção 3.1, que mostram que os livros L2 e L6 foram as obras mais adotadas em 2012 nas escolas públicas do Rio de Janeiro, e os dados levantados nesta pesquisa, podemos concluir que os professores, em sua maioria, preferem livros que introduzem os conteúdos através de provas intelectuais, mas que durante os exercícios dão maior atenção a procedimentos, algoritmos e fórmulas.

As características apresentadas neste trabalho sobre estes livros estão de acordo com a avaliação feita pelo PNLD/2011. De acordo com as resenhas, a metodologia adotada por estes autores privilegia a apresentação formal dos conteúdos e dá ênfase à habilidade de cálculo, não favorecendo uma participação ativa dos alunos na construção de seus conhecimentos. Ainda, na avaliação foi mencionado que há articulações entre os conhecimentos que estão sendo abordados e aqueles apresentados em anos anteriores, como havíamos observado.

5. CONSIDERAÇÕES SOBRE OS RESULTADOS DESTA PESQUISA

Nos últimos anos, as pesquisas e as práticas em sala de aula na área da Educação Matemática têm avançado muito e, cada vez mais se enfatiza o papel que o livro didático desempenha no processo de ensino, visto que ele é uma das principais fontes de consulta do professor para elaborar suas aulas.

Neste contexto, apresentamos, com a expectativa de poder contribuir para o trabalho do professor em sala de aula, a pesquisa realizada. Nela foram analisados livros didáticos aprovados pelo PNLD/2011, objetivando compreender como são trabalhadas as argumentações e provas de três conteúdos geométricos:

- Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal;
- Soma dos ângulos internos do triângulo;
- Relação entre as medidas de ângulos internos e externos não adjacentes do triângulo.

Para orientar esta pesquisa, buscamos responder à seguinte pergunta:

Como são trabalhadas as argumentações e provas no ensino da Geometria, no que diz respeito às orientações pedagógicas indicadas pelos livros didáticos de Matemática?

Este trabalho foi organizado com base nos princípios metodológicos da obra “Análise de Conteúdo” de Bardin e, nele, utilizamos os tipos de provas propostos por Balacheff (1988) como ferramenta de análise, o que nos permitiu verificar como os conceitos abordados neste estudo são tratados nos livros didáticos selecionados.

A partir deste referencial teórico, observamos que, em geral, os autores dos dez coleções mesclam provas pragmáticas e intelectuais para validar teoremas e propriedades apresentadas. Alguns autores privilegiam, ao introduzir um novo conteúdo, atividades que se pautam por ações de natureza exploratória-investigativas (L3, L8, L10), outros apresentam demonstrações formais para validá-los (L1, L5, L7), e alguns o fazem através de uma experiência para depois concluir com uma demonstração mais formal (L2, L4, L6 e L9).

Ressaltamos que as demonstrações apresentadas pelos autores dos livros analisados são perfeitamente compreensíveis para os alunos e, apesar de alguns livros não apresentarem estas demonstrações, o professor não deve omiti-las.

É certo que algumas propriedades deveriam ser demonstradas com mais rigor matemático, entretanto, muitos alunos não veriam sentido em tal rigor, veriam apenas “complicação”.

Em relação à análise feita nas atividades propostas para os alunos, podemos dizer que as tarefas de natureza investigativa estão ausentes na maioria dos livros e que, embora muitos autores dos livros didáticos analisados apresentem diversos conteúdos através de provas intelectuais, a maioria deles não incentiva atividades que valorizem observar, explorar, investigar, conjecturar e demonstrar. Ou seja, não ampliam aspectos mais formais de aprendizagem Matemática do aluno com demonstrações. Os exercícios são muitas vezes repetitivos e, por vezes conduzem os alunos as atividades de reprodução dos pensamentos elaborados por outros, em vez de se ocuparem no processo de construção do seu próprio conhecimento.

Sendo os livros L2 e L6 as obras mais adotadas em 2012 nas escolas públicas do Rio de Janeiro, concluímos que os professores, em sua maioria, preferem livros que introduzem os conteúdos através de provas intelectuais, com grande variedade de exercícios que privilegiam a habilidade de cálculo, não oferecendo muitas oportunidades para o aluno pensar de forma autônoma.

Diante dos resultados encontrados, sugerimos que os professores não fiquem restrito à coleção adotada, mas busque outras fontes e materiais que auxiliem na preparação de situações e atividades que ajudem os alunos a desenvolver o seu raciocínio lógico e os prepare para dominar a habilidade de argumentação. Sendo assim, propomos algumas destas estratégias a serem trabalhadas com os alunos:

- formar duplas para que construam uma solução (com justificativa) para problemas previamente discutidos em aula;
- solicitar a avaliação das justificativas apresentadas por outros alunos;
- pedir que identifiquem as hipóteses e teses de uma afirmativa;
- resolver problema desafio que requerem raciocínio lógico em todas as aulas.

Com essas estratégias, os professores devem conseguir grandes progressos na habilidade de argumentação dos alunos, porém devemos salientar que um ano escolar não é suficiente para obter respostas satisfatórias; é necessário um trabalho longo e contínuo para conseguir sucesso nessa tarefa.

Quanto à geometria dinâmica, consideramos que sua utilização pode contribuir para que os alunos entendam melhor o significado das demonstrações. Com os desenhos em movimento, os alunos podem desenvolver progressivamente habilidades para construir seus próprios argumentos, favorecendo os pensamentos de natureza visual, fonte de insights para a construção de demonstrações.

Como é recente o uso da tecnologia na sala de aula, consideramos necessárias mais investigações para que se definam maneiras adequadas de utilizar a geometria dinâmica para este fim.

Esta pesquisa contribuiu de uma forma decisiva para a formação profissional de seu pesquisador. Um fato muito importante foi conhecer com maior profundidade o Guia do Livro Didático do PNLD, pois não sabíamos de sua total importância e que este continha tantas informações sobre os critérios de análise e elaboração das resenhas efetuadas pelos especialistas. Com isso, estamos, agora, mais atentos ao processo de escolha dos livros na Escola, buscando envolver mais os colegas e criando melhores condições para que nossa participação seja efetiva. Hoje, com certeza, temos maior conscientização de nossa responsabilidade na escolha do livro didático e estamos mais atentos à importância do trabalho com provas e argumentações para a formação de nossos alunos.

O resultado desta pesquisa foi positivo, pois provocou uma reflexão sobre os conteúdos nos livros didáticos analisados e as recomendações dos documentos oficiais e levou à resposta de que todos estão em busca de minimizar as dificuldades tanto para o professor como para o aluno, em relação ao processo de ensino e aprendizagem. Cada livro tem suas características, mas todos trabalham com responsabilidade para proporcionar ao aluno o máximo de informação, para que possam alcançar um caminho alternativo na busca de uma compreensão maior e melhor, desenvolvendo o raciocínio lógico e modos de pensar.

Esperamos que as informações aqui apresentadas possam ser utilizadas de alguma forma para a melhoria do processo ensino e aprendizagem, mas ainda há questões que podem ser objeto de outras pesquisas:

- Como os alunos constroem os conceitos com base na abordagem feita no livro didático?
- Os livros didáticos constituem o melhor caminho na aprendizagem dos alunos?

É necessário ao professor, a fim de ampliar seus conhecimentos, a consulta a mais de uma obra para explorar um determinado conteúdo, para, em segurança, transmiti-lo a seus alunos. O livro didático é um eficiente recurso da aprendizagem no contexto escolar e, sua eficiência depende, todavia, de uma adequada escolha e utilização.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A. **Prova e demonstração em Matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem.** In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 30, Caxambu, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; MELLO, E. G. S. **Iniciação à demonstração: aprendendo conceitos geométricos**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, Caxambu, 2000.

ALVES, G. S. **O uso de softwares de Geometria Dinâmica para o desenvolvimento de habilidades cognitivas: uma aplicação em alunos do Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.

ANTONINI, S.; MARIOTTI, M. A. **Abduction and the exploration of anomalies: the case of proof by contradiction**. In: Proceeding of 6the CERNME, France, 2009, Wg2.

BALACHEFF, N. **Aspects of proof in pupils´practice of school mathematics.** In: PIMM, D. (ed.) Mathematics, Teachers and Children. London: Hodder and Stoughton, 1988, p. 216-235.

BALACHEFF, N. **Is argumentation an obstacle?** International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, Greneble, n. 1, May-Juin, 1999.

BALOMENOS, R. et al. **Geometria: prontidão para o cálculo.** In. LINDQUIST, M, M, e SHULTE, A. P. Aprendendo e Ensinando Geometria. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

BARDIN, L. Tradução de Luis Antero Neto e Augusto Pinheiro. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BATISTA, A. A. G.; COSTA VAL, M. da G. (Org.). **Livros de alfabetização e de português: os professores e suas escolhas.** Belo Horizonte: Ceale. Autêntica, 2004.

BATISTA, A.; ROJO, R. **Livros Escolares no Brasil: produção científica**. In VAL, M. e MARCUSCHI, B. (org.) Livros Didáticos de Língua Portuguesa: letramento e cidadania. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BOERO, P. **Argumentation and Proof: discussing a "successful" classroom discussion**. Disponível em: <http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_BOERO.pdf>. Acesso em: 28 Maio de 2012.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora E. Blücher Ltda e Editora da Universidade de São Paulo, 1996.

BRASIL. **Lei 10.172**, de 9 de janeiro de 2001. Aprova o Plano Nacional de Educação e dá outras providencias. Diário Oficial da União. Brasília, DF, 10 jan. 2001.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei número 9394, 20 de dezembro de 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Programa Nacional do Livro Didático**. Guia de Livros Didáticos: 6° ao 9° ano – PNLD 2011. Brasília: MEC, 2010.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. **Fundamentos e métodos da didática da Matemática.** In BRUN, J. (Dir.) Didática das Matemáticas. Tradução: Maria José Figueiredo (Coleção Horizontes Pedagógicos). Lisboa: Instituto Piaget, 1996, Capítulo I, p.35-113.

BUNZEN, C. **Dinâmicas discursivas na aula de português: os usos do livro didático e projetos didáticos autorais.** Tese (Doutorado em Linguística Aplicada) – Instituto de Estudos da Linguagem, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2009.

BUNZEN, C.; ROJO, R. H. R. **Livro didático de língua portuguesa como gênero do discurso: autoria e estilo.** In: COSTA VAL, M. da G.; MARCUSCHI, B. (Org.). Livros didáticos de língua portuguesa: letramento e cidadania. Belo Horizonte: Ceale. Autêntica, 2005. p.73-117.

BÚRIGO, E. Z. **Para que ensinar e aprender geometria no Ensino Fundamental? Um exercício de reflexão sobre o currículo.** Teoria & Fazeres, Gravataí, v. 2, 1999.

CARLOVICH, M. **A geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do Estado de São Paulo para 3° e 4° ciclos do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC/SP, São Paulo, 2005.

CARVALHO, J. B. P; LIMA, P. F.(c) **O uso do livro didático de Matemática**, v.17, Brasília. 2010. p.137-169.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M., GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais**. 5ª ed. São Paulo: Cortez, 2001.

CHOPPIN, A. **Les manuels scolaires.** Paris: Pédagogies pour Demain, Hachette, 1992.

COLL, C. **Psicologia e Currículo**, São Paulo: Ática, 1996.

CORACINI, M. J (Org.). **Interpretação, autoria e legitimação do livro didático**. São Paulo: Pontes, 1999.

COSTA VAL, M. da G.; MARCUSCHI, B. (Org.). **Livros didáticos de língua portuguesa: letramento e cidadania.** Belo Horizonte: Ceale. Autêntica, 2005.

DANTE, L. R. **Livro didático de Matemática: uso ou abuso?** In: Em aberto. Brasília, v.26, n.69, jan./mar., 1996. p.52-58.

DEGUIRE, L. J. **Geometria: um caminho para o ensino da resolução de problemas do jardim de infância à nona série**. In LINDQUIST, M, M, e SHULTE, A. P. Aprendendo e Ensinando Geometria. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

DIONÍSIO, A. P.; BEZERRA, M. A. **O Livro Didático de Português: múltiplos olhares.** 2ª ed. Rio de Janeiro, 2002.

DOUEK, N. **Approaching proof in school: from guided conjecturing and proving to a story of proof construction.** In: Proceedings of 6the CERME, France, 2009, Wg2.

ERNEST, P. **Researching mathematics teachers beliefs and their impact on practice.** In BSRLM Proceedings of the Conference at Warwick University, May, 1988, Coventry, The University of Warwick, 1988. p.17-20.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. Fundação Editora da UNESP, 2009.

FENNEMA, E. e FARNKE, M. L. **Teachers' knowlege and its impact.** Handbook of research in mathematics teaching and learning. D. A. Grows, 1992. p.147-164.

FIORENTINI, D. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil.** Revista Zetetiké, ano 3, n.4. Campinas: UNICAMP, 1995.

FONSECA, M. C. F. R. et al. **O ensino de geometria na escola fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

FORQUIN, Jean-Claude. **Escola e Cultura**. As bases sociais e epistemológicas do conhecimento escolar. Porto Alegre, ARTMED, 1993.

FREITAS, J. L. M. **Situações didáticas.** In MACHADO, S. D. (org). Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

GALVÃO, A. M. de O. **O estudo dos manuais escolares e a pesquisa em história.** In: BATISTA, A. A. G.; GALVÃO, A. M. de O. Livros escolares de leitura no Brasil: elementos para uma história. Campinas/SP: Mercado de Letras, 2009, p.11-40.

GÉRARD, F.-M, ROEGIERS, X. **Concevoir et évaluer des manuels scolaires**. Bruxelas. De Boeck-Wesmail, 1993. Tradução Portuguesa de Júlia Ferreira e de Helena Peralta, Porto, 1998.

GOLDBERG, M. A. A ; SOUZA, C. P. **Avaliação de programas educacionais**. São Paulo: ed. EPU, 1983. p.38-45.

GOUVÊA, F. A. T. **Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado – PUC/SP, São Paulo, 1998.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** 207f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GUIA DO LIVRO DIDÁTICO 2007: **Matemática: séries/anos iniciais do ensino fundamental -** Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

LEGENDRE, A. **Elementos de Geometria**. Tradução de Manoel Ferreira de Araújo Guimarães. Editora LIMC-UFRJ, 2009.

HANNA G. **Challenges to the importance of proof.** For the Learning of Mathematics, n.15, 1995. p.42-49.

HANNA, G. **Proof, explanation and exploration: an over view.** Educational Studies in Mathematics, Vol. 44, n.1-2, 2000. p.5-23.

HANNA, G. et al. **Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education**, v.1. Taiwan, 2009. Disponível em: <http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume_1.pdf> Acesso em: 05 de Junho, 2012.

HAREL, G.; SOWDER, L. **Students proof schemes**. In: SCHOENFELD, A. et al (Ed.). Research on Collegiate Mathematics, v.3, 1998.

HARTSHORNE. R. **Geometry: Euclid and Beyond.** New York, Springer, 2000.

HEALY, L.; HOYLES, C. **A study of proof conceptions in algebra**. Journal for Research in Mathematics Education, n. 31(4), 2000. p.396-428.

HEINZE, A. **The proving process in mathematics classroom - method and results of a video study.** In M. J.Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.) Proceedings of the 28th conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education. Bergen, Norway, 2004.

HERSHKOWITZ, R.; BRUCKHEIMER, M. **Atividades com professores baseadas em pesquisa cognitiva**. In LINDQUIST, M, M, e SHULTE, A. P. Aprendendo e Ensinando Geometria. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

HERBST, P.; MIYAKAWA, T. **When, how and why prove theorems? A methodology for studyng the perspective of geometry teachers.** ZDM- The International Journal on Mathematics Education. The Special Issue on Proof. Vol. 40, n. 3, 2008. p.469-486.

IMENES, M. I. **A Geometria no Primeiro Grau: experimental ou dedutiva?** Revista de Ensino de Ciências, n.19, out. 1987. p.55-60.

KELLER, O. **L´algèbre et le calcul en Egypte antique**. IREM de Lyon, v.54, 1986.

KOBAYASHI, M. **A construção da geometria pela criança**. Bauru: EDUSC, 2001.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** In: A Educação Matemática em Revista. São Paulo: SBEM, v.4, 1995.

MANDARINO, M. C. F. **Concepções de ensino da Matemática elementar que emergem da prática docente.** Tese de doutorado – PUC/RJ, Departamento de Educação, 2006.

MANDARINO, M. C. F. **Que conteúdos da Matemática escolar professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental priorizam?** IX ENEM, ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Belo Horizonte - MG, 2007.

MANFIO, F. **Geometria Euclidiana Axiomática – Notas de aula.** Disponível em: <http://www.icmc.usp.br/~manfio/Geometria>. Acesso em: 13 de Julho 2012.

MELLO, E. G. S. **Demonstração: Uma sequência Didática para a introdução de seu Aprendizado no ensino da Geometria.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 1999.

MISKULIN, R. G. S. **Concepções Teórico-Metodológicas sobre a Introdução e a Utilização de Computadores no Processo Ensino/Aprendizagem da Geometria.** Campinas: Faculdade de Educação da UNICAMP, Tese de Doutorado em Educação, 1999.

MOLINA, O. **Professor x livro didático: quem engana quem?** São Paulo: Papirus, 1987.

MOLINA, O. **Quem engana quem? Professor x livro didático**. Vol 2. ed Campinas, SP: Ed. Papirus, 1988.

MONTORO, V. **Concepções de estudantes de professorado acerca del aprendizaje de la demonstración.** In: REIEC Revista Electrónica de investigacion em Educación Matemática, 2007. Disponível em: <dialnet.Unirioja.es//servlet/fichero_articulo?codigo=2875746 & orden=o>. Acesso em: 21 de março 2011.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. **A Capacidade de Argumentação e a Familiarização com as demonstrações no Ensino Médio**. Livro de resumos do I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Serra Negra, SP, novembro de 2000. p.106-110.

PAVANELLO, R. M. **O Abandono da geometria: uma visão histórica.** Dissertação (Mestrado) Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

PAVANELO, R. M. **O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil**. Zetetiké, n. 01, UNICAMP, Campinas, 1993.

PAVANELO, R. M. **Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: A pesquisa e a sala de aula.** São Paulo: Biblioteca do professor, Coleção **SBEM**, v. 2, 2004.

PAVANELLO, R. M. **Formação de Possibilidades cognitivas em Noções Geométricas**. Tese (Doutorado em Metodologia do Ensino) – Faculdade de Educação da UNICAMP, Campinas: [s.n], 1995.

PEREIRA. M. R. A **Geometria escolar: uma analise dos estudos sobre o abandono de seu ensino**. Dissertação (Mestrado). São Paulo: PUC-SP, 2001.

PEREIRA, A.C.C.; PEREIRA, D.E.; MELO, E.A.P. **Livros didáticos de Matemática: uma discussão sobre seu uso em alguns segmentos educacionais**. Disponível em: <www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC45464014268T.doc>. Acesso em: 12 de maio de 2012.

PEREZ, G. **A realidade sobre o ensino de geometria no 1° e 2° graus, no estado de São Paulo**. Educação Matemática em Revista, SBEM n. 4, p. 54-62, 1995.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re)significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática**. Tese de Doutorado. São Paulo: PUC, 2005.

ROJO, R. **Recomendações para uma política e materiais didáticos**. MEC: Brasil, 2005.

SILVA, T. T. da. **Quem escondeu o currículo oculto**. In Documento de identidade: uma introdução às teorias do currículo. Belo Horizonte, Autêntica, 1999. p.77-152.

TAGLIANI, D. C. **O livro didático de língua portuguesa no contexto escolar: perspectivas de interação.** Pelotas, 2009. 195p. Tese de doutorado (Letras: Linguística Aplicada) – Universidade Católica de Pelotas, 2009.

USISKIN, S. **Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar**. In LINDQUIST, M, M, e SHULTE, A. P. Aprendendo e Ensinando Geometria. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

VELOSO, E. **Geometria: temas atuais.** Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

VINCENT, J; et al. **Argumentation pofile charts as tools for analysing students´ argumentations**. In: CHIC, H. L. & VINCENT, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educacional, vol. 4. Melblourne: PEM 4, 2005. p.281-288

VITRAC, B. **A invenção da geometria.** In Scientific American-História: n 3. São Paulo: Ediouro, 2006.