UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CARLOS AUGUSTO AGUILAR JÚNIOR

POSTURA DE DOCENTES QUANTO AOS TIPOS DE ARGUMENTAÇÃO E PROVA MATEMÁTICA APRESENTADOS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Rio de Janeiro

Novembro de 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

CARLOS AUGUSTO AGUILAR JÚNIOR

POSTURA DE DOCENTES QUANTO AOS TIPOS DE ARGUMENTAÇÃO E PROVA MATEMÁTICA APRESENTADOS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada à banca, aprovada pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para a obtenção do grau de ***Mestre em Ensino de Matemática,*** *sob orientação da* ***Professora Dra. Lilian Nasser****.*

Rio de Janeiro

Novembro de 2012

A283p Aguilar Júnior, Carlos Augusto.
Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e provas apresentadas por alunos do Ensino Fundamental / Carlos Augusto Aguilar Júnior. – Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2012.
xv, 110 f.: il.; 30 cm.

POSTURA DE DOCENTES QUANTO AOS TIPOS DE ARGUMENTAÇÃO E PROVA MATEMÁTICA APRESENTADOS POR ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

CARLOS AUGUSTO AGUILAR JÚNIOR

*Dissertação de Mestrado apresentada à Banca, aprovada pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, do Instituto de Matemática, do Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Ensino de Matemática**, sob orientação da **Profª. Drª. Lilian Nasser***

Aprovada por:

____
Profª. Drª. Lilian Nasser (presidente)

____
Profª. Drª. Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy)

____
Profª. Drª. Cláudia Coelho de Segadas Vianna

____
Profª. Drª. Ana Teresa de Carvalho Correa de Oliveira

Rio de Janeiro

Novembro de 2012

Bonum certamen certavi, cursum consummavi, fidem servavi."

("*Combati o bom combate, completei a corrida, guardei a fé*". – 2 Tm, 4, 7)

AGRADECIMENTOS E DEDICATÓRIAS

Dedico e agradeço a Deus, que pela sua misericórdia, luz e sustento, me possibilitou sonhar e concretizar o sonho do ingresso e conclusão deste curso de Mestrado.

Dedico e agradeço a Santo Antônio, meu zeloso santo de devoção, que sempre intercede por mim junto à Santíssima Trindade, permitindo alcançar meus objetivos.

Dedico e agradeço à minha mulher, amiga, companheira Clarissa, pelo seu incentivo constante, paciência permanente, apoio incondicional e amor mais lindo e caro deste mundo. Sem sua presença, seria muitíssimo mais difícil a conclusão deste projeto.

Dedico e agradeço à minha família: meus pais Vera e Carlos Augusto, meus irmãos Fernando e Alan, e à minha avó Lucia, por terem contribuído por ser o que hoje sou.

Dedico e agradeço à saudosa Alessandra, minha irmã, cuja presença entre nós foi interrompida tão cedo... queria mais tempo para amar-te mais!

Dedico e agradeço ao meu amado e querido avô Antônio (*in memorian*). Mesmo sem o domínio das letras e do conhecimento, no seu jeito manso, humilde e simples encontrei o sentido das palavras hombridade, dignidade, honestidade, família, respeito. Amo-te!

Dedico às minhas saudosas tias Dina, Bena Lourdes e Maria do Carmo. Que seus espíritos continuem a nos iluminar!

Agradeço à valiosa e sem par orientação da amiga e Profª. Drª. Lilian Nasser, que viabilizou a boa condução da realização da pesquisa com opiniões e bons comentários, além de sempre ter aceitado e ponderado minhas indagações.

Agradeço à participação na banca de defesa das Professoras Lulu Healy, Ana Teresa de Carvalho Correa de Oliveira e Claudia Coelho de Segadas Vianna, honrando-me com suas preciosas sugestões dadas no Exame de Qualificação.

Agradeço aos 124 alunos que responderam ao teste de argumentação e provas, fundamental na metodologia de pesquisa adotada. Agradeço aos 59

professores e 10 alunos de Graduação que se comprometeram e deram valiosa contribuição para a realização da 2ª fase da pesquisa.

Agradeço a todos os meus professores do curso, em especial aos Professores Nei Carlos Rocha, Ana Teresa de Carvalho Correa de Oliveira e Claudia Coelho de Segadas Vianna, pelos seus ensinamentos que me aperfeiçoaram como profissional e por sua humanidade e postura como professores. Estendo meus cumprimentos aos servidores técnico-administrativos do Instituto de Matemática, em especial aos que fazem funcionar com organização a secretaria da Pós-graduação, a quem cumprimento na pessoa do secretário Cristiano Moura.

Dedico a todos os colegas de curso do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – PEMAT/UFRJ – nas pessoas de Jansley Chaves e Armando Viana (*in memorian*), que sempre me incentivaram e apoiaram nesta empreitada.

Agradeço aos colegas de trabalho do Departamento de Química Inorgânica, da Universidade Federal Fluminense, em especial aos Professores Dr. Armando Pereira do Nascimento Filho e Dr. Carlos Bauer Boechat, cuja compreensão e ajuda foram fundamentais para a conclusão deste feito. Agradeço, ainda, à Profª. Maria das Graças Fialho Vaz, pelo incentivo e ajuda na revisão final.

Agradeço e dedico aos meus amigos, homenageando a todos eles na minha querida amiga e eterna professora Maria Martha da Fonseca Carvalhaes, cujo incentivo sempre me encorajou a sonhar e a voar mais alto.

Agradeço aos colegas de trabalho da Escola Municipal Ministro Orosimbo Nonato e da Escola Municipal Brigadeiro Faria Lima.

Agradeço e dedico este trabalho a todos os meus alunos, de ontem e hoje, que são o fim primeiro da minha constante busca pela formação continuada, pelo meu aperfeiçoamento profissional.

Dedico e agradeço a todos que, de uma maneira ou de outra, contribuíram para a concretização deste trabalho.

O autor

RESUMO

O presente trabalho trata da temática da prova matemática na sala de aula da Escola Básica e da visão do professor sobre este desafio: desenvolver no aluno deste nível de ensino a habilidade de argumentar e provar em Matemática. Além disto, nossa investigação pretendeu verificar como o professor valoriza e aceita os diversos níveis e tipos de argumentação apresentados por estudantes desta faixa de ensino. Para isto, realizamos a pesquisa de cunho qualitativo em duas etapas: na primeira, montamos uma atividade com questões, que exigiam dos alunos a construção de argumentos que comprovassem a validade das afirmações matemáticas; na segunda etapa, a partir das respostas obtidas, selecionamos algumas, categorizadas segundo os modelos e tipos de prova de Sowder e Harel (1998) e Balacheff (1988) para montarmos o formulário que foi aplicado a 59 professores durante os meses de maio e junho de 2012, seguindo uma metodologia empreendida por Hoyles (1997), na Grã-Bretanha. Da análise dos dados, que também levou em conta 10 alunos de Graduação que participaram do preenchimento do formulário, constatamos nesse grupo que os professores, de maneira geral, não estão inclinados ao desenvolvimento de atividades que possibilitem a construção, em sala de aula, das habilidades de argumentar e provar em Matemática, e que sua preferência, em termos de avaliação de respostas discentes, é pelas argumentações mais próximas ao modelo de prova conceitual de Balacheff (1988), que é a prova rigorosa, formal, defendida, praticada e aceita na Academia.

Palavras-chave: prova, argumentação, formação docente, concepções docentes; ensino-aprendizagem de prova matemática

ABSTRACT

This dissertation deals with the themes of proof in the mathematics classroom at Basic School and the teacher's view on this challenge: how to develop in students of this level of education the ability to argue and prove in Mathematics. Furthermore, our investigation intended to determine how teachers appreciate and accept the various levels and types of argumentation presented by students of this age. For this, we conducted a qualitative research in two stages: first, we set up a form with questions that go beyond the simple application of known results and calculations, and require deeper logical-deductive reasoning, through argumentation and justification. In the second stage, some selected responses from this form have been categorized according to the models and types of proof established by Harel and Sowder (1998) and Balacheff (1988), to assemble the form that was applied to 59 teachers during the months of May and June 2012, following a methodology undertaken by Hoyles (1997), in Britain. Data analysis, which also took into account 10 undergraduate students who participated in completing the form, indicates that teachers in this group, in general, are not inclined to allow the development of activities in the classroom, in order to construct skills and abilities to argue and prove in mathematics. Their preference, in terms of evaluating students responses, is for arguments closer to Balacheff's model of conceptual proof (1988), which is the rigorous and formal proof, supported, accepted and practiced at the Academy.

Keywords: proof, argumentation, teacher training, teacher conceptions, teaching and learning mathematical proof.

Sumário

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1. Introdução

> ***"A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar.***
>
> ***A Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente."***
>
> (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, p. 19, 1997)

É importante refletirmos sobre o que é saber Matemática. Há quem pense, e o senso comum corrobora para isto, que saber Matemática é ser bom nas contas e na memorização de fórmulas. Por vezes, verifica-se que os professores podem ser influenciados em sua prática pedagógica por esta ideia recorrente, negligenciando o desenvolvimento de habilidades cognitivas importantes para o desenvolvimento intelectual do aluno.

Seria interessante que os professores, em sua totalidade, voltassem seu fazer pedagógico a uma proposta de trabalho que ressaltasse o desenvolvimento do raciocínio. Saber Matemática está muito além de dominar algoritmos, fórmulas e procedimentos; saber Matemática pressupõe dominar a habilidade de estabelecer estratégias para abordar e solucionar um problema, de extrair informações e a partir delas encontrar as melhores ferramentas para resolver a questão proposta. Ou seja, saber Matemática determina que o indivíduo saiba raciocinar e aplicar os conhecimentos adquiridos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1997) – indicam caminhos para a formulação de um currículo de Matemática que permita desenvolver o saber matemático dos estudantes, ao postular que a Matemática:

> permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno. (p. 15).

Constata-se que o conhecimento matemático dos alunos se restringe ao domínio de técnicas operacionais, fórmulas e procedimentos, sem que haja uma compreensão do que estão fazendo. Este pensamento é revelado por Almeida (2007), no âmbito do relato de sua pesquisa de mestrado, ao discorrer sobre sua experiência docente, tanto em nível básico quanto superior, onde percebe:

> a aguda deficiência, evidenciada por parcela considerável da população estudantil, no trato de questões matemáticas mais elaboradas no que concerne à profundidade do raciocínio lógico-dedutivo exigida para o encaminhamento das questões (p. 14).

Compartilho desta preocupação. É realmente frustrante para o estudante, que é estimulado apenas a realizar contas e aplicar fórmulas, perceber que não apresenta em seu desenvolvimento intelectual o domínio do raciocínio matemático. Quando o aluno é desafiado a resolver situações que demandem o uso de raciocínios mais elaborados e resultados prontos, este se percebe incapaz, mesmo quando apresenta em sua vida acadêmica histórico de bons resultados. Tal situação pode acarretar, como narrado por Almeida (2007, p. 2), “o esmorecimento e o consequente distanciamento dos estudos como também (...) verdadeiras situações de pânico e repulsa pela disciplina".

Penso e creio que é um direito do estudante aprender, nutrir-se de saber. Defendo que nossos alunos tenham o direito de aprender Matemática, e para tanto é necessário que sejam propiciadas atividades que estimulem o desenvolvimento deste raciocínio matemático no aluno.

Estes questionamentos me levaram a refletir sobre o papel do professor na construção de um trabalho pedagógico que fomente o raciocínio matemático, a partir de uma proposta que abranja o trabalho de argumentação em Matemática.

Acredito que a grande maioria dos estudantes ingressos na faculdade de Matemática escolhe este curso por curiosidade e encantamento surgidos durante os anos de Ensino Básico: encantamento com a própria ciência Matemática e curiosidade por compreender e descobrir de onde vêm e como são estruturados os teoremas, as fórmulas, as propriedades, que são ensinados como se fossem "verdades incontestáveis" ou, nas palavras de Imenes (1987), "dogmas".

No Brasil, antes do Movimento da Matemática Moderna no final da década de 1960, o ensino, principalmente de geometria, baseava-se no modelo axiomático e dedutivo proposto em "Os Elementos", de Euclides. A partir dos anos 1970, com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna, ocorre um rompimento com o modelo de ensino axiomatizado, passando-se ao "abrandamento da exigência de se demonstrar os teoremas" (Imenes, 1987, p. 57). A partir de então, constata-se a renúncia tácita (talvez tática) de se ensinar matemática através de modelos dedutivos, tornando assuntos que estão encadeados em sequência lógico-dedutiva em conteúdos estanques, sem ligações e implicações.

Além disso, dado que a capacidade de argumentar e provar em Matemática é importante tanto para o desenvolvimento em Matemática quanto para a formação do cidadão crítico, pode-se supor que, em geral, esta habilidade não é desenvolvida pelos professores de Matemática em suas salas de aula, seja por comodismo, desmotivação ou ausência de alternativas didáticas, como especula Almeida (2007, p. 2). O professor, para manter-se numa zona de conforto, assume o papel de transmitir conhecimentos, apresentar ou “informar” (IMENES, p. 57) os resultados e, ao final, aplicar e corrigir uma série de exercícios sobre o tema abordado, como também destaca Almeida (2007); aos alunos, cabe acumular as “informações” prestadas pelos professores e realizar as tarefas aplicadas. Este modelo de ensino-aprendizagem causa a falsa impressão de que o aluno sabe matemática, não cumprindo, assim, com o papel de desenvolver no aluno o raciocínio lógico-dedutivo.

Conforme se depreende dos PCN (BRASIL, 1997, p.26), um dos objetivos do papel da Matemática no ensino fundamental é o desenvolvimento no educando da capacidade/habilidade de comprovação, argumentação e prova, com vistas à formação do cidadão crítico, além de propiciar que a Matemática seja encarada pelo estudante como um conhecimento que possibilita o desenvolvimento de seu raciocínio e de sua capacidade expressiva, principalmente. Para tanto, o ensino de Matemática deve apoiar-se em estratégias e abordagens que explorem o raciocínio lógico-dedutivo.

Assim, para que o ensino de Matemática cumpra com seus objetivos e desenvolva as competências elencadas nos PCN, é necessário que os professores estejam preparados para lidar com esta demanda em suas salas de aula, ou seja, que estejam dispostos a trabalhar no sentido de desenvolver em seus alunos o raciocínio lógico-dedutivo. Mas será que os professores estão preparados para isto? E o que seria viável para fomentar o desenvolvimento deste raciocínio? A este segundo questionamento podemos sugerir as ideias apresentadas e já discutidas em Imenes (1987) e também disponíveis em Almeida (2007).

Entretanto, para se desenvolver este raciocínio, é importante que o professor compreenda e aceite diversos níveis de argumentação que os alunos possam vir a apresentar para justificação de um dado resultado, compreender os elementos cognitivos coerentes com a faixa etária do educando e os conhecimentos adquiridos até a presente fase escolar.

A admissão de diferentes níveis de argumentação exige uma reconsideração dos critérios de julgamento acerca da “validade formal de provas”, rever o valor de uma argumentação/prova dada a um determinado resultado. Hanna (1990) cita a reavaliação realizada por matemáticos e professores de Matemática ocorrida nas décadas de 1970 e 1980 quanto ao papel das estruturas axiomáticas e das provas formais. Segundo a autora,

> “neste novo olhar, as provas passam a ter diferentes graus de validade formal, mantendo o mesmo grau de aceitação, permitindo com isso a reconsideração do que poderia ser prova ideal e de que se deveria ensinar nas escolas” (p. 8).

Ainda de acordo com Hanna (1990), o nível de aprendizagem do aluno e o nível de exigência quanto ao valor do argumento dado para se comprovar uma declaração matemática não devem necessariamente seguir os padrões de rigidez quanto à validade de proposições, defendida na Academia. Desse modo, percebe-se que muitos educadores matemáticos assumem uma postura de afastamento quanto à exigência ou dependência extrema de provas rigorosas em Matemática, dando ênfase na concepção de prova como argumento convincente.

Esta (re)avaliação está diretamente ligada ao ensino-aprendizagem da prova matemática. Provar um resultado matemático é validar a declaração feita, a partir de hipóteses verificadas e certificadas como verdadeiras. Ensinar por meio de uma prova consiste em mostrar ao educando a validade da declaração feita, exibindo as etapas do processo dedutivo, para assim desenvolver no educando o raciocínio lógico-dedutivo e com isto possibilitar a construção de habilidades e competências em Matemática.

Há de se concordar que o educando é vítima de um modelo de ensino que não o estimula a ser agente do processo de aprendizagem, mas sim um mero receptor de informações. Quantos devem ser os professores que aceitam como justificativa os raciocínios ingênuos desenvolvidos para comprovar um resultado matemático? Por outro lado, no curso de formação de professores (licenciatura), em geral as provas dos teoremas são apresentadas de forma pronta e elegante, sem deixar transparecer as tentativas e raciocínios necessários ao seu desenvolvimento. E isso, com certeza, não permite aos alunos o desenvolvimento de habilidades de raciocínio e argumentação.

Queremos com este trabalho entender como se dá a compreensão e a aceitação dos professores quanto às argumentações e provas apresentadas pelos alunos e também verificar se existe a vontade ou preocupação por parte dos docentes do Ensino Básico em elaborar atividades e aulas que explorem e fomentem a habilidade de argumentar e provar em Matemática.

Enquanto professor, preocupa-me também constatar que a grande maioria de nossos alunos não sabe justificar afirmações simples em Matemática, o que pode refletir negativamente na construção do pleno conhecimento da Matemática e até mesmo na construção de sua cidadania. A Escola não está formando o educando como cidadão crítico, que saiba quando concordar ou discordar de situações, expor argumentos e justificativas que validem seu ponto de vista. Penso que a Matemática é a disciplina escolar que possibilita este trabalho, de formação do raciocínio lógico-dedutivo, que possibilita a habilidade de argumentação e prova.

Assim sendo, esta pesquisa procura responder a duas questões:

- **O professor está inclinado ao trabalho pedagógico que desenvolva nos alunos do Ensino Fundamental a habilidade de argumentação e prova em Matemática?**

- **Como o professor avalia e valoriza os tipos de argumentação e prova apresentados pelos alunos do Ensino Fundamental?**

Para descrever toda a trajetória percorrida para responder as questões da pesquisa, esta dissertação foi organizada em seis capítulos.

Na Introdução, apresentamos o tema, as motivações que nos levaram a escolher este campo de pesquisa em Educação Matemática, as justificativas para o estudo em tela, além das questões de pesquisa surgidas de leituras e inquietações do autor deste relatório.

O capítulo dois é dedicado ao Referencial Teórico, e apresenta o levantamento bibliográfico realizado para fundamentar a pesquisa desenvolvida. Como nosso objeto de estudo é o professor e sua relação com o ensino-aprendizagem de prova matemática no Ensino Básico, nosso referencial teórico terá como base os trabalhos de Hanna (1990), Knuth (2002), Healy, Jahn e Pitta Coelho (2007), Jones (1997) e Boavida (2005). Para estudar a prova matemática, argumentação e justificação na sala de aula sob o olhar do aluno, os tipos e esquemas de prova percebidos em respostas apresentadas por estudantes, faremos referência aos trabalhos de Balacheff (1982, 1988), Hoyles (1997), Godino e Recio (1997), Sowder e Harel (1998), além de outras leituras complementares.

O capítulo três descreve o modelo metodológico empregado e os procedimentos utilizados para desenvolver a investigação, que se baseou na metodologia empregada no estudo de Hoyles (1997) e assim tentar responder às questões do estudo. Nesse capítulo, falamos dos instrumentos de coleta de dados (teste aplicado aos alunos e o formulário dos professores) e do caráter qualitativo de nossa pesquisa.

Os capítulos 4 e 5 são dedicados à descrição e análise dos dados coletados pelos instrumentos de pesquisa utilizados para a coleta de informações, a saber: o teste realizado com os alunos e o formulário aplicado aos professores. O teste realizado com os alunos foi montado com questões extraídas de Nasser e Tinoco (2003) e adaptado de Nasser (1989), com o objetivo de coletar diversos tipos de provas apresentados por alunos do Ensino Básico com respeito à prova matemática. A partir da análise das respostas a este teste, montamos um formulário, como sugerido em Hoyles (1997), de maneira que pudéssemos avaliar como o professor julga as respostas apresentadas pelos discentes. No capítulo cinco fazemos uma análise das respostas apresentadas ao formulário, para consolidar as respostas às perguntas da pesquisa. Também neste capítulo analisamos dados que foram coletados junto a estudantes de Graduação e fizemos uma breve discussão, comparando estes dados com aqueles referentes aos professores que participaram desta investigação.

O capítulo 6 apresenta as conclusões da pesquisa, à luz do referencial teórico e ainda as contribuições para o campo e os desdobramentos da investigação.

2. Referencial Teórico

Os PCN (BRASIL, 1997) ensinam-nos que o currículo de Matemática do Ensino Básico, além de contemplar a aprendizagem significativa dos conteúdos, observando a utilidade da Matemática como conhecimento para a resolução de problemas, deve proporcionar atividades que possibilitem aos educandos o contato com o exercício da construção de argumentos lógicos para provar e demonstrar a validade de afirmações matemáticas, ou mesmo refutá-los. Por esta razão, defendem os PCN que é um dos objetivos do ensino-aprendizagem da Matemática possibilitar ao aluno:

> comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas. (p. 37)

Durante o levantamento bibliográfico realizado, refleti sobre as questões relativas aos saberes docentes que devem estar presentes em um processo didático estimulador do raciocínio lógico-dedutivo, especificamente quanto à argumentação e justificação em provas matemáticas. As pesquisas realizadas por Hanna (1990, 1995), Knuth (2002), Healy, Jahn e Pitta Coelho (2007) e Jones (1997) nos ensinam que, ao se debruçar sobre a questão do ensino-aprendizagem de prova matemática, o pesquisador deve voltar o olhar para o trabalho didático-pedagógico do professor em relação à prova matemática, além de se debruçar sobre o estudo da formação acadêmica do professor, levantando informações que possibilitem obter uma visão deste processo formador.

O trabalho de Healy et al. (2007) traz um panorama teórico citando pesquisas realizadas no mundo, revelando as concepções de alunos sobre a prova, como fazem, por exemplo, Sowder e Harel (1998) e Balacheff (1988).

Nosso levantamento também encontrou pesquisas feitas ao redor do mundo, onde o objetivo em comum foi o de mapear as habilidades de prova dos alunos (CSÍKOS, 1999; MIYAKAWA, 2002; FURINGUETTI e PAOLA, 1997). De modo geral, estas pesquisas se apoiaram nos esquemas de prova de Sowder e Harel (1998) ou nos tipos de prova postulados por Balacheff (1988).

Csíkos (1999) nos relata pesquisa na Hungria com 2572 estudantes, entre 11 e 17 anos de idade, do 5º, 7º, 9º e 11º anos escolares, que objetivou constatar uma possível ligação entre “habilidade de prova (usando a classificação hierárquica de Sowder e Harel), realizações matemáticas e desempenho escolar” (pp. 234-235), concluindo que a categorização de Sowder e Harel, com base em testes estatísticos, é uma medida efetiva para se mensurar a habilidade de prova dos alunos, além de mostrar que de fato existe uma relação entre o bom desempenho escolar em Matemática e a habilidade de prova dos alunos.

Miyakawa (2002) narra seu estudo de caso sobre a prova da soma de dois números pares, realizado em Grenoble, com 37 alunos do 9º ano escolar, com idades até 14 anos. O autor conseguiu identificar através dos ensinamentos de Sowder e Harel (1998) e Balacheff (1988) as concepções de prova matemática destes alunos e correlacioná-las com o conhecimento matemático deles, pois o autor verifica que “a dificuldade de construção da prova matemática não é devida apenas à competência algébrica ou à concepção sobre prova, mas também ao conhecimento matemático” (p. 353).

Já Furinghetti e Paola (1997) registram em seu artigo uma ideia semelhante à contida em Miyakawa (2002), ao chamar de *efeito de sombra algébrica ou aritmética* a relação entre os conceitos em Matemática com as concepções de prova dos alunos, pois o autor constata que as dificuldades com a álgebra e com a aritmética produzem uma blindagem, impedindo a construção de argumentos e justificações pelos alunos. O estudo relata, como se espera em contextos educacionais em que não há um trabalho didático-pedagógico voltado à justificação e argumentação, uma preponderância dos esquemas *autoritário, empírico, ritual* e *simbólico* (Sowder e Harel, 1998) nas respostas obtidas. Neste estudo, realizado com alunos italianos com idade entre 14 e 17 anos pertencentes a quatro tipos diferentes de turmas, o levantamento dos dados levou em consideração a linguagem usada nas respostas à questão da pesquisa – que consistia em verificar a validade da proposição que diz ser divisível por 6 o produto de três números consecutivos – além de avaliar os programas curriculares das turmas. O texto de Furinghetti e Paola (1997, pp. 274-275) preocupa-se em descrever os três professores envolvidos na pesquisa, ressaltando que os alunos de turmas com currículos mais "fortes" e com professores mais experientes demonstraram melhor desempenho nas concepções e nas respostas à pergunta apresentada.

Em Boavida (2005), vemos que a preocupação com o desenvolvimento da habilidade de argumentação e justificação em Matemática, importante para o educando aprender a raciocinar lógica e dedutivamente, está presente em vários países, como em Portugal e nos Estados Unidos. Há em seu trabalho uma citação extraída de "Standard's 2000 – Principles and Standards for School Mathematics", do NCTM, que fala da importância em:

> reconhecer o raciocínio e a prova como aspectos fundamentais da Matemática; formular e investigar conjecturas matemáticas; desenvolver e avaliar argumentos matemáticos e provas; e selecionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de prova. (NCTM, 2000, p. 56, apud BOAVIDA, 2005, p. 1)

Nesse trabalho, a pesquisadora desenvolveu um estudo colaborativo que contou com dois professores portugueses, que produziram atividades matemáticas envolvendo a argumentação e prova em Matemática. Ela defende o encorajamento dos alunos, levando-os a se defrontarem com este tipo de atividade, apesar da reconhecida dificuldade e complexidade desta postura didático-pedagógica, mas destaca não ser impossível sua realização, se forem valorizadas as teias de relações, que se estabelecem “entre raciocínio e discurso, entre cognição e afetos, entre propósitos e vontades, entre papeis e funções” (p. 28), permitindo, assim, a formação, em sala de aula, daquilo que a autora chama de cultura de argumentação.

Sendo assim, para que o professor compreenda a importância do trabalho pedagógico voltado ao ensino-aprendizagem da prova matemática, através de atividades e posturas em sala de aula que valorizem a argumentação e a prova, é necessário, à luz do que nos coloca Healy et al. (2007, p. 2), que seja proporcionado ao professor o contato com situações educacionais que explorem as estas habilidades, com vistas ao ensino-aprendizagem da prova matemática. Dessa forma, Healy et al. (2007) narram a pesquisa realizada na PUC-SP, com professores do Ensino Básico, cujo objetivo consistia em constituir um quadro com as concepções sobre argumentação e prova que os alunos de São Paulo possuíam, além de elaborar problemas e questões matemáticas que pudessem envolver os alunos na construção de argumentos e justificativas, além da formulação e refutação de conjecturas.

Holyes (1997) em sua pesquisa também procura identificar, através da aplicação de formulários contendo questões com prova matemática, argumentação a existência de concepções de prova de alunos britânicos. Em seu levantamento, que se deu em duas etapas, a pesquisadora indagava dos participantes suas concepções sobre “prova matemática”, buscando verificar se as competências elencadas no currículo britânico com respeito à prova se faziam presentes na formação acadêmica dos alunos, além de constatar, junto aos professores, suas próprias concepções de prova matemática e como se dá o seu processo de ensino-aprendizagem.

Healy et al. (2007) citam os relatos dos professores envolvidos na sua experiência, mostrando prática docente pouco frequente em se trabalhar com argumentações, justificações e provas nas aulas em decorrência da sua formação docente, dado que houve uma “unanimidade entre os professores: quando do contato deles com provas, estas eram demonstrações formais” (p. 9). Estas informações trazidas por esse trabalho nos revelam deficiências que são notadas na formação docente. É importante que haja um olhar mais atencioso para a formação do professor, investindo tanto em sua formação inicial quanto na continuada, de modo a eliminar as lacunas apresentadas nos saberes dos alunos que decorrem, em muitas vezes, das lacunas apresentadas na formação do professor. A título de exemplificação desta afirmação, podemos sugerir a leitura de Marques (2008), que estudou a relação entre as dificuldades de alunos do ensino fundamental I em operações e representações com números decimais e frações com a de professores do Rio de Janeiro e Tocantins, deste nível de ensino, que participaram do programa Pró-Letramento do MEC, durante o ano de 2007.

Em Pietropaolo (2005), há uma narrativa a respeito da formação do professor, necessária para se ensinar argumentação e raciocínio dedutivo. Não podemos, quando falamos de formação docente, em especial em nossa área de Ensino de Matemática, deixar de nos apoiar nos ensinamentos de Shulman (1986). Em seu trabalho, resultado de um processo de avaliação com professores norte-americanos, comparados com testes anteriores realizados, este pesquisador propõe que, ao se estabelecer uma perspectiva sobre o conhecimento do professor, é necessário apoiar-se em três vertentes: o conhecimento do conteúdo a ser ensinado, o conhecimento da didática do conteúdo a ser ensinado e conhecimento sobre o currículo adotado. Portanto, em relação ao ensino de prova matemática na sala de aula da Escola Básica, é imprescindível que o professor domine o conhecimento pedagógico deste assunto, fato que muitas vezes não se faz presente em nossas salas de aula, como já verificaram Healy et al. (2007), Almeida (2007) e Imenes (1987).

Ainda sobre este aspecto do conhecimento didático do assunto a ser ensinado, Shulman (1986) destaca a necessidade de o professor saber o assunto a ser ensinado e como ensiná-lo. Para tanto devemos voltar nosso olhar para a formação acadêmica do professor. Podemos nos atentar para os apontamentos feitos por Hanna (1990) e Knuth (2002). Na leitura de Hanna (1990, p. 7), identifica-se que “nos programas das universidades (...) a abordagem axiomática tornou-se denominador comum da maioria dos cursos de Matemática”. De fato, se olharmos para os cursos de Licenciatura, a totalidade das disciplinas ditas “matemáticas”, como Cálculo, Análise e Álgebra, por exemplo, apresentam em suas estruturas a demonstração de teoremas e proposições como base, seguindo o esquema “Definição-Teorema-Provas” (THURSTONE, 1995, apud CSÍKOS, 1999, p. 234), que não vislumbra uma abordagem metodológica baseada na inferência indutiva (método intuitivo).

Contudo, a forma de se demonstrar na academia, através do rigoroso método dedutivo, não estabelece diálogo com a Escola Básica, lugar onde irá atuar o professor. Desse modo, Knuth (2002) afirma que, ao se avaliar as concepções de prova que os professores apresentam, deve-se levar em conta o currículo e o nível de ensino do curso. Em seu trabalho, o autor relata estudo realizado com 17 professores atuantes no ensino médio, nos Estados Unidos. Na visão desses professores, a reforma curricular daquele país, que previa o ensino-aprendizagem de prova matemática para todos os alunos da rede de ensino, não seria uma tarefa simples de ser implementada. Os resultados de sua intervenção junto a estes indivíduos sugerem, ainda, que a visão do tema “prova matemática” é a de um assunto/matéria da grade curricular a ser ensinado, e não como uma forma de comunicar e estudar Matemática.

Na grande maioria das vezes, antes de ingressar na universidade, o licenciando não vivencia na sala de aula atividades que o ponham em contato com o exercício da prova matemática, como já nos afirmaram Almeida (2007) e Nasser e Tinoco (2001). Esta realidade, no entanto, não é inerente ao Brasil somente. Jones (1997) nos revela que, já em 1995, a Sociedade Matemática de Londres constatava a baixa compreensão dos estudantes recém-ingressantes na Academia sobre a Matemática como uma disciplina em que a “exposição lógica e a prova possuem papeis essenciais” (p. 16). Verifica-se que a acessibilidade dos estudantes à prova matemática é restrita, pois os currículos de Matemática não provêm o ensino-aprendizagem de prova matemática (JONES, 1997, p. 17). No Brasil, os PCN (BRASIL, 1997) falam da importância da argumentação e prova matemática para uma compreensão significativa e construção da cidadania, mas não sugerem meios e alternativas para que os professores provejam esta metodologia. Percebe-se, também, ausência de parâmetros que possibilitem, dentro da autonomia docente de formular currículos e planejamentos, uma sistematização e organização dos procedimentos para a realização desta prática em sala de aula.

Antes de encerrar esta fundamentação teórica, é importante falarmos das questões relativas ao que se entende por prova matemática ou como se define prova matemática, destacando a questão léxica da palavra “prova”. Em sua tese, Pietropaolo (2005) apresenta uma descrição da literatura dedicada a esta discussão. Godino e Recio (1997) mostram que o significado de prova pode apresentar variadas facetas. Esta multiplicidade surge, basicamente, da demanda por verificação da validade ou da comprovação da veracidade de um dado fato, e aos diversos contextos institucionais.

Ainda de acordo com Godino e Recio (1997, p. 317), em termos de sala de aula, a prova ou demonstração dos teoremas é encarada pelos professores e alunos necessariamente como verdadeiros, tanto nos currículos adotados pela Escola Básica e pela Universidade, como também os livros-textos utilizados. Cabe, então, o questionamento, por parte do aluno e também do professor sobre a necessidade de se provar um resultado que já é conhecido e apresentado como verdadeiro, perdendo a prova (ou demonstração) matemática sua força e significado, dado que os argumentos que são apresentados na sala de aula da Escola Básica assentam-se num modelo de prova informal, baseado muitas vezes em critérios externos de autoridade. Nesse artigo, os autores também frisam um entendimento que deve ter o professor de Matemática ao se propor uma atividade didática sobre argumentação, justificação e prova matemática, pois existem diferenças sobre o papel da prova no contexto da Escola Básica e da Academia, dado que:

> matemáticos devem desenvolver provas para convencer árbitros de periódicos, revistas; estudantes de matemática devem convencer a si próprios, e convencer o professor da necessária e universal verdade dos teoremas.(p. 318).

Dessa forma, apresentamos as principais referências que sustentam esta pesquisa. No desenvolvimento dos capítulos seguintes, essas ideias serão retomadas, de maneira a relacioná-las com a nossa pesquisa.

2.1 Os tipos e esquemas de prova

Nossa pesquisa, em relação à atividade de argumentação e prova aplicada aos estudantes dos anos finais do ensino fundamental, baseia-se nos esquemas de prova sugeridos por Sowder e Harel (1998) e nos tipos de prova postulados por Balacheff (1988).

O trabalho de Sowder e Harel (1998) descreve os tipos de prova que alunos apresentaram num teste realizado nos Estados Unidos. Os tipos de prova foram assim categorizados: *esquema de prova baseado em elementos externos, esquema de prova empírico* e *esquema de prova analítico*.

O esquema de prova *baseado em elementos externos* entende a prova como sendo por "tanto o que convence o estudante e aquilo que poderia persuadir a outros" (p. 671). Já o esquema de prova *empírico* é descrito como aquele em que "justificações são feitas exclusivamente como base em exemplos" (p. 672). Quanto ao esquema de prova *analítico*, os pesquisadores destacam que, se houvesse uma escala de nível de rigor de justificações, os professores de matemática considerariam este esquema como o mais elevado tipo de prova (p. 673).

Devido a especificidades apresentadas nas respostas dadas pelos alunos participantes da pesquisa, os autores propuseram subcategorias, conforme o quadro seguinte.

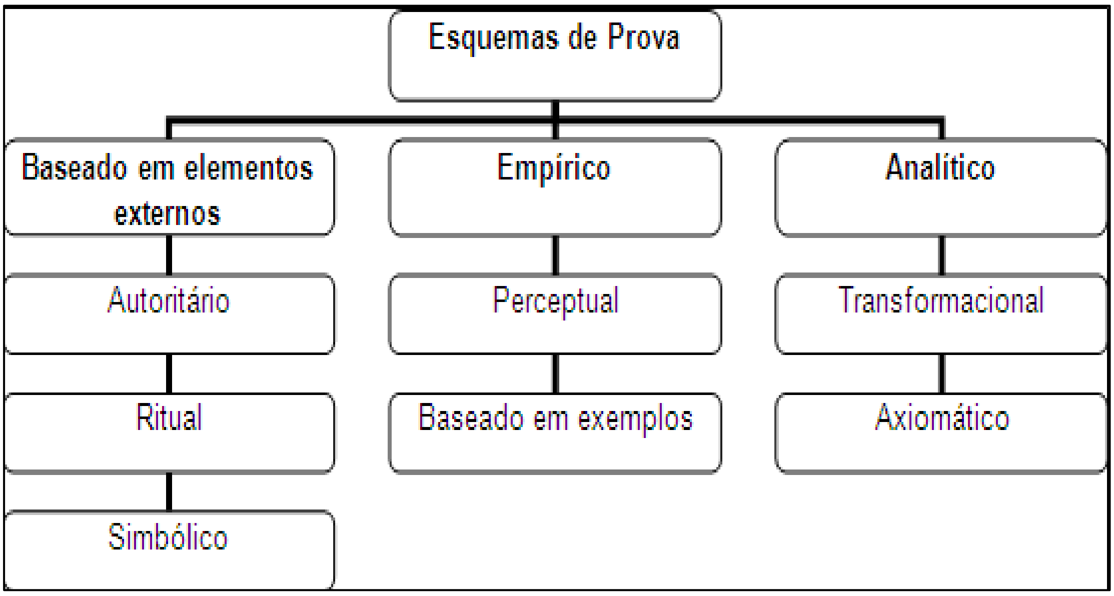


Figura 1: esquemas de prova propostos no trabalho de Sowder e Harel (1998).

É importante destacar que neste trabalho, Sowder e Harel (1998) não estabeleceram uma transição entre os esquemas, mostrando uma evolução na maneira de pensar e de justificar, partindo de esquemas mais pragmáticos e ingênuos e chegando a outros mais conceituais e estruturados. O enfoque se volta ao que estes autores chamam de "princípio da necessidade", segundo o qual

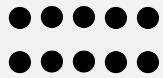
> "Para que os estudantes possam aprender, eles devem se dar conta da necessidade de aprender o que vai ser ensinado para eles (...) o termo necessidade aqui é utilizado no sentido de 'necessidade intelectual' (...)" (p. 672)

Na tabela a seguir, destacamos cada uma destas categorias e subcategorias, elencando seu significado e alguns exemplos de respostas de alunos a questões que versam sobre argumentação e prova. Alguns dos exemplos citados foram consultados do trabalho de Hoyles (1997).

Tabela 1: esquemas de prova e suas descrições e exemplos

ESQUEMA DE PROVA **(SOWDER E HAREL, 1998)**	**DESCRIÇÃO**	**EXEMPLOS**
Autoritário	Baseia-se em argumentos expressos em sala de aula ou contido em livros-textos, na fala do professor ou mesmo na fala de um colega considerado "mais inteligente da classe".	Procedimentos algébricos, como o cálculo de produtos notáveis e a fatoração e polinômios são tomados como "regras" ensinadas de professor e contidas no livro-texto, sem ligação entre si, livres de outras compreensões. O aluno responde que uma afirmativa é verdadeira porque "o professor falou" ou "é um teorema do livro".
Ritual	Este esquema é percebido quando um estudante avalia como correto um argumento considerando somente a sua forma, ao invés de observar a validade e o correto raciocínio envolvido.	Na pesquisa realizada por Hoyles (1997), verificou-se que muitos alunos optam por argumentos que apresentavam letras (apelo algébrico), por acreditarem que seriam os argumentos melhor avaliados pelos seus professores.
Simbólico	Verifica-se este esquema quando o aluno ganha contato com a linguagem simbólica. Os autores falam que este esquema possui um lado bom e um lado ruim: o lado bom deste esquema é o "poder do símbolo", para representar quantidades e resolver equações, por exemplo, enquanto que o lado ruim é verificado quando os estudantes conferem aos símbolos uma personalidade independente de significados e de relações com as quantidades que representam.	Escrita simbólica: "tradução" da linguagem comum para a linguagem matemática. Ex.: a soma de dois números consecutivos é traduzida por: x + x + 1

Tabela 1.1: esquemas de prova e suas descrições e exemplos (continuação)

ESQUEMA DE PROVA **(SOWDER E HAREL, 1998)**	**DESCRIÇÃO**	**EXEMPLOS**
Perceptual	Este esquema de prova é bastante verificado em situações geométricas, especificamente os desenhos.	No relato de Hoyles (1997), uma aluna mostra que a soma de dois pares é um par, usando um apelo gráfico, icônico. Ex.: 4 + 6  4 = 2 pares 6 = 3 pares  4 + 6 = 10 = 5 pares
Simbólico	Verifica-se este esquema quando o aluno ganha contato com a linguagem simbólica. Os autores falam que este esquema possui um lado bom e um lado ruim: o lado bom deste esquema é o "poder do símbolo", para representar quantidades e resolver equações, por exemplo, enquanto que o lado ruim é verificado quando os estudantes conferem aos símbolos uma personalidade independente de significados e de relações com as quantidades que representam.	Escrita simbólica: "tradução" da linguagem comum para a linguagem matemática. Ex.: a soma de dois números consecutivos é traduzida por: x + x + 1
Baseado em Exemplos	Caracteriza-se pelo autoconvencimento e convencimento dos demais através da apresentação de exemplos que atendem à conjectura proposta.	Em problemas aritméticos, em Teoria de Números, em problemas como "a soma de dois números pares é par" ou "o produto de três números consecutivos é múltiplo de 6", é comum os alunos apresentarem uma série de exemplos para justificar as conjecturas.
Transformacional	Neste esquema, uma característica marcante é o fato de a argumentação dos alunos se estruturar sobre os aspectos gerais do problema posto e envolve um raciocínio construído de modo a resolver o problema em questão.	Um exemplo, extraído de Sowder e Harel (1998), diz respeito ao enunciado que questiona um forma de se calcular o quadrado de números inteiros de dois algarismos terminados em 5. Uma argumentação do tipo transformacional seria, por exemplo, o aluno escrever o número $(n5)^2$ como $(10n+5)^2$ e daí resolver o produto indicado, utilizando a técnica dos produtos notáveis.
Axiomático	Constitui o processo de prova formal em Matemática, ou seja, o processo lógico-dedutivo, partindo de premissas, definições e termos indefinidos, chegando a resultados e propriedades (teoremas e proposições).	O modelo geométrico euclidiano é um exemplo do modelo axiomático de prova, pois neste contexto parte-se de premissas (axiomas), como "dois pontos definem uma única reta", levando a obter resultados dentro deste sistema, como "a menor distância entre um ponto e uma reta é obtida pelo segmento de reta perpendicular do ponto à reta".

Balacheff (1988) desenvolveu pesquisa com estudantes da França, onde identificou dois tipos básicos de prova: o tipo *pragmático* e o tipo *conceitual*. Para Balacheff (1988, p. 217), prova pragmática é aquela que recorre a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar um determinado resultado, chamados pelo autor de “recursos de ação”, enquanto que a prova conceitual não recorre a tais recursos no momento de formular as propriedades envolvidas e as possíveis relações entre elas. Ainda de acordo com Pietropaolo (2005, p. 94), as estruturas cognitivas, os conhecimentos e a linguagem utilizados estabelecem as diferenças entre estes tipos de prova.

A prova conceitual, traduzida em Gravina (2001) por *prova intelectual*, remete-nos às ideias de Jean Piaget, se estabelecermos os estágios de evolução cognitiva dos seres humanos (estágios pré-operatório, operatório concreto e operatório formal) como um paradigma para o movimento de evolução da prova pragmática à prova conceitual, pois neste tipo de prova reside um nível de experiência mental mais avançado, onde o estudante consegue reconhecer padrões, estabelecer generalizações, analisar propriedades do objeto em questão e utilizar a linguagem escrita para apresentar e construir seus argumentos.

Para delinear melhor sua pesquisa, Balacheff (1988) destaca quatro modalidades de prova: *empirismo natural* (naive empiricism), *experimento crucial* (crucial experiment), *exemplo genérico* (generic example), e *experimento mental* (thought experiment). Estes quatro desdobramentos se originam dos movimentos existentes entre os tipos de prova: o empirismo natural e o experimento crucial repousam na seara da prova pragmática, e o experimento mental reside no campo da prova conceitual. Já o exemplo genérico transita entre os dois tipos, dado que o exemplo genérico “consiste na explicitação das razões que validam uma propriedade que encerra uma generalidade mesmo, fazendo uso de um representante particular” (GRAVINA, 2001, p. 67).

Para melhor compreendermos os tipos de prova, vamos considerar a proposição “A soma de dois números pares resulta um número par” e identificar possíveis exemplos de raciocínios em cada um dos tipos de prova acima elencados, conforme a tabela a seguir:

Tabela 2: os tipos de prova de Balacheff e suas descrições e exemplos

TIPO DE PROVA (BALACHEFF, 1988)	DESCRIÇÃO	EXEMPLOS
Empirismo Natural (naive empiricism)	Define-se empirismo natural o exercício de argumentação em que o aluno tira suas conclusões a partir de um pequeno número de “testes” e “experimentos” que realiza.	Os alunos verificam a validade da afirmativa testando vários exemplos: 12 + 26 = 38; 16 + 20 = 36
Experimento Crucial (crucial experiment)	Neste tipo de prova, verifica-se a realização de um experimento bastante particular e forte, ou seja, consiste em generalizar o problema e resolvê-lo mediante àquele experimento particular.	Os alunos julgam que, mostrando que a proposição vale com números muito grandes, valerá para todos os demais exemplos possíveis. Ex: 824 + 632 = 1456; 1890 + 2020 = 3910
Exemplo Genérico (generic example)	O exemplo genérico, como o termo sugere, é o tipo de prova em que o aluno elege um exemplo como representante da classe de todos os exemplos possíveis que atendem à proposição. Da manipulação deste exemplo tomado, são concluídas propriedades e estruturas.	Ex: 24 + 36 = 2(12 + 18) = 2 x 30 = 60; 128 + 26 = 2 (64 + 13) = 2 x 77 = 154.
Experimento Mental (thought experiment)	Segundo Balacheff (1998, p. 219), o experimento mental “evoca a ação, internalizando-a e desligando-se de uma representação particular”.	Se p e q são números pares, então existem números naturais m e n tais que p = 2m e q = 2n. Então: p + q = 2m + 2n = 2 (m + n), com p e q números naturais. Logo, p + q é par

É importante destacarmos que, apesar de alguns esquemas de prova de Sowder e Harel (1998) e tipos de prova de Balacheff (1988) se equivalerem pelas suas próprias descrições, percebemos no trabalho de Sowder e Harel uma preocupação em apenas destacar a variedade de provas que os alunos investigados em sua pesquisa apresentaram, sem travar uma discussão em nível de conhecimentos prévios ou estrutura linguística como o faz Balacheff (1988).

A fim de darmos sequência a esta discussão, faz-se importante destacarmos os significados de três palavras que percorrem todo o texto desta dissertação, e que muitas vezes podem indicar uma sinonímia incorreta.

Veremos que argumentação consiste de uma explicação de um fato, sem que necessariamente prove ou “verifique” a validade desse fato, enquanto que prova e demonstração, que serão tomadas neste texto como sinônimos, resultam da exposição/apresentação de argumentos e de verdades previamente verificadas, de modo a se obter a validação de um teorema ou proposição.

2.2 Os significados de Argumentação, Prova e Demonstração

Para sustentarmos melhor nossas análises e conclusões, devemos ter claros os significados dos termos que serão utilizados no decorrer desta pesquisa: argumentação, prova e demonstração.

Pietropaolo (2005) relata que definir o termo prova não é uma tarefa tão fácil quanto se possa imaginar. Além de divergências colocadas pelos matemáticos especializados nas várias áreas, como matemáticos puros, aplicados, logicistas e formais, a própria palavra “prova” traz um problema do ponto de vista etimológico. Como já citado, Godino e Recio (1997) descrevem as várias concepções que a palavra “prova” apresenta, tanto no campo profissional dos matemáticos, da sala de aula, e também nas ciências experimentais e na vida cotidiana.

Se formos ao dicionário Aurélio (FERREIRA, 2000, p. 564), iremos encontrar pelo menos seis significados para o verbete:

> “prova sf: 1. Aquilo que atesta a veracidade ou a autenticidade de algo. 2. Ato que atesta uma intenção ou sentimento; testemunho. 3. Processo que permite verificar a exatidão dum cálculo. 4. Ato de provar (5 e 6). 5. Concurso, exame ou competição; ou cada uma das partes deles. 6. Art. Gráf. Impressão tirada de texto já composto, para revisão ou correção”

Consultando o mesmo dicionário, vamos encontrar os seguintes significados das palavras “argumentação” e “demonstração”:

> “argumentação *sf*. 1. Ato ou efeito de argumentar. 2. Conjunto de argumentos.” (FERREIRA, 2000, p. 59).
>
> “argumento *sm*. 1. Raciocínio pelo qual se tira uma consequência ou dedução. 2. V. *enredo* (3). 3. *Mat.* Variável independente (q. v.). 4. *Geom. Anal.* Ângulo polar” (FERREIRA, 2000, p. 59).
>
> “demonstração *sf.* 1. Ato ou efeito de demonstrar. 2. Tudo que serve para demonstrar; prova. 3. Sinal.” (FERREIRA, 2000, p. 208).

Pelas definições apresentadas no dicionário, percebemos que estas três palavras estão num mesmo campo etimológico, funcionando quase que como sinônimos. Contudo, no campo da pesquisa em Educação Matemática constatamos que alguns autores estabelecem distinções quanto a estas palavras, referindo-se a conceitos diferenciados para cada uma delas.

Gouvêa (1998, pp. 27-28) cita Balacheff (1982) para estabelecer diferenças entre os termos “explicação”, “prova” e “demonstração”. Estas diferenciações emergem de pesquisa realizada com alunos do *Sixième* (com idade entre 11 e 12 anos) e do *Troisième* (com idade entre 14 e 15 anos). Desta leitura, percebemos que:

- **<u>Explicação</u>** consiste de uma argumentação em que o interlocutor deseja exprimir a outrem a validade de um resultado matemático.

- Quando a explicação apresentada é reconhecida pela comunidade, esta é elevada ao status de **Prova.**

- Já **Demonstração** é concebida como uma sequência de enunciados previamente conhecidos e aceitos pela comunidade como verdadeiros. Nesta sequência de enunciados, há um encadeamento lógico, segundo uma regra dedutiva. Estes enunciados são os axiomas, os teoremas, propriedades e proposições previamente "demonstradas".

Ainda de Pietropaolo (2005), podemos extrair informações que nos permitem definir estes termos. Falemos um pouco sobre "argumentação". Podemos entendê-la como um conjunto de frases que o interlocutor utiliza para justificar seu raciocínio. Num processo de prova matemática, os argumentos se entrelaçam numa sequência dedutiva que comprova, ou não, a veracidade de uma assertiva.

O processo argumentativo constitui a justificação de uma afirmação. Não necessariamente este processo "prova" a validade de um resultado, mas apenas justifica uma resposta apresentada ao problema proposto, defende uma tomada de posição. Um exemplo disto consta de Nasser e Tinoco (2003, p. 84), num problema proposto sobre o pagamento de uma corrida de táxi. O enunciado é o seguinte: "João e Pedro, ao saírem de uma festa, tomaram um mesmo táxi. Pedro saltou no meio do caminho e o valor total da corrida foi R$ 12,00. Quanto deve pagar cada um deles?". As pesquisadoras citam argumentações, isto é, as justificativas apresentadas pelos alunos para as suas respostas (pp. 84-85), mas sem "provar" ou "demonstrar" o resultado do problema, que neste caso não é único.

Hanna (1990, p. 10) também fala sobre o ensino de prova na Escola Básica e destaca a importância das demonstrações que explicam a validade de um resultado (provas que ensinam) e daquelas que provam efetivamente o resultado (provas que provam), mas sem explicar de forma clara aos alunos o porquê da validade do resultado em discussão. Para exemplificar, a autora apresenta duas demonstrações para a soma dos n primeiros números naturais: uma que segue os passos do método por Indução Finita (provas que provam) e outro usando o raciocínio de Gauss (provas que ensinam).

Retomando o texto de Pietropaolo (2005, p. 49), iremos, à sua verossimilhança, adotar os termos “prova” e “demonstração” como palavras sinônimas, uma vez que a prova recebe este status quando a argumentação para um dado enunciado matemático é aceita e convence a comunidade matemática de sua validade. Em relação ao termo “argumentação”, julgamos prudente pensar nele do modo como explicitaram Nasser e Tinoco (2003), como um processo de justificação, de exposição de argumentos ou explicações, sem necessariamente provar a validade da afirmação matemática.

2.3 As funções da Prova Matemática

Na literatura, há uma série de trabalhos relacionados ao tema desta dissertação que destacam a questão da função da prova matemática, abordando seu aspecto histórico, remontando aos gregos, para chegar aos pensadores atuais. No entanto, iremos abordar estas funções sob o ângulo de educadores matemáticos.

Na leitura de Nasser e Tinoco (2003, pp. 3-4), encontramos contribuições acerca do que podemos entender ou enunciar como uma função da prova. É importante para o professor enxergar a existência destas funções, pois a partir delas o fazer pedagógico assentado na prova matemática passa a apresentar maior significado para o professor e também para o aluno. De acordo com este texto, podemos enumerar as seguintes funções:

- Validação de um resultado;

- Explicação ou elucidação do resultado;
- Sistematização do processo de raciocínio dedutivo;
- Descoberta e comunicação de conhecimentos matemáticos.

Em seu artigo, Hanna (1995) disserta sobre “a verdadeira função da prova na sala de aula”, destacando que para fazê-lo, é preciso olhar inicialmente para a concepção que os matemáticos possuem com respeito à função da prova. Segundo a autora, está claro que para os matemáticos a função da prova consiste da *verificação* e *justificação*, destacando que “matemáticos não estão inclinados a aceitar novos resultados sem verem sua prova” (p. 47).

É importante nesta abordagem da prova matemática que o professor estabeleça com seus alunos a necessidade de verificar se uma conjectura é válida ou não, pois percebemos muitas vezes em nossas aulas que os alunos criam, formulam e conjecturam regras, que nem sempre se sustentam. Neste sentido, Hanna e Jahnke (1996, apud Nasser e Tinoco, 2003) relatam estudos onde confirmam que “é crucial para o professor tomar parte ativa em ajudar os estudantes a compreender por que uma prova é necessária, e quando é válida” (p. 3). Contudo, para Hanna (1995), em termos de ensino-aprendizagem de Matemática, a função principal da prova consiste em *explicar* o resultado matemático, defendendo que o trabalho pedagógico com a prova matemática não pode ser meramente realizado como um ritual, uma burocracia pedagógica, mas sim como uma atividade de aprendizagem significativa, desafiando alunos que, muitas vezes, sabem que um resultado é verdadeiro, a indagar <u>por que</u> este resultado é verdadeiro (p. 47). Seguindo esta linha, o artigo de Hanna (1995) rememora escritos anteriores em que a autora define as provas que provam e as provas que explicam, destacando que “uma prova que prova mostra que um teorema é verdadeiro. Uma prova que explica também faz isso, mas a evidência que apresenta deriva do fenômeno em si” (p. 48), mostrando porque o resultado é verdadeiro.

A questão da elucidação e da explicação é importante para a compreensão de uma prova, uma vez que nem toda prova explica ou se traduz em argumentos compreensíveis, descrevendo por que um determinado resultado é verdadeiro. Um método de demonstração muito utilizado em Matemática é o da “prova por absurdo” ou “método da contrapositiva”, que consiste em provar uma afirmação matemática da forma se... então negando-se a tese para se chegar a uma contradição ou absurdo. Nas palavras de Nasser e Tinoco (2003, p. 3) estas provas são “perfeitamente aceitas, mas não dão nenhum indício do motivo pelo qual a afirmativa vale”. Em De Villiers (1991, apud NASSER e TINOCO, 2003), verifica-se que “a função de uma prova na presença de uma convicção *a priori* é a de explicação, não a de verificação” (p. 21).

Por fim, relevantes funções da prova passam ao largo da sala de aula, mas também são fundamentais para estruturar o conhecimento matemático. Neste sentido, citando Bell (1976, apud NASSER e TINOCO, 2003) afirmam que sistematizar, em termos de função da prova, consiste em:

> preparar para o domínio do processo dedutivo. Neste sentido, acompanhando as demonstrações apresentadas pelo professor, o aluno vai tomando conhecimento das estruturas da Matemática, para no futuro dominar o processo dedutivo e, até em alguns casos, ser capaz de fazer demonstrações por si mesmo. (pp. 3-4)

Através da prova matemática, como comenta Hanna (1995, p. 47), é possível promover novas descobertas, uma vez que pode fomentar a “construção novas definições e também de úteis algoritmos”, além de promover uma contribuição para a *sistematização* e *comunicação* de resultados e da formalização do conhecimento matemático.

3. Desenho metodológico e procedimentos da pesquisa

Esta pesquisa adotou uma metodologia de caráter qualitativo, através da análise de dados coletados a partir de formulários respondidos por professores. Neste sentido, esta investigação se inspira nos trabalhos desenvolvidos por Hoyles (1997) e também pelo Projeto de Pesquisa AprovaME (Argumentação e Prova na Matemática Escolar), do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), com professores de Ensino Básico. Era objetivo desse projeto a exploração de situações didáticas que possibilitassem construir a habilidade de argumentação e prova matemática com os alunos. Alguns dos numerosos trabalhos desenvolvidos no âmbito do Projeto AprovaME são: Grinkraut (2009), Gouvêa (1998), Almeida (2007) e Ferreira (2008).

Como dito no parágrafo anterior, em nossa pesquisa foi realizado um estudo qualitativo a partir do levantamento de dados apresentados em formulários. Estes formulários foram constituídos de questões que visavam a indicar se o professor empreende um trabalho pedagógico – ou se existe preocupação em realizá-lo – que esteja voltado ao desenvolvimento e à formação nos alunos da habilidade de argumentação e prova, e como se processa sua avaliação e aceitação com relação às argumentações e provas apresentadas por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Além disso, foram propostas situações com argumentações e provas de alunos a proposições matemáticas, onde o professor pudesse emitir uma avaliação a respeito da resposta dada. Esta metodologia de trabalho – construção do formulário com respostas dadas por alunos – foi inspirada na pesquisa realizada por Hoyles (1997). Em seu estudo, a pesquisadora britânica procurou investigar na formação escolar dos alunos do Reino Unido a presença dos elementos constantes do Currículo, especificamente em relação ao ensino-aprendizagem de prova matemática.

Além das questões sobre argumentação e prova, este formulário foi preparado de modo a apurar a formação acadêmica do docente e suas concepções sobre currículo e o trabalho pedagógico pautado também no desenvolvimento da habilidade de argumentação e prova (ver Anexo 2).

A aplicação dos formulários se deu de duas formas: um estudo piloto, onde coletamos as avaliações de oito professores, atuantes em escolas de Ensino Fundamental e Médio do Rio de Janeiro. Após o Exame e feitos os ajustes sugeridos, aplicamos nosso formulário a 59 professores, sendo 33 do Rio de Janeiro – alunos da Especialização em Educação Matemática e dos Mestrados Acadêmico e Profissional (PROFMAT), todos em realização na UFRJ – e 26 professores que participaram de oficina ministrada no âmbito do 3º SIPEMAT – 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – realizado em Fortaleza-CE, entre os dias 26 e 29 de junho de 2012. Ainda nesta oficina, contamos com a participação de 10 alunos de Graduação. Sobre estes participantes, dedicamos uma breve discussão constante de uma seção do capítulo cinco.

Em síntese, este trabalho se estruturou em três fases:

- Fase 1: elaboração, aplicação e análise dos questionários de argumentação e prova voltados a alunos do Ensino Básico;

- Fase 2: elaboração, aplicação e análise dos formulários dos docentes;*
- Fase 3: análise e interpretação dos dados.

A abordagem metodológica a ser utilizada será de cunho qualitativo. Dado o tempo limitado para a realização de uma pesquisa em larga escala, nosso estudo se dedicou a investigar junto a professores do Ensino Básico, através da aplicação de formulários, como o professor da Escola Básica compreende prova matemática e se este julga importante o trabalho pedagógico visando ao desenvolvimento da habilidade de argumentação e prova matemática. Além disso, quisemos verificar como o docente avalia os tipos de argumentação que o aluno apresenta.

Devemos destacar que os sujeitos investigados na primeira fase (alunos de 8º e 9º anos do ensino fundamental) não são alunos dos professores que participaram da 2ª fase de pesquisa.

3.1 As questões de pesquisa

Como já apresentado na Introdução, a pesquisa se norteia por dois questionamentos:

- **O professor está inclinado ao trabalho pedagógico que desenvolva nos alunos do Ensino Fundamental a habilidade de argumentação e prova em Matemática?**

---

*Estes formulários, como já relatado, foram construídos com respostas de alunos obtidas na fase 1

- **Como o professor avalia e valoriza os tipos de argumentação e prova apresentados pelos alunos do Ensino Fundamental?**

Pretendeu-se responder a estas questões analisando formulários aplicados a professores do Ensino Básico. Neste formulário, que contém questões de argumentação e prova em Matemática respondidas por alunos do ensino fundamental, o professor deveria emitir sua avaliação sobre elas, atribuindo uma nota, de zero a dez, a cada resposta apresentada pelos alunos participantes da primeira fase. Também foi solicitado do professor que ele revelasse a resposta discente que seria a mais próxima daquela que ele daria à questão. Com isto, queremos verificar quais são as concepções que os professores apresentam quanto ao ensino-aprendizagem de prova matemática.

Além da proposta de análise das respostas discentes, coletamos dados com respeito à formação acadêmica, tempo de experiência docente e concepções sobre prova matemática, currículo e planejamento de aulas sobre o enfoque do desenvolvimento da habilidade de argumentação e prova, que podem nos ajudar a responder as questões de pesquisa colocadas em tela.

4. Coletando dados: construindo e aplicando o Teste para os alunos

Para montarmos um dos nossos mais importantes instrumentos de investigação, que é o formulário aplicado aos docentes, julgamos que seria importante que este apresentasse respostas “reais”, verdadeiramente dadas por alunos do Ensino Básico.

Para levantar respostas que apresentassem as justificações e as argumentações e os tipos de prova dos alunos, montamos um teste, que foi aplicado durante o mês de novembro de 2011, na cidade do Rio de Janeiro, a 124 alunos de duas escolas municipais (que chamaremos de EM1 e EM2) e uma escola federal (que rotularemos por EF1). A amostra foi composta por três turmas de 9º ano e apenas uma turma de 8º ano, conforme descrito na tabela 2. A aplicação contou com a colaboração de professores-aplicadores, regentes das próprias turmas participantes deste teste.

Tabela 3: distribuição por série/escola dos alunos que participaram do teste.

Série / Escola	EM1	EM2	EF1
8º ano do ensino fundamental	-	30 alunos (com idade entre 12 e 16 anos)	-
9º ano do ensino fundamental	38 alunos (com idade entre 14 e 16 anos)	28 alunos (com idade entre 14 e 17 anos)	28 alunos (com idade entre 14 e 15 anos)

4.1 O questionário aplicado aos alunos

O teste foi elaborado com cinco questões dissertativas que abrangeram tópicos relacionados à aritmética de números inteiros, sequências numéricas e identificação de padrões geométrico e numérico e geometria plana, extraídos de Nasser e Tinoco (2003). A primeira questão tratava de uma propriedade aritmética de números naturais; a segunda questão trabalhava com sequência numérica e geométrica, e a busca de um padrão visando obter a generalização da situação proposta; a terceira e quarta questões exploravam propriedades e resultados (teoremas e proposições) da geometria plana; e a quinta questão abordava uma situação-problema em geometria, buscando a generalização a partir de padrões numéricos e de relações entre quantidades (de pontos e triângulos).

Para a análise dos dados, realizamos a tabulação das respostas com base nos esquemas de prova sugeridos por Sowder e Harel (1998) e nos tipos de prova outorgados por Ballachef (1988). As ideias veiculadas nesses artigos permitem melhor compreender como o aluno estrutura a sua argumentação e sua prova. E também nos indica se na vivência escolar do aluno ele foi estimulado a construir argumentos mais robustos e “formais” para justificar as afirmações matemáticas. Nas análises, a fim de se preservarem as identidades dos alunos, utilizamos siglas, no lugar de seus nomes. Iremos tratar delas nas seções a seguir

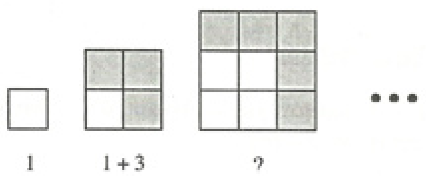
Numa primeira análise, verificando o levantamento das respostas apresentadas, percebemos que as questões 2, 4 e 5 apresentaram baixo número de respostas. A questão 2 era composta por cinco itens, enquanto que a questão 5, por três itens. Os últimos itens dessas questões investigavam a formação de padrões e pediam que o aluno exibisse expressões algébricas que generalizassem estes padrões. Com relação ao problema 4, os poucos alunos que responderam apresentaram respostas que chegavam ao resultado do problema, mas sem apontar argumentos que embasassem sua conclusão.

A seguir, apresentamos as questões que foram propostas aos alunos:

1) "Verifique se a afirmativa a seguir é falsa ou verdadeira, justificando sua resposta: "<u>A soma de três números consecutivos é um múltiplo de 3</u>".

Figura 2: enunciado da questão 1

2) Observe a sequência de figuras abaixo:



a) Como será a figura seguinte? Faça um desenho.

b) Escreva **o número de quadradinhos da figura** que você desenhou <u>como a soma dos brancos com os escuros</u>.

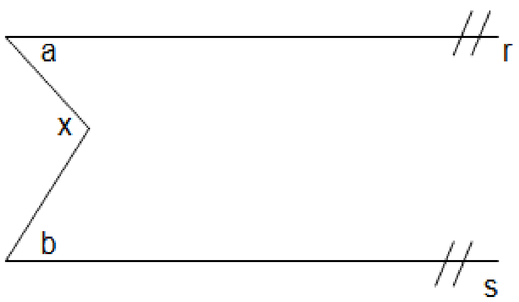
c) Qual a forma de cada figura da sequência? Represente cada uma em função do número de quadradinhos de cada um de seus lados.

d) Quanto vale a soma dos 10 primeiros números ímpares?

e) Escreva uma expressão para a soma dos n primeiros números ímpares.

Figura 3: enunciado da questão 2

3) Na figura que se segue, as retas r e s são **paralelas**:



Com base nestas informações, expresse o valor do ângulo **x**, em função de **a** e **b, justificando sua resposta**.

Figura 4: enunciado da questão 3

4) Na figura a seguir, as retas r e s são perpendiculares e o triângulo ABC é isósceles, com AB = AC e Â = 40°. Nestas condições, determine o valor de x, **justificando sua resposta**.

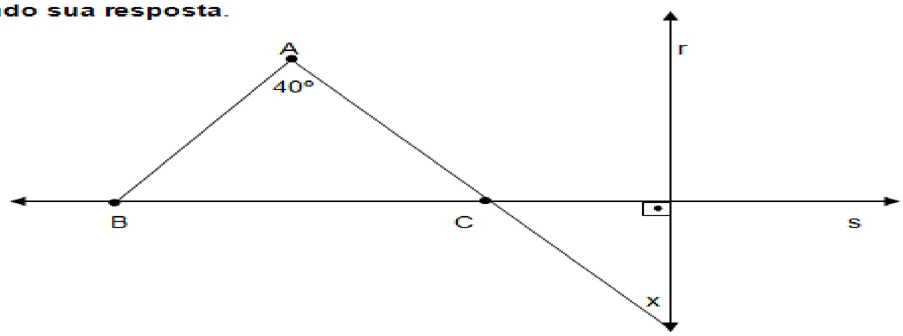
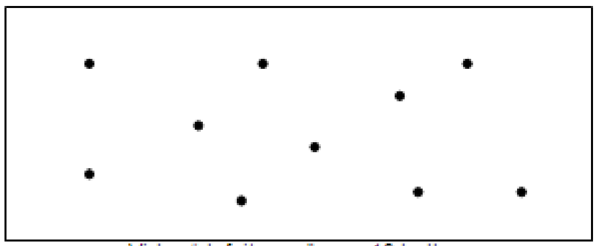


Figura 5: enunciado da questão 4

5) Para construir uma janela ornamental, um operário precisa de pedaços triangulares de vidro. Ele pretende aproveitar um vidro retangular defeituosa, com 10 bolhas de ar, sendo que não há 3 bolhas alinhadas entre si, nem duas delas com algum vértice do retângulo, ou uma delas com 2 vértices do retângulo.



Vidro "defeituoso" com 10 bolhas

Para evitar bolhas de ar no seu projeto final, ele decidiu cortar os pedaços triangulares com os vértices coincidindo ou com uma bolha de ar ou com um dos cantos do vidro original.

Com base nestas informações, resolva as questões seguintes, **justificando todas as respostas**:

a) Quantos pedaços triangulares de vidro são possíveis de se obter com este vidro defeituoso?
b) Se o vidro apresentasse 12 bolhas? E 20? Quantos pedaços triangulares serão obtidos em cada caso?
c) É possível estabelecer uma relação entre **o número de triângulos obtidos** com **o número de bolhas existentes**?

Figura 6: enunciado da questão 5 (adaptada de Nasser, 1998)

4.2 Analisando as respostas dos alunos

Como foi dito na seção anterior, as questões 2, 4 e 5 apresentam poucas respostas, o que nos levou a restringir esta pesquisa apenas à análise das respostas dadas às questões 1 e 3. Antes de falarmos destas respostas, falaremos de algumas que foram obtidas na questão 2.

Houve algumas tímidas tentativas no sentido de mostrar uma expressão matemática em atendimento aos itens, mas também houve algumas tentativas de redação por extenso de suas conclusões obtidas a partir de observações que, de algum modo, apoiaram-se intuitivamente em algum esquema, seja empírico ou externo (Sowder e Harel, 1998, p. 671) ou no tipo de prova de Balacheff (1988, p. 218), empirismo natural.

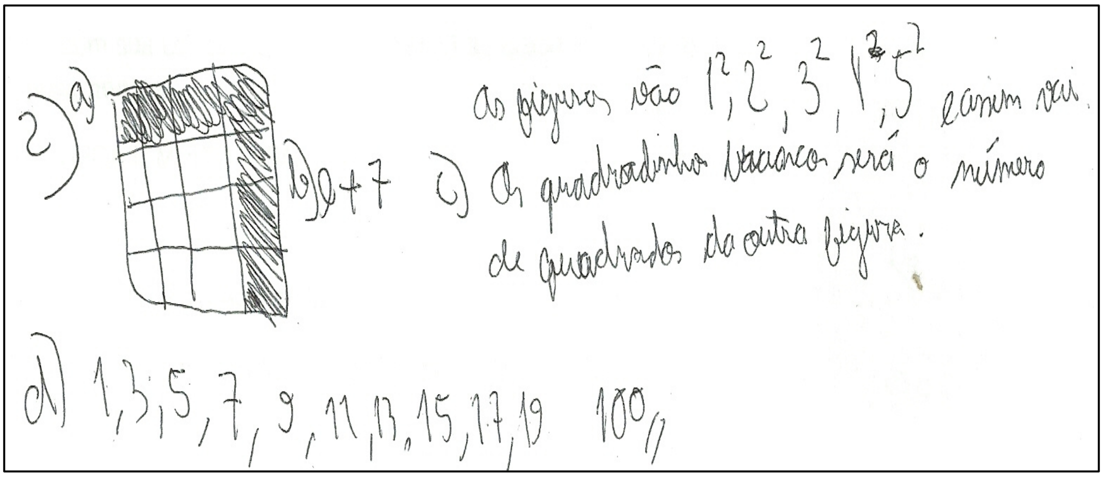


Figura 7: Resposta do aluno LD, da instituição EF1 para o item c): "As figuras vão 12, 22, 32, 42, 52 e assim vai. Os quadradinhos brancos serão o número de quadrados da outra figura".

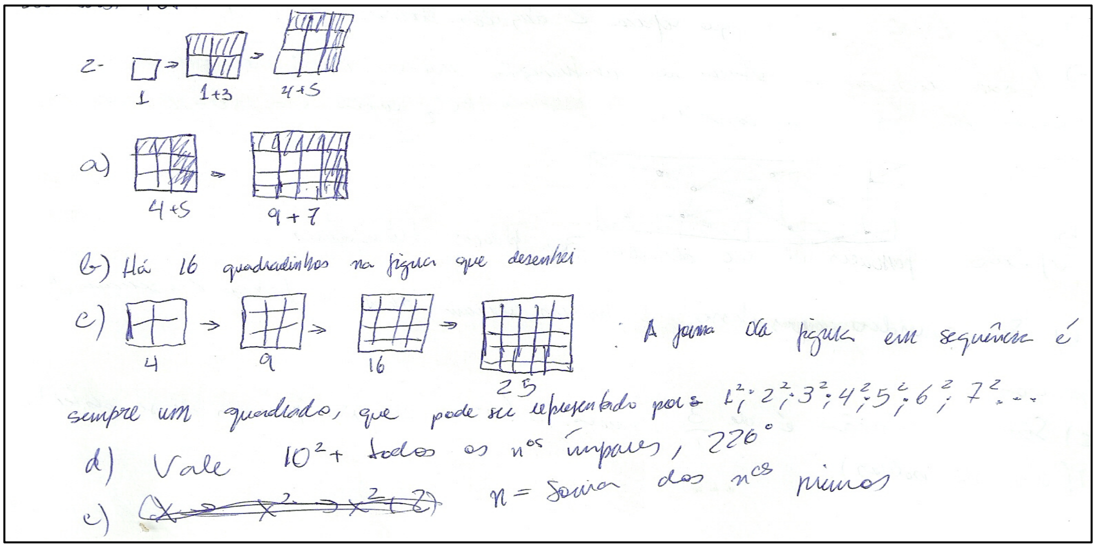


Figura 8: Resposta do aluno G, da instituição EF1 para o item c): "A forma da figura em sequência é sempre um quadrado, que pode ser representado por: 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72 ... ".

Nas duas respostas apresentadas, identificamos o uso do esquema empírico-perceptual e o empírico baseado em exemplos. Na figura 4, percebemos que o aluno LD não apresentou outros casos ou exemplos para concluir que as figuras seriam quadrados relacionados com o total de quadradinhos dado por 12, 22, 32, 42. Nas palavras do próprio LD, conclui afirmando “assim vai”, constituindo o que Sowder e Harel (1998) chamam de esquema empírico-perceptual, ou seja, quando o aluno percebe visualmente a validade da afirmação. Este esquema esteve presente, segundo relata o artigo destes autores, nas questões de geometria plana que constaram do seu teste. Já o aluno G, do mesmo colégio do aluno LD, estabeleceu sua argumentação a partir do esquema empírico, baseado em exemplos particulares (figura 5), remetendo ao “empirismo natural” de Balacheff (1988).

Este modelo é basicamente a tônica dos esquemas e tipos de prova que encontramos nas respostas de nossos alunos. Passaremos, portanto, à análise e discussão das respostas obtidas nas questões 1 e 3.

A questão 1 do teste pediu que o aluno verificasse se é falsa ou verdadeira, justificando, a seguinte afirmação: “A soma de três números consecutivos é um múltiplo de 3”.

Tabela 4: Distribuição das respostas obtidas na questão 1.

Série / Esquema de Prova (QUESTÃO 1)	Esquema empírico (baseado em exemplos) / empirismo natural	Esquema empírico (perceptual)	Esquema analítico (transformacional) / exemplo genérico	Esquema analítico (transformacional) / experimento mental
8º ano do ensino fundamental	**29**	**-**	**-**	**1**
9º ano do ensino fundamental	**89**	**3**	**2**	**-**

Percebemos a influência que os exemplos exercem sobre a concepção de argumentação e prova dos alunos. Os exemplos sugerem certa autoridade e poder para comprovar a afirmação. Sugerem a ideia jurídica de prova: elemento que comprova a veracidade do fato. Por exemplo, a aluna CS responde que a questão 1 é verdadeira, justificando que a verdade é constatada “por causa de vários exemplos”.

Em Matemática, para se justificar formalmente resultados, teoremas e propriedades, sejam geométricas, algébricas ou aritméticas, são utilizadas letras para indicar um modelo geral válido para qualquer caso, com as mesmas propriedades e características. Porém, o aluno que executa um trabalho com álgebra limitado à resolução de equações e de expressões algébricas carrega consigo o pensamento de que, havendo uma expressão com letra, deve-se resolver uma equação “para achar o valor dessa letra”. Este exemplo de situação se enquadra no esquema externo-ritual, que indica o uso de letras, seguindo um ritual de manipulação de expressões algébricas, conforme se depreende de Sowder e Harel (1998). As respostas presentes nas figuras a seguir ilustram esta ideia.

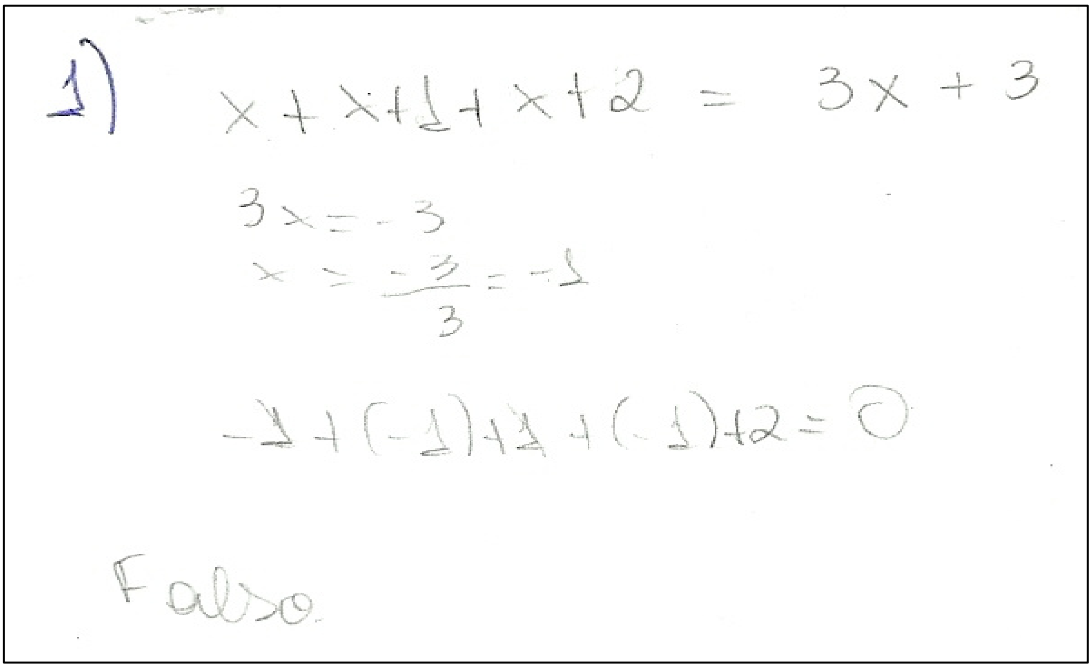


Figura 9: resposta à questão 1 do aluno CM.

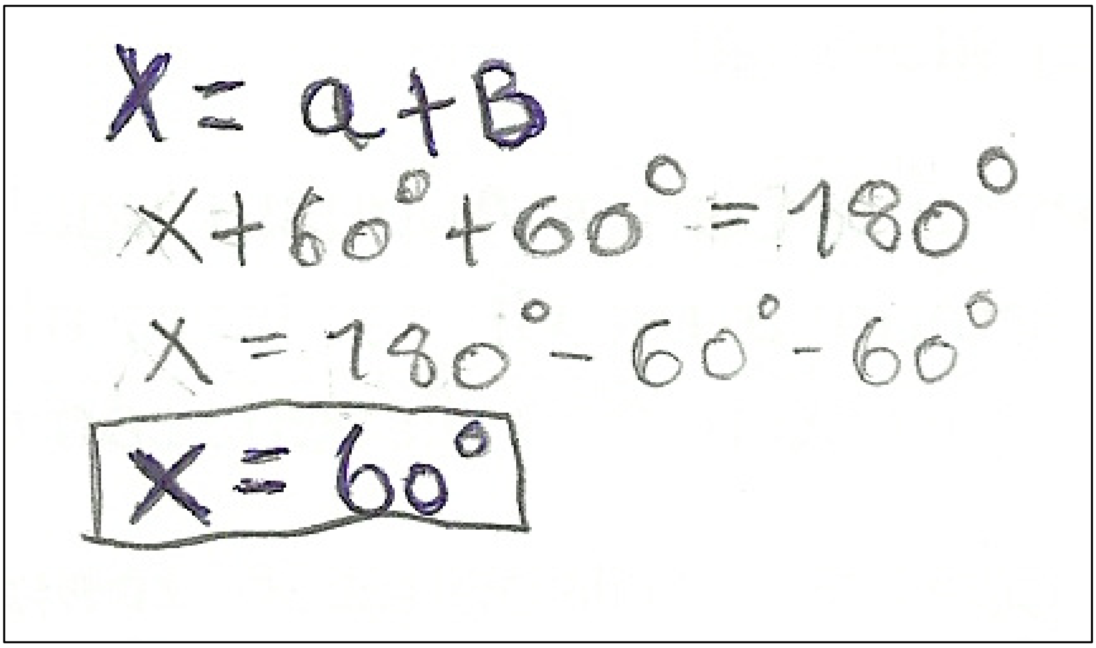
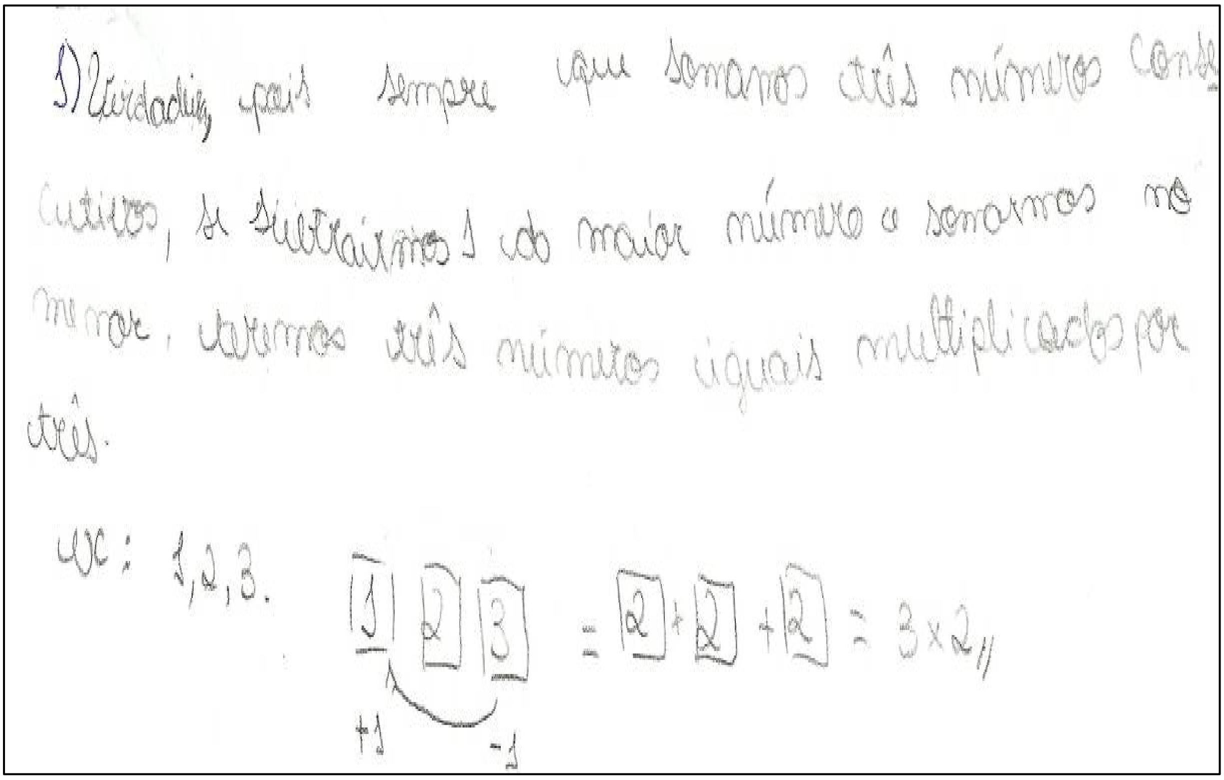


Figura 10: resposta à questão 3 da aluna TM.

Foram também apresentadas respostas muito interessantes do ponto de vista da argumentação e prova matemática, uma vez que os alunos tentaram justificar transcrevendo suas ideias através das palavras. Não obtivemos argumentos gráficos, como aqueles encontrados por Hoyles (1997). A seguir, vamos discutir algumas destas respostas.

Em relação à questão 1, que consistia em verificar se é verdadeira ou falsa a afirmação de que a soma de três números naturais consecutivos é múltiplo de três, duas alunas do colégio EF1 e uma aluna do colégio EM2 demonstram um raciocínio lógico bastante elaborado, considerando a faixa etária destes estudantes (15 anos de idade). Nas respostas das duas primeiras, apesar de sua argumentação partir de um exemplo em particular, remetendo ao esquema empírico, elas utilizaram o exemplo particular para estruturar comentários gerais, tentando exibir, desta forma, um padrão a partir dele. Já a terceira aluna elaborou uma resposta que generalizou o padrão encontrado na soma de três números consecutivos, utilizando-se para tanto de letras e de manipulações algébricas para concluir seus argumentos.


1) Verdadeira, pois sempre que somamos três números consecutivos, se subtrairmos 1 do maior número e somarmos no menor, teremos três números iguais multiplicados por três.

ex: 1, 2, 3. $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3} = \boxed{2}+\boxed{2}+\boxed{2} = 3 \times 2$

+1 −1

Figura 11: resposta da aluna ALM, do EF1, à questão 1: “verdadeira, pois sempre que somamos três números consecutivos, se subtrairmos 1 do maior número e somarmos no menor, teremos três números iguais multiplicados por três”.

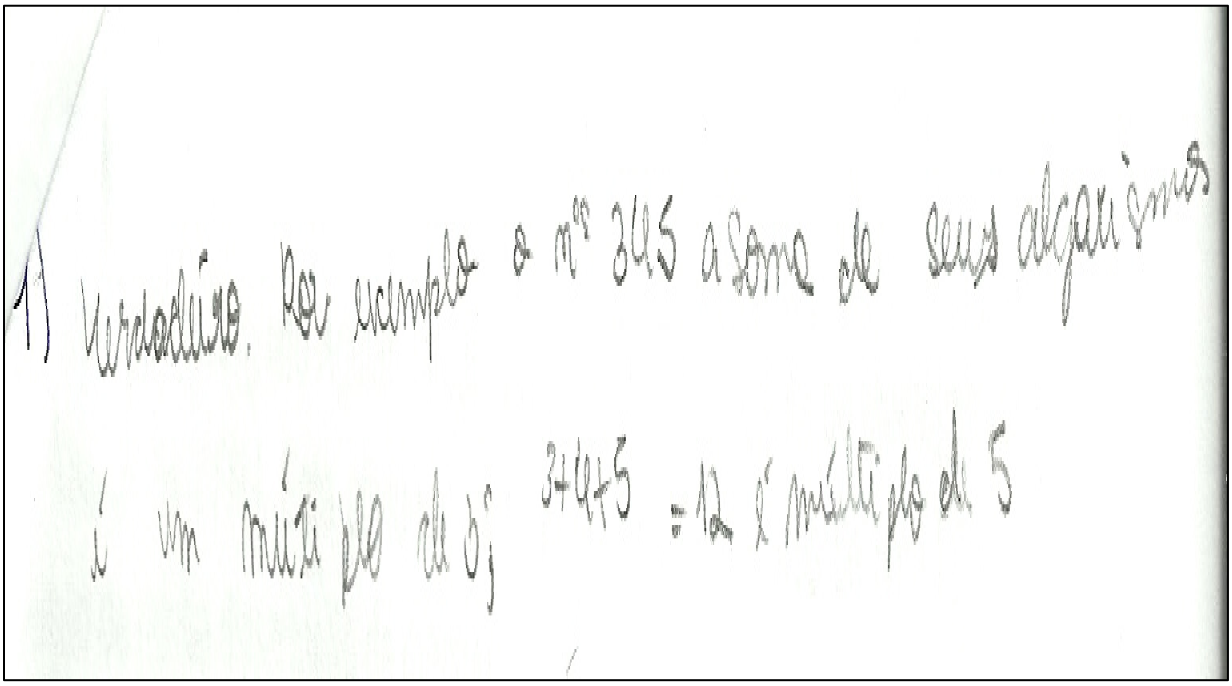
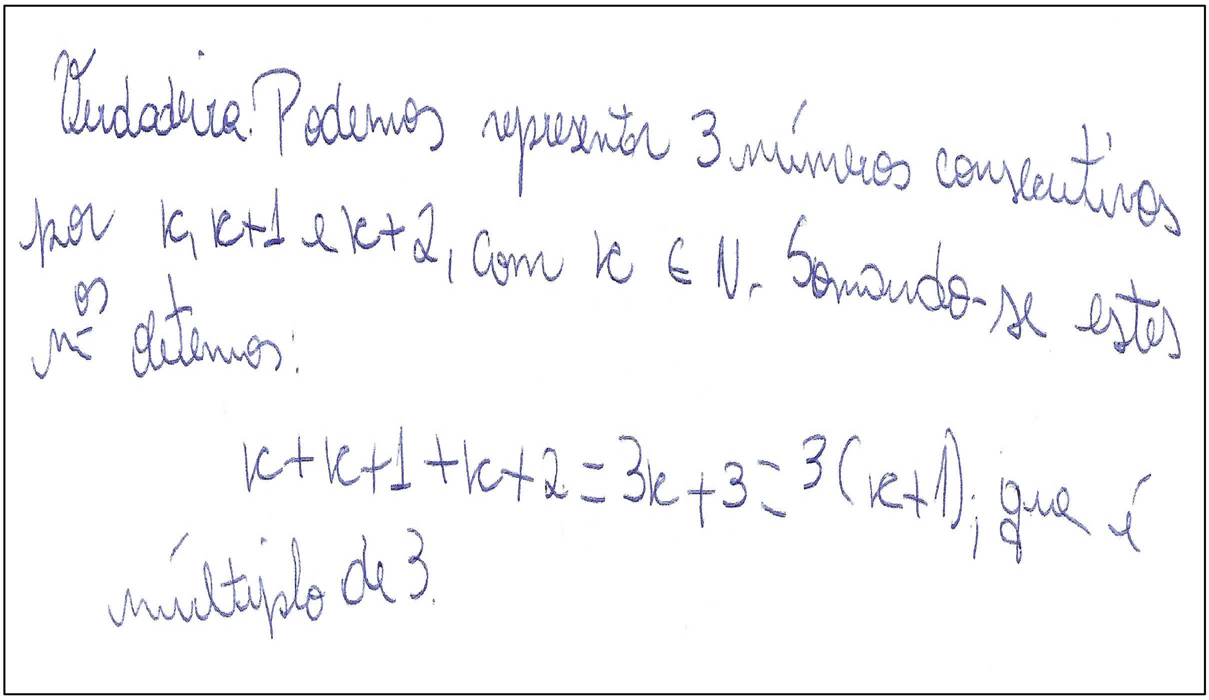

1) Verdadeira. Por exemplo o nº 345 a soma de seus algarismos é um múltiplo de 3; 3+4+5 = 12 é múltiplo de 3

Figura 12: resposta da aluna GSM, do EF1, à questão 1: “verdadeira, por exemplo o nº 345 a soma de seus algarismos é um múltiplo de três; 3+4+5 = 12 é múltiplo de 3.”


Verdadeira. Podemos representar 3 números consecutivos por k, k+1 e k+2, com k ∈ N. Somando-se estes n^{os} obtemos:

$$k+k+1+k+2 = 3k+3 = 3(k+1); \text{ que é}$$

múltiplo de 3.

Figura 13: resposta da aluna CMV, do EM2, à questão 1: “Verdadeira. Podemos representar 3 números consecutivos por x, x+1 e x+2, com x $\in$ IN. Somando-se estes n^{os} obtemos: x + x+1 + x+2 = 3x+3 = 3(x+1), que é múltiplo de 3.”

Nos primeiros dois exemplos, observa-se o esforço das alunas ALM e GSM em de fato provar o resultado matemático, isto é, buscar argumentos de validade convincentes, de modo a garantir a veracidade da propriedade em qualquer caso. As duas respostas encontradas partem de um exemplo especial, que promove a generalização para os demais casos similares: para Balacheff (1988), este tipo de prova se enquadraria no *exemplo genérico*, uma vez que a escolha do exemplo e a argumentação construída atendem de maneira geral ao enunciado do problema.

Na resposta da aluna ALM, se olharmos para o que sugerem Sowder e Harel (1998, p. 673), o esquema apresentado por ela é do tipo *analítico transformacional,* pois a discente observou aspectos gerais do problema, trabalhou seu raciocínio lógico-dedutivo e estruturou uma conjectura válida para a soma de três números inteiros: sempre que somamos três números inteiros consecutivos, é possível subtrair uma unidade do terceiro número e acrescentá-la ao primeiro, de modo a se obter uma soma de três parcelas iguais, resultando no triplo da parcela do meio (ou segunda parcela). Apesar de ela não ter usado nenhum artifício algébrico, seus argumentos robustecem a veracidade; e o uso do exemplo aplica-se para mostrar a validade dos argumentos lançados. Este exercício, de propor a construção, avaliação e refutação de conjecturas, é bastante interessante ao desenvolvimento do raciocínio lógico-detutivo, além de formar no aluno uma postura investigativa, atitudes estas amplamente recomendadas pelos PCN (BRASIL, 1997).

Quanto à resposta da aluna GSM, causa-nos satisfação a utilização de resultados previamente “conhecidos” (provados) para demonstrar os demais. Sua resposta sugere a utilização da propriedade referente aos múltiplos de 3 (critério de divisibilidade do número 3), que consiste em verificar se a soma dos algarismos que compõem o número é ou não divisível por 3 (se a soma dos algarismos resultar um múltiplo de 3, então o número em questão é divisível por 3). Na sua argumentação, a aluna exibiu como exemplo o número 345, formado por algarismos consecutivos, e concluiu, com base na propriedade citada, que a soma de três números consecutivos é um múltiplo de três. Isto nos permite indagar a respeito da transição entre a prova pragmática e a prova conceitual, defendida por Balacheff (1988, p. 217).

A resposta da aluna CMV apresentou a resposta mais formal para mostrar a validade do enunciado. Para tanto, construiu sua argumentação recorrendo ao uso de letras, para indicar a generalidade de seu raciocínio, além de indicar o domínio da variável utilizada ($x \in$ IN). De fato, olhando para a sua resposta, verificamos que a aluna alcançou o estágio da prova conceitual de Balacheff (1988), podendo classificar sua resposta como um *experimento mental*, ou ainda um esquema *analítico transformacional* (Sowder e Harel, 1998).

A questão número 3 também gerou resultados importantes para a pesquisa. Trata-se de um problema de geometria plana que consistia em mostrar que o ângulo x media a soma dos ângulos a e b. Cabia ao aluno mostrar este resultado, justificando seu raciocínio.

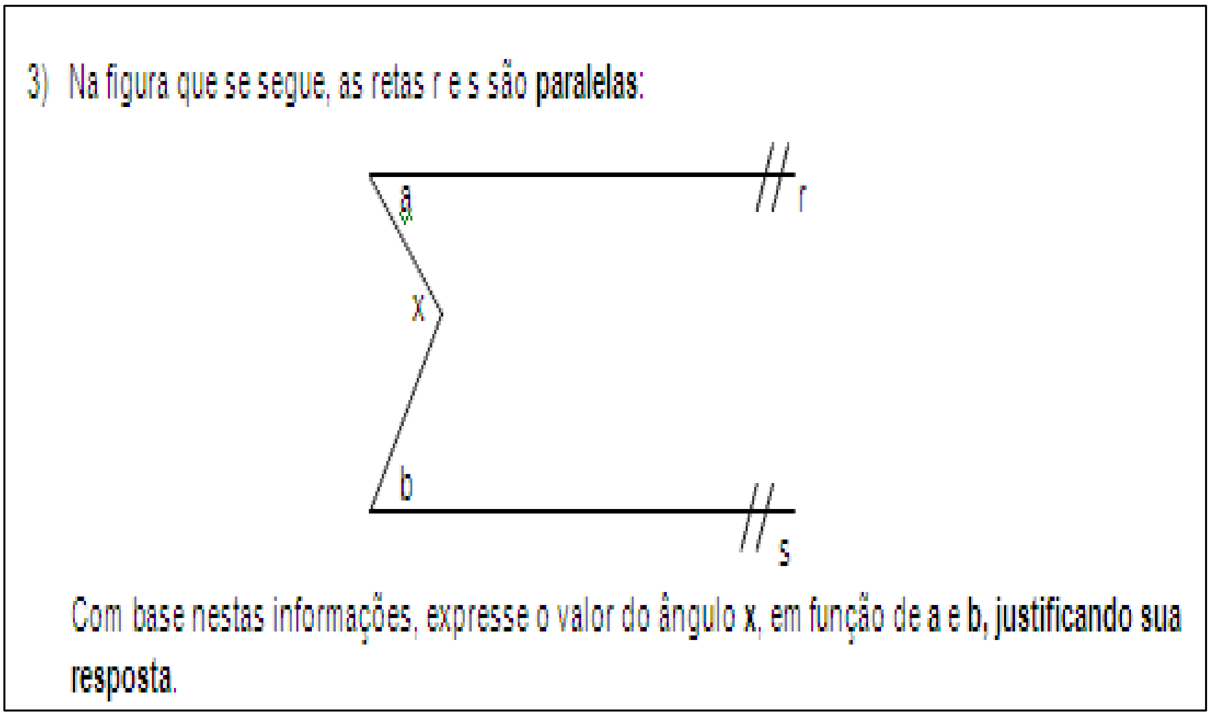


Figura 14: enunciado da questão 3.

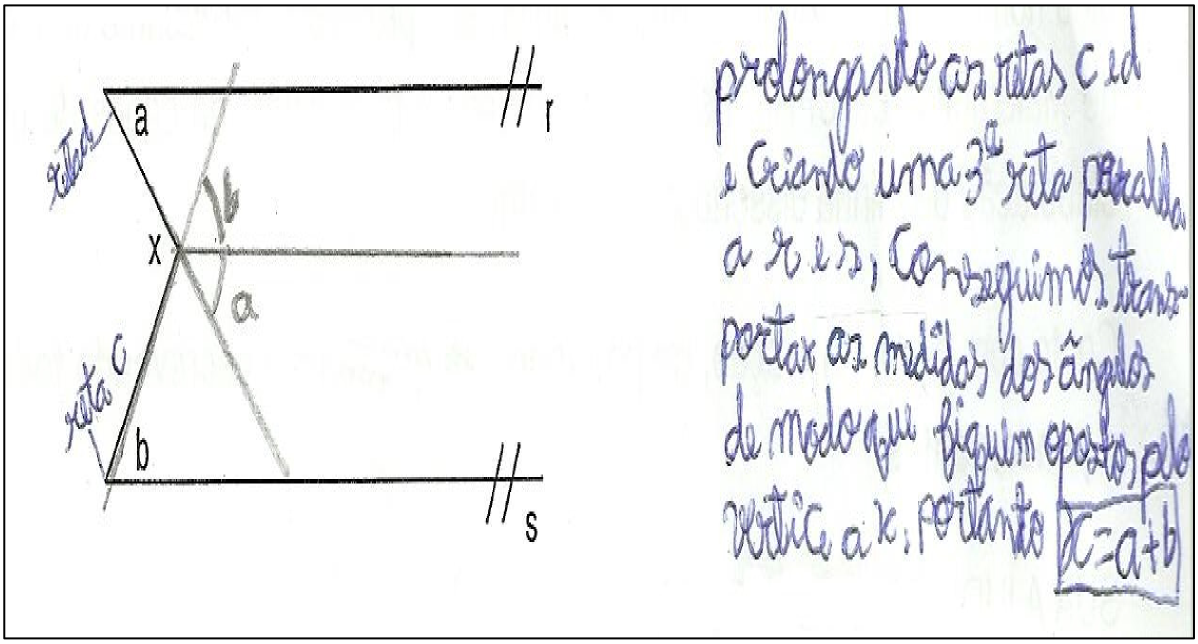


Figura 15: Resposta dada pelo aluno LT, da EM1: "prolongando as retas c e d e criando uma 3ª reta paralela a r e s, conseguimos transpor as medidas dos ângulos, de modo que fiquem opostos pelo vértice a x, portanto x = a+b."

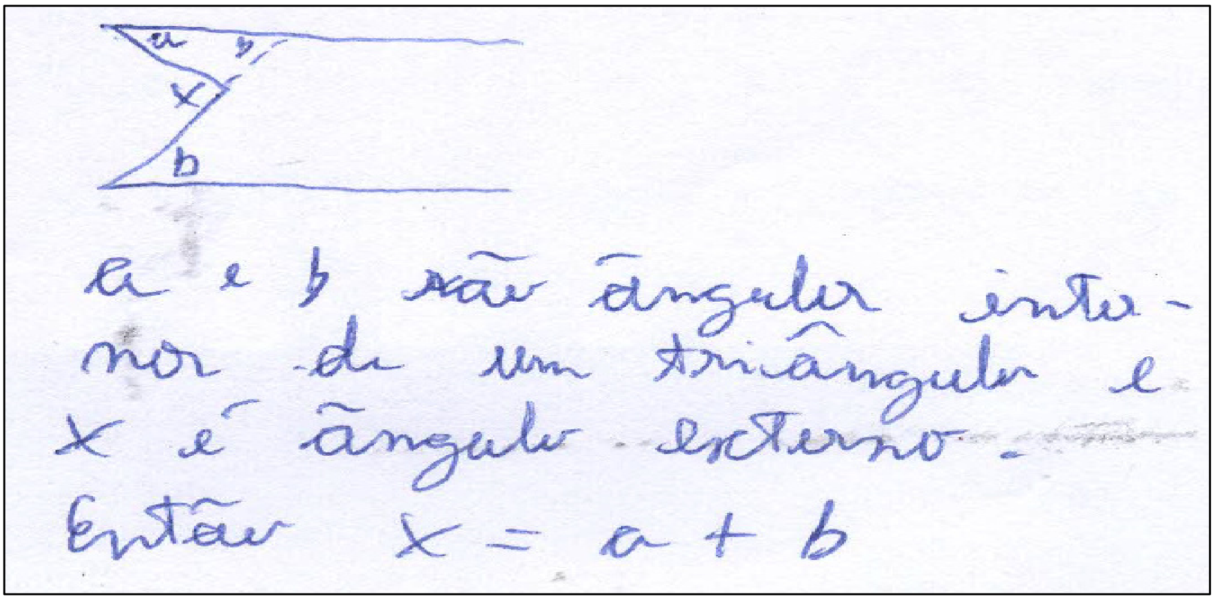


Figura 16: Resposta dada pelo aluno VSL, da EF1: “a e b são ângulos internos de um triângulo e x é ângulo externo. Então x = a + b.”

Em seus argumentos, o aluno LT descreve as construções auxiliares para ter condições de utilizar o fato matemático de que os Ângulos Opostos pelo Vértice são iguais. Implicitamente o aluno utiliza o postulado das paralelas, para traçar a terceira reta paralela e utiliza também o Teorema das Paralelas para realizar a “transposição” mencionada na argumentação. Além de se apresentar de forma correta, esta argumentação mostra que o aluno empreende bem seu raciocínio, moldando-se numa estrutura lógico-dedutiva, residindo este tipo de prova também no modelo de *experimento mental* (BALACHEFF, 1988).

O tipo de prova ou argumento apresentado por VSL é semelhante ao de LT, sendo também categorizado como um experimento mental, devido à mesma estrutura argumentativa, que recorre a outros resultados previamente demonstrados para concluir que x = a + b, apesar de na redação utilizar conteúdos sem a eles fazer referências, como: equivalência dos ângulos alternos internos (ângulo b, nas retas r e s) e corolário do Teorema do Ângulo Externo.

Em outras respostas, alguns alunos, como PSR, da EM1, concluíram corretamente que x = a + b, mas sem apresentar maiores detalhes escritos quanto à justificação e à argumentação do fato questionado.

Podemos entender que o raciocínio empreendido consiste numa argumentação que se baseia em esquemas gráficos com o auxílio da figura e da construção suplementar – traçado da reta paralela – caracterizando-se, assim, com base em Sowder e Harel (1998, p. 672), no esquema de prova *perceptual.*

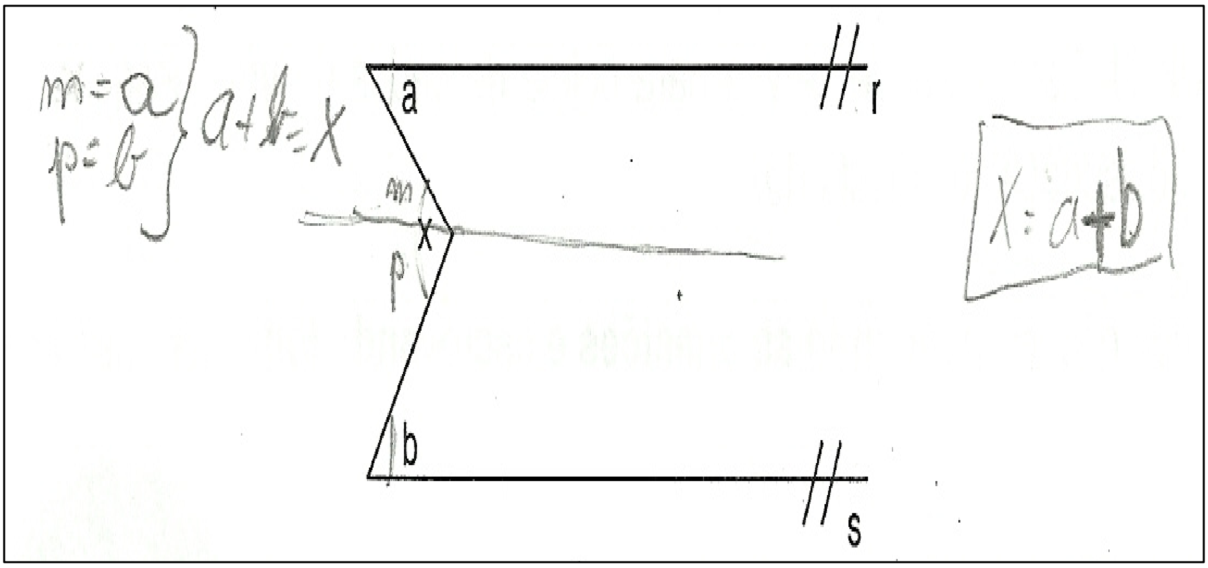


Figura 17: resposta dada pela aluna PSR (EF1).

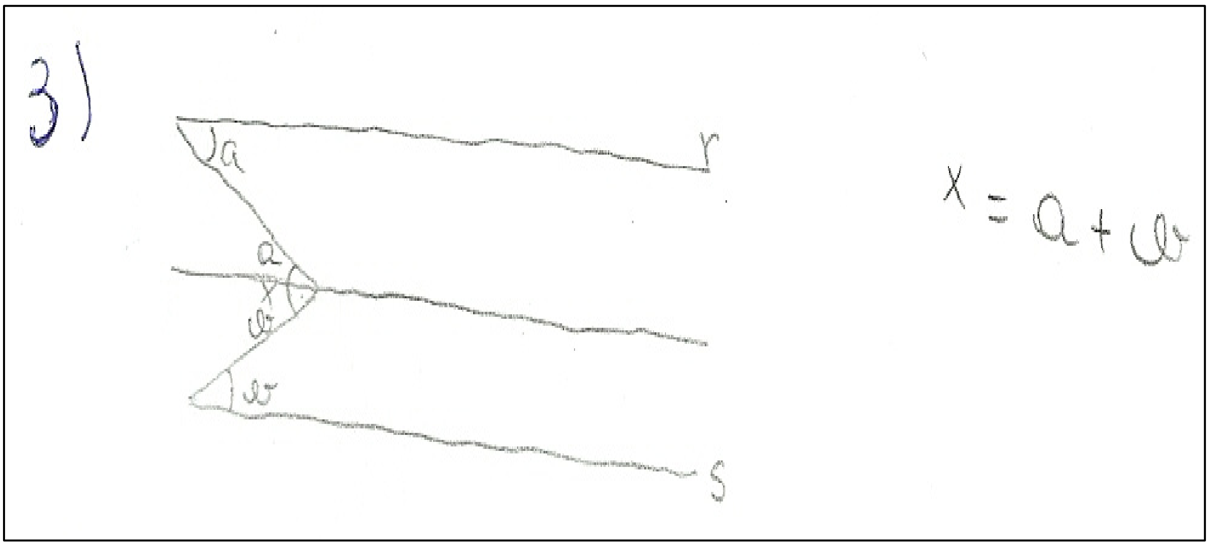


Figura 18: resposta dada pela aluna AL (EF1).

Nestas respostas, ambas as alunas apresentaram a resposta correta do problema (x = a + b), mas não existe uma justificativa mais elaborada que corrobore com a validade de que x seja de fato a + b. Notemos que nas figuras 14 e 15 as alunas construíram o que seria uma reta paralela às retas r e s, para então aplicar o Teorema das Paralelas. Estas duas soluções refletem o trabalho em sala de aula que valoriza apenas o resultado final, sem explorar a coleta de premissas para construir argumentos e chegar às conclusões. Neste caso, entendemos que as duas alunas não “provaram” o resultado, pois apenas exibiram uma resposta, que por acaso é a correta para o problema. De acordo com Nasser e Tinoco (2003, p. 84), estas alunas apresentaram uma resposta, que para alguns pode até ser encarada como um argumento – tendo em vista o traçado da reta paralela auxiliar – mas não podemos considerá-la como uma prova, do ponto de vista da Matemática.

4.3 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Após a análise deste teste, podemos estabelecer algumas considerações importantes para a sequência da pesquisa. Numa primeira impressão, verificamos que o nível de argumentação deste grupo pesquisado é ainda bastante ingênuo e informal, uma vez que a grande maioria das respostas encontradas apresentou caráter empírico, onde a constatação da verdade se deu por meio de exemplos. O desenvolvimento da habilidade de argumentar e provar em Matemática requer um trabalho voltado para tal, ou seja, deve-se preparar a aula e o professor para a condução desta tarefa. Pelos resultados que obtivemos, podemos especular que, em relação aos alunos investigados nesta fase da pesquisa, esta habilidade não está sendo desenvolvida em sala de aula, uma vez que grande parte dos alunos apresentaram apenas exemplos como argumentos e justificativas.

Apesar de os PCN recomendarem atividades que possibilitem a construção da habilidade de argumentação como forma de garantir a conquista da autonomia e da formação do cidadão crítico e ainda do desenvolvimento e amadurecimento do raciocínio lógico, não há – como havia em currículos estrangeiros, a exemplo do Reino Unido (HOYLES, 1998) e Estados Unidos (JONES, 1997) – nestes mesmos PCN diretrizes e competências que indiquem caminhos para o trabalho pedagógico voltado à argumentação e à prova matemática.

O resultado também nos permite tecer algumas indagações a respeito da prática docente: será que o professor, ao apresentar um teorema ou uma proposição, faz sua “demonstração” propondo uma série de exercícios que atendem à verdade matemática colocada ou se baseia apenas em exemplos para concluir uma afirmativa? Ou será que o professor propõe um exercício de argumentação que se inicia na experimentação, na verificação de exemplos e parte para a estruturação de justificativas que, muitas vezes, são percebidas destes experimentos e exemplos? Ou ainda, será que o professor prova os teoremas utilizando-se do rigor matemático, redigindo a demonstração como se estivesse num curso acadêmico? Vimos em Imenes (1987) que existe uma renúncia tácita ao trabalho de sala de aula com a prova matemática. Contudo, as sugestões de atividades encontradas em seu trabalho apontam para a construção da habilidade de argumentar e provar em Matemática.

Constata-se, com isso, que o ensino de prova não faz parte da prática pedagógica da maioria dos professores da Escola Básica. De fato, a argumentação lógico-dedutiva é uma habilidade que não pode ser ensinada em apenas algumas aulas. É uma habilidade que deve ser desenvolvida desde os primeiros anos, ao longo de toda escolaridade dos alunos, numa constante gradação dos níveis de argumentação, de maneira a conduzir o aluno a construir justificativas que possam ser aceitas como prova de resultados matemáticos, como também foi constatado por Nasser e Tinoco (2003).

Por não haver esta atenção ao ensino de prova e a ausência de reflexão sobre a habilidade dos alunos e argumentação, é possível o surgimento de variadas concepções dos professores sobre prova. Essa ausência de preocupação com o ensino de prova também exerce influência sobre a maneira de se avaliar uma argumentação discente: devido a fatores como formação acadêmica e continuada, experiência docente, concepções sobre avaliação, num enfoque específico da prova matemática, podemos imaginar grandes variações de avaliação dos docentes sobre uma mesma questão.

Dessa forma, indaga-se: como o professor avaliaria as respostas dadas, por exemplo, nas figuras 12, 13, 14 e 15? À qual ele atribuiria a maior nota? Ou ainda, se colocássemos as figuras 6 e 7 e lhe perguntássemos “Qual nota atribuiria a cada uma destas questões?”, qual delas receberia maior nota? E em que conceitos e ideias os professores se baseariam para sustentar estas avaliações? Estes são alguns questionamentos que deverão ser respondidos no decorrer deste estudo.

Pretendemos com esta pesquisa, além de verificar *como o professor avalia os níveis de argumentação dos alunos do ensino fundamental*, convidar o docente a uma reflexão sobre uma abordagem menos formal para a prova matemática, que no Ensino Fundamental se apresenta na sua forma mais incipiente e ingênua. Este convite se baseia em minha convicção de que, dependendo do desenvolvimento cognitivo do aluno, da sua idade, do seu nível de conhecimento matemático e de sua série escolar, formas alternativas de raciocínio dedutivo devem ser consideradas, e valorizadas, como já destacam Imenes (1987) e Godino e Recio (1997).

5. Coletando dados: construção e análise dos dados do Formulário dos Professores

5.1 Aplicação do Formulário-Piloto

Até a realização do Exame de Qualificação, ocorrido em maio de 2012, havíamos distribuído quase cinquenta formulários para serem respondidos. Estes formulários foram entregues a professores da rede municipal de ensino, na qual trabalho como professor, e a colegas do curso de Mestrado em Ensino de Matemática do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da UFRJ (PEMAT-IM/UFRJ). Tive grande dificuldade de obter os formulários respondidos. Como entreguei aos colegas e pedi que me devolvessem num outro momento – quis dar tempo para que pensassem e refletissem sobre a problemática da prova matemática que propus – muitos se esqueceram de fazer e conseguimos o retorno de apenas oito professores.

Por sugestão da banca do Exame, modificamos alguns pontos nos formulários e realizamos nova aplicação e coleta das respostas dadas a este novo formulário, que se encontra no Anexo 2. A aplicação dos formulários, com as modificações sugeridas, deu-se em dois momentos, como já comentado no capítulo três: o primeiro, com um grupo de 33 professores, que são alunos dos cursos do Mestrado Acadêmico e da Especialização em Ensino de Matemática e do PROFMAT (Programa de Mestrado Profissional em Matemática, voltado para professores do Ensino Básico), em realização no Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro; e o segundo, com outros 26 professores que participaram de oficina oferecida no âmbito do 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (3º SIPEMAT), realizado entre os dias 26 e 29 de junho, na cidade de Fortaleza (CE). Também, neste capítulo, falaremos dos dados coletados junto a 10 alunos de Graduação, que participaram desta oficina.

Nas páginas seguintes, descrevemos como se deu a aplicação destes novos formulários e a análise dos dados coletados. Nestas análises, iremos nos referir aos 59 participantes por um código, formado pela letra P e por um número cardinal, como o seguinte exemplo: para nos referirmos ao professor participante 15, usaremos o código P15. Fazemos isto em respeito ao princípio da confidencialidade da identidade dos participantes.

5.2 Estrutura do novo formulário

Se olharmos atentamente para as questões da pesquisa, seu foco recai sobre a figura do professor. Logo, para tentarmos encontrar indicações ou ideias que nos permitam esclarecer as questões postas no início desta dissertação, devemos voltar nosso olhar para o docente.

Por esta razão, realizamos inicialmente uma pesquisa com alunos do ensino fundamental para obter “dados reais”, respostas de alunos a questões que lhes exigiam estruturar argumentos e justificativas para comprovar a validade ou não da afirmação matemática, conforme relatado no capítulo quatro e em Aguilar Junior e Nasser (2012). O formulário voltado aos docentes do Ensino Básico foi inspirado no formato do trabalho realizado por Hoyles (1997). Na pesquisa britânica, Celia Hoyles aplicou a alunos do Reino Unido formulários com questões de prova matemática envolvendo Aritmética, Álgebra e Geometria, onde os participantes deveriam julgar respostas dadas por outros alunos a estas situações, respondendo “à qual ele julgaria como correta” e “à qual o seu professor daria maior nota”.

O formulário dos docentes se estrutura em quatro páginas. Na primeira, o docente se identifica, relata sua experiência docente nas redes pública e privada, além de cursos de qualificação profissional, e responde, de forma livre, a pergunta: “Como você definiria uma ‘prova matemática’?”. Pietropaolo (2005) destaca a importância de ter conhecimento sobre o que é prova matemática. Para que um professor possa avaliar a argumentação e a justificação apresentadas por seus alunos e considerá-las como uma prova matemática, é necessário que este mesmo professor tenha estabelecido uma definição de prova matemática. Esse pesquisador constatou, durante entrevistas com professores, um sentido para a palavra “prova”, que consiste em:

> recurso pedagógico bastante rico nas aulas de Matemática (...), desde que se admita um sentido mais amplo para essa palavra. Não caberia a simples reprodução (...), mas sim o ‘fazer matemática’ em sala de aula, envolvendo assim, experimentações, conjecturas e argumentações. (p. 9)

Esta definição de prova matemática, para o professor da Escola Básica, deve estar muito clara, e este profissional deve também perceber que a “prova” desenvolvida com os alunos deste nível escolar não precisa, necessariamente, seguir os padrões de rigor exigidos pela Academia. Para que os professores possam julgar as respostas dadas pelos alunos, é importante que estes tenham alguma concepção de prova matemática. Especificamente em relação à argumentação na Escola Básica, é importante que o professor a encare como uma argumentação muitas vezes apresentada sob a forma de experimentações, exemplos genéricos, explicações ou conjecturas, ou seja, uma prova informal do ponto de vista acadêmico.

Ainda na primeira página do formulário de coleta de dados há uma tabela, que deve ser preenchida segundo uma escala. Nela, pedimos que o professor registre suas impressões sobre a sua própria formação, em termos de prova matemática, e sobre sua prática docente ligada ao ensino-aprendizagem deste assunto.

Tabela 5: Questões dirigidas aos professores referentes às concepções sobre à argumentação, prova matemática e seu ensino

1. **Sim** 2. **Em parte** 3. **Não**

Questões:	**Respostas:**
a) Durante minha formação, houve estímulo à prática docente voltada ao ensino-aprendizagem de prova matemática.	
b) Na instituição em que me formei, havia alguma(s) disciplina(s) que explorava(m) o ensino-aprendizagem de prova matemática na Escola Básica.	
c) Minhas aulas e planejamentos abordam a argumentação e a justificação no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.	
d) Meus alunos são estimulados, na sala de aula, a argumentar e a justificar em Matemática.	
e) Meus alunos são estimulados nos instrumentos de avaliação (testes, listas e provas) a argumentar e a justificar em Matemática.	
f) Nos estabelecimentos de ensino em que atuo, a equipe, ao formular o currículo e o planejamento, contemplam o ensino-aprendizagem da prova matemática.	

Já as segunda, terceira e quarta páginas trazem as resoluções apresentadas por alunos a dois exercícios que exploravam questões relacionadas à argumentação e à prova matemática. Cada exercício apresentava dois itens, a) e b), onde: no item a), o professor deveria atribuir uma nota a cada resposta discente ali contida; já no item b), pedimos que o professor indicasse a resposta que mais se pareceria com a que ele daria ao problema em questão. Em ambos os casos, solicitamos que o participante registrasse o porquê de suas escolhas.

As perguntas apresentadas na tabela visam a identificar a opinião do professor quanto à sua formação acadêmica e à atenção dada pelas instituições de ensino superior ao ensino de prova na Escola Básica. As perguntas constantes desta parte do formulário pretenderam coletar informações que nos permitam responder à questão de pesquisa: “O professor está inclinado ao trabalho pedagógico que desenvolva nos alunos do Ensino Fundamental a habilidade de argumentação e prova em Matemática?”.

Nos questionamentos que propomos após as respostas dadas pelos alunos aos problemas de argumentação e justificação, nosso objetivo foi o de coletar respostas docentes que nos permitissem, também, responder à questão da pesquisa: “Como o professor avalia e valoriza os tipos de argumentação e prova apresentados pelos alunos do Ensino Fundamental?”.

No formulário, solicitamos que os professores nos fornecessem sua experiência docente nos níveis fundamental, médio e superior, tanto do ensino público quanto do privado. O registro do tempo de experiência do professor pode nos sugerir uma maior ou menor inclinação para o trabalho didático com a argumentação e a prova, possibilitando, dessa forma conduzir o fazer pedagógico ao amadurecimento e evolução da habilidade do aluno em argumentar e provar em Matemática.

Aliado a isto, na página 2 do formulário, colocamos uma tabela para que o professor respondesse a seis perguntas, dando graus **Não**, **Em parte** e **Sim** (vide tabela 4 acima). Desta maneira, fizemos uma associação entre o tempo de experiência docente com as convicções pessoais e curriculares quanto ao ensino-aprendizagem de prova matemática. Esta ideia se baseia na pesquisa realizada por Furinghetti e Paola (1997).

Nas suas últimas páginas, o formulário traz duas questões de argumentação e prova que foram aplicadas a estudantes de escolas de

Ensino Básico, com respostas apresentadas por eles. A seguir, apresentamos estas questões:

1) “**Verifique se a afirmativa a seguir é falsa ou verdadeira, justificando sua resposta:** “**<u>A soma de três números consecutivos é um múltiplo de 3</u>**”.

Figura 19: questão aplicada a alunos do ensino fundamental e colocada no formulário dos professores.

2) “Na figura que se segue, as retas r e s são **paralelas**:

Com base nestas informações, expresse o valor do ângulo **x**, em função de **a** e **b, justificando sua resposta**.”

Figura 20: questão aplicada a alunos do ensino fundamental e colocada no formulário dos professores.

Junto às perguntas, apresentamos as respostas dadas por cinco alunos do Ensino Básico a cada umas delas. Estas respostas podem ser verificadas na íntegra do formulário, no Anexo 2 deste texto. O objetivo era que o professor analisasse as respostas dos alunos às duas questões postas e respondesse aos seguintes questionamentos:

a) <u>Atribua uma nota</u> (de zero a dez) a **cada uma das respostas** acima. Justifique suas notas A qual destas respostas você daria a maior nota? Por quê?

b) Qual destas respostas se parece mais com a que você daria? Por quê?

Nas seções seguintes, iremos apresentar o levantamento realizado e a análise de cada item do formulário. Estas análises se repousam sobre 69 formulários respondidos por professores do Rio de Janeiro e de outros estados da federação. Dentre estes, 10 eram alunos de Graduação

Na análise dos dados, recorremos ao programa de computador *Microsoft Excel*©, que nos auxiliou na construção dos gráficos e no cálculo de médias, desvios, moda e variância.

5.3 Análise do tempo de experiência docente e concepção de Prova Matemática

Na primeira parte de nosso formulário, buscamos compreender como se dá o entendimento do docente em relação à prova matemática, levantar seu tempo de experiência profissional, para podermos estabelecer uma relação entre essas concepções e experiência docente. Para tanto, pedimos que preenchessem uma pequena tabela indicando sua experiência docente nos ensinos público e privado, separando os níveis de ensino (fundamental, médio e superior).

Quando da redação do Exame de Qualificação, fiz o levantamento do tempo de experiência e calculei a média aritmética, em unidade de anos, para estabelecer a experiência média dos professores nas três modalidades de ensino citadas acima. Como a média é uma medida estatística que não apresenta uma boa ideia da distribuição dos dados que coletei, resolvi organizar os dados, desta vez, em faixas de frequência, assim concebidas: a) 0 a 5 anos de experiência; b) 6 a 10 anos; c) 11 a 15 anos; d) 16 a 25 anos; e) acima de 25 anos.

Na página seguinte, visualizaremos gráficos de barra construídos a partir do levantamento destes dados. Com eles, poderemos ter uma ideia e visão mais apuradas da distribuição da experiência profissional dos participantes nos ensinos fundamental, médio e superior.

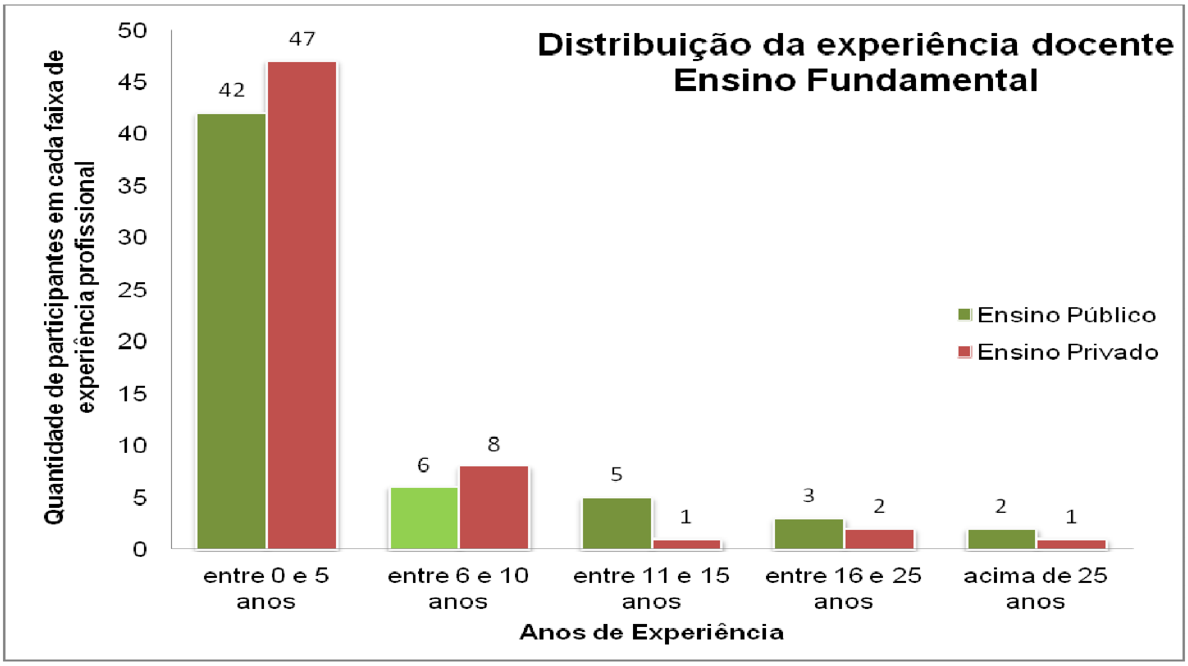


Figura 21: gráfico da distribuição da experiência docente – ensino fundamental

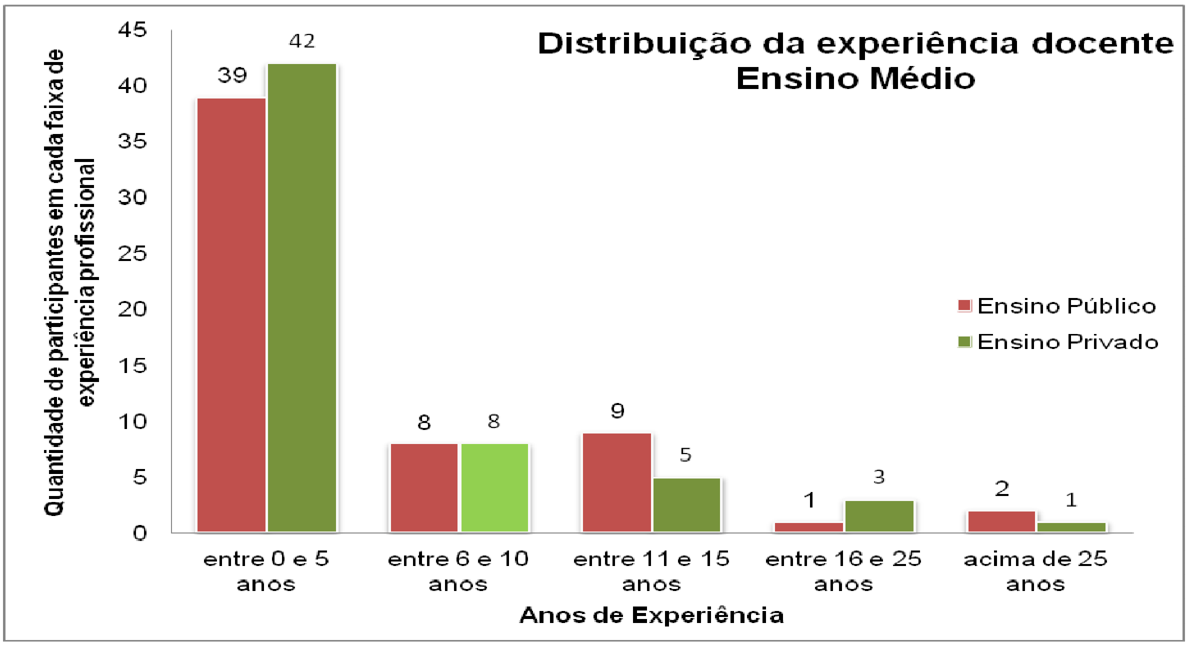


Figura 22: gráfico da distribuição da experiência docente – ensino médio

Em relação ao levantamento de dados referentes à experiência docente no ensino superior, constatou-se que a maioria dos participantes respondeu não ter experiência neste nível de ensino: em termos numéricos, 40 participantes (ou 68%) declaram não possuir experiência no ensino superior tanto público, quanto particular; 46 participantes (ou 78%) disseram não ter experiência no ensino superior público, e 47 (ou 80%) afirmaram não ter experiência no ensino superior particular. Ainda nesta esteia, na faixa de distribuição de 6 a 10 anos, verificamos que dois participantes afirmaram apresentar experiência no ensino superior público e quatro, no ensino superior particular. Já na faixa de 11 a 15 anos, apenas 3 declararam que tinham experiência no ensino superior particular.

Tabela 6: Distribuição da experiência docente no ensino superior

FAIXA DE EXPERIÊNCIA	ENSINO SUPERIOR PÚBLICO	ENSINO SUPERIOR PRIVADO
6 A 10 ANOS	2 PROFESSORES	4 PROFESSORES
11 A 15 ANOS	-	3 PROFESSORES

Apesar de nossa pesquisa ter considerado o Ensino Básico, especificamente o Ensino Fundamental, é importante considerar quais são as concepções destes professores com experiência no ensino superior, com relação à prova matemática e seu ensino em sala de aula. Dessa forma, ao realizarmos nossa análise sobre a definição de prova matemática e a avaliação das respostas dos alunos, iremos dedicar atenção especial a estes participantes.

Para identificar se existe uma relação entre concepção de prova matemática e tempo de experiência docente, dada a dificuldade de se estabelecer esta conexão por se tratar de dados de difícil manipulação (registros escritos e dados numéricos), estabelecemos uma forma de agrupar em classes as definições que os professores apresentaram sobre a prova matemática. As classes que definimos foram as seguintes:

- Prova como validação de um resultado;
- Prova como argumentação encadeada logicamente;
- Prova como instrumento de verificação da aprendizagem;
- Prova como meio de comunicação de saberes matemáticos.

Estas classes foram escolhidas a partir dos dados coletados por meio das respostas ao formulário. Constatamos que houve grande recorrência em respostas que se enquadravam nas três primeiras classes de respostas, quanto à definição de prova matemática. Um dos participantes sugeriu uma definição que remetia à função da prova de comunicar o saber matemático, enquanto que outra participante não apresentou uma definição para prova. O gráfico a seguir mostra-nos como se distribuíram estes dados.

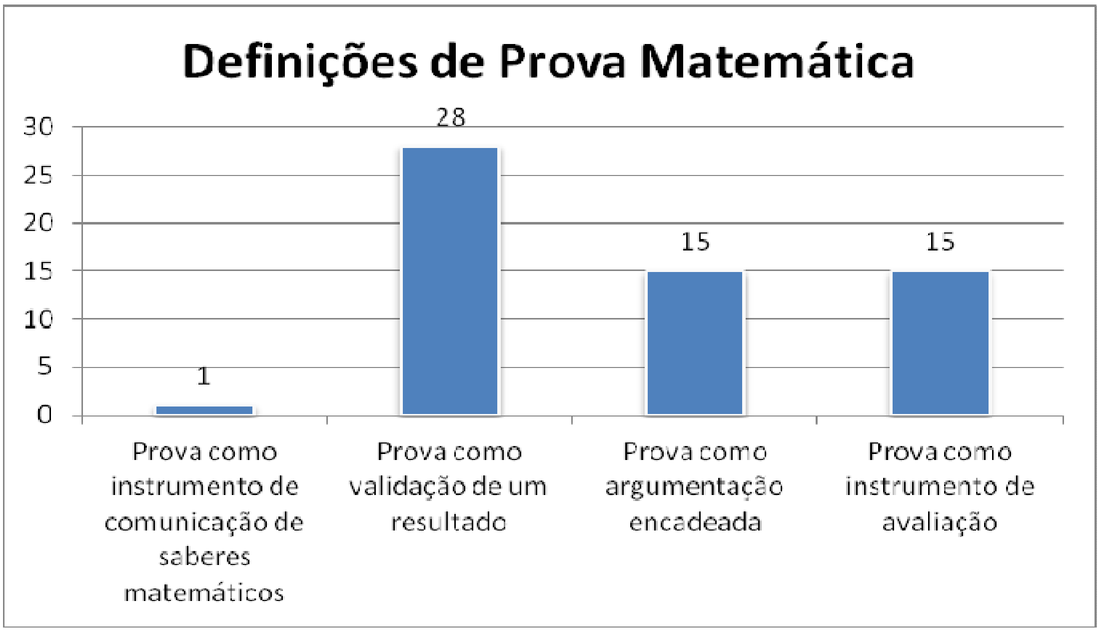


Figura 23: gráfico da distribuição das definições de “prova matemática”

Interessante destacarmos que 15 (ou 25%) participantes da pesquisa entenderam prova matemática como um “instrumento de avaliação”. Podemos especular que este equívoco se deve ao fato da palavra “prova”, em nossa língua, apresentar múltiplos significados. Contudo, na apresentação do formulário, indica-se que a pesquisa pretendeu investigar a argumentação e a prova matemática em sala de aula da Escola Básica, sugerindo, de certa maneira, o sentido de “prova” que a pesquisa indagava. Destes, nove participantes apresentavam experiência profissional acima dos cinco anos, com destaque para duas participantes: uma com 40 anos e outra com 33 anos de experiência docente. Dessa forma, não ficou evidenciado que os professores mais experientes apresentam concepções mais adequadas que os outros não tão experientes.

Fizemos este levantamento por acreditarmos que o professor, para poder emitir uma avaliação sobre uma prova matemática apresentada por um aluno, deva possuir uma concepção correta do que seja prova matemática, em termos de verificação/confirmação, via argumentação encadeada logicamente. Apesar de estes 15 professores terem interpretado prova matemática como um instrumento de avaliação (teste, exame), esta concepção não refletiu em dificuldades quanto ao julgamento das respostas dos alunos às questões de argumentação e prova.

Também, verificamos que 43 professores (ou 73% dos participantes) declararam ser a prova matemática um exercício de validação/comprovação dos resultados em Matemática, através do uso de premissas e resultados já comprovados, por meio de encadeamento lógico de argumentos. Esta ideia se assenta no que Balacheff (1982) define por *demonstração*, mas que para nós, assim como destaca Pietropaolo (2005), será entendido como *prova.* Outrossim, vimos que parcela considerável da amostra possui uma concepção adequada de prova matemática. Nestas respostas, podemos perceber a relevância que os docentes emprestam ao rigor matemático, mostrando um olhar mais tecnicista, adquirido durante a sua formação acadêmica, quando citam que a prova matemática consta de: “sequência de implicações lógicas”, ”sequência de argumentos”, “generalização”, “conhecimentos prévios” e “definições, propriedades, teoremas e axiomas”. De acordo com o que foi visto no capítulo 2, no trabalho de Godino e Recio (1997), há uma referência à prova matemática que não segue necessariamente a ideia do rigor, dado que uma prova pode estar inserida num contexto dedutivo, que promove, para certo público, convencimento da validade de uma afirmação matemática.

Convém verificar, pois, se estes professores *estão inclinados ao trabalho pedagógico que desenvolve em seus alunos a habilidade de argumentação e prova em Matemática e como o professor avalia os tipos de argumentação apresentados pelos alunos*. Estas respostas podem ser obtidas através da análise dos dados levantados de uma tabela que investiga sobre a formação docente, concepções, currículo e planejamento, e também das avaliações realizadas sobre as respostas dos alunos.

5.4 Análise das concepções docentes em relação à prova matemática

Esta seção trata do levantamento de dados obtidos por meio da Tabela 5 (p. 45). Como já dito, nesta tabela constam afirmações, em que os 59 participantes tiveram que responder segundo o código: 1. Sim, 2. Em parte e 3. Não. As afirmações se referiam à formação docente, concepções e prática docente, currículo e planejamento de aulas, sob o enfoque da prova matemática. A seguir, indicamos o quantitativo de respostas Sim, Em parte e Não.

Tabela 7: Respostas dos professores a questionamentos sobre crenças, currículo e formação docente, em relação à prova matemática na Escola Básica.

Questões:	Sim	Em parte	Não
a) Durante minha formação, houve estímulo à prática docente voltada ao ensino-aprendizagem de prova matemática.	14	29	16
b) Na instituição em que me formei, havia alguma(s) disciplina(s) que explorava(m) o ensino-aprendizagem de prova matemática na Escola Básica.	11	21	27
c) Minhas aulas e planejamentos abordam a argumentação e a justificação no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.	25	32	2
d) Meus alunos são estimulados, na sala de aula, a argumentar e a justificar em Matemática.	28	29	2
e) Meus alunos são estimulados nos instrumentos de avaliação (testes, listas e provas) a argumentar e a justificar em Matemática.	23	30	6
f) Nos estabelecimentos de ensino em que atuo, a equipe, ao formular o currículo e o planejamento, contemplam o ensino-aprendizagem da prova matemática.	12	20	27

O objetivo dos itens (a) e (b) é de constatar como ocorreu, durante a formação do professor, seu contato com a prova matemática no âmbito da Escola Básica, lugar onde irá atuar este docente. Procuramos correlacionar, assim, a prática docente e formação acadêmica com o desenvolvimento de atividades didáticas aplicadas ao ensino-aprendizagem da argumentação e prova matemática.

Como se pode perceber da tabela acima, a menor parcela dos participantes respondeu “sim” ao item (a) e (b). Isso nos revela, conforme sugerem Hanna (1990) e Knuth (2002), a ênfase no desenvolvimento, nos cursos universitários, da prova formal para validação dos teoremas ali apresentados, sem ressalvar que é importante preparar o professor para, em suas aulas na Escola Básica, construir argumentos e justificativas que não sejam formais, mais plausíveis, ou, nas palavras de Godino e Recio (1997), deduções informais.

Apesar de os itens (a) e (b) apresentarem uma maior concentração de respostas “Em parte”, podemos inferir ou especular que, mesmo em se tratando das matérias que exploram com mais ênfase a prova matemática, como Análise e Álgebra, há pouco diálogo entre estas disciplinas acadêmicas e a realidade da vivência do professor na sala de aula do Ensino Básico.

Quanto aos itens (c) até (e), nosso objetivo foi constatar se o professor se preocupa em *desenvolver com seus alunos a habilidade de argumentar e provar*, para assim podermos responder nossa primeira questão de pesquisa. Constatamos a preferência por parte dos participantes em sua maioria na resposta “Em parte”. Isso nos leva a pensar que na maioria das atividades em sala de aula o professor não abre espaço para a discussão sobre a formulação e busca de argumentos e justificações que validem uma determinada afirmação matemática, ou mesmo que formulem ou refutem conjecturas, ou ainda que em suas aulas e planejamentos o trabalho com a prova matemática e a busca de argumentos para comprovar uma afirmação matemática se dá de maneira esporádica e pouco programada. É muito comum em nossas aulas nossos alunos tentarem formular “regrinhas”, ensaiando frases como “então é sempre assim...”, “é sempre desse jeito...”, sem que sejam conduzidos formalmente pelo professor a estas “deduções”, ou mesmo a refutar algumas delas.

O objetivo do item (f) foi verificar como está a realidade da sala de aula da Escola Básica em relação ao ensino-aprendizagem da argumentação e prova, voltando o olhar para o *planejamento das aulas* e o *currículo adotado*. Revela a coleta de dados que boa parte dos participantes (27 dos participantes, ou 45%) afirmou não formular, nos estabelecimentos em que atua, planejamentos ou seguir currículos que contemplem o trabalho didático-pedagógico com argumentações e provas matemáticas.

É na universidade, em seu curso de formação docente que o professor é posto em contato primeiro, teoricamente, com a prática de ensino e a formulação de planejamentos e planos de aula. Esta concentração de respostas denota a falta de um olhar da Academia voltado a este tema na Escola Básica, como já percebida pelas respostas obtidas no item (b).

Percebemos que, em média, a maioria dos professores adotou a resposta “Em parte”. Esta convergência de respostas pode nos indicar que professor não realiza um trabalho constante, ordenado e planejado com argumentação e prova em aula. Também pode nos levar a imaginar que o professor mostra receio em afirmar que não prepara atividades, não segue currículos ou elabora planejamentos de aula que contemplem a argumentação, e prova matemática, apesar de, em tese, o professor saber da importância de se trabalhar com estas habilidades, como preconizam os PCN (1998).

Nas duas subseções que se seguem, mostramos o levantamento das notas dadas pelos professores e as justificativas dadas por eles em sua avaliação, para assim tentarmos responder à segunda questão de pesquisa.

.5.5 Análise das respostas dadas ao problema 1

O problema número 1, como já citado acima, pedia que o aluno mostrasse se era verdadeiro ou falso o fato de a soma de três números consecutivos resultar num múltiplo de três. Foram apresentadas cinco respostas de alunos obtidas na primeira fase de desenvolvimento desta pesquisa. Como também já dito, pedimos que os participantes atribuíssem uma nota a cada resposta discente, com sua devida justificativa, e também qual das respostas mais se pareceria com a que o docente daria para o mesmo problema. No gráfico a seguir, mostramos o levantamento com respeito ao item b) do problema “Qual destas respostas se parece mais com a que você daria? Por quê?”.

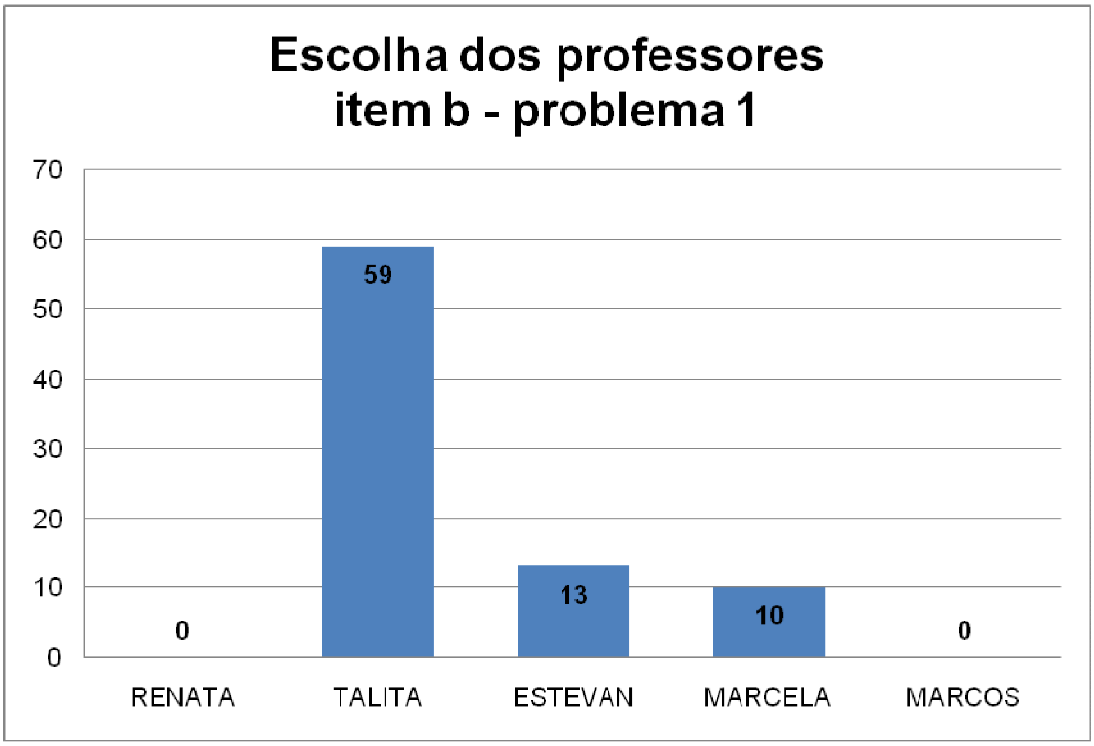


Figura 24: distribuição da escolha da resposta discente – item b do problema 1

Se voltarmos nosso olhar para as respostas apresentadas pelos cinco alunos ao problema 1, observaremos que as respostas apresentadas pelos alunos Marcos e Renata estão incorretas: Renata, apesar de responder corretamente que a afirmação matemática proposta é verdadeira, apresentou um argumento que não comprova o fato de a soma de três números consecutivos resultarem em um múltiplo de três, mesmo tendo construído uma argumentação que tentou generalizar os números consecutivos (x, 2x e 3x); já Marcos afirma equivocadamente que a assertiva é falsa, embora tenha apresentado um argumento correto para sua resposta: de fato, a soma de três números consecutivos pode resultar em um número ímpar, e neste caso este ímpar também será múltiplo de três. As respostas destes alunos podem ser consultadas no Anexo 2.

Verifica-se, portanto, que nenhum dos professores indicou a resposta da Renata ou do Marcos. Mas destacamos que a não escolha das respostas da Renata ou do Marcos não significa que todos atribuíram nota zero para estas respostas. Veremos mais à frente que alguns professores avaliaram as respostas levando em consideração a iniciativa de representação algébrica, por parte da resposta da Renata, e do argumento de Marcos, que está correto, se avaliado isoladamente do contexto de sua resposta ao problema 1, uma vez que a soma de três números consecutivos resultarem um número ímpar (Marcos afirmou que a afirmação era falsa, o que não está correto).

No levantamento, foi unânime a indicação da resposta da aluna Talita como aquela que o professor apresentaria se lhe fosse colocado este problema 1 para resolver. A grande maioria dos argumentos se focou em destacar o pensamento algébrico da aluna, que formulou um argumento que generaliza o padrão para todos os números naturais. Houve professores que destacaram a necessidade de a aluna utilizar em sua argumentação $x \in Z$, em vez de $x \in IN$.

Do total dos professores que optaram por escolher a resposta da Tatila, destacam-se 17 participantes que escolheram mais de uma resposta discente: seis responderam que escolheriam as respostas de Talita, Estevan e Marcela; sete escolheriam as de Talita e Estevan; e quatro, as de Talita e Marcela. Sobre estas respostas, iremos fazer alguns comentários e discussões.

A escolha da Talita foi defendida por boa parte dos professores por que era a resposta mais técnica, próxima do “rigor matemático” defendido e praticado na Academia. Uma professora, P9, assim justificou a sua escolha:

“*A resposta da Talita, pois ela se parece mais com as justificativas que nos é apresentada em nossa formação acadêmica.*”

Outros professores, como P15 e P13, destacam a influência da Academia e dos recursos didáticos de que dispõem em suas opções,:

"*A resposta de Talita se parece mais com a que eu daria. A argumentação algébrica me parece que é a mais praticada nos cursos de licenciatura (pelo menos foi o que ocorreu comigo). Isto acaba influenciando nossas atitudes nas salas de aula.*" (resposta dada pelo professor P15).

"*Como estudante a da Talita, pois assim aprendemos nos livros e em sala de aula. Como professor a da Marcela, acrescentando que* $x \in Z$." (resposta dada pelo professor P13).

A resposta dos professores P9 e P15 nos revela o quanto a Academia influencia na formação e na postura do docente em sala de aula. Pelos depoimentos, inferimos que a formação acadêmica assume papel capital na prática docente, como já destacavam Knuth (2002) e Jones (1995), sendo, desse modo, importante que os cursos de licenciatura voltem seu olhar para o ensino de assuntos que atualmente ficam sem um tratamento adequado em sala de aula, como é o caso do ensino-aprendizagem da prova matemática.

Houve, também, respostas que indicaram o papel pedagógico da prova, remetendo-se às ideias de Hanna (1990, 1995), quanto às provas que provam e as provas que explicam. Percebemos que os professores que escolheram mais de uma resposta discente no item b) apresentaram justificativas que indicavam a importância de se construir um raciocínio lógico-dedutivo, começando pelo empirismo para se alcançar o pensamento abstrato via generalização de padrões. A seguir, registramos algumas destas respostas:

"*A de Talita, pois sempre procuro dar rigor às respostas, mas com certeza eu procuraria primeiro resolver a questão como o Estevan e depois generalizar como Talita.*" (resposta dada pelo professor P3).

“*A da Talita como solução e a da Marcela, como pedagógica.*” (resposta dada pelo professor P2).

“*(...). As repostas de Estevan e Marcela argumentam bem, mas a de Talita é que serve como prova para alunos das séries finais do fundamental ou ensino médio*” (resposta dada pelo professor P5).

“*Começaria a questão com o exemplo de Estevan, colocando vários exemplos na lousa. Logo após mostraria outra forma de pensar, como a de Marcela e terminaria com o exemplo de Talita.*” (resposta dada pelo professor P8).

Pelas repostas apresentadas neste item b), verificamos que nove professores (ou 15% da amostra) ressaltaram o viés pedagógico da argumentação apresentada, reforçando a função da prova como explicação do fato matemático. A grande maioria dos professores ressaltou o caráter técnico, o rigor matemático e o fato de a estrutura argumentativa da resposta da Talita ser a mais adequada para provar a proposição, mostrando claramente a visão do professor sobre a função da prova como meio de comprovação das afirmações matemáticas – provas que provam (HANNA, 1990, 1995).

Passemos, a seguir, para a análise das notas e avaliações relativas ao item a) do problema 1. Comentaremos as notas e respostas apresentadas pelos professores. Os gráficos com as distribuições das notas dadas às respostas discentes encontram-se no Anexo 5. A tabela que segue mostra o comportamento das notas em termos de média, desvio padrão e moda.

Tabela 8: Média, desvio padrão e moda das notas atribuídas pelos participantes às respostas dos alunos (item (a) do problema 1).

	RENATA	TALITA	ESTEVAN	MARCELA	MARCOS
MÉDIA	3,8	9,8	6,6	8,3	1,1
MODA	5,0	10,0	5,0	10,0	0,0
VARIÂNCIA	6,7	0,2	6,4	4,3	2,6
DESVIO PADRÃO	2,6	0,4	2,5	2,1	1,6

Como comentamos anteriormente, as respostas dadas pelos alunos Renata e Marcos estavam incorretas. Mesmo assim, devido às variadas concepções que os professores trazem consigo a respeito de avaliação e de prova matemática, percebemos grande variação nas notas atribuídas a estes dois alunos. Verificamos na tabela acima, através da medida de variância, o afastamento que a média apresentou em relação às notas atribuídas aos alunos Renata e Marcos. Especialmente sobre a aluna Renata, a variância de suas notas é 6,7, o que indica uma grande variedade de notas dadas à sua resposta, como também podemos constatar no gráfico da distribuição de suas notas (vide Anexo 5).

Pela tabela acima, apesar de a moda das notas atribuídas ao aluno Marcos ser zero, a média das 59 notas aferidas é 1,1, com desvio de 1,6, o 2º menor verificado nesta série de dados. Esta variedade de notas nos indica os vários olhares docentes sobre a prova: alguns, mais exigentes, imbuídos do rigor matemático requerido pela Academia, indicaram nota zero, para os dois alunos; por outro lado, houve professores (P48 e P50) que atribuíram nota 10,0 à resposta de Renata.

No levantamento das notas e de suas respectivas justificativas, identificamos tipos de resposta que serão nesta análise categorias. Desse modo, agrupamos as respostas encontradas em cinco categorias:

- Justificativas que valorizam argumentação e/ou representação simbólica corretas nas respostas dos alunos; (categoria 1)
- Justificativas que destacaram os erros conceituais, de representação e/ou de argumentação nas respostas dos alunos; (categoria 2)

- Justificativas que destacaram a falta de rigor matemático; (categoria 3)
- Justificativas confusas e/ou equivocadas dos participantes; (categoria 4)
- Não apresentou justificativa (categoria 5).

Seguindo a metodologia de análise que temos aplicado, montamos um gráfico que mostra como se comportou a distribuição das justificativas às notas que os professores atribuíram no item (a) do problema 1. Perceberemos uma predominância em valorizar a argumentação e a representação algébrica utilizadas pela aluna Talita (categoria 1) e em destacar os erros de argumentação e representação dos alunos Renata e Marcos (categoria 2) e pela falta de rigor nos argumentos apresentados por Marcela e Estevan (categoria 3).

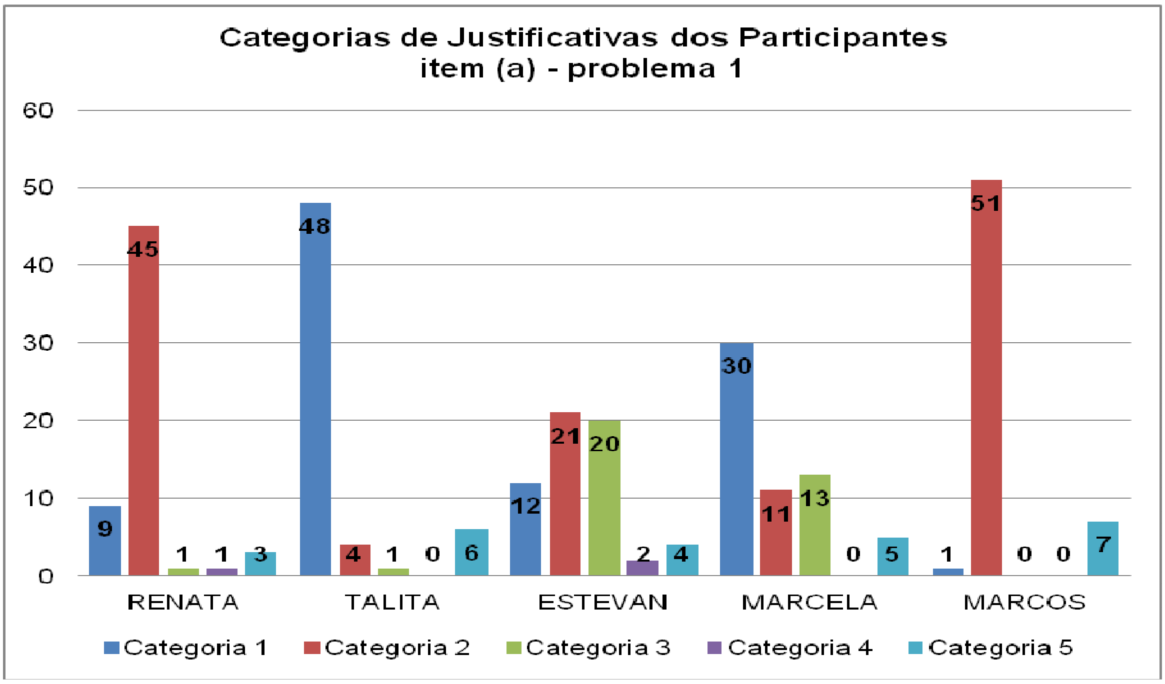


Figura 25: gráfico da distribuição das categorias de justificativas dadas pelos participantes (item (a) – problema 1).

Como já dito anteriormente, as respostas de Renata e Marcos estão, no ponto de vista da prova matemática, incorretas. O levantamento, como se verifica no gráfico e já pontuado anteriormente, mostra que a grande maioria dos professores justificou de maneira a ressaltar as falhas presentes nas argumentações e na forma como estes alunos representaram suas ideias (categoria 2).

Embora a resposta da Renata não seja correta em termos de condução argumentativa, houve professores que valorizaram o fato de a discente ter tentado representar os números consecutivos escrevendo-os como x, 2x e 3x. Neste sentido, destacamos algumas justificativas que evidenciam o esforço da estudante em encontrar uma maneira formal e generalizada através de expressões algébricas, para argumentar e, portanto, demonstrar a validade da afirmação:

“10! Pois ela compreendeu a essência do problema e utilizou seus conhecimentos para justificar.” (justificativa do participante P48)

“8, x, 2x, 3x não são números consecutivos, descontaria uma parte da nota devido a esse argumento” (justificativa do participante P35)

“5, a aluna chegou a resposta correta, porém sua demonstração não está correta (só vale para x = 1).” (justificativa do participante P59)

“5. Renata consegue representar de forma algébrica um múltiplo de 3 (6x) mas ainda não expressa algebricamente o conceito de números consecutivos.” (justificativa do participante P51)

Por outro lado, outros professores foram taxativos em relação ao tipo de argumento apresentado, destacando, principalmente, o erro na representação dos números consecutivos, por parte da aluna Renata, e o erro de argumentação verificado na resposta dada pelo aluno Marcos. A seguir destacamos alguns depoimentos:

"1. A aluna responde corretamente que é verdadeira. Mas tem dificuldade de algebrizar as ideias matemáticas" (justificativa do participante P21 à nota dada à aluna Renata – categoria 2)

"5. Entendeu o problema, porém não soube representar três números consecutivos." (justificativa do participante P23 à nota dada à aluna Renata – categoria 2)

"5. A ideia foi boa, mas falhou na representação dos números consecutivos." (justificativa do participante P20 à nota dada à aluna Renata – categoria 2)

"5. A aluna não soube expressar algebricamente 3 números consecutivos" (justificativa do participante P44 à nota dada à aluna Renata – categoria 2)

"1. A aluna responde corretamente que é verdadeira. Mas tem dificuldade de algebrizar as ideias matemáticas" (justificativa do participante P21 à nota dada à aluna Renata – categoria 2)

"3,0 pontos. Pois ele não observou que os números ímpares resultado de seus três números consecutivos são todos múltiplos de três sim" (justificativa do participante P42 à nota dada ao aluno Marcos categoria 2)

"5. De fato, a soma de três consecutivos pode ser ímpar, mas nesse caso, será sempre um ímpar que é múltiplo de 3. (justificativa do participante P20 à nota dada ao aluno Marcos – categoria 2)

"0,0. Acho que ele confundiu múltiplo de 3 com números ímpares". (justificativa do participante P23 à nota dada ao aluno Marcos – categoria 2).

Estas justificativas transcritas acima nos permitem destacar duas linhas de pensamento presentes: uma, em que os professores se atêm às falhas argumentativas e aos erros de representação dos alunos; outra, que ressalta, no entanto, o esforço do aluno em empreender a argumentação. De fato, podemos ver no Anexo 5 que não houve uma unanimidade em atribuição de notas baixas para os alunos Renata e Marcos. Isso pode estar associado à influência da formação acadêmica do profissional.

Destaca-se, neste sentido, que o levantamento realizado com as respostas ao problema 1 indica que o professor, de uma maneira geral, como se verificou no levantamento dos dados com respeito à formação docente, concepções sobre currículo e planejamento (seção 5.4), não tenha vivenciado experiências didáticas que proporcionassem olhares menos rigorosos sobre a prova matemática, apresentando, desse modo, uma tendência em aplicar maior valor a respostas que se aproximam do modelo axiomático-dedutivo, como foi o caso da resposta da aluna Talita.

Olhando especificamente para os professores cujos depoimentos transcrevemos acima e que se enquadrariam no perfil mais rigoroso, observador mais inflexível dos erros dos alunos, percebemos que estes participantes:

- em média, são professores que apresentam uma boa experiência docente (acima de 5 anos);
- apresentam cursos de formação complementar (especialização, mestrado e doutorado).

Analisemos, agora, como se deu a avaliação sobre as respostas de Marcela e Estevan. Transcrevemos em seguida estas respostas para facilitar a leitura.

Estevan (14 anos): "Verdadeira, pois não importa o número que escolhermos, se o somarmos com n^{os} consecutivos o resultado é sempre múltiplo de 3

1 + 2 + 3 = 6	**5 + 6 + 7 = 18**
2 + 3 + 4 = 9	**6 + 7 + 8 = 21**
3 + 4 + 5 = 12	**. . .**
4 + 5 + 6 = 15	**235+ 236 + 237 = 708"**

Figura 26: resposta do aluno Estevan para o problema 1

Marcela (14 anos): “Verdadeira,
pois sempre que somamos três números consecutivos, se subtrairmos 1 do maior número e somarmos no menor, teremos três números iguais multiplicados por três

Ex.: 1, 2, 3

$$\underset{+1}{\boxed{1}} + \boxed{2} + \underset{-1}{\boxed{3}} = \boxed{2} + \boxed{2} + \boxed{2} = 3 \,.\, 2$$

Figura 27: resposta da aluna Marcela para o problema 1

Não há dúvida em afirmar que, do ponto de vista do rigor da prova matemática, a resposta discente que mais dialoga com este caráter é aquela apresentada pela aluna Talita. Contudo, as respostas dos alunos Estevan e Marcela apresentam um primeiro passo para se alcançar a habilidade de provar em Matemática. Se analisarmos em conjunto as respostas de Estevan, Marcela e Talita sob o olhar de Balacheff (1988), verificamos a transição defendida por ele entre a prova pragmática e a prova conceitual, passando pelo empirismo natural do Estevan e pelo exemplo genérico da Marcela, até alcançar o experimento mental da Talita. Houve professores que destacaram as respostas da Marcela e do Estevan como sendo de cunho “pedagógico”, devido à sua argumentação, que sugere um comportamento padrão para a soma de três números consecutivos. O cunho pedagógico percebido nestas respostas se dá pela forma como argumentam, explicando por que é verdadeiro o resultado, podendo ser compreendido como uma prova que explica (HANNA, 1990, 1995). A seguir, vejamos alguns julgamentos dos participantes com relação à aluna Marcela. Observemos que há contrastes de opinião.

“10,0. Argumentou de forma geral e usou o exemplo apenas para ilustrar. De novo, só vale se $x \in Z$” . (justificativa do participante P20 à nota dada à aluna Marcela).

“10. Compreensão completa dos conceitos e boa compreensão de propriedades aritméticas”. (justificativa do participante P15 à nota dada à aluna Marcela).

“5,0. O raciocínio é bom, mas não prova rigorosamente nada”. (justificativa do participante P10 à nota dada à aluna Marcela).

“10. Foi correta no pensamento e apesar do exemplo numérico, argumentou de forma geral”. (justificativa do participante P36 à nota dada à aluna Marcela).

“5,0. Por não generalizar (considero o raciocínio correto)”. (justificativa do participante P6 à nota dada à aluna Marcela).

“10. Em essência ela concluiu o mesmo que Talita”. (justificativa do participante P41 à nota dada à aluna Marcela).

“7. Falta a comprovação algébrica (...)”. (justificativa do participante P18 à nota dada à aluna Marcela).

“0,0. Ela analisou apenas um caso particular. Será que valeria para outros?”. (justificativa do participante P23 à nota dada à aluna Marcela).

Interessante constatar esta variedade de opiniões, mostrando-nos as diversificadas concepções que os professores constroem durante sua formação e exercício do magistério. Falando especificamente do participante P23, que atribuiu nota zero à resposta de Marcela, vale destacar que este professor atribuiu nota sete à resposta de Estevan, que apresentou uma multiplicidade de exemplos. Em sua justificativa, ele afirma:

“5,0. Entendeu o problema, porém fez apenas experimentos. Estas não servem como prova matemática”.

De maneira geral, este levantamento constata a existência de alguns professores, dentre os que participaram desta investigação, que ressaltam o aspecto pedagógico da prova. Apesar de a resposta apresentada por Marcela não conter uma estrutura argumentativa que se utiliza de simbolismo matemático que permita garantir a generalidade dos argumentos apresentados, a justificativa dada pela aluna, que não usou de álgebra (letras e demais símbolos), apresenta propriedades e conjectura que vale de fato para todos os números consecutivos (sejam inteiros ou naturais).

Da mesma forma, houve alguns professores que também destacaram positivamente a iniciativa de Estevan, que apresentou uma gama de exemplos numéricos para afirmar a validade da afirmativa matemática proposta.

Balacheff (1988) nos ensina que, no processo de ensino de prova matemática, deve haver uma transição, como já destacamos, entre a prova pragmática, que recorre a símbolos e exemplos, à prova conceitual, que se utiliza de conceitos, definições e resultados previamente provados. De fato, por ser uma habilidade que requer um exercício constante e uma elevação gradual de dificuldade, seria interessante promover atividades que estimulassem esta transição, como também sugeriu um participante ao responder o item b), da pergunta 1:

"*Começaria a questão com o exemplo de Estevan, colocando vários exemplos na lousa. Logo após mostraria outra forma de pensar, como a de Marcela e terminaria com o exemplo de Talita.*" (resposta dada pelo professor P8).

5.6 Análise das respostas dadas ao problema 2

O problema 2 era uma questão de Geometria, referente ao Teorema das Paralelas. No problema, o aluno deveria concluir que a medida do ângulo x era igual à soma das medidas dos ângulos a e b, apresentando argumentos que validassem este resultado. A estrutura dos itens (a e b) no problema 2 foi idêntica àquela apresentada no problema 1. Passemos à análise das respostas dos participantes a estes itens.

Comparando este problema ao primeiro, constatamos que as respostas dos professores foram mais diretas, com relação a emitir um julgamento da questão. É possível inferir isto devido à estrutura lógica da Geometria Euclidiana, baseada na dedução, a partir de conceitos primitivos, axiomas, teoremas e proposições previamente provados (estrutura axiomático-dedutiva). Percebemos que as respostas discentes que utilizaram argumentos equivocados ou conceitos distorcidos, como Renata e Pietra, receberam as notas mais baixas.

Na análise e discussão dos dados colhidos em relação ao problema 2, procederemos da mesma forma como o fizemos com a questão 1, na seção 5.5, começando a análise pelo levantamento das escolhas dos professores participantes em relação ao item b), em que perguntamos qual das respostas discentes apresentadas se aproxima da que ele daria, justificando sua resposta. A seguir, apresentamos o gráfico com os resultados deste levantamento.

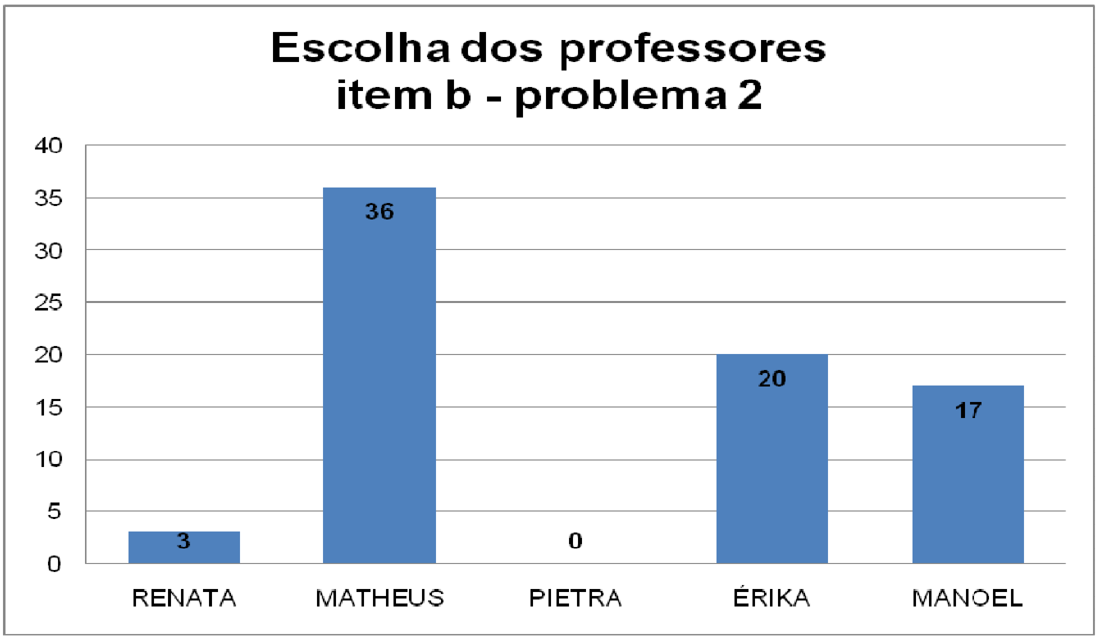


Figura 28: distribuição da escolha da resposta discente – item b do problema 1

Nesta questão, o aluno deveria, a partir da figura e das hipóteses informadas, concluir que o ângulo de medida x equivale à soma a + b, onde a e b são ângulos apresentados na figura. Observando as respostas dos alunos (vide Anexo 2), percebemos que a argumentação das alunas Renata e Pietra não conseguiu mostrar que x = a + b: Renata concluiu que x = a + b + 90º e Pietra afirmou que x = a = b.

Contudo, houve 3 participantes que indicaram a resposta da Renata como a que dariam à pergunta. A seguir destacamos a justificativa que três professores apresentaram em relação à escolha pela resposta da aluna Renata:

"*Faria da forma que Matheus fez e mostraria a forma de Renata.*" (resposta dada pelo professor P8 ao item b – problema 2).

"*A da Renata. Porque é mais prática.*" (resposta dada pelo professor P50 ao item b – problema 2)

“*Utilizaria a resposta de Renata, corrigindo sua resposta com a seguinte argumentação (*).*”(resposta dada pelo professor P57 ao item b – problema 2, reproduzida na figura 26)

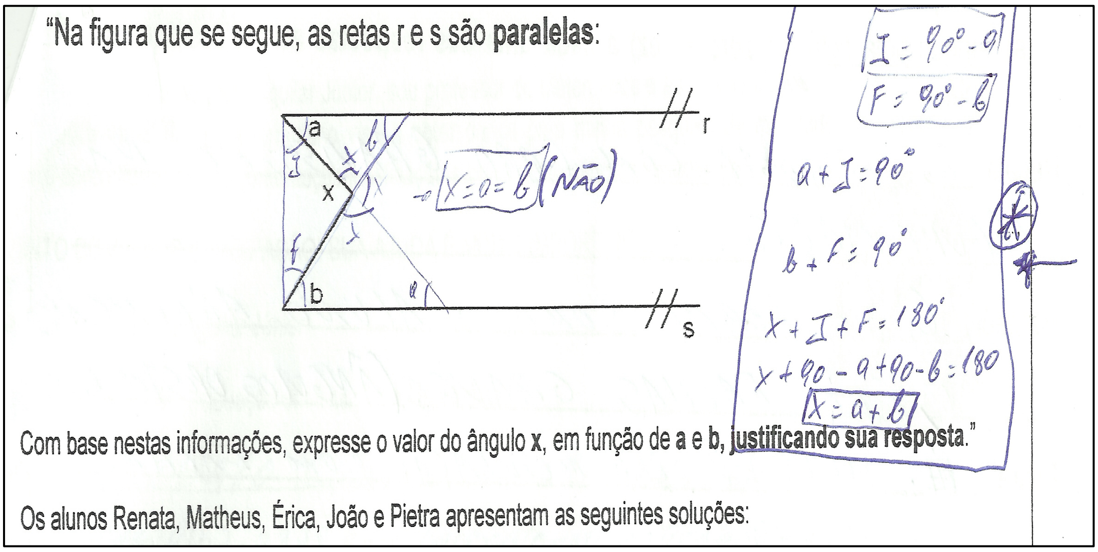


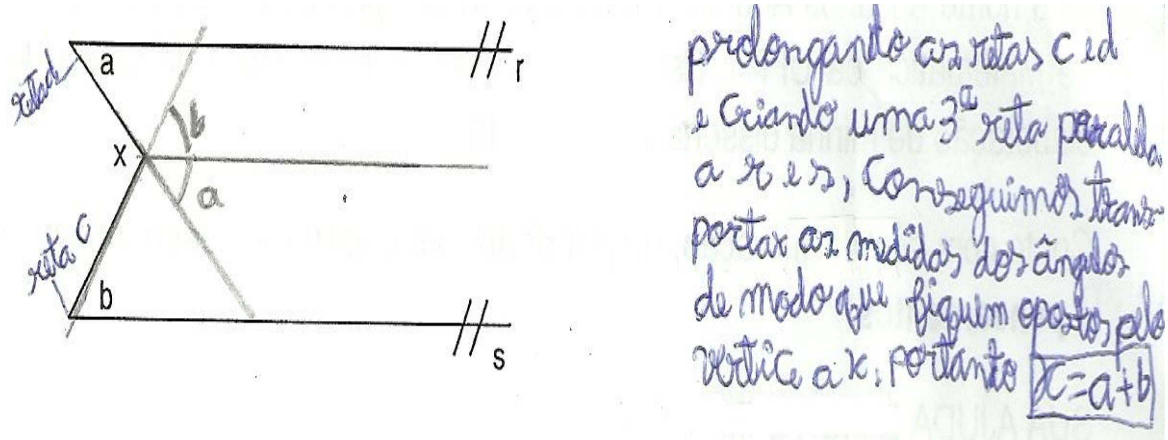
Figura 29: complementação da justificativa do participante P57 – item b – problema 2

Os participantes P8 e P57 nos fornecem justificativas que parecem indicar um olhar mais pedagógico destes participantes. Em relação, especificamente ao professor P57, notamos que o professor gostou da iniciativa da aluna Renata, que originalmente realizou uma construção auxiliar: ligou as retas r e s pelos vértices dos ângulos a e b, através de um segmento perpendicular. Baseado na ideia da aluna, o participante aproveitou o intento, realizando as devidas correções. Interessante destacar que este participante avaliou de maneira bastante crítica e negativa a resposta da aluna, atribuindo-lhe nota 2, numa escala de 0 a 10, mesmo tendo escolhido como sua resposta a argumentação da discente:

“*2. Resposta com erro gravíssimo de argumentação.*”(avaliação da resposta da aluna Renata feita pelo professor P57 – item a do problema 2)

Voltemos nosso olhar para as escolhas referentes aos demais alunos. Houve uma concentração da preferência sobre a resposta apresentada pelo aluno Matheus (36 “votos” – 61%).

Matheus (14 anos):



prolongando as retas c e d e criando uma 3ª reta paralela a r e s, conseguimos transportar as medidas dos ângulos de modo que fiquem opostos pelo vértice a x, portando *x* = *a* + *b*.”

Figura 30: Resposta do aluno Matheus ao problema 2.

Constatamos que Matheus utilizou construções auxiliares e os resultados previamente conhecidos (Axioma das Paralelas, Teorema das Paralelas e Ângulos Opostos pelo Vértice) para mostrar que x = a + b. A redação de sua argumentação indica um raciocínio mais formal, já assentado no tipo de prova conceitual de Balacheff (1988) ou ainda no esquema de prova analítico, do tipo axiomático (Sowder e Harel, 1998). Este exemplo sugere um esquema próximo àquele aceito pela comunidade matemática, o que Balacheff (1982) chamaria de “demonstração”, e que entendemos, tal como Pietropaolo (2005), como sinônimo de prova.

Alguns professores justificaram a resposta de Matheus enfocando a estrutura argumentativa empregada, que se assemelha ao método axiomático-dedutivo, que é caro à Geometria:

“*Matheus utilizou o conhecimento de retas paralelas cortadas por uma transversal.*” (resposta dada pelo professor P52 – item b do problema 2).

“*A resposta de Matheus, pois trabalhou com a definição de ângulos através das retas paralelas cortadas por transversais.*” (resposta dada pelo professor P49 – item b do problema 2).

“*A resposta do Matheus. Porque o problema pede não apenas para dar uma resposta como também justificá-la e numa justificação tem que ter argumentos claros.*” (resposta dada pelo professor P14 – item b do problema 2).

“*A resposta de Matheus. Porque está mais completa e evidencia todas as passagens corretamente.*” (resposta dada pelo professor P44 – item b do problema 2).

“*A de Matheus, pois apresenta argumentações irrefutáveis e elementos de construção geométrica.*” (resposta dada pelo professor P19 – item b do problema 2).

Nesta seara de respostas, houve algumas que destacaram a importância do registro escrito associado às construções auxiliares para enriquecer a argumentação, além de considerarem isto como uma resposta possível dentro da Geometria Euclidiana

“*A solução do Matheus, pois prioriza a escrita após as construções, durante a resolução dos exercícios.*” (resposta dada pelo professor P37 – item b do problema 2).

“*A resposta do Matheus, pois transferiu os ângulos, o que fez com que fosse visualmente explícito.*” (resposta dada pelo professor P38 – item b do problema 2).

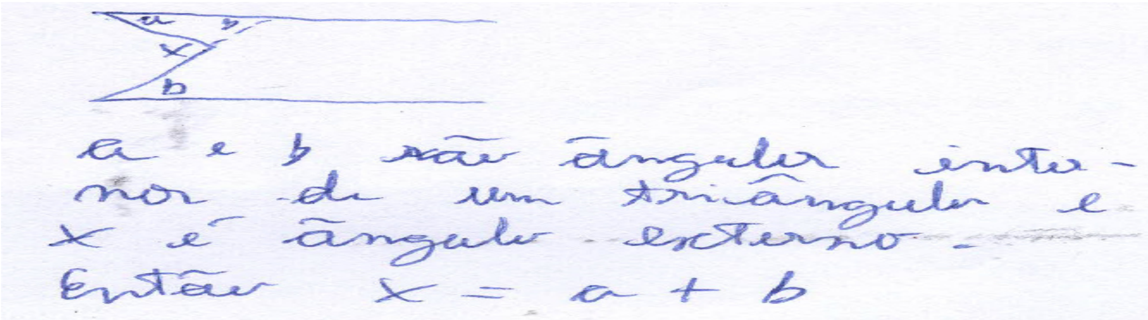
"*Matheus: argumentação comprovada através de teoremas.*" (resposta dada pelo professor P18 – item b do problema 2).

"*Matheus. Foi a mais próxima possível de uma argumentação matemática da geometria euclidiana.*" (resposta dada pelo professor P30 – item b do problema 2).

Com base nos exemplos de resposta, com os acima destacados, verificamos que a preferência pela resposta do aluno Matheus se deve ao fato de sua narrativa argumentativa se aproximar da prova matemática formal, com a qual os professores têm contato quando de seu curso de formação ou ainda em cursos de qualificação e capacitação profissionais ou também de formação continuada. Novamente percebemos a influência que a formação acadêmica exerce nos saberes docentes e nas suas concepções, em relação à prova matemática.

Outra resposta que poderia ser assim considerada e analisada é a que foi dada pelo aluno Manoel. Observando sua resposta, verificamos que o aluno também se utiliza de construções auxiliares e resultados já sabidos: Teorema das Paralelas – o que possibilitou que ele transportasse o ângulo b para a reta r – e um corolário do teorema do ângulo externo, que afirma que o ângulo externo tem medida igual à dos ângulos internos que não são adjacentes a ele – o que permitiu que se concluísse que $x = a + b$. Todavia, apenas 17 dos participantes (29%) escolheram esta resolução e nenhum deles sugeriu uma equivalência entre as duas respostas em termos de prova matemática para o problema proposto.

Manoel (14 anos):



"a e b são ângulos internos de um triângulo e x é ângulo externo.

Então x = a + b"

Figura 31: Resposta do aluno Manoel ao problema 2.

Essencialmente, as justificativas apresentadas nos indicam que a escolha pela respostas do Manoel se deu pela sua "simplicidade" e "objetividade", tanto na exposição dos argumentos quanto na construção auxiliar. A seguir destacamos algumas destas justificativas:

"*Manoel. Resolvi antes e a minha resolução ficou praticamente igual.*" (resposta dada pelo professor P20 – item b do problema 2).

"*A resposta que se parece mais com a que eu daria é a de Manoel. Porque ao se utilizar as propriedades de um triângulo e a ideia de ângulos internos e externos, podemos solucionar rapidamente e de forma satisfatória.*" (resposta dada pelo professor P48 – item b do problema 2).

"*A do Manoel. Considero a mais simples e objetiva. Fundamenta-se na observação e se vale de conceitos básicos para a argumentação.*" (resposta dada pelo professor P46 – item b do problema 2).

"*A de Manoel. Talvez por que a primeira ideia seria prolongar os segmentos e usar o conceito dos ângulos alternos internos.*" (resposta dada pelo professor P36 – item b do problema 2).

Apesar de a resposta de Manoel conter argumentos associados a construções geométricas para concluir corretamente o resultado pretendido, em termos de preferência sua afirmação ficou abaixo daquela verificada para a resposta dada pela aluna Érica. Em seu “discurso”, a discente se utilizou de um modelo de prova que recorreu exclusivamente a construções geométricas (da construção da reta paralela auxiliar para poder aplicar o Teorema das Paralelas), que segundo Sowder e Harel (1998) poderia ser classificado como um esquema de prova empírico perceptual, isto é, a argumentação foi toda ela produzida pela construção geométrica e visualização, utilizando-se de informações mais gráficas do que escritas. No trabalho realizado por Hoyles (1997), há o relato de argumentos gráficos para justificar que a soma de dois números pares resultava em um número par.

Érica (15 anos):

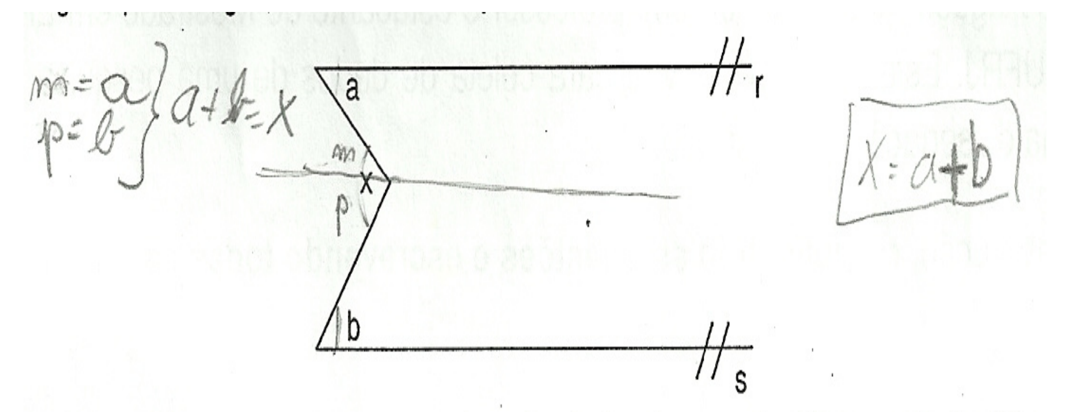


Figura 32: Resposta da aluna Érica ao problema 2.

A seguir podemos verificar as justificativas que os professores apresentaram para a escolha da resposta de Érica, onde destacam a praticidade da resposta, por ser “direta” e “econômica”, em termos de uso de outros conceitos de Geometria, além de ressaltar o valor pedagógico que este tipo de argumento possui. Na opinião do professor P17, a resposta dada é mais simples e facilita a compreensão do aluno:

"*Érica, porém explicando um pouco melhor. Entendo que é mais simples* para a *compreensão do aluno. Traçar segmentos extras em problemas geométricos sempre causa grandes dúvidas nos alunos*." (resposta dada pelo professor P17 – item b do problema 2).

"*Érica; só desenharia a reta 'x' paralela a r e a s. A resposta da Érica é mais visual; ligada às propriedades geométricas da figura.*" (resposta dada pelo professor P9 – item b do problema 2).

"*Érica, pois seria o modo mais simples de resolver que eu teria aplicado em sala de aula.*" (resposta dada pelo professor P58 – item b do problema 2).

"*Érica. É um resultado mais simples para alunos em formação. Posteriormente poderiam até ser aplicadas soluções mais sofisticadas a fim de diversificar os métodos heurísticos para facilitar a visualização de soluções de exercícios posteriores.*" (resposta dada pelo professor P28 – item b do problema 2).

Vale destacarmos, da leitura das justificativas acima, que os participantes que optaram por escolher a resposta da aluna Érica apontaram os ganhos pedagógicos que este tipo de abordagem em sala de aula pode oferecer: mais simplicidade, objetividade e estímulo ao desenvolvimento da visualização, competência essencial em Geometria. Neste sentido, verificamos a importância que os professores imprimem a este tipo de problema em sala, indicando que, de certa forma, estes professores demonstram certa preocupação em desenvolver com os alunos a habilidade de argumentação. Concordamos com a fala do professor P28, que destaca a simplicidade da resposta e sustenta a importância de evoluir os argumentos para níveis mais sofisticados (rigorosos), o que, na sua visão, proporciona a facilitação da visualização de outras soluções.

Passemos à análise do item a) deste problema. Como fizemos no item a) do problema 1, novamente solicitamos que os participantes verbalizassem suas opiniões a respeito das respostas apresentadas pelos alunos. Mais uma vez os professores tiveram que dar uma nota, de zero a dez, a cada afirmação discente e justificar a nota atribuída. O levantamento com as notas dadas pelos participantes, a cada resposta dos estudantes permitiu que construíssemos gráficos, que se encontram disponíveis no Anexo 6 desta dissertação. A seguir, montamos uma tabela com as médias, modas, desvios-padrões e variâncias das notas atribuídas para cada resposta.

Tabela 8: Média, variância, desvio padrão e moda das notas atribuídas pelos participantes às respostas dos alunos (item (a) do problema 2)

	RENATA	MATHEUS	PIETRA	ÉRICA	MANOEL
MÉDIA	2,0	9,8	1,3	8,3	8,1
MODA	0,0	10,0	0,0	10,0	10,0
VARIÂNCIA	5,6	0,5	4,9	5,4	9,3
DESVIO PADRÃO	2,4	0,7	2,2	2,3	3,0

A tabela acima nos mostra como se comportaram as notas que os participantes atribuíram às respostas dos alunos. Como já discutido anteriormente, as respostas que estão mais próximas de uma prova matemática são as respostas de Matheus, Érica e Manoel. Dessa forma, esperávamos que as notas atribuídas a estes três alunos fossem altas, próximo a dez. Apesar de a moda das notas destes três discentes ser 10,0, podemos perceber que não houve uma unanimidade na escolha desta nota: o desvio padrão das notas de Érica e Manoel foram de 2,3 e 3,0, respectivamente, indicando que houve uma considerável variação das notas atribuídas a estes estudantes.

Na coleta dos dados que possibilitou a montagem desta tabela, podemos perceber a influência que a formação acadêmica exerce sobre as concepções dos professores: mais uma vez a variabilidade das notas reflete, de certa maneira, a diversidade de posturas que os professores assumem durante sua formação e sua atuação profissionais, o que gera as variadas opiniões sobre uma mesma questão educacional (no nosso caso, a prova matemática e sua avaliação).

Especificamente sobre as notas de Manoel e Érica, que apresentam maiores variações, destacamos algumas justificativas que nos mostram estas diferentes visões sobre um mesmo tema. Vale ressaltar que, de acordo com o que já foi levantado e trazido à discussão anteriormente, a argumentação apresentada por Manoel se aproxima do modelo de prova formal, ou nas palavras de Balacheff (1988), de uma prova conceitual, por se estruturar segundo o modelo axiomático-dedutivo, enquanto que a resposta da aluna Érica utilizou essencialmente construções geométricas, remetendo ao modelo visual, que caracteriza o esquema perceptual de Sowder e Harel (1998). Houve participantes que atribuíram notas abaixo de 5, chegando a zero em alguns casos:

"*10. Compreendeu plenamente o conteúdo.*" (opinião dada pelo professor P40 sobre a resposta da aluna Érica – item a do problema 2)

"*0,0. Não especificou de que triângulo estava falando e não tornou clara a resposta*." (opinião dada pelo professor P40 sobre a resposta do aluno Manoel – item a do problema 2)

"*10,0. Conceitos bem utilizados*." (opinião dada pelo professor P29 sobre a resposta da aluna Érica – item a do problema 2)

"*0,0. Não consigo compreender seus argumentos. Deve-se ter uma investigação maior acerca destes*." (opinião dada pelo professor P29 sobre a resposta do aluno Manoel – item a do problema 2)

"*9,0. A figura está ótima, mas ele poderia ter explicado melhor sua ideia*." (opinião dada pelo professor P32 sobre a resposta do aluno Manoel – item a do problema 2)

"*0,0. Uso errado do ângulo externo*." (resposta dada pelo professor P40 sobre a resposta do aluno Manoel – item a do problema 2)

"*10,0. Manipulou de forma interessante os elementos: reta, ângulos e definições*." (opinião dada pelo professor P6 sobre a resposta da aluna Érica – item a do problema 2)

"*3,0. Embora tenha chegado à resposta correta, equivocou-se com os argumentos*." (resposta dada pelo professor P6 sobre a resposta do aluno Manoel – item a do problema 2)

Similarmente ao que fizemos no item 5.5, levantamos as justificativas que os professores apresentaram para a atribuição de suas notas às respostas dos discentes. Para tanto, novamente ao analisarmos as justificativas, aproveitamos as categorias anteriormente criadas para analisar o problema 1. Percebemos que os tipos de justificativas apresentadas se assemelhavam àqueles encontrados no problema anterior e que, dessa forma, poderiam ser agrupadas nas categorias outrora definidas:

- Justificativas que valorizam argumentação e/ou representação simbólica corretas nas respostas dos alunos; (categoria 1)
- Justificativas que destacaram os erros conceituais, de representação e/ou de argumentação nas respostas dos alunos; (categoria 2)
- Justificativas que destacaram a falta de rigor matemático; (categoria 3)
- Justificativas confusas e/ou equivocadas dos participantes; (categoria 4)
- Não apresentou justificativa (categoria 5).

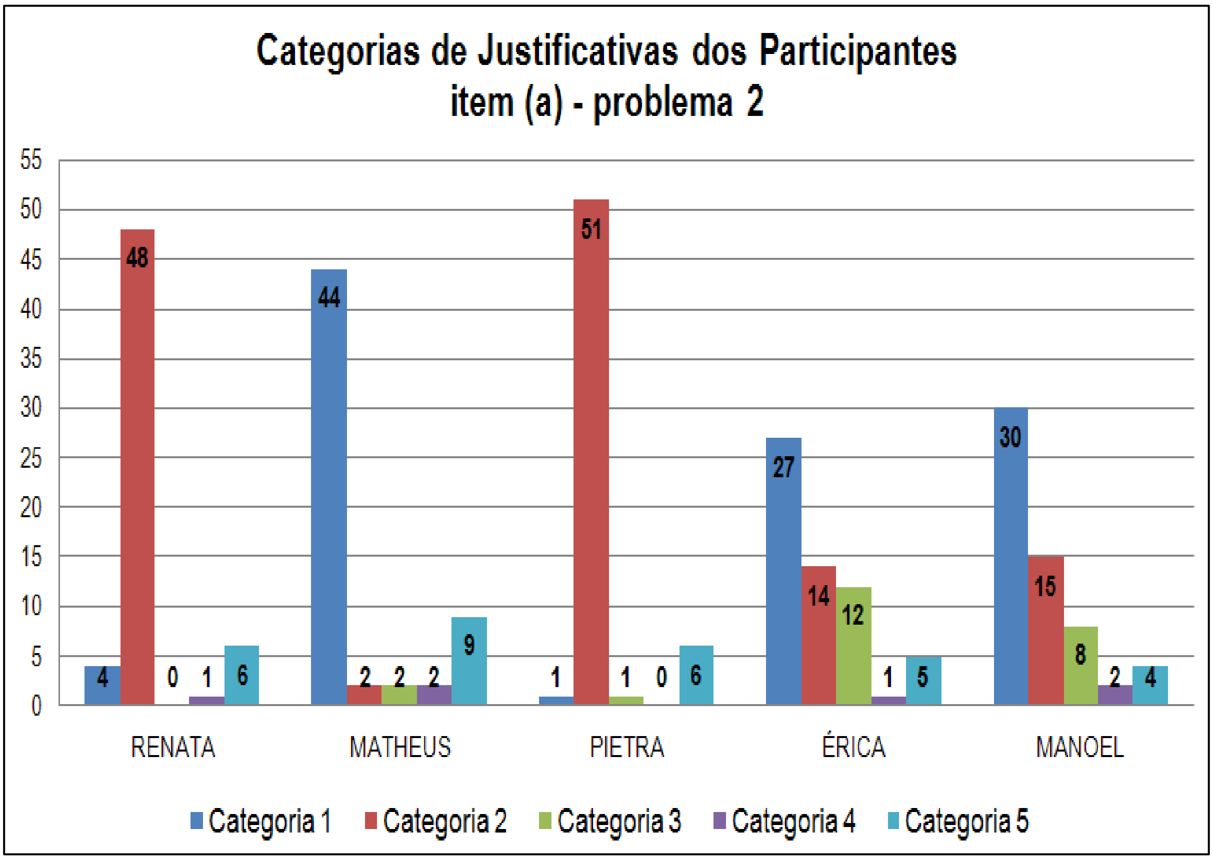


Figura 33: gráfico da distribuição das categorias de justificativas dadas pelos participantes (item (a) – problema 2)

Como já ressaltado anteriormente, as respostas apresentadas por Renata e Pietra estão erradas do ponto de vista da prova matemática. Além da utilização de hipóteses que não se sustentam, as conclusões às quais chegaram não estão corretas: Renata concluiu que $x = a + b + 90^o$ e Pietra, $x = a = b$, quando deveriam concluir que $x = a + b$. Dessa forma, esperávamos que houvesse uma maior concentração de justificativas da categoria 2 (justificativas que destacaram os erros conceituais, de representação e/ou de argumentação nas respostas dos alunos) para os alunos Renata e Matheus.

Já os alunos Matheus, Érica e Manoel, cada qual da sua forma, encaminhou suas argumentações no sentido de concluir corretamente que $x = a + b$. Contudo, houve uma prevalência absoluta da categoria 1 (justificativas que valorizam argumentação e/ou representação simbólica corretas nas respostas dos alunos) somente em relação à resposta dada pelo aluno Matheus. Quanto às respostas de Érica e Manoel houve um equilíbrio entre as justificativas dos docentes que se enquadraram nas categorias 1, 2 e 3.

De fato, é compreensível este equilíbrio especialmente sobre a resposta de Érica, que se utilizou de um esquema perceptual, na fala de Sowder e Harel (1998), para conduzir sua argumentação. Dessa forma, há uma carência de argumentos ou erros da representação visual (se olharmos a figura com a resposta de Érica, percebemos que a terceira reta traçada não está "paralela" às demais retas), ou ainda a falta de rigor matemático presente neste tipo de prova. Neste sentido, destacamos alguns julgamentos externados pelos participantes:

"*Embora sua resposta esteja correta, daria nota 6. Ele poderia ter argumentado de forma mais clara o que fez na resolução do problema.*" (participante P14 – justificativa dada à resposta de Érica).

"*10,0 (com ressalvas). É necessário mostrar ao aluno a importância de justificar algumas afirmações: m = a e p = b? Se ao lado colocasse que eram alternos internos já estaria plenamente correto.*" (participante P17 – justificativa dada à resposta de Érica).

"*5, demonstração confusa, resposta correta; faltou demonstrar.*" (participante P59 – justificativa dada à resposta de Érica).

"*8. Pela questão resolvida de maneira correta, porém não justificando a construção da reta paralela às existentes.*" (participante P37 – justificativa dada à resposta de Érica).

Em relação à resposta dada pelo aluno Manoel, esperávamos um comportamento das justificativas mais parecido com aquele constatado com a resposta de Matheus. Manoel, além de realizar construção geométrica (prolongamento de reta para formar um triângulo), utilizou-se de conhecimentos prévios, como um corolário do Teorema do Ângulo Externo e a propriedade dos ângulos alternos internos, o que remete a um esquema de prova do tipo *axiomático* (SOWDER E HAREL, 1998) ou mesmo a um *experimento mental* (BALACHEFF, 1988). Contudo, 15 (ou aproximadamente 25%) dos participantes concluíram que sua resposta trazia algum tipo de falha, seja na condução argumentativa, seja na visualização, seja na construção auxiliar, enquanto que outros 8 professores (14% do total de participantes) indicaram a falta de rigor na prova apresentada pelo estudante Manoel. Para ilustrar estes entendimentos, destacamos algumas declarações dos participantes:

"*1,0. Em qual triângulo a e b são internos e x é externo?*" (participante P35 – justificativa dada à resposta de Manoel – categoria 2)

"*4. Acertou a resposta, mas não justificou corretamente.*" (participante P52 – justificativa dada à resposta de Manoel – categoria 2)

"*8. Argumentação muito boa, porém a parte de a e b pertencerem a um triângulo foi dita e não mostrada no desenho.*" (participante P11 – justificativa dada à resposta de Manoel – categoria 3)

"*2. Não se sustenta a argumentação.*" (participante P18 – justificativa dada à resposta de Manoel – categoria 3)

"*9. Pode melhorar, em termos de encadeamento da demonstração. Precisa apresentar as propriedades, para justificar sua demonstração.*" (participante P22 – justificativa dada à resposta de Manoel – categoria 3)

"*9. O desenho mostra como o triângulo se formou, mas ele não justifica por que o ângulo do triângulo é igual a b.*" (participante P46 – justificativa dada à resposta de Manoel – categoria 3)

“*2,0, mesmo havendo a percepção da verdade, sua prova apresenta argumentações refutáveis, mostrando falha na base conceitual prévia.*” (participante P19 – justificativa dada à resposta de Manoel – categoria 2)

Destaca-se que este participante atribuiu nota 10,0 para a resposta de Érica, assim justificando:

“*10, a argumentação se apresentou de forma simbólica, contudo válida e irrefutável, há percepção de conceitos prévios definidos.*” (participante P19 – justificativa dada à resposta de Érica – categoria 1)

De forma similar ao que constatamos na análise do problema 1, verifica-se que também neste item houve maior preferência por respostas que mais se aproximaram da prova matemática formal, sob o aspecto do modelo axiomático-dedutivo. Neste sentido, a resposta de Matheus foi a melhor pontuada e mais escolhida como resposta que o professor daria a este problema.

Também se destaca desta coleta e análise a indicação de algumas respostas por parte dos professores devido à característica pedagógica que estas trouxeram consigo, isto é, à forma elucidativa e instrutiva como a argumentação dos estudantes foi construída. A título de exemplificação, destacamos algumas respostas dos professores que ilustram estas situações:

“*Tanto a de Matheus ou Érica ou Manoel. Depende do conteúdo dado e da capacidade receptiva da turma em ver a solução de várias maneiras.*” (participante P7 – resposta dada ao item b – problema 2)

“*Matheus e Érica são equivalentes e Manoel, estão corretas. Qualquer umas das duas eu faria, eu ainda faria as duas, para que os alunos pudessem ampliar mais as idéias geométricas*.” (participante P21 – resposta dada ao item b – problema 2)

“*A de Érica e a de Manoel. Para mim ambas são equivalentes e mostram de forma ilustrativa conhecimentos importantes no aprendizado destes assuntos*.” (participante P26 – resposta dada ao item b – problema 2)

5.7 Análise dos formulários respondidos por alunos de Graduação

No percurso de nossa investigação, como já destacado no capítulo 3, aconteceu inesperadamente a participação na oficina oferecida no 3º SIPEMAT (NASSER e AGUILAR JÚNIOR, 2012) de 10 alunos de Graduação em Licenciatura em Matemática de instituições das regiões Norte e Nordeste brasileiras. Dessa forma, antes de passamos às análises finais e considerações sobre a investigação, falaremos um pouco dos resultados que encontramos com estes 10 participantes.

Para manter nosso esquema de codificação, utilizaremos, nesta seção, a sigla EG para indicar os sujeitos Estudantes de Graduação que participaram desta pesquisa.

Não cabe destacarmos seu tempo de experiência docente, uma vez que ainda se encontram em processo de formação docente, apesar de 4 destes indicarem experiência na docência, em atividades de aulas particulares e monitoria em escolas privadas. Iremos, então à análise dos demais itens, a começar pela concepção a respeito do que seja uma “prova matemática”.

Quando analisamos este item do formulário através das respostas dos professores, conseguimos agrupar as respostas em 4 modalidades, a relembrar:

- Prova como instrumento de comunicação de saberes matemáticos;
- Prova como validação de um resultado matemático;
- Prova como argumentação encadeada;
- Prova como instrumento de avaliação.

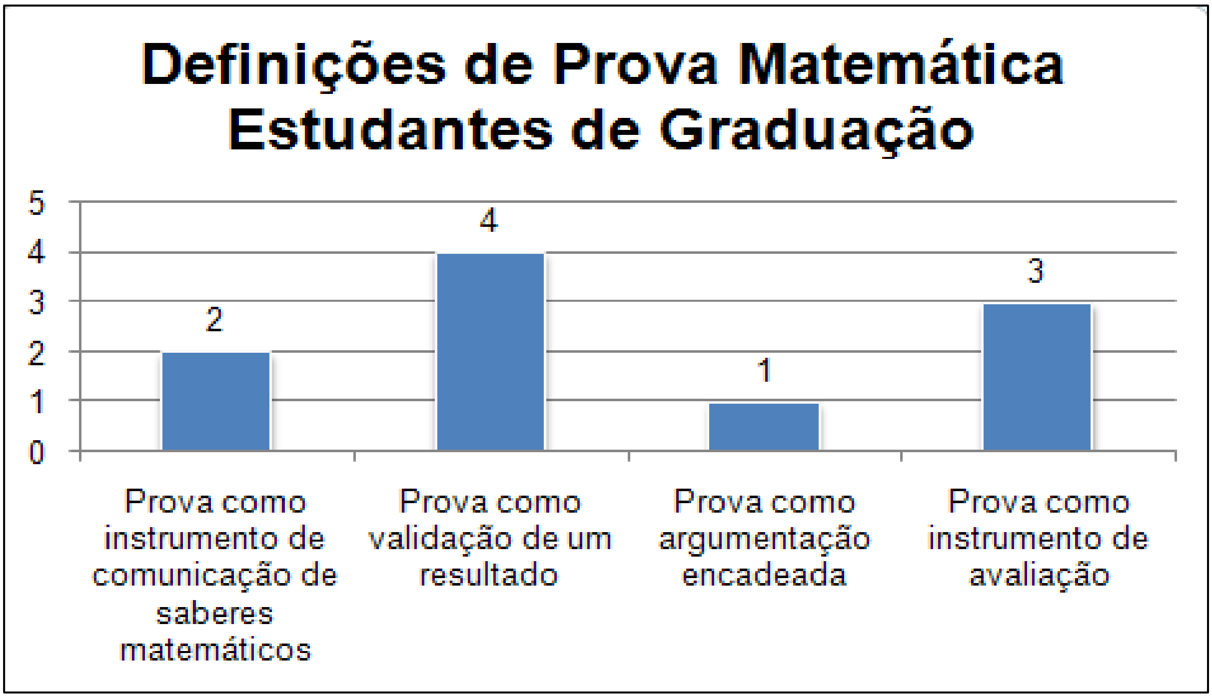


Figura 34: gráfico da distribuição das concepções sobre prova matemática – Estudantes de Graduação (EG).

Nota-se que, mesmo entre os alunos de Graduação, existe uma preferência pela concepção mais rigorosa, como se constatou no levantamento feito com os formulários dos professores. Esta concepção mais técnica, que os matemáticos empregam à prova como validadora da verdade matemática, distancia-se, de certa maneira do que pensa Hanna (1990, 1995), ao defender que existem provas que provam, mas que não nos possibilitam aprender Matemática através delas, como é a prova por absurdo, por exemplo, e as provas que explicam, que nos permitem através delas aprender conteúdos em Matemática. Neste sentido último, está o aspecto pedagógico da prova matemática, que desenvolve o raciocínio lógico-dedutivo e garante a possibilidade de se aprender Matemática.

Também não analisamos para os estudantes de graduação a tabela em que o participante registrava, segundo a escala Sim, Em Parte e Não, suas concepções e vivências sobre sua formação acadêmica, currículo e planejamento, sob o aspecto da prova matemática, tendo em vista que estes participantes são recém ingressantes ou apresentam pouco tempo de estudos superiores, não permitindo, dessa forma, uma resposta mais condizente com sua atual realidade. Assim, passamos a coletar e a analisar os julgamentos e opiniões atribuídas aos problemas 1 e 2.

Na questão 1, em relação ao item b, oito dos 10 participantes indicaram como sua resposta aquela dada pela Talita. Em suma, destacaram que a resposta da Talita era a mais completa e convincente, devido ao fato de que, ao usar a letra, permitiu uma generalização, uma forma de mostrar que a afirmação valia em qualquer situação. Os participantes EG 5 e EG 6 elegeram, respectivamente, as respostas apresentadas por Estevan e Marcos. Suas justificativas foram as seguintes:

"*Como estudante da Ed. Básica responderia como Estevan, pois seria mais fácil analisar usando os números e às vezes enquanto estudante a preguiça nos impede de usar nosso senso investigativo e/ou indagador para concluir as respostas.*" (participante EG 5 – item b do problema 1)

"*A de Marcos, por que concordo quando ele diz que nem todos os números ímpares são múltiplos de 3, o que resultou na maior nota obtida.*" (participante EG 6 – item b do problema 1)

A despeito do equívoco do participante EG 6, que não constatou que, apesar de ser verdade que nem todos os ímpares são múltiplos de três, ao resultar em um ímpar a soma de três números consecutivos, este número ímpar será um múltiplo de três, ressalta-se a justificativa apresentada por EG 5 ao declarar que sua resposta ao problema 1 seria como a dada pelo aluno Estevan. Este participante revela um pensamento que pode ser levado em conta: estruturar uma prova, com argumentos convincentes e corretos, é uma habilidade que demanda dedicação tanto do professor quanto do aluno. O senso investigativo ou indagador, como destaca EG 5, é uma das habilidades que devem ser desenvolvidas nas aulas de Matemática.

No problema 2, oito dos alunos de Graduação indicaram a resposta do aluno Matheus, e outros dois indicaram as respostas apresentadas por Manoel, Pietra e Érica. A concentração maior sobre a resposta de Matheus deu-se por causa dos argumentos utilizados, recorrendo a conhecimentos matemáticos prévios, das construções realizadas e pela forma como organizou sua justificativa. Para ilustrar, destacamos algumas das justificativas:

"*Pensaria na resolução de Matheus, pois essa ideia de transportar ângulo é pensando no fato de retas paralelas cortadas por uma transversal que formam ângulos correspondentes iguais(...).*" (participante EG 9 – item b do problema 2)

"*(Matheus). Explicitou de forma clara a questão mostrando ter conhecimento das propriedades e boa argumentação.*" (participante EG 8 – item b do problema 2)

Como ocorreu com os professores, alguns indicaram mais de uma resposta, sugerindo equivalência entre as respostas e também um outro aspecto não citado por nenhum dos professores participantes: a influência dos livros didáticos na formação do aluno e na sua forma de agir e pensar, relembrando o esquema de prova *autoritário* (Sowder e Harel, 1998). Vejamos alguns depoimentos:

"*A de Matheus e Manoel, pois são bem coerentes com a forma orientada pelos livros e onde os alunos se identificam mais.*" (participante EG 2 – item b do problema 2)

"*Usaria uma das formas apresentadas pelos alunos Matheus, Érica e Manoel, pois eles estão com o raciocínio todo correto.*" (participante EG 1 – item b do problema 2)

Em seguida, verificamos como se deu a distribuição das notas dadas para cada resposta do problema 1 e do problema 2.

Tabela da distribuição das notas dadas pelos estudantes de graduação (item (a) do problema 1)

ESTUDANTES	RENATA	TALITA	ESTEVAN	MARCELA	MARCOS
EG 1	7,0	10,0	6,0	6,0	0,0
EG 2	3,0	10,0	5,0	10,0	0,0
EG 3	9,5	9,8	0,0	9,0	0,0
EG 4	5,0	7,0	5,0	0,0	5,0
EG 5	9,5	9,9	8,6	9,8	6,0
EG 6	7,0	6,0	8,0	5,0	9,0
EG 7	9,0	9,0	10,0	8,0	3,0
EG 8	9,0	9,0	6,0	6,0	0,0
EG 9	9,0	10,0	9,5	10,0	5,0
EG 10	6,0	10,0	10,0	10,0	0,0
MÉDIA	7,4	9,1	6,8	7,4	2,8
MODA	9,0	10,0	6,0	10,0	0,0
VARIÂNCIA	4,9	2,0	9,6	10,4	10,8
DESVIO PADRÃO	2,2	1,4	3,1	3,2	3,3

Tabela da distribuição das notas dadas pelos estudantes de graduação (item (a) do problema 2)

ESTUDANTES	RENATA	MATHEUS	PIETRA	ÉRICA	MANOEL
EG 1	2,0	10,0	0,0	10,0	10,0
EG 2	0,0	10,0	0,0	10,0	10,0
EG 3	3,0	9,9	0,0	5,0	7,0
EG 4	5,0	5,0	7,0	7,0	6,0
EG 5	6,0	8,2	8,5	4,0	9,0
EG 6	6,0	6,0	5,0	7,0	8,0
EG 7	8,0	9,0	7,0	6,0	10,0
EG 8	3,0	9,0	2,0	2,0	7,0
EG 9	8,0	9,5	0,0	4,0	0,0
EG 10	10,0	10,0	0,0	6,0	10,0
MÉDIA	5,1	8,7	3,0	6,1	7,7
MODA	3,0	10,0	0,0	10,0	10,0
VARIÂNCIA	9,7	3,2	12,5	6,5	9,6
DESVIO PADRÃO	3,1	1,8	3,5	2,6	3,1

No problema 1, constatamos que, como já demonstrado no levantamento dos dados referentes aos professores, houve uma melhor avaliação na resposta da aluna Talita, devido à forma como conduziu e organizou sua argumentação. Pelos mesmos motivos, no problema 2 verificamos a preferência pela resposta do aluno Matheus.

Contudo, devemos destacar que, além destas duas respostas, havia outras que também possuíam seu valor, mas que não foram bem aceitas pelos estudantes de Graduação, principalmente no problema 1: a resposta do aluno Estevan é um modelo de prova baseado em exemplos, que não é encarada como prova formal e rigorosa, e a resposta da aluna Marcela buscou encontrar uma regra ou padrão para a formação de múltiplos de três a partir de soma de três números consecutivos, o que poderia ser encarada como uma prova conceitual, nas palavras de Balacheff (1988).

Também levantamos a forma como os estudantes de Graduação justificaram as notas dadas para as respostas discentes dos problemas 1 e

2. Utilizamos as mesmas categorias criadas para organizar e avaliar as justificativas dos professores.

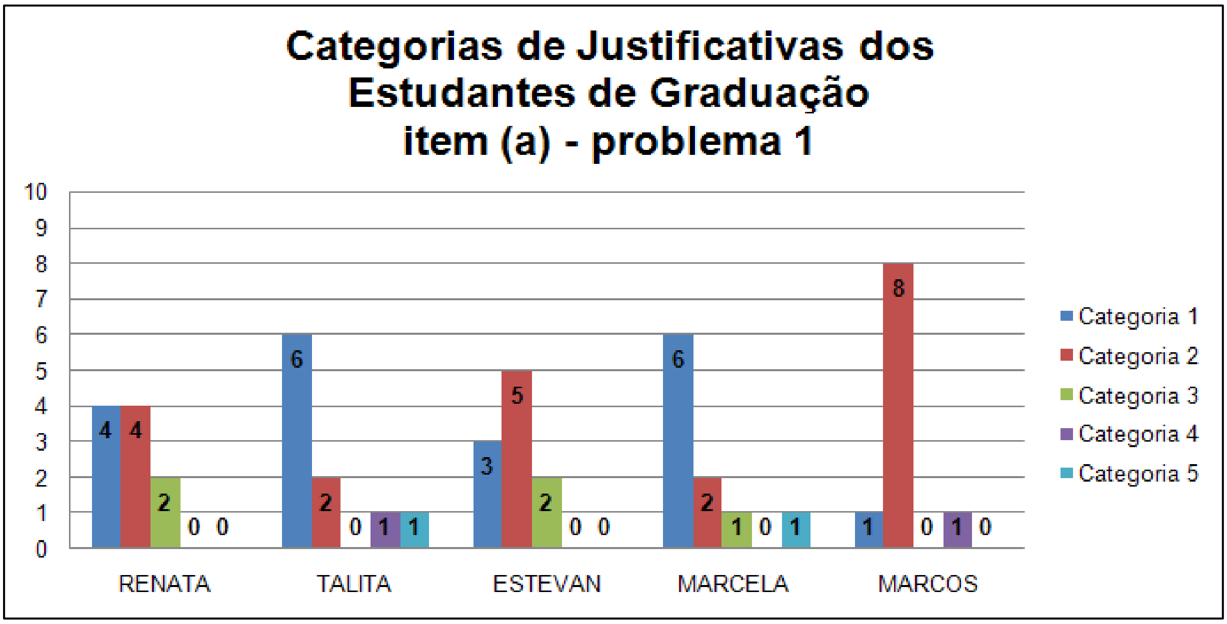


Figura 35: gráfico da distribuição das categorias de justificativa – Estudantes de Graduação (EG) – item a do problema 1.

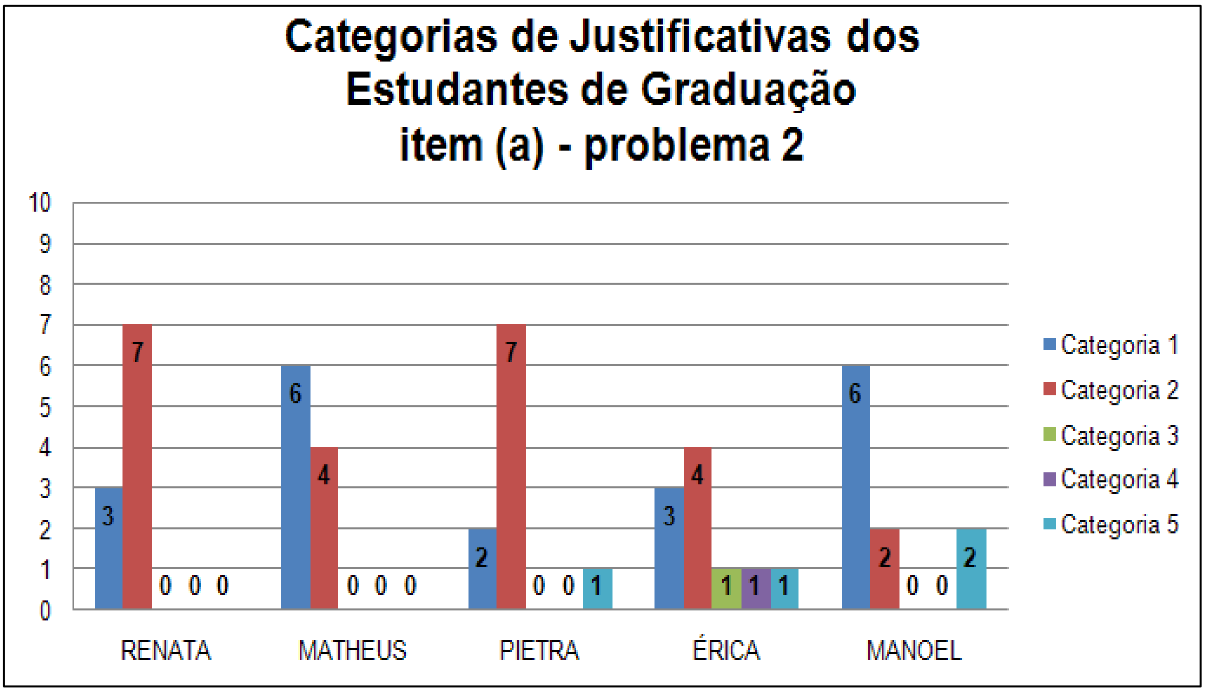


Figura 36: gráfico da distribuição das categorias de justificativa – Estudantes de Graduação (EG) – item a do problema 2.

Verificando os gráficos com as distribuições das justificativas de suas notas dadas às respostas discentes, percebemos um comportamento semelhante ao constatado no mesmo levantamento feito com os professores: a maioria dos estudantes de graduação apresentou justificativas às notas dadas para Talita e Matheus, devido ao rigor matemático e a completude de suas respostas. Também houve semelhanças na análise das respostas de Marcela (problema 1) e Manoel (problema 2): assim como alguns dos professores participantes, houve quatro estudantes universitários que apresentaram justificativa no sentido de destacar que Marcela e Manoel conseguiram provar o resultado, mas sem valorizar a estrutura da argumentação em si. Eis algumas falas:

"*(6,0) Caso de visão interpretativa, sem consistência argumentativa.*" (participante EG 8 – justificativa à nota dada para Marcela - item a do problema 1)

"*Ficou confusa a resposta da aluna*." (participante EG 4 – justificativa à nota dada para Marcela - item a do problema 1)

"5. *De todas foi a que apresentou a respostas com menos provas de que a afirmação é (...) verdadeira*." (participante EG 6 – justificativa à nota dada para Marcela - item a do problema 1)

"*6,0, por que ela usou o método da tentativa e erro. Assim, pode dar certo para alguns números e outros não*." (participante EG 1 – justificativa à nota dada para Marcela - item a do problema 1)

"*7, falta fundamentar justificativa*." (participante EG 3 – justificativa à nota dada para Manoel - item a do problema 2)

"*6. Para mim, sua resposta está incompleta*." (participante EG 4 – justificativa à nota dada para Manoel - item a do problema 2)

Apesar de não ter sido alvo desta pesquisa, fazendo uma comparação entre dados coletados e tabulados dos estudantes de Graduação e dos professores, percebemos que não apresentam muitas distinções entre si. De certa forma, pode-se inferir que a Academia não contribui como deveria na formação de uma consciência pedagógica sobre a prova matemática, isto é, na formação docente que ressalte a importância da prova matemática para o desenvolvimento e construção do raciocínio-lógico dedutivo, uma vez que a forma de pensar e analisar do estudante de graduação é bem similar com a de professores formados e com certa experiência profissional.

Nas seções seguintes retomaremos as questões de pesquisa, de modo a respondê-las com os dados e conclusões a que chegamos, e indicamos a contribuição que esta pesquisa trouxe para a área e as investigações que podem se desdobrar desta.

Finalizando esta análise, podemos concluir que, em linhas gerais, apesar de alguns professores possuírem um olhar menos rigoroso para a argumentação e para a prova matemática apresentadas pelos alunos do Ensino Básico, destacando as iniciativas e o raciocínio matemático apresentado nas respostas, existe parcela significativa que valoriza apenas as respostas que se aproximam do modelo formal de prova, o que corrobora com o que já destacavam Knuth (2002), Jones (1995) e Hanna (1990, 1995). Esta preferência, de certa maneira como mostrou o levantamento que realizamos, está associada à formação acadêmica deste professor, que em linhas gerais, não se dedica a uma discussão pedagógica sobre os aspectos da argumentação e prova matemática nas aulas do Ensino Básico.

Passemos ao último capítulo, onde registramos nossas impressões, fazemos algumas considerações e conclusões sobre a pesquisa realizada.

6. Conclusões da investigação

Ao fim desta longa jornada, é necessário darmos um fechamento às ideias discutidas e apresentar nossas considerações sobre o objeto de nossa pesquisa. Nosso intuito, com a pesquisa, foi o de identificar as concepções, as crenças e aspectos da formação dos professores que os levam a considerar ou não a importância da prova matemática em sala de aula da Escola Básica. No caso específico de nossa investigação, quisemos saber como o professor avalia e aceita os vários níveis de argumentação que os alunos podem apresentar em uma determinada questão que requeira uma argumentação que possa comprovar a verdade matemática e também se o professor se preocupa ou dá valor ao desenvolvimento de tarefas que fomentem o desenvolvimento da habilidade de argumentar e provar em Matemática, no Ensino Fundamental.

Dessa forma, o trabalho foi estruturado de forma a responder às questões inicialmente trazidas, além de indicar caminhos que esta investigação nos dá possibilidade de trilhar em estudos futuros.

6.1 Resposta à 1ª pergunta da pesquisa

Verificamos que não há uma preocupação constante na maioria dos participantes em voltar seu olhar docente e seu fazer pedagógico para o desenvolvimento da habilidade de argumentação e provas em Matemática, através de discussões e atividades motivadoras. Podemos constatar isto pelo fato de que poucos professores atribuíram resposta Sim aos itens de c) até f) do formulário. Apesar de os professores que participaram desta fase de nossa pesquisa não terem relação com os alunos investigados na fase de coleta de respostas discentes às questões de argumentação e prova, vimos no capítulo 4 que a grande maioria dos alunos apresentava argumentos apenas baseados em um esquema empírico.

Habilidade é algo que deve ser desenvolvido por meio de experiências oferecidas pelo professor. No caso da prova matemática, esta habilidade deve ser nutrida e fomentada por atividades que estimulem o aluno a tecer argumentos, num primeiro momento ingênuos, mas que podem ser levados ao nível de formalidade que requer uma prova matemática. Uma vez que percebemos uma concentração de respostas baseadas apenas em exemplos para "provar" uma afirmação matemática, podemos deduzir que há pouca preocupação dos professores em planejar e proporcionar atividades de construção de argumentos que desenvolvam a habilidade de prova em Matemática, importante fator para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo.

Dessa forma, apesar de alguns depoimentos, como os citados e discutidos no capítulo cinco reforçarem a importância do trabalho com a prova matemática de forma a conduzir o aluno à transição de argumentos mais simples para provas mais formais, constata-se que, em relação a esta amostra pesquisada, em linhas gerais, os professores não mostram, em sua maioria, uma inclinação ao trabalho pedagógico que possibilite desenvolver as habilidades de argumentação e prova no Ensino Fundamental.

6.2 Resposta à 2ª pergunta da pesquisa

Nos levantamentos realizados, ficou evidente, tanto na análise das respostas obtidas no problema 1 quanto no problema 2, que os professores possuem grande inclinação para as argumentações que se aproximaram da prova formal, como foi o caso das respostas dos alunos Talita (problema 1) e Matheus (problema 2). Apesar de outros alunos também terem empreendido argumentos convincentes e fortes, como foi o caso da aluna Marcela no problema 1 e do aluno Manoel no problema 2, a preferência pelos argumentos mais técnicos parece estar relacionada à influência da formação acadêmica (KNUTH, 2002, JONES, 1997, HANNA, 1990, 1995) pelo rigor na construção e encadeamento lógico dos argumentos.

Observando todos os dados analisados e discutidos ao longo do capítulo cinco, fica evidente que os professores participantes desta pesquisa, em sua maioria, valorizam e melhor avaliam os tipos de argumentação e prova que estão mais próximos da prova conceitual (BALACHEFF, 1988), como foi o caso das provas apresentadas por Talita e Matheus. No entanto, as propostas de argumentação mais incipientes e ingênuas, como foi o caso da resposta do aluno Estevan (problema 1) e da aluna Érica (problema 2), não foram tão bem valorizadas por serem respostas mais pragmáticas (BALCHEFF, 1998) e inaceitáveis como prova, sob o ponto de vista do rigor matemático, como destacam Godino e Recio (1997).

Novamente em relação a esta pergunta da investigação, a influência da Academia se reflete nas concepções dos professores, que indicam a preferência por argumentos e provas discentes que se aproximem do modelo axiomático-dedutivo ou formal, mas não demonstram o mesmo empenho e inclinação em desenvolver nos alunos a habilidade de provar, o que possibilitaria o alcance deste nível de argumentação por parte dos alunos.

6.3 Contribuições da pesquisa e últimas considerações

Ao longo desta investigação, algumas reflexões que realizamos ao analisar as respostas dos professores e também aquelas apresentadas pelos alunos na 1ª fase da pesquisa, constatei que foi importante a realização desta pesquisa para, em conjunto com outros trabalhos já publicados e realizados tanto no Brasil quanto no mundo, chamar atenção da comunidade de pesquisadores em Educação Matemática e de educadores matemáticos para o ensino-aprendizagem de prova matemática no Ensino Básico. Os textos discutidos no Referencial Teórico narram que os alunos empreendem melhor seus argumentos e conseguem provar mais eficazmente as proposições matemáticas quando são colocados em contato com atividades, currículo e professor preparados para a construção desta habilidade competência (MIYAKAWA, 2002, FURINGHETI e PAOLA, 1997, JONES, 1997, KNUTH, 2002, GODINO e RECIO, 1997).

Também se verificou, mesmo não sendo finalidade desta pesquisa que os estudantes de Graduação em licenciatura em Matemática apresentam concepções bastante similares aos dos professores, dando-nos a impressão de que realmente a Academia não volta o seu olhar para a sala de aula, em especial para o ensino-aprendizagem e o desenvolvimento da argumentação e da prova matemática.

Dessa forma, algumas ideias me vieram à mente, no sentido de construir outros trabalhos nesta seara da prova matemática, como:

- Investigar, mais a fundo e em escala mais alargada, currículos de licenciatura em Matemática, através de levantamento documental e também por meio de entrevistas com professores dos cursos, para verificar o tratamento dado à prova matemática e seu diálogo com o Ensino;
- Estudar formalmente como se dá a concepção de prova matemática por parte dos professores em contraponto com as concepções por parte dos estudantes de Graduação;
- Realizar um mapeamento dos tipos de prova que os alunos dos ensinos Fundamental e Médio das redes pública e privada apresentam, numa escala de coleta de dados mais abrangente (por exemplo, na cidade do Rio de Janeiro, com uma amostra mais significativa, como fizeram Healy et al., em seu artigo datado de 2007);
- Propor estudos de casos com professores que aceitem uma investigação junto a seus alunos, de maneira a verificar se existe uma relação entre suas concepções com respeito à prova matemática e os tipos e modelos de prova que possuem.

Seria uma interessante linha de investigação estudar, em larga escala, as concepções sobre prova matemática de professores em atividade profissional e de estudantes de graduação e compará-las, confrontando também com dados dos currículos dos cursos de licenciatura, de modo a verificar o quanto a Academia contribui para a formação da consciência e necessidade de se trabalhar no Ensino Básico, em especial no Fundamental, questões e problemas matemáticos que estimulem o senso investigativo, a construção de argumentos ou refutações, de modo a fomentar o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, tão caro à Matemática e também às Ciências Exatas, de maneira geral.

Importante ressaltar que esta preferência do professor pelo rigor, pela prova que prova, ao invés da prova que explica, que ensina (HANNA, 1990, 1995) é fruto da maneira como a Academia forma o profissional. Bom seria se nos cursos de formação docente e também nos de formação continuada fossem oferecidas experiências que colocassem os licenciandos e professores em contato com autores e trabalhos que tratam desta temática da prova em sala de aula da Escola Básica.

Apesar de não termos um currículo nacional e estruturado, tendo em vista o que dispõe a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que contempla a influência das culturas regionais e das políticas locais para a elaboração dos seus currículos, temos como documento oficial os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), que não são impositivos, mas norteadores na construção de nossos sistemas curriculares. Neste documento, que deve ser criticado e aprimorado por nós, pesquisadores e educadores matemáticos, existem orientações que, no meu entendimento, podem contribuir para o desenvolvimento das múltiplas competências matemáticas, inclusive a de argumentar e provar. Numa perspectiva mais transdisciplinar, o desenvolvimento das competências matemáticas, principalmente a habilidade de argumentar e provar, é importante e fundamental para a formação do cidadão crítico, capaz de enxergar a realidade ao seu redor e interpretá-la criticamente, além de proporcionar o desenvolvimento das outras ciências, como a Física, Química e Engenharias.

Finalizo destacando a importância deste estudo não só para o campo de pesquisa da Educação Matemática, mas também por me permitir aprender mais sobre os aspectos da prova matemática depreendidos tanto na análise dos dados em si, como nas leituras realizadas.

Embora os 59 professores participantes desta intervenção terem demonstrado interesse pelo tema, seja pela simples cooperação em preencher os formulários, seja pela participação da oficina oferecida no III SIPEMAT, friso, mais uma vez, a importância de se dar atenção a este tema do ensino, que por vezes é negligenciado pelas instituições formadoras, como também por nós, professores.

7. Referências Bibliográficas

AGUILAR JÚNIOR, C. A. e NASSER, L. (2012): *Postura de docentes em relação à justificação e argumentação nas aulas de Matemática*. Memorias del 12º Simposio de Educación Matemática, p.695- 713 (em CD-ROM). Chivelcoy, Argentina

ALMEIDA, J. C. P. (2007): *Argumentação e prova na matemática escolar do Ensino Básico: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo*. 221 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica – SP, São Paulo, Brasil.

BALACHEFF, N. (1982): *Preuve et démonstration mathématique au collège*. Recherches en didactique des mathématiques 3(3) 261-304. La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble, França.

______________. (1988): *Aspects of proof in pupils' pratice of school mathematics*. In: PIMM, D. (ed.), Mathematics, teachers and children, pp. 216-235, Hodder & Stoughton, Londres, Inglaterra.

BOAVIDA, A. M. R. (2005) *A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor*. In: AMRB: XVI SIEM, Lisboa, Portugal.

BRASIL (1997): *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. 88f. Secretaria de Ensino Fundamental – SEF/MEC – Brasília, Brasil.

CSIKOS, C.A. (1999): *Measuring students' proving ability by means of Harel and Sowder proof-categorization*. Proceedings of PME-23, v. 2, p. 233-240, Haifa, Israel.

FURINGHETTI, F. e PAOLA, D. (1997): *Shadows on Proof.* PME, v. 21, pp. 273-280, Lahit, Finlândia.

FERREIRA, A. B. de H. (2000): *Miniaurélio Século XXI Escolar.* Editora Nova Fronteira, Rio de Janeiro, Brasil.

FERREIRA, L. D. (2008): *Provas Algébricas: uma investigação sobre as justificativas de estudantes da educação básica*. 133f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). – Pontifícia Universidade Católica – SP, São Paulo, Brasil.

FERREIRA JUNIOR, J. L. (2007): *Um Estudo sobre Argumentação e Prova envolvendo o Teorema de Pitágoras*. 189f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica – SP, São Paulo, Brasil.

GODINO, J. D. e RECIO, A. M. (1997): *Meaning of Proofs in Mathematics Education*. PME, v. 21, pp. 313-320, Lahit, Finlândia.

GOUVÊA, F. A. T. (1998): *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do ensino fundamental.* 264f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica – SP, São Paulo, Brasil.

GRAVINA, M. A. (2001): *Os ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético Dedutivo*. 277f. Tese (Doutorado em Informática na Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

GRINKRAUT, M. L. (2009) *Formação de professores envolvendo a prova matemática: um olhar sobre o desenvolvimento profissional.* 349 f. Tese (Doutorado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica – SP, São Paulo, Brasil.

HANNA, G. (1990): *Some Pedagogical Aspects of Proof*. Interchange (The Ontario Institute for Studies in Education), vol 21, nº 1, pp 6-13, Ontario, Canadá.

______________. (1995): *Challenges to the Importance of Proof.* For The Learning Mathematics (FLM Publishing Association), nº 15, vol. 3, pp. 42-49, British Columbia, Canadá.

SOWDER, L. e HAREL, G. (1998): *Types of Student's Justifications*. The Mathematics Teacher vol. 91, n. 8, pp. 670-675, NCTM, Estados Unidos.

HEALY, L., JAHN, A. P., PITTA COELHO, S. (2007) *Concepções de Professores de Matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa.* 24f, In: Anais da 30ª Reunião Anual da ANPEd: 30 anos de pesquisa e compromisso social, Caxambu, Brasil.

HOYLES, C. (1997): *The Curricular Shaping of Students' Approaches to Proof.* For the Learning of Mathematics 17, 1, pp. 7 – 15, FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada.

IMENES, L. M. (1987): *A Geometria no primeiro grau: experimental ou dedutiva?.* Revista de Ensino de Ciências (USP), nº 19, pp. 55-61,São Paulo, Brasil.

JONES, K. (1997) *Student-Teachers' Conceptions of Mathematical Proof*. Mathematics Education Review, n. 9, pp. 16-24, Londres, Inglaterra.

KNUTH, E. J. (2002) *Teacher's conceptions of Proof in the context of secondary school mathematics*. Journal of Mathematics Teacher Education, 5, 61-88, Holanda.

MARQUES, E.O. (2008): *Resultados de testes de larga escala: um ponto de partida para ações de formação continuada de professores em Matemática.* 136 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

MIYAKAWA, T. (2002): *Relation between Proof and Conception: the case of proof for the sumo f two even numbers.* PME, v. 26, pp. 353-360, Lahit, Finlândia

NASSER, L. (1989): *Um Problema: Resolução & Exploração.* Revista do Professor de Matemática, v. 15, pp. 45-49. Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, Brasil.

NASSER, L. e TINOCO, L. A. A. (2003): *Argumentação e Provas no Ensino de Matemática*. 2ª edição, 109 p. – UFRJ/Projeto Fundão, Rio de Janeiro, Brasil.

NASSER, L. e AGUILAR JÚNIOR, C. A. (2012): *Argumentação e provas nas aulas de Matemática: a visão do professor.* Anais do 3º SIPEMAT (3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática). Fortaleza, CE, Brasil

PIETROPAOLO, R. C. (2005): *"(Re)significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática*". 388f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, Brasil.

SHULMAN, L. S. (1986): *"Those who understand: knowledge growth in teaching".* Education Researcher, vol.15 (fevereiro, 1986), pp.4-14.

ANEXOS

Anexo 1

Caro(a) aluno(a),

Meu nome é Carlos Augusto Aguiar Júnior, sou professor e estudante de Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ. Esta atividade servirá para coleta de dados de uma pesquisa para elaboração de minha dissertação de mestrado sobre argumentação e provas no Ensino de Matemática, na Escola Básica.

Conto com sua colaboração, **respondendo as questões e escrevendo todas as suas ideias e pensamentos**!

SUA AJUDA É MUITO IMPORTANTE!

Prof. Carlos Augusto Aguilar Júnior

PEMAT/UFRJ – Pós-graduação em Ensino de Matemática

NOME: ____
TURMA/SÉRIE: _________

ESCOLA/COLÉGIO: ______________________________________

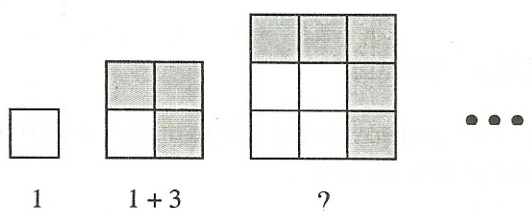
PROFESSOR(A): ___________________________ IDADE:____________

DATA: __________

1) Verifique se a afirmativa a seguir é falsa ou verdadeira, **<u>justificando</u> sua resposta**:

   "A soma de três números consecutivos é um múltiplo de 3."

2) Observe a sequência de figuras abaixo:



a) Como será a figura seguinte? Faça um desenho.

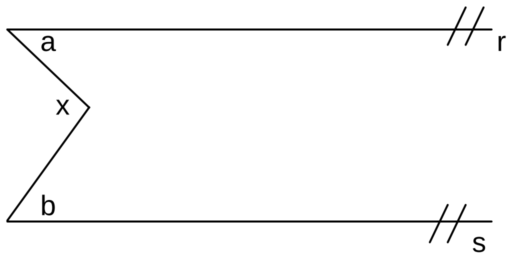
b) Escreva **o número de quadradinhos da figura** que você desenhou <u>como a soma dos brancos com os escuros</u>.

c) Qual a forma de cada figura da sequência? Represente cada uma em função do número de quadradinhos de cada um de seus lados.

d) Quanto vale a soma dos 10 primeiros números ímpares?

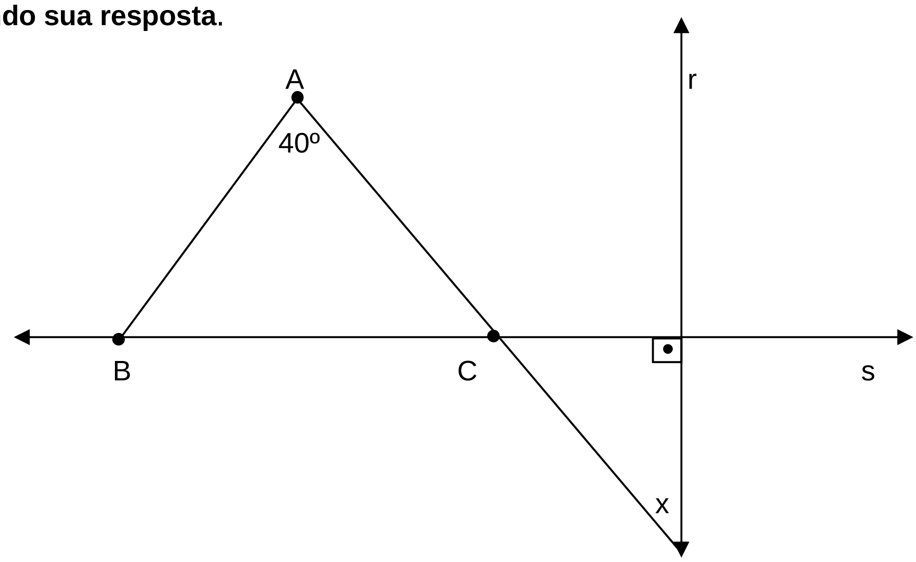
e) Escreva uma expressão para a soma dos n primeiros números ímpares.

3) Na figura que se segue, as retas r e s são **paralelas**:

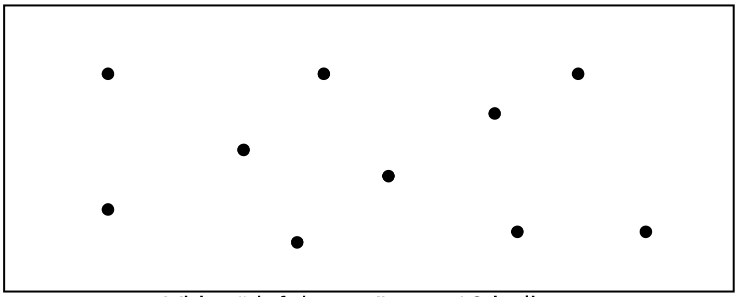


Com base nestas informações, expresse o valor do ângulo **x**, em função de **a** e **b, justificando sua resposta**.

4) Na figura a seguir, as retas r e s são perpendiculares e o triângulo ABC é isósceles, com AB = AC e Â = 40º. Nestas condições, determine o valor de x, **justificando sua resposta**.



5) Para construir uma janela ornamental, um operário precisa de pedaços triangulares de vidro. Ele pretende aproveitar um vidro retangular defeituosa, com 10 bolhas de ar, sendo que não há 3 bolhas alinhadas entre si, nem duas delas com algum vértice do retângulo, ou uma delas com 2 vértices do retângulo.



Vidro "defeituoso" com 10 bolhas

Para evitar bolhas de ar no seu projeto final, ele decidiu cortar os pedaços triangulares com os vértices coincidindo ou com uma bolha de ar ou com um dos cantos do vidro original.

Com base nestas informações, resolva as questões seguintes, **justificando todas as respostas**:

a) Quantos pedaços triangulares de vidro são possíveis de se obter com este vidro defeituoso?

b) Se o vidro apresentasse 12 bolhas? E 20? Quantos pedaços triangulares serão obtidos em cada caso?

c) É possível estabelecer uma relação entre **o número de triângulos obtidos** com **o número de bolhas existentes**?

Anexo 2

CARO(A) PROFESSOR(A),

Meu nome é Carlos Augusto Aguilar Júnior, sou professor de Matemática e estudante de Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ. Este formulário visa a obter dados para minha pesquisa de mestrado com respeito ao ensino-aprendizagem de argumentação/justificação e prova matemática na Escola Básica.

CONTO COM SUA PARTICIPAÇÃO! SUA AJUDA É MUITO IMPORTANTE!

Prof. Carlos Augusto Aguilar Júnior

PEMAT/UFRJ – Pós-graduação em Ensino de Matemática

NOME: ____

Telefone: ______________________ E-mail: ____________________________________

<table>
<tr><td>INSTITUIÇÃO DE FORMAÇÃO:
____
Ano de formação: ___________</td><td colspan="3">TEMPO DE EXPERIÊNCIA PROFISSIONAL (EM ANOS)</td></tr>
<tr><td>CURSOS DE FORMAÇÃO COMPLEMENTAR</td><td></td><td>ENSINO PÚBLICO</td><td>ENSINO PRIVADO</td></tr>
<tr><td>Especialização: ____________________
Ano de obtenção do título: ___________</td><td>FUNDAMENTAL</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Mestrado: _________________________
Ano de obtenção do título: ____________</td><td>MÉDIO</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Doutorado: ________________________
Ano de obtenção do título: ____________</td><td>SUPERIOR</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Outros Cursos (Especifique):</td></tr>
</table>

No espaço seguinte, responda livremente a seguinte pergunta:

Como você definiria uma “prova matemática”?

____

____

____

As seguintes questões devem ser respondidas dentro de uma escala de **1 a 3**, sendo:

1. Sim **2. Em parte** **3. Não**

Questões:	**Respostas:**
g) Durante minha formação, houve estímulo à prática docente voltada ao ensino-aprendizagem de prova matemática.	
h) Na instituição em que me formei, havia alguma(s) disciplina(s) que explorava(m) o ensino-aprendizagem de prova matemática na Escola Básica.	
i) Minhas aulas e planejamentos abordam a argumentação e a justificação no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.	
j) Meus alunos são estimulados, na sala de aula, a argumentar e a justificar em Matemática.	
k) Meus alunos são estimulados nos instrumentos de avaliação (testes, listas e provas) a argumentar e a justificar em Matemática.	
l) Nos estabelecimentos de ensino em que atuo, a equipe, ao formular o currículo e o planejamento, contemplam o ensino-aprendizagem da prova matemática.	

Agora, gostaríamos de saber sua opinião acerca da avaliação de questões envolvendo argumentação e prova matemática na Escola Básica. As questões a seguir foram aplicadas a alunos do 8º e 9º anos do ensino fundamental da rede pública de ensino e apresentam respostas dadas por alguns destes alunos.

Propusemos as seguintes questões aos alunos:

1) "**Verifique se a afirmativa a seguir é falsa ou verdadeira, justificando sua resposta:** "**<u>A soma de três números consecutivos é um múltiplo de 3</u>**"

Os alunos Estevan, Renata, Talita, Marcela e Marcos apresentaram as seguintes respostas:

Renata (14 anos): "Verdadeira, pois podemos representar 3 números consecutivos por x, 2x e 3x. Somando esses números, obtemos:
x + 2x + 3x = 6x, que é múltiplo de 3."

Talita (16 anos): "Verdadeira. Podemos representar três números consecutivos por: x, x+1 e x+2, com x Є IN. Somando esses números, obtemos:
x + x+1 + x+2 = 3x+3 = 3(x+1), que é múltiplo de 3."

Estevan (14 anos): "Verdadeira, pois não importa o número que escolhermos, se o somarmos com n^os^ consecutivos o resultado é sempre múltiplo de 3

1 + 2 + 3 = 6
2 + 3 + 4 = 9
3 + 4 + 5 = 12
4 + 5 + 6 = 15
5 + 6 + 7 = 18
6 + 7 + 8 = 21
. . .
235+ 236 + 237 = 708"

Marcela (14 anos): "Verdadeira,
pois sempre que somamos três números consecutivos, se subtrairmos 1 do maior número e somarmos no menor, teremos três números iguais multiplicados por três
Ex.: 1, 2, 3

$$\underset{+1}{\boxed{1}}\quad \boxed{2}\quad \underset{-1}{\boxed{3}} = \boxed{2} + \boxed{2} + \boxed{2} = 3 . 2$$

Marcos (17 anos): "Falsa, pois a soma de três números consecutivos pode ser ímpar, e nem todos os números ímpares são múltiplos de 3."

a) <u>Atribua uma nota</u> (de zero a dez) a **cada uma das respostas** acima. Justifique suas notas.

Renata:

____

____

Talita:

____

____

Estevan:

____

____

Marcela:

____

____

Marcos:

____

____

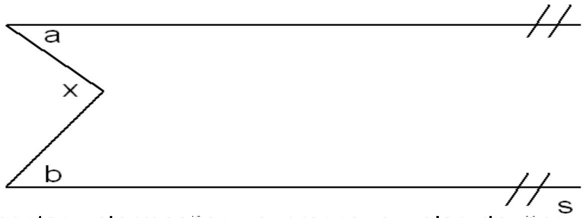
b) Qual destas respostas se parece mais com a que você daria? Por quê?

____

____

____

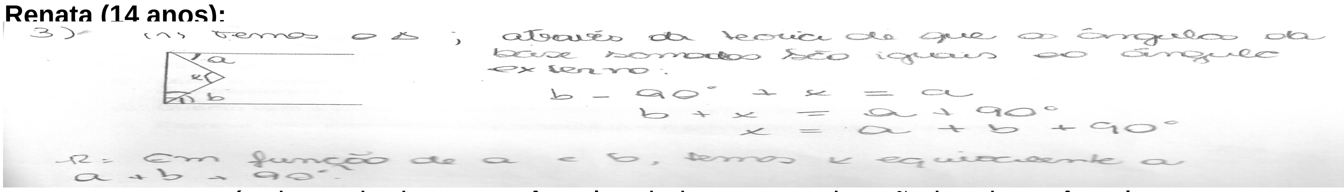
2) "Na figura que se segue, as retas r e s são **paralelas**:



Com base nestas informações, expresse o valor do ângulo **x**, em função de **a** e **b, justificando sua resposta**."

Os alunos Renata, Matheus, Érica, João e Pietra apresentam as seguintes soluções:

Renata (14 anos):



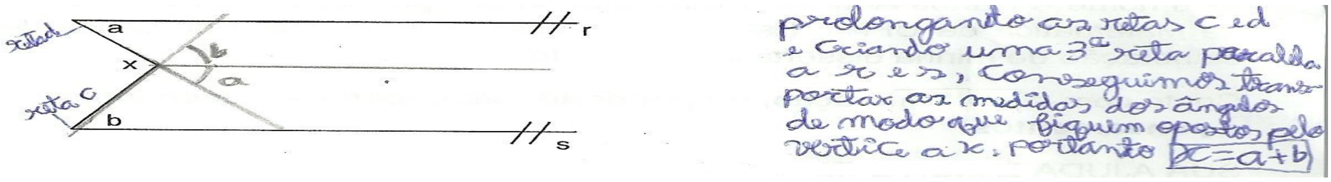
"temos o Δ; através da teoria de que os ângulos da base somados são iguais ao ângulo externo**:**

$b - 90^o + x = a$

$b + x = a + 90^o$

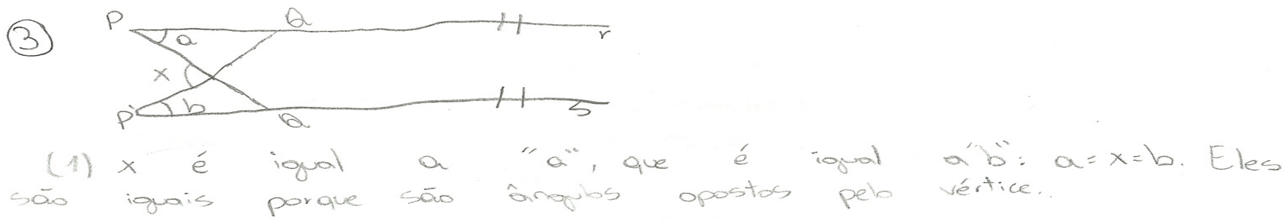
$x = a + b + 90^o$ R: Em função de a e b, temos x equivalente a $a + b + 90^o$".

Matheus (14 anos):



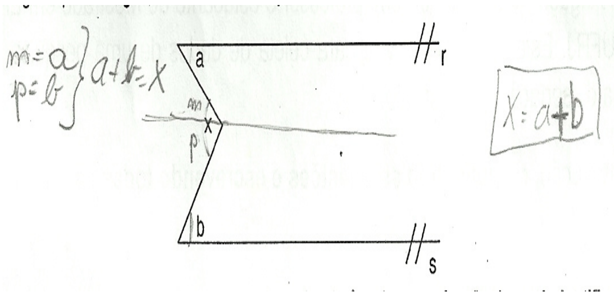
"prolongando as retas c e d e criando uma 3ª reta paralela a r e s, conseguimos transportar as medidas dos ângulos de modo que fiquem opostos pelo vértice a x, portando $x = a + b$."

Pietra (14 anos):

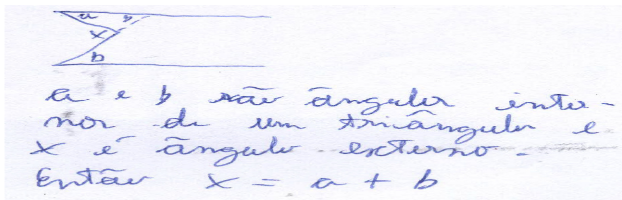


"x é igual a "a", que é igual a "b": $a = x = b$. Eles são iguais por que são Ângulos Opostos pelo Vértice."

Érica (15 anos):



Manoel (14 anos):



"a e b são ângulos internos de um triângulo e x é ângulo externo.

Então x = a + b"

a) Atribua uma nota (de zero a dez) a **cada uma das respostas** acima. Justifique suas notas.

Renata:

____

____

Matheus:

____

____

Pietra:

____

____

Érika:

____

____

Manoel:

____

____

b) Qual destas respostas se parece mais com a que você daria? Por quê?

____

____

____

OBRIGADO POR SUA COLABORAÇÃO!

Anexo 3

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Rio de Janeiro, 24 de novembro de 2011.

À Direção da(o) ____

Prezada Direção/Coordenação da(o) ____________________________

Meu nome é Carlos Augusto Aguilar Júnior e sou aluno do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRJ. Venho por meio desta missiva solicitar autorização de V. Sª. para aplicação de um questionário a alunos desta Instituição. Esta atividade levantará dados para minha pesquisa em Argumentação e Prova no Ensino de Matemática. Num segundo momento da minha pesquisa, aplicarei questionários e realizarei entrevistas com professores.

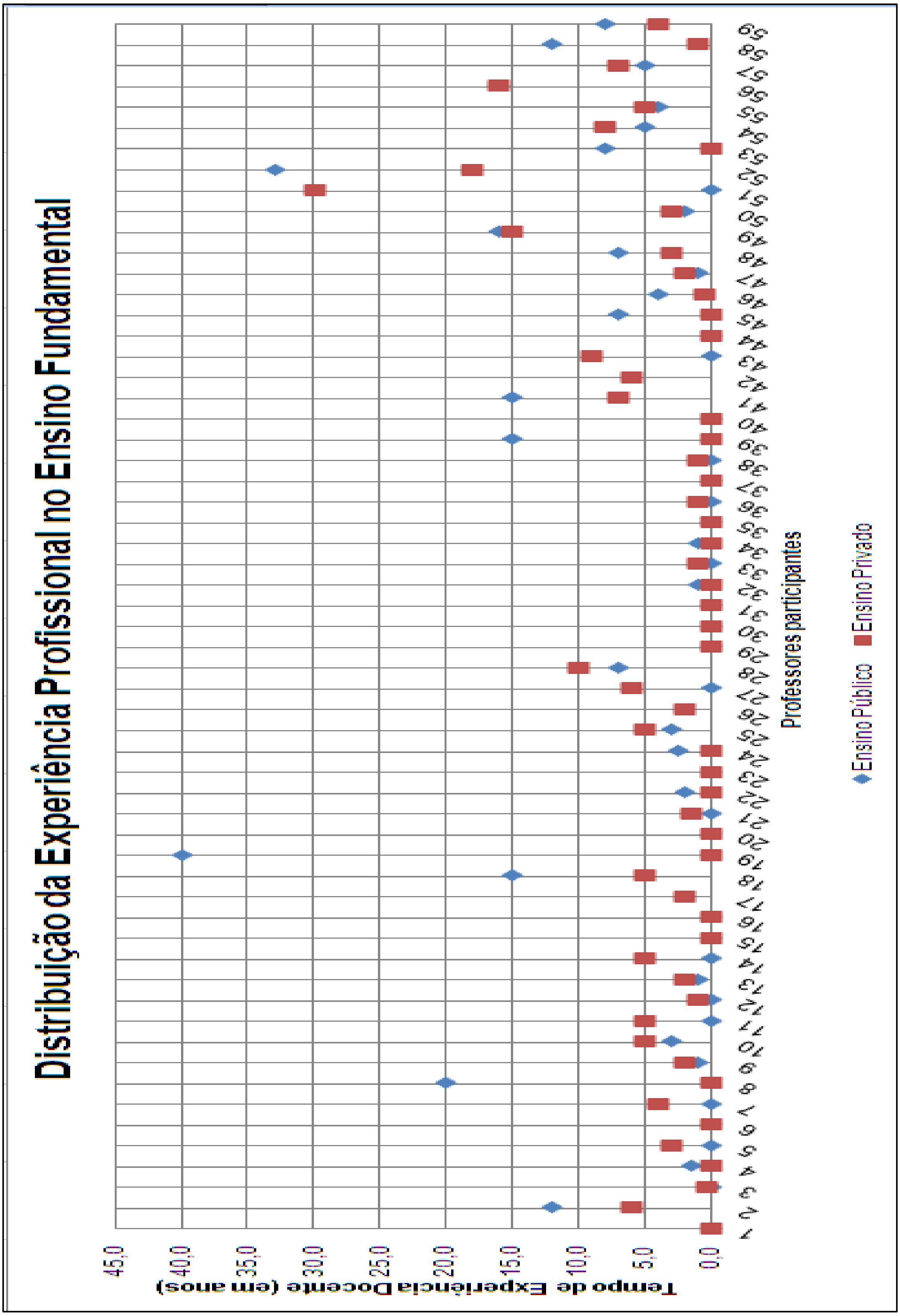
Agradeço desde já sua atenção, contando com sua ajuda.

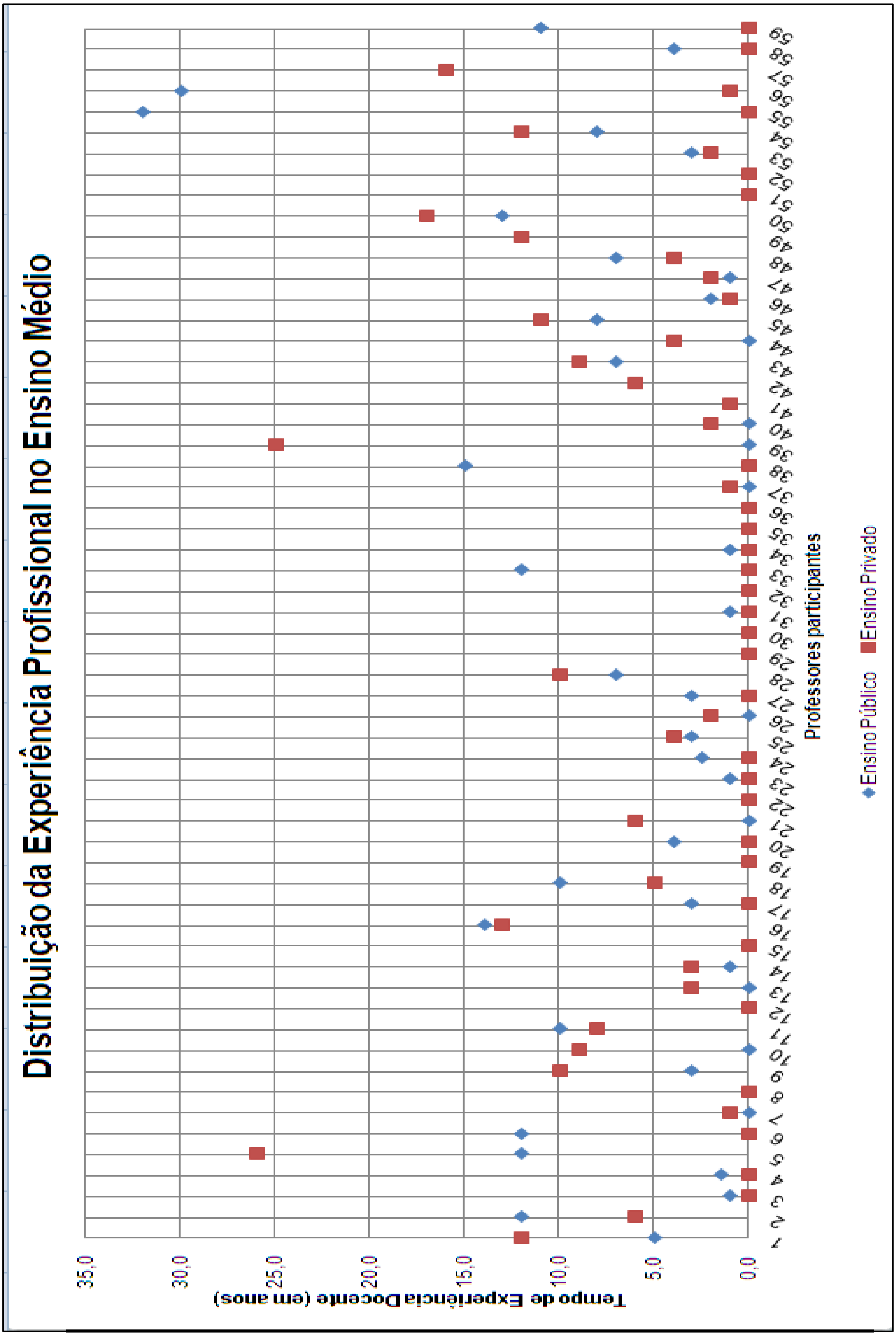
Saudações,

____

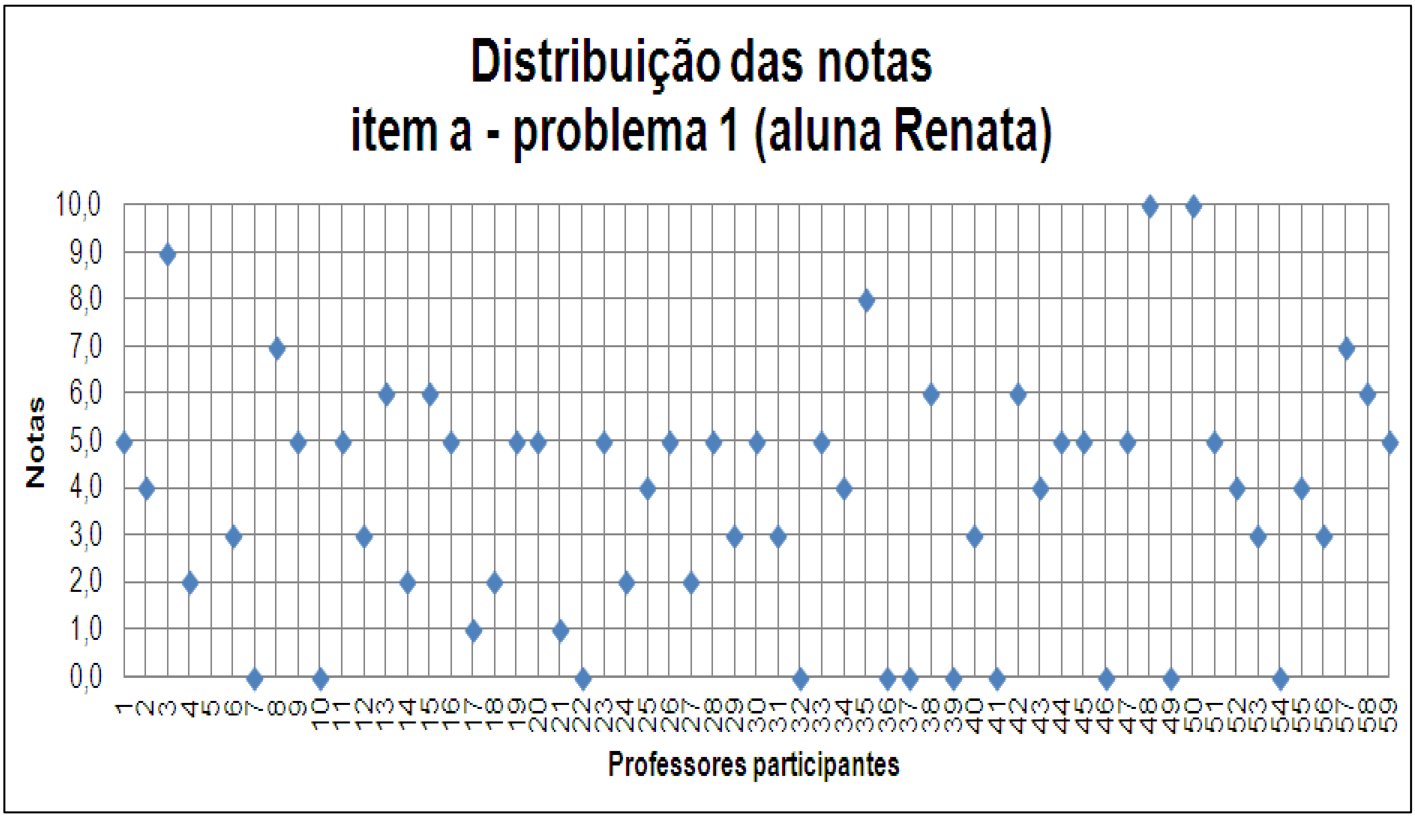
Carlos Augusto Aguilar Júnior
carlosaugustobolivar@hotmail.com
Mestrando do Pemat/UFRJ – DRE 110030333

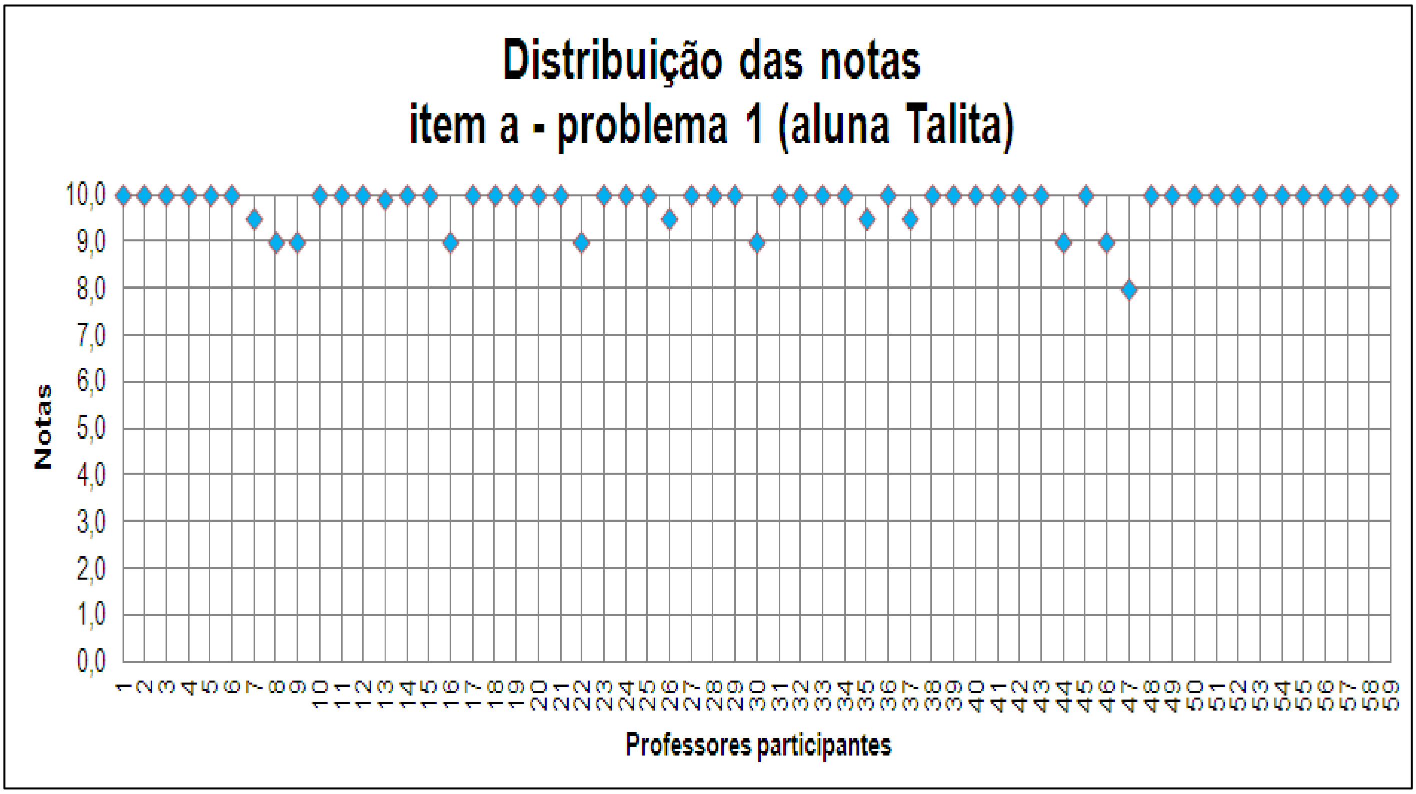
Anexo 4

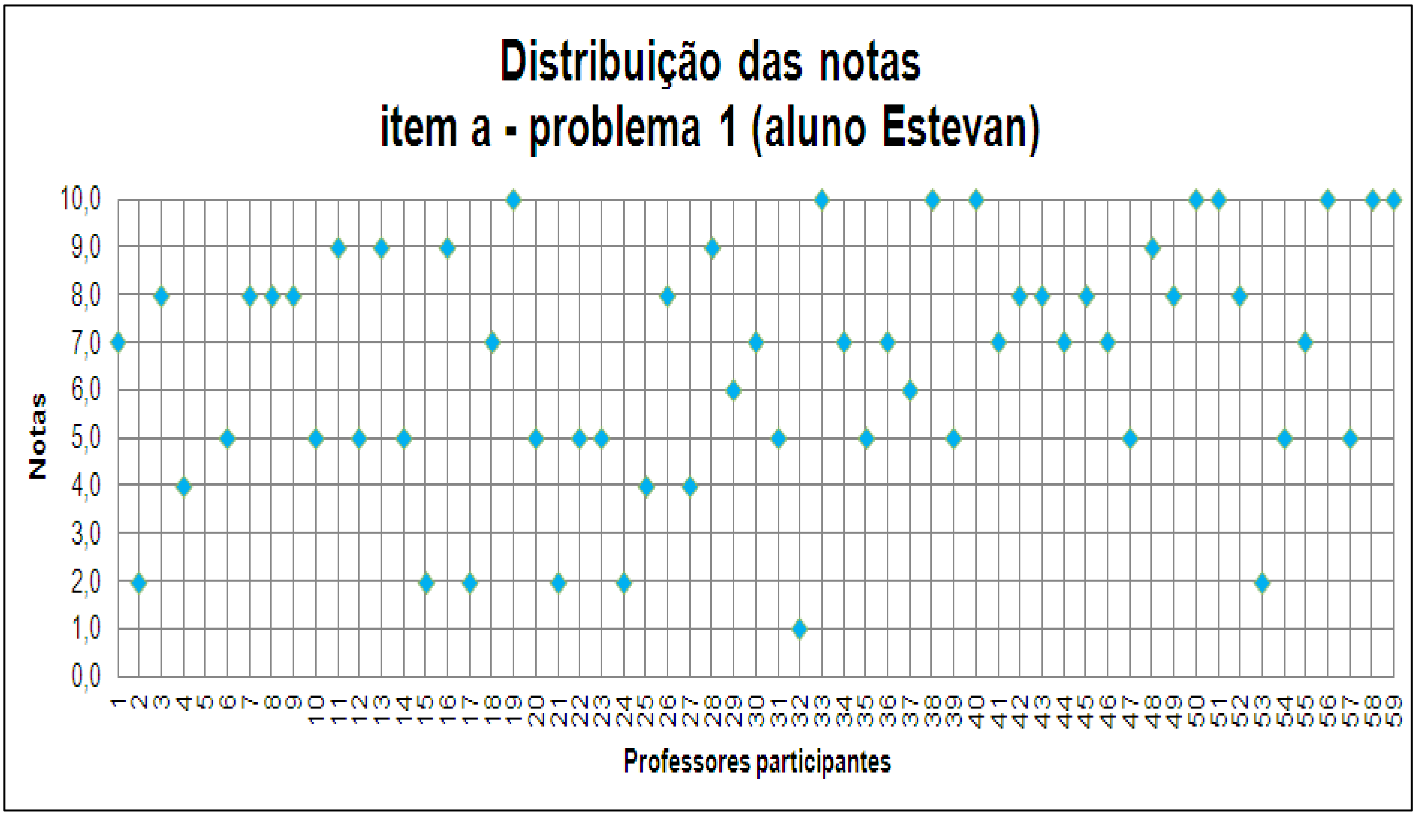

Distribuição da Experiência Profissional no Ensino Fundamental
Tempo de Experiência Docente (em anos)
45,0
40,0
35,0
30,0
25,0
20,0
15,0
10,0
5,0
0,0
Professores participantes
Ensino Público
Ensino Privado

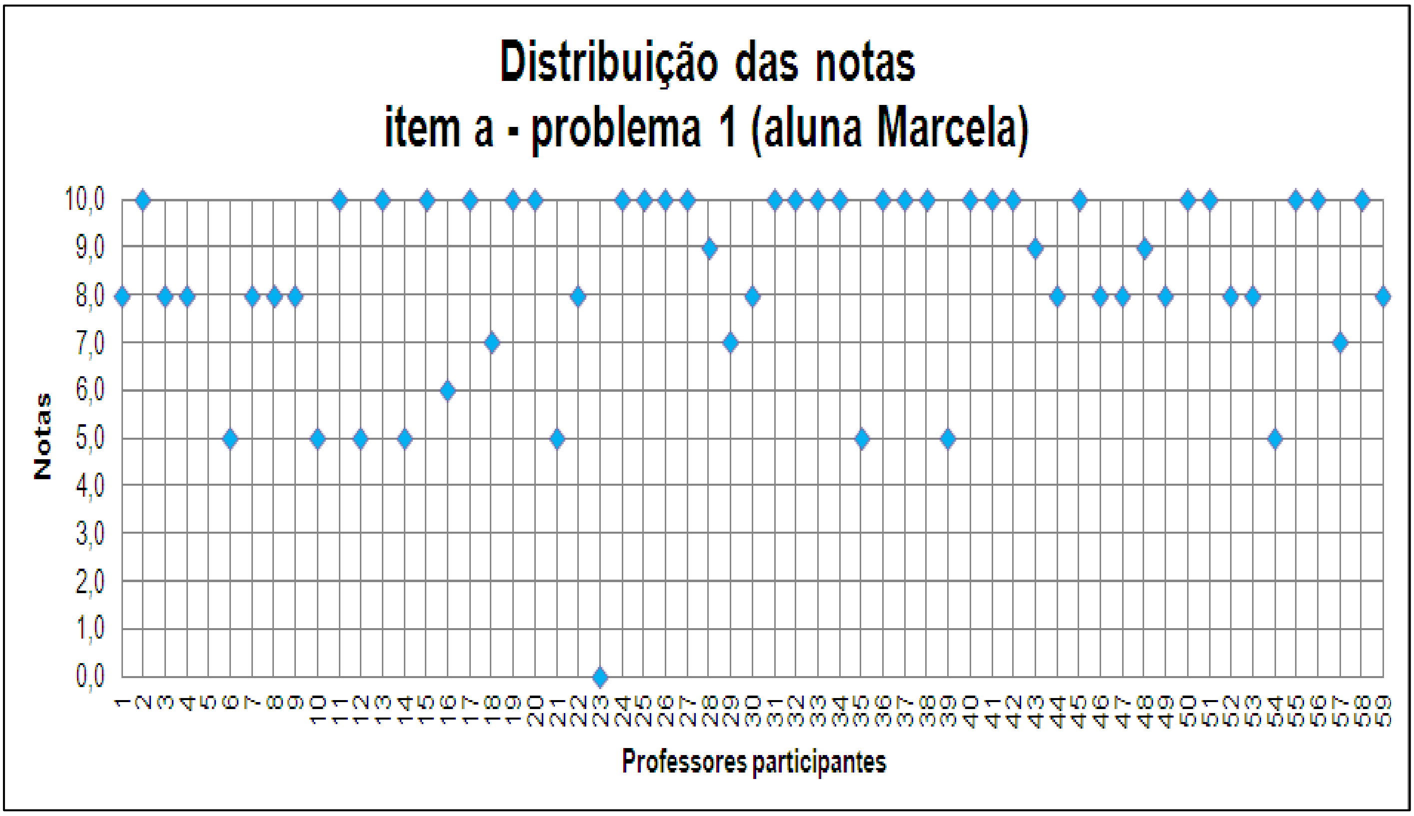

Distribuição da Experiência Profissional no Ensino Médio
Tempo de Experiência Docente (em anos)
0,0
5,0
10,0
15,0
20,0
25,0
30,0
35,0
Professores participantes
Ensino Público
Ensino Privado

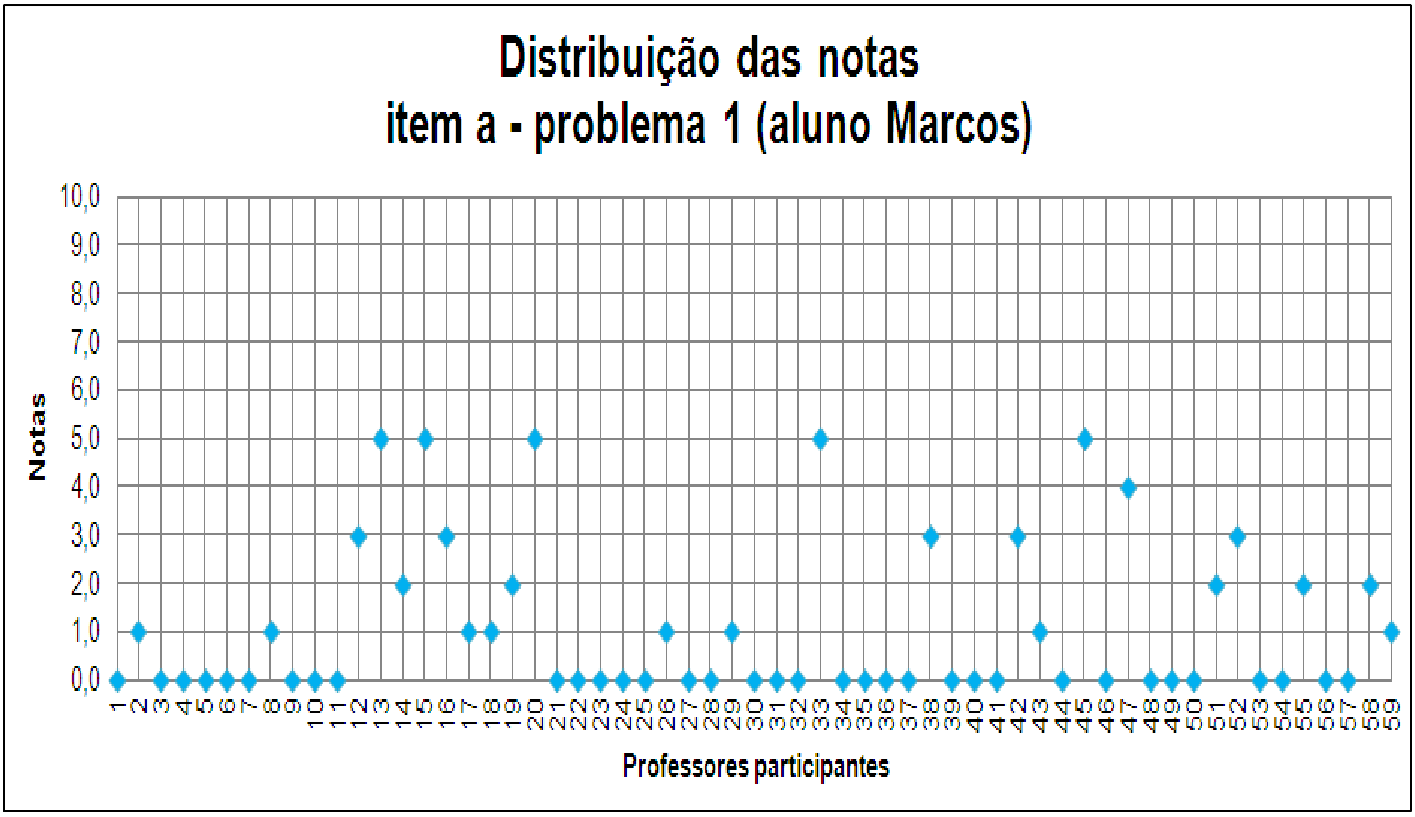
Anexo 5


Distribuição das notas
item a - problema 1 (aluna Renata)
Notas
Professores participantes

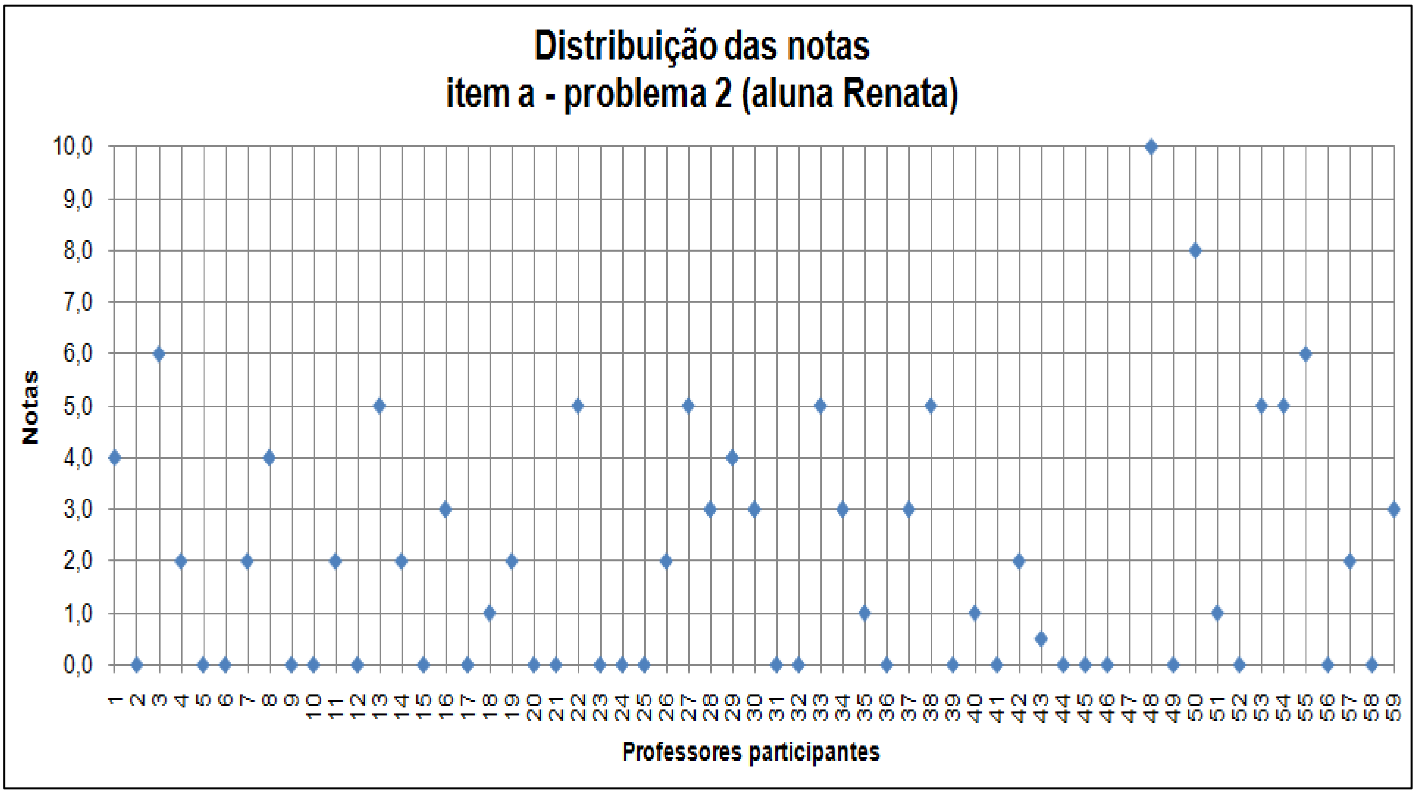

Distribuição das notas
item a - problema 1 (aluna Talita)
Notas
Professores participantes

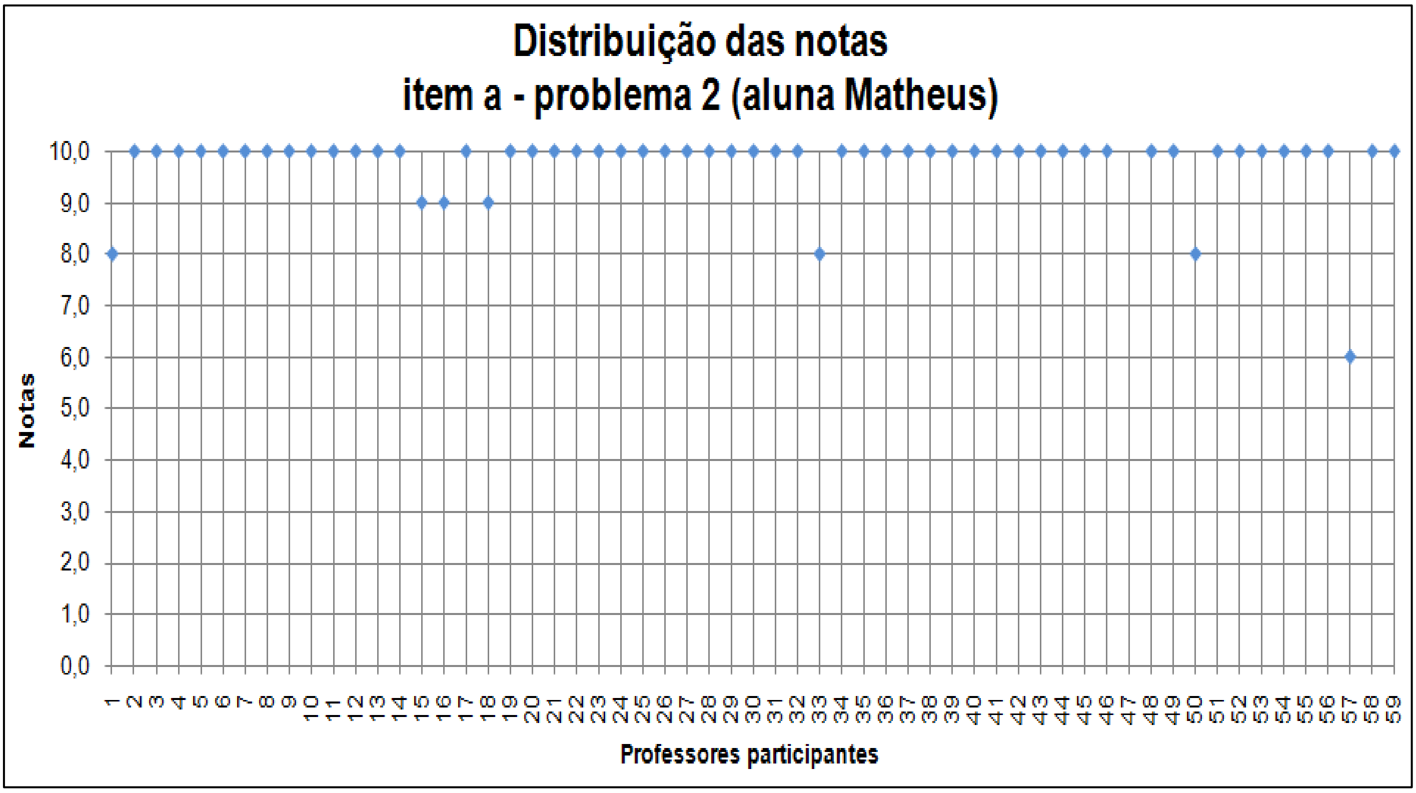

Distribuição das notas
item a - problema 1 (aluno Estevan)
Notas
Professores participantes

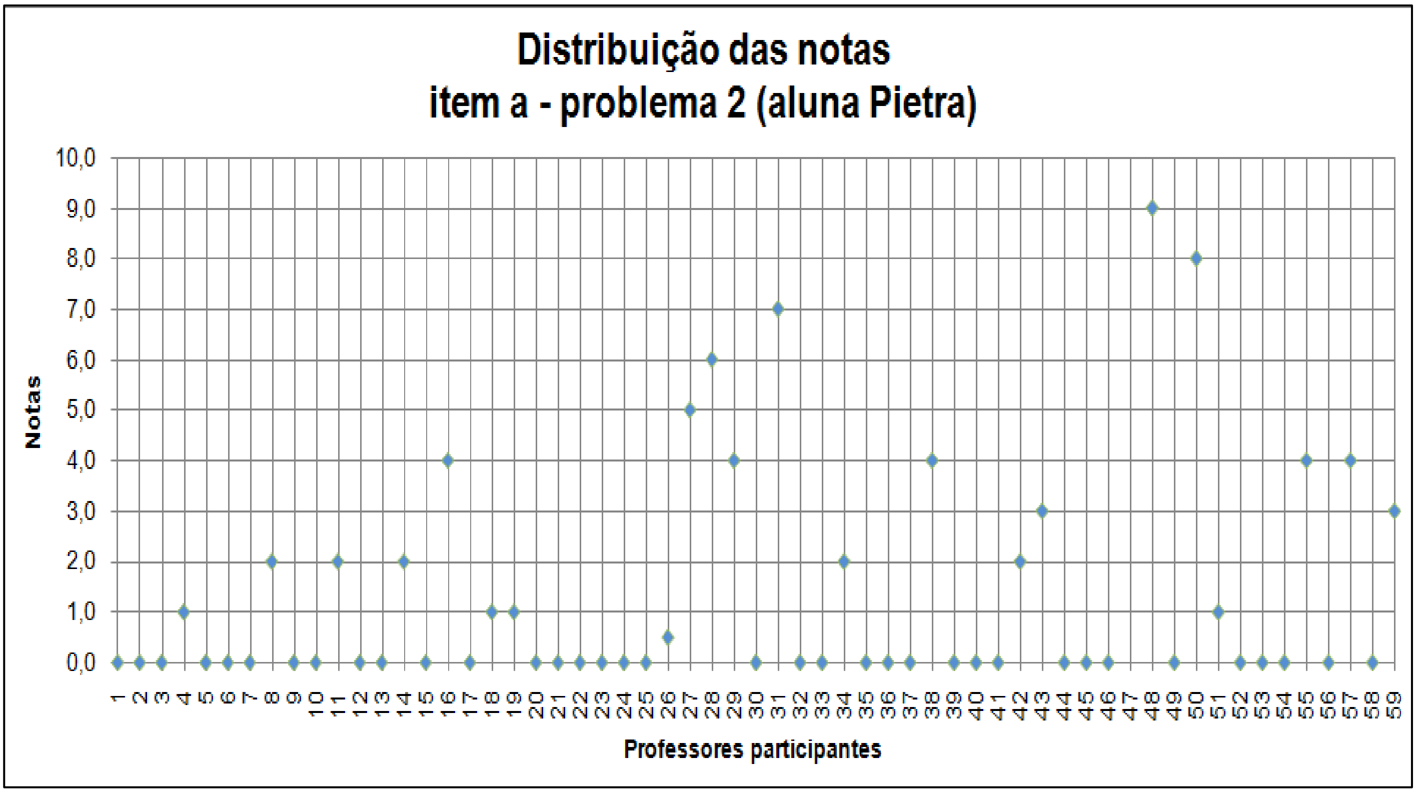

Distribuição das notas
item a - problema 1 (aluna Marcela)
Notas
Professores participantes


Distribuição das notas
item a - problema 1 (aluno Marcos)
Notas
Professores participantes

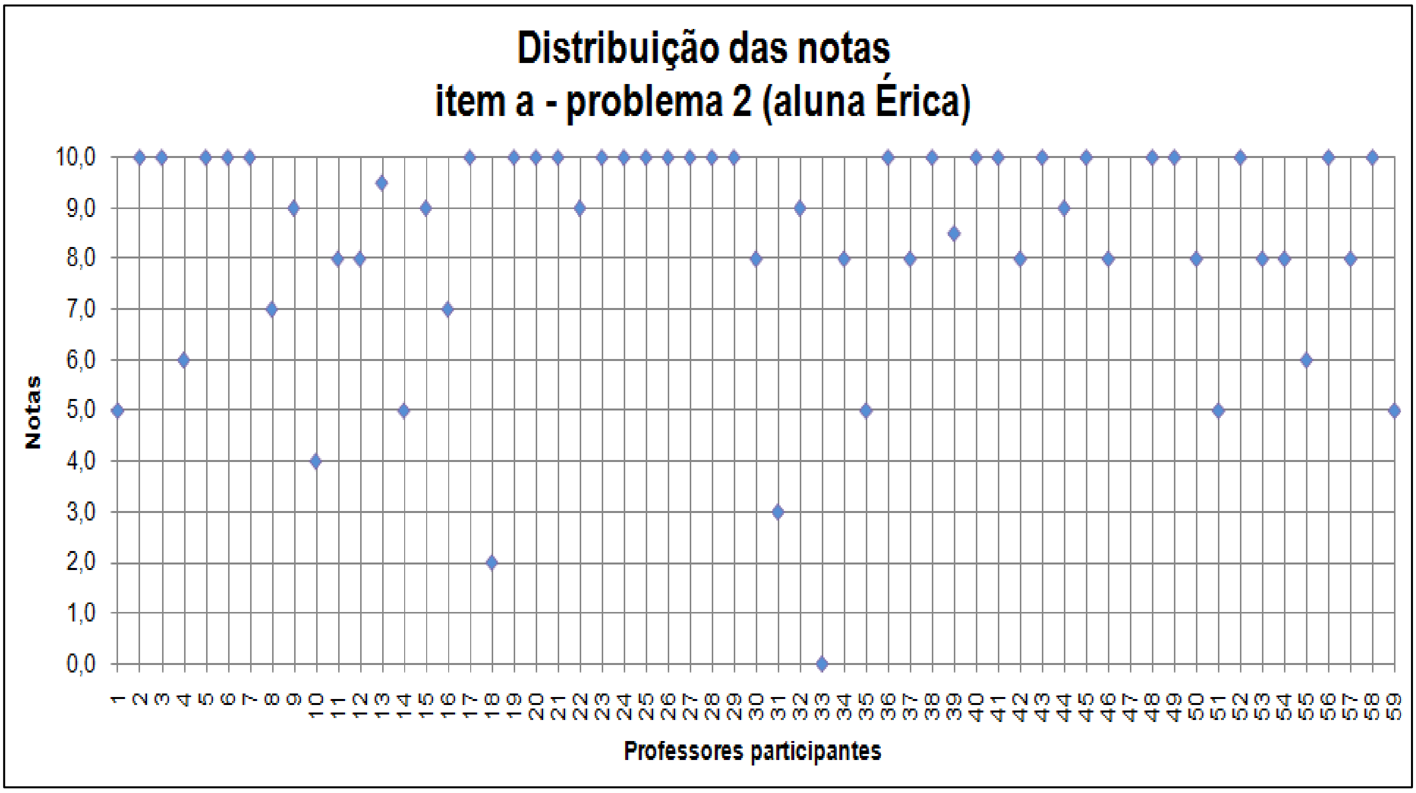
Anexo 6


Distribuição das notas
item a - problema 2 (aluna Renata)
Notas
Professores participantes

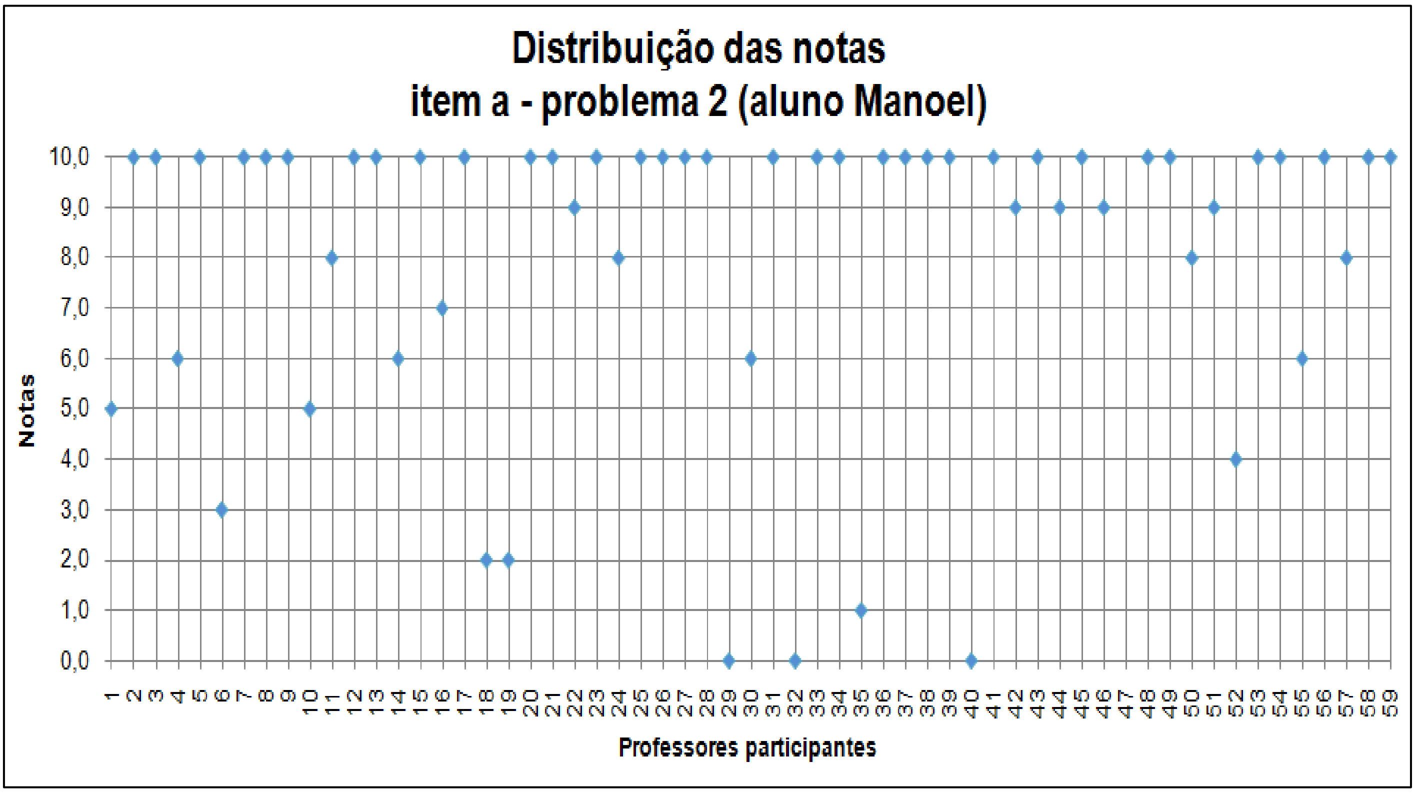

Distribuição das notas
item a - problema 2 (aluna Matheus)
Notas
Professores participantes



Distribuição das notas
item a - problema 2 (aluna Pietra)
Notas
Professores participantes



Distribuição das notas
item a - problema 2 (aluna Érica)
Notas
Professores participantes


Distribuição das notas
item a - problema 2 (aluno Manoel)
Notas
10,0
9,0
8,0
7,0
6,0
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
0,0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59
Professores participantes