

**O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES
METACOGNITIVAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DE ANÁLISE COMBINATÓRIA**

Edson Akira Yahata

Dissertação

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado
Apresentada ao programa de
Pós-Graduação em Ensino de
Matemática da Universidade
Federal do Rio de Janeiro,
como parte dos requisitos
necessários à obtenção do
Título de Mestre em Ensino de
Matemática .

Edson Akira Yahata

Orientação:

Victor Giraldo

Nei Rocha



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – IM-UFRJ

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES
METACOGNITIVAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DE ANÁLISE COMBINATÓRIA**

Edson Akira Yahata

Orientação: Victor Giraldo

Nei Rocha

“ Non nobis, DOMINE, non nobis, sed nomini Tuo da gloriam”
“Não a nós, SENHOR, não a nós, mas ao Vosso nome daí a glória”

(Livro dos Salmos, 115,1)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao professor Nei Rocha pelo apoio irrestrito das ideias do meu trabalho, pelas suas maravilhosas aulas e por suas profundas contribuições.

Aos meus amigos do mestrado que tanto contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional. Em especial ao amigo Marcelo Reis que disponibilizou as turmas, que esteve presente em todas as aulas do experimento, que criticou e fez importantes sugestões a este trabalho.

Aos professores do mestrado, em particular ao professor Victor Giraldo pelas suas maravilhosas aulas e pelo exemplo de matemático e professor.

Aos membros da banca pelas valiosas sugestões, críticas e correções.

Aos participantes da pesquisa que contribuíram de forma significativa.

Aos amigos Alexandre Machado Souto, Wellerson Quintaneiro e Leandro.

A minha esposa Fatima de Albuquerque Yahata e aos meus filhos Lucas Yahata e Mylena Yahata, pelo apoio incondicional e irrestrito.

DEDICATÓRIA

Dedico essa dissertação a Deus, que me ajudou em todos os momentos difíceis e a todos os que ajudaram. Em especial a minha esposa Fátima Yahata e aos meus filhos Mylena e Lucas, que tanto me apoiaram e compreenderam a ausência que se fez necessária.

Yahata, Edson Akira.

Desenvolvimento das Habilidades Metacognitivas no Ensino de Análise Combinatória / Edson Akira Yahata. – Rio de Janeiro: UFRJ / IM, 2012.

x, 129f.

Orientador: Victor Giraldo e Nei Rocha.

Dissertação (Mestrado) – UFRJ / Instituto de Matemática / Programa de Pós- Graduação em Ensino de Matemática.

Referências: f. 129.

1. Análise Combinatória. 2. Metacognição. 3. Resolução de Problemas. I.Rocha, Nei. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. III. Título

Resumo

Esse trabalho trata do ensino de Análise Combinatória e Metacognição. Os conceitos de Metacognição (Schoenfeld, 1987, 1992) e Resolução de Problemas (Polya, 1995) são empregados como embasamento teórico. Foi realizado um estudo com duas turmas do Ensino Médio de uma escola pública com uma metodologia focada no desenvolvimento das habilidades metacognitivas, com o intuito de verificar se esta desenvolveria tais habilidades e se estas habilidades foram importantes para a resolução dos problemas. Para isso, analisamos o pré-teste e o pós-teste dos alunos para verificar se havia registros que pudessem sugerir o desenvolvimento dessas habilidades de acordo com o referencial teórico citado anteriormente. Os dados e os gráficos referentes à análise estatística dos pré e pós-teste apresentaram diferença significativa estatisticamente entre o antes e o depois, o que sugere que o trabalho produziu efeitos positivos. Os dados empíricos do estudo foram coletados na resolução dos problemas do pré-teste e pós-teste. Apesar de o estudo não ter um quantitativo expressivo de alunos, e, portanto não permitir generalizações, as análises qualitativas das resoluções sugerem que o desenvolvimento dessas habilidades é necessária. Além disso, percebemos que os alunos que apresentaram estas habilidades metacognitivas obtiveram um resultado melhor do que os que não apresentaram, sugerindo a necessidade de desenvolvê-las. Concluímos que essas habilidades são importantes para resolver problemas de Análise Combinatória, mas elas devem ser desenvolvidas desde o primeiro ano de escolaridade.

Palavras-chave: Análise Combinatória; Metacognição; Resolução de problemas; Habilidades Metacognitivas.

Sumário

Capítulo 1: Introdução	1
Capítulo 2: Metacognição	6
2.1- Conceito de Metacognição	7
2.2- Conhecimento Metacognitivo.....	8
2.3- O monitoramento e auto regulação.....	9
2.4- Crenças e Intuições	11
Capítulo 3: Análise Combinatória	18
3.1- Introdução	18
3.2- Análise Combinatória no Ensino Fundamental	22
3.3- Análise Combinatória no Ensino Médio	25
3.4- Modelos de Dubois	27
3.5- Tipos de erros	29
Capítulo 4: Resolução de Problemas	41
4.1- Introdução	41
4.2- Polya	45
4.3- Estratégias Metacognitivas	46
4.3.1- Por uma taxonomia da resolução de problemas combinatórios	55
Capítulo 5 – Procedimentos Metodológicos	61
5.1 – O Curso.....	61
5.2 – Os sujeitos	61
5.3 – Procedimentos	62
5.3.1 – Pré - teste.....	62
5.3.2 – Pós - teste	65
5.4 – Concepções do estudo	66
5.5- Considerações sobre o objeto Matemático.....	67
5.5.1- Princípio aditivo	71
5.5.2- Princípio Multiplicativo.....	72
5.5.3- Permutação	73
5.5.4- Combinação	74
5.5.5- Permutação com Repetição	77
5.5.6- Permutação Circular	79

Capítulo 6 – Observações, encontros e Análise de Dados81

6.1 – Análise geral dos dados	81
6.1.1 – Análise do Pré - teste	81
6.1.2 – Análise do Pós - teste	82
6.1.3 – Estatística	82
6.1.3 – Comparação entre o Pré e o Pós - teste	86
6.1.4 – Análise de um representante de cada grupo	87

Capítulo 7 – Discussão e considerações finais111

7.1 – Voltando a hipótese	111
7.2 – Efeitos positivos	112
7.2.1 – Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório	112
7.2.2 – Valorização da criatividade	113
7.2.3 – Permutação Circular	113
7.2.4 – A importância das Habilidades Metacognitivas	117
7.3 – Limitações	119
7.4 – Recomendações para a prática de ensino	120
7.4.1 – Ênfase na Resolução de Problemas	121
7.4.2 – Adotar caminhos que não levarão diretamente a solução correta	121
7.4.3 – Ênfase no papel da divisão	122
7.4.4 – Usar questões Metacognitivas	122
7.5 – Ideias para pesquisa futuras	122
7.6 – Comentários finais	123

Bibliografia125

Anexos

Anexo 1- Autorização	129
Anexo 2- Tabela com o índice de incidências de habilidades metacognitivas	130

1. INTRODUÇÃO

De acordo com a minha experiência como professor, tenho percebido que normalmente os alunos estão acostumados a resolver os chamados exercícios de rotina, mas ao se depararem com um problema novo eles apresentam uma enorme dificuldade. Partem logo para a solução que, normalmente, é a escolha de uma fórmula e sua aplicação, o que é confirmado por Schoenfeld (1992).

Isso muitas vezes se deve ao tipo de ensino que é oferecido aos alunos, mera aplicação de fórmulas ou resoluções de exercícios modelo seguido de uma lista de exercícios similares. Nossa visão é de que isso não possibilita a compreensão de um conceito, ou de um objeto matemático.

Segundo Batanero (1997 a)

“Compreender um conceito (por exemplo, combinatória) não pode se resumir simplesmente ser capaz de reproduzir a sua definição. Conceitos emergem de um sistema de práticas realizados para resolver situações problema.” (pag. 196, tradução nossa.)

No ano de 2007 comecei a lecionar em uma escola particular de Ensino Médio, o CAP-Unigranrio. Lá ministrava aulas de Análise Combinatória e cada vez mais aumentava o desejo de contribuir para o ensino deste tópico tão importante e que, ao mesmo tempo, traz muitas dificuldades para os alunos e professores.

No início do ano de 2011 ingressei no CECIERJ (Centro de Educação Estado do Rio de Janeiro) como tutor de um curso de especialização para professores de Matemática na disciplina de Análise Combinatória, com o único objetivo de enriquecer a minha dissertação, pois iria trabalhar tirando as

dúvidas dos professores (alunos) sobre os exercícios de Análise Combinatória através da internet.

Desde que comecei a estudar Análise combinatória no Ensino Médio e no decorrer da graduação, especialização, cursos de aperfeiçoamento de professores, no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e no CEDERJ, e em conversas com colegas, percebi que um dos temas que mais assusta alunos e professores é a Análise Combinatória.

Morgado *et al.* (1991, p. 15) destacam em seu livro que,

“a primeira técnica matemática aprendida por uma criança é contar, ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação em problemas de contagem”.

Isso nos parece paradoxal, pois a contagem é a primeira técnica Matemática, e um dos pilares da Matemática e, no entanto, os alunos apresentam muitas dificuldades no aprendizado deste tópico. Nós entendemos que os problemas de Combinatória não são triviais, pois apresentam desafios cognitivos que dificultam a resolução destes exercícios e, segundo Batanero (1997 a);

“a solução de um problema combinatório não é um processo simples e por isso a diferenciação entre as possíveis soluções incorretas é essencial tanto para o professor e o aluno”. (Pag. 191. Tradução nossa)

A Análise Combinatória é um assunto recente, quando comparado com outros conteúdos, e tem poucas pesquisas nessa área. Segundo Borba et al (2009):

“ pode-se afirmar que há um quantitativo muito baixo de pesquisas desenvolvidas nos últimos anos sobre o raciocínio combinatório, o que denota uma necessidade dentro da Educação Matemática, uma vez que no estudo da combinatória há grandes possibilidades de desenvolvimento matemático dos alunos”.
(pag.3)

O ensino de Análise Combinatória tem uma peculiaridade, pois ele difere dos outros tópicos pelas suas características intrínsecas e isso favorece muito o uso da resolução de problemas. O seu ensino, em geral, é feito de forma a não desenvolver o raciocínio combinatório, pois se apresentam algumas fórmulas e depois se resolve uma lista de exercícios para os quais os alunos têm que escolher qual fórmula aplicar, o que é confirmado por Dubois (1984).

“De fato, o ensino de análise combinatória geralmente tem um caráter mais instrumental e normativo. Ele se resume à transmissão de algumas fórmulas de contagem que raramente se relacionam entre elas, se não superficialmente, usadas para aprendizado das probabilidades sobre os conjuntos finitos”.
(pág. 37, tradução nossa)

Devemos então pensar em um método de ensino que possa melhorar o aprendizado dos nossos alunos em Análise Combinatória e se possível melhorar a forma dos nossos alunos abordarem verdadeiros problemas, pois não alcançaremos os objetivos desejados se continuarmos com o ensino atual.

Segundo Batanero (1997 a), existem dois passos fundamentais para facilitar a aprendizagem de Análise Combinatória,

“ compreender a natureza dos erros dos alunos ao resolver problemas combinatórios e identificar as variáveis que podem influenciar essa dificuldade ”. (pag.182, tradução nossa)

Surgem então algumas perguntas: É possível desenvolver as habilidades metacognitivas ao ensinar *Análise Combinatória*? Como ensinar os nossos alunos a lidar com verdadeiros problemas? O uso de estratégias metacognitivas pode melhorar o aprendizado deste conteúdo no Ensino Médio?

Para responder a estas perguntas fizemos uma pesquisa com duas turmas. Nelas foram ministradas aulas que revelavam o processo de resolução de maneira que os alunos tivessem uma participação ativa e as estratégias fossem utilizadas de forma a desenvolver as habilidades metacognitivas dos alunos. As estratégias foram montadas de acordo com os erros mais frequentes.

A presente dissertação se estrutura da seguinte forma:

No primeiro capítulo, apresentamos nossa motivação ao tema, por meio da descrição de algumas das problematizações relacionadas ao ensino de *Análise Combinatória* e os objetivos.

No segundo capítulo, nos debruçamos sobre a metacognição, sua natureza, e a sua importância para o ensino, em particular no ensino de *Análise Combinatória*.

No terceiro capítulo, refletimos sobre o conteúdo da *Análise Combinatória*, o que é efetivamente ensinado e como é o ensino de *Análise Combinatória* no Ensino Médio e Fundamental. Discutimos os tipos de erros mais comuns.

No quarto capítulo, tratamos de resolução de problemas, que é uma questão importante no ensino de Matemática, diferenciando problemas de exercícios de rotinas; das estratégias metacognitivas e de uma categorização das estratégias de resolução dos problemas.

No quinto capítulo estão relacionados os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa. Descreveremos os sujeitos e o material utilizado para o estudo de Análise Combinatória. Apresentaremos em seguida uma visão geral do experimento e os testes aplicados em duas turmas que passaram pelo experimento.

No sexto capítulo, foi feita uma análise do pré-teste em comparação com o pós-teste, das observações feitas em sala de aula e os achados.

No sétimo capítulo apresentamos nossas considerações finais e sugestões para futuras pesquisas.

O trabalho se encerra com as referências bibliográficas contempladas para o estudo e um anexo contendo a tabela com os índices das incidências das habilidades metacognitivas.

CAPÍTULO 2 – METACOGNIÇÃO

Muitos alunos são capazes de aprender as fórmulas necessárias e aplicá-las nos exercícios dos livros escolares, que provavelmente são escolhidos para servirem desta maneira. Mas ao se depararem com um problema para o qual a simples aplicação da fórmula não o resolve, eles ficam sem autonomia no agir. Acreditamos que a Metacognição pode ajudar esses alunos a autorregular seus processos racionais na solução de quaisquer problemas matemáticos.

Na minha experiência como professor tenho observado que a maioria dos alunos não apresentam as habilidades metacognitivas ao resolver os problemas, o que leva frequentemente à resposta errada, como confirmado por Schoenfeld (1987) e Vieira (2001).

“ De uma maneira geral os resolvedores inicialmente identificam apenas um item dos problemas, dirigindo-se imediatamente para a busca de uma resposta; apresentam dificuldade para traduzir as proposições presentes nos problemas em linguagem matemática e imagens (desenho); não utilizam adequadamente conhecimentos anteriores.

De uma maneira geral, também não conseguem dividir o problema em subproblemas; apresentam dificuldades para combinar e comparar dados, solicitando auxílio; não controlam a execução das operações matemáticas; não questionam suas representações mentais; não avaliam a solução encontrada; tendem a terminar antes que aqueles que não apresentam dificuldades.
”(VIEIRA, 2001)

Além disso, muitos alunos nem sequer percebem quando encontram uma resposta incoerente, o que é confirmado por Lester (1988) e Schoenfeld (1992).

Pelo exposto acima, especialmente em se tratando de Análise Combinatória, cujos problemas não se resolvem pela simples aplicação de uma fórmula, desde que ensinada adequadamente, surge então a necessidade de se desenvolver habilidades metacognitivas importantes para que os alunos sejam capazes de resolver com confiança e autonomia os problemas de Análise Combinatória.

2.1 – CONCEITO DE METACOGNIÇÃO

O termo *Metacognição* foi cunhado pela primeira vez por Flavell na década de 70, apesar de o conceito já ter sido muito empregado por outras pessoas. Mas antes de conceituarmos Metacognição, vejamos o que nos diz Flavell *et. al.* (1999) sobre cognição:

“A imagem tradicional da cognição tende a restringi-la aos processos e produtos mais chamativos e inequivocamente “inteligentes” da mente humana. Essa imagem inclui entidades psicológicas, do tipo definido como processos mentais superiores tais como conhecimento, a consciência, a inteligência, o pensamento, a imaginação, a criatividade, a geração de planos e estratégias, o raciocínio, as inferências, a solução de problemas, a conceitualização, a classificação e a formação de relações, a simbolização e, talvez, a fantasia e os sonhos. (FLAVELL et. al., 1999, p.9)

Conforme o próprio autor relata, não se pode defini-la nem limitar seu sentido de maneira precisa ou inflexível.

Ainda não existe um conceito de metacognição que seja abrangente de forma a abarcar tudo que se tem chamado por tal designação, o que finda se tornando um problema para a pesquisa.

Existem várias definições de metacognição na literatura, sendo que a maioria delas inclui uma série de componentes que estão inter-relacionadas. Geralmente há um acordo em que a metacognição implica dois componentes principais: *conhecimento sobre a cognição* e *regulação da cognição* (GAROFALO e LESTER, 1985; SCHOENFELD, 1992) sendo que a natureza da relação entre esses componentes não está claramente definida.

Para Ribeiro (2003) *“A metacognição diz respeito, entre outras coisas, ao conhecimento do próprio conhecimento, à avaliação, à regulação e à organização dos próprios processos cognitivos”*. Segundo Jalles (1997), *“metacognição tem sido referida como autorregulação do funcionamento cognitivo, com a intenção de conhecer, planejar e resolver problemas”*.

Segundo Flavell *et. al.* (1999) Metacognição é *“qualquer conhecimento ou atividade cognitiva que toma como seu objeto, ou regula qualquer aspecto de qualquer iniciativa cognitiva”* e para ele *“ a maior parte do que é considerado metacognição se refere ao conhecimento cognitivo e ao monitoramento e à autorregulação metacognitivos”*.

Para Schoenfeld (1987) a tradução do termo Metacognição é *“pensamento sobre seu próprio pensamento ”* e este, em sua pesquisa sobre a metacognição, marcou três categorias de comportamento intelectual, o seu conhecimento sobre seu próprio processo de pensar, controle ou autorregulação e crenças e intuições.

2.2 – CONHECIMENTO METACOGNITIVO

Segundo Flavell et. al. (1999) o conhecimento metacognitivo é o conhecimento e as crenças que a pessoa acumulou através de experiências, e armazenou na memória a longo prazo, que dizem respeito à mente humana e seus afazeres, e que pode ser dividido em três categorias que se interligam: sobre *pessoas*, que inclui qualquer conhecimento e crenças sobre a própria cognição; sobre *tarefas*, acerca da natureza da informação e a natureza das exigências das tarefas; e sobre *estratégias*, que são os meios ou estratégias que têm maior probabilidade de alcançar os objetivos cognitivos.

Para Schoenfeld (1987), o conhecimento do seu próprio processo de pensamento seria como você descreveria o seu próprio conhecimento. Onde é importante o aluno ter ciência do que sabe, quais são os pontos fortes e fracos para se tornar um bom resolvidor de problemas, desenvolvendo assim este conhecimento à medida que crescem.

2.3 – O MONITORAMENTO E A AUTORREGULAÇÃO

Entendemos que um amplo conhecimento é uma condição necessária, mas não suficiente para termos bons resolvidores de problemas, pois o aluno pode ter o conhecimento, mas não saber como acessá-lo ou não perceber que certo conhecimento tem conexão com o exercício. Além disso, os exercícios chamados de rotina (segundo POLYA, 1995) não desenvolvem as habilidades metacognitivas, apenas possibilitam o aluno entender um fragmento de certo conhecimento.

Segundo Schoenfeld (1987), o controle ou autorregulação de nossas ações podem ser divididos em:

- 1- compreender o problema;
- 2- planejar a estratégia de solução;
- 3- acompanhar e controlar o processo de solução;
- 4- avaliar se a resposta faz sentido.

O controle e autorregulação de nossas ações são importantes, pois percebemos que muitos alunos nem sequer entendem o enunciado do problema ou o que o problema está solicitando e automaticamente partem para a execução com uma estratégia muitas vezes infundada, e não param para pensar sobre esta estratégia, se ela tem fundamento, se não haveria outro caminho para que voltem a analisar o problema.

Schoenfeld (1992) realizou uma pesquisa com estudantes universitários e alunos do Ensino Médio com problemas “desconhecidos” e observou que aproximadamente 70% leem o problema, escolhem uma estratégia e seguem esta opção mesmo percebendo que não irão obter êxito.

Em contraste com esta ideia, um membro da faculdade de Matemática, ao resolver um problema, gastou mais da metade do tempo destinado a dar sentido ao problema, fez uma quantidade significativa de análise, abandonou caminhos aparentemente infrutíferos, apresentando aspectos metacognitivos do pensamento matemático que os alunos desconhecem ou não usam, e que podem ser imprescindíveis no êxito da resolução de problemas.

Schoenfeld aplica um método instrucional metacognitivo em que ele caminha pela sala fazendo três perguntas a qualquer momento: *O que (exatamente) você está fazendo? Por que você está fazendo? E como isso o ajuda?* Os resultados encontrados por Schoenfeld após o método instrucional apresentaram mudanças ocorridas nos estudantes, tais como: o

comportamento dos alunos se assemelhou ao comportamento do matemático, estes tiveram uma boa autorregulação, aumentando a chance de sucesso na resolução de problemas.

2.4. CRENÇAS E INTUIÇÕES

As crenças podem se dividir em: crenças dos alunos, crenças dos professores e crenças gerais da sociedade sobre como fazer matemática. Iremos fazer um breve comentário sobre as crenças dos alunos e que reflexos elas têm na resolução de problemas.

Normalmente os alunos têm a crença de que quando se entende bem um determinado assunto não se demora mais do que alguns minutos para resolver um problema; de que fazer Matemática significa seguir regras estabelecidas pelo professor; de que problemas de Matemática têm uma única resposta correta; de que existe apenas uma maneira correta de resolver qualquer problema de Matemática; de que não se pode esperar de alunos normais que eles entendam Matemática, pois eles esperam simplesmente memorizá-la e aplicar o que entenderam mecanicamente sem entender. (LAMPERT, apud SCHOENFELD 1992).

Essas crenças trazem consequências negativas na resolução de problemas dos alunos, pois o aluno que crê que não se gasta mais do que poucos minutos para resolver um problema, fatalmente irá desistir do problema depois de poucas tentativas; o aluno que acredita que só existe uma maneira de resolver um problema e uma única resposta correta, ao resolver um problema de Combinatória de forma diferente que o professor fez, fatalmente irá anular a sua solução, que poderia estar correta e que ele entendeu, e copiar a solução do professor que ele pode não ter compreendido; os alunos que

esperam seguir fórmulas ou regras estabelecidas pelo professor, tais como: se a ordem importa é Arranjo e se a ordem não importa é Combinação, não terão a menor chance de resolver verdadeiros problemas de Análise Combinatória.

Devemos então pensar de que forma podemos ensinar e desenvolver essas habilidades metacognitivas.

“estudantes acreditam que problemas verbais podem ser resolvidos por uma aplicação direta de uma ou mais operações aritméticas e que as operações corretas a serem usadas podem ser determinadas meramente pela identificação de palavras-chave; pouco planejamento ou busca de significado é necessário” (GAROFALO e LESTER, 1985, p.167- tradução nossa).

Como foi dito anteriormente, ainda não se tem uma definição de Metacognição precisa, e que acarreta em problemas para pesquisa, mas podemos perceber que ela é de fundamental importância.

Existe um grande número de investigações que afirma sobre a importância da metacognição para o pensamento matemático e resolução de problemas (GAROFALO e LESTER, 1985, SCHOENFELFD, 1987, 1992). Alguns autores consideram que a dificuldade na resolução de problemas consiste em uma falta de habilidade dos estudantes para monitorar e regular ativamente seus processos cognitivos (GAROFALO e LESTER, 1985, SCHOENFELFD, 1987).

Para Flavell et. al. (1999) o seu estudo é importante, pois ela é uma ferramenta de ampla aplicação inclusive no campo da educação, enquanto que para Schoenfeld (1987) ela é importante para ajudar estudantes a desenvolver as habilidades de estudo.

Entendemos que a metacognição é importante na resolução de problemas, o que é confirmado por Biryukov (2004) quando diz: *“quando se*

possui experiência metacognitiva e se sabe como aplicá-la, existe uma grande chance de que a solução de um problema seja bem sucedida". (pag. 15, tradução nossa)

Segundo Seminário (2002),

" É neste ponto que entendemos a importância do uso da metacognição. Efetivamente, pelo método tradicional, tal mudança deveria ser impossível: transmitir informações como dados acabados pode ser inócuo. Mas quando se fornecem regras capazes de provocar a reflexão antecipada sobre o pensamento e a conduta, suscitando assim a dedução de condutas produtivas, o salto de escala tem se revelado possível e satisfatório".

Segundo Chahon (2003, p.5), *"... as habilidades metacognitivas se desenvolvem desde os 7 anos e podem mesmo ser ensinadas dentro do currículo escolar".*

Percebe-se então uma necessidade de mudança no ensino, de Matemática em especial, para que os alunos possam aprender melhor e aprendam a ter atitudes adequadas para enfrentar os problemas e para isso acreditamos que a Metacognição possa trazer importantes contribuições.

Alguns pesquisadores (Schoenfeld, 1987, 1992; Garofallo e Lester, 1985) compreendem a Metacognição como quatro categorias de atividades: orientação, organização, execução e verificação.

Garofalo e Lester (1985) criaram um quadro cognitivo-metacognitivo combinando os trabalhos de vários pesquisadores, inclusive Polya e Schoenfeld.

As quatro categorias são parecidas com as quatro fases de Polya, mas são mais bem definidas.

Eles ressaltam que dependendo da tarefa, alguns pontos ocorrem mais do que outros. As estratégias que usaremos serão mais direcionadas à resolução de problemas de Análise Combinatória.

Algumas pesquisas (Maqsud, 1998; Oladunni, 1998; Jalles, 1997) têm avaliado os efeitos da instrução Metacognitiva através de uma comparação entre grupo controle e tratado. Essas pesquisas mostraram uma melhora significativa com os grupos tratados

Maqsud (1998) realizou uma pesquisa na África do Sul para avaliar os efeitos da instrução metacognitiva. Para isso, ele usou um grupo experimental e um grupo controle, que foram escolhidos aleatoriamente. O grupo experimental recebeu instrução de estratégias metacognitivas em quatro tópicos de matemática, enquanto o grupo controle foi exposto aos quatro tópicos de matemática através do método convencional de ensinar Matemática.

O objetivo foi ensinar estratégias aos estudantes para que eles encontrassem a solução correta do problema e evitassem erros que eles tinham cometido anteriormente. Observou-se que o grupo experimental apresentou uma consciência metacognitiva e níveis de habilidades gerais significativamente maiores que o grupo controle.

Oladunni (1998) realizou uma pesquisa com três grupos, onde um grupo foi ensinado através da MPST- *Metacognitive Problem Solving Technique* (técnica metacognitiva de resolução de problema), o segundo grupo utilizou a HPST- *Heuristic Problem Solving Technique* (técnicas heurísticas¹ de resolução de problema) e um terceiro grupo utilizou uma abordagem tradicional.

¹ Heurística é o conjunto de regras e métodos que visam à descoberta, à invenção ou à resolução de problemas. (dicionário Aurélio)

Os grupos que utilizaram a MPST e HPST passaram pelo pré-teste, tratamento e pós-teste, o grupo controle não teve nenhum dos dois tipos de tratamento. O MPST foi adaptado do *Managerial Problem Solving Model* de Schoenfeld (1982) e possui seis etapas que devem ser seguidas sistematicamente.

Observe o modelo em que cada etapa é pré-requisito para a próxima:

- (1) Identificar o problema.
- (2) Interpretar os símbolos, conceitos, etc.
- (3) Formar um diagrama ou modelo adequado.
- (4) Escolher uma técnica de solução apropriada.
- (5) Resolver, usando a técnica escolhida conscientemente.
- (6) A solução satisfaz o problema?

A HPST foi adaptada do *General Heuristic Problem Solving Procedure* de Polya (1957).

Oladunni (1998) conclui que:

“ Este estudo identificou que a técnica de resolução de problemas é eficiente e podia melhorar a realização computacional na Matemática. Assim ela é essencial na situação de resolução de problemas para compreender, interpretar, analisar e transformar problemas para um nível familiar antes de começar a resolvê-lo. Estudantes podem tornar melhores resolvidores de problema e conseqüentemente mais completos se eles aprenderem a planejar, regular e fazer os procedimentos computacionais inteligentemente.” (Pag. 873 tradução nossa).

Jalles (1997) verificou se a instrução de estratégias cognitivas para as crianças pré-escolares melhoravam o desempenho em atividades que exigiam raciocínio espacial. Para isso ela analisou dois grupos: experimental e controle. O grupo experimental recebeu instrução específica de estratégias cognitivas.

Os resultados mostraram diferenças significativas no grupo experimental masculino.

Apesar dos resultados apresentados acima, optamos por não trabalhar com um grupo controle e um grupo tratado, pois entendemos que não temos como comparar duas abordagens diferentes e tirar conclusões significativas. Não estamos querendo com isso, questionar os achados anteriores.

Schoenfeld, por sua vez realizou uma pesquisa com universitários e concluiu que eles não apresentavam Habilidades Metacognitivas. Posteriormente ele aplica um método instrucional metacognitivo, com o mesmo grupo e conclui que esses estudantes apresentaram melhoras nas suas Habilidades Metacognitivas. Iremos adotar uma postura parecida com a do Schoenfeld, analisando os mesmos grupos antes e depois para verificar se houve uma melhora significativa.

Outra pesquisa importante, pois ressalta a importância da Metacognição, foi a de Biryukov (2004), que estudou o papel da Metacognição na resolução de problemas matemáticos, em que universitários resolveram dois problemas de Análise Combinatória e depois preencheram um questionário. O questionário visava determinar comportamentos metacognitivos durante a resolução de problemas combinatórios. Ela concluiu que existe maior probabilidade de resolver o problema corretamente, quando os indivíduos tinham experiências metacognitivas e podiam aplicá-las.

Ela observou que os alunos que foram bem sucedidos, construíram um modelo esquemático da condição do problema e desenvolveram uma estratégia de solução. Baseado neste resultado, Biryukov sugere que os professores de Matemática devem incluir a Metacognição na sua instrução.

A principal dificuldade é para encontrar uma representação adequada do problema e uma modelagem apropriada da solução (BIRYUKOV 2004).

Embora alguns pesquisadores tenham relatado que a Metacognição seja importante para aprendizagem, em especial o de Matemática, entendemos que ela ainda é pouco conhecida e pouco explorada, principalmente em relação ao ensino aprendizagem de Matemática.

Pelo exposto acima, entendemos que a Metacognição é de fundamental importância, pois ela pode melhorar a cognição dos estudantes possibilitando os alunos a controlar e monitorar a resolução dos problemas, fazendo com que eles reflitam sobre o que estão fazendo, possibilitando uma aprendizagem significativa.

CAPÍTULO 3 – ANÁLISE COMBINATÓRIA

3.1- INTRODUÇÃO

As pesquisas mostram que o ensino de Análise Combinatória tem sido feito de forma tradicional, através de definição, apresentação da fórmula e uma bateria de exercícios onde normalmente o aluno tem que optar por uma das fórmulas anteriormente apresentadas. Além disso, ressaltam a importância do Princípio Multiplicativo como estratégia básica na resolução de problemas de Análise Combinatória.

Somos da visão que o ideal seria partir de um problema e fazer o aluno chegar às definições e as fórmulas, mas infelizmente, o que temos visto são alguns livros começando muitas vezes com a definição de fatorial, para em seguida pedir para calcular o número de anagramas de uma palavra, quando deveria começar justamente pelo cálculo de anagramas de uma palavra com poucas letras e depois generalizar.

A Análise Combinatória é um assunto muito temido por alunos e professores (HARIKI, 1996). Talvez esse medo se dê devido à forma como é ensinada e como foi aprendida, pois entendemos que este conteúdo ensinado de uma forma simplista, do tipo: “quando a ordem importa é arranjo e quando a ordem não importa é combinação” transforma um tema riquíssimo em uma simples escolha de qual fórmula usar limitando a aluno a resolver um número muito pequeno de problemas.

As operações combinatórias são essenciais para o desenvolvimento cognitivo, por isso seria de extrema importância que o aluno tivesse contato com esse tópico desde os primeiros anos da escola básica em espiral, para que todos os anos os alunos tivessem contato com o assunto, como é orientado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1988).

A Análise Combinatória é importante por vários motivos: é muito usada em Probabilidade; pode levar os alunos a fazer conjecturas, a generalização e o pensamento sistemático; pode ajudar a resolver problemas do cotidiano dos alunos, mostrando a importância da Matemática na nossa vida; ela estimula os alunos a pensarem e muitos alunos se sentem desafiados e estimulados a estudar a matéria; não requer um grande número de pré-requisitos; estimula a resolução de problemas e o raciocínio matemático; e é importante para o desenvolvimento dos estudantes para que eles possam se tornar pessoas capazes de responder as necessidades do mundo atual.

Em Kapur (1970), são apresentadas algumas razões para justificar o ensino de Análise Combinatória elementar na escola:

- 1- Não depende de cálculo, tem problemas de todos os níveis.
- 2- Tem aplicações em Física, Biologia, Probabilidade, recreação Matemática, etc.
- 3 - Ela pode ajudar a desenvolver os conceitos de função, relação, relação de equivalência, classe de equivalência, etc.
- 4 - Ela pode ajudar os alunos a fazer conjecturas, enumeração, generalização e pensamento sistemático.

Normalmente o que se entende por Análise Combinatória (elementar) é o Princípio Multiplicativo, Arranjo, Combinação e Permutação. Sabemos que ela é bem mais extensa e que envolve outros tópicos como os que tratam da cardinalidade de elementos na união de um número finito de conjuntos (Princípio da Inclusão e Exclusão), das Funções Geradoras, das Relações de Recorrência (que partem da abordagem de problema particulares para problemas genéricos), o Princípio de Dirichlet, as da Permutação Caótica (que procuram determinar o número de permutações com os elementos de um conjunto dado, quando nenhum número se encontra ocupando um lugar

primitivo), os Lemas de Kaplasnsky e o Princípio da Reflexão e muitos outros tópicos.

Uma das dificuldades encontradas pelos professores ao ensinar Análise Combinatória é que normalmente os exercícios podem ser resolvidos de várias formas diferentes e em alguns casos a resolução está errada, mas a resposta final pode até coincidir com a correta. Neste caso o professor tem que descobrir onde está o erro e mostrar para o aluno, se possível criando outro exemplo para que o raciocínio do aluno o leve a uma resposta que não coincida com a correta.

Um aluno ao resolver um problema de forma errada necessita que o professor lhe sinalize onde está o erro, e se possível que o seu raciocínio seja aproveitado para chegar à resposta correta fazendo alguns ajustes e não simplesmente diagnosticar o erro e mostrar a solução correta, e isso pode ser uma tarefa bem difícil para alguns professores.

Iremos citar um caso simples em que a resposta coincide com a correta, mas o raciocínio está errado. Segundo Fischbein e Gazit (1988) um erro sistemático que ocorre na resolução de Análise Combinatória é a multiplicação dos números representados nos dados do problema. Logo, um aluno poderia apresentar a seguinte solução para o problema abaixo:

Ex.1: Em um grupo de cinco alunos eu quero escolher dois para um passeio. De quantas formas diferentes eu posso fazer estas escolhas?

Uma resolução equivocada seria multiplicar os dados apresentados no problema $2 \times 5 = 10$. Observe que o resultado coincide com o correto, mas a resolução está errada.

Solução correta: $C_{5,2} = 10$

Neste caso seria simples convencer o aluno, pois se fossem três pessoas de um grupo de cinco, o resultado 3×5 não iria coincidir com o correto. Para isso poderíamos pedir inclusive para o aluno enumerar todas as possibilidades, chamando os alunos de a, b, c, d, e , por exemplo.

Em alguns caso isto pode não ser tão simples, o livro *Temas e Problemas* (LIMA et. al. 2005) apresenta um raciocínio errado que normalmente os alunos fazem e mostra onde está o erro, o que segundo nossa opinião deve ser a práxis em sala de aula.

“Exemplo 5. *Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 4 pessoas, com pelo menos 2 homens, podem ser formadas?*

Solução: Há comissões com: 2 homens e 2 mulheres, 3 homens e 1 mulher, 4 homens.

A resposta é $C_{5,2} \cdot C_{4,2} + C_{5,3} \cdot C_{4,2} + C_{5,4} = 10 \times 6 + 10 \times 4 + 5 = 105$.

Um erro muito comum aparece no raciocínio a seguir: Como a comissão deve ter pelo menos dois homens, a primeira coisa a ser feita é escolher dois homens para a comissão, o que pode ser feito de $C_{5,2} = 10$ modos. Em seguida devemos escolher mais duas pessoas, homens ou mulheres, para a comissão, o que pode ser feito de $C_{7,2} = 21$ modos. A resposta é $10 \times 21 = 210$.

Qual é o erro?

Algumas comissões foram contadas mais de uma vez. Por exemplo, a comissão Arnaldo, Carlos, Eduardo e Beatriz foi contada três vezes. Realmente, o processo de contagem usado escolhia, em uma primeira etapa, dois homens para garantir que fosse satisfeita a exigência de pelo menos dois homens na comissão. Foi contada uma vez quando Arnaldo e Carlos são os homens escolhidos na primeira etapa (e Eduardo e Beatriz são escolhidos na segunda etapa); outra vez quando na primeira etapa são selecionados Arnaldo

e Eduardo e, finalmente, uma terceira vez quando Carlos e Eduardo são escolhidos na primeira etapa.

Se todas as comissões houvessem sido contadas três vezes, não haveria grandes problemas: bastaria dividir por 3 o resultado da contagem. Mas há comissões que foram contadas uma única vez e outras que foram contadas seis vezes. Por exemplo, a comissão Arnaldo, Carlos, Beatriz e Maria só foi contada uma vez e a comissão Arnaldo, Carlos, Eduardo e Paulo foi contada seis vezes”.

3.2 - ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Durante muitos anos o ensino de Análise Combinatória era feito somente no 2º ano do Ensino Médio e segundo Hariki (1996) era tratado com utilização de exercícios em que bastava aplicar uma fórmula que tinha sido exposta. Com isso não se desenvolvia o raciocínio combinatório de forma construtiva em que o próprio aluno teria que construir ou chegar a uma solução. Percebe-se que existia um vácuo para os alunos, pois as fórmulas eram expostas e depois vinham os exercícios, para que se escolhesse a fórmula a ser usada. Assim o aluno aprendia o conceito de forma abstrata sem passar pelo concreto, ou mesmo sem enumerar todos os casos.

Os PCN's vieram então tentar sanar este problema: a Análise Combinatória passaria a ser ensinada no Ensino Fundamental em forma de espiral, sendo que nenhuma fórmula seria ensinada e a ênfase seria na resolução como a listagem de todas as possibilidades, enumeração sistemática, diagrama de árvores e outras, para que o aluno pudesse chegar ao Ensino médio já familiarizado com o tema.

Surge então outro problema: que professores ensinariam os alunos do Ensino Fundamental desta forma, como é orientada pelos PCN's, já que os que estão lecionando aprenderam Análise Combinatória da forma tradicional (definição, exemplo e exercícios)? Mas como fazer isso se ele não foi ensinado a trabalhar desta forma, não aprendeu desta forma e, pior, não domina o conteúdo?

Segundo Esteves (2001, p.39) o ensino de Combinatória no Ensino Fundamental *“consiste, apenas, em introduzir o raciocínio combinatório, sem a preocupação de se deter em casos particulares”*.

Já os PCN's (1998. pág. 87) destacam o desenvolvimento da habilidade de *“resolução de situações-problemas de contagem, que envolvem o Princípio Multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de diagramas, tabelas e esquemas sem aplicação de fórmulas”*.

É importante o professor abordar várias resoluções para o mesmo problema, discutindo as diferentes resoluções dos alunos e, em alguns casos, ele mesmo pode acrescentar algumas que não foram explicitadas, pois muitos alunos acreditam que os problemas de Matemática só têm uma resolução correta.

O ensino era feito de uma forma vertical: o professor ensinava tudo o que sabia e o aluno tinha que fazer como o professor tinha ensinado. Assim qualquer outra solução, mesmo certa, não tinha espaço sequer para ser apresentada.

Além disso, a resolução de um problema enumerando-se todas as possibilidades não era aceita pelo professor, estabelecendo então a regra de que os alunos, inclusive do fundamental, não poderiam exibir todos os casos, contrariando o que é indicado para o Ensino Fundamental, construindo assim

uma crença nos professores de que este tipo de resolução não era permitido nem tampouco válido.

Segundo Costa (2003), a maioria dos professores de Matemática estuda Análise Combinatória como pré-requisito de Probabilidade. Com isso, os professores não aprofundam o conhecimento do assunto e nem fazem a devida discussão sobre o ensino de Análise Combinatória que é desenvolvida nas escolas.

É de se esperar, portanto, que estes professores, acostumados a resolver os problemas de Combinatória usando somente fórmulas, apresentarão dificuldades em trabalhar da forma como é indicada pelos PCNs, o que é confirmado por Costa (2003), pois segundo ele,

“podemos constatar que os professores mostram certa insegurança, falta de conhecimentos básicos sobre o assunto e dificuldades em resolver a questão sem o auxílio de fórmulas como propomos no desenvolvimento do nosso quadro teórico”.
(pag.112)

Ao ensinar Análise Combinatória no Ensino fundamental, percebi certa resistência por parte dos alunos em relação às resoluções dos problemas. Normalmente, nos primeiros exercícios, ao terminar de resolver, um aluno dizia: - *“agora resolve o problema”*, pois para o aluno essa estratégia não servia como resolução.

Para os alunos este tipo de resolução não é considerado como legítimo e segundo Esteves (2001) isso se deve ao contrato didático² que a escola estabelece com seus alunos, que é a valorização do uso do processo formal (utilização de algoritmo). Para ela

²Para Brosseau (1982), contrato didático é um conjunto de regras que determinam o comportamento e as expectativas de alunos e professores em sala de aula.

“ o uso da representação chega a ser uma ruptura deste contrato didático, onde apenas os alunos atrasados é que necessitam representar para em seguida fazer uso ou não do algoritmo” (pág.191)

De acordo com o exposto acima, percebe-se que a Análise Combinatória não é abordada como deveria no Ensino Fundamental - isto quando é abordada - e que, ao chegar ao Ensino Médio, o professor por achar que já foi abordada da forma correta e que agora é chegado o momento de formalizar os conceitos (ou mesmo por falta de tempo), também não faz uso das representações, deixando assim um vácuo no ensino deste importante tema. Talvez essa seja uma das possíveis explicações para a dificuldade apresentada.

Percebe-se que os professores não foram preparados para lecionar Análise Combinatória no Ensino Fundamental, pois não houve uma discussão sobre como se deveria ensiná-la, e que abordagem deveria ser feita. Como consequência, este aluno chegará ao Ensino Médio sem ter desenvolvido o raciocínio combinatório adequadamente.

3.3 - ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

No Ensino Médio os conteúdos abordados geralmente são: Princípio Multiplicativo, Permutações, Arranjos e Combinações, de forma estanque.

Pinheiro e Sá (2007) apresentaram um estudo com professores cuja prática predominante era partir de definições e, em seguida, apresentar exemplos, propriedades e exercícios. Estes docentes, mesmo tendo participado de cursos de formação continuada, utilizam-se de métodos formais nas aulas de Análise Combinatória. Já os que apresentam menos tempo

lecionando Combinatória (quatro professores), indicaram que partem de uma situação-problema para, em seguida, formalizar os conceitos. Observou-se, também, que o recurso didático, praticamente exclusivo utilizado pelos professores – graduados e pós-graduados – é o livro didático.

Pinheiro e Sá (2007) concluem que, mesmo alguns professores tendo apontado a resolução de problemas ou a modelagem no desenvolvimento da aula de Análise Combinatória, ainda é muito forte a tendência de apresentar fórmulas e, a seguir, aplicações das mesmas.

Outro problema em Análise Combinatória é que nem todos os exercícios podem ser resolvidos com as estruturas básicas usadas no ensino Médio. Existem alguns problemas, inclusive com o enunciado simples, que necessitam de uma combinatória avançada para resolvê-los, por exemplo, número de Stirling de primeira e segunda espécie e números de Partições.

Esses conteúdos em geral não são ensinados na graduação. Em algumas universidades a Análise Combinatória sequer é ensinada nem na licenciatura, e o professor, ao se deparar com um problema deste tipo, não passará perto de resolvê-lo ficando com a sensação de incapacidade frente ao assunto.

Essas questões podem aparecer através de perguntas dos próprios alunos, pois ao alterar alguma restrição do problema podemos transformar um problema simples em um problema difícil. O professor não precisa necessariamente saber resolver ou usar esta combinatória avançada, mas deve saber em que situações isto acontece para ter argumentos para explicar ao seu aluno que certo tipo de problema não pode ser resolvido com o conteúdo do Ensino Médio.

Isso não quer dizer que o professor deva simplesmente falar para o aluno que não há como resolver e acabou. Ele deveria, se possível, criar outro

problema que tenha estrutura similar, mas com valores menores, para que o aluno possa enumerar sistematicamente todas as soluções.

Seria interessante que o professor tivesse em mente todos, ou quase todos, os paradigmas de contagem para que, ao se deparar com um problema, ele pudesse buscar a estrutura que tem similaridade com o problema proposto, mas isso envolve uma questão de linguagem na interpretação do problema e impõe grandes dificuldades.

3.4 - MODELOS DE DUBOIS

Dubois (1984) classifica as configurações simples em três modelos: *seleção*, no qual enfatiza o conceito de amostra; *distribuição*, relatando o conceito de função; e *partição*, ou divisão de um conjunto em subconjuntos.

Navarro et. al.(1996) enfatizam a necessidade de considerar os três tipos de modelos no ensino de Análise Combinatória e Batanero et. al.(1997 a) observa que alguns alunos podem aplicar a definição de operação combinatória para modelos de seleção, mas não foram capazes de transferir esta definição, quando mudaram o problema para um modelo combinatório deferente.

No modelo de *seleção*, um conjunto de m objetos são considerados, do qual uma amostra de n elementos deve ser tomada.

Exemplo:

1) Existem 4 bolinhas numeradas em uma caixa (com os números 2,4,7e 9).

Escolhemos uma bolinha e anotamos seu número. Então nós colocamos a bolinha novamente na caixa. Repetimos o processo até formarmos um número de três dígitos. Quantos números diferentes de três dígitos pode-se obter?

Na seleção de uma amostra alguns estudantes podem repetir um ou mais elementos, e em outros não. De acordo com este dado, e se a ordem é relevante ou não, obtemos quatro amostras básicas de procedimentos:

- a) com reposição e com ordem;
- b) com reposição e sem ordem;
- c) sem reposição e com ordem;
- d) sem reposição e sem ordem;

Distribuição de bolas em caixas

DUBOIS (1984) classifica os armazenamentos em seis classes disjuntas. São elas:

- (i) a das distribuições ordenadas de m objetos diferentes em n recipientes diferentes,
- (ii) a das distribuições não ordenadas de m objetos diferentes em n recipientes diferentes
- (iii) a das distribuições de m objetos idênticos em n recipientes diferentes
- (iv) a das distribuições ordenadas de m objetos diferentes em n recipientes idênticos
- (V) a das distribuições não ordenadas de m objetos distintos em n recipientes idênticos
- (Vi) a das distribuições de m objetos idênticos em n recipientes idênticos

Observe que não se pode ter um armazenamento ordenado para o armazenamento de objetos indistinguíveis.

Das seis classes fundamentais assim definidas, existem várias subclasses, adicionando restrições. Este método gera uma classificação simples. Por armazenamento cada uma das seis classes especificadas é obtido, por exemplo:

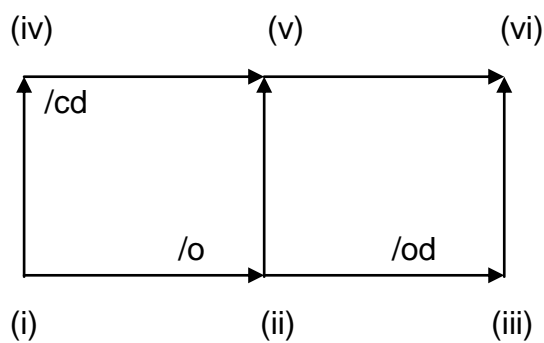
(a) Em casos em que $m \leq n$, o espaço de armazenamento com no máximo um objeto em cada caixa, a estrutura do armazenamento é injetora;

(b) Em casos em que $m \geq n$, o espaço de armazenamento com pelo menos um objeto em cada caixa, a estrutura do armazenamento é sobrejetora;

(c) Nos casos em que $m = n$, o espaço de armazenamento com exatamente um objeto em cada caixa, a estrutura do armazenamento é bijetora;

A partir da classe (i) de armazenamento simples ordenado, obtemos as outras cinco categorias mencionadas por um processo fundamental, por omissões sucessivas de propriedades que a caracterizam. Sabendo que a classe de armazenamento (i) é caracterizada pela propriedade de ser ordenado (o), para objetos distintos (od) e caixas distintas (cd), ele especifica facilmente as outras classes.

Observe que podemos partir do (i) e chegar aos outros modelos tirando alguma restrição.



Segundo BATANERO *et. al.* (1997 b), o uso destes três modelos pode não garantir que os alunos venham a acertar todos os problemas, mas pode ajudar os estudantes a desenvolver raciocínio probabilístico, resolução de problemas, estratégias heurísticas e outras.

3.5- TIPOS DE ERRO

O erro tem papel muito importante no processo de ensino aprendizagem de Matemática. Os professores não têm tempo para analisar as respostas erradas dos alunos ou mesmo verificar quais tipos de erros ocorrem com certa frequência para poder traçar estratégias que possam melhorar a qualidade de aprendizagem, mas entendemos que isso é de suma importância.

Segundo Hadar e Hadass (1981),

“A identificação dos erros que acontecem na resolução de problemas combinatórios é um passo necessário para uma melhor compreensão das habilidades dos alunos na resolução de problemas e para sua melhoria.” (pág. 435, tradução nossa)

Um dos papéis importantes do professor é identificar as dificuldades na resolução de problemas de combinatória para poder criar estratégias que possibilitem os alunos a vencer estas dificuldades.

Segundo Fischbein e Gazit (1988),

“Uma análise de vários tipos de erro na sala de aula é certamente de muito grande ajuda para o estudante compreender a natureza dos problemas, a diferença entre eles e o esquema mental que leva para a solução.” (pág. 197, tradução nossa)

Devemos acabar com a visão maniqueísta de certo e errado e procurar tirar do erro o sentido negativo. Se possível devemos usar os erros para aprender com eles. Segundo Lima et. al. (2002) *“é importante, diante de uma solução errada, analisar porque ela está errada”*.

Segundo Batanero et. al. (1997 b) o ponto chave na avaliação do raciocínio combinatório é identificar as dificuldades de estudantes na solução de problemas combinatórios. Descreveremos alguns dos erros mais comuns.

De acordo com Batanero et. al. (1997 a), são eles:

1) *Enumeração não sistemática*

Esta dificuldade consiste em tentar resolver o problema pela enumeração, usando tentativa e erro, sem algum procedimento recursivo que possibilite fornecer todas as possibilidades. Quando os alunos não têm um procedimento sistemático, muitas vezes eles são levados a erros. Uma sugestão seria resolver um problema parecido, um problema mais simples, com menores valores e depois tentar generalizar.

2) *O uso incorreto do diagrama de árvore*

O diagrama de árvore é um dos recursos mais usados e apresenta uma importante característica intuitiva, mas segundo Pesci (1994 apud Batanero, 1997 b) estudantes encontram dificuldades em construir diagrama de árvore, o que provoca muitos erros. Roa et. al. (1996) em um estudo com alunos com preparação matemática avançada mostra que os alunos têm evitado seu uso.

3) *Erro de ordem*

Este erro é quando os alunos confundem Combinação com Arranjo e vice-versa. Muitos alunos têm dificuldade em verificar se a ordem dos objetos tornará as configurações indistinguíveis.

4) *Erro de repetição*

O estudante não considera a possibilidade de repetir os elementos quando é possível, ou repete quando não é possível.

5) *Confusão do tipo de objeto*

Este tipo de erro ocorre quando estudantes consideram que objetos idênticos são distinguíveis ou que objetos diferentes são indistinguíveis.

6) *Confusão no tipo de receptáculo* (tipo de subconjunto) no modelo de distribuição ou na partição.

Este erro consiste em acreditar que podemos distinguir objetos idênticos, ou que não é possível diferenciar receptáculos distinguíveis (subconjuntos).

7) *Erro no tipo de partição requerida*

Este tipo de erro pode ocorrer em dois caminhos: as uniões de todos os subconjuntos de uma partição não contêm todos os elementos do conjunto total, ou algumas possibilidades de partições são negligenciadas.

Hadar e Hadass (1981) observaram obstáculos para o sucesso na solução de problemas combinatórios. Neste estudo, ele identificou sete obstáculos comuns ao resolver problemas combinatórios. Esses obstáculos são os seguintes:

1. Interpretação errada no que a questão está pedindo.
2. Escolha inapropriada da notação
3. Não subdividir o problema em um conjunto de subproblemas.
4. Método não sistemático de contagem e/ou solução.

5. Não aplicação de restrições em uma ou mais variáveis.
6. Não realização de um plano de contagem.
7. Não generalização de uma solução específica.

Esteves (2001) ao desenvolver o conceito combinatório em adolescentes que cursavam a 8ª série do Ensino Fundamental observou que ocorria:

1. Falta de um procedimento recursivo;
2. Resposta errônea injustificada;
3. Não uso da árvore de possibilidades ou uso inadequado;
4. Nos problemas de Permutação e Arranjo, a interpretação da palavra distribuir como dividir;
5. Confusão sobre a relevância da ordem em problemas de agrupamentos de p elementos.

Além disso, ela observou que todos apresentaram dificuldades na interpretação dos problemas propostos.

Esses erros apresentados pelas pesquisas anteriores servirão para orientar as estratégias que iremos escolher para que os alunos não venham cometer tais erros, que são frequentes na resolução de problemas de Análise Combinatória.

O trabalho de Piaget e Inhelder (s/d) desenvolve sobre as dificuldades dos alunos em resolver problemas de Análise Combinatória. Segundo eles, existe uma estreita correlação que apresenta a formação das noções de acaso e probabilidade com os estágios de Piaget.

Estágio I (anterior aos 7-8 anos) – Caracteriza-se pela ausência de operações propriamente ditas.

Estágio II (7-8 até os 11-12anos) – Caracteriza-se pela construção dos agrupamentos em ordem lógica e grupos numéricos, porém num plano essencialmente concreto.

Estágio III (operações formais/depois dos 12 anos) – Caracteriza-se pelo pensamento formal.

As evoluções das operações combinatórias, em comparação com os estágios citados anteriormente são: no Estágio I, elas nem sequer veem a possibilidade de um sistema que lhe permita achar todas as possibilidades; no Estágio II, ela já observa esta possibilidade, mas de maneira empírica e incompleta, e no Estágio III, quando o pensamento formal começa a emergir, permite a descoberta de alguns sistemas combinatórios completos para um pequeno número de elementos.

Piaget e Inhelder (s/d) observaram que os alunos apresentam mais dificuldades em problemas que envolvem Permutação, seguido de Arranjo com Repetição, Arranjo sem Repetição e por último, problemas de Combinação para alunos que não tiveram instrução sobre os temas. Segundo eles os adolescentes desenvolvem estratégia intuitiva para resolver problemas de Combinação, que aparentemente emergem naturalmente; e, depois no período de operações formais, adolescentes descobrem procedimentos sistemáticos de construção combinatória, embora para Permutações seja necessário a criança esperar até 15 anos de idade.

Entretanto, resultados posteriores, tais como Fischbein et. al. (1970, apud Batanero 1994), mostraram que a capacidade de resolver problemas combinatórios não é sempre alcançada, inclusive para aqueles que estão no nível de operações formais.

“Nem todos os sujeitos do estágio das operações formais eram capazes de descobrir o método de construir as combinações, nem sequer eram capazes de tratar satisfatoriamente os arranjos até a idade dos 13 anos e as permutações até à idade dos 14-15 anos, (...) a capacidade requerida para as operações combinatórias desenvolve-se gradualmente, mas não fica completa durante

este estágio". (FISCHBEIN ET AL., 1970 apud BATANERO 1994).

Fischbein e Gazit (1988) estudaram o efeito de instrução específica na capacidade de resolver problemas combinatórios e descobriu que se pode ensinar a alunos de 11-12 anos de idade Análise Combinatória elementar usando o diagrama de árvore e a fórmula adequada.

Nesse mesmo trabalho, em uma pesquisa em Israel com alunos de 11-12 anos e 13-14 anos realizou um pré-teste, um pós - teste e observou que os alunos que não tiveram instrução apresentaram os mesmos dados que os achados por Piaget e Inhelder (s/d), em que os alunos apresentavam mais dificuldade em problemas de Permutação do que Combinação. Mas no pós-teste, depois da instrução, o resultado mostra que os alunos passaram a apresentar mais dificuldades em problemas de Combinação do que Permutação ou Arranjo. Segundo eles, isto pode ser devido à fórmula de permutação e à árvore de possibilidades.

Já o esquema combinatório não pode ser ensinado usando o diagrama de árvore e, segundo Fischbein e Gazit (1988), o ensino da fórmula de Combinação aparentemente destrói a estratégia empírica intuitiva deste tipo de problema.

Ao analisarmos a estratégia usada por eles para ensinar a fórmula de Combinação, percebemos que ele parte da fórmula de Arranjo para chegar à fórmula de Combinação o que pode ser um dos motivos que venham prejudicar as estratégias que os alunos já tinham.

Entendemos que Permutação está relacionada com mistura e Combinação com subconjunto, e o Arranjo pode ser entendido como uma escolha de um conjunto e depois sua mistura (no sentido de permutar).

Percebe-se assim que o Arranjo não tem o mesmo *status* da Combinação e da Permutação.

Costa (2003) analisou e estudou os instrumentos disponíveis para o professor ensinar combinatória no Ensino Fundamental por processo de modelagem, bem como seus conhecimentos e concepções sobre o objeto matemático em jogo.

A pesquisa foi realizada com professores do Ensino Fundamental e Médio e confirmou os achados de Esteves (2001) constatando as dificuldades de estabelecer um procedimento sistemático; justificativas das respostas; não uso ou pouco uso de representações e dificuldades em relação à relevância da ordem. Vale ressaltar que a pesquisa realizada por Costa (2003) foi feita com professores enquanto que a realizada por Esteves (2001) foi feita com alunos do Ensino Básico.

Costa (2003) constata que apesar de existirem bons materiais de apoio como livros didáticos do Ensino Fundamental e PCN's, o professor não conhece os PCN's suficientemente e, o mais grave, não conhece Análise Combinatória o suficiente para que possa ensinar os alunos.

Pinheiro (2008) procurou investigar a viabilidade de uma sequência de ensino para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória, por meio de situações didáticas que enfatizem a resolução de problemas como ponto de partida, com alunos da segunda série do Ensino Médio.

Foram utilizados um pré-teste, um pós-teste, os registros dos alunos e os resultados indicaram que a sequência didática proporciona condições favoráveis ao desenvolvimento de habilidades básicas de Análise Combinatória. Conclui observando que a resolução de problemas como ponto de partida viabiliza condições favoráveis para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória.

Roa et. al. (1996) apresentam um estudo sobre as estratégias na resolução de problemas combinatórios simples com quatro estudantes que foram selecionados entre os que obtiveram os melhores e os piores resultados de um grupo de 29 alunos do quinto ano curso de licenciatura em Matemática ao resolverem 13 problemas de Análise Combinatória.

Os resultados apontaram que os estudantes mostraram dificuldades elevadas com os problemas, inclusive estudantes com uma sólida preparação Matemática. Os bons resultados estão caracterizados pela identificação na resolução dos problemas, na compreensão da ordem, no enunciado dos problemas e na generalização e identificação da operação combinatória adequada. As causas de fracasso foram: a confusão sobre o tipo de elementos que se combinam; a falta de capacidade de enumeração sistemática e falhas na conclusão final, os conhecidos erros de cálculo.

Navarro-Pelayo et. al. (1996) consideram o quanto é importante analisar as variáveis que afetam os procedimentos e os erros dos alunos ao resolverem problemas combinatórios, mostrando como devem ser consideradas essas variáveis no aprendizado.

Os autores descreveram e classificaram os problemas combinatórios simples de acordo com Dubois (1984) em três modelos básicos: seleção, partição e distribuição. Eles realizaram o trabalho com uma amostra de 720 alunos, com idade de 14 e 15 anos, de nove escolas de Granada e Córdoba, utilizando como instrumento de pesquisa um grupo de 13 questões de Análise Combinatória. Dos alunos que participaram da pesquisa, 352 haviam recebido instrução acerca das operações básicas de combinatória e os outros alunos (368) não haviam tido contato com o referido assunto.

Eles analisaram e classificaram todos os tipos de erros, separando aqueles específicos do problema de distribuição e partição. Observaram que

antes da instrução a principal dificuldade foi a falta de uma enumeração sistemática; e, no grupo que recebeu instrução, os principais erros foram de ordem, repetição e apareceram novos erros, como de fórmulas e interpretação incorreta do diagrama de árvore em alguns alunos.

O trabalho mostra o efeito positivo da instrução, apesar de muitos alunos não terem compreendido o significado das operações combinatórias e de terem aparecido novos tipos de erros depois da instrução.

Esteves (2001) estudou a aquisição e o desenvolvimento dos conceitos combinatórios em adolescentes de 14 anos que cursavam o atual 9º ano de escolaridade ou antiga 8ª série do Ensino Fundamental. Para isso ela construiu uma sequência de ensino, que parte de situações problemas, que foi aplicada ao grupo experimental e outro grupo referência que seguiu os métodos tradicionais apresentados nos livros. Ambos os grupos foram submetidos a dois testes individuais: o primeiro, antes de ser introduzido o ensino de Análise Combinatória, continha 10 questões do assunto; o segundo, após o contato com conteúdo, também continha 10 questões, que possuíam similaridades com as questões do pré-teste.

O resultado mostrou que os alunos apresentam dificuldades em resolver esses problemas e que as principais causas estão relacionadas com a relevância da ordem, com a falta de organização para enumerar dados sistematicamente e interpretação incorreta do problema.

Pinheiro e Sá (2007) apresentaram um estudo feito com professores, ao ensinar Análise Combinatória, em que o recurso didático, praticamente exclusivo utilizado por eles – graduados e pós-graduados – é o livro didático. Logo podemos concluir que o livro didático exerce uma forte influência na forma de ensino dos professores.

Esteves (2001), ao analisar os livros de Ensino Médio, percebeu que eles não apresentam uma preocupação em familiarizar o aluno com os problemas de contagem, mas sim com a sistematização imediata do conceito. Sabo (2010) verificou que alguns livros didáticos montam uma sequência de exercícios onde as técnicas são as mesmas do exercício modelo, fazendo com que o aluno não desenvolva o raciocínio combinatório, manipulando os procedimentos sem uma plena compreensão.

Percebe-se pelas pesquisas anteriores que os professores se guiam quase que basicamente usando os livros didáticos e que esses estão muito aquém do que é necessário para o ensino de Análise Combinatória.

Biryukov (2004) estudou o papel da Metacognição na resolução de problemas matemáticos (Análise Combinatória) em que universitários resolveram dois problemas de Análise Combinatória e depois preencheram um questionário. O questionário visava determinar comportamentos metacognitivos durante a resolução de problemas combinatórios. Ela conclui que existe maior probabilidade de resolver o problema quando os indivíduos tinham experiências metacognitivas e podiam aplicá-las.

Ela observou que os alunos que foram bem sucedidos, construíram um modelo esquemático da condição do problema e desenvolveram uma estratégia de solução. Baseado neste resultado, Biryukov sugere que os professores de matemática necessitam incluir a Metacognição na sua instrução.

A principal dificuldade é para encontrar uma representação adequada do problema e uma modelagem apropriada da solução (BIRYUKOV 2004).

Biryukov escolheu a Análise Combinatória para a sua pesquisa em metacognição por seu caráter não algorítmico. Além disso, existem outros fatores que nos motivaram pela escolha deste tópico, tais como:

- a) Dificuldades encontradas em entender o enunciado do problema, pelo valor semântico do enunciado do problema e pela dificuldade em encontrar a “Matemática” no problema pela ausência de dados numéricos em muitos problemas;
- b) Pela possibilidade de resolver o mesmo problema de várias formas diferentes;
- c) Pela constante necessidade de estarmos monitorando o processo de resolução e de abandonar estratégias infrutíferas;

CAPÍTULO 4 – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

4.1 – INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória é um tema bastante propício para o emprego da resolução de problemas como metodologia de ensino da Matemática. A resolução de um problema de Combinatória exige, quase sempre, estratégias ou ideias criativas segundo uma compreensão plena da situação descrita pelo problema (MORGADO et. al., 2004, p. 2).

Com o advento da revolução tecnológica, cada vez mais são solicitadas na sociedade pessoas que sejam capazes de pensar, de serem criativas, que, frente aos problemas, sejam capazes de tomar decisões acertadas, entre outros atributos. Para formarmos alunos com essas qualidades, não é possível ensinar-lhes de forma tradicional, devemos ajudá-los a desenvolver certas habilidades que serão úteis não só na Matemática, mas em toda a sua vida.

Ao pensarmos que tipo de instrução queremos dar aos nossos alunos, devemos primeiro pensar que tipos de alunos queremos formar, se alunos meros reprodutores do que lhes foi ensinado ou passado, e que tiveram que aceitar sem sequer questionar ou descobrir, que estão acostumados a trabalhar com repetição e memorização apenas, ou alunos criativos que satisfaçam às solicitações mencionadas no parágrafo anterior.

Segundo Polya (1995)

“A Matemática não é um esporte para espectadores; não se pode desfrutar dela nem aprendê-la sem a participação ativa; por isso o princípio da aprendizagem ativa é particularmente importante para nós, professores de matemática, especialmente se considerarmos como nosso principal objetivo, o primeiro de nossos objetivos, o de ensinar o estudante a pensar.” (POLYA, 1995, p.10.)

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN/EM) os objetivos do ensino da Matemática são: desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo; utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos. (PCN/EM, 1998, p. 85.)

Muitas vezes a escola está voltada para a informação apenas, aumentando e aprimorando esse conhecimento, sem que este aluno bem informado possa saber como usar esta informação para, por exemplo, resolver um problema. Uma pessoa pode ter certa informação, mas não saber empregar este conhecimento no momento certo e de forma adequada, ou até mesmo, ao resolver um problema, não perceber nenhuma relação deste conhecimento com o problema que lhe foi apresentado.

Segundo os PCN's o ensino através de resolução de problemas é importante, pois

“A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.” (PCN – Matemática, 1998, p. 40.)

Tentaremos definir o que é um problema, o que pode ser bem complexo, pois a compreensão de problema pode ser bem diferente, o que para muitos é um problema, para outros pode ser um simples exercício.

Van de Walle (2001, apud PINHEIRO 2008) considera um problema da seguinte forma:

“Um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm método ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta”.

Segundo Polya (RPM) existem dois tipos de problemas, o de rotina e os que não o são. O *problema que não é de rotina* é o que exige certo grau de criação e originalidade por parte do aluno, enquanto que o de *rotina* pouco exige. Já para os PCN's (1998), um problema existe quando se está diante de uma situação desafiadora, quando se precisa superar algum obstáculo da vida a fim de atingir um determinado objetivo. Para nós, *problema* é uma questão cuja resposta não é simplesmente uma aplicação de um algoritmo.

Polya ressalta a importância dos problemas, para ele:

“Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver, por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.” (POLYA, 1995 p. 20.)

Entendemos que os exercícios de rotina e os problemas são necessários. O que não se pode aceitar é que os alunos ao se depararem com os problemas não saibam o que fazer ou nem por onde começar e que eles só trabalhem com exercícios cuja resolução é só aplicação de determinada fórmula. Vale ressaltar que segundo os PCNEM:

“não significa que os exercícios do tipo ‘resolva’..., ‘calcule’... devam ser eliminados, pois eles cumprem sua função no aprendizado de técnicas e propriedades...” (p. 113)

A Resolução de Problemas é o coração da Matemática, se não a Matemática propriamente dita. (SCHOENFELD, 1992, p. 341.) Apesar disto, em uma revisão histórica sobre o papel da resolução de problemas no currículo escolar, Stanic e Kilpatrick (1989) afirmam que: *“Problemas têm ocupado um lugar central nos currículos da Matemática escolar desde a Antiguidade, mas o mesmo não acontece com a resolução de problemas. Só recentemente os educadores matemáticos aceitaram a ideia de que o desenvolvimento de habilidades para a resolução de problemas merece especial atenção”*. (STANIC & KILPATRICK apud SCHOENFELD, 1992, p. 33.)

Segundo Lester (1988) existe a necessidade de considerar a resolução de problemas como um processo em que o aluno se envolve na atividade de fazer matemática, um processo semelhante ao do matemático durante sua atividade profissional.

Com relação à solução de um problema, é bastante comum poder-se *adivinhá-la*, utilizando intuições, inferências, induções e baseando-se em analogias com outros problemas resolvidos (POLYA, 1995). Para ele o objetivo da heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção e ele percebe a Matemática como uma disciplina dependente da intuição, da imaginação e da descoberta, defendendo que se deve imaginar a ideia da prova de um teorema antes de prová-lo. Para Polya (1995)

“O estudo da heurística tem objetivos “práticos”: uma melhor compreensão das operações mentais tipicamente úteis na resolução de problemas poderia exercer uma influência benéfica sobre o ensino, especialmente sobre o ensino da Matemática”. (POLYA, 1995, p.129-130.)

Lester (1988) afirma que “a incorporação de problemas heurísticos no ensino da Matemática desenvolve nos alunos a habilidade de elaborar uma

hipótese sobre o método de solução a ser usado e testar essa hipótese, além de permitir que o aluno use sua intuição sobre possíveis soluções dentre várias estratégias que ele conhece”. (LESTER, 1988, p. 22.)

4.2 POLYA

Segundo Polya (1995), os estudantes deveriam pensar sobre o problema, planejar a solução, implementar a solução e avaliar a solução escolhida. Ele apresenta vários exemplos de como utilizar estratégias heurísticas nas aulas de Matemática. Pode-se observar que mesmo antes de Flavell ter cunhado o nome de metacognição, as ideias de Polya já apontavam para o seu uso e, que, segundo Lester e Garofalo (1985), Polya considera o processo metacognitivo só implicitamente.

Polya (1995) propõe os seguintes passos:

1 - *Compreender o problema* (conhecimento da incógnita, conhecimento dos dados, conhecimento das condições impostas) – essas heurísticas permitem que o estudante certifique-se que considerou os aspectos relevantes do problema;

2 - *Traçar um gráfico, fazer um diagrama, introduzir uma notação adequada* – o sujeito tenta ver o problema por meio de notação simbólica, estabelecendo relações entre os elementos do problema;

3 - *Estabelecer um plano* (recordar um problema conhecido de estrutura idêntica)

– essa heurística supõe que o estudante possua capacidade para estabelecer semelhanças, utilizar o pensamento analógico o qual permitirá chegar à solução do problema atual fazendo analogia com o já conhecido;

4 - *Execução do plano* (verificar passo a passo) – essa heurística permite dar segurança acerca da elaboração correta do plano de resolução do problema;

5 - *Avaliação do plano* (resolver o problema de maneira diferente) – essa heurística permite comprovar a solução obtida.

4.3 ESTRATÉGIAS METACOGNITIVAS

Os professores normalmente apresentam a solução de um problema de forma limpa e clara sem revelar as tentativas, os esboços (o que normalmente nós chamamos de rascunho para os alunos). Entendemos que este é o papel do professor, mas ao fazermos isto damos a impressão de que, ao resolver um problema, já partimos direto para a opção correta sem antes ter que analisar, fazer conjecturas, suposições, adotar caminhos que irão esbarrar em alguma dificuldade, que nos fará voltar e ir por outro caminho ou adotar outra estratégia.

Segundo Schoenfeld (1992) os alunos têm a crença de que se uma pessoa sabe certo conteúdo ela resolve um problema em 5 minutos ou menos, o que provavelmente pode ser gerado pela atitude dos professores mencionada anteriormente.

Infelizmente isso se apresenta até na graduação, me lembro do curso de Análise em que o professor tomava certo valor de delta, que fazia tudo dar certo e em momento algum ele mostrava de onde veio este delta, pois com certeza ele tinha feito um rascunho, normalmente de trás para frente e só depois tomou o delta de acordo com o seu rascunho.

Entendemos que no ensino de Análise Combinatória o professor deve ir por caminhos infrutíferos, que levarão a um impasse e depois retornar e adotar

alguma estratégia que possa resolver o impasse, para que o aluno possa realmente entender como se devem atacar verdadeiros problemas de combinatória.

Isso irá causar um estranhamento nos alunos, já que haverá uma ruptura no contrato didático. Além disso, o professor terá que lidar com alunos acostumados a respostas prontas, e na maioria das vezes não querem ou não estão acostumados a pensar e fazer tentativas que num primeiro momento não trarão respostas corretas, mas que possibilitarão traçar outra estratégia que poderá ou não levar a solução correta.

Um problema de Combinatória pede a contagem de objetos/classes diferentes, construídos de acordo com certas regras.

Dado um problema de combinatória ou ele é resolvido diretamente pelo Princípio Multiplicativo ou ele apresenta condições que exigem outras operações.

Então devemos ter como 1ª estratégia: atacar o problema com o Princípio Multiplicativo.

Existem alguns problemas que são resolvidos com o Princípio Aditivo, mas que não serão abordados por ser de simples compreensão.

No livro Morgado *et. al.*(1991) existe uma recomendação

“ Pequenas dificuldades adiadas costumam transformar-se em grandes dificuldades. Se alguma decisão é mais complicada que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar ” (pag.20)

Entendemos que se o professor começar com a decisão mais complicada, ele esconde uma etapa importante da resolução, que é adotar um caminho que pode conduzir a um impasse e só então o aluno poderá perceber que decisão é mais adequada e qual estratégia ele terá que tomar. Esta atitude se parece muito com a do Matemático e que segundo Schoenfeld (1992),

alunos normalmente escolhem um caminho e persistem neste caminho mesmo que percebam que ele não está sendo produtivo.

Ao adotar esta atitude, esperamos desenvolver nos alunos uma habilidade metacognitiva em que o aluno terá que autorregular o processo de resolução dos problemas. SCHOENFELD (1992) discute a evolução do conceito de autorregulação como um importante complemento ao aspecto cognitivo da resolução de problemas.

Normalmente, se o problema não puder ser resolvido direto pelo Princípio Multiplicativo, por não satisfazer a invariância da escolha ou por contar objetos que não estão sendo solicitados, iremos resolver este impasse de duas formas:

1º Caso: Teremos que “abrir” em casos, contar separadamente e depois somar. Esses problemas que necessitam de adição são redutíveis a problemas menores, com multiplicação e divisão.

2º Caso: Teremos que ignorar uma restrição. Neste caso estaremos contando a mais e depois será necessário descontar. Para descontar o que foi contado a mais, teremos que dividir ou subtrair, dependendo do problema.

Para adotar esta postura é importante compreender as informações dadas no problema, com a construção de exemplos de objetos que entram na contagem e de *não exemplos*, objetos que não entram na contagem ou que estão sendo contado mais de uma vez.

Com isso, estamos querendo desenvolver nos nossos alunos habilidades metacognitivas importantes para a resolução de problemas, tais como: Compreender o problema (POLYA, 1995; SCHOENFELD, 1992; GAROFALLO e LESTER, 1985), pois ao criar exemplos e não exemplos, eles terão que compreender o que está sendo pedido; e a verificação (POLYA,

1995; SCHOENFELD, 1992; GAROFALLO e LESTER, 1985) que é importante para guiar o estudante para a solução correta.

Observe o exemplo de um exercício resolvido do livro do DANTE. (2005, 4º da página 285)

“ 1) Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7:

a) quantos são os números de três algarismos que podemos formar?

b) e de 3 algarismos distintos?

a) _____ _____ _____
Centenas dezenas unidades

Há 7 possibilidades para a centena (0 não é permitido), 8 para a dezena e 8 para a unidade. Portanto, podemos formar $7 \times 8 \times 8 = 448$ números.

b) _____ _____ _____
Centenas dezenas unidades

Se os algarismos são distintos, há 7 possibilidades para a centena, 7 para as dezenas e 6 para a unidade. Portanto, podemos formar $7 \cdot 7 \cdot 6 = 294$ números de 3 algarismos distintos com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.”

Observe que não é discutido porque ele começa pela centena. Somos da opinião que o professor deveria mostrar o que aconteceria se começasse pela unidade.

Há 8 possibilidades para a unidade, 7 para dezena e nas unidades depende se o zero já foi utilizado ou não, e neste caso perde-se a invariância da escolha, logo ou se inicia pelas centenas ou divide-se em casos.

Agora observe o 5º exercício da página 288 do livro do DANTE (2005).

“ Quantos números ímpares de 4 algarismos não repetidos podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

1ª maneira: sem usar fórmula

Para que o número seja ímpar, devemos ter como algarismo das unidades uma das 5 opções apresentadas (1, 3, 5 ou 7). Para a dezena, temos 8 opções, pois não se pode repetir o algarismo usado nas unidades. Para a centena, 7 opções, para o milhar, 6 opções. Assim, temos $6 \times 7 \times 8 \times 5 = 1680$ números.”

Observe que agora ele começa com o algarismo das unidades, o que para o aluno muitas vezes não fica claro, já que no outro exemplo ele começou pelas centenas. Em nossa opinião o professor deveria fazer começando pela a unidade de milhar para que o aluno possa ver em que casos são interessantes começar pela unidade ou pela centena e qual seria o impasse e de que formas eu poderia transpor este impasse.

Alguns livros já apresentam as estratégias metacognitivas. Observe uma resolução do livro Temas e Problemas (LIMA *et. al.*; 2005).

“Exemplo 6. *Quantos são os números pares de três dígitos distintos?*

Solução: Há 5 modos de escolher o último dígito. Note que começamos pelo último dígito, que é o mais restrito; o último dígito só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

Em seguida, vamos ao primeiro dígito. De quantos modos se pode escolher o primeiro dígito? A resposta é “depende”: se não tiver sido usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro dígito, pois não se pode usar nem o 0 nem o dígito já usado na última casa; se já tiver sido usado o 0, haverá 9 modos de escolher o primeiro dígito, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira casa.

O uso das estratégias não pode ser entendido como um algoritmo a ser seguido à risca, mas como algo flexível que busca facilitar a resolução de problemas, e, no nosso caso em especial, facilitar a resolução de problemas de Análise Combinatória e minimizar os erros apresentados anteriormente.

Com o intuito de tornar os nossos alunos melhores resolvedores de problemas, minimizar os erros cometidos e possibilitar um melhor aprendizado de Análise Combinatória iremos criar estratégias metacognitivas para o seu ensino, com objetivos bem específicos.

Segundo JALLES (1997)

“O ensino pode basear-se, inicialmente, na utilização de regras e estratégias em experiências bastante concretas e específicas” e “as estratégias devem também ser ensinadas em contextos significativos e necessários”.
(pag.76)

Em realidade estas estratégias que são utilizadas em um método de resolução de problemas rompem com esquemas e padrões e isto não é fácil para os alunos, porque elimina a automatização do que é estabelecido. Eles estão acostumados com tudo rápido, tão sem pensar que não lhes agrada a ideia de um modelo que venha exigir deles uma reflexão profunda, que eles venham a meditar através de perguntas e que muitas vezes eles irão testar uma estratégia e, se não resolver com esta estratégia, testar outra.

Segundo White (apud JALLES, 1997), outro fator que tem influenciado a pesquisa em metacognição é a possibilidade de ensinar às pessoas estratégias metacognitivas, fazendo com que elas aprendam melhor. Entretanto as pesquisas mostram que desenvolver as habilidades metacognitivas não é tarefa fácil.

Apesar das dificuldades encontradas, as pesquisas com alunos do Ensino Fundamental e Médio têm mostrado que o treino de estratégias metacognitivas tem sido bem sucedido (KING, 1991, 1992 apud JALLES, 1997) e em várias situações de aprendizagem, o uso e o treinamento em estratégias metacognitivas levarão os indivíduos a programarem suas tarefas de modo mais eficiente (PRESSLEY, 2000 apud NEVES 2007).

Um dos maiores problemas é que os alunos não conseguem nem sequer compreender o que está sendo solicitado no problema e normalmente partem para uma das fórmulas conhecidas. Logo, um dos principais objetivos das estratégias é fazer o aluno compreender o que está sendo solicitado, pois segundo (NEVES, 2007),

“As estratégias metacognitivas são utilizadas por meio da monitoração, ou seja, estamos sempre avaliando o estado da nossa compreensão do item que estamos lendo, buscando alcançar o seu completo entendimento...” (pág.118)

Assim como existe uma dificuldade em diferenciar cognição de metacognição (GAROFALO e LESTER 1985), existe também uma dificuldade entre o que é estratégia cognitiva e o que é estratégia metacognitiva. Para Dembo (1994, apud BORUCHOVITCH, 1999), enquanto as estratégias cognitivas se referem a comportamentos e pensamentos que influenciam o processo de aprendizagem de maneira que a informação possa ser armazenada mais eficientemente, as estratégias metacognitivas são procedimentos que o indivíduo usa para planejar, monitorar e regular o seu próprio pensamento.

O livro Lima et. al.(2002), apresenta estratégias para resolver problemas de combinatória:

1) *Postura*. Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisão devemos tomar.

2) *Divisão*. Devemos sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.

3) *Não adiar dificuldades*. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas

for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Iremos apresentar algumas estratégias metacognitivas específicas para o ensino de Análise Combinatória que visa minimizar os erros mais comuns apontados nas pesquisas anteriores (BATANERO, 1997; HADAR E HADASS, 1981; ESTEVES, 2001) e que podem facilitar a resolução de problemas e desenvolver habilidades metacognitivas importantes. Vale ressaltar que elas não são regras gerais e que possivelmente não cobrirão todos os casos.

1) Construir exemplos de objetos que pertençam à classe desejada, e outros que não pertençam à classe;

Com esta estratégia estamos tentando fazer o aluno não só compreender o enunciado do problema como também ter em mente que tipos de objetos estão sendo solicitado e que tipos de objetos não entram na contagem.

2) Tentar identificar precisamente quando um objeto pertence à classe e quando dois deles devem ser considerados distintos. Verificar se alterarmos a ordem estaremos criando outro objeto ou se continuará sendo o mesmo objeto.

Um erro muito comum entre os alunos é a confusão entre combinação e arranjo.

3) Verificar se, ao usar o Princípio Multiplicativo, isto ferirá o princípio da invariância da escolha (um impasse) ou se estará contando objetos a mais?

Caso isso ocorra, é necessário adotar outra estratégia.

3.1) Existe algo no enunciado que necessita de atenção especial, ou que tem uma restrição maior?

Como vimos anteriormente, pequenas dificuldades tornam-se grandes dificuldades, logo devemos começar pelo que é mais restrito.

3.2) Dividindo o problema em sub-tarefas pode-se usar o Princípio Multiplicativo em cada uma delas mantendo a invariância da escolha?

Em muitos casos a divisão facilitará a resolução do problema.

3.3) Se houver contagem a mais, é possível descontar o que foi contado a mais?

4) Construir um esquema ou uma representação.

5) Pensar em um problema “menor”.

Muitas vezes ao pensar em um problema menor o aluno poderá generalizar a solução.

6) Negligenciar, a priori, alguma condição exigida para que um objeto pertença a coleção.

Assim procedendo, estaremos provavelmente contando a mais e será necessário retirar posteriormente os objetos que não pertencem a esta classe.

7) Enunciar o problema de uma forma diferente ou descobrir problemas equivalentes, que em alguns casos serão mais simples de resolver.

Existem alguns problemas considerados difíceis de Combinatória em que a solução deste problema está em bijeção com o número de solução de um problema mais fácil de ser resolvido. Ao perceber isto, pode-se resolver o problema mais simples.

8) Depois de resolvido o problema repensar a solução e verificar se não se está contando algum caso a mais ou esquecendo algum.

Ao relacionarmos estas estratégias com os passos que Polya (1995) propõe e a categoria controle e autorregulamentação de Schoenfeld (1987)

observamos que, as estratégias 1, 2 e 3 estão relacionadas em *compreender o problema* (POLYA, 1995; SCHOENFELD, 1987), o que traz grande dificuldades para os alunos.

A estratégia 5 está relacionada com *traçar um gráfico, fazer um diagrama* (POLYA). As estratégias 4, 6, 7 e 8 estão relacionadas com *estabelecer um plano* (POLYA) e *planejar uma estratégia de solução* (SCHOENFELD), e a estratégia 8 está relacionada com *avaliação do plano* (POLYA) e *avaliar se a resposta faz sentido* (SCHOENFELD).

Observe que não precisaremos usar todas as estratégias em todos os problemas, e nem de forma ordenada e forçada. Elas servem para fazer com que os alunos desenvolvam as habilidades metacognitivas que são importantes para a resolução de problemas específicos de Análise Combinatória.

4.3.1- POR UMA TAXONOMIA DA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

Ao resolver problemas de Análise Combinatória, normalmente procuramos verificar se já nos deparamos com algum problema parecido com o que está sendo proposto, o que é uma das perguntas Heurísticas de George Polya. É como se tivéssemos um “arquivo” com vários tipos de problemas ao qual recorreremos a fim de tentar identificar qual é a estrutura da resolução do problema novo.

Segundo Dossey (1991, apud CORREIA e FERNANDES) muitos problemas podem ser resolvidos pela utilização de outros anteriormente resolvidos. Já Hung (2000, apud SRIRAMAN, ENGLISH, 2004) parte da hipótese de que estudantes constroem uma forte generalização matemática, quando eles são capazes de conectar uma relação de um problema resolvido

anteriormente com um problema similar em um contexto completamente diferente.

Já Sriraman e English (2004) entendem que o uso de problemas combinatórios pode estimular um foco na estrutura. Segundo eles, *“uma implicação comum através da pesquisa analisada neste artigo é que escolher problemas que variam o contexto, mas são essencialmente similares na sua estrutura matemática, é pedagogicamente importante.”* (pág. 186, tradução nossa)

“Assim, dotar estudantes com experiências, nas quais eles agrupam problemas com resoluções matematicamente similares, é essencial. Classificar atividades iguais pode começar em adolescentes e pode continuar com estudantes secundários para estimular explicitamente um foco na estrutura do problema” (pág. 187, tradução nossa)

Achamos então interessante categorizar a resolução dos problemas de Análise Combinatória de acordo com a estrutura envolvida e que na nossa visão podem ser divididos em grupos que chamaremos “MACROS”. Vale ressaltar que não estamos categorizando os problemas e, sim, a resolução dos problemas, isto é, a estratégia utilizada para resolver o problema. São eles:

T.1) Somente Princípio Aditivo.

Ex.1) Maria entrou numa loja que tem 2 tipos diferentes de doces e 4 de salgados.

a) Supondo que ela só possa comprar um alimento, de quantas maneiras distintas ela poderá escolhê-lo?

São $2 + 4 = 6$ tipos de alimentos. Maria poderá escolher de 6 maneiras distintas o seu alimento.

T.2) Somente o Princípio Multiplicativo.

Ex. 2) Uma mulher que tenha 10 blusas, 3 calças compridas e 4 pares de sapatos pode se vestir de quantos modos distintos se usar sempre uma blusa, uma calça comprida e um par de sapatos?

Neste problema o Princípio Multiplicativo é suficiente para resolvê-lo.

T.3) Conjunção dos Princípios Aditivo e Multiplicativo.

Neste caso, é quando surge uma dificuldade em resolver o problema através do Princípio Multiplicativo por não satisfazer a invariância da escolha e então é necessário dividir em casos, calculando separadamente e depois somando.

Ex. 3) Escrevendo-se os números inteiros de 1 a 2000, inclusive, quantas vezes o algarismo 1 é escrito?

Vamos fazer a contagem dividindo em 4 casos e observando que não é exigido que os algarismos sejam diferentes.

Caso 1 – contar o número de vezes em que o algarismo 1 aparece na ordem das unidades de milhar.

Para a ordem das centenas temos 10 possibilidades (de 0 a 9), para a ordem das dezenas temos 10 possibilidades (de 0 a 9) e para a ordem das unidades simples temos também 10 possibilidades.

1 _ _ _
↑ ↑ ↑
10 10 10

Pelo princípio multiplicativo o algarismo 1 é escrito na ordem das unidades de milhar $10 \times 10 \times 10 = 1000$ vezes.

Caso 2 – contar o número de vezes em que o algarismo 1 aparece na ordem das centenas.

– 1 – –
↑ ↑ ↑
2 10 10

Para a ordem das unidades de milhar temos 2 possibilidades 0 ou 1, para a ordem das dezenas temos 10 possibilidades e para a ordem das unidades simples 10 possibilidades. Usando o princípio multiplicativo concluímos que o algarismo 1 é escrito na ordem das centenas $2 \cdot 10 \cdot 10 = 200$ vezes.

Caso 3 – contar o número de vezes em que o algarismo 1 aparece na ordem das dezenas

– – 1 –
↑ ↑ ↑
2 10 10

Usando o mesmo raciocínio anterior temos $2 \cdot 10 \cdot 10 = 200$ vezes

Caso 4 – contar o número de vezes que o algarismo 1 aparece na ordem das unidades simples.

– – – 1
↑ ↑ ↑
2 10 10

Pelo Princípio Multiplicativo temos $2 \cdot 10 \cdot 10 = 200$ vezes.

Pelo princípio aditivo escrevemos o algarismo 1, de 1 a 2000,

$1000 + 200 + 200 + 200 = 1600$ vezes.

T.4) Princípio Multiplicativo com a ideia de desconto.

Neste caso iremos contar o número de possibilidades usando o Princípio Multiplicativo e depois descontar o que foi contado a mais, utilizando para isso a divisão. Entre esses casos estão os problemas de Combinação, Permutação com Repetição e Permutação Circular.

Ex. 4) Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?

Vale ressaltar que não estamos querendo substituir a fórmula da Combinação, por exemplo, pela árdua tarefa de usar o Princípio Multiplicativo e depois verificar quantas réplicas foram contadas a mais para depois dividir em todos os problemas.

T.5) Princípio Multiplicativo com a ideia de exclusão.

Outro tipo de solução que consideraremos é quando esquecemos alguma restrição e depois diminuimos o que foi contado a mais.

Ex. 5) Quantos são os números naturais pares que se escrevem com 4 algarismos distintos?

Neste exemplo, podemos esquecer a restrição de não podermos começar com o zero e depois diminuirmos os casos em que começamos com o zero e que foi contado a mais. Observe que este problema poderia também se enquadrar em T.3, pois poderíamos particionar em casos.

T.6) Conjunção dos Princípios Aditivo e Multiplicativo com a ideia de desconto.

Ex. 6) De quantos modos posso escolher uma comissão de 3 pessoas, incluindo pelo menos um homem, em um grupo de 3 homens e 4 mulheres?

Podemos particionar em 3 casos:

1º) a comissão tem um homem e duas mulheres

2º) a comissão tem dois homens e uma mulher

3º) a comissão tem 3 homens

T.7) Problemas que envolvem o Princípio da Inclusão e Exclusão

Neste caso em geral estão os problemas que não podem ser resolvido pelas anteriores.

Ex. 7) Quantos são os números inteiros positivos menores ou iguais a 600 que são divisíveis por 3, 4 ou 5?

Em alguns casos o Princípio da Inclusão e Exclusão está implícito, como nos exemplos onde se usa a fórmula da Permutação Caótica.

Ex. 8) Quantas permutações dos algarismos 1, 2, ..., 9 têm exatamente três números em suas posições naturais?

Observe que por trás desta taxonomia estão as estratégias metacognitivas, pois normalmente verificamos se o problema pode ser resolvido direto pelo Princípio Aditivo ou Multiplicativo (T1 e T2). Se não for resolvido diretamente ou estaremos contando a mais e surge a necessidade de descontar dividindo ou subtraindo (T4) ou devemos dividir em casos (T3). Em alguns casos é necessário dividir em casos e, além disso, descontar (T5). Se nenhum dos casos acima resolver o problema, partimos para o Princípio da Inclusão e Exclusão mesmo que de forma indireta, como estratégia potencial.

Vale ressaltar que essas taxonomias são importantes para o planejamento pedagógico dos professores, para uma escolha adequada dos problemas e a ordem em que eles devem ser apresentados e não para que todas as resoluções sejam categorizadas, até porque não temos a pretensão de esgotar todos os casos com essa taxonomia.

CAPÍTULO 5 – PROCEDIMENTOS METODOLOGICOS

A questão central da investigação é *se a metodologia empregada, com ênfase nas habilidades metacognitivas, pode proporcionar aos alunos desenvolvimento dessas e se elas são importantes para a resolução de problemas de Análise Combinatória.*

A investigação desta dissertação consistiu de um estudo qualitativo e quantitativo do qual participaram duas turmas do CEFET – NI. Neste capítulo, relataremos o contexto pedagógico em que o curso transcorreu, além do planejamento, desenvolvimento e análise dos resultados.

5.1 - O CURSO

Normalmente o currículo da disciplina de Análise Combinatória para o Ensino Médio do CEFET – NI consiste dos conteúdos de Princípio Multiplicativo, Permutação Simples, Arranjo, Combinação, Permutação com Repetição. O curso aqui descrito foi concebido considerando aspectos metacognitivos, e trabalhando com a perspectiva da resolução de problemas, onde primeiro expusemos um problema para que os alunos pudessem explorar o problema, dando sugestões, algumas vezes infundadas, mas que nunca eram desperdiçadas e sim aproveitadas para uma melhor aprendizagem, e posteriormente fazer com que os alunos chegassem por eles mesmos aos conceitos e finalmente, quando houvesse necessidade apresentar uma fórmula como um resumo e organização das ideias ali apresentadas.

5.2 - OS SUJEITOS

- **População referência:** Adolescente do Ensino Médio
- **População de estudo:** Adolescente do Ensino Médio do CEFET- Nova Iguaçu, localizada no Município de Nova Iguaçu.

A escolha desta escola se deu por vários critérios, dentre eles:

a) Facilidade de contato com professores da escola, inclusive o professor que disponibilizou as turmas é aluno do mestrado em Ensino de Matemática na UFRJ;

b) Pela flexibilidade e boa vontade do professor da escola;

c) Por serem alunos supostamente interessados, pois a escola atende a alunos que são aprovados em uma rigorosa prova de seleção e oriundos de vários municípios do Rio de Janeiro.

As duas turmas foram submetidas aos pré e pós-teste, e receberam instruções de estratégias metacognitivas.

A turma de eletromecânica tinha 30 inscritos e a de informática tinha 31 inscritos. A carga horária era de 12 horas, distribuídas em 8 semanas de 1 hora e trinta minutos de aula. Os alunos nunca tiveram aula de Análise Combinatória, com exceção de três alunos repetentes.

5.3- PROCEDIMENTOS

Para verificar as habilidades metacognitivas dos alunos foi aplicado um pré-teste, em seguida foram feitas observações em salas de aula e finalmente aplicado um pós-teste.

5.3.1 – PRÉ-TESTE

O pré-teste apresenta questões de forma que possa verificar as habilidades metacognitivas e se o aluno é capaz de resolver problemas de contagem com quantidades que possibilitem obter o número de agrupamentos utilizando diversos procedimentos, sem o uso de fórmulas, como é orientado pelos PCN's e uma questão que consideramos difícil para podermos verificar

que tipos de estratégias eles apresentam ao se deparar com um problema em que é trabalhoso listar todas as possibilidades.

Abaixo apresentaremos o pré-teste e os motivos que nos levaram a escolher tais as questões:

Questão 1: *Um marcador digital é formado por sete segmentos no formato de um 8. Para formar um símbolo, cada segmento pode ficar iluminado ou apagado, com pelo menos um segmento iluminado.*



Dizemos que um símbolo é conexo se não existe segmento iluminado isolado dos demais. Por exemplo: os três símbolos representados na figura 1 a seguir são conexos e distintos; já o símbolo da figura 2 não é conexo. Os símbolos ilustrados têm, todos, três segmentos iluminados.



Desenhe TODOS os símbolos conexos formados por três segmentos iluminados.

Optamos por esta questão pelo método utilizado para resolvê-la, totalmente sem fórmula, para verificarmos que estratégia os alunos usariam.

Questão 2: *Quantos são os anagramas (diferentes posições das letras de uma palavra) da palavra ANEL?(DANTE, 2005)*

Esta questão foi escolhida pela quantidade de métodos de resoluções possíveis, tais como enumeração sistemática, Princípio Multiplicativo, árvore de possibilidades, entre outras.

Questão 3: *Numa reunião de equipes há 6 alunos. Se cada um trocar um aperto de mão com todos os outros, quantos apertos de mão teremos ao todo? (Costa, 2003.)*

Este é um problema clássico de Combinação que pode e deve ser trabalhado no Ensino Fundamental e as respostas que normalmente surgem sem que os alunos pensem muito são 36, pois eles multiplicam 6×6 e 30, pois eles multiplicam 6×5 porque cada pessoa aperta a mão de 5 pessoas. Tentamos com isso avaliar de que forma os alunos iriam resolver este problema, pois ele pode ser resolvido de várias formas diferentes, tais como: fazer uma lista, fazer um diagrama, entre outros. Além disto, queríamos avaliar a percepção dos alunos com relação à distinguibilidade da ordem da escolha.

Questão 4: *Num torneio de tênis, os finalistas foram: Zeka e Kadu. Será declarado campeão aquele que vencer duas partidas seguidas ou vencer três partidas alternadas.*

Observando quem sai vencedor em cada partida até que se obtenha o campeão, quais os resultados que se pode obter? (COSTA, 2003/ adaptada)

Optamos por este problema, pois ele não pode ser resolvido diretamente pelo Princípio Multiplicativo, nem requer o uso de fórmulas e a sua resolução pode ser facilitada e muito pela árvore de possibilidade, com isso queremos verificar se a utilização da árvore de possibilidade esta sendo ensinada como é orientada pelos PCN's.

Questão 5: *Uma criança tem quatro carrinhos de cores diferentes (azul, branco, verde e preto) e decide distribuir com seus irmãos Fernando, Luis e Teresa. De quantas formas diferentes pode distribuir os carrinhos a seus irmãos? Exemplo: pode dar os quatro carrinhos a seu irmão Luis. (NAVARRO PELAYO – 1996 adaptado)*

O objetivo deste problema, que consideramos como difícil para os alunos que ainda não tiveram contato com Análise Combinatória, é verificar que habilidades metacognitivas os alunos irão apresentar, pois a listagem de todos os casos é cansativa, já que temos 81 possibilidades e a generalização é difícil, pois temos várias possibilidades para distribuir os carrinhos além da questão da distinguibilidade.

O pré-teste foi aplicado individualmente pelo pesquisador para verificar principalmente se eles apresentam habilidades metacognitivas ao resolverem os problemas e posteriormente comparar com o pós-teste.

5.3.2- PÓS-TESTE

O pós-teste foi aplicado pelo pesquisador para verificar se os alunos apresentaram habilidades metacognitivas e se essas foram importantes para a resolução dos problemas. Vale ressaltar que foi aplicada uma questão por dia. Além disso, foi feita uma comparação entre as habilidades metacognitivas apresentadas no pré e pós-teste para verificar se existem indícios de que eles desenvolveram essas Habilidades.

1- (16/08) Quantos números inteiros de 3 algarismos distintos podem ser formados de modo que os dois primeiros algarismos sejam números primos e o último algarismo (o das unidades simples) seja divisível por 3?

- 2 – (23/08) Em relação à palavra CEBOLA,
- a) quantos anagramas começam e terminam por vogal?
 - b) quantos anagramas têm as letras L e A juntas e em qualquer ordem?
 - c) quantos anagramas têm as letras L e A separadas?

3 – (30/08) Uma loteria esportiva consiste em marcar corretamente num cartão os resultados de 13 jogos de futebol. Para cada jogo o apostador deverá escolher uma das 3 opções: vitória do primeiro time, empate ou vitória do terceiro time. Um prognóstico duplo consiste da escolha num jogo de 2 das 3 opções e um prognóstico triplo consiste da escolha das 3. De quantos modos se pode preencher o cartão da loteria esportiva com quatro prognósticos duplos e dois triplos?

4 - (20/09) Quantos são os anagramas da palavra PIRACICABA que não possuem 2 letras A juntas?

5 – (20/09) De quantas maneiras distintas podemos dispor 5 meninos e 5 meninas numa roda de ciranda de modo que um determinado menino só fique ao lado de menina?

5.4 - CONCEPÇÃO DO ESTUDO

Não temos a intenção de categorizar os erros ou os tipos de habilidades metacognitivas, mas de verificar se essas habilidades foram aprimoradas e se elas são importantes para a resolução desses problemas de Análise Combinatória. Nossa intenção é verificar se a postura do professor trabalhando como mediador, onde ele irá gastar um tempo considerado em explorar o problema, utilizar estratégias que não levarão diretamente a solução, planejar uma estratégia de solução, resolver o mesmo problema de várias formas diferentes, entre outras habilidades metacognitivas irá produzir um efeito positivo nos alunos. Além disso, iremos verificar se os erros mais comuns dos

alunos ao resolver os problemas de Análise Combinatória continuam a aparecer ou não, o que pode sugerir que a didática empregada pode ter ajudado neste sentido.

Desejamos contribuir desta forma para a discussão sobre desenvolvimento das habilidades metacognitivas, de forma a valorizá-las, pois entendemos que elas são importantes na resolução de problemas, em especial os de Análise Combinatória.

Concluimos que a investigação empírica desta dissertação deveria ser de natureza qualitativa, por meio de observações feitas em sala de aula e da análise de dados obtidos no pré-teste e nas avaliações posteriores e quantitativa, comparando a incidência das habilidades metacognitivas no pré-teste e no pós-teste. Vale ressaltar que não foram feitas entrevistas e que por isso só podemos verificar os dados que estiverem nas avaliações, entendemos que pode acontecer de na prova não ter, aparentemente, vestígios de habilidades metacognitivas, mas o aluno pode possuí-las e até mesmo ter usado, mas sem deixar um dado escrito.

5.5 – CONSIDERAÇÕES SOBRE OBJETO MATEMÁTICO

Tentaremos mostrar como foram as aulas, os conteúdos, os objetivos e alguns problemas trabalhados e faremos algumas considerações sobre o objeto matemático.

Discutiremos os tópicos de Análise Combinatória no Ensino Médio, com ênfase no Princípio Multiplicativo e da forma que foi abordada na nossa pesquisa.

Entendemos que no Ensino Médio deve-se continuar a construir um raciocínio combinatório para só então apresentar algumas fórmulas como resultado deste processo para facilitar os cálculos dando continuidade ao que foi apresentado no Ensino Fundamental.

Em todos os casos partimos de um problema para fazer com que os alunos cheguem ao conceito, o contrário do que normalmente é feito pelos

professores tradicionais, segundo Pinheiro e Sá (2007). Para isso utilizaremos valores pequenos que possibilitem os alunos listar todas as possibilidades fazendo com que eles tenham foco na estrutura do problema.

Alem disso, sempre solicitamos as sugestões dos alunos para o problema, mesmo que elas não fossem corretas ou que não levasse a resposta correta de imediato, pois entendemos que os alunos podem aprender mais ao analisar uma resposta errada do que simplesmente observar a resolução correta.

O Princípio Multiplicativo pode ser demonstrado usando o Princípio Aditivo. O que muitas vezes não é abordado pelos livros didáticos e nem pelos professores é que para utilizarmos o Princípio Multiplicativo é necessária a invariância da escolha, isto é, para qualquer escolha que tínhamos feito na fase anterior temos o mesmo número de possibilidades para a escolha da fase seguinte.

Para ilustrar, iremos utilizar o exemplo anterior.

Organizando em fases nós temos:

1ª fase - Escolher a saia.

Para isso nós temos 3 possibilidades. (*verde, azul e branca*)

2ª fase – Escolher a blusa.

Para isso nós temos 4 possibilidades (*rosa, preta, lilás e cinza*), mas observe que só podemos utilizar o Princípio Multiplicativo porque se a cor da saia for azul temos 4 possibilidades, se for verde também temos 4 possibilidades e se for branca temos 4 possibilidades. Logo para cada saia temos 4 possibilidades e como temos 3 saias pelo Princípio Multiplicativo nós temos 3×4 possibilidades.

Devemos também abordar questões que não possam ser resolvidas com o Princípio Multiplicativo, para que o aluno não fique com a ideia errônea de que tudo pode ser resolvido pelo Princípio Multiplicativo.

Vejamos um exemplo.

Exemplo: Num torneio de futebol, na praia de Boqueirão, os finalistas foram: Zeka e Kadu. Será declarado campeão aquele que vencer duas partidas seguidas ou vencer três partidas alternadas.

Observando quem sai vencedor em cada partida até que se obtenha o campeão, quais os resultados que se pode obter? (Costa, 2003)

Para calcular quantas são as possibilidades não poderíamos utilizar o Princípio Multiplicativo.

1ª fase – Escolher quem ganhou o primeiro jogo.

Temos duas possibilidades.

2ª fase – Escolher quem ganhou o segundo jogo.

Temos duas possibilidades.

Agora surge um impasse, pois dependendo de quem ganhou os dois primeiros jogos vai existir ou não um terceiro jogo então não pode utilizar o princípio multiplicativo.

Ao resolver alguns problemas que podiam ser solucionados diretamente pelo Princípio Multiplicativo, foram apresentados aos alunos alguns problemas que para resolvê-los havia a necessidade de alguma estratégia além do Princípio Multiplicativo, como o exemplo abaixo. Este é um exemplo importante, pois surge a possibilidade de apresentar, caso os alunos não sugiram estas estratégias, dois métodos importantes na resolução de problemas de Análise Combinatória. Nas duas turmas a sugestão de dividir em casos apareceu, no entanto, ninguém sugeriu ignorar uma das restrições e depois descontar o que

foi contado a mais. Este método teve que ser forçado pelo professor para que aparecesse.

Ex: Quantos são os números pares de três dígitos distintos?

Observe uma transcrição de um trecho da aula.

Professor: E se o aluno ao resolver o problema tivesse feito da seguinte forma?

$9 \times 8 \times 5$

Aluno: Essa resposta estaria errada.

Professor: Porque esta resposta está errada?

Aluno: Porque esta sendo contado a mais.

Professor: Será que existe uma possibilidade de corrigir esta solução?

Aluno: É só verificar o que foi contado a mais e diminuir.

Observe que o professor, de certa forma, induziu os alunos a chegarem neste método, mas não foi ele que apresentou.

Os problemas que em alguns livros didático são apresentados como Arranjo e Arranjo com Repetição, foram apresentados e resolvidos utilizando somente o Princípio Multiplicativo.

Observe abaixo um exemplo de Arranjo.

Exemplo: Uma escola tem 4 (quatro) professores, Marcos, André, Pedro e João, que disputarão os cargos de diretor e vice-diretor. De quantas maneiras diferentes pode ser o resultado da eleição?

1ª fase – Quantas são as possibilidades para escolher o diretor.

Quatro possibilidades

2ª fase – Quantas são as possibilidades para escolher o vice-diretor.

Três possibilidades, pois um professor já esta ocupando o cargo de diretor.

Pelo Princípio Multiplicativo, temos $4 \times 3 = 12$ possibilidades.

Entendemos que é melhor o aluno utilizar o Princípio Multiplicativo para resolver os problemas de Arranjo do que a fórmula, pois segundo Sabo (2010), esta “*fórmula não revela, explicitamente, os dados e a questão do problema, como também não desenvolve o raciocínio combinatório*” (pág., 86).

Observe abaixo um exemplo de problema envolvendo Arranjo com Repetição.

Ex: Ao lançarmos sucessivamente três moedas diferentes, quantas são as possibilidades de resultado?

1ª fase – Quantas são as possibilidades para a primeira moeda?

Duas possibilidades (cara ou coroa)

2ª fase – Quantas são as possibilidades para a segunda moeda?

Duas possibilidades (cara ou coroa)

3ª fase – Quantas são as possibilidades para a terceira moeda?

Duas possibilidades (cara ou coroa)

Pelo Princípio Multiplicativo, temos $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades.

Entendemos que não existe a necessidade de apresentarmos fórmulas específicas para estes tipos de problema.

5.5.1 – PRINCÍPIO ADITIVO

“ Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p+q$ elementos”.

O professor deve entender que este é o verdadeiro princípio da Análise Combinatória, isto é, um axioma e, portanto não tem como ser provado.

5.5.2 – PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Entendemos que antes de enunciarmos o Princípio Multiplicativo devemos propor alguns exercícios para os nossos alunos que possam ser resolvidos através do Princípio Multiplicativo e também de forma que ele possa enumerar ou utilizar o diagrama de árvore para que só depois ele possa sistematizar e compreender o Princípio Multiplicativo.

“ Se uma decisão pode ser tomada de X modos e uma segunda decisão pode ser tomada de Y modos, qualquer que tenha sido a primeira decisão, então o número de modos de tomar consecutivamente as duas decisões é X.Y.”

Esta poderá ser uma estratégia que os alunos poderão utilizar ao resolver alguns problemas, pois ao se deparar com certos tipos de problemas a enumeração ou a construção do diagrama de árvore se tornará inviável, logo o aluno sentirá a necessidade de algum método para resolver estes tipos de problemas, que poderá ser dividir o problema em fases.

Iremos apresentar um problema que pode ser usado e que aparece inclusive nos livros de Ensino Fundamental.

Exemplo: Uma menina tem três saias (verde, azul e branca) e quatro blusas (rosa, preta, lilás e cinza). De quantas formas diferentes ela pode se vestir?

Observe que existem várias formas de resolver este problema. O aluno pode, por exemplo, desenhar, listar todas as possibilidades, utilizar o diagrama de árvore e dividir o problema em fases.

1) Listar todas as possibilidades

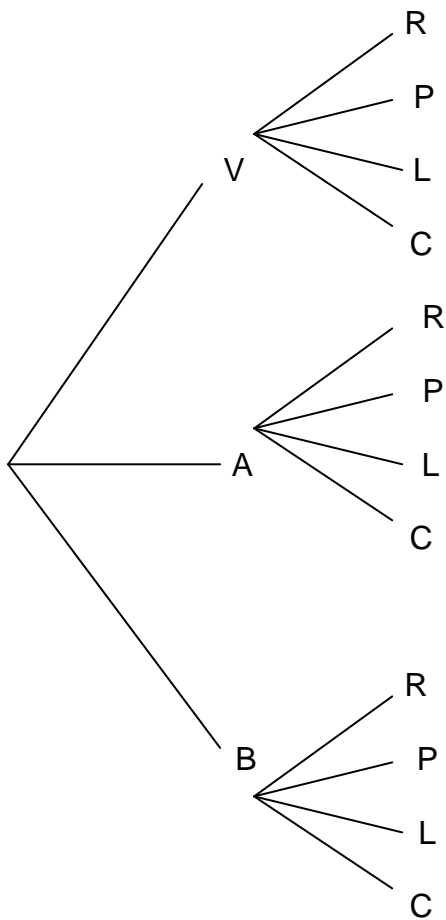
V R AR BR

V P AP BP

V L AL BL

V C AC BC

2) Diagrama de árvore



É claro que algumas destas soluções não são viáveis em casos em que o número de possibilidades for elevado, mas é interessante que o aluno perceba que nestes casos ele terá que utilizar outra estratégia.

5.5.3 – PERMUTAÇÃO

Normalmente os livros didáticos definem o fatorial, apresentam uma série de exercícios envolvendo a manipulação do fatorial, para depois apresentarem problemas envolvendo a permutação.

Entendemos que o processo deveria ser o inverso, primeiro deveríamos apresentar problemas simples como o exemplo abaixo.

Exemplo: *Quantos são os anagramas (diferentes posições das letras de uma palavra) da palavra ANEL? (DANTE, 2005)*

Apareceram algumas soluções como a enumeração sistemática, o diagrama de árvore e a utilização do Princípio Multiplicativo. Ao utilizar esta última e chegar à multiplicação $4 \times 3 \times 2 \times 1$, o professor aproveitou para definir fatorial.

O valor obtido com p_n é também chamado de *fatorial* do número natural n e indicado por $n!$ (lê-se “fatorial de n ou n fatorial”).

Depois foi apresentado o problema de colocar n pessoas em fila, o que teria como resultado $n!$, com o objetivo de generalizar este tipo de problema.

5.5.4 – COMBINAÇÃO

Uma das dificuldades apresentadas pelos alunos é reconhecer a diferença entre Arranjo e Combinação (BATANERO, 1997a; ESTEVES, 2001). Além disso, existe uma dificuldade na fórmula de Combinação, pois ela não pode ser visualizada pelo diagrama de árvore.

Apresentamos o seguinte problema aos alunos.

Exemplo: *De quantas formas, podemos escolher 3 alunos, entre os 5 melhores alunos da turma? (Marcos, André, Pedro, João e Carlos)*

Rapidamente apareceu a seguinte sugestão.

Calcular o número de possibilidades utilizando Princípio Multiplicativo. A resposta será $5 \times 4 \times 3 = 60$ o que dentro da categorização das resoluções (de que trataremos no capítulo 5) de problemas seria utilizar somente o Princípio Multiplicativo (T.2), percebemos que normalmente é a primeira estratégia.

Depois de algum tempo dado aos alunos para refletirem, pediu-se que eles listassem algumas possibilidades, o que foi feito de forma sistemática.

Marcos – André - Pedro
Marcos – Pedro - André
André - Pedro - Marcos
André - Marcos - Pedro
Pedro - Marcos- André
Pedro - André - Marcos
Marcos – André – Carlos

...

Alguns alunos perceberam que ao fazer isso estavam contando a mais e que todos os grupos abaixo representam o mesmo grupo. E concluíram que cada grupo estava sendo contado 6 vezes e que deveriam dividir por 6 para “consertar” esta resolução.

Marcos – André - Pedro
Marcos – Pedro - André
André - Pedro - Marcos
André - Marcos - Pedro
Pedro - Marcos- André
Pedro - André - Marcos

Percebe-se que a combinação pode se enquadrar na categorização das resoluções que é utilizar o Princípio Multiplicativo com a ideia de desconto (T.4).

Depois de resolver mais alguns problemas, utilizamos as letras com o intuito de generalizar e apresentar a fórmula.

EX: De quantos modos podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados?

A sugestão dos alunos foi parecida com a dos problemas anteriores.

Dividiremos em fases:

1ª fase - Quantas são as possibilidades para escolher 1º objeto?

Há n possibilidades

2ª fase – Quantas são as possibilidades para o segundo objeto?

Como já escolhemos um objeto, temos $n-1$ possibilidades.

3ª fase – Quantas são as possibilidades para o terceiro objeto?

Como já escolhemos 2 objetos, temos $n-2$ possibilidades.

Prosseguindo com o mesmo raciocínio.

p^a fase – Como $p-1$ professores já ocuparam algum cargo, sobraram $n-(p-1)=n-p+1$ professores para esta fase.

Alguns alunos responderam que havia $n-p$ possibilidades em vez de $n-p+1$. Foi necessário utilizarmos outro problema atribuindo valores para n e p para que eles pudessem entender.

Pelo Princípio Multiplicativo, temos que o número de maneiras diferentes é $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$.

Mas ao fazer isso, estamos contando cada grupo p vezes, logo devemos dividir por $p!$.

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}{p!}$$

Observe que podemos multiplicar o numerador e o denominador $(n-p)!$ o que irá nos fornecer a fórmula de Combinação que normalmente é apresentada nos livros didáticos.

$$C_{n,p} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1) \times (n-p)!}{p!(n-p)!}$$

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Combinação simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados.

Indica-se por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$ o número total de combinações de n

elementos tomados p a p e calcula-se por $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

5.5.5 – PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Optamos por apresentar a Permutação com Repetição depois de Combinação, pois iríamos necessitar do conceito de Combinação para apresentarmos uma segunda solução que trabalha implicitamente com o paradigma da distribuição de bolas em caixas e que segundo Batanero (1997, a) favorece a resolução de problemas e estratégias heurísticas.

Isso nos trouxe uma dificuldade, pois ao apresentar o conceito de Permutação Simples, os alunos questionaram como ficaria se aparecessem letras repetidas, inclusive sugeriram palavras como *BALA*.

Os livros didáticos normalmente apresentam uma fórmula para resolver problemas que envolvam Permutação com Repetição, mas com uma explicação confusa sobre o porquê de se dividir quando as letras são iguais, e os alunos decoram a fórmula e algumas vezes até obtém um “bom resultado” na realização da prova, mas não compreendem realmente o que está sendo feito.

Apresentamos o seguinte problema para os alunos:

Exemplo: *Quantos são os anagramas (diferentes posições das letras de uma palavra) da palavra BALA?*

Rapidamente apareceu a resposta $4!$, o que na categorização da resolução dos problemas seria a utilização somente do Princípio Multiplicativo (T.2).

Ao começar a enumerar todas as possibilidades considerando as letras

As como diferentes, nós temos

LA_1BA_2

LA_2BA_1

LA_1A_2B

LA_2A_1B

LBA_1A_2

LBA_2A_1

Os alunos perceberam que estavam contando a mais. Na realidade nos interessa a metade e devemos dividir por dois, percebendo que seria necessário utilizar outra estratégia, que seria o Princípio Multiplicativo com a ideia de desconto.

Perguntei então se alguém teria alguma outra solução, e depois de um tempo decidi apresentar outra solução.

Imagine que tenho que colocar as letras L,B e duas letras A em quatro posições.

□ □ □ □

Primeiro temos que escolher as duas posições para as letras A's das quatro. Isso pode ser feito de $C_{4,2}$.

Ao fazer isso temos, por exemplo:

A □ □ A

Depois temos que escolher em qual lugar colocar a letra B.

Temos 2 possibilidades.

Por exemplo:

A B □ A

Depois temos que escolher em qual lugar colocar a letra L.

Temos 1 possibilidade.

A resposta é $C_{4,2}$.2.1

Exemplo: *Quantos são os anagramas da palavra ABADÁ?*

Ao apresentar outro problema, os alunos sugeriram permutar as letras como se fossem distintas e chegar ao resultado de $6!$ e depois dividir por três, pois quando o A se repetia duas vezes se dividia por dois, como neste exemplo o A se repete três vezes, se divide por três.

Para mostrar que este raciocínio é equivocado, foi analisado uma situação particular.

$A_1A_2A_3BD$
 $A_1A_3A_2BD$
 $A_2A_1A_3BD$
 $A_2A_3A_1BD$
 $A_3A_1A_2BD$
 $A_3A_2A_1BD$

Os alunos observaram que cada anagrama estava sendo contada seis vezes, logo teria que dividir por 6 que é o resultado da Permutação dos três As.

Optamos por não apresentar a fórmula de Permutação com Repetição.

5.5.6 – PERMUTAÇÃO CIRCULAR

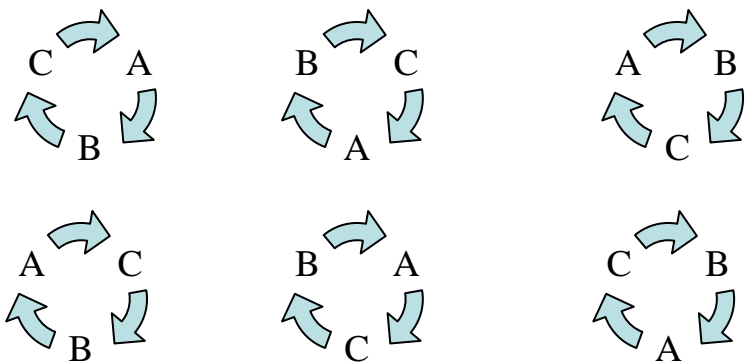
Optamos por trabalhar com Permutação Circular, apesar de muitos livros de Ensino Médio não trabalharem este tópico, porque ele não requer uma combinatória sofisticada, pode ser apresentado como os demais tópicos, utilizando o Princípio Multiplicativo e depois descontando o que foi contado a mais. Além disso, percebemos que aparece em questões de vestibular, o que vem a corroborar que este tópico pode e deve ser ensinado no Ensino Médio.

Apresentamos o seguinte problema:

Ex: Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com 3 crianças?

A primeira resolução apresentada foi $3! = 6$

Eu pedi aos alunos para mostrassem quais eram as possibilidades.



Ao listar no quadro, eles perceberam que cada roda estava sendo contada 3 vezes, pois eu poderia girar 3 vezes, e chegaram à solução $3!$ dividido por 3.

Posteriormente, apresentamos o seguinte problema:

Ex: Quantas rodas de ciranda podem ser formadas com 4 crianças?

Os alunos responderam sem a necessidade de desenhar.

Posteriormente, apresentamos o mesmo problema para n crianças e chegamos a fórmula da Permutação Circular.

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

CAPÍTULO 6 – OBSERVAÇÕES, ENCONTROS E ANÁLISE DOS DADOS

Para podermos avaliar as habilidades metacognitivas da melhor forma possível, solicitamos que nenhum registro poderia ser apagado, eles teriam que resolver tudo a caneta e o que eles considerassem como errado, deveriam circular e não seria considerado no caso da avaliação. No pré-teste não observamos nenhum problema em relação a isto, talvez porque não fosse atribuída uma nota, mas no pós-teste observamos que alguns alunos escreviam a lápis e depois apagavam esses registros fundamentais que pode de alguma forma ter prejudicado a avaliação dessas habilidades.

6.1 - ANÁLISE GERAL DOS DADOS

6.1.1 – ANÁLISE DO PRÉ-TESTE

Observamos que nenhum aluno utilizou a árvore de possibilidade para resolver nenhum problema, nem o problema do Zeka e Kadu, o que segundo a nossa visão facilitaria muito a resolução. Isso sugere que os professores do Ensino Fundamental não estão seguindo a orientação dos PCN's em relação à árvore de possibilidades e que segundo alguns pesquisadores ela é de fundamental importância para a compreensão de alguns conceitos, isto confirma os achados de Roa et al (1996) que alunos têm evitado o seu uso e Esteves (2001) sobre o não uso da árvore de possibilidades.

No último problema, o que consideramos como difícil para aqueles que não tinham aprendido Análise Combinatória, alguns alunos deixaram a questão em branco. Eles não apresentaram nenhum escrito ou a menor tentativa em compreender o problema, como um desenho, uma tabela, tentar listar todas as possibilidades ou algo parecido. O que em nossa opinião, mostra uma ausência de habilidades metacognitivas.

O pré-teste não iria valer como nota para a avaliação do bimestre, mas apesar disso, observamos que ele foi realizado com muita seriedade pelos alunos.

6.1.2 - ANÁLISE DO PÓS-TESTE

O pós-teste consistiu-se de cinco questões que foram aplicadas uma em cada dia, com exceção do dia vinte de setembro, onde houve a necessidade de aplicar duas questões, por causa do debate para eleições de diretor ocorrido no dia 13 de setembro.

Para cada avaliação, o aluno tinha cerca de 30 minutos para resolver a questão, com exceção do dia 20 de setembro onde eles tiveram o dobro do tempo. Alguns alunos utilizaram um tempo maior do que os 30 minutos, o que foi permitido por nós. Vale ressaltar que todas as questões são problemas e não exercícios de aplicação de fórmulas, pois se colocássemos exercício não haveria necessidade das habilidades metacognitivas.

Ao analisar o pós-teste podemos perceber que os alunos que apresentam habilidades metacognitivas têm maior probabilidade de resolver os problemas, confirmando os achados de Biryukov (2004).

6.1.3 – ESTATÍSTICA

Para verificar se houve um desenvolvimento das habilidades metacognitivas nos alunos, realizamos uma análise Estatística da incidência dessas habilidades. Para isso, analisamos cada questão do pré e do pós-teste classificando-as segundo Polya e Schoenfeld, da seguinte forma:

- 0 – nula incidência
- 1 – baixa incidência
- 2 – razoável incidência
- 3 – media incidência
- 4 – boa incidência
- 5 – alta incidência

Vale ressaltar que somente 34 alunos fizeram parte desta Estatística, apesar de nas duas turmas terem 61 alunos. Isto se deu, pelo fato de alguns alunos terem faltado ao pré-teste ou alguma avaliação do pós-testes. Talvez, se as cinco questões do pós-teste tivessem sido realizadas no mesmo dia, o número de alunos não teria diminuído de forma considerada, mas isto não invalida o resultado obtido.

A partir dos dados obtidos nas avaliações do pré e do pós - testes (vide apêndice), diagnosticamos se a hipótese de normalidade dos resultados se sustentava para a utilização do teste t-Student para dados pareados.

O teste de Kolmogorov-Smirnov de bondade de ajuste para a normalidade foi utilizada, por meio do software STATISTICA, e não rejeitamos a hipótese de normalidade de valores referentes à diferença entre o pós e o pré-teste, conforme o gráfico 3 a seguir, cujo p-valor é dado em ordem de 20%.

Tendo as hipóteses exigidas pelo teste t confirmadas, contemplamos as seguintes hipóteses:

$H_0: \mu_D = 0$ (não há efeito da estratégia metacognitiva)

$H_1: \mu_D \neq 0$ (há efeito da estratégia metacognitiva)

onde μ_D é o parâmetro referente à média dos valores referentes à diferença entre o antes e o depois.

A tabela 1 abaixo contém os valores relevantes do teste t, em especial o p-valor de 0,2603%, o que nos permite afirmar que mesmo a um nível de significância de 1% rejeitamos H_0 em favor de H_1 , ou seja, há evidências de que o desenvolvimento de habilidades metacognitivas induz um melhor desempenho e autonomia na resolução de problemas de combinatória.

T-test for Dependent Samples (preposteste.sta)

Marked differences are significant at $p < .05000$

	Mean	Std.Dv.	N	Diff.	Diff.	t	df	p
ANTES	9.08824	5.071415						
DEPOIS	10.38235	4.684046	34	-1.29412	2.316337	-3.25770	33	.002603

	Valid N	Mean	Minimum	Maximum	Std.Dev.
ANTES	34	9.088235	1.000000	25.00000	5.071415

	Valid N	Mean	Minimum	Maximum	Std.Dev.
DEPOIS	34	10.38235	2.000000	25.00000	4.684046

Tabela 1

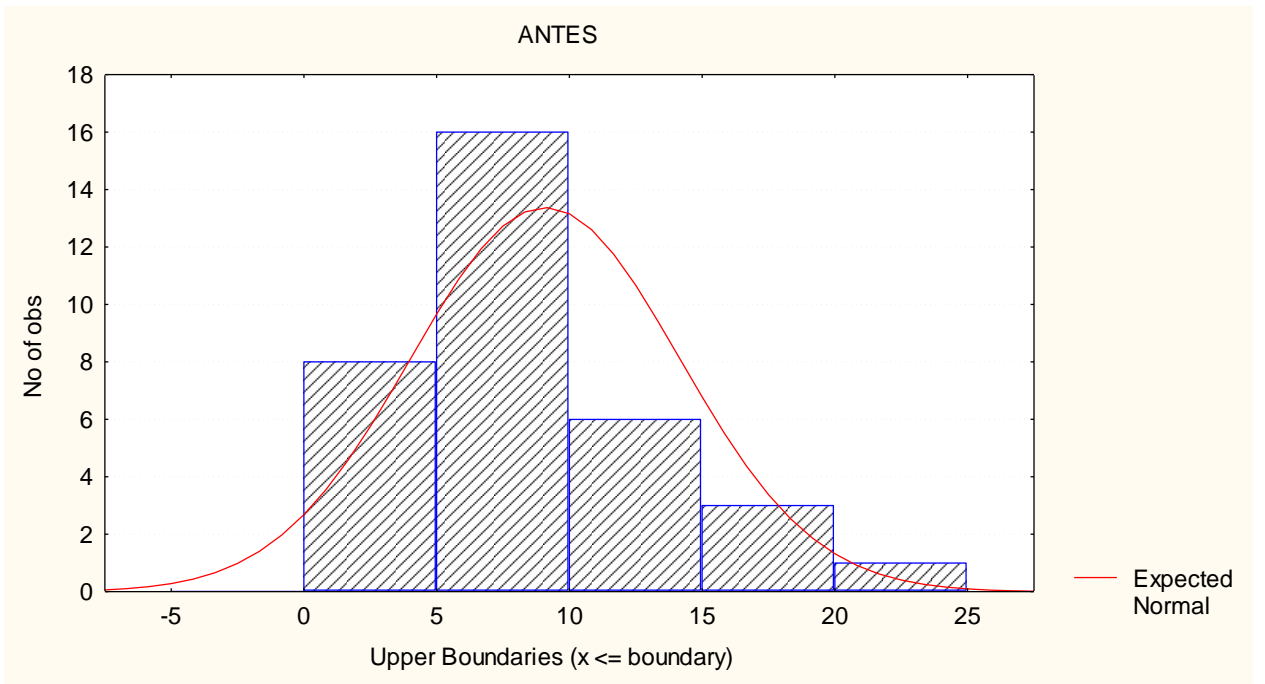


Gráfico 1

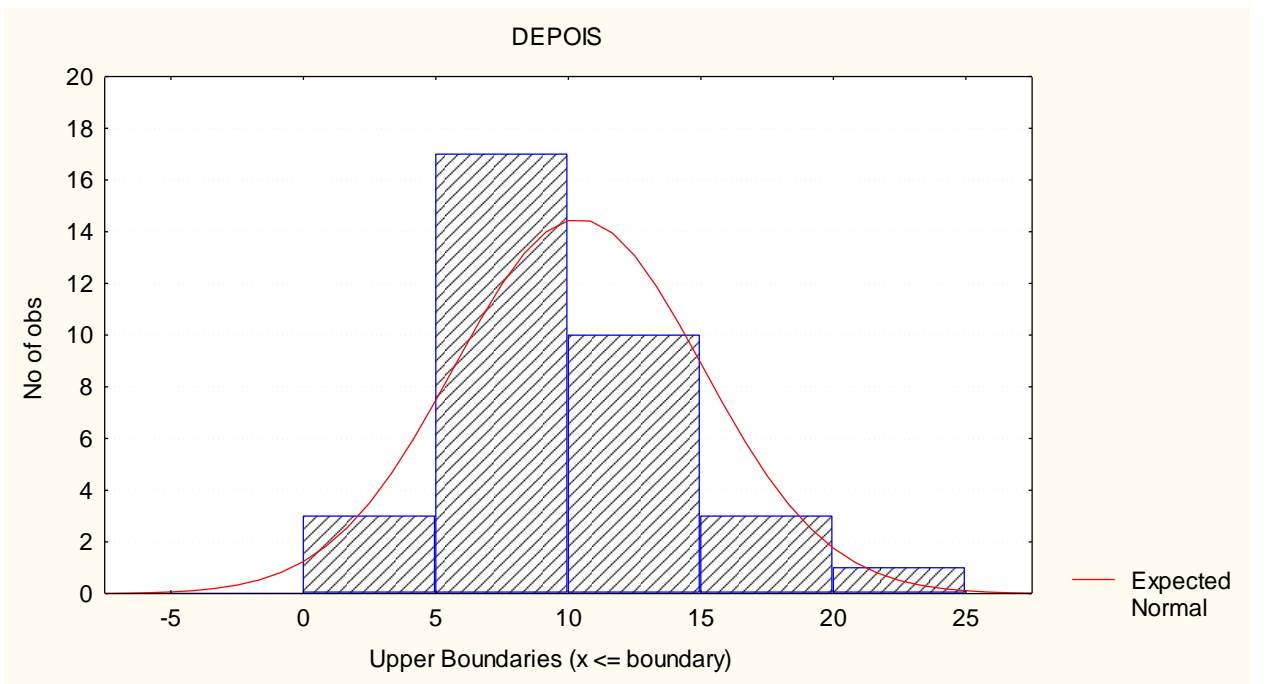
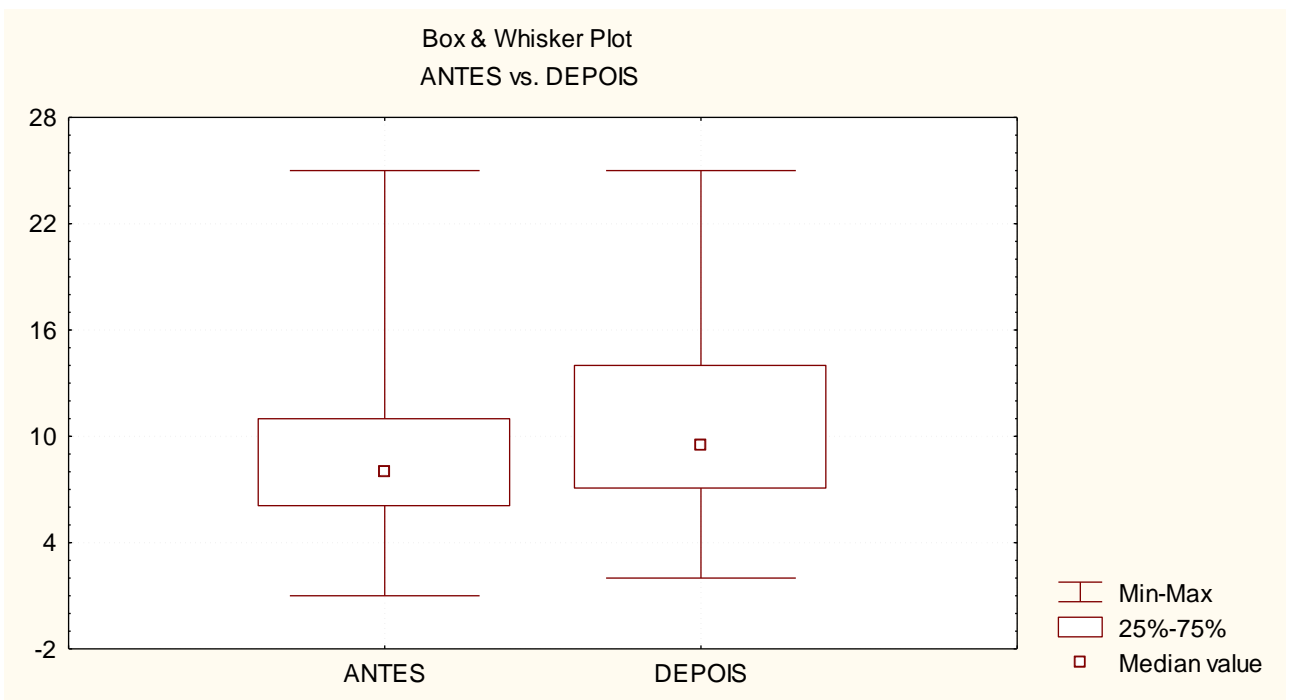
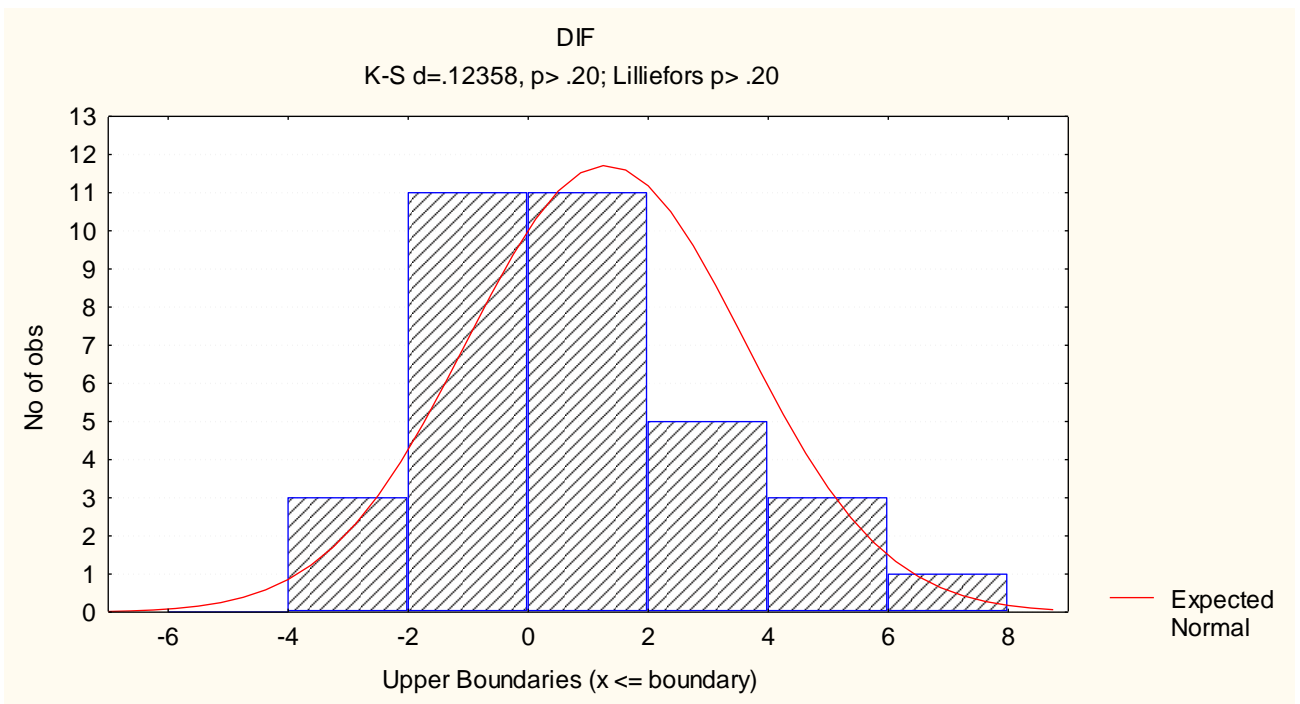


Gráfico 2



Ao observar a análise estatística dos pré e pós-testes, podemos observar que há diferença significativa entre o antes e o depois, o que sugere que o trabalho produziu um efeito positivo sobre os alunos, confirmando os achados de Schoenfeld (1992) e King (1991, apud Jalles) que o treino de estratégias metacognitivas tem sido bem sucedido.

6.1.4 – COMPARAR O PRÉ-TESTE COM O PÓS-TESTE

Ao comparar os resultados do pré-teste com o pós-teste, baseados nas quatro fases de Polya (1995) e os componentes de controle e autorregulação de Schoenfeld (1987) e nos dados estatísticos, separamos os alunos em três grupos.

O grupo 1: Alunos que já apresentavam certas habilidades metacognitivas e depois das aulas continuaram a apresentar essas habilidades.

Neste grupo estão os alunos que apresentavam habilidades metacognitivas importantes e continuaram a apresentar, tais como a divisão em problemas mais simples e a posterior resolução do problema apresentado; divisão da resolução em casos, resolução de um caso de cada vez e posterior solução; apresentação de uma estratégia de resolução; resolução do mesmo problema de duas formas diferentes; entre outras. Vale ressaltar que neste grupo alguns alunos apresentaram uma melhora no desenvolvimento das habilidades metacognitivas, mas não foi algo muito expressivo.

O grupo 2: Alunos que não apresentaram habilidades metacognitivas (ou apresentavam pouca) e posteriormente passaram a apresentar essas habilidades de forma significativa.

Este grupo apresentou poucos alunos, mostrando que é difícil desenvolver as habilidades metacognitivas nos alunos, principalmente em pouco tempo. Isto revela que desconstruir crenças e atitudes incorporadas nos vários anos do Ensino Fundamental não é tarefa fácil.

O grupo 3: Alunos que não apresentavam (ou apresentavam poucas) habilidades metacognitivas e que aparentemente não progrediram em desenvolvê-las de forma significativa.

Neste grupo, estão os alunos que não apresentaram registros claros de que se preocuparam em compreender o problema, ou mostraram que de alguma forma planejaram uma estratégia de solução, que revisaram a resolução do problema ou verificaram se a resolução estava correta ou se fazia sentido.

Neste grupo, por exemplo, estão os alunos que deixaram a quinta questão do pré-teste em branco, ou que em algumas questões multiplicaram os valores numéricos do problema sem o menor sentido ou justificativa, o que é um erro sistemático segundo Fischbein e Gazit (1988). Vale ressaltar que não estamos afirmando que estes alunos não possuem essas habilidades e, sim, que não encontramos esses registros. Como foi comentado anteriormente, alguns alunos escreveram a lápis na mesa e depois apagaram, o que pode ter escondido essas habilidades ou então eles podem possuir essas habilidades e não ter a necessidade de escrever.

6.1.5 – ANÁLISE DE UM REPRESENTANTE DE CADA GRUPO

Escolhemos um aluno que representasse cada grupo para analisar as suas estratégias de resolução, os tipos de habilidades metacognitivas apresentadas e de que forma estas foram importantes, ou não, para a resolução dos problemas.

➤ **Análise o aluno A**

Este aluno pertence ao grupo 1, pois apresentou habilidades metacognitivas importantes no pré-teste e no pós-teste. Infelizmente os dados não nos permite afirmar se estas habilidades foram desenvolvidas nos alunos pertencentes a este grupo. No pré-teste ele apresentou habilidades como gastar um tempo considerado em compreender o problema. Supomos isto baseado nos dados, pois existem dados também que mostram um planejamento, e registros que nos sugerem que ele verificou a solução, como resolver o mesmo problema de duas formas diferentes. Iremos analisar as questões do pré-teste.

1ª questão do pré-teste:

Nesta resolução, ele apresenta algumas habilidades metacognitivas importantes, tais como a divisão da sua resolução em etapas, verificando primeiro o número de possibilidades começando com a letra A e percebendo que, independentemente da letra escolhida, o número de possibilidades seria o mesmo, multiplicando assim o resultado por 4, obtendo a solução correta.

Ele resolve o mesmo problema utilizando o Princípio Multiplicativo, mostrando uma habilidade metacognitiva importante, segundo Polya, que é a verificação se a solução está correta.

Questão 1. Quantos são os anagramas (diferentes posições das letras de uma palavra) da palavra ANEL? (DANTE, 2005)

ANEL
 ANLE
 AENL
 AELN
 ALEN
 ALNE

} 6 possibilidades com a letra A na frente.
 } haverá outras 6 possibilidades para cada uma das três letras restantes.

$6 \cdot 4 = 24$

Outro método que acabei de perceber:

;) Temos quatro quadrados para adicionar as letras:

$\square \square \square \square$
 Para se adicionar a primeira letra, existirão 4 possibilidades e sobrarão 3 quadrados para a próxima letra.

$\square \square \square \square$
 Na sequência, ao se adicionar a segunda letra, ter-se-ia 3 possibilidades. A próxima letra tem uma possibilidade a menos que a letra anterior.

$\square \square \square \square$
 Seguindo o raciocínio, teríamos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ combinações possíveis.

Figura 1: Resolução da primeira questão do pré-teste do aluno A

2ª questão do pré-teste:

Ele desenha todos os casos como uma primeira solução, mas o importante é que o faz de forma sistemática, diminuindo a probabilidade de contar duas vezes o mesmo desenho ou esquecer de contar alguma possibilidade.

Ele resolve de outra forma utilizando uma tabela e um diagrama para verificar a solução anterior mostrando um controle e auto regulação.

Questão 2: Um marcador digital é formado por sete segmentos no formato de um 8. Para formar um símbolo, cada segmento pode ficar iluminado ou apagado, com pelo menos um segmento iluminado.



Dizemos que um símbolo é conexo se não existe segmento iluminado isolado dos demais. Por exemplo: os três símbolos representados na figura 1 a seguir são conexos e distintos; já o símbolo da figura 2 não é conexo. Os símbolos ilustrados têm, todos, três segmentos iluminados.

figura 1



figura 2



Desenhe **TODOS** os símbolos conexos formados por três segmentos iluminados. (UFRJ-2011)

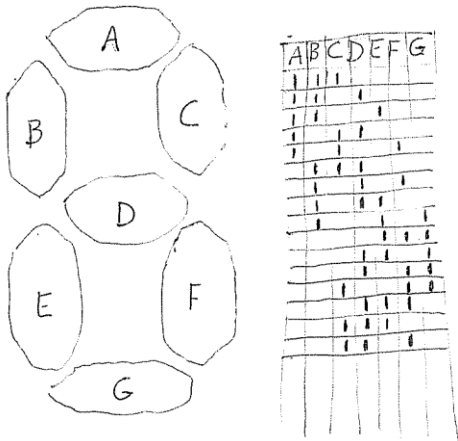


Figura 2: Resolução da segunda questão do pré-teste do aluno A

3ª questão do pré-teste:

O aluno apresentou a resposta errada $6 \times 5 = 30$, em seguida ele escreveu a palavra **PORÉM**, o que nos indica que ele gastou um tempo analisando a distinguibilidade observando que se A aperta a mão de B, B aperta a mão de A e contando assim em dobro e finalmente fazendo a devida correção pela divisão por dois.

O aluno resolve o mesmo problema utilizando um diagrama para verificar a solução anterior. Para isso, ele utiliza setas unidirecionais para indicar os apertos de mão.

Questão 3: Numa reunião de equipes há 6 alunos. Se cada um trocar um aperto de mão com todos os outros, quantos apertos de mão teremos ao todo? (Costa, 2003.)

MÉTODO JEGUE

* COMECEI ARRUI

TOTAL
15

cada indivíduo apertará a mão de outros 5.
 $6 \cdot 5 = 30$
 Porém, foi contado o aperto de mão entre A e B duas vezes ($A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$) (onde A e B indivíduos do grupo).
 $\therefore 2x = 30$
 $x = 15$
 (o não circulei.)

* Muito boa a ideia de colocar apenas 6 alunos. Assim algumas pessoas não preferir este método

Se fosse 100, o povo ia acabar refletindo demais (ou pulando a questão).

Figura 3: Resolução da terceira questão do pré-teste do aluno A

4ª questão do pré-teste:

Nessa questão, o problema é dividido em etapas, verificando-se primeiro quais as possibilidades tornariam o Zeka vencedor. Para isso, lista uma possibilidade que não se enquadrava nas hipóteses do problema e faz a correção, mostrando um controle e autorregulação.

Posteriormente, ele observa que seria o mesmo número de possibilidades para Kadu ser vitorioso e chega a solução correta sem a necessidade de verificar as possibilidade para Kadu.

Questão 4: Num torneio de tênis, os finalistas foram Zeka e Kadu. Será declarado campeão aquele que vencer duas partidas seguidas ou vencer três partidas alternadas

Observando quem sai vencedor em cada partida até que se obtenha o campeão, quais os resultados que se pode obter? (COSTA, 2003/ adaptada)

Zeka = Z
Kadu = K

POSSIBILIDADES	Z
Z Z	
Z K Z Z	
Z K Z K Z	
Z K K Z Z	ÓPA, ESSA NÃO
K Z Z	
K Z K Z Z	

Nestas possibilidades, Zeka sai vencedor.
As demais possibilidades seriam a inversão dos letras acima:

Z Z
Z K Z Z
Z K Z K Z
K Z Z
K Z K Z Z
K K
K Z K K
K Z K Z K
Z K K
Z K Z K K

Esqueci que não é para circular a resposta..

Figura 4: Resolução da quarta questão do pré-teste do aluno A

5ª questão do pré-teste:

Os nomes das pessoas são sublinhados, cria uma notação mostrando a distinguibilidade dos objetos e chega a solução correta.

Questão 5: . Uma criança tem quatro carrinhos de cores diferentes (azul, branco, verde e preto) e decide distribuir para seus irmãos Fernando, Luis e Teresa. De quantas formas diferentes pode distribuir os carrinhos a seus irmãos? Exemplo: pode dar os quatro carrinhos a seu irmão Luis. (NAVARRO PELAYO – 1996 adaptado)

ABVP → FLT

Cada um dos carrinhos possui 3 destinos possíveis (F, L e T).

3 possibilidades para cada um dos 4 carrinhos ∴ quantidade $Q = 3 \times 3 \times 3 \times 3$
 $= 81$

Figura 5: Resolução da quinta questão do pré-teste do aluno A

Iremos analisar as questões do pós-teste.

1ª questão do pós-teste:

Segundo Schoenfeld (1987) uma habilidade metacognitiva importante é a capacidade de abandonar estratégias infrutíferas ou trabalhosas em detrimento de outras que sejam corretas ou adequadas. O aluno A nos mostra que esta habilidade é de fundamental importância, principalmente em Análise Combinatória, pois o aluno só saberá se há necessidade de dividir em casos se ele chegar a um impasse, para então surgir a necessidade de outra estratégia.

Um número inteiro (com as unidades simples) seja divisível por 3?

CENTENA DEZENA UNIDADE

4 . 3 . 0
 2 3 0
 3 5 6
 1 7 9

0 0 0 E AGORA?

Situação I: o número é terminado por 3.
 Situação II: o número não termina em 3.

I UNIDADE DEZENA CENTENA
 1 . 3 . 2 = 6 casos;
 3 2 2
 0 5 4
 9 7 1

II UNIDADE DEZENA CENTENA
 3 . 4 . 3 = 36 casos
 0 3 2
 6 5 4
 9 7 1

TOTAL = 6 + 36 = 42 números.

Figura 6: Resolução da primeira questão do pós-teste do aluno A

Observe que ele tenta resolver o problema diretamente pelo Princípio Multiplicativo (T.2), segundo a categorização da resolução de problemas de Análise Combinatória, mas esbarra em um impasse que é a escolha do algarismo da unidade. Ele circula o número três, mostrando que a dificuldade se encontra justamente neste número. Então para transpor este impasse ele divide em dois casos: quando termina em três e quando não termina. Ele resolve separadamente os dois casos e depois soma os resultados, resolvendo o problema corretamente. Ele utiliza corretamente outra estratégia que segundo a categorização da resolução de problemas é a conjunção dos Princípios Aditivo e Multiplicativo (T.3)

2ª questão do pós-teste

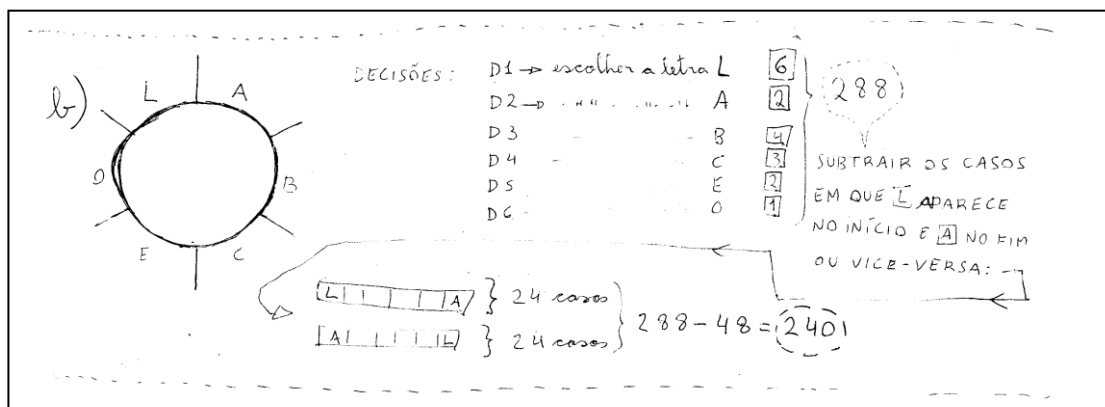


Figura 7: Resolução da segunda questão do pós-teste do aluno A

O aluno utilizou uma forma circular de contar e percebeu que ao fazer assim estaria contando alguns anagramas a mais, descontando depois estes casos para chegar à solução desejada. Esta resolução se enquadra no Princípio Multiplicativo com a ideia de exclusão (T.5), segundo a nossa categorização.

Neste problema, o aluno resolveu de forma diferente da que normalmente é apresentada nos livros didáticos, isto nos sugere que o trabalho incentivou a criatividade dos alunos como orientam os PCNEM. Não cabe a nós julgarmos se esta forma é “melhor” ou “pior”. O que podemos perceber é que a resolução está correta e o mérito é todo do aluno, pois foi ele quem resolveu sem intervenção do professor.

3ª questão do pós-teste:

JOGO	V1	E	V2	QTD
1	■			7s
2	■	■		4d
3	■	■	■	2t

PERMUTAÇÃO entre 7 simples, 4 duplos e 2 triplos

Ex: SSSSSSDDDDTT

TEREMOS a permutação seguinte:

P_1 a permutação entre todos os elementos;
 P_2 " " " os prognósticos simples;
 P_3 " " " " duplos;
 P_4 " " " " triplos.

P_1, P_2, P_3, P_4

$$\frac{P_1}{P_2 \cdot P_3 \cdot P_4} = \frac{13!}{7! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{13!}{8! \cdot 3 \cdot 2} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 3 \cdot 2} = \frac{13 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^2}{3 \cdot 2} \text{ casos,}$$

onde cada prognóstico simples oferece 3 possibil.; cada progn. duplo oferece 3 possibilidades e cada prognóstico triplo oferece uma. Sendo assim:

$$\frac{7 \cdot 3}{3^7 \cdot 3^4 \cdot 1 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^2} = 13 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 3^{13} \cdot 2^2 \text{ ou } \frac{13! \cdot 3^7 \cdot 3^4}{7! \cdot 4! \cdot 2!} \text{ modos,}$$

R.: $\frac{13! \cdot 3^7 \cdot 3^4}{7! \cdot 4! \cdot 2!}$ modos

Figura 8: Resolução da terceira questão do pós-teste do aluno A

Este aluno, além do tempo considerável gasto em compreender o problema (a tabela acima nos induz a inferir isso), nos mostra a importância da construção de exemplos, pois provavelmente ao construir o exemplo ele deve ter-se recordado de algum problema de Permutação com Repetição, levando-o a resolvê-lo corretamente. Além disso, ele mostra controle e autorregulação (SCHOENFELD,1987) ao circular o 7^3 (uma resposta equivocada), e substitui posteriormente pelo valor correto 3^7 .

4ª questão do pós-teste:

Neste outro problema, ele começa a resolver contando todos os casos, para em seguida descontar os casos em que há dois A's juntos. Entretanto, supomos que ao construir alguns exemplos ele observa que irá encontrar uma dificuldade pela presença dos 3 A's, e que seria necessário o Princípio da Inclusão e Exclusão. Assim, abandona a primeira estratégia e resolve o problema corretamente utilizando o modelo de distribuição de Dubois (1984). Ele apresenta dessa forma uma atitude parecida com a do matemático ao resolver um problema, segundo Schoenfeld (1992).

Observe que na segunda estratégia ele primeiro coloca as letras diferentes de A. Para isso ele usa Permutação com Repetição, e posteriormente usa o modelo de distribuição de bolas em caixas, onde se tem 3

bolas iguais e se quer colocá-las em 8 caixas distintas, em que cada caixa comporta no máximo uma bola. Para isso, ele primeiro considera as bolas como distinguíveis. Ao fazer isso está contando cada permutação $3!$ vezes e no fim divide o resultado por $3!$. Segundo Batanero et al (1996), a apresentação do modelo de seleção, distribuição e partição favorece a resolução dos problemas, o que foi confirmado pela resolução acima.

Questão 1: Quantos são os anagramas da palavra PIRACICABA que não possuem 2 letras A juntas?

PRCCBIIAAA

$P =$ anagramas de PIRACICABA sem a restrição.
 $Q =$ quantidade de vezes em que ocorre AA.
 $R =$ resposta $= P - Q$

$P = \frac{10!}{2!2!3!}$

Abandonei esta estratégia porque me lembrei de outra bem melhor!

I Permutar PRCCBII

P R C C B I I

*total₁: $\frac{7!}{2!2!} = \frac{7!}{4}$

II Adicionar o 1º A:
 1 possibilidade para cada $\boxed{\quad}$ \rightarrow 8 possibil.
 *total₂: $\frac{8 \cdot 7!}{4} = 2 \cdot (7!)$

III Adicionar o segundo A: 7 possibil.
 *total₃ = $7 \cdot 2 \cdot 7!$

IV Adicionar o terceiro A: 6 possibilidades.
 *total₄ = $7 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 7!$

V Os As são iguais, portanto deve-se descontar...

total = $\frac{7 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 7!}{3!} = \frac{7 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 7!}{3!} = 14 \cdot 7!$

Figura 9: Resolução da quarta questão do pós-teste do aluno A

5ª questão do pós-teste:

Nesta resolução ele assume o “papel” de quem realmente tem que fazer a tarefa. Para isso, divide o problema em fases, colocando primeiramente as meninas; em seguida o menino específico e, posteriormente, os outros meninos.

meninas numa roda de ciranda de modo que um determinado menino só fique ao lado de menina?

(I) Dispor os meninos na roda:
 $(PC)_5 = 4!$

(II) Escolher o lugar do menino que ficará entre dois meninos: 5 possibilidades.

* H_2 terá 4 possibilidades, e ao mesmo tempo abrirá uma "vaga" para o H_3 .

Da mesma forma, após o H_3 decidir sobre as 5 possibilidades, abrirá uma possibil. para o H_4 , que terá 6.

De maneira análoga, H_5 terá $6+1=7$ possibilidades.

Total = $4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ ou $20 \cdot 7!$

Figura 10: Resolução da quinta questão do pós-teste do aluno A

A resolução dos problemas do pós-teste do aluno A nos mostra que este aluno possui habilidades metacognitivas importantes para a resolução dos problemas de Análise Combinatória e que essas habilidades são importantes para a resolução, mas não podemos afirmar que essas habilidades foram desenvolvidas durante o curso, pois ao analisar o pré-teste podemos perceber que ele já possuía essas habilidades.

De qualquer forma, a análise das resoluções do aluno A nos mostra a importância das habilidades metacognitivas para a resolução dos problemas.

➤ Análise do aluno B

Este aluno foi classificado no grupo 2, pois não apresentou habilidades metacognitivas no pré-teste. Por exemplo, na quinta questão multiplicou os dados do problema sem a menor justificativa, apresentando o erro sistemático

verificado por Fischbein e Gazit (1988), o que para nosso critério representa uma ausência de habilidades metacognitivas.

Iremos analisar as questões do pré e do pós-teste do respectivo aluno de forma a tornar claro as habilidades metacognitivas empregadas e de que forma elas foram importantes.

1ª questão do pré-teste:

Instruções específicas

As questões propostas devem ser **respondidas** com caneta esferográfica azul ou preta, não sendo permitido apagar nenhum registro.

Não é permitido nem necessário o uso de calculadora.

Não é possível consultar nenhum tipo de material durante avaliação.

Não são necessários esclarecimentos sobre enunciados ou sobre qualquer ponto a respeito da avaliação. A interpretação das questões faz parte da prova

Questão 1: Quantos são os anagramas (diferentes posições das letras de uma palavra) da palavra ANEL?(DANTE, 2005)

ANEL	NELA	LENA	ALNE	NEAL	(EANL)	24 combinações
NAEL	ELNA	LANE	ABLN	ALEN	EAVL	
AENL	LNBA	GLAN	LAEU	NLAE	EALN	
ANLE	LEAN	LNAE	NALE	NLEA	ENLA	
					ENAL	

Figura 11: Resolução da primeira questão do pré-teste do aluno B

Nesta resolução, não há presença de uma enumeração sistemática, não houve divisão em etapas, por exemplo começando com a letra A, depois com a letra N, e assim sucessivamente, estrutura, entretanto, apresentada pelo aluno na quarta questão do pós-teste.

Esta atitude de listar aleatoriamente todas as possibilidades, dificultaria a resolução de um problema com um número maior de anagrama. Além disso, ele não resolve de outra forma para verificar se a resposta estava correta.

2ª questão do pré-teste:

Nesta questão ele desenha todas as possibilidades e a resolve de forma correta, mas não resolve de outra forma para verificar se houve algum erro e tampouco cria uma notação para tentar resolver de forma diferente.

Questão 2: Um marcador digital é formado por sete segmentos no formato de um 8. Para formar um símbolo, cada segmento pode ficar iluminado ou apagado, com pelo menos um segmento iluminado.



Dizemos que um símbolo é conexo se não existe segmento iluminado isolado dos demais. Por exemplo: os três símbolos representados na figura 1 a seguir são conexos e distintos, já o símbolo da figura 2 não é conexo. Os símbolos ilustrados têm, todos, três segmentos iluminados.

figura 1



figura 2



Desenhe **TODOS** os símbolos conexos formados por três segmentos iluminados. (UFRJ-2011)

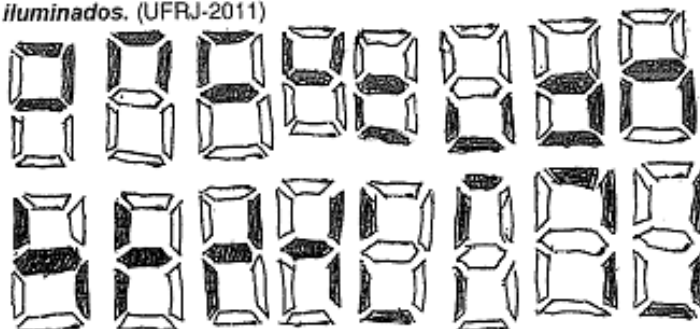


Figura 12: Resolução da segunda questão do pré-teste do aluno B

3ª questão do pré-teste:

Nesta resolução, um diagrama é construído e o aluno vê o problema por meio de notação simbólica, levando em consideração que se A aperta a mão de B, B não precisa apertar a mão de A e chega a solução correta.

Questão 3: Numa reunião de equipes há 6 alunos. Se cada um trocar um aperto de mão com todos os outros, quantos apertos de mão teremos ao todo? (Costa, 2003.)

Figura 13: Resolução da terceira questão do pré-teste do aluno B

4ª questão do pré-teste:

A resolução desta questão nos leva a concluir que ele não compreendeu o enunciado do problema. Talvez a construção de exemplos e não exemplos pudesse levá-lo a compreender melhor o enunciado e a pergunta do problema. Na resolução da primeira questão do pós-teste, ele apresenta a construção de exemplos e não exemplos, o que provavelmente facilitou a compreensão do enunciado.

Ele não dividiu a resolução em etapas, por exemplo contar todas as possibilidades em que ZEKA era vencedor e depois contar as possibilidades em que KADU era vencedor. Na primeira questão do pós-teste, além de construir os exemplos, ele também dividiu a resolução em etapas, primeiro contou as possibilidades em que o último algarismo era 3 e depois contou as possibilidades em que o último algarismo era diferente de 3.

Apesar de ter resolvido as questões 2 e 3 do pré-teste usando desenhos ou diagrama, ele não utilizou o diagrama de árvore para resolver este problema, o que, segundo a nossa visão, facilitaria muito.

Este é um problema simples que provavelmente a ausência das habilidades metacognitivas lhe impediram de resolver corretamente o problema.

Questão 4: Num torneio de tênis, os finalistas foram Zeka e Kadu. Será declarado campeão aquele que vencer duas partidas seguidas ou vencer três partidas alternadas.

Observando quem sai vencedor em cada partida até que se obtenha o campeão, quais os resultados que se pode obter? (COSTA, 2003/ adaptada)

Handwritten solutions for Question 4:

2x0	3x2
0x2	2x3
3x1	2x1
1x3	1x2

Figura 14: Resolução da quarta questão do pré-teste do aluno B

5ª questão do pré-teste:

Esta era a questão, ao nosso ver, que mais necessitava das habilidades metacognitivas. No entanto, ele não analisou os dados, não construiu exemplos e não exemplos, algo que foi apresentado na resolução da primeira questão do pós-teste.

Ele não traçou uma estratégia, como por exemplo dividir em etapas: uma criança recebendo 4 carrinhos e as outras duas nenhum carrinho. Esta estratégia aparece na 3ª questão do pós teste, em que ele primeiro calcula os prognósticos triplos, depois duplos e depois simples.

Além disso, multiplicou os dados do problema sem a menor justificativa, apresentando o erro sistemático verificado por Fischbein e Gazit (1988), o que para nós representa uma ausência de habilidades metacognitivas.

Questão 5: Uma criança tem quatro carrinhos de cores diferentes (azul, branco, verde e preto) e decide distribuir para seus irmãos Fernando, Luis e Teresa. De quantas formas diferentes pode distribuir os carrinhos a seus irmãos? Exemplo: pode dar os quatro carrinhos a seu irmão Luis. (NAVARRO PELAYO – 1996 adaptado)

Handwritten solution for Question 5:

$4 \times 3 = 12$ 12 FORMAS DIFERENTES

Figura 15: Resolução da quinta questão do pré-teste do aluno B

1ª questão do pós-teste:

Na primeira questão ele escreve alguns exemplos de objetos a serem contados e alguns objetos que não entrarão na contagem. Isso nos mostra que ele gastou um tempo em compreender o problema (SCHOENFELD,1987; POLYA, 1995), observando os dados e as restrições. Além disso, podemos perceber que ele utiliza o Princípio Multiplicativo e chega a um impasse. Abandona então a estratégia, mostrando controle e autorregulação (SCHOENFELD,1987), dividindo assim o problema em casos e resolvendo-o. Vale ressaltar que existem alguns erros, tais como consideração do número 1 como número primo e a não consideração do número zero como divisível por 3, mas aqui nos interessam mais a estratégia adotada e as habilidades metacognitivas empregadas

Exemplos	Uão Exemplos
153	032
239	427
716	154

4 3 5 4	3	Considerando o último algarismo diferente de 3
1 1	3	$\frac{4}{1} \frac{5}{7} \frac{2}{6} \rightarrow 40 \text{ números}$
2 2	6	$\frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{9}$
3 3	9	$\frac{3}{5} \frac{3}{5}$
5 5		$\frac{5}{7}$
7 7		

Considerando o último algarismo igual a 3

3	1	$\rightarrow 12 \text{ números}$
$\frac{3}{1} \frac{4}{7}$	$\frac{1}{3}$	
2 2		
5 5		
7 7		

R = total de números inteiros possíveis = 52

Figura 16: Resolução da primeira questão do pós-teste do aluno B

2ª questão do pós-teste:

Na segunda questão, item (a), podemos observar que ele tinha compreendido o enunciado de forma equivocada. Posteriormente ele abandona a estratégia equivocada e chega à solução correta. No item (b), ele considera as letras L e A como sendo uma só. Ao fazer isso, reduz o problema a um

problema mais simples, que é permutar 5 letras distintas e depois considerar LA e AL e finalmente multiplicando por dois para obter o resultado. No item (c), ele apresenta uma estratégia importante em Análise Combinatória, que é negligenciar, a priori, uma restrição e depois descontar os objetos que foram contados a mais.

A)

A	C	C	C	V	A
E	B	B	B	O	E
O	L	L	L	L	O

3	4	3	2	1	2
A	C	C	C	C	A
E	B	B	B	B	E
O	L	L	L	L	L

V
O
G
A
L

R = Serão $3! \cdot 4!$ anagramas

B) Considerar LA uma única letra

5	4	3	2	1	→ 5!
C	C	C	C	C	"LA" também pode ser "AL", o que dobra o
E	E	E	E	E	número de possibilidades.
B	B	B	B	B	=
O	O	O	O	O	R = Serão $2 \cdot 5!$ anagramas
LA					

C) 1º) Não considerar as restrições
6!

2º) Subtrair os excedentes,
 $6! - 2 \cdot 5!$

R = Serão $6! - 2 \cdot 5!$ anagramas

Figura 17: Resolução da segunda questão do pós-teste do aluno B

3ª questão do pós-teste:

Na terceira questão, ele primeiro verifica quantas são as possibilidades para os jogos simples, duplos e triplos, e posteriormente verifica de quantas formas é possível escolher dois jogos triplos entre os 13 possíveis. Ao fazer isso, ele comete um erro descrito em Batanero et al (1997 a) e em Esteves (2001), da confusão entre Arranjo e Combinação. Apesar de não apresentarmos a fórmula de Arranjo, a questão envolvida é envolve a distinguibilidade extrínseca aos objetos, a saber, se a ordem dos objetos importa ou não. Talvez se tivesse construído alguns exemplos de escolhas, ele

poderia ter percebido que escolher o jogo 1 e 2 para o prognóstico triplo é equivalente a escolher o jogo 2 e 1. Portanto, estaria contando em dobro e seria necessário dividir por 2!. Optamos dividir por 2! em vez de dividir por 2, para que o aluno percebesse que se houvesse 3 jogos teríamos que dividir por 3! e não 3.

Para cada jogo existem 3 possibilidades com prognóstico simples
 Para cada jogo existem 3 possibilidades com prognóstico duplo
 Para cada jogo existe 1 possibilidade com prognóstico triplo

1º) Tenho 13 possibilidades para fazer um prognóstico triplo e 12 para o segundo prognóstico triplo

$$\lfloor 13 \cdot 12 \rfloor$$

2º) Tenho 11 possibilidades para fazer uma das 3 apostas do 1º prognóstico duplo, 10 para uma das 3 apostas do segundo prognóstico e assim por diante

$$\lfloor 11 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 3^4 \rfloor$$

3º) Tenho 7 possibilidades para fazer uma das 3 apostas do 1º prognóstico simples, 6 para uma das 3 apostas do segundo prognóstico e assim por diante

$$\lfloor 7 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3^7 \rfloor$$

4º) Somando todos os casos anteriores teremos o número total de possibilidades de cartões

$$R = 13! \cdot 3^{11}$$

Figura 18: Resolução da terceira questão do pós-teste do aluno

4ª questão do pós-teste:

Na quarta questão, a quantidade de anagramas foi calculada sem restrição e depois foram descontados os casos em que apareciam dois A's juntos e três A's juntos. Ele não percebeu que ao descontar os anagramas com dois A's juntos ele já tinha descontado duas vezes a quantidade de anagramas com três A's juntos e o certo era somar $\frac{8!}{2!2!}$ e não diminuir. Talvez uma exploração de exemplos pudesse fazer com que ele observasse este erro.

1º) Descubrir o número total de anagramas

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$$

2º) Descubrir o número de anagramas com 3 letras "A" juntas (Considerando as três letras como uma só)

$$\frac{8!}{2! \cdot 2!}$$

3º) Descubrir o número de anagramas com 2 letras "A" juntas.

$$\frac{9!}{2! \cdot 2!}$$

4º) Retirar os itens contados a mais

$$\left(\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} - \frac{8!}{2! \cdot 2!} - \frac{9!}{2! \cdot 2!} \right)$$

Figura 19: Resolução da quarta questão do pós-teste do aluno A

5ª questão do pós-teste:

Na quinta questão, foi criada uma notação para menino e menina e uma notação especial para o menino específico. Primeiramente ele escolhe as meninas que ficarão do lado do determinado menino e depois percebe que, como a ordem não é relevante, é necessário multiplicar por dois. Observe que ele está relacionando a Combinação com o que os livros chamam de Arranjo, conforme Dubois (1984) orienta sobre transição entre modelos. Observou-se que havia vestígios de uma autorregulação (SCHOENFELD, 1987), pois alguns escritos errados foram circulados, mostrando que ele observou alguns erros e os consertou. Além disso, observamos que ele resolve o problema por etapas.

$\begin{matrix} \rightarrow D.M. \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \\ \times \times \times \times \times \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \end{matrix}$

1ª) Escolher as meninas que ficaram com o menino
 $C_{5,2}$

2ª) Considerar o menino e duas meninas como um só elemento e fazer a permutação circular
 $P_0 = 6!$ $P_0 = 7!$

3ª) Como a combinação não leva em consideração ordem, multiplicamos por 2, pois uma menina pode estar do lado direito ou esquerdo do menino
 $2 \cdot C_{5,2}$

4ª) O total de maneiras possíveis será: $2 \cdot C_{5,2}$

$2 \cdot C_{5,2} \cdot 7!$

Figura 20: Resolução da quinta questão do pós-teste do aluno B

➤ Análise do aluno C

1ª questão do pré-teste:

Instruções específicas

As questões propostas devem ser **respondidas** com caneta esferográfica azul ou preta, não sendo permitido apagar nenhum registro.
 Não é permitido nem necessário o uso de calculadora.
 Não é possível consultar nenhum tipo de material durante avaliação.
 Não são necessários esclarecimentos sobre enunciados ou sobre qualquer ponto a respeito da avaliação. A interpretação das questões faz parte da prova.

Questão 1 Quantos são os anagramas (diferentes posições das letras de uma palavra) da palavra ANEL? (DANTE, 2005)

NELA	N A L E
LENA	E L N A
NAEL	E N L A
ALNE	E N A L
LANE	E L A N


Figura 21: Resolução da primeira questão do pré-teste do aluno C

Nesta questão, o aluno lista poucos exemplos sem utilizar uma forma sistemática, tampouco verifica se a resolução esta correta ou tenta resolver de forma diferente para conferir o resultado, o que mostrar ausência de habilidades metacognitivas.


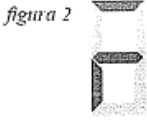
2ª questão do pré-teste:

Nesta questão o aluno lista poucos exemplos sem utilizar uma forma sistemática e sem mostrar qualquer habilidade metacognitiva.

Questão 2: Um marcador digital é formado por sete segmentos no formato de um 8. Para formar um símbolo, cada segmento pode ficar iluminado ou apagado, com pelo menos um segmento iluminado



Dizemos que um símbolo é conexo se não existe segmento iluminado isolado dos demais. Por exemplo: os três símbolos representados na figura 1 a seguir são conexos e distintos; já o símbolo da figura 2 não é conexo. Os símbolos ilustrados têm, todos, três segmentos iluminados.

figura 1  figura 2 

Desenhe TODOS os símbolos conexos formados por três segmentos iluminados. (UFRJ-2011)

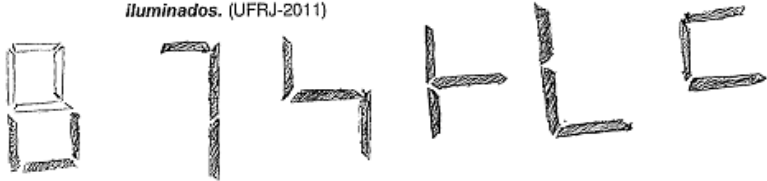


Figura 22: Resolução da segunda questão do pré-teste do aluno C

3ª questão do pré-teste:

O aluno considera 30 apertos de mão, não percebendo que estava contando a mais. Além disso, considera o aperto com as duas mãos e multiplica por dois. Isso revela uma falta de compreensão dos dados e da pergunta do problema.

Questão 3: Numa reunião de equipes há 6 alunos. Se cada um trocar um aperto de mão com todos os outros, quantos apertos de mão teremos ao todo? (Costa, 2003)

De ~~6~~ ⁵ alunos ~~usarem~~ ^{usarem} apenas uma mão. Seriam 30 apertos de mãos.
 De ~~6~~ ⁵ alunos ~~usarem~~ ^{usarem} as 2 mãos. Seriam 60 apertos de mãos.

Figura 23: Resolução da terceira questão do pré-teste do aluno C

4ª questão do pré-teste:

Ele lista algumas possibilidades, inclusive 2 x 1, o que não serve, pois poderia ser vitória de ZEKA depois KADU e posteriormente ZEKA, o que não seria suficiente para se ter um vencedor, mostrando com isso uma compreensão deficiente do problema e uma ausência das habilidades metacognitivas.

Questão 4: Num torneio de tênis, os finalistas foram Zeka e Kadu. Será declarado campeão aquele que vencer duas partidas seguidas ou vencer três partidas alternadas.

Observando quem sai vencedor em cada partida até que se obtenha o campeão, quais os resultados que se pode obter? (COSTA, 2003/ adaptada)

2x0
 2x1
 3x2
 4x3

Figura 24: Resolução da quarta questão do pré-teste do aluno C

5ª questão do pré-teste:

Algumas possibilidades foram listadas, mas não foi levada em consideração a distinguibilidade dos carrinhos. Também não percebeu que faltavam muitas outras situações, não tentou generalizar e não verificou se a resposta estava correta.

Questão 5: Uma criança tem quatro carrinhos de cores diferentes (azul, branco, verde e preto) e decide distribuir para seus irmãos Fernando, Luis e Teresa. De quantas formas diferentes pode distribuir os carrinhos a seus irmãos? Exemplo: pode dar os quatro carrinhos a seu irmão Luis. (NAVARRO PELAYO – 1996 adaptado) 12 → possibilidades

$F \rightarrow 4 / L \rightarrow 0 / T \rightarrow 0$
 $F \rightarrow 3 / L \rightarrow 1 / T \rightarrow 0$
 $F \rightarrow 2 / L \rightarrow 1 / T \rightarrow 1$
 $F \rightarrow 2 / L \rightarrow 2 / T \rightarrow 0$
 $F \rightarrow 1 /$

1ª questão do pós-teste:

A primeira questão é resolvida de forma equivocada. Não percebe que a escolha do número na decisão anterior influencia o número de possibilidades na decisão seguinte, mas resolve assim mesmo, mostrando uma atitude parecida com a dos alunos que Schoenfeld (1992) descreveu em sua pesquisa, o que sinaliza uma ausência das habilidades metacognitivas. Observou-se que não houve a construção de exemplos e não-exemplos. A construção destes talvez pudesse levá-lo a observar este erro.

... e o último algarismo (o das unidades simples) seja divisível por 3?

5	4	2
*	2	3
2	3	6
5	5	9
7	7	

$5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$

3 divisões

1-P
2-P
3-P
4
5-P
6-P
7
8
9

5 primos

para a primeira casa temos 5 possibilidades de primos (1, 2, 3, 5, 7); para a 2ª casa temos 4 possibilidades (4, 3, 5, 7) ~~mas~~ não temos 5 pois o enunciado diz que os números devem ser distintos; e para a 3ª e última casa a recomendação é de ser divisível por 3 então temos 0 (3, 6, 9) porém o 3 não pode entrar porque ele é primo e não se pode repetir algarismos, portanto, para a 3ª casa temos 2 possibilidades (6, 9).

Figura 26: Resolução da primeira questão do pós-teste do aluno C

2ª questão do pós-teste:

Na segunda questão não há construção de exemplos, nem a apresentação de vestígios de um planejamento de como temporariamente desconsiderar uma restrição para em seguida descontar o que foi contado a mais.

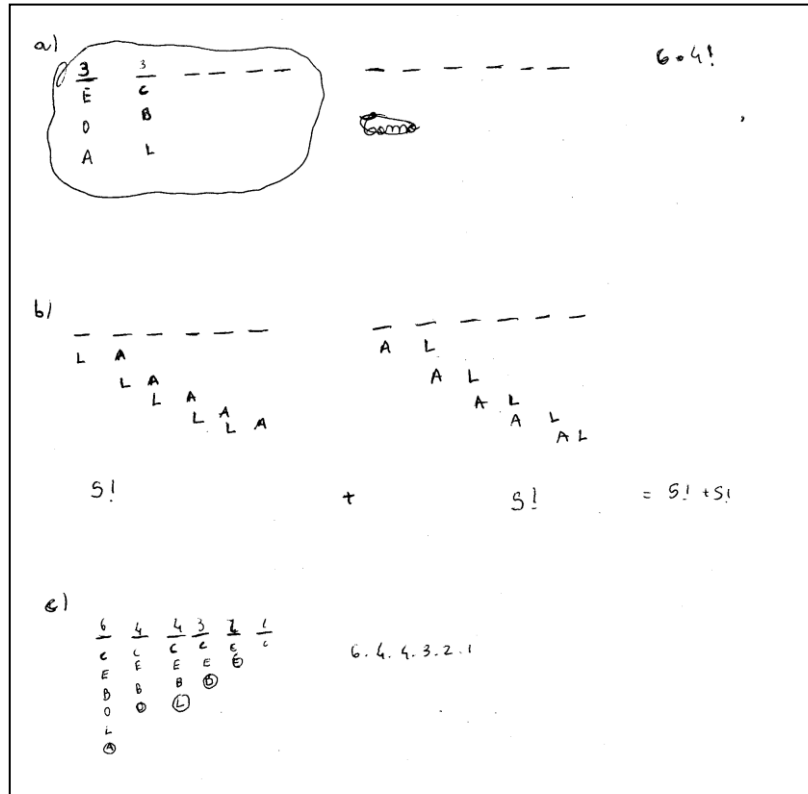


Figura 27: Resolução da segunda questão do pós-teste do aluno C

3ª questão do pós-teste:

Na terceira questão, ele multiplica 4 por 3!. Supomos que seja porque há 4 jogos triplos. Em seguida multiplica o 2 por 7!. Podemos considerar esta resposta como uma resposta injustificada, segundo Esteves (2001). Esta questão foi a que mais necessitou de exploração dos dados por parte dos alunos. Alguns alunos a consideraram trabalhosa e de difícil compreensão e, mesmo assim, este aluno não mostrou uma exploração dos dados do problema, nem apresentou registros que mostrassem que ele gastou um tempo considerado em compreender o problema. Também não tentou verificar se a solução estava correta, explorou outra estratégia, nem sequer o dividiu em casos, indícios que representam uma ausência das habilidades metacognitivas.

$$(4 \cdot 3! + 2)$$

$$4 \cdot 3! + 2 = 7!$$

Figura 28: Resolução da terceira questão do pós-teste do aluno C

4ª questão do pós-teste:

Na quarta questão, ele simplesmente calculou o número de anagramas da palavra PIRACICABA sem nenhuma restrição.

$$\frac{10!}{2! 2! 3!}$$

O fatorial de 10 letras dividido pelo fatorial das letras que se repetem.

Figura 29: Resolução da quarta questão do pós-teste do aluno C

Observe que a categoria *tarefa* (FLAVELL ET AL,1999), que trata da natureza das exigências dos problemas, é de fundamental importância. Observa-se que este aluno compreendeu o conceito de Permutação com Repetição, mas ao se deparar com um problema, segundo os PCNEM, não conseguiu resolvê-lo por não possuir as habilidades metacognitivas. Provavelmente se as tarefas fossem simples aplicação das fórmulas, o que Polya (1995) chama de exercícios de rotina, ele conseguiria um “bom resultado”.

5ª questão do pós-teste:

Na quinta questão, podemos perceber claramente o vínculo do aluno com a fórmula. Ele utiliza a fórmula de Permutação Circular, sem antes compreender o que estava sendo solicitado. Não divide em casos como, por exemplo, colocar as meninas, depois o menino específico e posteriormente os outros meninos. Ele poderia ter considerado duas meninas e o menino como sendo uma única pessoa.

Reduzir 1 menos e fazer o fatorial dos quatro outros $\rightarrow 4!$

Usar a fórmula $P_n = (n-1)!$ $\rightarrow 9!$

$4! + 9!$

Figura 30: Resolução da quinta questão do pós-teste do aluno C

Observe que aparentemente ele conhece a fórmula de Permutação com Repetição, Permutação Simples e Permutação Circular, mas a ausência das habilidades metacognitivas não permitiu que ele tivesse um bom resultado. Este achado corrobora a constatação de Biryukov (2004) que os alunos que apresentam habilidades metacognitivas têm uma maior probabilidade de resolverem o problema corretamente e a constatação de Schoenfeld (1987) de que uma grande fonte de conhecimento é um requisito necessário, mas não suficiente para obter êxito na resolução de problemas matemáticos.

Pela análise do pré e pós-testes podemos perceber que o aluno C não apresentou habilidades metacognitivas em nenhuma das avaliações, isso nos revela a dificuldade de se desconstruir crenças e atitudes que foram construídas desde os primeiros anos de escolaridade.

CAPÍTULO 7

DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo final, discutiremos a questão da pesquisa e a hipótese estabelecida, fazendo conexão com a literatura discutida anteriormente. Faremos algumas recomendações para o ensino de Análise Combinatória e concluiremos o trabalho discutindo os pontos positivos e limitações, sinalizando questões para pesquisas futuras.

Muitos alunos passaram a abandonar estratégias infrutíferas ou trabalhosas, passando a ter uma atitude parecida com a do matemático, segundo Schoenfeld (1992).

Os pontos positivos foram muitos, tais como: as resoluções dos alunos apresentaram uma valorização do raciocínio combinatório (muitos deles nem utilizaram a fórmula para resolver os problemas); valorização da criatividade, pois apareceram várias resoluções para o mesmo problema, algumas bem interessantes; a importância de se ensinar Permutação Circular no Ensino Médio; a possibilidade de não ensinar a fórmula de Arranjo, por ser inteligível a luz do Princípio Multiplicativo (vale ressaltar que isto não acabou com a dificuldade relacionada à ordem dos objetos (ESTEVES,2001; BATANERO ET AL 1997 a), pois alguns alunos continuaram a apresentar este tipo de erro).

Outro ponto importante é que alguns alunos passaram a utilizar o diagrama de árvore pouco utilizado ou utilizado de forma equivocada segundo Esteves (2001). Pesci (1994 apud BATANERO,1997 b) também constata que os alunos encontram dificuldades em construir o diagrama de árvore e Roa et AL (1996) mostram em seu estudo que os alunos têm evitado o seu uso. Isto apresenta um avanço, pois o diagrama de árvore apresenta uma importante característica intuitiva e facilita a aprendizagem de probabilidade.

7.1- VOLTANDO À HIPÓTESE

É possível desenvolver habilidades metacognitivas nos alunos? As habilidades metacognitivas são importantes para a resolução de problemas de Análise Combinatória? O uso das estratégias metacognitivas melhora o desempenho dos alunos?

A pesquisa mostrou que poucos alunos se enquadraram no grupo 2. Logo, é uma tarefa difícil para ser alcançada em poucos meses ou anos e, na nossa visão, ela deve ser feita desde os primeiros anos de escolaridade. Os achados confirmaram os de Biryukov (2004), ressaltando a importância dessas habilidades e o uso das estratégias metacognitivas o que muito ajudou os alunos a resolverem os problemas, pois encontramos explicitamente as estratégias na resolução dos problemas resolvidos corretamente. A única estratégia que não apareceu explicitamente em nenhuma resolução foi *pensar em um problema menor*, apesar de ser muito utilizada na resolução dos problemas em sala de aula. Isso não significa que deva ser excluída, pois é uma estratégia importante em análise combinatória, porque diminuir os valores permite ao aluno se preocupar com a estrutura do problema.

A análise estatística apresentou uma melhora significativa na incidência das habilidades metacognitivas, o que sugere que o trabalho produziu um efeito positivo e que é possível desenvolver as habilidades metacognitivas, mesmo num curto prazo.

7.2 – PONTOS POSITIVOS

Escolhemos a questão de Permutação Circular para mostrar as várias resoluções que surgiram para o mesmo problema, pois iremos utilizá-las para os tópicos 8.2.3. Vale ressaltar que os outros problemas do pós-teste também apresentaram uma valorização do raciocínio combinatório e da criatividade.

7.2.1 - Muitos alunos apresentaram o raciocínio combinatório em vez da simples aplicação da fórmula.

Ao observar o exemplo abaixo, o aluno poderia fazer $C_{8,3}$, pois ele tem oito espaços para colocar 3 letras A's, mas ele utiliza um processo parecido com o que foi utilizado para apresentar a combinação, isto é, considerar os objetos como distintos, com 8 possibilidades para colocar a "primeira" letra A, 7 possibilidades para colocar a "segunda" letra A e 6 possibilidade para colocar a "terceira" letra A. Ao fazer isto, ele está contando cada anagrama 3! vezes e para chegar a solução correta ele deve dividir por 3!

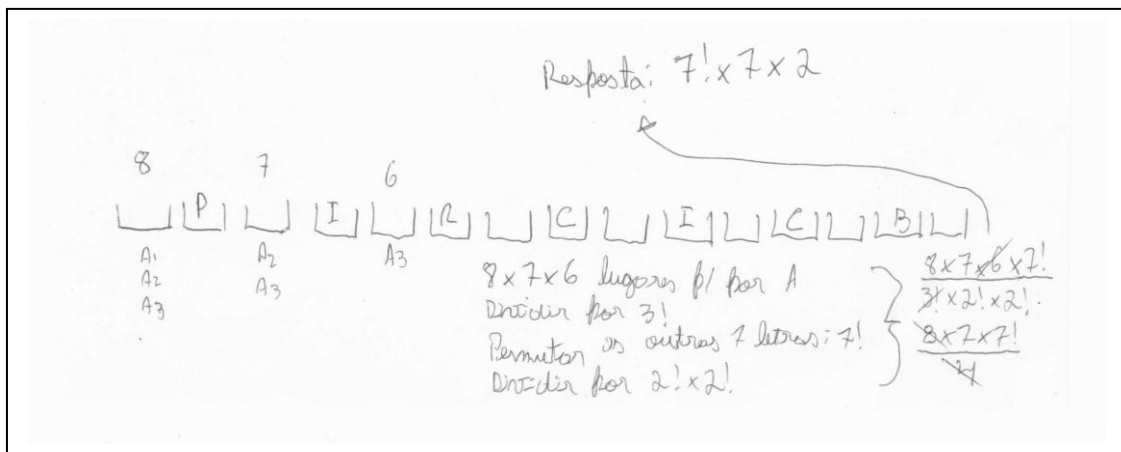


Figura 31

7.2.2 – Valorização da criatividade

Surgiram vários tipos de resolução para o mesmo problema o que sugere que a criatividade foi incentivada pelo trabalho. Podemos observar as várias resoluções apresentadas no problema de permutação circular que apresentaremos abaixo.

As várias formas de resolver o mesmo problema mostram que o trabalho produziu efeitos positivos, pois liberou a criatividade dos alunos, dando a possibilidade de fazer com que eles apresentassem uma solução própria, sem ter que imitar ou fazer uma solução parecida com a do professor.

7.2.3 – Permutação Circular


O problema de Permutação Circular foi resolvido de várias formas diferentes e teve um grande índice de acertos, o que nos sugere que pode tranquilamente ser ensinado no Ensino Médio e favorece e muito o raciocínio e a criatividade. Normalmente os livros do Ensino Médio não abordam este tópico.

Apresentaremos as resoluções apresentadas pelos alunos.

1ª) Nesta resolução, primeiro ele considera as três pessoas como sendo uma só e permuta circularmente as “oito” pessoas. Depois ele escolhe as duas meninas que ficarão ao lado do determinado menino. Ele observa, que A_1MA_2 é diferente de A_2MA_1 e multiplica por dois. Observe que ele primeiro escolhe e depois permuta as meninas, o que, de acordo com DUBOIS (1984), ele está relacionando Combinação com Arranjo.

Questão 2: De quantas maneiras distintas podemos dispor 5 meninos e 5 meninas numa roda de ciranda de modo que um determinado menino só fique ao lado de menina?

Qualquer



$P_c(8) = 7!$ — Entre os membros
 \times
 $C_{(5,2)} = \frac{5!}{2!3!}$ — Meninas para o "garanhão"
 \times
 2 — Meninas do "garanhão" varia a posição entre elas
 $=$
 $\frac{7! \cdot 2 \cdot 5!}{2!3!}$
 $=$
 $\frac{7! \cdot 5!}{3!} = R$

Figura 32

2ª) Esta prova apresentava sinais de que ele tinha apagado alguns registros, apesar da recomendação de não escrever a lápis, sugerindo que talvez ele tenha feito algumas tentativas antes de chegar a esta resolução. Observe que a sua resolução não precisa da fórmula de permutação circular ou qualquer outra fórmula.

lado de menina?

O_1

Escolhe-se a primeira menina, há apenas uma possibilidade de lugar para ficar.

A_1 1

Depois, a segunda menina, há duas possibilidades.

O_1 A_2 1.2

com a terceira, há três possibilidades

1.2.3,

com a quarta há 4 e com a quinta

$5!$

Agora, já escolhidas as meninas, colocam-se os meninos no lado, há 4 possibilidades:

O_1 A_1 A_2 $5! \cdot 4$
 A_5 A_4 A_3

com o próximo, haverá 5 possibilidades

O_1 A_1 A_2 $5! \cdot 4 \cdot 5$
 A_5 A_4 O_2 A_3

com o ~~quarto~~ quarto haverá 6 e com o quinto, 7

Assim há $5! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ manobras.

Figura 33

3ª) Esta resolução, apesar de apresentar um erro, revela um raciocínio interessante, pois o aluno começa a raciocinar como se fosse permutação linear e aloca o determinado menino, posteriormente aloca uma menina do lado esquerdo e depois uma menina do lado direito. Depois deve alocar as outras

peçoas nas outras posições, o que pode ser feito de 7! formas. Ao fazer isto, conta-se cada maneira desejada 10 vezes. Assim o aluno divide por 10. O erro cometido pelo aluno é que o determinado menino poderia ficar em qualquer uma das 10 posições e para cada posição ele teria o mesmo número de possibilidades. Logo, faltou ele multiplicar por 10.

$\frac{M(1)}{5} \frac{M(10)}{1} \frac{M(10)}{4} \frac{C}{7} \frac{C}{6} \frac{C}{5} \frac{C}{4} \frac{C}{3} \frac{C}{2} \frac{C}{1}$

$M(10) = \text{menina}$
 $M(10) = \text{menino}$
 $C = \text{qualquer criança}$

$\frac{7! \cdot 20}{10} = 2 \cdot 7!$

Figura 34

4ª) Nesta resolução o aluno permuta circularmente as 5 meninas e o determinado menino. Posteriormente ele aloca os meninos, observando que a cada menino alocado “abre-se” mais uma possibilidade para colocar o menino seguinte.

\triangleright menino "protido" (no'fica entre meninas) = O_1

para o 2º menino escolhido, temos 4 possibilidades.
 A cada menino adicionado, temos o n^o de possibilidades anterior + 1.
 logo, para o 3º menino temos 5 possibilidades.
 Para o 4º menino temos 6 possibilidades e para o 5º menino temos 7 possibilidades.

Maneiras p/ dispor as 10 crianças seguindo as restrições:

$(PC)_6$: possibilidades para cada menino

$(PC)_6 = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5! \cdot 4 \cdot 5 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) \cdot 4 \cdot 5 = 7! \cdot 20$

5 meninas + $O_1 \quad O_2 \quad O_3 \quad O_4 \quad O_5$

Figura 35

5ª) Nesta resolução, primeiro ele verifica de quantas formas pode-se colocar duas meninas ao lado do menino. Para isso, ele utiliza o Princípio Multiplicativo. Observe que a não apresentação da fórmula de Arranjo não prejudicou a resolução do problema, já que este pode ser resolvido também como $A_{5,2}$. Depois o aluno considera como sendo uma só pessoa e permuta circularmente as 8 pessoas. Observe que a parte circulada foi um erro que o

aluno cometeu e posteriormente corrigiu. Além disso, ele não utiliza diretamente a fórmula de Permutação Circular. Ele permuta linearmente as “oito” pessoas e utiliza a divisão para fazer a correção necessária.

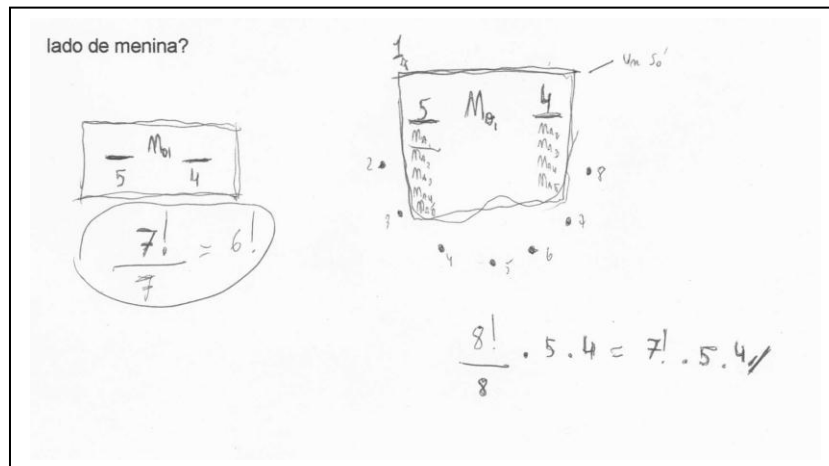


Figura 36

Colocar as duas meninas ao lado do menino poderia ser resolvido como Arranjo Simples de 5 elementos tomados dois a dois, quando a ordem é relevante, mas entendemos que a opção de não apresentar a fórmula de Arranjo foi benéfica, pois faz mais sentido para o aluno escrever 5×4 do que $\frac{5!}{3!}$, pois segundo Sabo (2010) “esta fórmula não revela, explicitamente, os dados e a questão do problema, como também não desenvolve o raciocínio combinatório” (pag.86).

Além dessas resoluções apresentadas, há a solução do aluno A, que entendemos como diferente desta, pois primeiro ele aloca as meninas em roda, posteriormente aloca o determinado menino e depois os outros meninos.

7.2.4 – A importância das habilidades Metacognitivas

Observamos que os alunos que apresentaram as habilidades metacognitivas obtiveram um resultado melhor, mostrando a importância do desenvolvimento dessas habilidades. Iremos exibir alguns dados que nos mostram essas habilidades segundo Schoenfeld (1987) e Polya (1995):

- Compreender o problema – considerar os aspectos relevantes.

modo que um determinado menino só fique ao

Não preciso fazer a combinação p/determinar o menino.

Figura 37

➤ Planejar a estratégia de solução –

• Contabilizar n° total
• Subtrair casos c/ A juntos.

Obs.: Estou julgando que não poderá haver 3 "A" juntos também.

Figura 38

Neste caso o aluno mostra explicitamente um planejamento, onde ele traça uma estratégia para resolver o problema.

➤ Acompanhar e controlar o processo de solução

Esta habilidade permite ao aluno verificar se a estratégia é a mais adequada e que possivelmente pode provocar uma mudança de direção.

Diferentemente do pré-teste, onde nenhum dos alunos utilizou o diagrama de árvore, alguns alunos resolveram a questão utilizando o diagrama de árvore de forma correta e muito produtiva, apesar de não considerar o número 2 como primo e considerar de forma equivocada o 1 como primo e não considerar o 0 como divisível por três. O aluno tentou resolver diretamente pelo Princípio Multiplicativo, mas chegou a um impasse e decidiu mudar de estratégia e utilizar a árvore de possibilidade.

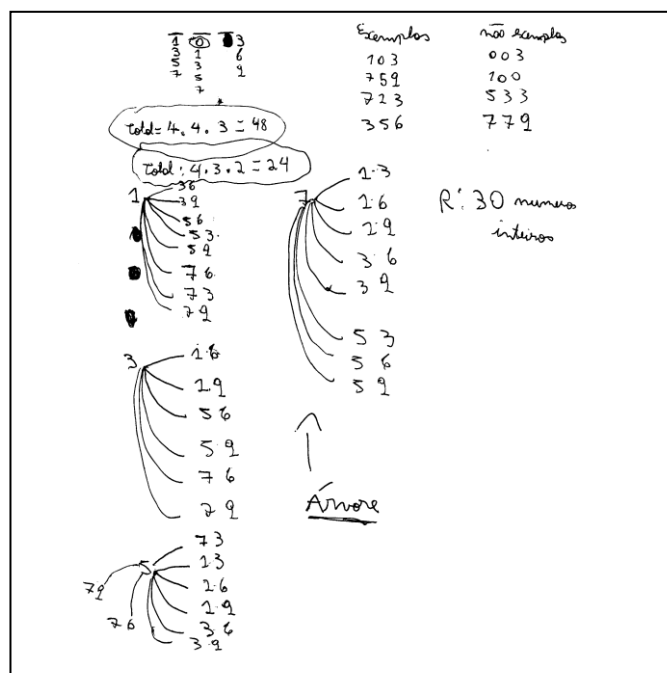


Figura 39

7.3 – LIMITAÇÕES

Esta pesquisa se restringiu a duas turmas do Ensino Médio. A amostra é muito pequena e além disso não foram feitas entrevistas.

Muitos alunos não apresentaram um desenvolvimento metacognitivo expressivo, o que é perfeitamente compreensível, pois normalmente os alunos são treinados desde os primeiros anos de escolaridade a escolher qual fórmula utilizar e ao chegar ao Ensino Médio é realmente difícil mudar esta atitude em alguns meses e até alguns anos.

Alguns alunos continuaram apegados à fórmula e percebemos que logo ao receber a prova, eles escreviam a única fórmula que tinha sido ensinada até o momento, a de combinação, e neste caso a fórmula de Combinação não era necessária para resolver o problema, levando possivelmente o aluno a errar a letra b.

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1)
a)

$$\frac{3}{3} \cdot \frac{4!}{4!} \cdot \frac{2}{2} = 3 \cdot 2 \cdot 4! = 6 \cdot 4!$$

b)

$$\frac{6!}{2! \cdot 4!}$$

$C_{6,2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!}$




Figura 40

Alguns pesquisadores (Batanero et al., 1997; Esteves, 2001) identificaram que um erro comum entre os estudantes é a confusão entre a fórmula de Arranjo e Combinação. Segundo eles, uma das causas pode ser que o papel da divisão não é explicitada e só consideram combinação quando a ordem não importa e arranjo quando a ordem importa.

7.4 – RECOMENDAÇÕES PARA A PRÁTICA DE ENSINO

Uma expectativa desta pesquisa foi fornecer algumas recomendações para o ensino de Análise Combinatória e o ensino de Matemática em geral. Entendemos que o papel do professor e a forma que ele apresenta o conteúdo e os problemas propostos afetam o comportamento dos alunos ao resolverem problemas. Seguem deste estudo algumas recomendações.

- Ênfase na resolução de problemas, resolvendo o mesmo problema de várias formas diferentes
- Adotar caminhos que não levarão diretamente a solução correta, mas que são importantes para o ensino
- Ênfase no papel da divisão quando ensina Combinação e o não uso da fórmula de Arranjo
- Usar questões metacognitivas

A terceira é específica para o ensino de Análise Combinatória, mas as outras são mais gerais e devem ser aplicadas aos outros tópicos de Matemática.

Desenvolveremos as recomendações abaixo:

7.4.1 - ÊNFASE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Devemos começar, sempre que possível com um problema relacionado ao conteúdo e explorar as sugestões dos alunos conduzindo os alunos ao que se deseja explicar. Devemos entender que a fórmula é a etapa final, a formalização de um conteúdo que se quer apresentar e antes de apresentá-la, devemos resolver vários problemas sem utilizá-la, priorizando o raciocínio combinatório. Devemos resolver o mesmo problema de várias formas diferentes, valorizando as várias formas de resolver o mesmo problema, incentivando a criatividade dos alunos.

7.4.2 – ADOPTAR CAMINHOS QUE NÃO LEVARÃO DIRETAMENTE À SOLUÇÃO

Este tópico poderia estar no desenvolvimento das habilidades metacognitivas, mas optamos por criar um tópico à parte para enfatizar a necessidade de revelar aos alunos estratégias que não nos levarão diretamente à solução, mas que são fundamentais para que o aluno compreenda a necessidade de dividir o problema em casos ou ter que negligenciar, a priori, alguma restrição e depois descontar o que foi contado a mais ou começar pelo que é mais restrito.

Com isso, estaremos mostrando aos alunos o que é fazer matemática, provocando possivelmente uma mudança na crença dos alunos, e revelando estratégias e caminhos que normalmente uma pessoa realiza ao resolver um problema.

7.4.3 – ÊNFASE NO PAPEL DA DIVISÃO

No seu estudo Batanero et al (BATANERO ET AL.,1997) identificaram que um erro comum era o uso da fórmula errada. Este erro continuou a aparecer de forma implícita. Devemos levar os alunos a perceberem que em alguns casos devemos dividir, mas fazendo com que eles realmente compreendam o porquê da divisão. Fazendo com que eles compreendam o que estão fazendo e não simplesmente decorem as fórmulas.

7.4.4 – USAR QUESTÕES METACOGNITIVAS

Biryukov (2004) ressalta a importância das habilidades metacognitivas na resolução de problemas de Análise Combinatória, o que foi corroborado pela nossa pesquisa. As pesquisas anteriores revelam que uma das maiores dificuldades dos alunos é compreender o enunciado do problema de Análise Combinatória (HADAR E HADASS, 1981). Algumas estratégias podem minimizar estas dificuldades, como a construção de exemplos e não-exemplos, tentar verificar se já resolveu algum problema parecido, pois é necessário fazer os alunos gastarem um tempo considerado em dar sentido ao problema, como os matemáticos.

Em nossa avaliação, este estudo revela que o planejamento das aulas de Análise Combinatória deve estar focado em atitudes que revelem habilidades metacognitivas, para que nossos alunos entendam que elas são necessárias. Entendemos ainda que essas habilidades devam ser desenvolvidas nas crianças ao iniciarem a sua vida escolar. Que eles possam lidar com verdadeiros problemas; que, antes de partir para a execução eles possam primeiro explorar os dados, a incógnita; que eles planejem; que possam verificar se já resolveram algum problema parecido mais simples; enfim que tenham uma atitude parecida com a do matemático ao resolver um problema e simplesmente não fiquem perguntando se é Arranjo ou Combinação.

7.5 – IDEIAS PARA PESQUISAS FUTURAS

Uma das nossas preocupações, depois da pesquisa, foi se a Análise Combinatória está sendo ensinada no ensino Fundamental da forma como é

orientada pelos PCN's, sem a utilização da fórmula com a ênfase no raciocínio combinatório. Além disso, devemos pensar de que forma podemos capacitar os nossos professores do Ensino Fundamental a trabalhar este conteúdo para que o aluno, ao chegar ao Ensino Médio, possa ter um aproveitamento melhor.

A análise combinatória enseja ainda muitas pesquisas profundas no campo da Teoria da Cognição em Educação Matemática. Este trabalho pretende dar uma contribuição inicial para maiores aprofundamentos nas estratégias metacognitivas no ensino desta disciplina tão temida tanto pelos alunos como pelos professores.

7.6- COMENTÁRIOS FINAIS

Frequentemente se tem a concepção de que um “bom professor” é aquele que explica quantas vezes for necessário, ou que explica melhor, ou aquele que tem mais conhecimento, ou que resolve qualquer problema rapidamente sem pensar, muitas vezes porque já conhece o problema. Na nossa concepção, um “bom professor” necessita ter o conhecimento do que se vai ensinar, mas ele deve primeiro saber escolher que problemas propor aos alunos, como conduzi-lo ao conhecimento e quais são os erros mais comuns. Em vez de responder a todas as perguntas que o aluno lhe fizer, ele deve “responder” com outra pergunta que irá provocar no aluno uma reflexão. Ele deve proporcionar condições para que os próprios alunos acedam ao conhecimento que se deseja veicular.

Segundo o exposto acima, a nossa dissertação vem ao encontro de uma necessidade de mudança no ensino de Análise Combinatória. Fazer com que os alunos sejam investigadores, pessoas questionadoras, inclusive dos professores, pessoas pensantes e não reprodutoras.

Normalmente os erros dos alunos, as irrelevâncias ou as sugestões diferentes pensadas pelo professor são consideradas como prejudiciais, pois o professor quer obter a resposta correta no menor tempo possível, entendendo que caminhos que não levarão diretamente a resposta correta não têm nenhuma utilidade.

Ao fazer isso, o professor reprime a criatividade, a iniciativa do aluno fazendo com que o aluno fique em uma área segura que é a pura aplicação da fórmula. Concordamos com o professor Morgado que ao analisar uma resposta errada pode-se aprender muito mais do que fazer a forma correta.

Devemos enfatizar a compreensão, o envolvimento do aluno e a aprendizagem por descoberta.

O objetivo é desenvolver o espírito criativo, o raciocínio lógico e o modo de pensar matemático. Devemos propor um problema que venha exigir reflexão, esforço cognitivo e uso de estratégias para buscar a solução.

Ao comparar diferentes caminhos para obter a solução, estamos valorizando o processo de resolução em vez da resposta correta.

O objetivo é desencadear conceitos e procedimentos por meio de situações-problema motivadores. O ponto de partida não é a definição, mas o problema. Os conceitos, ideias e métodos devem ser abordados mediante a exploração dos problemas. Procuramos fazer com que o aluno utilize o que aprendeu para resolver outros problemas.

Devemos valorizar os pensamentos e questionamentos dos alunos fazendo com que eles expressem suas ideias explorando a oralidade em Matemática. Devemos desenvolver o pensamento produtivo, pois ele produz novas e diferentes soluções, inventando, buscando e usando novos métodos acabando com a ideia de que o aluno tem que simplesmente reproduzir o que o professor fez.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATANERO, C., GODINO, J. D. e NAVARRO-PELAYO, V. (1994). **Razonamiento combinatorio**. Madrid: Síntesis.
- BATANERO, C. e NAVARRO-PELAYO, V. (1996). **Razonamiento combinatorio en alumnos de Bachillerato**. *Educación Matemática*.
- BATANERO, C., NAVARRO-PELAYO, C. e GODINO, J. D. (1997a) **Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils**. *Educational Studies in Mathematics*.32, 181-199.
- BATANERO, C., NAVARRO-PELAYO, C. e GODINO, J. D. (1997b) **Combinatorial Reasoning and its Assessment**. En I. Gal Y Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239- 252). Amsterdam: International Statistical Institute. E I.O.S. Press.
- BIRYUKOV, P. (2004). **Metacognitive aspects of solving combinatorics problems**. *International journal for Mathematics Teaching and learning*. Retrieved September 12, 2005.
- BORUCHOVITCH, E. (1999). **Estratégias de aprendizagem e desempenho escolar: considerações para a prática educacional**. *Psicol. Reflex. Crit.* [online]. 1999, vol.12, n.2, pp. 361-376. ISSN 0102-7972.
- BRASIL (1998). **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.
- BORBA, R. E. S. R.; ROCHA, C. A.; MARTINS, G. V; LIMA, R. C. L. (2009). **O Que Dizem Estudos Recentes Sobre o Raciocínio Combinatório**. X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 02 a 05 de junho de 2009, Ijuí/RS
- CHAHON, M. (2003). **A metacognição e a resolução de problemas aritméticos verbais em sala de aula: pesquisa e intervenção**. 2003. 127f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Psicologia, Rio de Janeiro.

- COSTA, C. A da (2003); **As concepções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental.** São Paulo, 2003, 151f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.
- DANTE, L. R. (2005). **MATEMÁTICA**, volume único: livro do professor/ 1a edição. São Paulo: Ática, 2005.
- DUBOIS, J. G. (1984). **Une Systématique des configurations combinatoires simples.** *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 37-57.
- ESTEVES, I (2001). **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental.** São Paulo, 2001, 203f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- FISCHBEIN, E. e GAZIT, A. (1988). **The Combinatorial Solving Capacity in Children and Adolescents.** *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 5, pp. 193-198.
- FLAVELL, J. H.; MILLER, P. H. e MILLER, S. A. (1999) **Desenvolvimento Metacognitivo.** 3. ed. Porto Alegre: Artmed. 285 p.
- GAROFALO, J.; LESTER, F. (1985). **Metacognition, Cognitive Monitoring and Mathematical Performance.** *Journal for Research in Mathematics Education*, v.16, n. 3, p. 163-176.
- HADAR, N. e HADASS, R. (1981). **The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls.** *Educational Studies in Mathematics*, v. 12, pp. 435-443.
- HARIKI, S. (1996). **Conectar problemas: uma nova estratégia de resolução de problemas combinatórios.** *Educação e Matemática*, 37, 29-31.
- JALLES, C.M.C.R. (1997). **O efeito de instruções sobre estratégias metacognitivas de crianças pré-escolares em soluções de problema geométrico.** *Dissertação de mestrado*, Faculdade de Educação, Departamento de Psicologia Educacional, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP.

- KAPUR, J. N. (1970). **Combinatorial analysis and school mathematics.** Educational Studies in Mathematics, 3(1), 111-127.
- LESTER, F. K. (1988). **O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática?** A situação nos Estados Unidos, Indiana University, Bloomington, Estados Unidos da América
- LIMA, E. L ; CARVALHO, P. C. P. ; WAGNER, E. ; MORGADO, A. C. (2005). **Temas e Problemas.** Rio de Janeiro, SBM.
- LIMA, E.L; CARVALHO, P. C. P. ; WAGNER, E. ; MORGADO, A. C. (2001). **Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio.** Rio de Janeiro: IMPA, 2001.467p.
- LIMA, E.L; CARVALHO, P. C. P. ; WAGNER, E. ; MORGADO, A. C. (2002). **Matemática do Ensino Médio.** Rio de Janeiro, SBM. (coleção do professor de Matemática , v.2)
- MAQSUD. M (1998). **Effects of metacognitive instruction on mathematics achievement and attitude towards mathematics of low mathematics achievers..** *Educational Research*, v. 40, número 2.
- MORGADO, A.; PITOMBEIRA J. C.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. (1991). **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: SBM.
- NAVARRO-PELAYO, C. BATANERO, C., e GODINO, J. D.(1996) **Razonamiento Combinatório en Alumnos de Secundária,** *Educación Matemática*, 8(1), 26-39.
- NEVES, D. A. de B. (2007): **Meta-aprendizagem e Ciência da Informação: uma reflexão sobre o ato de aprender a aprender.**
- OLADUNNI, M. O. (1998). **An experimental study on the effectiveness of metacognitive and heuristic problem solving techniques on computational performance of students in mathematics.** *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, v. 29,nº pp. 867-874.
- PIAGET, J. & INHELDER, B. (s/d). **A origem da ideia do acaso na criança.** Rio de Janeiro: Editora Record. (Tradução portuguesa do original de 1951.)

- PINHEIRO, C. A. M. (2008); **O Ensino de Análise Combinatória a partir de Situações- Problema**. Pará, 2008, 164f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Estado do Pará.
- PINHEIRO, C.A.M.; & SÁ, P.F. (2007); **O ensino de análise combinatória: a prática pedagógica predominante segundo os docentes**. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, 2007.
- POLYA, G. A. (1995). **Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciências.
- RIBEIRO, C. (2003). **Metacognição: um apoio ao processo de aprendizagem**. *Psicologia Reflexão e Crítica*, Porto Alegre, v.16, n.1, p. 109-116, 2003.
- ROA, R., BATANERO, C., GODINO, J. D. e CAÑIZARES, M. J. (1996). **Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada**. *Epsilon*, 36, 433-446.
- SABO, R. D. (2010). **Saberes docentes: A Análise Combinatória no Ensino Médio**. São Paulo, 2010, 210f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- SCHOENFELD, A. H. (1987). **What's all the fuss about metacognition?** In *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- SCHOENFELD, A. H. (1992). **Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics**. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
- SEMINÉRIO, F. L. P. (2002). **Inteligência como constructo e como processo: sumário das pesquisas ao longo do tempo**. *Paidéia* (Ribeirão Preto) vol.12, nº 23.
- SRIRAMAN, B. e ENGLISH, L. (2004). **Combinatorial Mathematics: Research into Practice**. *Mathematics Teacher*, 98(3), 182-191.
- VIEIRA, E. (2001). **Representação mental: as dificuldades na atividade cognitiva e metacognitiva na resolução de problemas matemáticos**. *Psicologia Reflexiva e Crítica*, v. 14, n. 2.

Apêndice:

1a	2a	3a	4a	5a	total	1a	2a	3a2	4a	5a	total 3
3	1	3	2	3	12	3	3	3	2	3	14
1	0	3	2	1	7	3	2	2	1	2	10
3	2	2	2	0	9	2	3	1	2	3	11
3	1	1	2	3	10	2	3	2	1	2	10
3	0	3	1	1	8	3	3	3	3	3	15
0	0	1	0	1	2	2	1	1	2	2	8
0	0	0	0	2	2	1	3	1	1	1	7
5	1	3	1	1	11	3	2	2	2	1	10
1	0	3	0	1	5	1	0	2	3	2	8
3	5	4	2	3	17	3	4	1	2	4	14
0	1	2	1	3	7	2	0	1	2	1	6
3	2	2	1	2	10	3	3	2	2	2	12
2	1	0	2	1	6	2	2	1	2	2	9
1	1	2	0	1	5	1	1	2	1	0	5
2	1	2	2	0	7	2	2	1	2	2	9
0	1	2	1	2	6	0	3	1	0	2	6
3	2	3	1	0	9	3	3	2	2	2	12
5	5	5	5	5	25	5	5	5	5	5	25
3	2	2	0	1	8	2	1	1	1	1	6
3	1	2	2	0	8	3	2	1	1	1	8
0	1	3	1	2	7	3	1	1	2	2	9
3	2	3	2	2	12	3	4	1	1	2	11
5	4	3	3	3	18	5	5	4	3	3	20
3	2	4	3	2	14	2	4	3	3	2	14
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	2
0	1	2	1	1	5	1	2	0	1	0	4
3	1	1	1	3	9	1	4	1	0	2	8
0	1	2	1	1	5	4	1	1	0	2	8
2	1	3	2	4	10	3	3	1	2	2	11
4	2	2	1	2	11	3	5	2	4	2	16
4	2	4	2	2	14	4	3	3	2	3	15
0	1	2	1	1	5	2	2	1	1	1	7
4	4	4	3	3	18	4	4	3	3	2	16
0	0	3	1	2	6	1	3	0	2	1	7

Tabela com o índice de incidências de habilidades metacognitivas.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – IM–UFRJ
MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CARTA DE AUTORIZAÇÃO DE REALIZAÇÃO DE PESQUISA

Eu, _____, aluno do CEFET- Nova Iguaçu, autorizo o acadêmico Edson Akira Yahata, do Curso de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, a realizar sua pesquisa coletando dados e imagens e, posteriormente, utilizar (análise, divulgação e publicação) os dados coletados respeitando ditames éticos de pesquisa. Estou ciente, de que as imagens não serão divulgadas, e que estas, só serão feitas para confirmação e coleta de dados.

Rio de Janeiro, ____ de agosto de 2011.

assinatura do aluno