UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Marcelo dos Reis Lopes

MATRIZES: HISTÓRIA DE UM CONTEÚDO ESCOLAR

Rio de Janeiro
Maio/2012

Marcelo dos Reis Lopes

MATRIZES: HISTÓRIA DE UM CONTEÚDO ESCOLAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Wagner Rodrigues Valente

Rio de Janeiro
Maio / 2012

MATRIZES: HISTÓRIA DE UM CONTEÚDO ESCOLAR

Marcelo dos Reis Lopes

Orientador: Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente (presidente) – UNIFESP

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira de Carvalho – UFRJ

Maria Cristina A. de Oliveira

Profª. Dra. Maria Cristina Araújo de Oliveira – UFJF

Rio de Janeiro
Maio / 2012

Lopes, Marcelo dos Reis.

Matrizes: história de um conteúdo escolar / Marcelo dos Reis Lopes. – Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2012.

xiii, 101f.: il.; 30 cm.

Orientador: Wagner Rodrigues Valente

Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, 2012.

Referências bibliográficas: f. 98-101.

1. História da educação matemática. 2. Matrizes. 3. Livro didático. I. Valente, Wagner Rodrigues. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática. III. Título.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Wagner Valente pela condução sábia, paciente e serena na orientação do presente trabalho.

Aos professores Maria Cristina Araújo de Oliveira e João Bosco Pitombeira que contribuíram com valiosas observações no exame de qualificação e na defesa da dissertação.

Aos professores Victor Giraldo e Nei Carlos Rocha pela compreensão num período em que vivenciei sérios problemas de ordem familiar.

A todos os professores do programa que ajudaram no meu crescimento intelectual em aulas ou em outros ambientes.

Aos funcionários da secretaria pelos bons serviços prestados.

Aos meus colegas de curso com os quais compartilhei momentos proveitosos e divertidos de estudos em grupo: Edson Akira, Leandro Nascimento, Elcio Pereira, Luiz Marcos, Vilmar Fonseca e, de forma especial, ao meu colega de trabalho e amigo Wellerson Quintaneiro que apresentou reflexões pertinentes a minha dissertação.

Aos meus pais, pela dedicação e apoio aos meus estudos.

A minha esposa Gizele, que sempre me ajudou com atenção, calma, palavras e lanches em alguns momentos de desespero nesta difícil caminhada.

Ao meu filho Saulo que, ainda no ventre de sua mãe, me ajudou a ter mais concentração e motivação para concluir o trabalho.

A Deus, que me deu a oportunidade de obter mais uma conquista.

*“A observação imediata de si está
longe de ser suficiente para
aprender a se conhecer:
precisamos de história, pois o
passado continua a correr em nós
em cem ondas; nós próprios nada
somos senão aquilo que sentimos
dessa correnteza a cada instante.
Até mesmo aqui, se quisermos
entrar no rio de nosso ser
aparentemente mais próprio e
pessoal, vale a proposição de
Heráclito: não se entra duas vezes
no mesmo rio.”*

Friedrich Nietzsche

RESUMO

O objetivo desta pesquisa consiste em desenvolver uma investigação histórica de como o tópico *matrizes* foi introduzido no ensino secundário brasileiro, a partir da análise de livros didáticos inseridos no período 1930-1980 juntamente com o estudo do contexto histórico educacional em que tais obras estavam compreendidas. Para tanto, ao tratar os livros didáticos como fonte de pesquisa, foram utilizados como apoio teórico os escritos de André Chervel sobre a história das disciplinas escolares e os conceitos relacionados às funções do livro didático introduzidos por Alain Choppin. A construção da história do tópico matrizes na escola é realizada mediante a apropriação tanto dos instrumentos fundamentados por historiadores na elaboração de fatos históricos, quanto dos conceitos de História Cultural elaborado por Roger Chartier e de *história cultural da educação matemática* proposto pelo pesquisador Wagner Valente. A pesquisa constatou que foi atribuída pouca importância ao conteúdo matrizes no ensino secundário no período anterior à introdução dos ideais do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil. Tal argumento pôde ser verificado na análise dos conteúdos dos livros didáticos inseridos no período de 1930 até finais dos anos 1950, ao observar que a abordagem das matrizes incluída nos capítulos que tratavam dos *determinantes* e dos *sistemas lineares* se restringia a breves definições (matriz, matriz quadrada, matriz do sistema). A partir da difusão dos princípios do MMM, que se fundamentavam na introdução de conteúdos apoiados nos conceitos de estruturas matemáticas (anel, corpo, grupo etc) e se justificavam por contribuir com os avanços científicos e tecnológicos, as matrizes se apresentaram com status de conteúdo munido destas características modernas. Desta forma, os livros didáticos que se alinhavam com as propostas modernizadoras, atribuíram às matrizes um capítulo à parte para o desenvolvimento de tal teoria. Em suma, o ensino de matrizes na escola se justificava por trazer consigo as ideias de estrutura, além de se constituir numa ferramenta que auxiliava tanto a resolução dos sistemas lineares quanto a aplicação em outras áreas do conhecimento. Assim, o MMM fundamentou o ensino de matemática em bases diferentes ao que foi apresentado até então, conferindo às matrizes uma posição relevante no ensino e, em consequência, nos livros didáticos.

Palavras-chave: matrizes; livro didático; História; história da educação matemática; reformas educacionais.

ABSTRACT

The objective of this research is to develop a historical investigation of how the topic matrices was inducted into secondary education in Brazil and, based on the analysis of textbooks entered into the period 1930-1980 along with the study of educational historical context in which these works were understood. To do so, to treat the textbooks as a source of research, were used as theoretical support the works of André Chervel about the history of school subjects and concepts related to the functions of the textbook introduced by Alain Choppin. The construction of the history of the topic matrices in schools is performed through the appropriation of both instruments by historians based on the development of historical facts, and concepts of Cultural History, prepared by Roger Chartier and cultural history of mathematics education proposed by researcher Wagner Valente. The survey found that little importance was attributed to the matrices in secondary education in the period before the introduction of the ideals of the Modern Mathematics Movement (MMM) in Brazil. This argument could be verified in the analysis of the contents of the textbooks included in the period from 1930 until the end of the years 1950, noting that the approach of the matrices included in the chapters that dealt with the determinants and linear systems was restricted to brief definitions (matrix, matrix square, matrix of the system). From the dissemination of the principles of the MMM, which were based on the introduction of content supported the concepts of mathematical structures (ring, field, group, etc.) and were justified by contributing to the scientific and technological advances, the matrices were presented with the status of content equipped with these modern features. Thus, the textbooks that are aligned with the modernizing proposals, attributed to the matrices a separate chapter for the development of such a theory. In short, the teaching of matrices in the school was justified by bring the ideas of structure, besides from being a tool that helped both the resolution of linear systems and application in other areas of knowledge. Thus, the MMM has founded the teaching of mathematics in different bases to what has been presented so far, assigning to the matrices a relevant position in education and, consequently, in the textbooks.

Key-words: matrices; textbook; History; history of mathematics education; educational reforms.

Lista de figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

Tópicos de matemática do Ensino Médio são alvos de questionamentos no que diz respeito à sua abordagem, aplicação e até mesmo quanto ao sentido do seu ensino. Essa discussão ocorre tanto no meio escolar, entre docentes, quanto nos debates sobre o ensino de matemática nos cursos de formação/aperfeiçoamento de professores.

Dentre os assuntos que estão nos programas escolares e que motivam as discussões mencionadas acima, podemos citar o tópico "matrizes". As várias perguntas sobre o sentido da introdução de "matrizes" no ensino - bem como outros temas da matemática escolar - fizeram parte do meu cotidiano enquanto professor e em minha experiência acadêmica. Assim, enquanto aluno do curso de "Especialização em ensino de matemática", realizado no período 2006 – 2007, na Universidade Federal do Rio de Janeiro, apresentei um trabalho de monografia com o título "Uma proposta de integração dos conteúdos de matrizes e vetores no estudo dos números complexos". Neste trabalho, procurei fornecer caminhos mais interessantes e/ou ricos no âmbito pedagógico, na abordagem dos números complexos no Ensino Médio, tendo as matrizes como uma das ferramentas matemáticas que auxiliavam o desenvolvimento daquela proposta.

Enquanto aluno do Programa de Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ, pude conhecer o professor Doutor Wagner Rodrigues Valente, quando este ministrou a palestra "Quem somos nós, professores de matemática?", apresentando uma linha de pesquisa que até então eu não tinha um conhecimento mais detalhado: a investigação em história da educação matemática.

A partir de então, através de sua orientação acadêmica, voltada à realização de uma dissertação nesta linha de pesquisa, pude compreender mais apuradamente o caráter do trabalho de investigação em história da educação matemática, que aponta para a adoção de uma metodologia de pesquisa que privilegia a elaboração de fatos históricos ligados ao ensino de matemática, com a análise das fontes associadas ao objeto de investigação.

Os materiais que subsidiam a pesquisa em história da educação matemática consistem em diversos documentos escolares, tais como livros didáticos, caderno de alunos, apostilas, provas, decretos governamentais, legislação educacional etc.

Assim, tomando como referências tanto os questionamentos inicialmente descritos, relacionados aos objetivos da abordagem de determinados tópicos de matemática na escola, quanto ao interesse despertado na pesquisa em história da educação matemática, a dissertação aqui apresentada tem por objetivo o estudo do conteúdo "matrizes" nos livros didáticos de matemática editados no período 1930 a 1980. Pretende-se dar resposta às seguintes questões: como foram introduzidas as matrizes na matemática escolar para o ensino colegial? Que mudanças ocorreram na abordagem de tal tópico no período?

É importante ressaltar que a pesquisa é de natureza histórica. Inclui-se no que é possível chamar de história da educação matemática. Assim, cabe repor a interrogação condutora do trabalho nos seguintes termos: como é possível historicamente explicar a presença do conteúdo de matrizes na matemática escolar dos anos finais do Ensino Secundário?

Dentro da temática de interrogar os conteúdos presentes na matemática escolar, o problema específico de investigação foca a introdução de matrizes na matemática escolar dos anos finais do que antigamente denominava-se Ensino Secundário. Este grau de escolaridade, depois de diferentes reformas educacionais, ocorridas desde a década de 1930 – como se verá no segundo capítulo – chega a nossos dias como Ensino Médio. Assim, a pesquisa elege como questão de fundo: que história tem o tópico *matrizes* na matemática escolar do período 1930-1980?

Para realizar a investigação, de modo a responder à pergunta, utilizaremos como fontes essenciais para a pesquisa, os livros didáticos. Assim, buscaremos num conjunto significativo de obras didáticas, editadas no período de 1930 a 1980, elementos que possam ajudar-nos a responder à questão. Com estas obras selecionadas, realizaremos uma análise dos aspectos que nortearam a introdução deste conteúdo no Ensino Secundário, através de uma base teórico-metodológica que consideramos apropriada para o trabalho da investigação.

O tema matrizes, em nosso levantamento bibliográfico, foi tratado em dois estudos anteriores. O primeiro deles, no ano de 2009, refere-se à dissertação de mestrado de Késia Caroline Ramires Neves intitulada “Um Exemplo de Transposição Didática: o caso das Matrizes”. Como o próprio título esclarece, trata-se de estudo de cunho didático, ancorado nos estudos que tomam o conceito de “transposição didática” como categoria fundamental de análise para a compreensão de como se organiza o saber escolar. Outro estudo sobre o tema “matrizes”, realizado em 2010, consta do relatório de estudo de iniciação científica de Tatiane Tais Pereira da Silva, com o título de “Matrizes e suas cercanias: um estudo histórico a partir de livros didáticos de matemática”. Neste caso, o trabalho orientou-se pela perspectiva teórica denominada *hermenêutica da profundidade*, apesar de destacar, desde o título, tratar-se de estudo histórico. Ambos os trabalhos, por certo, dão contribuição ao estudo da presença do conteúdo matrizes nos programas escolares. De outra parte, afastam-se da perspectiva que escolhemos para abordar tal conteúdo neste presente estudo. Nossa intenção aponta para o uso de ferramental teórico-metodológico utilizado pelos historiadores. Assim, pretende-se que o estudo do tema matrizes não seja tópico, isto é, há necessidade de construção dos cenários e contextos da educação brasileira e internacional de modo a que possa compreender as reorganizações da disciplina escolar matemática. E, dizendo de modo mais enfático: matrizes ou qualquer outro conteúdo matemático que é ensinado na escola, não se descola da produção histórica das disciplinas escolares.

Assim, uma das referências teórico-metodológicas de apoio à pesquisa, que se utiliza dos livros didáticos como fontes privilegiadas no desenvolvimento da investigação, é o estudo do historiador André Chervel "História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa". Em seu trabalho, Chervel destaca, entre outros aspectos, a importância do livro didático na constituição e estabelecimento de uma disciplina escolar. Um conjunto de livros didáticos de determinado período, que possuem características semelhantes em seu conteúdo e apresentação, sintetizam os modelos predominantes da organização do ensino da disciplina à época. A partir de então, algumas questões surgem no corpo do trabalho, tais como: quais os fatores que implicam na mudança da apresentação de alguns tópicos matemáticos nos livros didáticos? Porque alguns conteúdos são importantes em determinado período e em outros são excluídos?

Outro texto que constitui a base teórico-metodológica desta pesquisa é do pesquisador em livros didáticos Alain Choppin. No trabalho "História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte", Choppin destaca as múltiplas funções do livro didático: *referencial, instrumental, ideológica e cultural,* e *documental*. O entendimento destas funções auxilia numa compreensão do papel e relevância do livro didático no meio escolar e acadêmico, ao introduzir valores, metodologias de ensino. Assim, o livro didático tem relação direta com a determinação de programas e se constituem em fontes relevantes de pesquisa nas investigações no campo da História da Educação.

As produções na área de história da educação matemática da autoria do pesquisador Wagner Rodrigues Valente também nortearão os rumos deste trabalho. Nos textos que tratam dos aspectos metodológicos para a pesquisa em história da educação matemática, é discutida a utilização de uma metodologia de pesquisa histórica para as investigações neste campo do conhecimento. Neste sentido, segundo o pesquisador, cabe a elaboração de uma “história cultural da educação matemática” vinculada ao conceito de *História cultural* introduzido pelo historiador francês Roger Chartier.

Em momento posterior desta pesquisa, é apresentado um breve panorama histórico-educacional indicando como foi organizada a matemática escolar das séries finais do Ensino Secundário desde os finais dos anos 1930, passando pelas Reformas Campos e Capanema, bem como as portarias dos anos 1950, até chegarmos ao período de disseminação dos ideais da Matemática Moderna no cotidiano escolar.

Segue-se à etapa anterior, uma análise histórica de como o tópico “matrizes” foi inserido na matemática escolar a partir da apreciação das fontes de pesquisa privilegiada por este estudo: os livros didáticos.

Assim, em posse dos livros didáticos selecionados de acordo com a sua inserção nos diferentes períodos educacionais, juntamente com textos que tratam do uso desses documentos para a escrita da história da educação matemática, torna-se possível observar as transformações ocorridas na abordagem das matrizes na matemática escolar, bem como as motivações que impulsionaram sua inserção nos programas de matemática para o antigamente denominado Ensino Secundário.

Capítulo 1

ESCREVER HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA *HISTORICAMENTE*

O presente trabalho está inserido no âmbito da pesquisa em história da educação matemática e consideramos oportuno em um primeiro momento observar as diversas formas de abordagem que ocupam este campo de investigação.

Atualmente, as pesquisas em história da educação matemática apresentam tendências distintas no que diz respeito à sua escrita e metodologia. Sobre estas diferentes formas de acercar o tema, o pesquisador Wagner Valente afirma:

> (...) os diversos modos existentes que tratam da história da educação matemática distinguem-se, ao que tudo indica, pelo *lugar* ocupado pelos pesquisadores sobre o assunto. Há aqueles, por exemplo, que se localizam no âmbito da História da Matemática. Existem os que se situam *strictu senso* no âmbito dos estudos sobre Didática da Matemática. Por fim, os que consideram que história da educação matemática é um tema pertencente à história da educação, que por sua vez constitui um dos temas da história. (VALENTE, 2009, p. 9)

As pesquisas que investigam a história da educação matemática que se localizam nos domínios da *História da Matemática*, apresentam em geral, textos que incluem as biografias de matemáticos renomados e suas contribuições ao saber científico, descolados dos contextos a que tais conhecimentos estavam inseridos. Esta concepção, que separa a Matemática de seus determinantes externos é, talvez, resultante da hegemonia das ideias estruturalistas[1] que estiveram presentes no século passado, mais precisamente a partir da década de 1950.

Em geral, os trabalhos científicos de enfoque histórico, direcionados à pesquisa da Matemática escolar, imbuídos dessa concepção estruturalista, - que apresenta a Matemática sem ligação com a realidade, e independente no seu discurso - se referenciam em obras de autores muito conhecidos na área de História da Matemática

[1]Em seu livro *La pensée mathématique contenporaine*, Frédéric Patras analisa a influência do estruturalismo na produção matemática em meados do século XX: o *estruturalismo* foi uma corrente de pensamento dominante e referência epistemológica para a produção matemática que privilegiava sistematicamente a arquitetura lógica, as soluções globais e o mais alto grau de generalidade, negligenciando as particularidades de todas as ordens, bem como as teorias incompletas. O ensino da Matemática procurou seguir esses mesmos valores comprometendo, assim, a ideia de que o pensamento matemático é um espaço de liberdade e criatividade. (VALENTE, 2005)
Além disso, "o estruturalismo matemático propagou a ideia de que o discurso filosófico é algo estranho ao pensamento científico, (...). Criou-se, assim, sob o manto estruturalista, a ilusão de autonomia do discurso matemático" (VALENTE, 2005, p.25)

como Carl Boyer e Howard Eves. Essas obras revelam-se como referências e, ainda, têm presença usual nas ementas dos cursos de formação de professores, em boa parte das instituições de ensino superior. Essa discussão é apresentada pelo pesquisador Wagner Valente:

> Pensada como disciplina para a formação de professores de Matemática, a História da Matemática assumiu o caráter de estabilizar o passado da produção matemática a partir, sobretudo, de seus manuais de ensino. Essa é uma característica dos manuais citados anteriormente. Construídos a partir da própria Matemática, os manuais pretendem ensiná-la aos alunos, transformando-se em livros didáticos de Matemática com informações históricas. (...) Assim fazendo, incorporam uma concepção de História da Matemática como ingrediente formativo, como elemento para o aprendizado de uma Matemática edificante, evolutiva, progressiva - sem história, ao final de contas. (VALENTE, 2003, p. 9)

Já as investigações em história da educação matemática, que se encontram no âmbito da *Didática da Matemática*, buscam elementos no conceito de *transposição didática*[2] - criado por Yves Chevallard – no intuito de apresentar como os conceitos matemáticos foram transpostos na forma de saber científico para o saber escolar. O lugar da história neste contexto se resume a observar de que forma as transposições se apresentaram no tempo e como deram significados aos conteúdos escolares.

De acordo com esta metodologia, a história não se apresenta como uma ferramenta problematizadora, mas sim à disposição da Didática no auxílio da construção dos objetos de estudo deste campo. Contrapondo-se a essa concepção, o pesquisador Wagner Valente sugere que a história da educação matemática seja construída historicamente, longe dos imperativos didáticos:

> Noutras palavras, a sujeição às questões didáticas tem balizado um tipo de produção acadêmica que pensa a história como ingrediente importante do processo de ensino-aprendizagem da matemática. Desse modo, a história é vista como algo pronto para ser utilizada didaticamente, não problemática, onde os objetos de pesquisa a serem construídos estão no campo didático. Tais trabalhos, verdadeiramente, não se inscrevem no âmbito da produção histórica sobre o ensino de matemática. (VALENTE, 2007, p. 36)

[2] "Esse conceito foi elaborado por Chevallard para problematizar e destacar a necessidade de transformar (transpor) os conhecimentos matemáticos histórica e cientificamente sistematizados em conteúdos de saber escolar situados, contextualizados e relevantes para os alunos" (FIORENTINI, 2006, p. 48)

Assim, o presente trabalho se apoiará numa proposta de construção de uma história do ensino de matemática construída *historicamente*, balizando-se em pesquisas que se situam no âmbito da *história da educação*. Neste sentido, caberá ao historiador da educação matemática tomar posse dos instrumentos dos historiadores para a elaboração de trabalhos científicos:

> Esse posicionamento, desde logo, implica na necessidade de apropriação e uso do ferramental teórico-metodológico elaborado por historiadores para escrita da história. Isso significa considerar que o aparato conceitual utilizado pelas clássicas pesquisas da História da Matemática, bem como os aportes levados em conta pela Didática da Matemática, dentro do estudo dos processos de ensino e aprendizagem da disciplina no tempo presente, não dão conta de tratar adequadamente o estudo do passado da educação matemática, seja ele o mais longínquo ou próximo de nossos dias. (VALENTE, 2009, p. 11)

A partir de então, nos cercaremos dos teóricos utilizados atualmente nas produções deste campo de conhecimento – a História –. Dentre eles, citamos Michel De Certeau, Roger Chartier e Antoine Prost.

Nos trabalhos direcionados à reflexão sobre a escrita da História, De Certeau nos remete a considerar a história como uma *produção*. Utilizando esse autor, Valente sintetiza:

> Quando se ultrapassa a ideia de que a história não é uma cópia do que ocorreu no passado, mas sim uma construção do historiador, a partir de vestígios que esse passado deixou no presente, passa-se a tratar a história como uma *produção*. Será ofício do historiador produzir fatos históricos apresentando-os sob a forma de uma narrativa. (VALENTE, 2009, p.14)

Segundo o historiador Antoine Prost[3], a elaboração de fatos históricos é o ofício do pesquisador em história. No entanto, para que ocorra esta criação, é necessário efetuar uma análise das marcas do passado observadas no presente:

> Não existem fatos históricos por natureza. Eles são produzidos pelos historiadores a partir de seu trabalho com as fontes, com os documentos do passado, que se quer explicar a partir de respostas às questões previamente elaboradas. Assim, não há fontes sem as questões do historiador. Será ele que irá erigir os

[3]Professor emérito da Universidade de Paris 1, ministrou um curso de história na Sorbonne que mais tarde foi transformado no livro *Douze leçons sur l'histoire*, base para o trabalho do professor Wagner Valente, que compilou as ideias principais difundidas por Prost, no artigo "História da educação matemática: interrogações metodológicas". (VALENTE, 2007)

> traços deixados pelo passado em documentos para a história, em substância para a construção de seus fatos. Há, dentro dessa perspectiva, um primado da questão, da interrogação sobre o documento. (PROST *apud* VALENTE, 2007, p. 32)

Assim, ao discorrer sobre a história como uma *produção* do historiador, observando a construção de fatos históricos, deixa-se de lado uma concepção ultrapassada de se *fazer história* que objetivava como produto final um retrato fiel dos eventos do passado.

Seguindo as direções apontadas pela historiografia contemporânea, que intenciona torná-la mais global, o intelectual Roger Chartier apresenta uma metodologia de construção da história através da concepção de *História Cultural*:

> A história cultural, tal como a entendemos, tem por principal objeto identificar o modo como em diferentes lugares e momentos uma determinada realidade social é construída, pensada, dada a ler (CHARTIER *apud* VALENTE, 2009, p. 14)

Ao tratar da História Cultural, Roger Chartier cria categorias que contribuirão para a apreensão desta metodologia: *representação, prática e apropriação*.

Sobre as ideias de representação e prática, Chartier afirma:

> Mais do que o conceito de mentalidade, ela (a noção de representação) permite articular três modalidades da relação com o mundo social: em primeiro lugar, o trabalho de classificação e de delimitação que produz as configurações intelectuais múltiplas, através das quais a realidade é contraditoriamente construída pelos diferentes grupos; seguidamente, as práticas que visam fazer reconhecer uma identidade social, exibir uma maneira própria de estar no mundo, significar simbolicamente um estatuto e uma posição; por fim, as formas institucionalizadas e objetivadas graças às quais uns "representantes" (instâncias coletivas ou pessoas singulares) marcam de forma visível e perpetuada a existência do grupo, da classe ou da comunidade. (CHARTIER *apud* VALENTE, 2009, p. 15)

Portanto, a ideia de *representação* admite um exame minucioso acerca das formas pelas quais são atribuídos significados ao mundo social pelos diferentes grupos.

O conceito de apropriação está relacionado à maneira como as representações do mundo social serão recebidas e utilizadas:

> A apropriação, tal como a entendemos, tem por objetivo uma história social das interpretações, remetidas para as suas determinações fundamentais (que são sociais, institucionais,

> culturais) e inscritas nas práticas específicas que as produzem. (CHARTIER *apud* VALENTE, 2009, p. 16)

Observando esta breve exposição da concepção metodológica de *História Cultural*, propõe-se para o presente trabalho, a elaboração de uma "história cultural da educação matemática", assim definida no livro intitulado *Na oficina do historiador da educação matemática: cadernos de alunos como fontes de pesquisa*, da autoria dos pesquisadores Wagner Rodrigues Valente e Maria Célia Leme da Silva:

> (...) os estudos históricos culturais da educação matemática deveriam caracterizar-se pelas pesquisas que intentam saber como historicamente foram construídas representações sobre os processos de ensino e aprendizagem da Matemática e de que modo essas representações passaram a ter um significado nas práticas pedagógicas dos professores em seus mais diversos contextos e épocas. (VALENTE, 2009, p. 16)

A partir de então, o profissional de educação matemática que toma posse de trabalhos que tratam da história cultural da educação matemática, se sustenta de informações científicas que tratam das práticas de ensino de épocas passadas, oportunizando o questionamento / transformação de suas práticas cotidianas de modo mais qualitativo. Neste sentido, a utilidade das pesquisas nesta área é ressaltada por Valente (2009):

> (...) a relevância da história cultural da educação matemática para o professor dessa disciplina, evidentemente, constituem uma aposta no devir, cujo cerne ancora-se no princípio de que mais conhecimento implica em melhores práticas de ensino: a alteração da relação que o professor de matemática tem com o passado profissional de seu ofício leva, assim, a uma mudança de qualidade de suas práticas na realidade presente. (VALENTE, 2009, p. 19)

O trabalho a ser realizado no campo da história da educação matemática diz respeito à produção de fatos históricos relacionados ao ensino de matemática, viabilizando uma ampliação do entendimento do processo de escolarização da matemática. Neste sentido, há possibilidade de ser escolhida, como fontes de pesquisa, uma série de documentos. Dentre eles é possível citar: diários de classe, exames, provas, livros de atas, fichas de alunos, livros didáticos, documentos oficiais que estabelecem regras para o funcionamento do ensino, decretos etc. Dentre esses documentos, o livro didático, como havia sido mencionado, será uma das fontes essenciais para o desenvolvimento deste trabalho e, a partir disso, podem surgir questões como: quais livros escolher? Quais os critérios irão nos balizar para efetuarmos uma análise dos livros?

Para responder a estas questões, vamos nos utilizar de uma estrutura teórica que privilegia a utilização deste material – o livro didático – como uma das fontes de pesquisa fundamentais no desenvolvimento deste estudo. Assim, um dos principais pressupostos teórico-metodológicos que a presente pesquisa irá se apoiar ao analisar os livros didáticos de 1930 a 1980, se apresenta no trabalho do historiador André Chervel intitulado de "História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa". Neste trabalho, Chervel conceitua *disciplina escolar*, o significado de disciplinarização de um saber, e os elementos necessários que devem ser considerados para investigar de que maneira ocorrem os processos de origem, desenvolvimento e estabilização de uma disciplina. Dentre estes elementos relevantes, podemos citar a leitura das leis que regulamentaram quais foram os conteúdos a serem ensinados das disciplinas. Contudo, Chervel sinaliza que, para um estudo mais significativo da história da disciplina em questão, devemos observar outros aspectos que influenciam na formação e constituição da disciplina. Tais aspectos apontam para as práticas realizadas no cotidiano escolar que mostram, em certa medida, de que maneira foram implementadas as propostas oficiais.

Outro aspecto mencionado por Chervel – que iremos privilegiar nesta pesquisa - que evidencia a estabilização ou não de uma disciplina escolar, é a observação dos livros didáticos que marcaram determinado período em relação tanto a sua influência quanto a utilização nos meios escolares. Ele ressalta a importância da utilização dos livros didáticos como fonte de pesquisa e destaca que em um dado momento histórico,

> Todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do *corpus* de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas. (CHERVEL, 1990, p.203)

Estes aspectos podem ser observados nos manuais didáticos em determinado período, caracterizando o que Chervel denominou de *fenômeno da vulgata*. Portanto, um conjunto de livros de determinado período que apresentam tal fenômeno, possuem em seus conteúdos estruturas semelhantes no que diz respeito à forma de apresentação da matéria, sua organização e sequência, dos exercícios, dos exemplos etc.

Essa padronização presente nos livros didáticos mais disseminados em determinada época é o resultado pelo qual Chervel classifica como processo de 'estabilização da disciplina' conforme já foi mencionado. Na disciplina, que passa por tal processo, são observadas as seguintes características:

> (...) fidelidade aos objetivos estipulados, os métodos experimentados, progressões sem choques, manuais adequados e renomados, professores tanto mais experimentados quanto reproduzem com seus alunos a didática que os formou em seus anos de juventude, e sobretudo consenso da escola e da sociedade, dos professores e dos alunos: igualmente fatores de solidez e de perenidade para os ensinos escolares. (CHERVEL, 1990, p. 198)

No entanto, em alguns momentos da história de uma disciplina podemos encontrar algumas produções didáticas que apresentam características novas em relação ao modelo atual de organização do ensino da disciplina. Estas mudanças podem ser aceitas ou não pela comunidade escolar, e caso sejam aprovadas, o historiador das disciplinas deve investigar de que maneira tal produção didática influenciou na confecção de outros livros que observavam a mesma organização do manual transformador. Desta forma, há o estabelecimento de uma nova *vulgata* escolar, cuja origem deve ser investigada através de uma perspectiva histórica fundamentada na elaboração de fatos históricos. A nova vulgata revela uma transformação nos modos de organização da disciplina verificados nos livros didáticos anteriores ao manual inovador:

> Vem depois o declínio, ou se se quer, a mudança. Pois a disciplina, ainda que pareça inume por todos os lados, não é uma massa amorfa e inerte. Vê-se de repente florescer os novos métodos, que dão testemunho de uma insatisfação, e dos quais o sucesso é também o questionamento, ao menos parcial, da tradição. (CHERVEL, 1990, p. 198)

O estabelecimento de uma nova vulgata escolar é o produto de vários fatores que podem ser revelados no estudo histórico do período em que tal fenômeno ocorreu. Documentos históricos como leis, decretos, diários de classe, movimentos educacionais, encontros de professores, cadernos de alunos etc., podem contribuir para o aprofundamento da pesquisa relacionada ao estabelecimento da nova vulgata.

Os livros didáticos a serem escolhidos para o estudo do surgimento de uma nova estrutura de ensino da disciplina são essencialmente aqueles que marcaram a época observada, ou mais especificamente, são aquelas obras que exerceram influência significativa na elaboração de outros manuais e que apresentaram expressiva circulação nos meios escolares.

Desta maneira, o ofício do historiador das disciplinas, ao se utilizar dos livros didáticos como fontes para o estudo das transformações ocorridas na vulgata escolar, aponta inicialmente para a análise dos manuais didáticos que apresentaram propostas inovadoras no período analisado, conforme escreve Chervel:

> Mas pouco a pouco, um manual mais audacioso, ou mais sistemático, ou mais simples do que os outros, destaca-se do conjunto, fixa os "novos métodos", ganha gradualmente os setores mais recuados do território, e se impõe, é a ele que doravante se imita, é ao redor dele que se constitui a nova vulgata. (CHERVEL, 1990, p. 204)

A investigação dos livros didáticos inovadores em um dado período é imprescindível para descrever o caminho histórico percorrido por uma disciplina. No entanto, devemos questionar em que medida o manual didático selecionado e estudado exerceu influência determinante para o estabelecimento de uma nova vulgata. No artigo de Valente (2007), podemos observar o exemplo de um manual inovador à época – Elementos de Geometria[4], de Alexis Clairaut –, que não se constituiu em uma nova vulgata, ou ainda, observou-se que tal manual não foi capaz de proporcionar uma mudança na estrutura e metodologia de ensino da Geometria para o ensino secundário.

Outra referência teórica de apoio a esta pesquisa se apresenta nos trabalhos de Alain Choppin relacionados à história dos livros didáticos. Choppin afirma que estes são reflexos de uma sociedade que está inserida em um contexto histórico e político a ser considerado, assumindo, conjuntamente ou não, várias funções:

> o estudo histórico mostra que os livros didáticos exercem quatro funções essenciais, que podem variar consideravelmente segundo o ambiente sociocultural, a época, as disciplinas, os níveis de ensino, os métodos e as formas de utilização. (CHOPPIN, 2004, p. 552 - 553)

As quatro funções mencionadas são chamadas de *referencial*, *instrumental, ideológica e cultural,* e *documental*. A função referencial do livro didático está relacionada diretamente com os programas oficiais propostos, oferecendo elementos necessários para uma formação adequada às futuras gerações.

A função instrumental diz respeito às metodologias de aprendizagem inseridas

[4] Livro editado no Brasil em 1892 e traduzido por José Feliciano. Esta obra desenvolve prioritariamente a geometria impulsionada por questões práticas do cotidiano ligadas à medição de terrenos, apresentando uma despreocupação com deduções, demonstrações e o rigor matemático. (VALENTE, 2007)

no livro didático refletidas nas atividades propostas, nos exemplos, nas técnicas possibilitando “a aquisição de competências disciplinares ou transversais, a apropriação de habilidades, de métodos de análise ou de resolução de problemas, etc.” (CHOPPIN, 2004, p. 553)

Na função ideológica e cultural, o livro didático é relacionado ao aspecto da aculturação ou doutrinação dos jovens, ao observar: “Instrumento privilegiado de construção de identidade, geralmente ele é reconhecido, assim como a moeda e a bandeira, como um símbolo da soberania nacional e, nesse sentido, assume um importante papel político.” (CHOPPIN, 2004, p. 553).

Em relação à função documental, o livro didático pode oferecer uma formação crítica dos alunos e uma significativa formação para os professores a partir de um conjunto de documentos provenientes dos manuais didáticos.

Neste estudo, o livro didático de matemática é uma fonte de pesquisa essencial que contribuirá para desenvolvimento das questões de pesquisa apresentadas inicialmente. A utilização das bases teórico-metodológicas aqui mencionadas norteará os procedimentos de análise dos livros didáticos no sentido que é exposto por Valente (2002):

> Rompendo com a análise estritamente interna dos conteúdos matemáticos desses livros, o historiador da educação matemática buscará enredá-lo numa teia de significados, de modo a que ele possa ser visto e analisado em toda a complexidade que apresenta qualquer objeto cultural. Nessa teia estão presentes múltiplos elementos. Da concepção da obra pelos autores, passando pelo processo de como foi produzido e sofreu a ação das casas editoriais, chegando às mãos de alunos e professores e sendo utilizado por eles, o livro didático de matemática poderá revelar, inclusive, heranças de práticas pedagógicas do ensino de matemática, presentes em nosso cotidiano escolar hoje. (VALENTE, 2008a, p. 159-160)

Assim, ao elaborar esta pesquisa histórica que aborda a introdução do tópico matrizes no ensino secundário no período de 1930-1980, tomaremos posse do ferramental teórico-metodológico utilizado por historiadores da historiografia recente. Estes instrumentos conduzem à construção de fatos históricos a partir da análise de documentos que contribuem com elementos nesta produção. Para tanto, a investigação será conduzida metodologicamente a partir do conceito de História Cultural delineada por Roger Chartier que, direcionada ao ensino de matemática, se traduz numa *história cultural da educação matemática*, proposta pelo pesquisador Wagner Valente.

Ao considerar o livro didático como fonte essencial no desenvolvimento da pesquisa, serão utilizadas as metodologias e conceitos introduzidos pelos historiadores André Chervel e Alain Choppin, que revelam a forma adequada de trabalhar com tais documentos, considerados fundamentais para o entendimento das transformações dos processos de ensino-aprendizagem de uma disciplina.

No entanto, para que se compreenda mais amplamente a contribuição do livro didático na apreensão das representações e práticas pedagógicas do cotidiano escolar, faz-se necessário um estudo do período histórico-educacional a que tal documento está inserido. Sendo assim, no capítulo seguinte serão apresentadas as reformas educacionais regulamentadas no Brasil a partir da década de 1930, que por um lado, acrescentam dados relevantes para a construção de uma história cultural do ensino de matemática do colégio e, por outro lado, auxiliarão a elucidar historicamente a presença do tópico *matrizes* nos anos finais do Ensino Secundário.

Capítulo 2

UMA BREVE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA DO COLÉGIO ATRAVÉS DAS REFORMAS EDUCACIONAIS

2.1 – A estrutura educacional brasileira anterior à Reforma Campos

No período que antecedeu a Reforma Francisco Campos - que forneceu organicidade à estrutura de ensino a partir dos anos 1930 - o sistema educacional brasileiro não possuía articulação nos níveis estaduais e nacionais, evidenciando a ausência de uma política nacional de educação.

Durante os primeiros anos da República brasileira,

> As intervenções governamentais seguintes representaram marchas e contramarchas na evolução da estrutura educacional. (...) Todas essas reformas, além de frustradas, representaram posições isoladas dos comandos políticos; não foram, em nenhuma hipótese, orientadas por uma política nacional de educação e acabaram por perpetuar o modelo educacional herdado do período colonial. (OLIVEIRA, 2004, p. 950)

O paradigma de educação herdado da época colonial se encontrava na contramão da realidade socioeconômica brasileira que se encaminhava para um modelo urbano-industrial, exigindo novas demandas sociais. Desta maneira, as estruturas políticas foram se moldando ao novo momento e observaram a necessidade de modificar os objetivos na educação que se apresentavam naquele estágio:

> (...) destinado a dar cultura geral básica, sem a preocupação de qualificar para o trabalho, uniforme e neutra não podia, por isso mesmo, contribuir para as modificações estruturais na vida social e econômica do Brasil da época. Podia, portanto, servir tão somente à ilustração de alguns espíritos ociosos. (ROMANELLI *apud* CARVALHO, 2000, p. 416).

No início do século XX, emergiram vários questionamentos sobre o papel da educação nos países da Europa Ocidental e nos Estados Unidos. Devido às transformações sociais impulsionadas pela Revolução Industrial, o comércio e a indústria demandaram uma mudança nos padrões de ensino vigentes. Neste sentido, algumas ações foram propostas para o ensino de matemática:

> Logo depois de 1900, ocorreram, em alguns países, iniciativas de reformas curriculares para as escolas secundárias nessa direção. Na Inglaterra, o movimento Perry procurou enfatizar métodos de ensino práticos; na Prússia, Felix Klein começou a forjar a ampla aliança que exigiria a reforma de toda a instrução

> matemática para que fosse orientada para o pensamento funcional. (SCHUBRING, 1999, p. 31)

Concomitantemente à emergência na criação de uma nova estrutura da educação no Brasil naquele momento, a reflexão sobre as mudanças no ensino de matemática foram impulsionadas pelas ideias difundidas nos congressos internacionais, mais especificamente, do IV Congresso Internacional de Matemática ocorrido no ano de 1908, em Roma, onde o Brasil não possuiu um papel relevante – como alguns outros países – pois foi admitido somente como observador das discussões.

Neste quarto congresso, foi criado o IMUK (Internationale Mathematische Unterrichtskommission), sendo Felix Klein eleito presidente deste comitê, com o objetivo de acompanhar as propostas de reformas curriculares oriundas dos países participantes: "Na realidade, quando o comitê foi estabelecido em 1908, evoluiu para se tornar o agente organizador e instigador de um movimento internacional de reforma." (SCHUBRING, 1999, p. 31)

Assim, foi criado o primeiro projeto de internacionalização do ensino de matemática que influenciou de forma efetiva o processo de reestruturação do ensino da matemática no Brasil, que contou com a contribuição ativa do professor Euclides Roxo, então diretor do Externato do Colégio Pedro II. (MARQUES, 2005, p. 18, 19)

Em virtude de sua posição no Colégio Pedro II e de sua notória importância adquirida tanto no exercício do magistério como na elaboração de livros didáticos, em 1927, Roxo propõe à Congregação do Colégio Pedro II, alterações no ensino de matemática ao mencionar os métodos de ensino introduzidos na Alemanha por Felix Klein conjuntamente à ideia de unificação dos ramos da matemática: Aritmética, Álgebra e Geometria. Sabe-se que até então, o ensino destes três segmentos era realizado separadamente.

A proposta realizada por Roxo foi aceita em 1928 pelo Departamento Oficial de Ensino e pela Associação Brasileira de Educação, tornando-se oficial pelo Decreto 18564 de 15 de janeiro de 1929. Contudo, estas modificações curriculares e metodológicas serão seguidas apenas pelo Colégio Pedro II. (MIORIM *apud* MARQUES, 2005, p. 20).

Assim, Euclides Roxo realizou implementações gradativas dos novos programas do ensino secundário em cada ano escolar. Em 1929, as alterações foram feitas somente nos programas do 1º ano. No ano seguinte, foram aceitos novos programas para os dois anos iniciais, não havendo alterações nos programas de 3º e 4º anos. Paralelamente às novas modificações programáticas do 1º e 2º anos, Euclides Roxo lança o didático "Curso de mathematica elementar", de sua autoria. Sobre a importância desta obra, o pesquisador Valente afirma:

> O novo didático de matemática, escrito por Roxo, tinha assim a finalidade de objetivar a proposta de modernização do ensino no Brasil. A intenção principal era a da reestruturação da seqüência de conteúdos a ensinar, visando à fusão de vários ramos (aritmética, álgebra, geometria) até então separados. Estava nascendo uma nova matemática escolar: a matemática do ginásio, e, com ela, um livro para a primeira série desse novo grau de ensino, a ser criado oficialmente com a Reforma Francisco Campos, sob a denominação de Curso Fundamental. (VALENTE *apud* MARQUES, 2005, p. 21)

Devido ao fato de apresentar características muito diferentes das obras que eram adotadas até então, o livro didático de Euclides Roxo sofreu críticas de professores do próprio Colégio Pedro II, como o de Joaquim de Almeida Lisboa. Estes dois catedráticos de Matemática, "(...) travaram publicamente, em artigos publicados no *Jornal do Commercio*, do Rio de Janeiro, de dezembro de 1930 a fevereiro de 1931, uma verdadeira batalha, na qual defendiam seus pontos de vista em relação ao ensino de matemática, sua finalidade e sua metodologia." (CARVALHO, 2000, p. 417)

As ideias reformadoras de Roxo, pautadas nas mudanças metodológicas e curriculares no ensino de matemática, foram de encontro às exigências de reformulações profundas na educação brasileira, tendo em vista as transformações ocorridas na sociedade. Desta forma, as propostas de Euclides Roxo estiveram presentes no texto da Reforma Francisco Campos regulamentada em 1931.

2.2 – A Reforma Francisco Campos e a matemática do ensino secundário.

Com a revolução de 1930 e sob as imposições da ditadura, foi criado o Ministério da Educação e da Saúde Pública, assumido por Francisco Campos. Sua atuação foi marcada por mudanças estruturais na educação em nível nacional nos ensinos superior e secundário, representadas em 6 decretos implementados em 1931:

> As reformas empreendidas por Francisco Campos durante sua gestão no novo ministério efetivamente forneceram uma estrutura orgânica ao ensino secundário, comercial e superior. Pela primeira vez na história da educação brasileira, uma reforma se aplicava a vários níveis de ensino e objetivava alcançar o País como um todo. (MORAES, 1992, p. 293)

Dentre os efeitos obtidos na estrutura educacional pela Reforma Francisco Campos, citamos: os estabelecimentos do ensino seriado, da frequência obrigatória, dos ciclos fundamental e complementar, e da exigência de habilitação nestes dois ciclos para o ingresso ao ensino superior. (ROMANELLI *apud* RIBEIRO, 2006, p. 30)

A organização curricular da matemática escolar estabelecida nos anos 30 determinada pela Reforma Francisco Campos ao estipular uma divisão em dois ciclos para o ensino secundário, sendo o primeiro com cinco anos de *Curso Fundamental* e o segundo ciclo com dois anos para os *Cursos Complementares*. O Colégio Pedro II foi considerado a referência quanto à equiparação dos conteúdos programáticos pelos colégios oficiais, mediante as inspeções federais. Outrossim, oportunizou às escolas particulares a organização de acordo com o decreto, submetendo-se as mesmas inspeções. (RIBEIRO, 2006, p. 30)

Devido ao prestígio alcançado em sua atuação como diretor do Colégio Pedro II e de ser um dos membros da Associação Brasileira de Educação, Euclides Roxo foi convidado por Francisco Campos para contribuir na elaboração da reforma do ensino brasileiro. Inspirado no movimento escolanovista do início do século XX, Roxo organizou e redigiu tanto as instruções metodológicas que ressaltavam os desenvolvimentos do espírito, raciocínio lógico e de outras aptidões às aplicações, quanto os novos programas de matemática que já eram utilizados no Colégio Pedro II. (MARQUES, 2005, p. 29)

Dentre os diversos objetivos que fundamentavam o ensino da disciplina matemática no Curso fundamental, citamos alguns deles: o ensino integrado da aritmética, álgebra e geometria, o ensino do conceito de função como fator de integração das partes da matemática, capacitando o aluno para um curso introdutório de cálculo diferencial no último ano, e a introdução do método heurístico[5] como técnica de ensino. (MARQUES, 2005, p. 29)

As aulas dos Cursos Complementares eram realizadas em dois anos nos anexos das escolas superiores e serviam de introdução ou preparação aos cursos superiores escolhidos. Tais Cursos possuíam 3 programas diferenciados: Curso Pré-Jurídico, Curso Pré-Médico e Curso Pré-Politécnico. A escolha do curso feita pelo aluno concordava com alguma das carreiras escolhidas: Direito; Engenharia e Arquitetura; Medicina, Odontologia e Farmácia. (RIBEIRO, 2006, p. 30)

[5] “Método que visava, sobretudo, tornar o aluno um agente ativo no processo de aprendizagem, ao privilegiar a resolução de problemas pelo próprio aprendiz” (MARQUES, 2005, p. 33)

Nos programas de matemática dos Cursos Complementares, foi observada a formação de “blocos de conteúdos” que eram ensinados isoladamente: Aritmética Teórica, Álgebra, Álgebra Vetorial, Geometria, Geometria Analítica e Trigonometria. Esta organização dos Ensinos de Matemática com matérias agrupadas tinha “(...) a finalidade de adaptar os jovens à prestação dos exames de admissão às faculdades correspondentes às opções dos Cursos Complementares.” (RIBEIRO, 2006, p. 111)

Anteriormente à Reforma Campos, o ensino secundário era voltado exclusivamente para a preparação aos exames de ingresso ao ensino superior e, para contrapor a esses objetivos, é estabelecida a finalidade do ensino secundário na Exposição dos Motivos da Reforma Francisco Campos: “(...) não há que ser a matrícula nos cursos superiores; o seu fim, pelo contrário, deve ser a formação do homem para todos os grandes setores da atividade nacional”. (RIBEIRO, 2006, p. 29)

No que diz respeito ao ensino de matemática, a finalidade prescrita pela Reforma Campos é de desenvolver a cultura espiritual do aluno pelo conhecimento dos processos matemáticos, habilitando-o ao mesmo tempo, à concisão e ao rigor do raciocínio, pela exposição clara do pensamento em linguagem precisa. (RIBEIRO, 2006, p.32)

Apesar de fornecer organicidade ao ensino secundário, tanto interna quanto externamente, algumas limitações se manifestaram com a implementação em nível nacional da Reforma Francisco Campos. Dentre elas, citamos a elitização do ensino caracterizado tanto pela rigidez do sistema de avaliação que privilegiava a aplicação de um número excessivo de provas, quanto pelo caráter enciclopédico dos programas. Desta maneira, estas medidas que possuíam um caráter exageradamente seletivo, adotadas em todo o território nacional, desconsideraram as diferenças regionais no que diz respeito às culturas locais e as desigualdades sociais existentes. (MARQUES, 2005, p. 27, 28)

As propostas inovadoras de Roxo para o ensino de matemática foram alvo de críticas tanto dos professores do Colégio Pedro II, quanto de professores das disciplinas Aritmética, Álgebra e Geometria de outros estabelecimentos de ensino. Além disso, segundo a pesquisadora Inara Martins Passos Pires, o conteúdo da disciplina Matemática apresentada nos livros didáticos analisados neste período, aponta, de forma geral, que não estava organizado em torno das ideias inovadoras da Reforma:

> Os autores, a seu modo, pautaram-se pela obediência à listagem de conteúdos posta na Reforma, adaptando aqui e ali, formas heurísticas de apresentação e de desenvolvimento da Matemática. (PIRES *apud* MARQUES, 2005, p. 37)

2.3 A Reforma Gustavo Capanema e a matemática no Curso Colegial

Devido ao regime político ditatorial estabelecido pelo Estado Novo em 1937, o movimento que contribuiu para a renovação da educação brasileira sofreu forte impacto, principalmente no que diz respeito à troca e manifestação de ideias. Contudo, algumas reformas parciais ocorreram através da iniciativa do ministro da Educação Gustavo Capanema em 1942, denominadas de Leis Orgânicas do Ensino que foram sendo complementadas até 1946. Dentre elas, destacamos o decreto-lei nº 4244 relativo à Lei Orgânica do Ensino Secundário, promulgada em 9 de abril de 1942.

Além de possuir um claro objetivo de oferecer tanto uma cultura geral e humanística, quanto uma preparação adequada para o ingresso ao ensino superior, este decreto apresentava, na visão da historiadora Otaiza Romanelli, a sustentação de uma ideologia política baseada no patriotismo e no nacionalismo de caráter fascista. (MARQUES, 2005, p. 40)

Dentre as características e finalidades do ensino secundário obtidas na Reforma anterior que foram mencionadas como positivas pelo ministro Gustavo Capanema, se destaca a ordem e métodos implementados, bem como o caráter educativo consolidado no ensino secundário, destituindo a finalidade de considerar tal ensino como mera preparação aos exames de ingresso ao ensino superior. No entanto, as finalidades propostas pela nova Reforma estavam direcionadas à formação da personalidade por meio de uma consciência humanística, à adaptação às exigências da sociedade e à socialização do adolescente.

Na Reforma Capanema, o primeiro ciclo do ensino secundário passou de 5 anos para 4 anos e denominou-se Ginásio ou Curso Ginasial. O segundo ciclo - que na Reforma Campos era composto pelos Cursos Complementares com duração de dois anos - passou a se chamar Curso Colegial, onde eram oferecidas duas opções: o curso Clássico e o curso Científico, ambos com duração de 3 anos.

Enquanto que as aulas dos Cursos Complementares da Reforma Campos eram ministradas em um espaço físico anexo às faculdades escolhidas pelos alunos, os dos cursos Clássicos e Científicos ocorriam em instituições de Ensino secundário chamadas de Colégios, que ofereciam uma formação geral possibilitando ao aluno selecionar a carreira na faculdade independente de qual segmento do segundo ciclo foi escolhido.

Distintamente do que ocorreu com a reforma anterior, não foram expedidas instruções pedagógicas no texto da Reforma Capanema. Outro dado que diferencia as duas reformas é a presença solitária de Euclides Roxo na formulação e redação das propostas para o ensino de matemática na Reforma Campos, enquanto que, na Capanema, ocorreu uma produção coletiva realizada por uma comissão escolhida pelo Ministério da Educação. Na condição de um dos membros desta comissão, Roxo elabora propostas que representam um retrocesso às ideias unificadoras presentes na reforma anterior.

De modo geral, observou-se que algumas características da reforma anterior foram mantidas, como, por exemplo, o início do ensino de Geometria de maneira informal e intuitiva, mas, por outro lado, tanto a ideia da integração dos três ramos (Álgebra, Aritmética e Geometria) em torno da noção de função quanto a implementação do método heurístico no ensino de matemática foram descartadas.

Indicando forte prestígio dentre as demais disciplinas, a Matemática se fez presente em todas as séries destes cursos, inclusive no curso Clássico, que era voltado a uma formação humanística e escolhido pelos alunos que intencionavam cursar Direito. Por outro lado, o curso Científico era indicado para os alunos que buscavam cursar Medicina, Engenharia etc., que comparada ao curso Clássico, apresentava tanto um conteúdo de matemática mais extenso, quanto uma carga horária maior para a disciplina.

Os cursos Clássico e Científico possuíam estruturas semelhantes no que diz respeito à apresentação dos conteúdos de matemática, apesar de observar um maior aprofundamento nos estudos de Geometria e Trigonometria no curso Científico:

> Os alunos dos Cursos Clássico e Científico passaram a estudar os mesmos conteúdos matemáticos, com uma pequena diferenciação de complexidade no Curso Científico, levando-nos a crer que os ensinos de Matemática começaram a ser padronizados, para este nível escolar. (RIBEIRO, 2006, p. 112)

Em ambos os cursos, eram estudados Aritmética Teórica, Álgebra e Geometria, na 1ª série; Álgebra, Geometria e Trigonometria na 2ª série, e por fim, na 3ª série, eram estudadas Álgebra, Geometria e Geometria Analítica. (RIBEIRO, 2006, p. 41)

Os programas de Matemática para o Curso Colegial expedidos em 1943 continham uma proposta de homogeneidade dos ensinos de matemática. Assim, com a Reforma Capanema, foi realizada uma transformação na organização dos conteúdos de matemática: enquanto que nos Cursos Complementares, os conceitos matemáticos eram apresentados em blocos de conteúdos independentes direcionados aos cursos distintos, nos cursos Clássico e Científico a abordagem dos conceitos observou uma lógica interna, revelando a presença de unidades didáticas e interdependentes. (RIBEIRO, 2006, p. 42)

A pesquisadora Denise Franco Capello Ribeiro, em seu trabalho de dissertação, pesquisou as transformações ocorridas na organização dos conteúdos de matemática do colégio a partir da análise dos livros didáticos usados desde os Cursos Complementares até os cursos Clássico e Científico. Em suas conclusões, ela afirma:

> Os livros didáticos, antes específicos para determinado assunto, por exemplo, Geometria Analítica, como vimos para os Cursos Complementares, passaram a englobar diferentes assuntos nos Cursos Clássico e Científico, por exemplo, sob o título do livro de *Matemática 2º ciclo*, os estudantes estudavam a Aritmética Teórica, Álgebra e Geometria. (RIBEIRO, 2006, p. 115)

Ao atender as especificações dadas pelos programas, os autores dos livros didáticos apresentaram inovações na exposição dos conteúdos propostos para estes cursos. A organização dos conteúdos era feita de forma integrada e obedecia a uma ordem didática ao dividir os conteúdos em séries. Esta nova organização foi intitulada de *Matemática*, e Euclides Roxo é considerado um dos autores que se destacaram na elaboração dos livros didáticos neste período.

O *livro dos quatro autores*[6] elaborado pelos professores Euclides Roxo, Haroldo Cunha, Roberto Peixoto e Dacorso Neto[7] tinha uma proposta diferenciada para o ensino, ao apresentar os conceitos de forma simples sem perder o rigor matemático, além de possuir exercícios resolvidos e propostos. Devido à grande aceitação nos meios escolares, esta coleção influenciou de forma efetiva a organização de outros livros didáticos e contribuiu na formação da disciplina Matemática no segundo ciclo do Curso Secundário.

2.4 A organização da matemática escolar nos anos 1950

No meio educacional, a década de 50 foi marcada pela popularização do ensino e de uma dificuldade no cumprimento dos conteúdos estipulados nos programas. O caráter enciclopédico e elitista estabelecido para a educação pela Reforma Capanema,

[6] Os três livros dos quatro autores compuseram a coleção *Mathematica 2º ciclo*, que abrangia todo o conteúdo da matemática do colégio para as três séries e objetivaram atender aos programas expedidos em 1943 destinados aos cursos Clássico e Científico.

[7] Os quatro autores eram professores de instituições de ensino de referência na época, como o Colégio Pedro II e o Instituto de Educação. Eles se notabilizaram na elaboração de livros didáticos para os Cursos Complementares e sua união na publicação anteriormente mencionada visava atender as determinações da Reforma Capanema.

foi um dos fatores que contribuíram para uma nova revisão dos conteúdos e métodos propostos para as disciplinas do Ensino Secundário.

O novo texto, especificamente dos programas de Matemática, foi regulamentado na Portaria Ministerial nº 966 de 2 de outubro de 1951, que simplificou os programas no intuito de fornecer maior flexibilidade ao currículo e de estabelecer um limite mínimo para o cumprimento dos programas pelas instituições de ensino.

A criação de um programa básico para todas as disciplinas, intitulado pelo então ministro da Educação Simões Filho de *Programa Mínimo*, envolveu uma seleção cuidadosa dos conteúdos, observando uma acentuada simplicidade na sua apresentação. Além disso, foram notadas outras características, tais como: a unidade na discriminação da matéria, a coordenação com os programas das disciplinas afins como desenho e física, e de um favorecimento de um ensino que privilegie o sentido educativo em relação ao sentido simplesmente informativo e superficial. (MARQUES, 2005, p. 54)

A Congregação do Colégio Pedro II foi responsável pela elaboração e aprovação dos *Programas Mínimos* e das orientações metodológicas, respectivamente. Entretanto, cada estado do país poderia elaborar seu plano de desenvolvimento dentro dos conteúdos mínimos e, caso não elaborassem, estariam sujeitos aos planos aplicados no Colégio Pedro II.

As Instruções Metodológicas da Portaria de 1951 destacavam algumas orientações, tais como: o rigor não deveria ser exagerado, o apelo à intuição jamais seria desprezado, e o aluno deveria tanto ser conduzido cuidadosamente para o aprendizado do método dedutivo quanto não poderia ser tratado como um receptor passivo de conhecimentos.

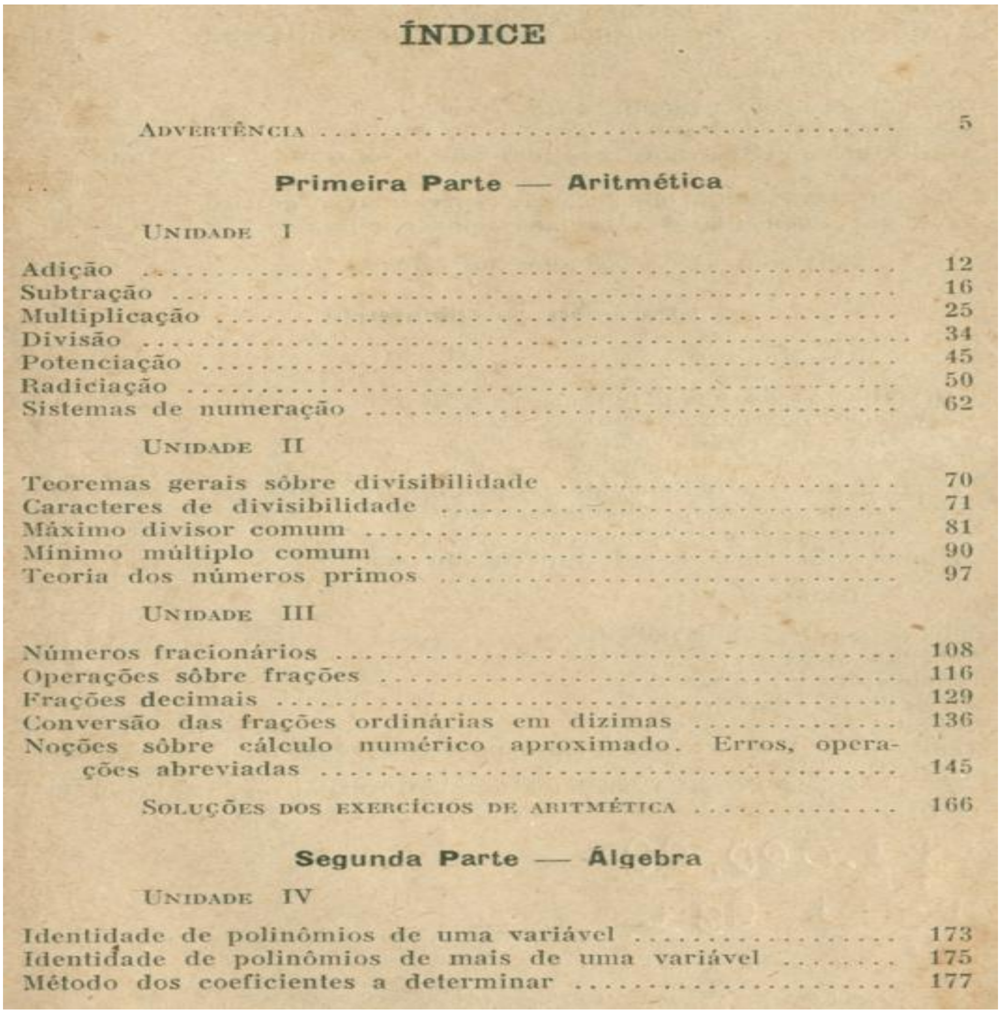
Podemos comparar tais orientações àquelas propostas na Reforma Campos como a exploração da intuição na Geometria e o método heurístico. Entretanto, o que diferencia as duas Reformas é a preocupação do ensino efetivo dos conteúdos mínimos pela Portaria de 1951, valorizando a qualidade em detrimento da quantidade.

Foram destinadas 3 horas semanais para o Ginásio e 4 horas para o Colégio, constituindo a carga horária da disciplina Matemática, cuja apresentação da estrutura dos conteúdos é distinta das reformas anteriores. No entanto, os conteúdos mínimos não diferem muito dos presentes na Reforma Capanema:

> Entre os conteúdos citados no programa e no plano de desenvolvimento de matemática, estava presente o conceito de função, mas apenas no 3º ano do 2º ciclo – Clássico e Científico – em que não houve diferenciação de conteúdos a serem

ensinados nessas duas modalidades do 2º ciclo. (MARQUES, 2005, p. 59)

Os programas não apresentavam as divisões dos ensinos de Aritmética, Álgebra Geometria e Trigonometria, como era comum nas reformas anteriores. Para elucidar melhor este fato, comparamos os índices apresentados em dois livros de 1ª série de mesmos autores destacados nas figuras abaixo. Enquanto que um deles segue as determinações da Reforma Capanema (figuras 2.1 e 2.2), o outro livro (figuras 2.3 e 2.4) destaca na contracapa a informação "De acordo com a portaria ministerial n° 1045, de 14 de dezembro de 1951". (ROXO, 1956a, contracapa).

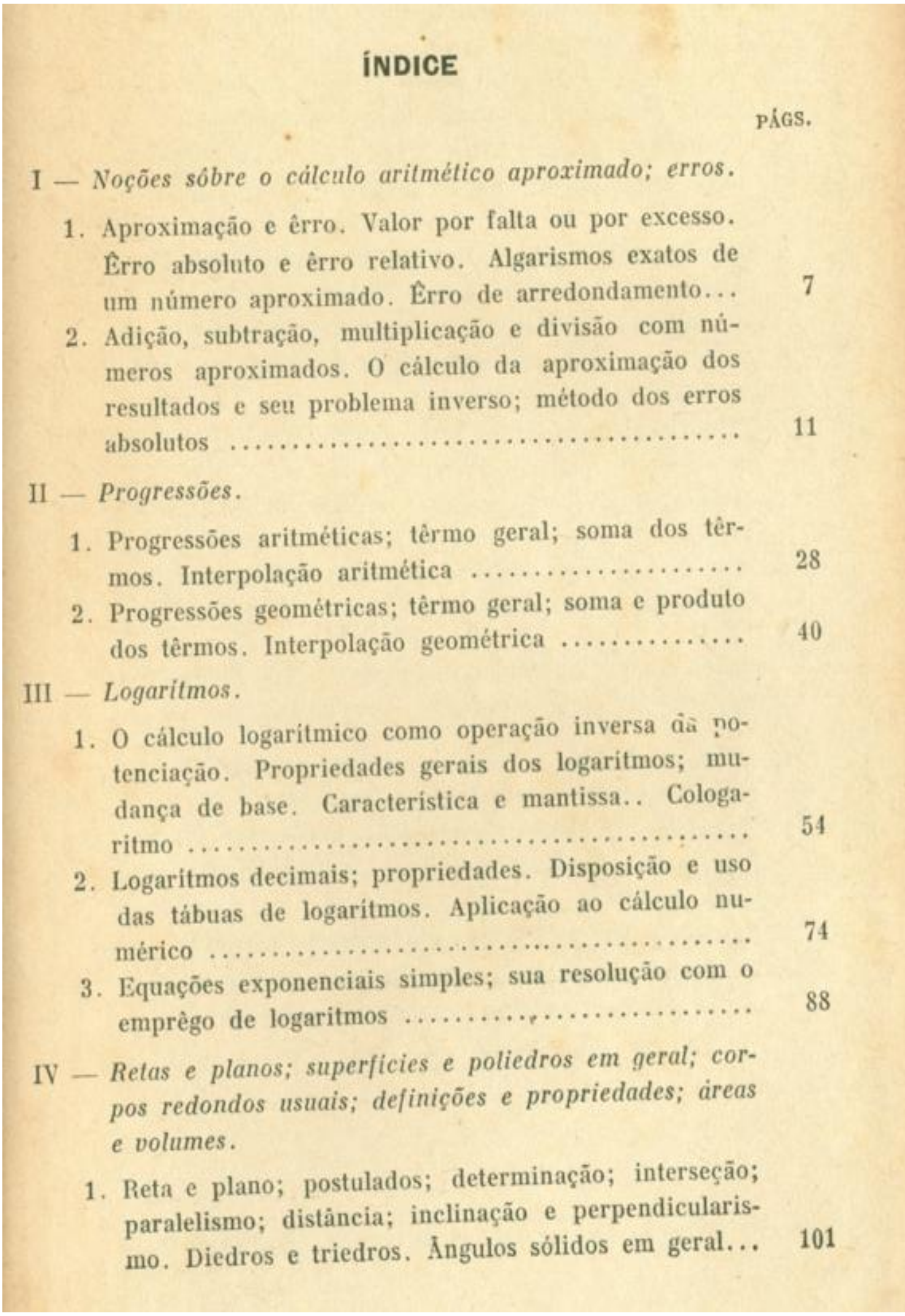


ÍNDICE

Figura 2.1: Índice do livro "Matemática, 2º ciclo – 1ª série". (ROXO et al., 1945)

404 MATEMÁTICA — 2º CICLO — 1ª SÉRIE

Figura 2.2: Continuação do índice do livro “Matemática, 2º ciclo – 1ª série”. (ROXO et al., 1945)



ÍNDICE

Figura 2.3: Índice do livro "Matemática, 2º ciclo – 1ª série". (ROXO et al., 1956a)

378 ÍNDICE

N.º 4.670 — Oficinas Gráficas da Livraria Francisco Alves

Figura 2.4: Continuação do índice do livro “Matemática, 2º ciclo – 1ª série” (ROXO et al., 1956a)

Para completar o quadro comparativo que evidenciam as mudanças ocorridas nos programas de uma reforma à outra, apresentamos abaixo nas figuras 2.5, 2.6, 2.7 e

2.8 os programas das 2ª e 3ª séries impressos na contracapa de cada livro da autoria dos *quatro autores*, que seguiam as respectivas determinações de cada reforma. Lembramos que tais transformações se relacionam com a divisão dos conteúdos em unidades didáticas (Álgebra, Geometria, Trigonometria) observadas na Reforma Capanema e que não são mais observadas na exposição dos programas que seguem as resoluções da Portaria de 1951.

PROGRAMA DA SEGUNDA SÉRIE

ÁLGEBRA

Unidade I. — A função exponencial: 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. **Noção de função exponencial e de sua função inversa**. 3. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 4. Resolução de algumas equações exponenciais.

Unidade II. — O binômio de Newton: 1. Noções sôbre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

Unidade III. — **Determinantes: 1. Teoria dos determinantes. 2. Aplicação aos sistemas de equações lineares; regras de Crammer; teorema de Rouché.**

Unidade IV. — **Frações contínuas: Noções sobre frações contínuas.**

GEOMETRIA

Unidade V. — Os corpos redondos: 1. Noções sôbre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3. Estudo da esfera, área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera.

TRIGONOMETRIA

Unidade VI. — Vetor: 1. Grandezas escalares e vetoriais. 2. Noção de vetor; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vetores. 4. Vetores deslisantes sôbre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.

Unidade VII. — Projeções: 1. Projeção ortogonal de um vetor sôbre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projeção de um vetor.

Unidade VIII. — Funções circulares. 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos $\frac{p\pi}{n}$.

Unidade IX. — **Transformações trigonométricas: 1. Fórmulas de adição, subtração, multiplicação e divisão de arcos: aplicações. 2. Transformação de somas em produtos; aplicação ao cálculo numérico.** 3. Uso das tábuas trigonométricas.

Unidade X. — **Equações trigonométricas: Resolução e discussão de algumas equações trigonométricas simples.**

Unidade XI. — Resolução de triângulos: 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Resolução de triângulos retângulos. 3. **Resolução de triângulos obliquângulos**. 4. **Aplicações imediatas à topografia.**

Figura 2.5: Programa da segunda série extraído do livro “Matemática – 2º. Ciclo – cursos científico e clássico – 2ª série”. (ROXO et al., 1944, contracapa)

PROGRAMA DA SEGUNDA SÉRIE

I — *Análise combinatória simples.*

1. Arranjos de objetos distintos; formação e cálculo do número de agrupamentos.
2. Permutações de objetos distintos; formação e cálculo do número de agrupamentos. Inversão. Classe de uma permutação; teorema de Bézout.
3. Permutações simples com objetos repetidos; cálculo do número de agrupamentos.
4. Combinações de objetos distintos; formação e cálculo do número de agrupamentos. Relações de Stifel; triângulo aritmético de Pascal.

II — *Binômio de Newton.*

1. Lei de formação do produto de binômios distintos. Fórmula para o desenvolvimento binomial no caso de expoente inteiro e positivo; lei recorrente de formação dos têrmos.
2. Aplicação do desenvolvimento binomial ao problema da somação de potências semelhantes de uma sucessão de números naturais.

III — *Determinantes; sistemas lineares.*

1. Determinantes e matrizes quadradas; propriedades fundamentais. Regra de Sarrus. Determinantes menores. Desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha ou coluna. Transformação dos determinantes. Abaixamento da ordem de um determinante pela regra de Chió.
2. Sistemas de n equações lineares com n incógnitas. Regra de Cramer.
3. Sistemas de m equações lineares com n incógnitas; teorema de Rouché.

IV — *Noções sôbre vetores; projeções; arcos e ângulos; linhas e relações trigonométricas.*

1. Grandezas escalares e vetoriais. Vetores; propriedades. Operações elementares com vetores. Relação de Chasles.
2. Projeção ortogonal de um vetor sôbre um eixo. Teorema de Carnot.
3. Generalização dos conceitos de arco e ângulo. Arcos côngruos. Arcos de mesma origem e de extremidades associadas.
4. Linhas e funções trigonométricas diretas; definições e variações. Arcos correspondentes à mesma linha trigonométrica. Relações entre as linhas trigonométricas de um mesmo arco. Problema geral da redução ao 1.º quadrante. Cálculo das linhas trigonométricas dos arcos expressos pela relação $\frac{\pi}{n}$.

V — *Transformações trigonométricas em geral; equações trigonométricas simples.*

1. Adição, subtração e multiplicação de arcos. Bissecção de arcos. Transformação de somas de linhas trigonométricas em produtos.
2. Disposição e uso de tábuas trigonométricas naturais e logarítmicas
3. Equações trigonométricas simples; tipos clássicos.

VI — *Resoluções trigonométrica de triângulos.*

1. Relações entre os elementos de um triângulo retângulo.
2. Casos clássicos de resolução de triângulos retângulos.
3. Relações entre os elementos de um triângulo qualquer. Lei dos senos.
4. Casos clássicos de resolução de triângulos quaisquer.

Figura 2.6: Programa da segunda série extraído do livro “Matemática – 2º. Ciclo – 2ª série”. (ROXO et al., 1955, contracapa)

PROGRAMA DA TERCEIRA SÉRIE

ÁLGEBRA

Unidade I. — **Séries: 1. Sucessões. 2. Cálculo aritmético dos limites. 3. Séries numéricas. 4. Principais caracteres de convergência.**

Unidade II. — Funções: 1. Função de uma variavel real. 2. Representação cartesiana. 3. Continuidade; **pontos de descontinuidade; descontinuidade de uma função racional.**

Unidade III. — Derivadas: 1. Definição, interpretação geométrica e cinemática. 2. Cálculo das derivadas. 3. Derivação das funções elementares. 4. Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.

Unidade IV. — **Números complexos: 1. Definição; operações fundamentais. 2. Representação trigonométrica e exponencial. 3. Aplicação à resolução das equações binômias.**

Unidade V. — **Equações algébricas: 1. Propriedades gerais dos polinômios. 2. Relações entre os coeficientes e as raizes de uma equação algébrica; aplicação à composição das equações. 3. Noções sôbre transformações das equações; equações recíprocas; equações de raizes iguais.**

GEOMETRIA

Unidade VI. — **Relações métricas: 1. Teorema de Stewart e suas aplicações ao cálculo das linhas notáveis no triângulo. 2. Relações métricas nos quadriláteros; teorema de Ptolomeu ou Hiparco; 3. Potência de um ponto; eixos radicais; planos radicais.**

Unidade VII. — **Transformação de figuras: 1. Deslocamentos, translação, rotação, simetria. 2. Homotetia e semelhança nos espaços de duas e de três dimensões. 3. Inversão pelos raios vetores recíprocos.**

Unidade VIII. — Curvas usuais: 1. Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2. As secções cônicas. 3. Definição e propriedades fundamentais da hélice cilindrica.

GEOMETRIA ANALÍTICA

Unidade IX. — Noções fundamentais: 1. Concepção de Descartes. 2. Coordenadas; abcissa sôbre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3. Distância entre dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4. Determinação de uma direção; ângulo de duas direções.

Unidade X. — Lugares geométricos: 1. Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2. Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3. Equação da reta. 4. Equação do círculo. 5. Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.

Figura 2.7: Programa da terceira série extraído do livro "Matemática, 2º ciclo – 3ª série". (ROXO et al., 1946, contracapa)

PROGRAMA

I — *Conceito de função; representação cartesiana; reta e círculo; noção intuitiva de limite e de continuidade.*

1. Conceito elementar de variável e de função. Variável progressiva e variável contínua; intervalos. Noção intuitiva de limite de uma sucessão: exemplos clássicos elementares; convergência.
2. Funções elementares; classificação. Representação cartesiana de uma função e equação de uma curva. Curvas geométricas e curvas empíricas; noção intuititva de continuidade. Representação gráfica de funções usuais; função exponencial, função logarítmica e funções trigonométricas diretas. Acréscimo de uma função num ponto; funções crescentes e funções decrescentes. Tangente; inclinação da tangente.
3. Limite de variáveis e de funções; limites infinitos. Propriedades fundamentais. Exemplos elementares de descontinuidade de uma função em um ponto. Descontinuidade das funções racionais fracionárias.
4. A função linear e a linha reta em coordenadas cartesianas. Parâmetro angular e parâmetro linear. Formas diversas da equação da linha reta. Representação paramétrica; área de um triângulo em função das coordenadas dos vértices. Os problemas clássicos de inclinação, interseção, passagem e distâncias, relativos à linha reta.
5. A equação geral do 2.º grau com duas variáveis e a circunferência de círculo em coordenadas cartesianas. Formas diversas da equação da circunferência de círculo. Interseção de retas e circunferências.

II — *Noções sôbre derivadas e primitivas; interpretações; aplicações*

1. Definição da derivada em um ponto; notações; derivada infinita. Interpretação geométrica e cinemática da derivada. Diferença e diferencial; interpretação geométrica. Funções derivadas. Derivação sucessiva.
2. Regras de derivação: derivada de uma constante; de uma função de função; de funções inversas; da soma, do produto e do quociente de funções. Aplicação à derivação de funções elementares.
3. Aplicação da teoria das derivadas ao estudo da variação de uma função. Funções crescentes e funções decrescentes; máximos e mínimos relativos; interpretação geométrica.
4. Funções primitivas; integral definida; constante de integração. Primitivas imediatas; regras simples de integração.
5. Integral definida. Aplicação ao cálculo de áreas e de volumes; exemplos elementares.

III — *Introdução à teoria das equações; polinômios; propriedades; divisibilidade por* $x \pm a$; *problemas de composição, transformação e pesquisa de raízes; equações de tipos especiais*

1. Polinômios de uma variável; identidade. Aplicação ao método dos coeficientes a determinar. Divisibilidade de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Ruffini. Fórmula de Taylor para os polinômios; algoritmo de Ruffini-Horner.
2. Polinômios e equações algébricas em geral; raízes ou zeros. Conceito elementar de número complexo; forma binomial; complexos conjugados; módulo; representação geométrica. Operações racionais. Decomposição de um polinômio em fatores binômios; número de raízes de uma equação; raízes múltiplas e raízes nulas. Raízes complexas conjugadas. Indicação sôbre o número de raízes reais contidas em um dado intervalo; teorema de Bolzano; conseqüências.
3. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação; aplicação à composição das equações. Propriedades das raízes racionais inteiras e fracionárias.
4. Transformação das equações; transformações de primeira ordem aditivas, multiplicativas e recíprocas.
5. Equações recíprocas; classificação; forma normal; abaixamento do grau.
6. Cálculo das raízes inteiras. Determinação das cotas pelo método de Laguerre-Thibault. Regras de exclusão de Newton. Algoritmo de Peletarius.

Figura 2.8: Programa da terceira série extraído do livro “Matemática, 2º ciclo – 3ª série”. (ROXO, 1956b, contracapa)

A análise dos dados, relativos aos programas propostos em 1941 pela Reforma Capanema e em 1951 contidos nos Programas Mínimos para as três séries do 2º ciclo do colégio, indica poucas mudanças dos conteúdos de uma reforma à outra.

De acordo com Chervel, uma disciplina inicia seu caminho no nascimento, após desenvolver-se pode passar por momentos de estabilidade, pode vir a modificar-se e, até mesmo desaparecer. Paralelamente a estas concepções, podemos observar o movimento da disciplina matemática ao longo de 30 anos, com seu nascimento e desenvolvimento nos anos 1930, uma modificação nos anos 1940 e um período de muita estabilidade nos anos 1950. Desta maneira, o período que antecedeu o Movimento da Matemática Moderna no Brasil não indicava um cenário propício para grandes mudanças na disciplina, contrariando a afirmação de algumas dissertações e teses que pesquisaram o surgimento do Movimento da Matemática Moderna. (MARQUES, 2005, p. 101, 102)

2.5 O Movimento da Matemática Moderna no ensino colegial

Conforme já foi observado anteriormente, a gênese das primeiras propostas de internacionalização do currículo de matemática datam do início do século XX com a criação da CIEM/IMUK – Comissão Internacional do Ensino de Matemática, em 1908. Nesta comissão, ocorreram reflexões realizadas por educadores matemáticos de diversos países, objetivando a modernização do ensino de matemática frente às transformações ocorridas na economia, na tecnologia e no mundo do trabalho.

As discussões sobre as transformações curriculares no ensino de matemática conduzidas pelo IMUK se intensificaram nos congressos internacionais de 1908 e 1912. Com o debate suspenso durante o período da primeira grande guerra, as propostas que tinham como eixo integrador o *ensino de funções* são retomadas na década de 20 e, como já foi mencionado, tais mudanças estiveram presentes nas ideias difundidas pelo professor Euclides Roxo no final dos anos 20.

A formação de um grupo de matemáticos franceses denominado *grupo Bourbaki*[8] na década de 30, se pautava no ensino de matemática de forma simples e rigorosa, apresentando como eixo temático integrador a “Teoria dos Conjuntos”, da autoria do matemático George Cantor.

[8] “**Nicholas Bourbaki** foi o pseudônimo usado por um grupo de matemáticos (entre os quais podemos citar Dieudonné, Cartan, Chevalley, Weil) que em livros e artigos defendiam uma evolução – e uma revolução – interna na Matemática a partir do desenvolvimento e estudo da noção de *estrutura*.” (SOARES, 2001, p. 47)

No período pós-guerra, as influências destes matemáticos *estruturalistas* bem como a de psicólogos e pedagogos, combinadas às novas demandas oriundas do progresso científico, da industrialização e da sociedade interferiram significativamente na formação do movimento de internacionalização do currículo de matemática, denominado de Movimento da Matemática Moderna (MMM) no final da década de 50:

> Os acontecimentos que ocorriam no campo da economia e da política, mas que mantinham estreitas ligações com o campo científico-tecnológicos fundamentavam as ideias de mudanças apresentadas pelos idealizadores do Movimento da Matemática Moderna. A possibilidade de mensuração e quantificação pautada no rigor científico proposta por essa "nova matemática" permitia explicar, comprovar e generalizar os resultados observados em experiências, o que tornava possível comprovar na prática as teorias (Miorim, 1998). Para os idealizadores, essa nova proposta se contrapunha à forma platônica, abstrata, como era ministrada a disciplina Matemática até então. (PINTO, 2008, p. 4625)

No Brasil, o professor Osvaldo Sangiorgi[9] é considerado um dos ícones do MMM tanto pela liderança exercida no GEEM - Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, quanto na posição de autor pioneiro de livros didáticos de matemática, para o ginásio, que incorporaram os ideais do movimento. (VALENTE, 2010a, p. 1)

Com a implementação da Lei de Diretrizes e Bases 4024 de 1961, que facultava aos estados da federação a liberdade de pensar a organização curricular, foi oferecido um espaço favorável aos grupos de educadores locais para discussão e implementação de suas resoluções. No entanto, a Cia Editora Nacional e o professor Sangiorgi tinham ambições maiores no que diz respeito à criação de um programa oficial e moderno de matemática:

> A luta foi a de estabelecer que o programa formulado pelo GEEM, sob a presidência de Osvaldo Sangiorgi, ganhasse aceitação de entidades representativas do ensino de matemática, sensibilizasse as autoridades educacionais e servisse para respaldar uma programação a ser seguida nos livros didáticos. (VALENTE, 2010a, p. 3)

[9] Professor de matemática e autor de coleções de livros didáticos para o ginásio que se tornaram sucesso nos meios escolares a partir de meados dos anos 1950. Em um estágio realizado em 1960 na Universidade de Kansas, Sangiorgi entra em contato com livros didáticos experimentais elaborados por grupos de estudos compostos por professores e pesquisadores norte-americanos, que desenvolveram propostas de ensino baseados nos princípios do MMM. Em seu retorno ao Brasil, imbuído das ideias modernizadoras, Sangiorgi articulou a formação do GEEM em 1961, e junto a este, impulsionou os debates de reformulação dos programas de matemática em encontros e congressos. (VALENTE, 2010a)

As propostas de reformulação do ensino de matemática foram apresentadas pelo GEEM no IV Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática[10] por meio de conferências e "aulas experimentais", na abordagem do tema "Introdução da Matemática Moderna na Escola secundária. Experiências realizadas em cursos regulares ou experimentais". Segundo Valente,

> Ao que tudo indica, a estratégia montada pelo GEEM foi bem sucedida. Isso permitiu a Osvaldo Sangiorgi parametrizar as suas obras pelo programa levado ao IV Congresso, que após o Evento ganhou o *status* de um programa nacional para o ensino da matemática moderna no Brasil. (VALENTE, 2010a, p. 3,4)

Os livros publicados por Sangiorgi para as quatro séries do ensino ginasial foram aceitos amplamente pelas escolas e professores. Tal fato é comprovado pelo expressivo número de coleções vendidas.

No entanto, a matemática do Colégio – referente às três séries finais do secundário – não teve a mesma atenção dada ao Curso Ginasial no que diz respeito à formulação curricular fundamentada nas ideias do MMM. O grande sucesso de vendas da coleção para o Ginásio, não despertou interesse suficiente no professor Sangiorgi para elaborar um didático para o Colegial. Uma das consequências deste fato pode decorrer da larga experiência obtida por Sangiorgi como professor do Ginásio ou, como aponta o pesquisador Wagner Valente:

> Pode-se, inicialmente, considerar que havia uma certa instabilidade na época, com relação à definição curricular para os ensinos do clássico e científico. A própria ramificação representava um elemento complicador para a elaboração de um texto didático único. (VALENTE, 2010a, p. 5)

A proposta do GEEM. elaborada em 1962 para o currículo do ensino colegial a ser apresentada no IV Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática, era composta de 18 tópicos distribuídos nas três séries: Função do 2º. Grau, Funções trigonométricas, Equações, Lei dos Senos e Cossenos, Introdução à Geometria Espacial, Diedros, Triedros, Corpos Redondos, Progressões, Logaritmos, Análise Combinatória, Geometria Analítica, Matrizes, Polinômios, Equações Algébricas, Limites e derivadas.

O Decreto de 1968 alterou a distribuição dos itens citados anteriormente nas três séries e, no intuito de atender a estas novas recomendações, o GEEM agiu rapidamente ao propor no mês seguinte um projeto-piloto para os dois anos iniciais do colegial que

[10] Congresso ocorrido em 1962 na cidade de Belém do Pará.

permaneceu com seis tópicos a cada ano escolar. Ao ser implementado nas escolas, a proposta foi avaliada em seguida pelos professores. Os tópicos para os dois anos iniciais eram: 1. Conjuntos; 2. Relação; 3. Aplicação; 4. Introdução à Geometria Analítica; 5. Progressões; 6. Funções circulares ou trigonométricas; 7. Resolução de triângulos; 8. Geometria; 9. Matrizes e Determinantes; 10. Análise Combinatória; 11. Probabilidades; 12. Função Logaritmo e Função Exponencial.

As pressões que surgiram no meio escolar para a publicação de um didático para o 2º ciclo do secundário foi eminente:

> (...) o arquivo da Cia. Editora Nacional mostra que o meio escolar, mais precisamente muitos dos professores que utilizaram a coleção de Sangiorgi para o ginásio, insistiram para que fosse publicado "um Sangiorgi para o colégio". O estrondoso sucesso de sua coleção de matemática moderna para aquele nível de ensino fez multiplicar as demandas na Editora Nacional para o lançamento de uma coleção para o 2º. Ciclo do curso secundário, as suas séries terminais. (VALENTE, 2010a, p. 6)

Assim, a Companhia Editora Nacional lançou em 1970, sob a autoria dos professores L. H. Jacy Monteiro, Osvaldo Sangiorgi e Renate Watanabe, a obra "Matemática 1 – Curso Moderno – 2º. Ciclo – Edição Preliminar". Contudo, esta obra foi um fracasso editorial e em consequência disto, Sangiorgi não continuou no projeto de elaboração dos dois últimos volumes.

Os motivos do fracasso de vendas são observados por Valente:

> De pronto, ficou claro que os autores elaboraram um projeto que não teve eco na cultura escolar. Essa rejeição da proposta ligou-se a uma variedade de fatores: apenas um dos autores da obra coletiva (Renate Watanabe) reunia experiência didático pedagógica com as séries finais do ensino secundário (colégio). Sangiorgi, como se sabe, era um "autor do ginásio". Jacy Monteiro parece ter debutado na escrita de textos para a escola elementar. Seu público, apesar das consultorias que dava aos autores de obras didáticas, era o do ensino superior. Trazido por Sangiorgi, para a escrita dos textos iniciais do primeiro volume da coleção moderna para o colégio, Monteiro escreveu um texto árido, de caráter rigoroso, fazendo jus à sua autoridade matemática. Assim, a reunião de textos desses autores não sensibilizou o cotidiano escolar. (VALENTE, 2010a, p.11)

Por outro lado, outros autores já haviam publicado alguns didáticos para o colégio anteriormente à tentativa de Sangiorgi, que não foi pioneira nesta proposta. Entre eles, podemos citar a publicação em três volumes feita pelo IBEP da obra "Curso

Colegial Moderno”, que data de 1967, elaborada pelos professores Scipione Di Pierro Netto, Luiz Mauro Rocha e Ruy Madsen Barbosa.

Os efeitos do Movimento da Matemática Moderna no colégio devem ainda ser analisados de forma mais precisa em outras pesquisas, conforme relata o pesquisador Wagner Valente:

> Tudo indica que ainda está para ser realizado um estudo aprofundado sobre como, em meio a mudanças curriculares substantivas, foi sendo consolidada uma matemática escolar para o colégio, construída à margem de diretivas nacionais e um tanto alheia ao papel do GEEM. Esse processo fez surgir novos autores e novas leituras da Matemática Moderna para as escolas, que a partir de 1971, passaram a ser denominadas de 2º. Grau. (VALENTE, 2010a, p. 12)

Assim, neste capítulo foram fornecidos dados relevantes sobre o panorama educacional antes dos anos 1930 até o final dos anos 60, onde foram observadas várias transformações no currículo escolar, mais especificamente, no que se situa o ensino de matemática.

Alguns momentos decisivos neste período apontaram para uma adequação da escola a uma nova realidade emergente, entre os quais, citamos as ideias debatidas nos congressos internacionais de 1908 e 1912 absorvidas pelo professor Euclides Roxo, e em seguida difundidas por este tanto na reforma Campos quanto na Capanema. Um dos pilares da renovação do ensino de matemática nestas reformas consistiu na integração da Aritmética, Álgebra e Geometria em torno do ensino de funções. Nos *Programas Mínimos* de 1951 não foram observadas alterações nos conteúdos de matemática para o ensino colegial comparados aos vistos na reforma Capanema. No entanto, com o advento dos ideais do Movimento da Matemática Moderna difundidos pelo GEEM - sob a liderança do professor Osvaldo Sangiorgi -, a matemática do ensino secundário foi repensada em todos os níveis.

O próximo passo da pesquisa consistirá na análise de livros didáticos que contenham o tópico *matrizes* e que estão inseridos nos diferentes períodos educacionais já destacados. Isto possibilitará, num primeiro momento, o refinamento dos dados históricos aqui mencionados e, em um segundo momento, permitirá construir uma história do tópico *matrizes* a partir das referências teórico-metodológicas escolhidas nesta investigação.

Capítulo 3

MATRIZES E LIVROS DIDÁTICOS

3.1 Introdução

Os livros didáticos de diferentes épocas se constituem em fontes importantes na compreensão da constituição das disciplinas escolares. Tal é a argumentação desenvolvida pelos estudos de André Chervel (1990). Seguindo o direcionamento apresentado por esse autor, iremos analisar um conjunto de obras didáticas que conduzirão a uma investigação da trajetória da abordagem do conteúdo *matrizes* a partir do final dos anos 1930 até o final da década de 1970. A análise em muito irá beneficiar-se de uma base de dados de livros didáticos organizada pelo GHEMAT. Trata-se do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática, coordenado pelo Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente que, em 2010, lançou um *DVD* intitulado “A Matemática do Colégio: livros didáticos para a história de uma disciplina”. Esse material reúne digitalizações parciais de obras didáticas publicadas no período 1930-1980, destinadas ao grau escolar que hoje denominados Ensino Médio. Essa base de dados reúne a produção didática mais significativa, em termos de número de edições e quantidade de obras utilizadas nos cinquenta anos que sucederam à primeira reforma nacional do ensino brasileiro, levada a cabo no governo Getúlio Vargas.

A escolha das obras didáticas para análise foi fundamentada nos critérios já anteriormente citados, tais como a importância do manual no que diz respeito às suas influências e significativa utilização no meio escolar, a importância política e profissional dos autores, bem como o período em que foram editados, estando em concordância temporal com as reformas educacionais implementadas. Nestas obras, vamos observar de que maneira o conteúdo *matrizes* foi introduzido no ensino de matemática.

Os livros didáticos para análise foram consultados, em grande parte, do sítio do GHEMAT[11]. Este grupo realiza pesquisas que procuram investigar a trajetória da disciplina Matemática em diferentes períodos da educação brasileira utilizando diversas fontes, dentre elas, os livros didáticos.

[11]Veja-se http://www.unifesp.br/centros/ghemat/DVD_s/HISTORIA/inicio.html

3.2 O conteúdo *matrizes* nos livros didáticos de Matemática dos Cursos Complementares

Os Cursos Complementares compunham os dois últimos anos do ensino secundário e eram ministrados em locais anexos às faculdades que eram designadas, com o objetivo de preparar os alunos para os cursos superiores. Desta maneira, os manuais didáticos possuíam características que eram consoantes aos objetivos do ensino deste período, conforme ressalta Valente:

> O fato de os livros didáticos elaborados para o Curso Complementar visarem o acesso ao ensino superior, e representarem quase que uma transcrição das aulas dos professores que ministravam esses cursos, permite uma análise desse material em termos da dinâmica de ensino utilizada naqueles tempos. (VALENTE, 2010b, p. 5)

Uma boa parte das obras destinadas aos Cursos Complementares apresentava certa similaridade com apostilas preparatórias que se caracterizavam pela abordagem de temas específicos de matemática, tais como Geometria Analítica, Cálculo Vetorial, Números Complexos, Trigonometria etc. (figura 3.1). Outras obras deste mesmo período apresentavam em seu conteúdo diversos temas matemáticos separados em capítulos (figura 3.2).

Devido à definição dos programas dos Cursos Complementares serem estabelecidas a partir de 1936, com a assinatura da portaria do Ministro Gustavo Capanema em 17 de março de 1936 (BICUDO apud VALENTE, 2010b, p. 4), os livros didáticos identificados pelos programas dos Cursos Complementares escolhidos para a presente análise, possuem edições que datam de 1938, 1942 e 1945.

No sítio do GHEMAT[12], são apresentados 28 livros didáticos destinados aos Cursos Complementares. Dentre tais obras, selecionamos aquelas que mencionaram de alguma forma as matrizes, que foi encontrada na abordagem dos determinantes e dos sistemas lineares.

[12] O endereço para acesso é: http://www.unifesp.br/centros/ghemat/DVD_s/HISTORIA/inicio.html

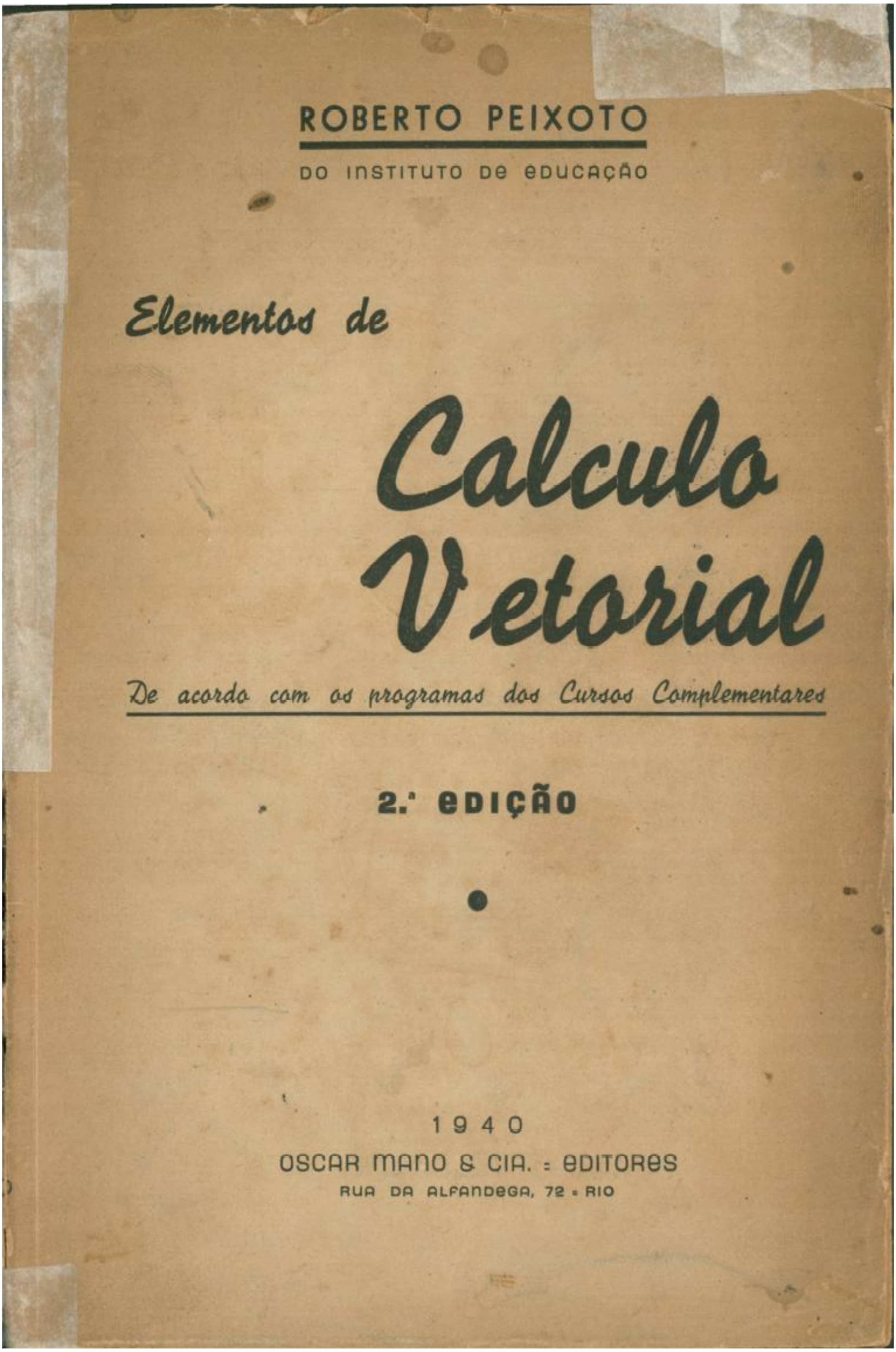
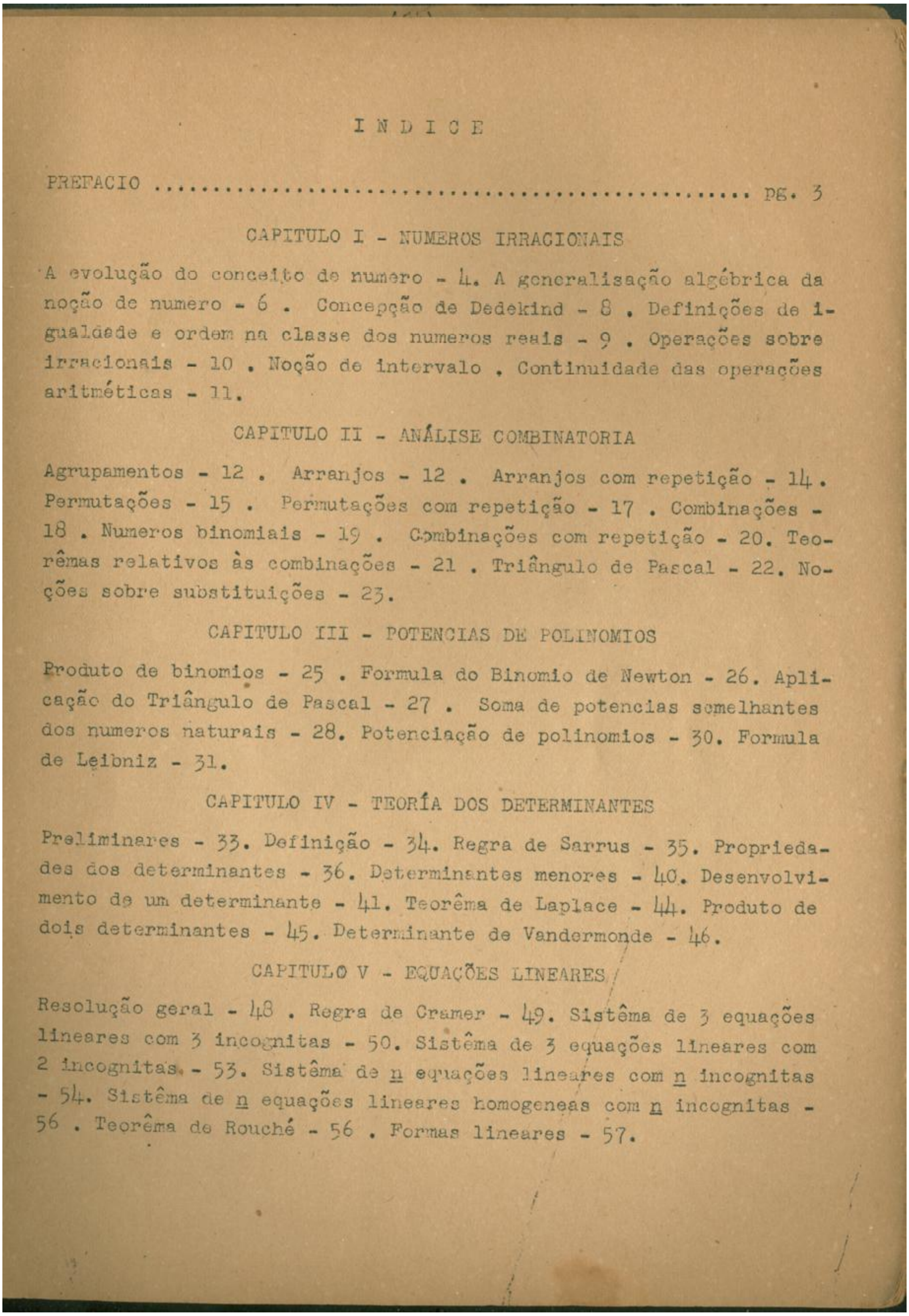


Figura 3.1: Capa do livro “Elementos de Cálculo Vetorial”. (PEIXOTO, 1940)



INDICE

Figura 3.2: Índice do livro “Lições de Matemática”. (CARVALHO, 1938)

3.2.1 CARVALHO, T. M. **Lições de Matemática**, 1938.

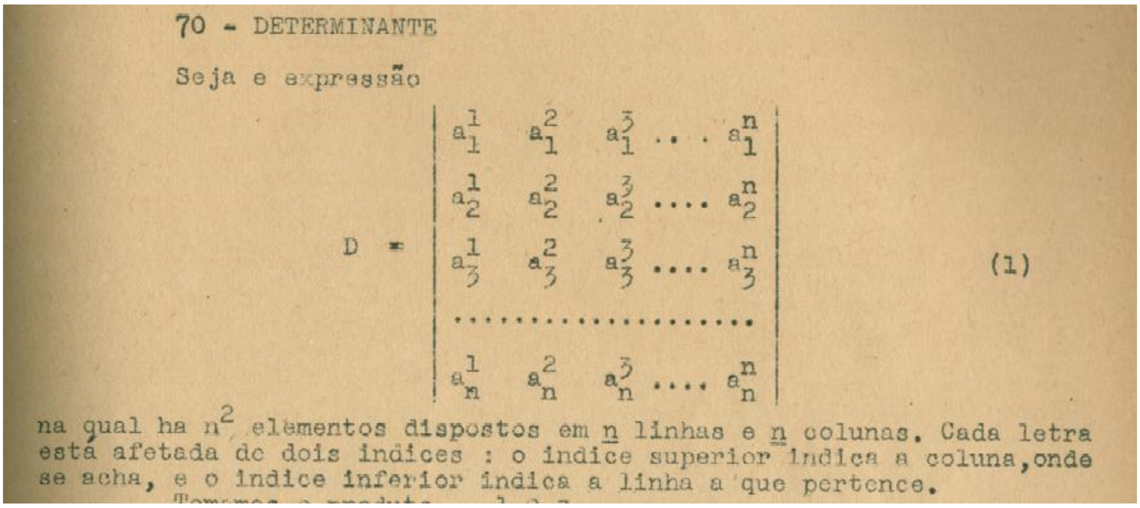
Na capa do livro, é informado que esta 6ª tiragem se encontra "de acordo com o programa do Curso Complementar de Engenharia". Além disso, são apresentadas as referências do autor, dentre elas destacamos sua posição enquanto "professor de Matemática (por concurso) do Ensino Secundário do Distrito Federal", atribuindo assim, grande relevância à obra.

No prefácio, o autor ressalta o objetivo do compêndio em facilitar os caminhos para o entendimento da Matemática, pois neste propósito, "(...) não há caminhos especiais para alunos, mas pode-se tornar-lhes mais acessível a estrada a seguir. (...) O acolhimento dispensado às nossas LIÇÕES DE TRIGONOMETRIA RETILINEA animou-nos a prosseguir."(CARVALHO, 1938, p.3). Esta informação revela o que já havíamos apontado anteriormente sobre as características das produções didáticas deste período de compartimentar tópicos de Matemática em obras separadas.

Os assuntos abordados são encontrados no índice, que apresenta os seguintes capítulos: Números Irracionais; Análise Combinatória; Potências de polinômios; Teoria dos Determinantes; Equações lineares. Assim, observamos que o tópico *matrizes* não está presente como título em nenhum dos capítulos. (figura 3.2)

A única citação feita no livro, que se aproxima da ideia de matriz, aparece no capítulo IV intitulado de *Teoria dos Determinantes* ao mencionar "(...) n^2 elementos dispostos em n linhas e n colunas." (CARVALHO, 1938, p. 34), no intuito de introduzir o processo de cálculo de determinantes de ordem n de n^2 elementos (figura 3.3). Este cálculo era fundamentado nos conceitos de *inversão* e *permutações positiva ou negativa*[13]apresentadas no início do capítulo. No entanto, o livro apresentava em seguida outros métodos para o cálculo de determinantes como a regra de Sarrus e algumas propriedades que facilitavam os cálculos, sem mencionar nestes pontos a palavra *matriz*.

[13] "Diz-se que numa permutação de "m" elementos, dois elementos formam uma inversão, quando não estão na sua ordem natural. Por exemplo, na permutação abdce os elementos d e c formam uma inversão, porque não estão em sua ordem natural, que é alfabética. Na permutação 2314 há duas inversões: dos elementos 2 e 1 e dos elementos 3 e 1, que não estão na ordem natural, que é a seqüência dos números naturais. A permutação a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 não apresenta inversão alguma. Seu número de inversões é zero. (...) Diz-se que uma permutação é positiva, quando contem um número par de inversões, que pode ser zero, e negativa quando contém um número ímpar de inversões." (CARVALHO, 1938, p. 33)



70 - DETERMINANTE

Seja e expressão

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \ldots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \ldots & a_3^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \qquad (1)$$

na qual ha n^2 elementos dispostos em n linhas e n colunas. Cada letra está afetada de dois indices : o indice superior indica a coluna, onde se acha, e o indice inferior indica a linha a que pertence.

Figura 3.3: Introdução ao cálculo dos determinantes retirado do livro "Lições de Matemática". (CARVALHO, 1938, p. 34).

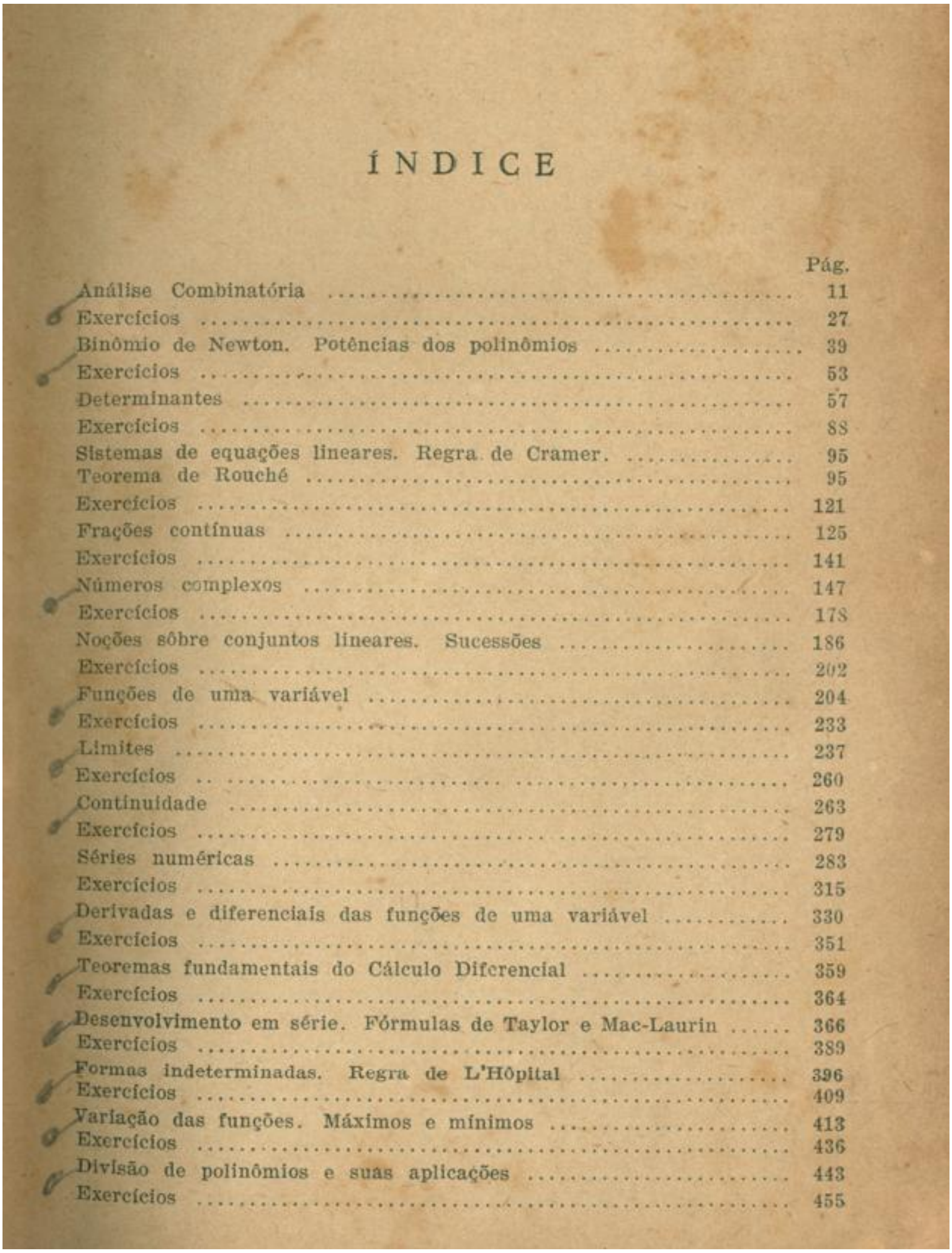
3.2.2 SERRÃO, A. **Análise Algébrica**, 1945.

Nos dados observados na capa deste livro didático, são apresentadas algumas referências do autor, dentre as quais citamos a de Docente-Livre da cadeira de Cálculo Infinitesimal, Geometria Analítica e Noções de Nomografia da Escola Nacional de Engenharia e professor do Colégio Pedro II, instituição educacional de referência na época da publicação, conferindo credibilidade à obra.

Analisando ainda os dados na capa, observamos que o compêndio pretende atingir os segmentos discentes do Curso Científico e das Escolas Militares, dos candidatos ao vestibular das Escolas de Engenharia, Química e Arquitetura, e também aos candidatos às Escolas de Filosofia.

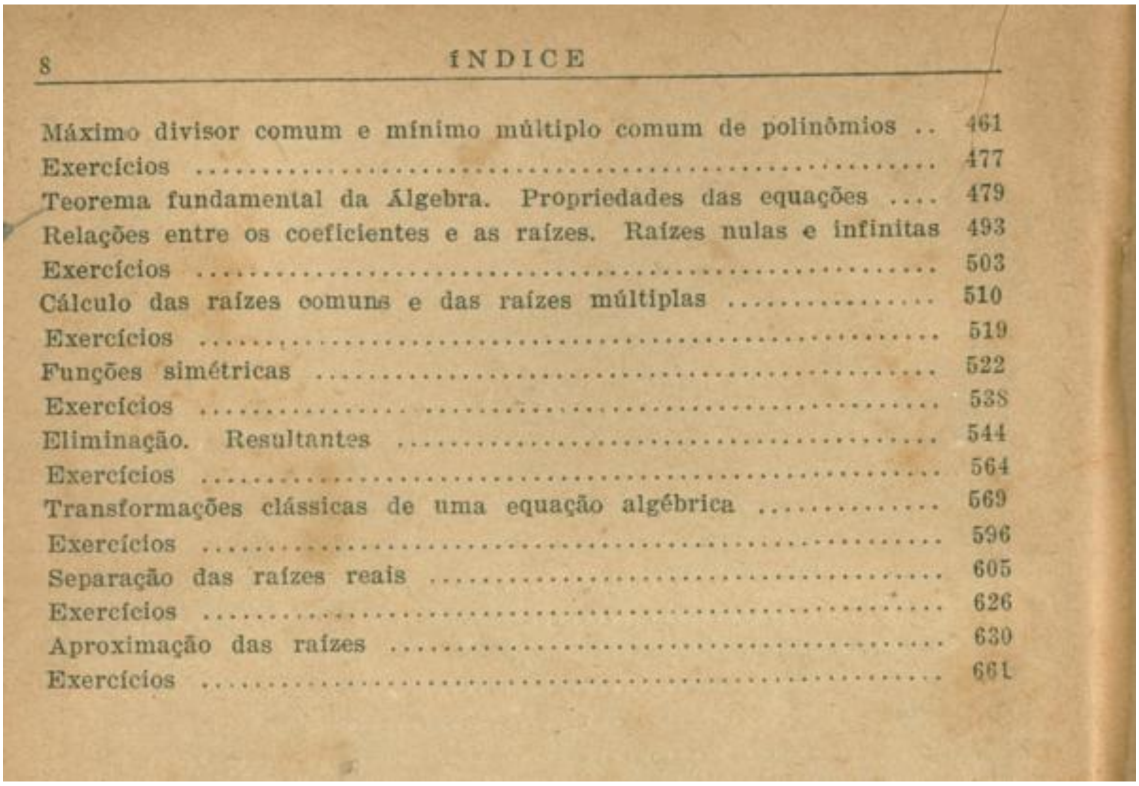
Apesar de ser editada em um período onde já vigorava a Reforma Capanema e de ser destinada aos alunos do Curso Científico, notamos o caráter preparatório para exames apresentada pela obra semelhante aquelas apresentadas nas produções do período dos Cursos Complementares.

No prefácio, o autor cita a grande aceitação da 1ª edição do manual didático entre alunos e professores, motivando-o para a elaboração de uma nova edição com 250 páginas a mais que a anterior, devido a alguns incrementos inseridos em determinados assuntos e da inclusão de numerosos exercícios (SERRÃO, 1945, p. 5). Este dado indica uma aceitação significativa do livro pelo público.



ÍNDICE

Figura 3.4: Primeira parte do índice do livro "Análise Algébrica". (SERRÃO, 1945)



8 ÍNDICE

Figura 3.5: Segunda parte do índice do livro "Análise Algébrica". (SERRÃO, 1945)

No índice (figuras 3.4 e 3.5) são apresentados vinte e seis capítulos e, seguindo o que ocorre com o livro anteriormente analisado, *matriz* não aparece como conteúdo independente no índice. No entanto, é mencionado o conceito de *matriz quadrada* no subitem "Definição de determinante" no capítulo 3 intitulado "Determinantes" (figura 3.6). Além disso, neste mesmo capítulo, são definidos os significados de diagonal principal e secundária do quadro que contém n linhas e n colunas (figura 3.6).

No capítulo IV que trata dos *sistemas lineares*, o primeiro subitem descrito como "Generalidades" apresenta um quadro com *m* linhas e *n* colunas, denominado *matriz retangular* de *mn* quantidades, que será chamada de *matriz do sistema* (figura 3.7). As resoluções dos sistemas lineares com *m* equações e *n* incógnitas se apoiam no cálculo de determinantes ao utilizar a regra de Cramer.

3 — Definição de determinante. Uma generalização fácil das noções anteriores, conduzirá à definição geral de determinante.

Consideremos n^2 números, dispostos em um quadro que contém n linhas e n colunas o qual toma o nome de *matriz quadrada,* ou simplesmente *matriz* e se anota, colocando duas barras verticais de cada lado do referido quadro

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{Vmatrix}$$

Desta sorte, a posição de uma letra qualquer fica perfeitamente determinada, pois as que se acham em uma dada linha estão afetadas do mesmo índice e a cada uma das colunas corresponde uma mesma letra.

A diagonal do quadro que vai da esquerda para a direita e de cima para baixo denomina-se *diagonal principal.* A outra recebe o nome de *diagonal secundária.*

Figura 3.6: Definição de *determinante* retirada do livro “Análise Algébrica”. (SERRÃO, 1945, p. 58)

1 — Generalidades. Sejam m e n dois números inteiros e positivos e consideremos o conjunto de $m \cdot n$ números reais representados sob a forma a_{ik}, dispostos em um quadro, tendo m linhas e n colunas, que recebe, como já sabemos, o nome de *matriz retangular* das mn quantidades.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (1)$$

Agora, podemos supor que as mn quantidades citadas sejam os coeficientes das n incógnitas $x_1, x_2, \dots x_n$, organizando-se assim o sistema de m equações lineares com n incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \dots + a_{1n}\,x_n = k_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \dots + a_{2n}\,x_n = k_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + \dots + a_{3n}\,x_n = k_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + a_{m3}\,x_3 + \dots + a_{mn}\,x_n = k_m \end{array}\right. \qquad (2)$$

onde $k_1, k_2, k_3, \dots k_m$ são os *têrmos conhecidos* e (1) a *matriz do sistema.*

Figura 3.7 – Subitem *Generalidades* retirado do capítulo IV intitulado de *sistemas lineares* do livro “Análise Algébrica”. (SERRÃO, 1945, p. 95)

3.2.3 LIMA, G. **Pontos de Matemática,** 1938.

Numa das informações contidas na capa deste livro, os "pontos de Matemática" estavam de acordo com os programas dos Cursos Complementares. Este dado é detalhado pelo próprio autor numa seção anterior ao prefácio intitulada *Ao leitor*, ao afirmar: "O que se vai ler não constitui propriamente um livro. É uma compilação de pontos exigidos pelos programas dos Cursos Complementares, para admissão às Faculdades de Medicina, Farmácia, Odontologia e Engenharia." (LIMA, 1938)

No que diz respeito às referências pessoais do autor, só aparece o dado "professor do Ginásio de Alfenas" na capa e contracapa do livro, podendo nos causar a primeira impressão que a obra não deveria possuir credibilidade junto a alunos e professores. No entanto, duas informações contidas nesse compêndio serão um contraponto a essa questão. A primeira se encontra na seção *Ao leitor*, onde o autor afirma realizar uma "(...) simplificação cuidadosa e resumo conciso das teorias desenvolvidas magistralmente em obras como o "Cours de Mathématiques Spéciales de **H. Comissaire**e **Cagnac**." (LIMA, 1938), acrescentando a grande influência de seu mestre Boutroux[14], a quem ele atribui sua formação intelectual.

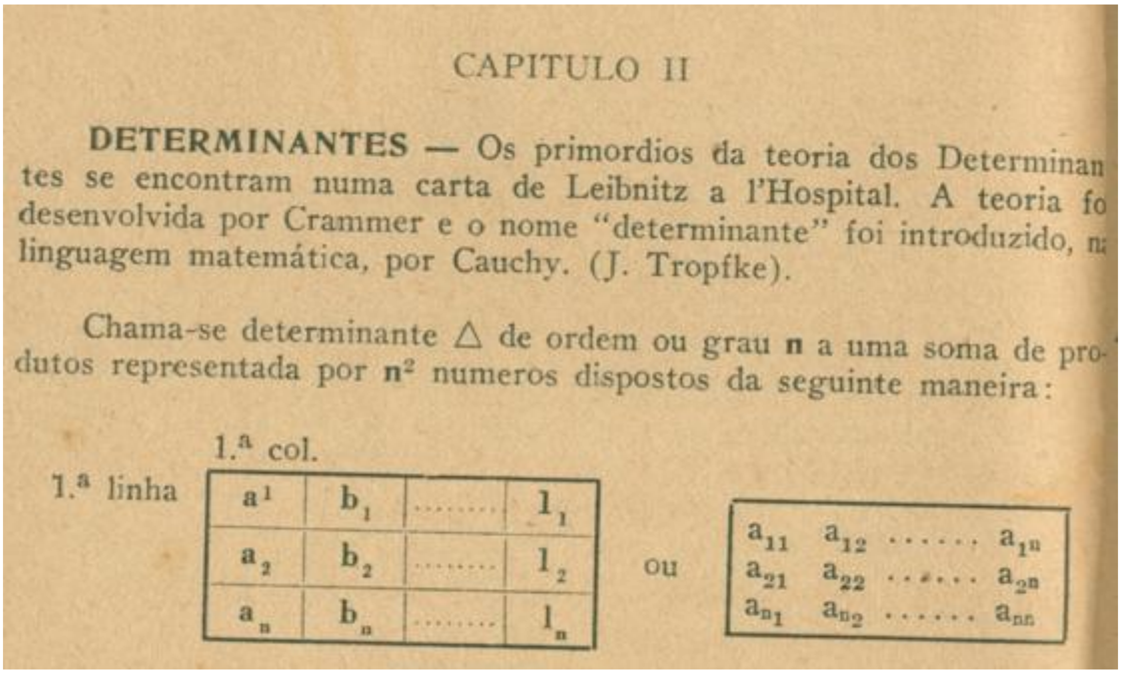
A segunda informação que atribui relevância à obra aparece no prefácio escrito por dois professores[15] catedráticos da Escola Nacional de Minas e Metalurgia da Universidade do Brasil, onde afirmam que a obra "(...) vem quebrar o rigoroso jejum a que têm sido condenados os estudantes dos Cursos Complementares, pela escassês completa de compêndios adaptados aos programas." (LIMA, 1938)

Devido ao índice não estar presente nesta cópia digitalizada pelo GHEMAT, procuramos observar no tópico determinantes – título do capítulo III – se a ideia de matriz foi abordada.

Neste capítulo, foram tratados dos cálculos de determinantes, suas propriedades e a resolução de sistemas. Antes de apresentar os métodos de cálculo dos determinantes, o autor realizou uma breve menção histórica do conteúdo, como pode ser observada na figura 3.8.

[14] O matemático francês Pierre Boutroux (1880-1922) foi historiador e filósofo da matemática.

[15]Christovam Colombo dos Santos e Miguel Maurício da Rocha



CAPITULO II

DETERMINANTES — Os primordios da teoria dos Determinantes se encontram numa carta de Leibnitz a l'Hospital. A teoria foi desenvolvida por Crammer e o nome "determinante" foi introduzido, na linguagem matemática, por Cauchy. (J. Tropfke).

Chama-se determinante $\triangle$ de ordem ou grau **n** a uma soma de produtos representada por **n**² numeros dispostos da seguinte maneira:

1.ª col.

1.ª linha

a^1	b_1	....	l_1
a_2	b_2	....	l_2
a_n	b_n	....	l_n

ou

$$\begin{array}{|cccc|} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{array}$$

Figura 3.8: Considerações iniciais do capítulo II do livro "Pontos de Matemática", que trata dos Determinantes. (LIMA, 1938, p. 14)

Ao introduzir a definição de determinante, observamos que em nenhum momento se atribui um nome à disposição dos n² elementos indicados acima. O mesmo ocorre na apresentação dos métodos de Sarrus e de Laplace - embora não mencione o nome deste último - para o cálculo de determinantes.

A regra de Cramer foi utilizada como método de resolução de sistemas lineares e não foi observada a presença de matrizes ou de algo semelhante a esta ideia.

3.2.4. CASTRO, J. E.; MAURER, W. **A. Exercícios de Matemática, Curso Pré-Politécnico**, 1942**.**

Este é o primeiro fascículo da obra voltada para o curso Pré-Politécnico que aborda exercícios de determinantes, limites e séries.

Na capa consta a referência de que J. E. Castro e W. Maurer eram professores do Instituto Mackenzie. Além disso, o primeiro professor citado lecionava também no Colégio São José.

Nos exercícios que envolvem o conteúdo de Determinantes, são apresentadas questões que requisitam os seguintes conteúdos: cálculo do número de inversões, cálculo de determinantes, aplicação da Regra de Sarrus, utilização das propriedades dos determinantes, resolução de sistemas lineares, o Teorema de Rouché-Capelli e a discussão de sistemas em função de um parâmetro real.

As matrizes não foram mencionadas em nenhum dos exercícios do livro que tratava dos conteúdos descritos acima.

3.3 O conteúdo *matrizes* nos livros didáticos de Matemática dos Cursos Clássico e Científico

Os Cursos Clássico e Científico foram criados na década de 40 pela Reforma Gustavo Capanema reorganizando o ensino secundário brasileiro. Além estabelecer o aumento de 2 para 3 anos para o segundo ciclo do ensino secundário, a reforma deixou de lado o caráter preparatório dos Cursos complementares ao atribuir um sentido mais amplo na formação do aluno. Além disso, algumas transformações na organização dos conteúdos de matemática foram observadas:

> Ocorreu um processo de agrupamento, seriação e criação de “unidades didáticas” interligadas, dentro dos ramos matemáticos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria. Temas de maior aprofundamento de álgebra foram retirados, assim como o Cálculo Vetorial, considerado como matéria do ensino superior; apenas permanecendo a ideia de vetor no início da “Trigonometria”. (VALENTE, 2010b, p. 6)

A partir destas profundas transformações implementadas na organização curricular, se fez necessária a produção de novas obras didáticas direcionadas às três séries dos cursos clássico e científico, seguindo as orientações curriculares e metodológicas da reforma, que apontavam para uma padronização dos conteúdos e suas inter-relações, gerando unidades didáticas.

Desta maneira, foram promovidas mudanças significativas na organização dos conteúdos nos livros didáticos para os cursos clássico e científico ao agrupar assuntos distintos em um mesmo livro com o título “Matemática” (figuras 3.9 e 3.10), comparado ao que era observado nas obras destinadas aos Cursos Complementares, que por sua vez, direcionavam o conteúdo para algum tema específico, como por exemplo, Cálculo Vetorial.

Neste período, professores do ensino secundário como Euclides Roxo e Algacyr Munhoz Maeder - que se destacaram na publicação de didáticos para o Ginásio na década de 30 - produziram compêndios para o colégio. Além disso, ocorre a união de autores de livros didáticos de Matemática que atendiam aos Cursos Complementares para a elaboração de novos livros que atendam aos programas propostos pela Reforma Capanema. (RIBEIRO, 2006, p. 74)

Figura 3.9: Capa do livro "Matemática – 2º. Ciclo – Cursos Científico e Clássico". (ROXO, 1944)

ÍNDICE

Figura 3.10: Primeira e segunda partes extraídas do índice do livro “Matemática – 2º. Ciclo – cursos científico e clássico – 2ª série”. (ROXO, 1944)

Professor do Colégio Pedro II e personagem influente na elaboração das mudanças propostas pela reforma curricular e metodológica da matemática escolar, Euclides Roxo produziu juntamente com outros três professores – Haroldo Lisboa da Cunha, do Colégio Pedro II, Roberto Peixoto e Cesar Dacorso Neto, do Instituto de Educação – a coleção de maior importância nesta época, conhecida como a coleção dos quatro autores, intitulada de "Matemática – 2º. Ciclo– Cursos Clássico e Científico". De acordo com o pesquisador Wagner Valente,

> A coleção teve vida longa, atravessou a década de 40, tendo impressões readaptadas até o início dos anos 1960, em mais de uma dezena de edições. Editada pela casa Francisco Alves, a coleção constituiu herança dos tempos em que o Colégio Pedro II, modelo para ensino secundário brasileiro, referenciava toda a produção didática para o ensino secundário brasileiro. (VALENTE, 2010b, p. 7)

Devido à expedição dos programas de matemática pela Reforma Capanema terem ocorrido em 1943, os três livros selecionados para análise datam de 1949, 1951 e 1954. Nas páginas iniciais das duas primeiras publicações, são expostos os programas dos cursos clássico e científico referente à série que tal obra se destina. (figura 3.11)

Na análise das obras a seguir, observamos que o tema matrizes é mencionado em livros de 2ª série para o colegial ao tratar da *teoria dos determinantes* e da *resolução de sistemas de equações lineares*.

Selecionamos três livros para análise. Os dois últimos livros foram consultados do sítio do GHEMAT, onde constam 25 livros didáticos destinados aos últimos anos do ensino secundário e inseridos no período em que vigoravam as determinações da Reforma Capanema.

3.3.1 ROXO, E. et al. **Matemática 2º Ciclo – 2ª série.** Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1949.

Na contracapa são apresentadas as referências dos autores, anteriormente citadas, como professores do Colégio Pedro II e do Instituto de Educação.

Na seção *Advertência*, é destacado que este volume pertence à série *Matemática 2º ciclo* destinada aos alunos dos Cursos Clássico e Científico.

Ainda nesta seção, embora os autores afirmem que "A matéria não ficou adstrita aos títulos e subtítulos dos atuais programas" (ROXO, 1949, advertência), eles revelam a preocupação com o cumprimento dos programas propostos ao 2º ciclo, compostos de

PROGRAMA DA SEGUNDA SÉRIE

ÁLGEBRA

Unidade I. — A função exponencial: 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. **Noção de função exponencial e de sua função inversa.** 3. Teoria dos logarítmos; uso das tábuas; aplicações. 4. Resolução de algumas equações exponenciais.

Unidade II. — O binômio de Newton: 1. Noções sôbre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

Unidade III. — **Determinantes: 1. Teoria dos determinantes. 2. Aplicação aos sistemas de equações lineares; regras de Crammer; teorema de Rouché.**

Unidade IV. — **Frações contínuas: Noções sobre frações contínuas.**

GEOMETRIA

Unidade V. — Os corpos redondos: 1. Noções sôbre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3. Estudo da esfera, área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera.

TRIGONOMETRIA

Unidade VI. — Vetor: 1. Grandezas escalares e vetoriais. 2. Noção de vetor; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vetores. 4. Vetores deslisantes sôbre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.

Unidade VII. — Projeções: 1. Projeção ortogonal de um vetor sôbre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projeção de um vetor.

Unidade VIII. — Funções circulares. 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos $\frac{p\pi}{n}$.

Unidade IX. — **Transformações trigonométricas:** 1. **Fórmulas de adição, subtração, multiplicação e divisão de arcos: aplicações. 2. Transformação de somas em produtos; aplicação ao cálculo numérico.** 3. Uso das tábuas trigonométricas.

Unidade X. — **Equações trigonométricas: Resolução e discussão de algumas equações trigonométricas simples.**

Unidade XI. — Resolução de triângulos: 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Resolução de triângulos retângulos. 3. **Resolução de triângulos obliquângulos.** 4. **Aplicações imediatas à topografia.**

OBSERVAÇÃO: Os assuntos impressos em negrita são exclusivos do programa do curso científico.

Figura 3.11: Programa da segunda série extraído do livro "Matemática – 2º. Ciclo – cursos científico e clássico – 2ª série". (ROXO, 1949) partes *nitidamente distintas* – elaboradas separadamente por cada autor – que compreendem: *Aritmética Teórica, Álgebra elementar e complementar (incluída a teoria das equações), Geometria elementar, Trigonometria, Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*. (ROXO, 1949, advertência).

No que diz respeito ao desenvolvimento dos conteúdos na coleção, é observada a proposta do método heurístico nas entrelinhas do discurso:

> Tais desenvolvimentos, apresentados, em geral, em tipo menor, permitirão certa liberdade quanto à extensão a dar ao curso, de acordo com a reação oferecida pelo aluno.
> Cumpre observar, ainda, que as notas, que ilustram algumas passagens e completam outras, tiveram, em sua maioria, a dupla finalidade de ampliar os conhecimentos do aluno e de incitar-lhe a curiosidade pela matéria. (ROXO, 1949, advertência)

Nesta 4ª edição voltada para os alunos da 2ª série, foram apresentadas as seguintes partes que estão inseridas na disciplina Matemática: Álgebra, por Cesar Dacorso Neto; Geometria, por Euclides Roxo e Trigonometria elaborada por Roberto Peixoto.

Na página seguinte à Advertência, é apresentado o *Programa da segunda série* (Figura 3.11) e em seguida é observado que "os assunto impressos em negrita são exclusivos do programa do curso científico" (ROXO, 1949). Assim, a Unidade III contida na parte Álgebra, que apresentava o tópico *Determinantes*, não era lecionada aos alunos do Curso Clássico.

Observando ainda a apresentação dos programas da segunda série, verifica-se que o conteúdo "matrizes" não aparece em nenhum dos tópicos. Entretanto, a primeira definição apresentada no estudo dos determinantes (unidade III) é a de matriz (item 78): "o conjunto de m.n números, dispostos em m linhas horizontais e n linhas verticais, constitue um símbolo denominado matriz retangular de m linhas e n colunas." (ROXO, 1949, p.117). Além disso, a representação dos elementos com dois índices também é mencionada ao mostrar a disposição dos elementos num quadro retangular limitado por duas barras verticais.

Ao final da apresentação tanto da definição de matriz quanto da representação de um elemento da matriz com uma letra e dois índices, foram inseridas, respectivamente, duas notas de rodapé com conteúdo histórico. A primeira descreve: "Deve-se a denominação matriz a J. J. Sylvester (Anessayon canonical forms, Londres, 1851), e a notação correspondente a A. Cayley (1821-1895)". A segunda nota é assim descrita: "Leibniz (1646 – 1716) introduziu o emprego de dois índices." (ROXO, 1949, p. 117)

Após encerrar a breve introdução do conceito de matriz, o autor ressalta que serão estudadas em particular "as matrizes quadradas e os polinômios chamados determinantes que dessas matrizes se derivam segundo normas a estabelecer" (ROXO, 1949, p.117). Outros conceitos como diagonal principal, diagonal secundária, termo principal e termo secundário são colocados posteriormente no item 79 intitulado "determinante".

Os itens restantes (80 a 96) que complementaram a Teoria dos Determinantes foram os seguintes: Conclusões; Observações; Exemplos; Regra de Sarrus; Propriedades dos determinantes; Aplicações; Menores de um determinante; Observações; Complemento algébrico; Desenvolvimento de um determinante pelos seus menores[16]; Desenvolvimento segundo os elementos de uma linha ou coluna; Consequências do teorema de Laplace; Elevação e abaixamento da ordem de um determinante[17]; Produto de determinantes; Quadrado de um determinante; Observações; Determinantes especiais.

Nos enunciados dos exercícios propostos que aparecem após a abordagem dos conteúdos descritos acima, a palavra "matriz" não se apresentou em nenhum momento.

No item 97 intitulado de "Generalidades" do tópico "Aplicação aos sistemas de equações lineares; Regras de Cramer; Teorema de Rouché", são introduzidos os conceitos de *matriz incompleta* e de *matriz completa* de um sistema de *m* equações e *n* incógnitas. (ROXO, 1949, p. 161). Ao final da definição de matriz incompleta, é inserida a seguinte nota de rodapé: "Cfr. Annibale Comessati, "Lezzione di Analisi Algébrica", Pádua, 1931, pág. 103.".

A definição de *determinante de um sistema* apresentada no item "Sistemas de *n* equações lineares de *n* incógnitas" é introduzida usando a ideia de *matriz incompleta*. Este termo é utilizado em alguns dos 8 itens restantes do capítulo.

Nos exercícios sobre resolução de sistemas lineares, o termo *matriz* não foi mencionado em nenhum dos enunciados.

Assim, o livro não faz menção a matrizes no que diz respeito às operações, propriedades e a seus vários tipos, antecipando-se ao estudo de determinantes, como é comum nos livros atuais.

[16] Neste item é apresentado o subitem "Teorema de Laplace".
[17] Neste item é apresentada a Regra de Chió.

O índice da obra é apresentado nas duas últimas páginas do livro. (Figura 3.10)

3.3.2 MAEDER, Algacyr Munhoz. **Curso de Matemática.** São Paulo: Melhoramentos, 1951.

Algacyr Munhoz Maeder foi Professor Catedrático do Colégio Estadual do Paraná, da Faculdade de Engenharia do Paraná e da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Paraná, conforme consta na contracapa.

Os programas dos cursos Clássico e Científico, que são os mesmos vistos na obra anterior, são apresentados em páginas separadas, imediatamente antes do índice que detalha todos os itens dos vinte e cinco capítulos.

No capítulo VIII, que trata da teoria dos determinantes, o 4º e 5º itens se intitulam "Matrizes" e "Matriz quadrada", respectivamente. Como ocorre com o livro anteriormente analisado, esta publicação apresenta a mesma definição de uma matriz qualquer, e a representação de seus elementos com uma letra e dois índices. No item seguinte, é dado o significado de matriz quadrada (Figura 3.12), preparando o leitor para o estudo dos determinantes. Observamos que nestes itens não são apresentados exemplos de matriz qualquer ou de matriz quadrada.

Ainda no 5º item, são mencionados os significados de diagonal principal e secundária e os conceitos de termo principal e secundário. (Figura 3.12)

No item "determinante principal" do capítulo IX intitulado de "Aplicação dos determinantes aos sistemas de equações lineares", são encontradas as seguintes definições: *matrizes completa* e *incompleta* associadas a um sistema de *n* equações e *m* incógnitas; *característica* de uma matriz e determinante principal da matriz ou do sistema. (Figuras 3.13 e 3.14)

Ao final dos capítulos VIII e IX, foram propostos cinquenta exercícios que não citam em nenhum de seus enunciados o termo "matriz".

3.3.3. NETTO, F. A. L. **Teoria Elementar dos Determinantes,** 1954

Observamos na contracapa desta obra, que se apresenta em sua 3ª edição, a seguinte referência ao autor: "Professor do Instituto Tecnológico da Aeronáutica". Devido ao autor pertencer a uma instituição de ensino de considerável credibilidade no país e por se tratar de uma obra que se encontra na 3ª edição, justifica-se a seleção deste compêndio para análise.

102 ALGACYR MUNHOZ MAEDER

onde o primeiro índice indica a ordem da fila e o segundo a da coluna do elemento considerado.

Dessas notações, usaremos apenas a primeira.

112. **Matriz quadrada.** — A matriz pode ser *rectangular* ou quadrada, conforme seja $m \neq n$ ou $m = n$. Na matriz quadrada, o número de elementos é n^2, dizendo-se que n é a ordem da matriz.

A matriz quadrada é, pois, um quadro do tipo

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \ldots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \ldots a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 \ldots a_n^n \end{Vmatrix}$$

Na matriz quadrada, os elementos

$$a_1^1, \quad a_2^2, \quad a_3^3, \quad \ldots a_n^n,$$

cada um dos quais tem os índices iguais, chamam-se elementos principais, e o seu conjunto constitui a *diagonal principal* da matriz.

Por outro lado, os elementos

$$a_n^1, \quad a_{n-1}^2, \quad a_{n-2}^3, \quad \ldots a_1^n,$$

nos quais a soma dos índices é $n+1$, formam a *diagonal secundária* da matriz.

Ao produto dos elementos da diagonal principal,

$$a_1^1 \; a_2^2 \; a_3^3 \ldots a_n^n,$$

dá-se a denominação de *termo principal*, e ao produto dos elementos da diagonal secundária,

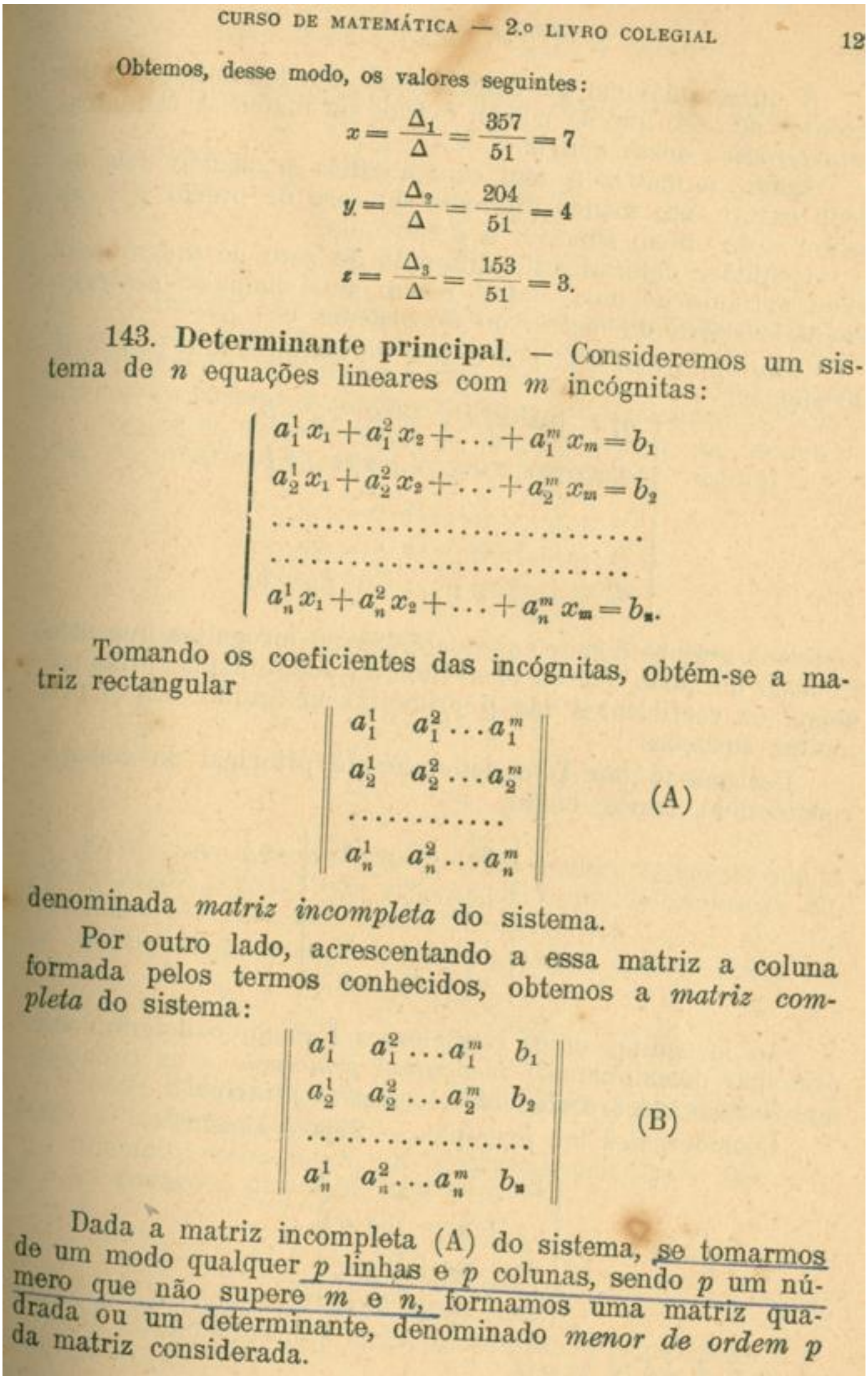
$$a_n^1 \; a_{n-1}^2 \; a_{n-2}^3 \ldots a_1^n,$$

a de *termo secundário*.

113. **Determinantes.** — Chama-se *determinante* de uma matriz quadrada a soma algébrica dos produtos que se obtêm efectuando todas as permutações dos índices superiores do

Coluna

Figura 3.12: Definições de matriz quadrada, diagonal principal, diagonal secundária, termo principal e termo secundário do livro “Curso de Matemática”. (MAEDER, 1951, p. 102)



CURSO DE MATEMÁTICA — 2.º LIVRO COLEGIAL 12

Obtemos, desse modo, os valores seguintes:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{357}{51} = 7$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{204}{51} = 4$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{153}{51} = 3.$$

143. Determinante principal. — Consideremos um sistema de n equações lineares com m incógnitas:

$$\left|\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^m x_m = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^m x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^m x_m = b_n. \end{array}\right.$$

Tomando os coeficientes das incógnitas, obtém-se a matriz rectangular

$$\left\| \begin{array}{lll} a_1^1 & a_1^2 \ldots a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots a_2^m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots a_n^m \end{array} \right\| \qquad (A)$$

denominada *matriz incompleta* do sistema.

Por outro lado, acrescentando a essa matriz a coluna formada pelos termos conhecidos, obtemos a *matriz completa* do sistema:

$$\left\| \begin{array}{llll} a_1^1 & a_1^2 \ldots a_1^m & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots a_2^m & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots a_n^m & b_n \end{array} \right\| \qquad (B)$$

Dada a matriz incompleta (A) do sistema, se tomarmos de um modo qualquer p linhas e p colunas, sendo p um número que não supere m e n, formamos uma matriz quadrada ou um determinante, denominado *menor de ordem* p da matriz considerada.

Figura 3.13: Definições de matrizes completa e incompleta de um sistema linear, extraído do livro "Curso de Matemática". (MAEDER, 1951, p. 127)

128 ALGACYR MUNHOZ MAEDER

A ordem máxima do determinante ou determinantes diferentes de zero que se podem extrair da matriz A chama-se *característica* dessa matriz.

Assim, a matriz A tem característica p quando dela se pode extrair um menor diferente de zero de ordem p e os menores de ordem superior a p são nulos.

Qualquer determinante diferente de zero de ordem máxima extraído de uma matriz rectangular chama-se *determinante principal* da matriz ou do sistema.

Admitindo que seja p a ordem do determinante principal do sistema

$$\left|\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^m x_m = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^m x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^m x_m = b_n. \end{array}\right.$$

podemos sempre dispor as equações e as incógnitas que nele figuram de modo que os elementos do determinante principal sejam os coeficientes das p primeiras incógnitas nas p primeiras equações.

Designando por D o determinante principal do sistema considerado, temos, então,

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots a_2^p \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_p^1 & a_p^2 \ldots a_p^p \end{vmatrix}$$

As incógnitas cujos coeficientes formam o determinante principal denominam-se *incógnitas principais* e as equações que contêm esses coeficientes, *equações principais*.

Consideremos um exemplo. — Seja o sistema

$$\left|\begin{array}{l} 2x - 3y + 5z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ 4x - 6y + 10z = 4 \\ 2x + 3y + 5z = 12, \end{array}\right.$$

no qual $n = 4$ e $m = 3$.

Figura 3.14: Definições de *característica* de uma matriz e determinante principal da matriz ou do sistema extraído do livro "Curso de Matemática". (MAEDER, 1951, p. 128)

No prefácio da 1ª edição da obra que data de 1943, o autor critica a falta de compêndios adequados que contemplem os programas estabelecidos. Além disso, a obra possui a característica de uma apostila que aborda um conteúdo específico, neste caso, a "Teoria elementar dos Determinantes". Este fato corrobora o que Chervel afirma sobre o trabalho do historiador das disciplinas escolares junto aos livros didáticos selecionados em um período de transição na estrutura de ensino que, neste caso, refere-se dos Cursos Complementares para os Cursos Clássico e Científico.

O conteúdo do livro não aborda o conteúdo "matrizes" como um objeto matemático que possui propriedades específicas, operações etc. A abordagem deste tema é feita de forma semelhante aos dois livros analisados anteriormente.

No entanto, no prefácio da última edição desta obra, que data de 1954, o autor promete aos leitores que futuramente os capítulos "Determinantes Cúbicos", "Determinantes Infinitos" e "Determinantes Funcionais" podem ser inseridos "(...) em um compêndio que estamos escrevendo, sobre matrizes." (NETTO, 1954, prefácio da 3ª edição)

3.4 O conteúdo *matrizes* nos livros didáticos de Matemática dos Programas Mínimos

As portarias ministeriais nº 966 e nº 1054 de 1951 instituíram os "Programas Mínimos" definidos a partir de deliberações elaboradas pela Congregação do Colégio Pedro II para as disciplinas escolares, no intuito de "(...) estabelecer um limite inferior aos quais todas as instituições escolares estariam sujeitas e em condições de executá-lo." (MARQUES, 2005, p. 53). No entanto, esta proposta não está veiculada somente à ideia de redução de conteúdos, mas também à flexibilização na elaboração de programas que cada região do país pode propor a partir dos *programas mínimos*, levando em conta suas especificidades.

No que tange ao currículo de Matemática, foi observada a unificação dos programas destinados aos cursos clássico e científico, além de adotar modificações na apresentação dos conteúdos comparados com o que eram estabelecidos nos anos 1940.

Este fato pode ser verificado ao confrontar os programas estabelecidos pela Reforma Capanema com os determinados pelos "Programas Mínimos" para a mesma série (figuras 2.5 e 2.6). Tais programas foram extraídos de dois livros didáticos de mesmos autores – o livro dos quatro autores –, porém editados em épocas distintas. Na capa do livro editado em 1955, consta a informação “De acordo com a portaria ministerial nº 1045 de 14 de dezembro de 1951”, conforme figura 3.15 abaixo:

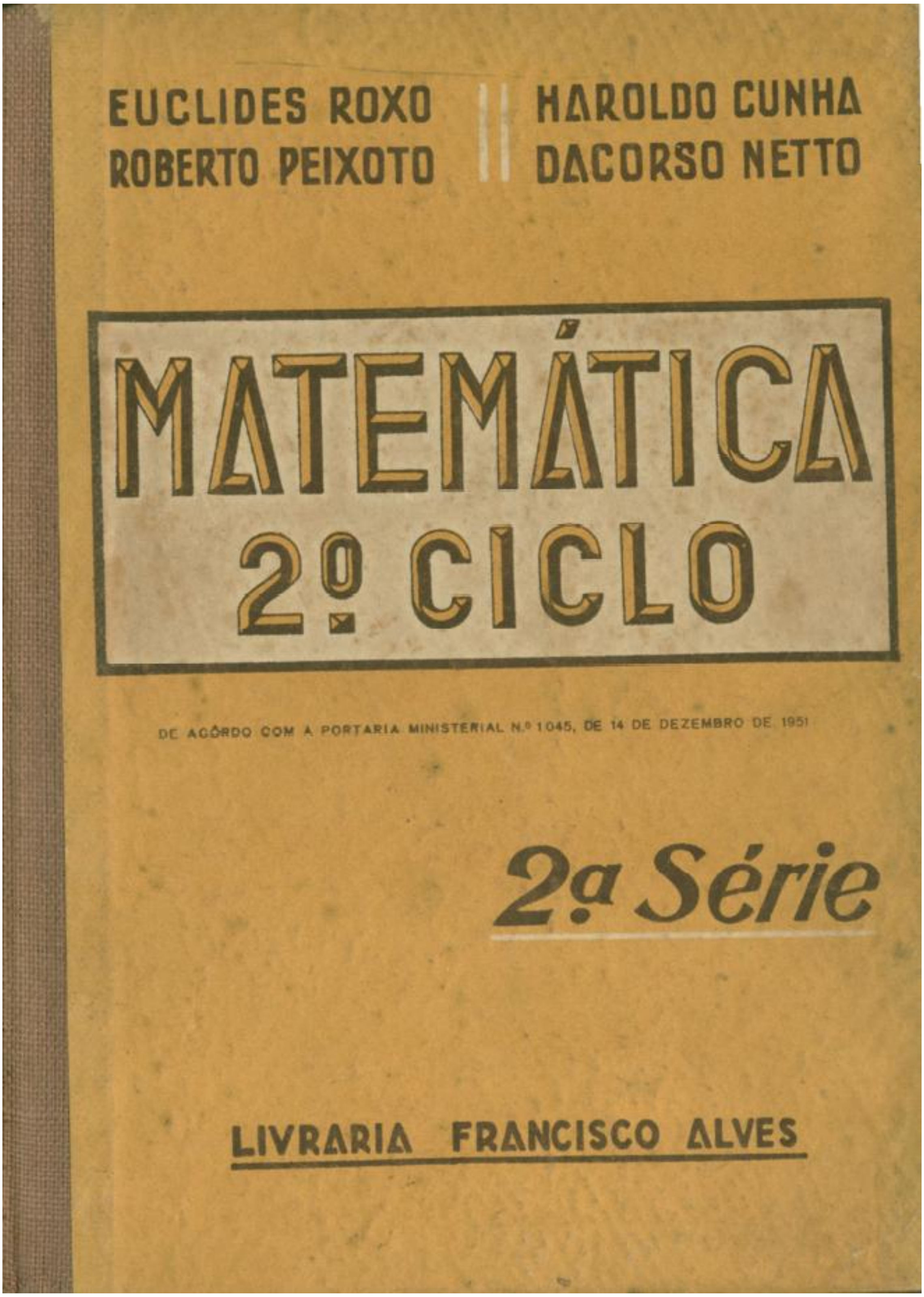


Figura 3.15: Capa do livro “Matemática – 2º ciclo – 2ª série”. (ROXO et al., 1955)

A partir das críticas aos programas e aos métodos que privilegiavam uma excessiva inclinação ao desenvolvimento teórico e abstrato da Matemática – principalmente no curso científico – foram promovidas alterações significativas no programa, observando maior simplicidade em sua apresentação. Outras características apontadas pelos novos programas incluíam:

> (...) à unidade na discriminação da matéria, à perfeita coordenação com os programas das disciplinas afins, como desenho e física e de um favorecimento de um ensino mais no sentido educativo do que no sentido informativo e superficial. (MARQUES, 2005, p. 54)

As duas primeiras obras selecionadas para análise são direcionadas aos alunos do 2º ano do 2º ciclo e suas edições datam de 1952 e 1962. Tanto o primeiro livro didático, da autoria de Thales Mello Carvalho, professor do Instituto de Educação, quanto o segundo livro, do autor Ary Quintella, professor do Colégio Militar do Rio de Janeiro, possuem na contracapa a informação da conformidade com os programas em vigor, conforme portarias nº 966, de 2/ 10/ 51 e 1045, de 14 /12/ 51.

Por outro lado, a terceira obra aqui analisada, da autoria do professor José Abdelhay, da Universidade do Brasil, que se destina especificamente aos candidatos aos cursos superiores, não observa a informação relativa às portarias anteriormente mencionadas. Contudo, devido ao fato de ter sido editado em 1956, este didático se encontra em consonância temporal ao período referente à vigência da portaria de 1951.

3.4.1 CARVALHO, T. M. **Matemática para os cursos clássico e científico – 2º ano.** 5ª edição. Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1952.

O professor Thales Mello Carvalho foi Catedrático da Faculdade Nacional de Ciências Econômicas da Universidade do Brasil e do Instituto de Educação do Distrito Federal. Extraímos um fragmento do texto “Nota do Editor” do livro *Matemática – 2º ciclo*, editado em 1969 pela Fundação Getúlio Vargas (FGV), outra referência que indica aceitação e credibilidade da obra:

> De sua atividade[18] destaca-se o lançamento ou reedição de uma série de livros destinados principalmente aos professores e estudantes brasileiros dos cursos de nível médio. Neste último caso situa-se o famoso livro do Professor THALES MELLO CARVALHO, agora sob a responsabilidade desta instituição.

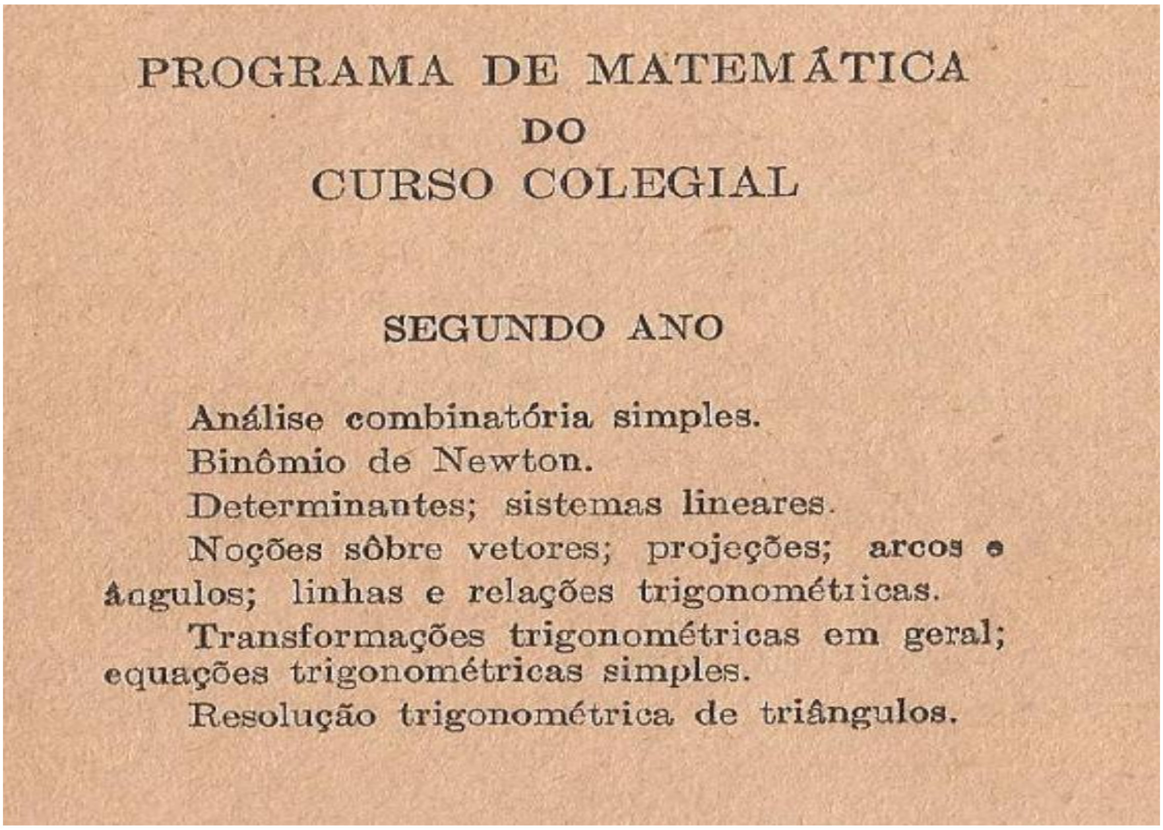
[18] Atividade do *Serviço de Publicações* da Fundação Getúlio Vargas.

> O nome do autor e as inúmeras edições atingidas tornam desnecessária qualquer apresentação dessa obra, vastamente conhecida em todo País, por alunos e professores de Matemática. (CARVALHO, 1969, nota do editor)

Esta edição realizada pela FGV reúne em um único volume as três obras clássicas do autor intituladas "Matemática para os cursos clássico e científico", incluídas algumas breves atualizações do revisor. (CARVALHO, 1969, nota do editor)

Retornando à análise da obra direcionada aos alunos do segundo ano do colegial, como já havíamos destacado anteriormente, observamos na contracapa a afirmação "de acordo com os novos programas oficiais – Portaria nº 966 de 2/ 10/ 1951". (CARVALHO, 1952, contracapa)

Esta informação nos remete às mudanças propostas na implementação dos *Programas Mínimos*, que se reflete na apresentação dos programas para o segundo ano: enquanto os livros do período da Reforma Capanema apresentavam em suas páginas iniciais os programas para os cursos Clássico e Científico, distinguindo-os, nesta obra é apresentada um programa único para o curso colegial:


PROGRAMA DE MATEMÁTICA
DO
CURSO COLEGIAL

SEGUNDO ANO

Análise combinatória simples.
Binômio de Newton.
Determinantes; sistemas lineares.
Noções sôbre vetores; projeções; arcos e ângulos; linhas e relações trigonométricas.
Transformações trigonométricas em geral; equações trigonométricas simples.
Resolução trigonométrica de triângulos.

Figura 3.16: Programa de Matemática para o segundo ano do Curso Colegial extraído do livro "Matemática para os cursos clássico e científico". (CARVALHO, 1952)

Os novos programas para o curso colegial apresentaram reduções significativas comparados aos propostos na Reforma Capanema. Ao examinar simultaneamente os índices de dois livros de Thales Mello de Carvalho de datas distintas – 1944 e 1952 –, os conteúdos contidos na edição de 1944 que não se encontravam na obra mais recente são: Progressões Aritméticas; Progressões Geométricas; Noções sobre a função exponencial; Logaritmos; Resolução de algumas equações exponenciais; Frações contínuas; Os corpos redondos; Aplicações à Topografia.

Comparando os capítulos que tratam dos determinantes nestas duas obras de Thales Mello de Carvalho, observamos uma redução de seis páginas naquela que atende às determinações dos programas mínimos.

No capítulo III que aborda a teoria dos determinantes, são introduzidos o conceito de matriz quadrada e a representação dos seus elementos indicados com uma letra e dois índices, define-se o que é diagonal principal e secundária, e é descrito o conceito de matriz simétrica.

O capítulo seguinte, que trata dos sistemas de equações lineares, apresenta a matriz dos coeficientes das incógnitas de um sistema de m equações e n incógnitas no 5º item que aborda a "Discussão de um sistema de *m* equações lineares com *n* incógnitas", objetivando, em seguida, definir *característica da matriz*.

Nos exercícios dos capítulos III e IV, as matrizes não são mencionadas nos enunciados.

3.4.2 QUINTELLA, A. ***Matemática segundo ano colegial.*** **10ª edição.** Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1962.

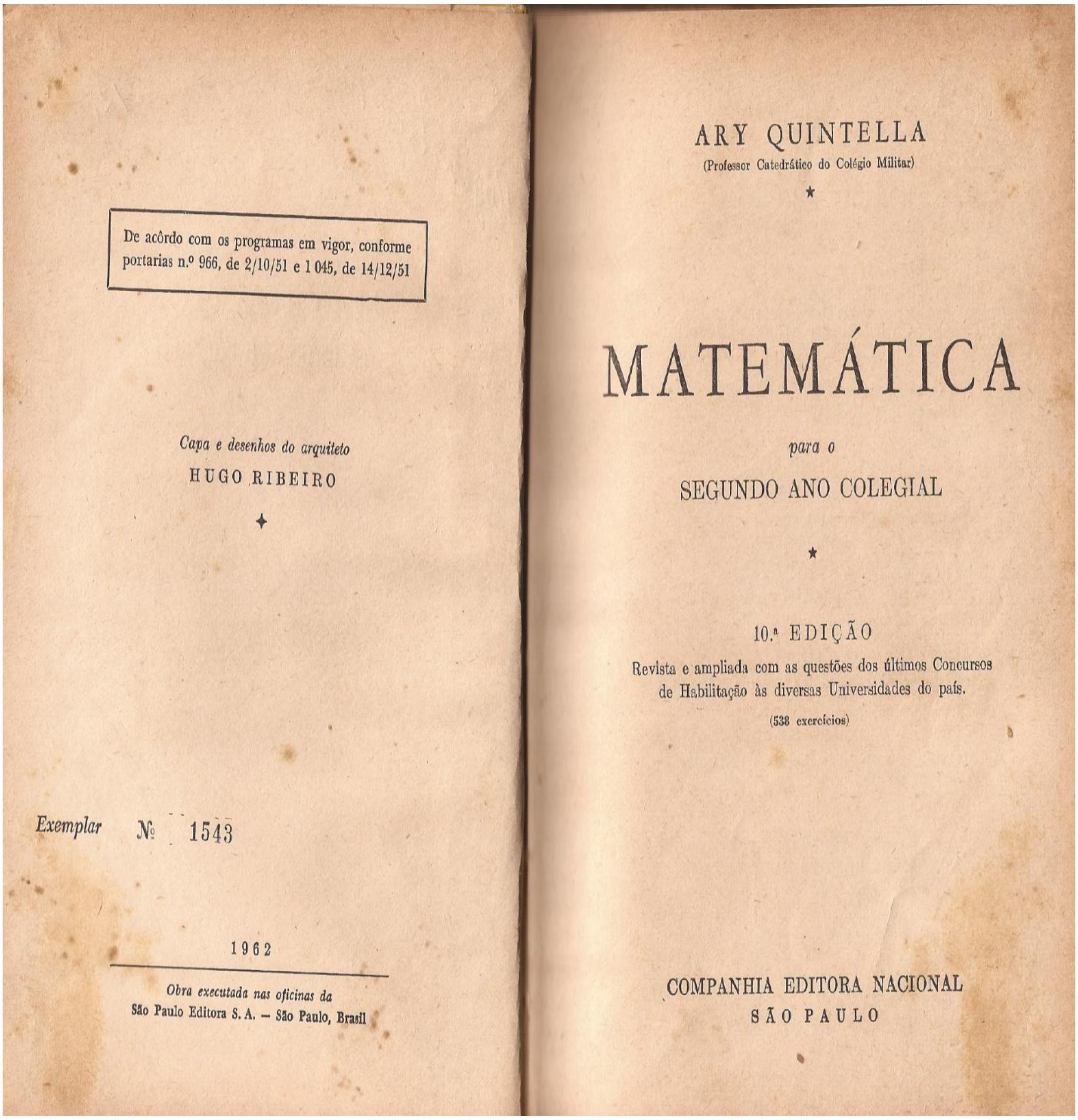
Ary Quintella foi professor do Colégio Militar do Rio de Janeiro e do Instituto de Educação. Suas obras didáticas serviram de referência a outros grandes autores de sucesso como o professor Osvaldo Sangiorgi. A grande aceitação dos livros de Quintella é citada por Valente no artigo "Livro didático e educação matemática: uma história inseparável":

> A biografia profissional de Quintella credenciou-o a fazer parte do quadro da Nacional[19] e ver transformados seus livros didáticos de matemática em *best-sellers* educacionais. No início dos anos 1950, suas obras para o ginásio e para o colégio alcançaram várias dezenas de edições. Esse autor garantiu à Editora grande parte do mercado do Rio de Janeiro, rivalizando

[19] Companhia Editora Nacional.

com as concorrentes cariocas, que sempre se mantiveram à frente na produção de obras didáticas de matemática. (VALENTE, 2008a, p.154-155)

Há a menção na contracapa desta obra, que esta se encontra de acordo com as determinações dos Programas Mínimos (Figura 3.17). Além disso, é observado que a mesma representa uma edição "Revista e ampliada com as questões dos últimos Concursos de Habilitação às diversas Universidades do país." (QUINTELLA, 1962, contracapa)



De acôrdo com os programas em vigor, conforme portarias n.º 966, de 2/10/51 e 1 045, de 14/12/51

Capa e desenhos do arquiteto
HUGO RIBEIRO

Exemplar Nº 1543

1962

Obra executada nas oficinas da
São Paulo Editora S. A. – São Paulo, Brasil

ARY QUINTELLA
(Professor Catedrático do Colégio Militar)

MATEMÁTICA

para o
SEGUNDO ANO COLEGIAL

10.ª EDIÇÃO
Revista e ampliada com as questões dos últimos Concursos de Habilitação às diversas Universidades do país.
(538 exercícios)

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

Figura 3.17: Contracapa do livro "Matemática – segundo ano colegial". (QUINTELLA, 1962)

Comparando os conteúdos desta obra com a obra anteriormente analisada, observamos que elas diferem somente pelo acréscimo do conteúdo “Cálculo por Logaritmos” no livro de Quintella.

No índice, observamos que os tópicos abordados se apresentam em nove unidades: Análise combinatória simples; Binômio de Newton; Determinantes. Sistemas lineares; Vetores. Funções circulares diretas; Arcos de extremidade associadas. Aplicações; Operações com arcos; Cálculo por logaritmos; Equações trigonométricas; Resolução de triângulos.

Após o índice, são apresentados os programas do curso colegial destinados ao segundo ano, mostrando os mesmos tópicos do compêndio anterior, de Thales Mello de Carvalho. No entanto, na obra de Quintella, são destacados os itens que compõem cada tópico. Por exemplo, no tópico “Determinantes; sistemas lineares” aparecem os seguintes itens: 1. Determinantes e matrizes quadradas; propriedades fundamentais; Regra de Sarrus; Determinantes menores; Desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha ou coluna; Transformação dos Determinantes. Abaixamento da ordem de um determinante pela regra de Chió; 2. Sistemas de n equações lineares com n incógnitas. Regra de Cramer; 3. Sistemas de m equações lineares com n incógnitas. Teorema de Rouché.

As primeiras definições apresentadas na unidade III que trata dos Determinantes são de matriz, matriz quadrada, ordem de uma matriz, diagonal principal e diagonal secundária.

A representação genérica dos elementos da matriz é feita de forma distinta das publicações anteriores: cada coluna é representada com uma letra fixa, seguida de um índice que indica o número da linha que se encontra tal elemento. No exemplo dado de uma matriz de 3 linhas e 4 colunas, a 1ª coluna da matriz é composta pelos elementos a_1, a_2, a_3, a 2ª coluna pelos elementos b_1, b_2, b_3 e assim por diante.

Seguindo-se àquelas definições iniciais, são realizados os estudos dos cálculos de determinantes com alguns exemplos acompanhando a teoria, terminando esta primeira parte com exercícios propostos.

Tanto nos exemplos quanto nos exercícios propostos não foram mencionadas as matrizes nos enunciados.

Matriz volta a ser mencionada brevemente no estudo dos sistemas lineares de *m* equações e *n* incógnitas no subitem “Determinante principal”, ao afirmar que “os coeficientes das incógnitas formam a matriz de m.n elementos” (QUINTELLA, 1962, p.

64). Em seguida, é enunciado o *Teorema de Rouché*, acompanhados de exemplos e de 15 exercícios propostos, que não citaram as matrizes em seus enunciados.

Na última seção do capítulo III intitulada "Questões de Concurso de Habilitação", foram apresentadas doze questões de concursos propostas por instituições de ensino superior para seleção de candidatos aos seus cursos. Nestas questões, o conteúdo matriz não estava presente.

3.4.3 ABDELHAY, J. ***Matemática para os candidatos às escolas superiores.*** Editora Científica, Rio de Janeiro, 1956.

A única referência ao autor que aparece na capa do livro é de "professor da Universidade do Brasil".

Ao contrário das duas obras anteriormente citadas, esta obra não faz nenhuma menção às portarias que estabeleceram os *Programas Mínimos*. Por se tratar de uma obra que objetiva a "preparação às escolas superiores", esta se assemelha aos compêndios produzidos nos tempos dos Cursos Complementares. Assim, observamos a coexistência numa mesma época de manuais com características distintas. Neste sentido, Chervel afirma que "O antigo sistema ainda continua lá, ao mesmo tempo em que o novo se instaura: períodos de maior diversidade, onde o antigo e o novo coabitam, em proporções variáveis". (CHERVEL, 1990, p. 204)

Na capa e contracapa da obra, são descritos os tópicos que serão abordados: Análise Combinatória, Determinantes, Equações lineares, Equações algébricas, Cálculo numérico aproximado e Equações Trigonométricas. (Figura 3.18)

Em seguida, o autor apresenta na seção "Nota" quatro sugestões de compêndios direcionados aos leitores interessados em maiores conhecimentos dos assuntos tratados em sua obra.

No capítulo II intitulado de "Determinantes", são fornecidos conceitos semelhantes aos livros didáticos analisados até aqui, tais como: matriz qualquer, matriz quadrada e matrizes completa e incompleta de um sistema. Além disso, esta obra oferece um dado novo em seu conteúdo no que diz respeito às matrizes comparado às obras anteriores. Na seção "Exercícios", o primeiro exercício define *Matrizes equivalentes*:

> Diz-se que uma matriz M' é equivalente a uma matriz M se M' puder ser obtida de M por uma ou mais das seguintes operações: (i) troca de horizontais (respec., verticais) de M; (ii) multiplicação por números não-nulos dos elementos de uma ou

> mais horizontais (respec., verticais) de M; (iii) soma de elementos correspondentes de duas ou mais horizontais (respec., verticais) distintas de M. (ABDELHAY, 1956, p. 41)

No entanto, o conceito de matriz equivalente não é utilizado posteriormente como forma alternativa para a resolução de sistemas lineares, conhecido hoje por *método do escalonamento de matrizes*.

No capítulo 3 que trata dos sistemas lineares, são apresentadas as definições de matrizes completa e incompleta do sistema no item 3.3 “Matrizes de um sistema”.

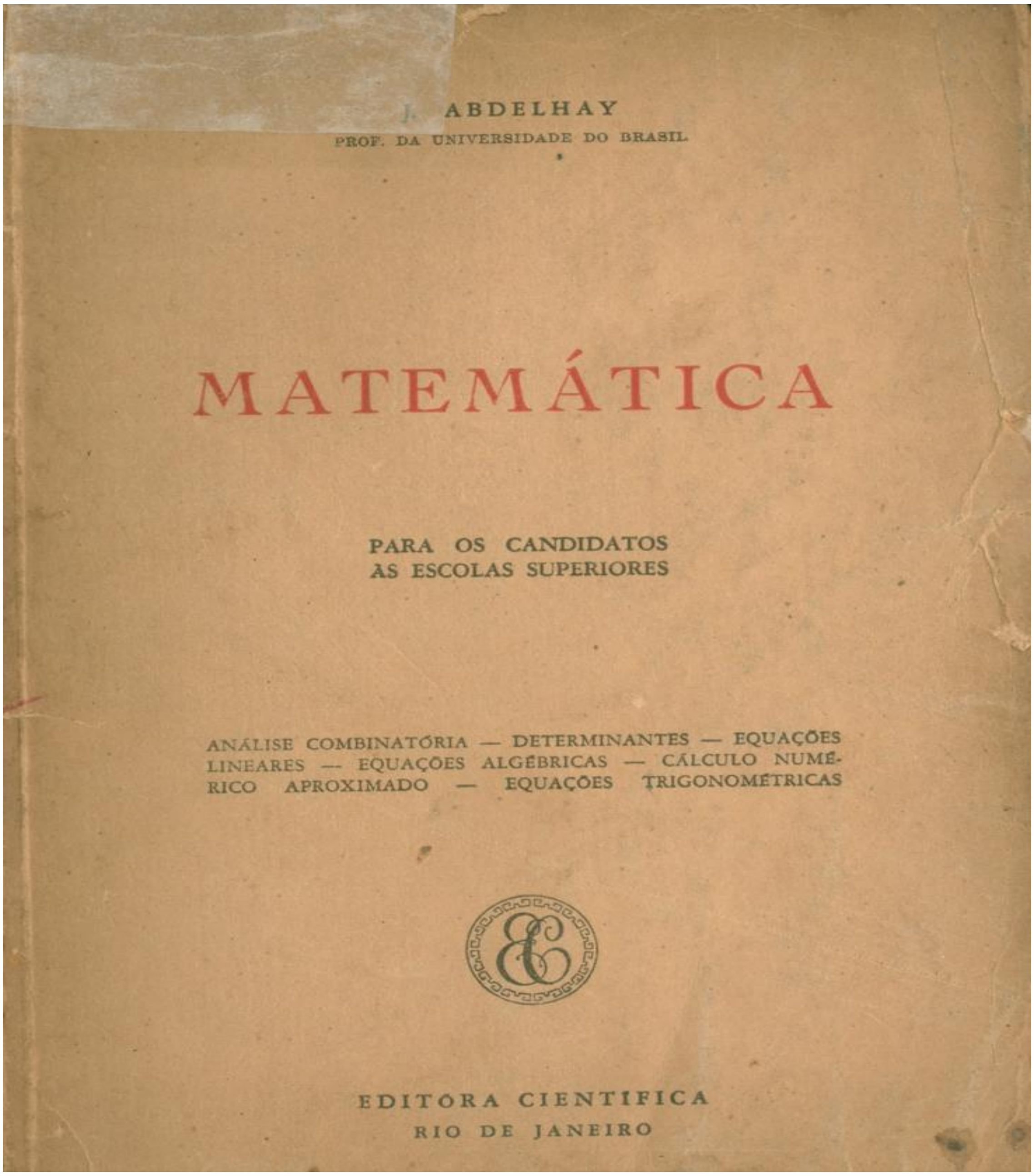


Figura 3.18: Capa do livro “Matemática para os candidatos às escolas superiores”. (ABDELHAY, 1956)

3.5 O conteúdo *matrizes* nos livros didáticos de Matemática em tempos do Movimento da Matemática Moderna no Brasil

A partir do final dos anos 50, os programas e as metodologias no ensino de Matemática passariam a ser transformados consideravelmente devido às propostas de mudança no ensino apresentadas no livro *L´enseignement des mathématiques* – lançado em 1955 pelo CIEAEM (*Commission internationale pour l´étude et l´amélioration de l´enseignement des mathématiques*) – ganharem força em nível internacional. Segundo Valente, este livro

> (...) reúne as preocupações de matemáticos com a aproximação, que julgam imperativas, da matemática elementar com a superior. Essa questão didático-epistemológica ganha cientificidade por meio dos estudos de Jean Piaget e o paralelismo das estruturas cognitivas com as estruturas matemáticas. É possível afirmar que a publicação da obra cria bases para novas discussões em direção a propostas de um currículo moderno para o ensino de matemática. (VALENTE, 2008b, p. 590)

Quatro anos após o lançamento do livro *L´enseignement des mathématiques*, a Organização Européia de Cooperação Econômica (OECE) realizou investigações sobre a condição do ensino de matemática nos países membros, promovendo em seguida ações amparadas nestas investigações, intencionando uma reformulação profunda no ensino de matemática.

Um produto da atuação da OECE é o livro "Um programa moderno de Matemática para o ensino secundário", cuja origem foi possível devido a dois encontros ocorridos em Royaumont e em Dubrovnik. Esta obra contém um programa que sugere "a valorização da Álgebra e da Geometria vetorial, com a correspondente desvalorização da Geometria de Euclides, na orientação axiomática dada ao estudo da Matemática, e numa valorização da linguagem e simbologia matemáticas". (GUIMARÃES *apud* VALENTE, 2008b, p. 591). Além disso, as propostas de reformulação do ensino de matemática sugeridas a partir dos dois encontros estão de acordo com as concepções bourbakistas e as de Jean Piaget, apresentadas no livro *L´enseignement des mathématiques*.

Assim, estas novas referências no ensino da matemática que trataram tanto de uma reorganização curricular quanto da atualização dos temas matemáticos ensinados, indicam o surgimento do Movimento da Matemática Moderna (MMM) que teve abrangência mundial.

No Brasil, o primeiro indício de discussão das ideias contidas no livro *L´enseignement des mathématiques* ocorreu em 1957, no II Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática, a partir da leitura e impressões pessoais da obra realizadas por Ubiratan D'Ambrosio, Osvaldo Sangiorgi e do Major Professor Jorge Emanuel Ferreira Barbosa. Entretanto, os debates sobre as ideias modernizadoras para o ensino não apresentaram grande penetração nos participantes:

> Os Anais revelam que em boa medida as discussões sobre a modernização do ensino de matemática são motivadas pela apropriação que alguns participantes fizeram da obra *L´enseignement des mathématiques*. No entanto, não há aprofundamento dos debates e tudo indica que, na época, o texto apenas constitui um modo, uma referência para autorizar a discussão sobre mudanças. Quais são elas? Como elaborar um programa moderno para o ensino da Matemática? Tais questões não são levadas adiante. O II Congresso acaba por constituir-se num local de troca de experiências didáticas e propostas de programas de ensino baseadas no fazer cotidiano dos mestres em suas escolas. (VALENTE, 2008b, p. 595)

O II Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática confirmou os Programas de Matemática aprovados no congresso anterior - realizado em 1955 - para o Curso Colegial: 1ª. Série: Álgebra e Trigonometria; 2ª. Série: Álgebra e Geometria no Espaço; 3ª. Série: Álgebra e Análise Matemática (início) e Geometria Analítica (início).

No III Congresso Nacional de Ensino de Matemática, realizado no Rio de Janeiro em 1959, poucos progressos em direção à modernização do currículo foram observados. No entanto, foi aprovada uma recomendação aos professores sugerindo aos mesmos que realizem experiências no curso secundário relativa à introdução de noções da Matemática Moderna, levando os resultados obtidos ao IV Congresso. (VALENTE, 2008b, p. 596)

Anteriormente ao IV Congresso, foi criado em 1961, o GEEM (Grupo de Estudos do Ensino de Matemática) fruto da iniciativa do professor Osvaldo Sangiorgi, no intuito de debater e difundir as ideias modernizadoras para o ensino de matemática apreendidas por ele em um curso nos Estados Unidos. Neste estágio de 4 meses realizado na Universidade de Kansas, Sangiorgi teve contato com as publicações elaboradas por grupos de estudos norte-americanos, como o SMSG[20] (School Mathematics Study Group).

Algumas das publicações do SMSG foram traduzidas para o português por meio do convênio MEC-USAID (United States Agency for International Development) e tinham o propósito de apresentar uma "nova" matemática mais atraente, viva e atual para os estudantes. Esta abordagem evidenciava a presença das estruturas matemáticas tanto nos antigos quanto nos novos tópicos considerados fundamentais para um estudo posterior mais avançado na universidade em álgebra moderna.

Dentre os vários livros de autoria do SMSG, destacamos a "Introdução à Álgebra das Matrizes" traduzido por Lafayette de Moraes e editada no Brasil em 1969 (Figura 3.19). O conteúdo era composto de cinco capítulos: operações com matrizes; a álgebra das matrizes 2x2; matrizes e sistemas lineares; representações de matrizes coluna por vetores geométricos; transformações do plano. No prólogo, é feita uma reflexão acerca do novo currículo de Matemática para as escolas, sustentada no fato de haver uma crescente evolução desta ciência tanto internamente quanto na aplicação em outras áreas do saber científico e tecnológico:

> Alguns temas serão completamente novos para o curriculum tradicional. A Matemática deve ser considerada como um assunto vivo e sempre dinâmico e não como um patrimônio morto que o passado nos legou. Esta saudável fusão do velho e do novo deve conduzir os alunos a uma compreensão superior dos conceitos básicos e da estrutura da Matemática assim como proporcionar um fundamento mais sólido para a compreensão e o uso da Matemática numa sociedade científica. (SMSG, 1969, prólogo)

Ainda nesta publicação, é apresentada no *prefácio da edição norte-americana*[21] uma justificativa para o ensino da álgebra de matrizes:

> Uma unidade de álgebra das matrizes satisfaz os itens precedentes. Como é definida uma operação após a outra, pode ser dada ênfase à estrutura matemática. Termos como grupo, anel, corpo, e isomorfismo serão introduzidos quando adequados e necessários para unificar os conceitos. (...) Introduzidas por Cayley em 1858, reconhecidas por Heisenberg em 1925 como instrumento que ele necessitava para desenvolver o seu trabalho revolucionário em mecânica quântica, empregado hoje de diversos modos como linguagem adequada para a física atômica,

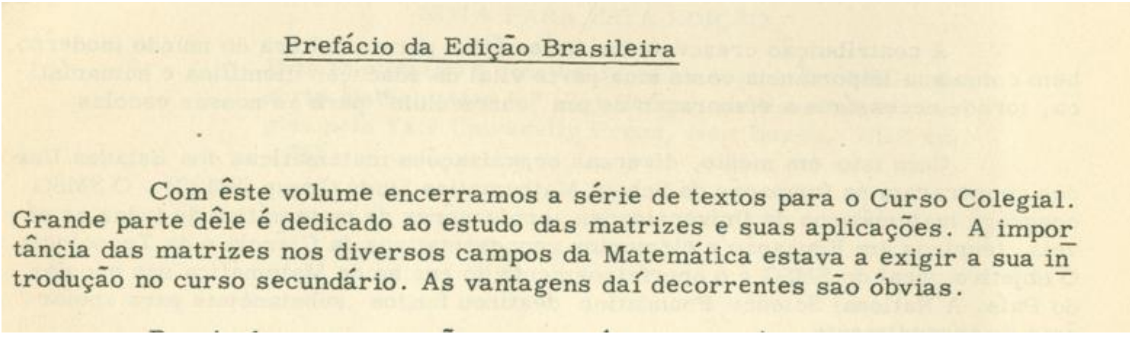
[20] O SMSG congregou matemáticos de universidades, professores de matemática de vários níveis e alguns representantes da Educação, Ciência e Tecnologia com o propósito de aperfeiçoar o ensino de matemática nas escolas dos Estados Unidos. (SMSG, 1969)
[21] Traduzido por Lafayette de Moraes.

na medição do fluxo de ar sobre as asas de um avião, e manter num estado ideal certo estoque, as matrizes podem colocar o estudante próximo das fronteiras da matemática e fornecer admiráveis exemplos de modelos que aparecem nas mais variadas circunstâncias. Além disso, o estudante encontra uma parte da matemática emancipada das regras familiares da aritmética e aprende que está dentro de sua capacidade "inventar" uma para uso próprio. (SMSG, 1969, prefácio à edicão norte americana)

Figura 3.19: Capa do livro "Introdução à Álgebra das Matrizes". (SMSG, 1969)

Uma afirmação relevante que indica a grande aceitação da introdução das matrizes na matemática escolar pode ser observada no *prefácio à edição brasileira* desta mesma obra, feito pelo tradutor: “Nos nossos dias, a introdução da Álgebra das Matrizes no Curso Colegial, quer pelas suas aplicações, quer pelos horizontes que amplia, é aceita praticamente sem discussão”. (SMSG, 1969, prefácio à edição brasileira)

Em outra publicação do SMSG “Matemática – Curso colegial – volume III” traduzida por Lydia C. Lamparelli é exaltada a importância do ensino de matrizes para o nível secundário:



Prefácio da Edição Brasileira

Com êste volume encerramos a série de textos para o Curso Colegial. Grande parte dêle é dedicado ao estudo das matrizes e suas aplicações. A importância das matrizes nos diversos campos da Matemática estava a exigir a sua introdução no curso secundário. As vantagens daí decorrentes são óbvias.

Figura 3.20: Prefácio da edição brasileira do livro “Matemática Curso Colegial – volume III”. (SMSG, 1966)

Uma das aplicações da teoria das matrizes que o livro menciona, diz respeito à resolução de alguns sistemas lineares. Este fato corrobora o que foi sugerido pelo professor Leônidas Hegenberg[22], ao elaborar, em 1960, o artigo “Sistemas de equações lineares” para a revista “Escola Secundária”:

> De fato, os teoremas de Rouché e de Cauchy envolvem minúcias desagradáveis para o estudante que as vê pela primeira vez e que nem sempre são assimiladas com proveito. No que segue, tentamos sugerir nova maneira de abordar a delicada questão. Insistiremos no emprego das matrizes. Isso pode parecer, à primeira vista, algo excessivo, algo acima da compreensão do jovem colegial. Não concordamos com essa opinião e, ao contrário, defendemos a tese de que alguns comentários a respeito de matrizes são não apenas oportunos no nível secundário como ainda necessários já porque preparam terreno para a modernização do currículo, já porque simplificam sobremaneira o tratamento hoje comum dos sistemas. (HEGENBERG apud VALENTE, 2010b, p. 13)

[22] Professor de matemática do ITA, escreveu o artigo “Sistemas de equações lineares” referenciado pelo capítulo IV do livro “*L´enseignement des mathématiques”* escrito por Andre Lichnerowicz. (VALENTE, 2010b)

Este dado aponta para a introdução do conteúdo “matrizes” nos programas de matemática que pretendem seguir os modelos internacionais de modernização do currículo de matemática.

A divulgação dos ideais modernizadores do currículo para o ensino de matemática foi realizada de forma intensa pelo professor Sangiorgi em diversas ações. Dentre elas, destacamos a elaboração de materiais de apoio para professores pelo GEEM e da apresentação de teses e experiências relacionadas à aplicação dos conteúdos modernos de matemática no IV Congresso de Ensino de Matemática ocorrido em Belém (PA), no ano de 1962.

O IV Congresso se constitui em um lugar privilegiado de debates sobre o currículo escolar entre os profissionais de ensino de diversos estados, devido aos dispositivos da nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, aprovada em 1961, de descentralização e criação dos Sistemas Estaduais. Neste sentido, para o GEEM, que objetiva estabelecer um programa de matemática que se apropriam dos ideais modernos, o encontro possui grande relevância.

Desta maneira, o GEEM apresenta no IV Congresso uma proposta que se intitula “assuntos mínimos para um moderno programa de matemática”, produto de freqüentes reuniões do grupo:

> O programa proposto foi o primeiro a incorporar matemática moderna no currículo. (...) Para o secundário, a sugestão foi que os tópicos se aproximassem da teoria dos conjuntos e das estruturas algébricas. Maior ênfase foi dada ao estudo das propriedades das operações, o estudo de diferentes sistemas numéricos foi recomendado, assim como o estudo das funções. (D´AMBROSIO apud SILVA, 2006, p.56)

Para as três séries do colegial, são listados dezoito itens de conteúdos de ensino, seguidos de sugestões para apresentação dos mesmos. No 14º item, consta “Sistema de equações lineares. Noção de matrizes: aplicações.”. A sugestão para o ensino destes conteúdos indica que “O estudo pode ser feito através da teoria dos determinantes ou preferivelmente, pelas matrizes. Ressaltar as estruturas algébricas das operações com matrizes (anel e espaço vetorial).” (VALENTE, 2008b, p. 602)

Em parceria com o IBECC[23], o GEEM produz o livro “Matemática Moderna para o ensino secundário” em 1962, que foi direcionado à atualização dos professores de matemática. Nesta obra, é seguida a proposta dos assuntos mínimos citados

[23] Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura.

anteriormente, bem como orientações metodológicas de como tratar os conteúdos sob o novo olhar moderno da matemática. Na 2ª edição (figura 3.21), que data de 1965, um dos capítulos se intitula “Introdução elementar de matrizes no curso colegial” elaborado por Ruy Madsen Barbosa (GEEM, 1965, p. 207 - 242). O capítulo seguinte, elaborado por Carlos Alberto Callioli, trata da “Resolução de sistemas de equações lineares por matrizes” (GEEM, 1965, p. 243-258).

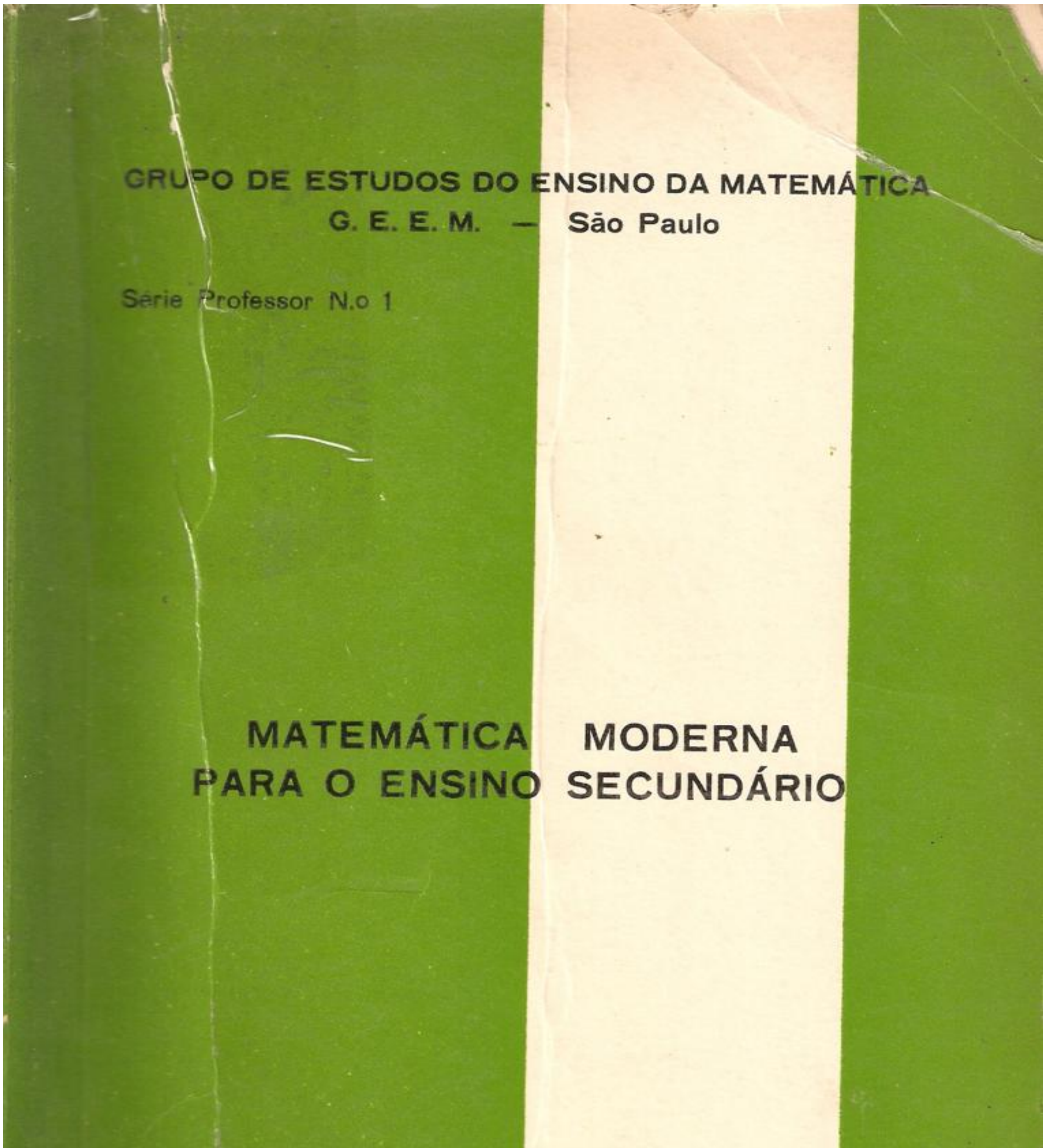


Figura 3.21: Capa do livro “Matemática moderna para o ensino secundário”. (GEEM, 1965)

Assim, a partir dos conteúdos propostos para a formação do professor contidos no material produzido pelo GEEM, são fornecidas novas perspectivas para o ensino de determinantes e sistemas lineares no ensino secundário.

O pesquisador Wagner Valente cita a importância da inserção do conteúdo matrizes no ensino secundário em artigo que investiga, de forma preliminar, de que maneira o "cálculo de determinantes" foi abordado nos livros didáticos nos tempos pré-modernos:

> A introdução de Matrizes constituiu exemplo do que poderíamos denominar novos conteúdos acrescidos à matemática escolar do colégio. A presença desse conteúdo parece ter representado uma das principais iniciativas para a escolarização da Álgebra Moderna no ensino elementar. Com a sua introdução, uma nova dimensão didático-pedagógica,e mesmo epistemológica, foi dada ao papel dos *Determinantes*. (VALENTE, 2010b, p. 3)

Através da análise dos conteúdos dos livros didáticos a ser realizada a seguir, podem ser fornecidos elementos para saber em que medida o impacto das novas propostas para o ensino de matemática acompanhadas da atuação marcante do GEEM em nível nacional na disseminação dos ideais do MMM se constituiu numa influência significativa na abordagem diferenciada do tema "matrizes".

Três dos seis livros analisados foram extraídos do sítio do GHEMAT que conta com 67 publicações referentes ao período de introdução dos ideais da matemática moderna no ensino.

3.5.1 CASTRUCCI, B. et al. **Somatórios, Produtórios, Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares** – 3ª edição. Livraria Nobel S.A., São Paulo, 1976.

Na contracapa da obra são apresentadas as referências dos autores. Dentre estes, o autor mais conhecido por suas publicações de didáticos de matemática é o professor Doutor Benedito Castrucci, Catedrático do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Castrucci elaborou alguns livros da "Série Professor" editado pelo GEEM, cujos títulos eram "Elementos de Teoria dos Conjuntos" e "Introdução à Lógica Matemática".

No prefácio, os autores apresentam suas impressões sobre o público que a obra se destina e sua utilidade:

> Os assuntos tratados nesta pequena obra pertencem ao programa de Matemática do 2º grau, contudo, achamos que este trabalho,

> pela forma apresentada, será muito útil nos cursos de ingresso às Escolas Superiores bem como nos iniciais das Faculdades e principalmente nos de Ciências Econômicas. (CASTRUCCI, 1976, prefácio)

Apesar de considerar que esta publicação certamente não foi adotada como livro de referência nos colégios, ela ofereceu elementos para a formação dos docentes. Ainda no prefácio é requisitada a ajuda dos professores no envio de críticas e sugestões para elaboração de uma futura edição do livro:

> Esperamos que os colegas, que acolherem este livro, nos ajudem com sugestões e críticas úteis que nos permitam o aperfeiçoamento de edições posteriores. (CASTRUCCI, 1976, prefácio)

Os quatro capítulos que compõem a obra são exatamente aqueles que dão o nome ao livro: Somatórios e Produtórios; Matrizes; Determinantes; Sistemas de equações lineares.

Assim, ao contrário das publicações até aqui observadas, nesta obra há um capítulo (capítulo II) exclusivo para o assunto "matrizes". Este capítulo apresenta os seguintes itens: introdução; igualdade de matrizes; adição de matrizes; multiplicação de um número real por uma matriz; multiplicação de matrizes; transformações elementares e matrizes equivalentes; matriz inversa.

Na introdução, trabalha-se inicialmente com a noção de matriz, fornecendo um exemplo de tabela que, segundo o autor, aparece freqüentemente nas páginas de esporte: os times de futebol nas linhas e nas colunas a indicação do número de jogos, de vitórias, empates, derrotas, pontos ganhos, e pontos perdidos. Com este exemplo e outro logo a seguir, é colocada a ideia de localização de um elemento da matriz.

Depois de estabelecidas as noções, a introdução é dividida em subitens, tais como: *definição* (de matriz), *definição de matriz nula, definição de matriz identidade de ordem n, exercícios resolvidos.*

O item "igualdade de matrizes" apresenta os seguintes subitens: *definição, exercícios.*

Já em "adição de matrizes", observamos os subitens: *definição, definição de matriz oposta, propriedades da adição.*

Em "multiplicação de um número real por uma matriz", temos a seguinte divisão: *definição, propriedades da multiplicação de um número real por uma matriz, exercícios resolvidos.*

O 5º item “multiplicação de matrizes” possui os subitens: *definição, propriedades, matriz diagonal, matriz escalar, matriz transposta, propriedades da transposição de matrizes, matriz simétrica, matriz anti-simétrica, exercícios resolvidos.*

No tópico “transformações elementares e matrizes equivalentes”, temos os subitens: “Uma matriz B é transformada elementar de uma matriz A, se e somente se:...” *e definição* (matriz equivalente).

O último tópico do capítulo II, intitulado de “matriz inversa”, apresenta os subitens: *definição de matriz singular, definição de matriz não singular, definição* (matriz quadrada), *métodos de determinação de matriz inversa, definição de matriz adjunta.*

Ao final do capítulo foram propostos quatorze exercícios, que requisitaram o entendimento dos diversos assuntos abordados no capítulo. Classificamos as atividades propostas da seguinte maneira: dois exercícios requisitaram a resolução de equações matriciais; um exercício abordou a resolução de sistemas de equações matriciais; três questões pediam o cálculo da inversa de uma matriz; dez questões requisitaram o conhecimento de multiplicação de matrizes; seis exercícios levantaram questões sobre a comutatividade na multiplicação das matrizes de forma direta e indireta[24]; quatro questões requisitaram conhecimentos de soma entre matrizes; e uma questão cobrou a maneira de se obter matrizes equivalentes.

No prefácio, o autor menciona que “Os sistemas lineares foram estudados pelas matrizes como é usual atualmente e, também, de modo clássico, pelos determinantes” (CASTRUCCI, 1976, prefácio). Esta nova abordagem para a resolução de sistemas se encontra no capítulo IV “Sistemas de equações lineares” que possui como subitens “Sistemas equivalentes”, “Resolução de um sistema pelas matrizes” e “Método geral de resolução”.

3.5.2 BOULOS, P.; WATANABE, R. **Matemática - 2 º Grau -** Vol. 2, 1976

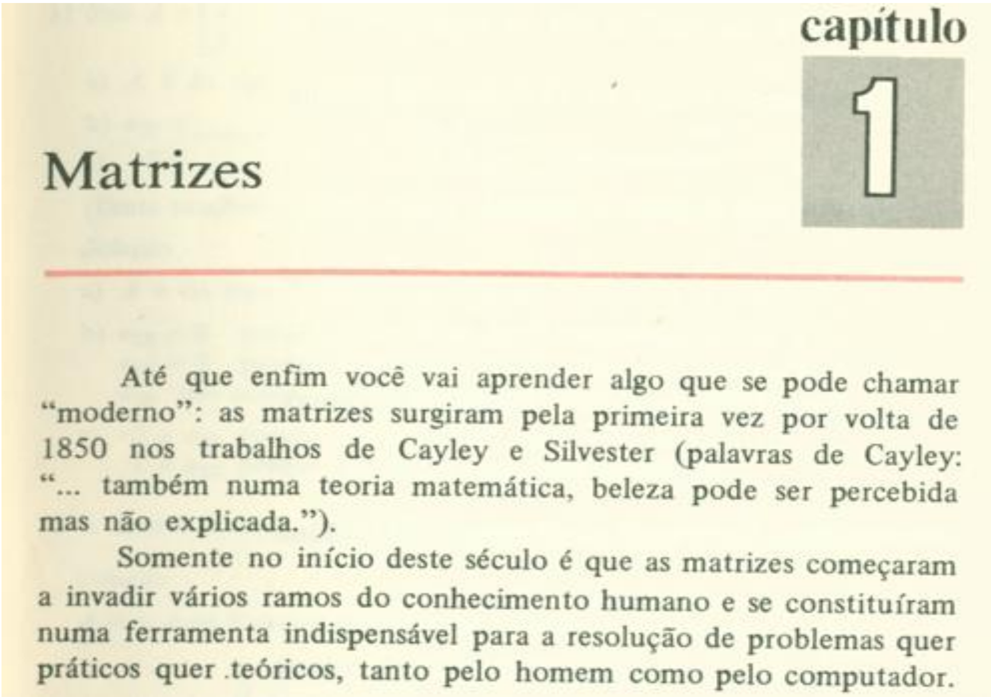
Seguindo a direção contrária às apresentações das referências dos autores que observavam as instituições de ensino a que pertenciam, nesta publicação as indicações feitas aos autores são de caráter formativo: Doutor em Matemática pela Universidade de

[24] Se B é a inversa da matriz quadrada A de ordem n, então A.B = B.A = I_n, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Assim, de acordo com a definição de matriz inversa, em relação à operação de multiplicação entre matrizes, sabe-se que, *indiretamente*, as matrizes quadradas A e B comutam.

São Paulo e Mestre em Matemática pela Universidade de Illinois (EUA) para Paulo Boulos e Renate Watanabe, respectivamente.

Renate Watanabe foi um dos membros do GEEM, e participou ativamente na disseminação dos ideais da matemática moderna no país. Na publicação "Matemática Moderna para o ensino secundário" da "série professor", publicado pelo GEEM, contribuiu na elaboração dos capítulos "Introdução à Geometria Plana" e "Análise Combinatória".

O livro didático de Boulos e Watanabe apresenta o estudo das matrizes no primeiro capítulo e, na introdução, é destacado o caráter moderno do conteúdo:



capítulo 1

Matrizes

Até que enfim você vai aprender algo que se pode chamar "moderno": as matrizes surgiram pela primeira vez por volta de 1850 nos trabalhos de Cayley e Silvester (palavras de Cayley: "... também numa teoria matemática, beleza pode ser percebida mas não explicada.").

Somente no início deste século é que as matrizes começaram a invadir vários ramos do conhecimento humano e se constituíram numa ferramenta indispensável para a resolução de problemas quer práticos quer teóricos, tanto pelo homem como pelo computador.

Figura 3.22: Introdução ao capítulo de matrizes do livro "Matemática - 2 º Grau - Vol. 2". (BOULOS & WATANABE, 1976, p. 1)

Em seguida, são abordados seis tópicos: definição de matriz; igualdade de matrizes, adição de matrizes; multiplicação de uma matriz por um número real; multiplicação de matrizes; e *Matrizes – parte final* que expõe alguns tipos de matrizes, tais como, diagonal, transposta e simétrica.

O primeiro grupo de exercícios (grupo 1) apareceu depois de serem apresentadas a "definição de matriz" e a "igualdade de matrizes", seguidos de dois exercícios resolvidos. Assim, após a apresentação de alguns tópicos do capítulo, surge o grupo de exercícios para fixar os conteúdos vistos até aquele momento. Neste capítulo de matrizes, foram apresentados seis grupos de exercícios.

No segundo tópico do segundo capítulo, que trata dos "sistemas lineares", é ressaltado que a resolução de um sistema linear será trabalhada a partir do conceito de *matriz completa do sistema*:

2. Matrizes associadas a um sistema

Olhe novamente para o sistema acima e agora diga qual é a solução dos sistemas:

$$\begin{cases} 2u - v = 5 \\ u + 3v = 6 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2t - s = 5 \\ t + 3s = 6 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

A resposta é (3, 1), pois pouco importa o *nome* que se dá às incógnitas. A solução é realmente determinada pelos números 2 −1 5 da primeira equação, e 1 3 6 da segunda equação.

É por isso que, ao resolver um sistema, vamos trabalhar com o que se chama *matriz completa do sistema*.

No nosso exemplo, a matriz completa do sistema é a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Figura 3.23: Conceito de *matriz associada a um sistema*. (BOULOS & WATANABE, 1976, p. 21)

Como ocorre com a obra anteriormente analisada, o enfoque da resolução dos sistemas lineares muda com a introdução do estudo das matrizes, que neste caso, recorre às ideias de forma matricial do sistema e de matriz inversa:

Exercício resolvido

Determinar a solução do sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases}$, sabendo que a matriz inversa da matriz dos coeficientes é $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

Solução

A forma matricial do sistema dado é:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Vamos multiplicar ambos os membros dessa equação, à esquerda, pela inversa da matriz dos coeficientes. Veja o que vai acontecer.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

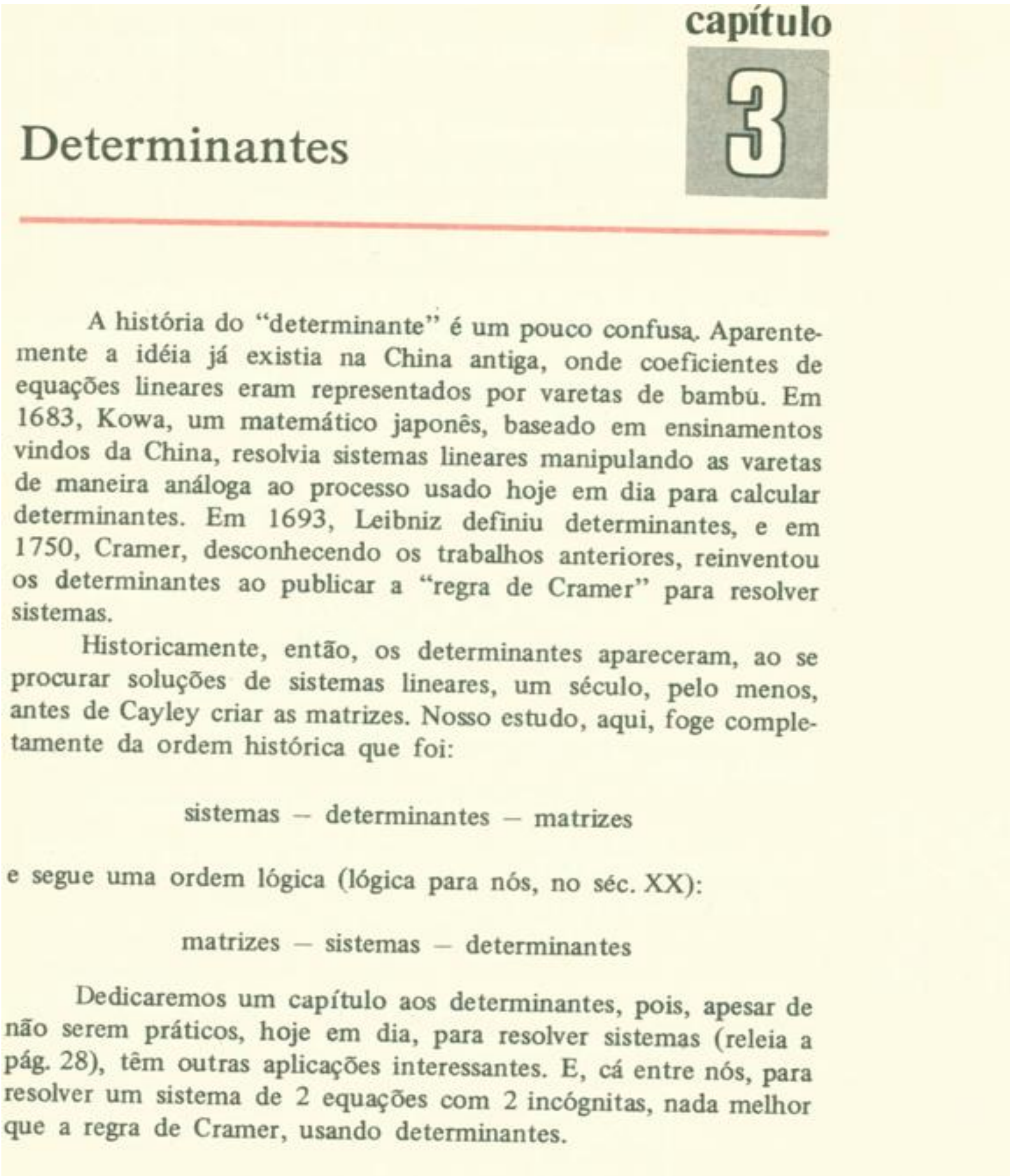
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema é o par ordenado (−10, 14). Fácil, não é? Na prática, o trabalho está em achar a inversa da matriz dos coeficientes. É verdade, porém, que esse processo pode ser usado para resolver qualquer sistema linear no qual a matriz dos coeficientes é uma matriz inversível; se a matriz inversa já for conhecida, melhor ainda!

Figura 3.24 – Exercício resolvido extraído do livro "Matemática - 2 º Grau - Vol. 2". (BOULOS & WATANABE, 1976, p. 23)

O primeiro grupo de exercícios propostos apareceu neste capítulo após os tópicos “Introdução” e “Matrizes associadas a um sistema”, seguidas do “exercício resolvido” acima. O último grupo de exercícios abordou tema “inversão de matrizes” com um exercício que pedia para determinar, caso existisse, a inversa de matrizes dadas.

Na introdução do terceiro capítulo intitulado de “Determinantes”, os autores destacam que a atual ordem didática “matrizes – sistemas lineares – determinantes” se diferencia da histórica “sistemas lineares – determinantes – matrizes”, além de afirmar que os determinantes não constituem, nos tempos atuais, uma ferramenta prática para a resolução de sistemas lineares. (figura 3.25)



capítulo

3

Determinantes

A história do “determinante” é um pouco confusa. Aparentemente a idéia já existia na China antiga, onde coeficientes de equações lineares eram representados por varetas de bambu. Em 1683, Kowa, um matemático japonês, baseado em ensinamentos vindos da China, resolvia sistemas lineares manipulando as varetas de maneira análoga ao processo usado hoje em dia para calcular determinantes. Em 1693, Leibniz definiu determinantes, e em 1750, Cramer, desconhecendo os trabalhos anteriores, reinventou os determinantes ao publicar a “regra de Cramer” para resolver sistemas.

Historicamente, então, os determinantes apareceram, ao se procurar soluções de sistemas lineares, um século, pelo menos, antes de Cayley criar as matrizes. Nosso estudo, aqui, foge completamente da ordem histórica que foi:

sistemas – determinantes – matrizes

e segue uma ordem lógica (lógica para nós, no séc. XX):

matrizes – sistemas – determinantes

Dedicaremos um capítulo aos determinantes, pois, apesar de não serem práticos, hoje em dia, para resolver sistemas (releia a pág. 28), têm outras aplicações interessantes. E, cá entre nós, para resolver um sistema de 2 equações com 2 incógnitas, nada melhor que a regra de Cramer, usando determinantes.

Figura 3.25: Introdução do capítulo “Determinantes” do livro “Matemática - 2 º Grau - Vol. 2*”*. (BOULOS & WATANABE, 1976, p. 39)

3.5.3 CAROLI, CALLIOLI, FEITOSA**. Matrizes e Sistemas Lineares,** Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1971.

Os três autores são apresentados na contracapa como "Professores da Universidade de São Paulo e da Universidade Católica de São Paulo". O professor Carlos Alberto Callioli também participou da elaboração do livro "Matemática Moderna para o ensino secundário" da "série professor", publicado pelo GEEM, ao escrever o capítulo "Resolução de Sistemas de Equações Lineares por matrizes".

Por tratar um tema específico, esta obra não apresenta a característica de ter sido utilizada nas salas de aula dos cursos secundários, mas por outro lado, buscava a preparação de alunos às disciplinas do ensino superior, como Álgebra Linear:

> No quarto capítulo, fazemos o estudo teórico dos sistemas de equações lineares, relacionando-os com a inversão de matrizes e a dependência linear. Este capítulo serve como uma pequena introdução ao estudo da Álgebra Linear. (CALLIOLI, 1971, prefácio)

Além disso, os autores destacaram no último parágrafo do prefácio (figura 3.26), que a introdução deste tema está em curso no ensino secundário, e solicita aos leitores o envio de críticas e sugestões. Assim, ao explorar tópicos que estão em fase de implementação nas escolas de forma mais aprofundada, esta publicação revela um propósito formativo tanto para alunos como também para professores.

Os autores se justificam em transmitir as novas ideias modernizadoras do ensino de matemática aos alunos ao escreverem no prefácio da obra que:

> Tal reformulação é por muitos denominada: MATEMÁTICA MODERNA. Qualquer que seja a denominação que se dê à reforma do ensino da MATEMÁTICA nas escolas, é indiscutível que ela se configura como necessária a fim de atender às perspectivas atuais do desenvolvimento técnico bem como à formação básica do estudante. (CALLIOLI, 1971, prefácio)

Ainda no prefácio desta publicação, os autores afirmam que, apesar de ser usual nos cursos colegiais a utilização da teoria dos determinantes para a resolução de sistemas lineares, "(...) as circunstâncias atuais mostram que o estudo das MATRIZES (grifo dos autores) tem muito maior importância que o dos determinantes e não apresenta maiores dificuldades do ponto de vista didático", acrescentando ainda que "No presente texto, apresentamos um desenvolvimento elementar do estudo das

MATRIZES e suas aplicações à resolução dos sistemas de equações lineares, dispensando a teoria dos determinantes."

PREFÁCIO

Nos últimos anos vem se acentuando cada vez mais o movimento de reformulação dos programas de Matemática nas escolas secundárias e nos primeiros anos dos cursos superiores. Tal reformulação é por muitos denominada: MATEMÁTICA MODERNA.

Qualquer que seja a denominação que se dê à reforma do ensino da MATEMÁTICA nas escolas, é indiscutível que ela se configura como necessária a fim de atender às perspectivas atuais do desenvolvimento técnico bem como à formação básica do estudante.

Ainda é corrente nos Cursos Colegiais fazer-se o estudo dos sistemas de equações lineares tomando como base a teoria dos determinantes. Ora, as circunstâncias atuais mostram que o estudo das MATRIZES tem muito maior importância que o dos determinantes e não apresenta maiores dificuldades do ponto de vista didático.

No presente texto, apresentamos um desenvolvimento elementar do estudo das MATRIZES e suas aplicações à resolução dos sistemas de equações lineares, dispensando a teoria dos determinantes.

Para não prejudicar a parte didática, nos dois primeiros Capítulos introduzimos as noções fundamentais e as operações com matrizes, acompanhadas de exemplos e exercícios quase sempre resolvidos.

O Terceiro Capítulo apresenta um método de resolução de sistemas de equações lineares por diagonalização de matrizes, utilizando ainda exemplos numéricos. No Quarto Capítulo fazemos o estudo teórico dos sistemas de equações lineares, relacionando-os com a inversão de matrizes e a dependência linear. Êste Capítulo serve como uma pequena introdução ao estudo da Álgebra Linear.

Ainda no Quarto Capítulo, faremos um resumo da teoria dos determinantes, estabelecendo a ligação entre essa teoria e a dos sistemas lineares.

O texto contém cêrca de 250 exercícios.

Tratando-se de assunto que está sendo introduzido no Curso Colegial, solicitamos, com muito empenho, críticas e sugestões dos leitores.

S. Paulo, Julho de 1968

Figura 3.26: Prefácio do livro "Matrizes e Sistemas Lineares". (CAROLI, 1971)

Todo o conteúdo de “Matrizes” é abordado no primeiro e segundo capítulos possuindo os seguintes tópicos: Noção de matriz; Adição de matrizes; produto de um número real por uma matriz; Somatórias; Produto de matrizes; Matriz transposta; Matrizes simétricas e anti-simétricas; Matrizes invertíveis.

Tanto após o primeiro tópico “Noção de matriz”, quanto no segundo que trata da “adição de matrizes”, foram apresentados alguns exercícios seguidos de resposta.

No terceiro capítulo que trata da resolução de sistemas lineares através das matrizes, é necessária a definição de *matrizes equivalentes*, para que, em seguida, seja apresentada a resolução pelo método que conhecemos hoje por “escalonamento”.

3.5.4 IEZZI, Gelson. et al. ***Matemática: 2ª série, 2º grau***. São Paulo: Atual Editora, 1976.

Neste livro não aparecem referências a nenhum dos sete autores. Entretanto, devido à sua vasta contribuição na elaboração de livros didáticos de matemática voltados para estudantes e professores, Gelson Iezzi é um dos autores de renome nos meios escolares dos ensinos fundamental e médio.

No índice do livro é destacado um capítulo à parte para o estudo das matrizes, contendo os seguintes subitens: noção de matriz; representação; igualdade de matrizes; operações: adição, multiplicação de um número por matriz, multiplicação de matrizes; matriz inversa. (figura 3.28)

No prefácio, os autores mencionam alguns destaques sobre os assuntos tratados, dentre estes, as matrizes: “O estudo das Matrizes e dos Sistemas Lineares foi tratado de uma forma que nos parece mais simples, embora isto só apareça com maior clareza no final do capítulo, na discussão dos sistemas lineares.” (IEZZI, 1976, prefácio)

O primeiro parágrafo do capítulo expõe a justificativa do estudo das matrizes na escola secundária, que se apóia no argumento relacionado às aplicações deste objeto matemático nos vários ramos da ciência e na resolução dos sistemas lineares:

> O estudo das matrizes tornou-se muito importante ultimamente pelas inúmeras aplicações que apresenta nos mais diversos ramos da ciência e tecnologia: matemática, física, engenharia, computação, etc. Neste capítulo daremos os primeiros passos nesta teoria e já teremos oportunidade de aplicá-la, por exemplo, na resolução de sistemas de equações lineares.

Figura 3.27: Primeiro parágrafo do capítulo “matrizes” extraído do livro “Matemática: 2ª série, 2º grau”. (IEZZI, 1976, p. 41)

ÍNDICE

Figura 3.28: Primeira página do índice do livro "Matemática: 2ª série, 2º grau". (IEZZI, 1976)

No capítulo seguinte, que trata dos sistemas lineares, são introduzidos os conceitos de matriz associada a um sistema, matrizes equivalentes, método da eliminação e transformações de matrizes. Esses conceitos, inseridos no subitem

"Resolução de sistemas lineares", foram aplicados na resolução dos sistemas lineares, na classificação de um sistema quanto ao número de soluções e para realizar a discussão dos sistemas lineares. Algumas destas aplicações podem ser observadas nos exercícios resolvidos apresentados nas figuras 3.29 e 3.30.

R.45 Resolver o sistema

$$S \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases}$$

Solução

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \quad -4 \end{matrix}$$

$$\sim M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & -7 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \sim M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 7 & -8 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \quad -7 \end{matrix}$$

$$\sim M_4 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \frac{5}{7} & \frac{16}{7} \\ -\frac{8}{7} & \frac{1}{7} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & -8 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

O sistema $S_4 \begin{cases} x + 0y + \frac{5}{7}z = \frac{16}{7} \\ 0x + y - \frac{8}{7}z = \frac{1}{7} \\ 0x + 0y + 0z = -8 \end{cases}$ ao qual M_4 está associada é incompatível (não possui solução) pois na última equação de. S_4 temos $0 = -8$ e, da equivalência entre S_4 e S, concluímos que S também é incompatível.

Figura 3.29 – Exercício resolvido sobre classificação de um sistema linear quanto ao número de soluções contido no livro "Matemática: 2ª série, 2º grau". (IEZZI, 1976, p. 87)

R.47 Discutir o sistema $S \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = a \end{cases}$

Solução

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \; -1 \quad \sim \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & a-1 \end{pmatrix} \; -\frac{1}{2} \quad \sim$$

$$\sim \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1-a}{2} \end{pmatrix} \; -1 \quad \sim \quad M_3 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \frac{a+1}{2} \\ \frac{1-a}{2} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

O sistema

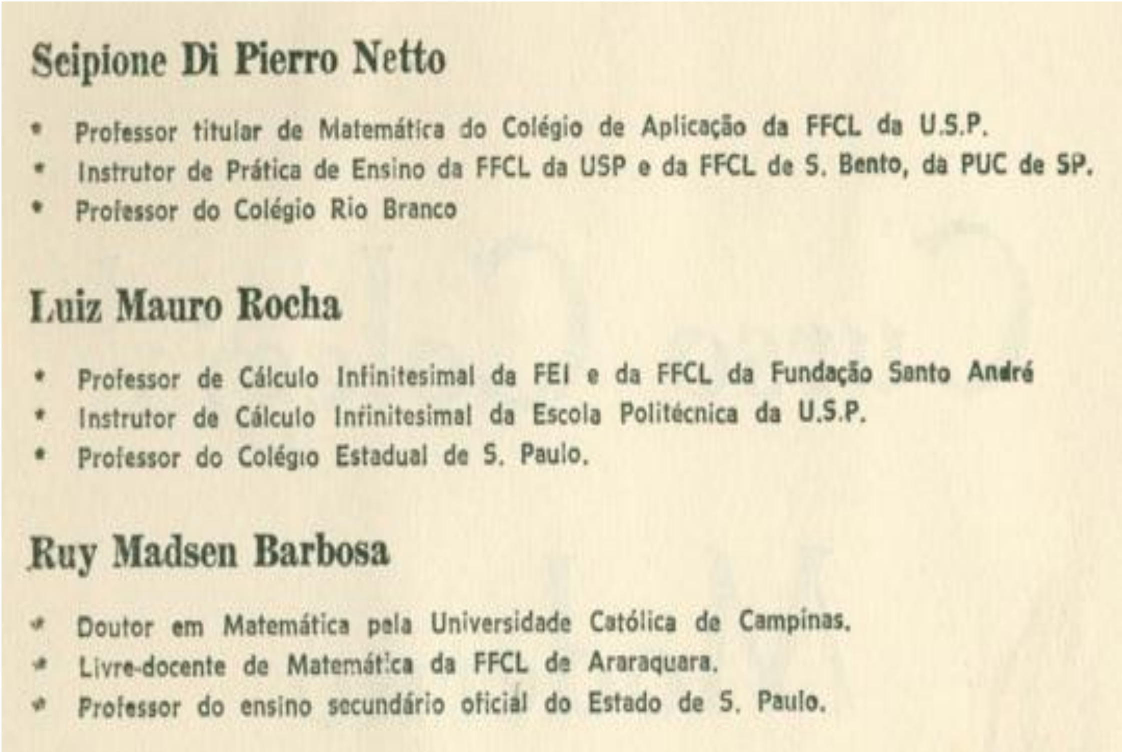
$S_3 \begin{cases} x = \dfrac{a+1}{2} \\ y = \dfrac{1-a}{2} \end{cases}$ ao qual M_3 está associada é equivalente a *S*; logo

S é possível e determinado qualquer que seja *a* e sua solução é o par $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{1-a}{2}\right)$

Figura 3.30: Exercício resolvido sobre discussão de sistemas lineares extraído do livro “Matemática: 2ª série, 2º grau”. (IEZZI, 1976, p. 91)

3.5.5 NETO, Scipione Di Pierro; ROCHA, Luiz Mauro; BARBOSA, Ruy Madsen. ***Matemática 2 - Curso Colegial Moderno***. São Paulo: IBEP, 1968.

A figura 3.31 mostra as referências dos autores apresentadas na contracapa do livro, e observa que todos eram professores do ensino secundário, indicando experiência na prática docente de tais autores neste segmento.



Scipione Di Pierro Netto

- Professor titular de Matemática do Colégio de Aplicação da FFCL da U.S.P.
- Instrutor de Prática de Ensino da FFCL da USP e da FFCL de S. Bento, da PUC de SP.
- Professor do Colégio Rio Branco

Luiz Mauro Rocha

- Professor de Cálculo Infinitesimal da FEI e da FFCL da Fundação Santo André
- Instrutor de Cálculo Infinitesimal da Escola Politécnica da U.S.P.
- Professor do Colégio Estadual de S. Paulo.

Ruy Madsen Barbosa

- Doutor em Matemática pela Universidade Católica de Campinas.
- Livre-docente de Matemática da FFCL de Araraquara.
- Professor do ensino secundário oficial do Estado de S. Paulo.

Figura 3.31: Referências dos autores na contracapa do livro "Matemática 2 - Curso Colegial Moderno". (NETO, 1968)

O professor Ruy Madsen Barbosa foi presidente do conselho executivo do GEEM e conforme já foi mencionado anteriormente, elaborou o capítulo "Introdução elementar de matrizes no curso colegial" do livro "Matemática Moderna para o ensino secundário" da autoria do GEEM.

Na apresentação da obra, é destacado que a mesma segue os propósitos de renovação do ensino de matemática realizada em outros países, além de justificar, no terceiro parágrafo, a inclusão do tópico matrizes devido a suas diversas aplicações, essencialmente a utilizada na resolução dos sistemas lineares. (Figura 3.32)

Outro elemento relevante observado na apresentação do livro é a inclusão do tópico "Estruturas" no terceiro volume desta mesma coleção, indicando a tentativa dos autores de introduzir o estudo das estruturas matemáticas que constituíram num dos pilares na renovação do ensino da matemática naquele período.

O estudo das matrizes está inserido no capítulo V da obra com os seguintes subitens: elementos das matrizes; igualdade de matrizes; matriz diagonal, escalar e transposta; operações com matrizes: adição e multiplicação de matrizes. (figura 3.33)

APRESENTAÇÃO

Neste segundo volume do nosso curso colegial, damos prosseguimento ao plano didático, de acôrdo com as modernas técnicas e tendências observadas em países e autores pioneiros na renovação no ensino da matemática.

Inicialmente, é apresentado um estudo bastante completo de seqüências, *incluindo as progressões e noções sôbre séries numéricas, com o emprêgo do símbolo somatório e do princípio de indução matemática.*

O estudo das matrizes *no curso secundário constitui novidade nos nossos programas, sendo no entanto justificável a sua introdução, em nível elementar, dadas as suas amplas aplicações, principalmente nos sistemas lineares.*

Na parte de geometria, introduzimos as primeiras noções de transformações geométricas *e na parte métrica, usamos o princípio de Cavalieri.*

No terceiro volume, completaremos o curso com os capítulos sôbre Combinatória, Binômio de Newton, Estruturas, Números Reais e Complexos, Polinômios e Equações Algébricas, Noções de Cálculo Infinitesimal *e* Geometria Analítica.

Esperamos dos estudantes e professôres a mesma acolhida que dedicaram ao 1.º volume.

As críticas, favoráveis ou contrárias, nos serão igualmente valiosas, para futura orientação.

Os Autores

S. Paulo, Janeiro de 1968.

Figura 3.32: Apresentação do livro "Matemática 2 - Curso Colegial Moderno". (NETO, 1968)

ÍNDICE

Figura 3.33: Primeira parte do índice do livro "Matemática 2 - Curso Colegial Moderno". (NETO, 1968)

Matemática — Curso Colegial Moderno — II 303

Figura 3.34: Segunda parte do índice do livro “Matemática 2 - Curso Colegial Moderno”. (NETO, 1968)

Na introdução do capítulo V que trata das matrizes, apresentada na figura abaixo, o autor destaca a importância do ensino de tal conteúdo:

44. Introdução

Aprenderemos neste capítulo um dos mais importantes ramos da Matemática, de grandes aplicações nos mais variados setores científicos, que é o estudo das Matrizes. No próprio curso colegial o aluno tomará contato com algumas das aplicações elementares.

Figura 3.35 – Introdução do capítulo "Matrizes" do livro "Matemática 2 - Curso Colegial Moderno". (NETO, 1968, p. 111)

São apresentados dois métodos de resolução dos sistemas lineares no capítulo VI (figura 3.34). O primeiro consiste na utilização de determinantes pela regra de Cramer e o segundo introduz o conceito de matriz inversa para em seguida desenvolver o processo de triangularização de matrizes.

3.5.6 LEMOS, Aluisio Andrade. ***Matemática: álgebra, geometria e trigonometria: 2º grau.*** São Paulo: Moderna, 1978.

Não aparecem referências aos autores na capa e na contracapa desta obra em "volume único". Assim, o livro pretende reunir todos os conteúdos do 2º grau em uma única obra.

Este livro apresenta no capítulo "Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares", o subtítulo "matrizes" com os seguintes itens: *definição; representação, matriz quadrada; igualdade de matrizes; adição de matrizes; diferença de matrizes; produto de um número real por uma matriz; produto de matrizes.*

Neste capítulo, a primeira seção de exercícios propostos apareceu após a apresentação dos itens *definição e representação*. A segunda seção de exercícios foi colocada para reforçar o entendimento dos itens *matriz quadrada; igualdade de matrizes; adição de matrizes; diferença de matrizes; produto de um número por uma matriz.* A última seção abordou o produto de matrizes.

A definição de *matriz inversa* não foi mencionada. Além disso, no capítulo que trata dos sistemas lineares, o livro não apresenta a resolução dos sistemas lineares através do escalonamento de matrizes e sim, pelo modo clássico no uso dos determinantes. Desta maneira, esta obra traz consigo elementos contraditórios no que diz respeito à apresentação das matrizes para o ensino secundário no período em que ela se insere. Apesar de expor toda a álgebra das matrizes e os seus diversos tipos, não é feita uma ligação deste estudo com a resolução de sistemas lineares que, por sua vez, se apoiou exclusivamente no Teorema de Cramer em seu desenvolvimento.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na primeira reformulação do ensino no Brasil ocorrido no início dos anos 1930 com a Reforma Francisco Campos, os dois anos finais do ensino secundário eram destinados aos Cursos Complementares que eram ministrados em locais anexos às faculdades de Engenharia, Medicina, Odontologia, Farmácia e Direito. Os livros destinados ao ensino de matemática neste período se fundamentavam na preparação dos estudantes a uma dessas faculdades, e eram assemelhados a apostilas preparatórias. Feita a análise dos livros nesta fase, observou-se que a abordagem das matrizes possuía um caráter meramente auxiliar em obras que desenvolveram o estudo dos determinantes e sistemas lineares. As citações sobre o tema não foram observadas em todas as obras selecionadas e, quando apareciam, se limitavam a definir *matriz quadrada, matriz do sistema e matriz retangular*.

A implementação da Reforma Capanema na década de 1940 instituiu três anos para os cursos Clássico e Científico e reorganizou a matemática escolar agrupando os tópicos de ensino em unidades didáticas. Este fato impôs aos autores dos livros didáticos que buscavam atender às novas resoluções, uma apresentação e organização diferentes dos conteúdos. A coleção de três volumes destinadas às três séries do segundo ciclo do ensino secundário conhecida como o *livro dos quatro autores*, influenciou a elaboração de outras obras para este mesmo nível de ensino neste período, conforme apontam algumas pesquisas. Reportando aos processos de constituição de uma disciplina escolar introduzidos por Chervel, os livros selecionados apresentaram o fenômeno da *vulgata* tanto na divisão dos conteúdos em unidades didáticas quanto na apresentação do tópico matrizes, cujo tema não era citado nos programas destinados às três séries. Desta forma, a investigação se concentrou nos capítulos que desenvolveram a teria dos determinantes e a resolução dos sistemas lineares que se mostraram em livros destinados à segunda série do colégio e foi verificado que as matrizes apareceram em subitens de definições tais como matriz, matriz quadrada, matrizes completa e incompleta associadas a um sistema linear e característica de uma matriz.

Assim, apesar de ter determinado diversas mudanças na organização do currículo de matemática e na concepção dos livros didáticos, as resoluções da Reforma Capanema não modificaram o lugar ocupado pelas matrizes no ensino de matemática até então, que se mostrou restrito à definições curtas e de pouca utilização no desenvolvimento da teoria dos determinantes e dos sistemas lineares.

A portaria de 1951 que regulamentou os Programas Mínimos para o ensino secundário foi uma reforma importante no que tocou os aspectos particulares de cada região do país, no que diz respeito à flexibilidade no cumprimento dos programas oficiais. No entanto, mesmo com a unificação dos currículos de matemática dos cursos clássico e científico, não foram apresentadas modificações nos conteúdos comparadas aos propostos na Reforma Capanema. A análise dos livros didáticos deste período verificou uma abordagem idêntica do tópico matrizes aos já vistos nos livros de reformas anteriores, ao situar breves definições sobre o tema nos capítulos que desenvolviam os determinantes e os sistemas lineares.

Desta maneira, o desenvolvimento do tema matrizes nos livros didáticos compreendidos nos três períodos – a Reforma Campos, a Reforma Capanema e a Portaria de 1951 – não apresentou mudanças significativas em sua abordagem, o que caracteriza uma estabilidade na exposição dos conceitos relacionados ao tópico que se restringiam a breves definições de matriz, matriz quadrada, matriz retangular, matriz diagonal, matrizes completa e incompleta de um sistema linear, refletindo o fenômeno da vulgata nestas fases. Além de ocuparem poucas páginas nos livros didáticos, as matrizes tinham importância reduzida no ensino de matemática, ou seja, não possuíam status de um tópico independente que pudesse reivindicar um espaço maior para o seu desenvolvimento.

Entretanto, a posição ocupada pelas matrizes nos livros didáticos no Brasil foi modificada substancialmente com a difusão das concepções do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no início dos anos 1960 pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM). Este grupo se formou em 1961 como um produto da iniciativa de alguns professores que conheciam as propostas modernizadoras para o ensino de matemática e tinham o objetivo de disseminá-las aos docentes em diversos meios. Um marco importante na constituição do GEEM foi o contato do professor Osvaldo Sangiorgi com as concepções modernas em cursos nos Estados Unidos proporcionados pelo School Mathematics Study Group (SMSG), que promoveram reflexões sobre os novos rumos do ensino de matemática daquele país. A partir de então, a articulação estabelecida por Sangiorgi com outros professores no Brasil impulsionou a criação do GEEM visando ampliar as reflexões sobre os caminhos da matemática escolar amparadas pelos ideais do MMM.

Além de traduzir algumas publicações do SMSG que valorizavam as concepções estruturalistas da Matemática para o ensino, o GEEM confeccionou materiais para a divulgação das novas diretrizes para o ensino de matemática. Estes manuais tinham o objetivo de fornecer uma formação crítica aos docentes, suscitando reflexões destes quanto à importância e utilização da Matemática numa sociedade científica. Nessa perspectiva, fica evidenciada a função *documental* – estabelecida por Choppin – dos livros traduzidos e/ou editados pelo GEEM.

Na publicação do SMSG, "Introdução à Álgebra das Matrizes" traduzida por Lafayette de Moraes, fica evidente a relevância imputada ao ensino de matrizes na escola secundária ao conferir a este conteúdo o status de um objeto matemático compreendido em alguma estrutura. Assim, a matriz que outrora foi considerada um elemento matemático alegórico inserido no ensino dos determinantes e dos sistemas lineares, nesta nova fase se mostrou como um conteúdo relevante tanto para a compreensão das estruturas matemáticas quanto na resolução de sistemas lineares.

As propostas apresentadas pelo GEEM para o ensino de matrizes observadas nos livros editados pelo próprio grupo se assemelhavam com as exibidas nas publicações do SMSG. No entanto, a apreensão feita pelos autores dos livros didáticos – inclusive de membros do GEEM – não tratava em suas obras alguns conceitos que valorizavam a identificação de estruturas matemáticas como, por exemplo, monóide, grupo, anel, anel abeliano etc. A ideia de *apropriação* estabelecida por Chartier é pertinente neste caso no intuito de observar que a interpretação dos conceitos contidos nas obras do SMSG e do GEEM pelos autores de livros didáticos para o colégio, foi refletida no desenvolvimento de seus conteúdos que se caracterizaram por não absorver todos os elementos da proposta original.

A introdução do ensino de matrizes no sistema educacional seguia a tendência de modernização do currículo de matemática que, por sua vez, foi resultado de amplos debates nas sociedades desenvolvidas imersas em um período de acentuado desenvolvimento científico e tecnológico. Neste panorama de avanços em várias áreas da Ciência, a matemática, e mais especificamente as matrizes, se encontravam em um patamar importante no que diz respeito às contribuições dadas às áreas do conhecimento como a mecânica quântica e a física atômica. Estes dados foram destacados em introduções e prefácios dos livros do SMSG e de outros selecionados para análise, que apontavam para o caráter "moderno" das matrizes e a urgência da sua introdução no ensino. Assim, os livros didáticos cumpriram suas funções *ideológica* e *cultural* destacadas por Choppin, ao divulgar às gerações os conteúdos e metodologias propostos pelos sistemas educacionais, demandados por fatores políticos, sociais e econômicos.

Os livros didáticos analisados que seguiram os ideais do MMM destinaram um capítulo à parte para o desenvolvimento do tópico matrizes, para em seguida, abordar os determinantes e sistemas lineares. Os conceitos de matriz inversa, matriz equivalente, e o processo de diagonalização de matrizes auxiliavam o estudo da resolução dos sistemas lineares, conferindo a este tópico uma nova dimensão didático-epistemológica em sua abordagem.

Vale ressaltar que o livro da autoria de Aluisio Lemos apesar de destinar um capítulo para as matrizes, não se utilizava destas para a resolução de sistemas lineares. Para esse fim, o livro adotou *somente* a Regra de Cramer, metodologia largamente utilizada em livros de épocas anteriores. Tal fato nos remete a Chervel quando este aponta que as características do antigo sistema (resolver sistemas usando unicamente a Regra de Cramer) coabitam com o novo já instaurado.

Assim, nesta nova fase as matrizes ocuparam um grau de relevância até então não observada em outros tempos nos livros didáticos, tanto pelo fato de se reservar um capítulo independente para o seu desenvolvimento, quanto por se constituir numa ferramenta para a resolução dos sistemas lineares. Além disso, uma nova vulgata foi estabelecida devido aos livros didáticos analisados apresentarem uma padronização no desenvolvimento do tópico matrizes, e seguirem etapas semelhantes na construção da matéria: definição de matriz, tipos de matrizes, operações, propriedades, matriz inversa.

Embora o conjunto de obras selecionado para análise tenha evidenciado o fenômeno da vulgata no desenvolvimento do tópico matrizes, não há como afirmar, a partir destes dados, que todos os livros didáticos destinados aos estudantes do colegial deste período trataram do tópico. Devido à intensa disseminação das ideias modernizadoras por diversos canais e esferas ligadas à educação, é patente inferir que uma parte significativa dos autores de livros didáticos buscou a reformulação de seus conteúdos apoiados nas novas concepções para o ensino de matemática que, por sua vez, salientavam a iminência da inclusão do tópico matrizes nos programas do colegial. No entanto, os livros didáticos que incluíram as matrizes em seu conteúdo, nem sempre deviam seguir sequências didáticas análogas na abordagem de tal tema. O livro de Aluisio Lemos desenvolve as matrizes em um capítulo à parte como outras obras analisadas do mesmo período o fazem, no entanto, as matrizes não se apresentam como ferramenta para a resolução dos sistemas lineares. Este fato proporciona o surgimento das seguintes questões que a presente investigação não oferece elementos suficientes para respondê-las: de que maneira foram apresentadas as matrizes na escola? A resolução dos sistemas lineares foi ensinada com o auxílio das matrizes?

Ao realizar uma análise histórico-educacional associado ao exame de livros didáticos do período 1930-1980, foi observado que o ensino de matrizes na escola secundária, ou o que podemos chamar hoje de Ensino Médio, atravessou um primeiro momento de estabilidade e pouca relevância na fase anterior à introdução dos ideais do Movimento da Matemática Moderna. Este quadro se modifica na etapa seguinte, a partir do início dos anos 1960, com a disseminação e apropriação das propostas modernizadoras, que se sustentavam tanto na noção de estrutura quanto no propósito em aproximar o ensino da Matemática da realidade marcada por avanços científicos e tecnológicos. Munidas destes requisitos, as matrizes se apresentaram com o status de objeto matemático cuja presença em currículos escolares e nos livros didáticos foi reivindicada pelo GEEM em congressos, cursos e materiais destinados à formação de professores. A partir de então, as matrizes ocuparam um lugar de destaque nos livros didáticos ao destinarem a este tópico um capítulo à parte, além de se apresentar como uma nova ferramenta na resolução dos sistemas lineares.

BIBLIOGRAFIA

ABDELHAY, J. *Matemática para os candidatos às escolas superiores.* Editora Científica, Rio de Janeiro, 1956.

BOULOS, P.; WATANABE, R. *Matemática - 2 º Grau* - Vol. 2. Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1976.

CAROLI, CALLIOLI, FEITOSA. *Matrizes e Sistemas Lineares*. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1971.

CARVALHO, J.B.P. et al. *Euclides Roxo e o movimento de reforma do ensino de Matemática na década de 30*. Revista brasileira de estudos pedagógicos, Brasília, v. 81, n. 199, p. 415-424, set./dez. 2000.

CARVALHO, T. M.. *Lições de Matemática*, 1938.

______. *Matemática para os cursos clássico e científico – 2º ano.* 5ª edição. Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1952.

______. *Matemática 2º Ciclo*. Fundação Getúlio Vargas, Rio de Janeiro, 1969.

CASTRO, J. E.; MAURER, W. A. *Exercícios de Matemática*, Curso Pré-Politécnico, 1942**.**

CASTRUCCI, B. et al. *Somatórios, Produtórios, Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares* – 3ª edição. Livraria Nobel S.A, São Paulo, 1976.

CHERVEL, A. (1990) *História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa*. Teoria & Educação, n.2, Porto Alegre, 1990.

CHOPPIN, A. *História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte.* Revista Educação e Pesquisa, São Paulo, v.30, n.3, p. 549-566, set./dez. 2004

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2006. 226 p. (Coleção Formação de Professores)

GEEM. *Matemática Moderna para o ensino secundário* – 2ª edição. São Paulo: USP, 1965.

IEZZI, Gelson. et al. *Matemática: 2ª série, 2º grau*. São Paulo: Atual Editora, 1976.

LEMOS, Aluisio Andrade. *Matemática: álgebra, geometria e trigonometria: 2º grau*. São Paulo: Moderna, 1978.

LIMA, G. *Pontos de Matemática*, 1938.
MAEDER, Algacyr Munhoz. *Curso de Matemática*. São Paulo: Melhoramentos, 1951.

MARQUES, A. *Tempos pré-modernos: a matemática escolar dos anos 1950*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, 2005.

MORAES, M. C. M. *Educação e Política nos Anos 30: a Presença de Francisco Campos. Revista brasileira de estudos pedagógicos*. Brasília, v.73, n. 17-4, p.291-321, maio/ago 1992.

NETO, Scipione Di Pierro; ROCHA, Luiz Mauro; BARBOSA, Ruy Madsen. *Matemática 2 - Curso Colegial Moderno*. São Paulo: IBEP, 1968.

NETTO, F. A. L. *Teoria Elementar dos Determinantes,* 1954.

NEVES, K. C. R.. *Um exemplo de transposição didática: o caso das matrizes.* Dissertação (mestrado). Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2009.

OLIVEIRA, M. M.. *As Origens da Educação no Brasil. Da hegemonia católica às primeiras tentativas de organização do ensino*. Ensaio: avaliação em políticas públicas em Educação. Rio de Janeiro, v.12, n.45, p. 945-958, out./dez. 2004.

PEIXOTO, Roberto. *Elementos de Cálculo Vetorial* – 2ª edição. Rio de Janeiro: Oscar Mano & Cia, 1940.

PINTO, Neuza Bertoni. *O Movimento da Matemática Moderna e as iniciativas de formação docente*. Anais do VIII Congresso Nacional de Educação – EDUCERE (2008).

QUINTELLA, A. *Matemática segundo ano colegial.* 10ª edição. Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1962.

RIBEIRO, D. F. C. *Dos cursos complementares aos cursos clássico e científico: a mudança na organização dos ensinos de matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, 2006.

ROXO, E. et al. *Matemática – 2º. Ciclo – cursos científico e clássico – 2ª série*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1944.

______. *Matemática – 2º. Ciclo – 1ª série*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1945.

______. *Matemática – 2º. Ciclo – 3ª série*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1946.

______. *Matemática – 2º. Ciclo – 2ª série*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1949.

______. *Matemática – 2º. Ciclo – 2ª série*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1955.

______. *Matemática – 2º. Ciclo – 1ª série*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1956a.

______. *Matemática – 2º. Ciclo – 3ª série*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1956b.

SCHUBRING, G. *O primeiro movimento internacional de reforma curricular em Matemática e o papel da Alemanha: um estudo de caso na transmissão de conceitos*. In: Zetetiké. Campinas, SP: FE/UNICAMP. Vol. 7, nº 11, 1999.

SERRÃO, A. *Análise Algébrica*, 1945.

SILVA, M. C. L. *Movimento da Matemática Moderna – possíveis leituras de uma cronologia*. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 6, n.18, p.49-63, maio./ago. 2006.

SILVA, T. T. P.. *Matrizes e suas cercanias: um estudo histórico a partir de livros didáticos de matemática*. Relatório de estudo de iniciação científica. UNESP – Bauru, 2010.

SMSG. *Matemática Curso Colegial*, Vol. 3, 1966.

SMSG. *Introdução à Álgebra das Matrizes*, 1969.

SOARES, Flávia dos Santos. *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Avanço ou Retrocesso?* Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001.

VALENTE, W. R.. *A Matemática Escolar: perspectivas históricas*. In: 2o. Congresso Luso-Brasileiro de História da Ciência e da Tecnologia, 2003, Rio de Janeiro. Anais do 2o. Congresso Luso-Brasileiro de História da Ciência e da Tecnologia, 2003.

______. *A matemática na escola: um tema para a história da educação.* In: Moreira, Darlinda; Matos, José Manuel. (Org.). HISTÓRIA DO ENSINO DA MATEMÁTICA EM PORTUGAL. 1 ed. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, v. 1, p. 21-32, 2005.

______. *História da Educação Matemática: interrogações metodológicas.* REVEMAT, v. 2, p. 28-49, 2007.

______. *Livro didático e educação matemática: uma história inseparável.* Revista Zetetiké, Campinas, v. 16, n. 30, p. 139-161, jul./dez. 2008a.

______. *Osvaldo Sangiorgi e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil.* Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 8, n. 25, p. 583-613, set./dez. 2008b.

______. *Osvaldo Sangiorgi: um best-seller para o ginásio, um fracasso editorial no colégio*. IN: FLORES, C.; ARRUDA, J. P. (orgs.) A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal - contribuição para a história da educação matemática. São Paulo: Editora Annablume, 2010a.

______. *Era uma vez o cálculo de Determinantes: tempos pré-modernos do ensino de matemática no colégio*. In: 33ª. Reunião Anual da ANPEd, 2010, Caxambu, MG. Anais da 33ª Reunião Anual da ANPEd. Rio de Janeiro : Anped, v. 1. p. 20-35, 2010b.

VALENTE, W. R.; SILVA, M. C. L.. *Na oficina do historiador da educação matemática: cadernos de alunos como fontes de pesquisa.* 1. ed. Belém: SBHMat. 2009. v.1. 74 p.